

Andreas Wielenberg

**Selbstkonsistenzgleichungen  
für erweiterte Feynman-Regeln  
in der Quantenchromodynamik**

2005



THEORETISCHE PHYSIK

**Selbstkonsistenzgleichungen  
für erweiterte Feynman-Regeln  
in der Quantenchromodynamik**

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von  
Andreas Wielenberg  
aus Wallenhorst

2005

Die vorliegende Version dieser Arbeit unterscheidet sich durch geringfügige, den Inhalt dieser Dissertation nicht beeinflussende Änderungen von der am 18.4.2005 beim Dekanat der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät eingereichten Urschrift.

|                      |                        |
|----------------------|------------------------|
| Dekan:               | Prof. Dr. H. Zacharias |
| Erster Gutachter:    | Prof. Dr. M. Stingl    |
| Zweiter Gutachter:   | Prof. Dr. G. Münster   |
| Tag der Disputation: | 27.05.2005             |
| Tag der Promotion:   | 27.05.2005             |

*„Sorgfältige Planung ist der Schlüssel  
zu einem sicheren und zügigen Reiseverlauf*

ODYSSEUS“

Robert Asprin [Asp 04]



# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Einleitung</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1 Grundlagen der QCD</b>                              | <b>5</b>  |
| 1.1 QCD als Yang-Mills-Feldtheorie . . . . .             | 5         |
| 1.1.1 Green'sche Funktionen und Feynman-Regeln . . . . . | 7         |
| 1.2 Renormierung . . . . .                               | 10        |
| 1.2.1 Die Renormierungsgruppe . . . . .                  | 11        |
| 1.2.2 Basisvertizes der QCD . . . . .                    | 13        |
| 1.3 Dyson-Schwinger-Gleichungen . . . . .                | 14        |
| 1.4 Bethe-Salpeter-Gleichungen . . . . .                 | 15        |
| 1.5 Die Operator-Produkt-Entwicklung . . . . .           | 16        |
| <b>2 Der nicht-perturbativ erweiterte Ansatz</b>         | <b>17</b> |
| 2.1 Grundlegende Ideen . . . . .                         | 17        |
| 2.2 Erweiterte Feynman-Regeln . . . . .                  | 20        |
| 2.3 Der $\Gamma_4$ -Vertex . . . . .                     | 23        |
| 2.3.1 Die Lorentz-Tensorstruktur . . . . .               | 24        |
| 2.3.2 Die Farbstruktur . . . . .                         | 25        |
| 2.3.3 Bose-symmetrische Tensorstrukturen . . . . .       | 25        |
| 2.3.4 Zur Konstruktion der erweiterten Ansätze . . . . . | 26        |
| 2.3.5 Vollständig symmetrische Parameter . . . . .       | 26        |
| 2.3.6 Mandelstam-symmetrische Parameter . . . . .        | 28        |
| 2.4 Renormierung . . . . .                               | 30        |
| 2.4.1 Renormierungsschemata . . . . .                    | 32        |
| 2.5 Schattenpole und punktierte Graphen . . . . .        | 35        |
| 2.6 Bethe-Salpeter-Gleichungen . . . . .                 | 37        |
| 2.7 Selbstkonsistenz-Gleichungen . . . . .               | 38        |
| <b>3 Resummierte DSG</b>                                 | <b>41</b> |
| 3.1 Angepasste BSG . . . . .                             | 43        |
| 3.2 DSG im gluonischen Kanal . . . . .                   | 43        |
| <b>4 BSG des <math>\Gamma_4</math>-Vertex</b>            | <b>45</b> |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>5</b> | <b>Die DSG der QCD</b>                                | <b>51</b>  |
| 5.1      | Die DSG des Gluon-Propagators . . . . .               | 51         |
| 5.2      | Die DSG des Fermion-Propagators . . . . .             | 54         |
| 5.3      | Die DSG des Geist-Propagators . . . . .               | 55         |
| 5.4      | Der 3-Gluon-Vertex . . . . .                          | 56         |
| 5.4.1    | Die Gluon-Dreiecks-Schleife . . . . .                 | 58         |
| 5.4.2    | Die tadpole-artigen Terme . . . . .                   | 60         |
| 5.4.3    | Die Geist-Dreiecks-Schleife . . . . .                 | 62         |
| 5.4.4    | Die Fermion-Dreiecks-Schleife . . . . .               | 62         |
| 5.5      | Der Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex . . . . .        | 64         |
| 5.5.1    | Die Fermion-Fermion-Gluon-Schleife . . . . .          | 64         |
| 5.6      | Der Geist-Antigeist-Gluon-Vertex . . . . .            | 65         |
| <b>6</b> | <b>Die BSG des <math>\Gamma_4</math>-Vertex</b>       | <b>67</b>  |
| 6.1      | Die BSG auf 1-Schleifen-Niveau . . . . .              | 67         |
| 6.2      | Perturbative Ergebnisse . . . . .                     | 69         |
| 6.3      | Graphen ohne $\Gamma_4$ . . . . .                     | 71         |
| 6.4      | Graphen mit $\Gamma_4$ . . . . .                      | 73         |
| 6.4.1    | Symmetrische Vertexparameter – $T_4$ . . . . .        | 73         |
| 6.4.2    | Erweiterte Strukturen – $D_4$ und $E_4$ . . . . .     | 76         |
| 6.4.3    | Mandelstam-symmetrischer $\Gamma_4$ -Vertex . . . . . | 80         |
| <b>7</b> | <b>Kondensatgleichungen</b>                           | <b>85</b>  |
| 7.1      | Propagator-Kondensate . . . . .                       | 86         |
| 7.1.1    | Gluon-Propagator . . . . .                            | 86         |
| 7.1.2    | Fermion-Propagator . . . . .                          | 90         |
| 7.1.3    | Geist-Propagator . . . . .                            | 93         |
| 7.2      | Partielle Kondensate . . . . .                        | 94         |
| 7.2.1    | $\Gamma_3$ -Vertex . . . . .                          | 94         |
| 7.2.2    | $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex . . . . .                    | 102        |
| 7.2.3    | $\tilde{\Gamma}_3$ -Vertex . . . . .                  | 106        |
| 7.3      | Volle Kondensate . . . . .                            | 106        |
| <b>8</b> | <b>Selbstkonsistenzgleichungen</b>                    | <b>107</b> |
| 8.1      | SKG der Propagatoren . . . . .                        | 107        |
| 8.1.1    | SKG des Gluon-Propagators . . . . .                   | 107        |
| 8.1.2    | SKG des Geist-Propagators . . . . .                   | 108        |
| 8.1.3    | SKG des Fermion-Propagators . . . . .                 | 109        |
| 8.2      | SKG der Vertizes . . . . .                            | 109        |
| 8.2.1    | SKG des $\Gamma_3$ -Vertex . . . . .                  | 109        |
| 8.2.2    | Die SKG des $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex . . . . .        | 112        |
| 8.3      | Die SKG für den $\Gamma_4$ -Vertex . . . . .          | 112        |
| 8.3.1    | Vollständig symmetrische Vertexparameter . . . . .    | 113        |
| 8.3.2    | Mandelstam-symmetrische Parameter . . . . .           | 117        |
| 8.4      | SKG aus den Kondensaten . . . . .                     | 118        |
| 8.4.1    | Propagator-Kondensate . . . . .                       | 118        |
| 8.4.2    | Partielles $\Gamma_3$ -Kondensat . . . . .            | 119        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 8.4.3     | Partielles $\bar{\Gamma}_3$ -Kondensat . . . . .                | 120        |
| <b>9</b>  | <b>Numerische Lösungen</b>                                      | <b>123</b> |
| 9.1       | Lösungsverfahren . . . . .                                      | 123        |
| 9.2       | Externe Parameter . . . . .                                     | 126        |
| 9.2.1     | Gluonische Theorie . . . . .                                    | 126        |
| 9.2.2     | Fermionen . . . . .   | 126        |
| 9.3       | Physikalische Randbedingungen . . . . .                         | 127        |
| 9.3.1     | Confinement . . . . .   | 128        |
| 9.3.2     | Tachyon-Freiheit . . . . .                                      | 128        |
| 9.3.3     | Reflexionspositivität . . . . .                                 | 129        |
| 9.3.4     | Bedingungen an die Parameter . . . . .                          | 129        |
| 9.4       | Implementierung . . . . .                                       | 131        |
| 9.5       | Zur Bewertung numerischer Lösungen . . . . .                    | 132        |
| 9.6       | Ergebnisse für $r = 1$ . . . . .                                | 134        |
| 9.6.1     | Rein gluonische Theorie . . . . .                               | 135        |
| 9.6.2     | SKG mit zwei Fermionen . . . . .                                | 139        |
| 9.6.3     | SKG mit vier und sechs Fermionen . . . . .                      | 142        |
| 9.6.4     | Weitere Varianten der SKG . . . . .                             | 143        |
| 9.6.5     | Zusammenfassung . . . . .                                       | 143        |
| <b>10</b> | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>                             | <b>145</b> |
| <b>A</b>  | <b>Mathematischer Anhang</b>                                    | <b>149</b> |
| A.1       | Variablenzahl . . . . .   | 149        |
| A.1.1     | Potenzsummen . . . . .  | 150        |
| A.2       | Clifford-Algebra im Euklidischen . . . . .                      | 150        |
| A.3       | Die $SU(3)$ . . . . .   | 151        |
| A.3.1     | Adjungierte Darstellung . . . . .                               | 151        |
| A.3.2     | Fundamentale Darstellung . . . . .                              | 151        |
| <b>B</b>  | <b>Impulsintegrale</b>  | <b>155</b> |
| B.1       | Tensorstrukturen . . . . .                                      | 155        |
| B.2       | Abkürzungen . . . . .   | 155        |
| B.2.1     | Kombinationen der Propagator-Parameter . . . . .                | 155        |
| B.2.2     | $\Sigma$ -Parameter . . . . .                                   | 156        |
| B.3       | Integrationsformeln . . . . .                                   | 159        |
| B.3.1     | Dimensionelle Regularisierung . . . . .                         | 159        |
| B.3.2     | Symmetrische Schleifenintegrale . . . . .                       | 160        |
| B.4       | Integrationen für den $\Gamma_4$ -Vertex . . . . .              | 163        |
| B.4.1     | Integrationstabelle I . . . . .                                 | 163        |
| B.4.2     | Permutationen . . . . .   | 163        |
| B.5       | Integrationen für den $\Gamma_3$ -Vertex . . . . .              | 165        |
| B.5.1     | Vollständig symmetrische $\Gamma_3$ -Vertex-Parameter . . . . . | 165        |
| B.5.2     | Partiell symmetrische $\Gamma_3$ -Vertex-Parameter . . . . .    | 166        |
| B.6       | Erweiterter $\Gamma_3$ -Vertex . . . . .                        | 167        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>C</b> | <b>Ergänzungen zu numerischen Lösungen</b>             | <b>169</b> |
| C.1      | $\Lambda$ -skalierte Strom-Massen . . . . .            | 169        |
| C.2      | Transformationen für skalenfreie SKG . . . . .         | 170        |
| C.3      | Bewertungsschema für numerische Lösungen . . . . .     | 170        |
| C.4      | Parametersätze . . . . .                               | 172        |
| C.4.1    | Rein gluonische Theorie . . . . .                      | 172        |
| C.4.2    | Zwei Fermionen . . . . .                               | 177        |
| <b>D</b> | <b>Bethe-Salpeter-Gleichungen</b>                      | <b>179</b> |
| <b>E</b> | <b>Ergebnisse für den <math>\Gamma_4</math>-Vertex</b> | <b>183</b> |
| E.1      | Symmetrische Parameter . . . . .                       | 183        |
| E.1.1    | $\Gamma_4\Gamma_4$ -Schleife . . . . .                 | 183        |
| E.1.2    | $\Gamma_4\Gamma_3\Gamma_3$ -Schleife . . . . .         | 184        |
| E.2      | Mandelstam-symmetrische Parameter . . . . .            | 185        |
| E.2.1    | $\Gamma_4\Gamma_4$ -Schleife . . . . .                 | 185        |
| E.2.2    | $\Gamma_4\Gamma_3\Gamma_3$ -Schleife . . . . .         | 187        |
| E.2.3    | Symmetrie der $\Sigma$ -Parameter . . . . .            | 188        |
| E.2.4    | $\Omega$ -Parameter . . . . .                          | 190        |
| E.3      | Nebenbedingungen . . . . .                             | 191        |
| E.3.1    | Symmetrische Parameter . . . . .                       | 191        |
| E.3.2    | Mandelstam-symmetrische Parameter . . . . .            | 192        |
| <b>F</b> | <b>Selbstkonsistenzgleichungen</b>                     | <b>193</b> |
| F.1      | Residuenbildung und Koeffizientenvergleich . . . . .   | 193        |
| <b>G</b> | <b>Partialbruchzerlegungen</b>                         | <b>195</b> |
| G.1      | Rücknahme der PBZ ohne Insertionen . . . . .           | 195        |
| G.2      | Rücknahme der PBZ mit Insertionen . . . . .            | 196        |
| G.2.1    | Allgemeine Betrachtungen . . . . .                     | 197        |
| G.2.2    | Rücknahme für kleine $r$ . . . . .                     | 198        |
| <b>H</b> | <b>Die DSG für den <math>\Gamma_4</math>-Vertex</b>    | <b>205</b> |
| <b>I</b> | <b>Perturbative Renormierungskonstanten</b>            | <b>207</b> |
|          | <b>Literaturverzeichnis</b>                            | <b>209</b> |
|          | <b>Abkürzungsverzeichnis</b>                           | <b>215</b> |
|          | <b>Schlusswort</b>                                     | <b>217</b> |
|          | <b>Lebenslauf</b>                                      | <b>219</b> |

# Einleitung

Solange man sich nicht auf die Ebene der Stringtheorie begibt, sind Quarks die fundamentalen Bausteine der Atomkerne. Die Quantenchromodynamik (QCD) ist die quantenfeldtheoretische Beschreibung der durch Gluonen vermittelten starken Wechselwirkung zwischen den Quarks. Als solche ist sie seit der Entdeckung der asymptotischen Freiheit von Yang-Mills-Theorien durch Gross und Wilczek [GW 73] und Politzer [Pol 73] allgemein akzeptiert und zu einem Bestandteil des so genannten Standardmodells der Elementarteilchenphysik geworden. Im Rahmen der QCD können wichtige Eigenschaften der starken Wechselwirkung erklärt werden. Dabei bewährt sich die QCD vor allem in den Bereichen hoher Energien (im sogenannten UV-Bereich), da sie sich dort erfolgreich mit störungstheoretischen Methoden behandeln lässt. Dennoch gibt es mindestens zwei wichtige ungelöste Probleme.

Wegen der asymptotischen Freiheit wächst die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung bei mittleren und niedrigen Energien (im sogenannten Infrarot-Bereich) so stark an, dass die klassische Störungstheorie keine verlässlichen Ergebnisse mehr liefert. Daher ist es bislang nicht gelungen, die experimentell sehr gut bekannten gebundenen Zustände der Quarks (also Hadronen und Mesonen) aus der QCD mit guter Genauigkeit analytisch abzuleiten. Ebenso wenig sind allgemeine Streuquerschnitte bei niedrigen Energien in einer Genauigkeit reproduzierbar, wie dies etwa für die QED möglich ist. Für diese Zwecke muss man in der Regel auf empirische oder semi-empirische Theorien (z.B. das Parton-Modell [LP 96b]) zurückgreifen.

Das zweite Problem betrifft das sogenannte *Confinement*. Die empirischen Ergebnisse belegen eindeutig, dass weder Gluonen noch Quarks als asymptotisch freie Teilchen existieren können. Auf der Ebene der Feynman-Regeln, also in störungstheoretischer Behandlung, gelingt jedoch keine Beschreibung des Confinements.

Sowohl die Bindungszustände der QCD als auch das Phänomen des dynamischen Confinements kann man mit den Green'schen Funktionen der QCD beschreiben. Diese können wiederum als Lösungen der Dyson-Schwinger-Gleichungen (DSG) bestimmt werden. Ebenso wichtig, vor allem für die Bestimmung von Bindungszuständen in einem relativistischen Formalismus, sind die Bethe-Salpeter-Gleichungen (BSG), die ebenfalls Relationen zwischen den Green'schen Funktionen vermitteln.

In dieser Arbeit versuchen wir verbesserte Lösungen für die Green'schen Funktionen zu erhalten. Dazu muss man einen Mechanismus finden, der auch die Beiträge jenseits der konventionellen Störungstheorie beschreiben kann. We-

sentlich hierfür ist die Beobachtung, dass die spontane Massenskala der QCD,  $\Lambda$ , nichtanalytisch in der Kopplung  $\tilde{g}^2$  ist. Daher kann man Terme proportional zu  $\Lambda$  in einer klassischen Behandlung störungstheoretisch nicht erhalten. In dem von M. Stingl vorgeschlagenen Verfahren mit *nicht-perturbativ erweiterten Feynman-Regeln* [Sti 96] werden deshalb die Vertizes der nullten *perturbativen* Ordnung systematisch mit rationalen Approximanten in den Impulsen und der spontanen Massenskala  $\Lambda$  versehen. Über das System der DSG für die Green'schen Funktionen lassen sich dann für jede Approximationsstufe  $r$  mit den Mitteln der Störungstheorie die restlichen Vertizes höherer quasiperturbativer Ordnung bestimmen, so dass man die charakteristische Doppelentwicklung mit einer sogenannten *nicht-perturbativen Richtung* (den Potenzen von  $\Lambda$  festgelegt durch den Approximationsgrad  $r$ ) und einer sogenannten *perturbativen Richtung* (den Potenzen von  $\tilde{g}^2$ ) erhält. An dieser Stelle ist die Existenz des sogenannten  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus [Sti 96] von entscheidender Bedeutung. Durch diesen lassen sich Terme, die bei oberflächlicher Betrachtung der DSG von der Ordnung  $\tilde{g}^2$  zu sein scheinen, als Terme der nullten perturbativen Ordnung ( $\mathcal{O}(\tilde{g}^0)$ ) identifizieren. Dadurch entsteht für die nullte perturbative Ordnung ein Selbstkonsistenzproblem für die Parameter des erweiterten Ansatzes. Es bleibt strikt auf die Ansätze für die sieben oberflächlich divergenten Basisvertizes der QCD beschränkt und kann ohne Rückgriff auf empirische Daten gelöst werden. Bei massiven Fermionen benötigt man lediglich die sogenannten *Strom-Massen* der Quarks. Alle anderen Vertizes (und damit die Green'schen Funktionen) lassen sich über die DSG bzw. BSG bestimmen.

Dabei können wir auf die Arbeiten von Driesen [Dri 97] und Kuhrs [Kuh 97] aufbauen, die die Selbstkonsistenzgleichungen (SKG) der QCD bereits einer ersten Untersuchung unterzogen haben. Im Unterschied zu den Vorgängerarbeiten werden wir für die Bestimmung der SKG aus den DSG grundsätzlich die in [Wie 01a] bewiesene Bethe-Salpeter-resummierte Form verwenden und sämtliche Resultate – insbesondere auch die SKG – für allgemeinen nicht-perturbativen Approximationsgrad  $r$  formulieren. Außerdem werden wir zur Bestimmung der SKG für den 4-Gluon-Vertex die zugehörige BSG verwenden. Diese erlaubt schon auf 1-Schleifen-Niveau die Betrachtung von Beiträgen, die in den Parametern des 4-Gluon-Vertex *nichtlinear* sind, und trägt daher dieser fundamentalen Eigenschaft des Selbstkonsistenzproblems besser Rechnung. Die Bestimmung der numerischen Lösungen erfolgt erstmals durch simultane Minimierung der SKG bezüglich aller nicht-perturbativen Parameter.

Das erste Kapitel stellt die für diese Arbeit wesentlichen Techniken und Konzepte der QCD als euklidische Feldtheorie vor. Es bereitet damit die in Kapitel 2 folgende Diskussion der Grundlagen des erweiterten Ansatzes für die Feynman-Regeln der QCD vor. Hier formulieren wir die erweiterten Feynman-Regeln. Insbesondere geben wir einen systematischen Ansatz für den 4-Gluon-Vertex in allgemeiner Approximationsstufe an. Darüber hinaus entwickeln wir ein modifiziertes Renormierungsschema für den erweiterten Ansatz, das die Erhaltung des perturbativen Limes für die erweiterten Feynman-Regeln als nicht zwingend erscheinen lässt.

Das dritte Kapitel behandelt kurz die Resummation der DSG durch die zugehörige, passend modifizierte BSG. Auf diese Art erhält man eine Formu-

lierung der DSG, die besser an die fundamentalen Symmetrien der Basisvertizes angepasst ist. Da diese Resummation einer verallgemeinerten *Leading-Log*-Resummation der Störungsreihe entspricht, ermöglicht sie eine verbesserte Beschreibung der nicht-perturbativen Terme schon in niedriger Schleifenordnung. In Kapitel 4 leiten wir eine BSG für den 4-Gluon-Vertex her, die dann zur Berechnung von SKG genutzt wird. Dies ermöglicht es, auf die DSG des 4-Gluon-Vertex zu verzichten.

Kapitel 5 ist der Bestimmung der führenden Divergenzen für die 1-Schleifen-Graphen der resummierten DSG gewidmet. Insbesondere wird hier erstmals die resummierte DSG des 3-Gluon-Vertex für allgemeinen Approximationsgrad  $r$  berechnet. Kapitel 6 behandelt die in Kapitel 4 hergeleitete BSG für den 4-Gluon-Vertex auf 1-Schleifen-Niveau. Dazu werden die führenden Divergenzen sämtlicher 1-Schleifen-Graphen aus der BSG bestimmt. Dabei werden insbesondere die drei in dieser Arbeit untersuchten Möglichkeiten zur Definition eines erweiterten Ansatzes für den 4-Gluon-Vertex berücksichtigt.

In Kapitel 7 definieren wir die Bewegungsgleichungskondensate (BGK) als Resultat einer der Operator-Produkt-Entwicklung (OPE) entsprechenden Betrachtung der DSG an *einem* Ort. Für die Propagator-Kondensate entspricht dies den schon in früheren Arbeiten betrachteten Kondensatgleichungen [Str 96, Dri 97, Ewe 04], die von uns jedoch erstmals in 2-Schleifen-Ordnung berechnet werden und daher ohne Rückgriff auf experimentelle Ergebnisse ausgewertet werden können. Für die 3-Punkt-Vertizes definieren wir die *partiellen Kondensate* der Bewegungsgleichungen und geben für die 3-Punkt-Vertizes die Ergebnisse der Schleifenrechnungen an.

Kapitel 8 führt die in den vorhergehenden drei Kapiteln vorgenommenen Schleifenrechnungen zusammen und definiert die SKG für die erweiterten Ansätze. Diese werden hier für die QCD erstmals in allgemeiner Approximationsstufe  $r$  aufgestellt. Zugleich formulieren wir in diesem Kapitel die Nebenbedingungen die sich aus den Symmetrien und Beschränkungen der gewählten Ansätze für die erweiterten Feynman-Regeln ergeben.

In Kapitel 9 widmen wir uns den numerischen Lösungen für die SKG. Dabei legen wir besonderen Wert auf die Formulierung physikalischer Randbedingungen an die erhaltenen Lösungen wie Confinement und Reflexionspositivität. Anschließend diskutieren wir die Eigenschaften der erhaltenen Lösungen und betrachten die Frage, ob sich überhaupt Lösungen der SKG finden lassen, die allen Kriterien genügen. Darüber hinaus präsentieren wir die von uns gefundenen besten Lösungen für verschiedene Definitionen der SKG.

Im letzten Kapitel fassen wir die Ergebnisse dieser Arbeit noch einmal zusammen und versuchen Wege aufzuzeigen, wie man die in dieser Arbeit identifizierten Probleme bei der Bestimmung von physikalisch zulässigen Lösungen der SKG beheben könnte. Dazu stellen wir kurz einen modifizierten Ansatz für den Fermion-Propagator vor und diskutieren die Möglichkeiten, den Ansatz für den 3-Gluon-Vertex zu erweitern.

Im Anhang findet sich unter anderem eine umfangreiche Formelsammlung für die Kontraktion der für diese Arbeit relevanten Farb-Tensoren aus der Darstellungstheorie der  $SU(3)$ . Ein weiterer Abschnitt ist den für diese Arbeit wichtigen Kontraktionen von Lorentz-Tensoren und der Berechnung der divergen-

ten Anteile von Impulsintegralen gewidmet. Hier zeigen wir unter anderem, wie man durch geschickte Parametrisierung der Schleifenintegrale eine explizite Feynman-Parametrisierung umgehen und so die gesuchten Ergebnisse einfacher erhalten kann. Darüber hinaus befindet sich dort eine Formelsammlung zur Rücknahme der Partialbruchzerlegungen. Hier wird insbesondere auch der für die resummierten DSG wichtige Fall der modifizierten Polstruktur behandelt. Für niedrige Approximationsstufen werden explizite Formeln angegeben.

# Kapitel 1

## Grundlagen der QCD

In diesem Kapitel geben wir einen kurzen Überblick über die wesentlichen Ideen und Definitionen der QCD, so wie wir sie in dieser Arbeit benötigen werden. Für die Beweise der referierten Ergebnisse und weitergehende Erläuterungen existiert eine umfangreiche Literatur, z.B. [IZ 80, Ram 81, Mut 87, Wei 96, Kug 97, Zin 02].

### 1.1 QCD als Yang-Mills-Feldtheorie

Wir definieren die QCD als euklidische Feldtheorie<sup>1</sup> über dem  $\mathcal{E}^4$  mit nicht-abelscher Symmetriegruppe  $SU(3)$  und minimaler Kopplung zur Beschreibung der starken Wechselwirkung (Farbkraft) zwischen Quarks. Die Lagrangedichte lautet dann

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_{EF} + \mathcal{L}_{FP} \quad (1.1)$$

mit den folgenden einzelnen Beiträgen

$$\mathcal{L}_F = \sum_f \bar{\Psi}_f^i (\gamma^\mu (D_\mu)^{ij} - m_f \delta^{ij}) \Psi_f^j \quad , \quad (1.2)$$

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \quad , \quad (1.3)$$

$$\mathcal{L}_{EF} = \frac{1}{2\xi} \sum_a (\partial_\mu A_\mu^a)^2 \quad , \quad (1.4)$$

$$\mathcal{L}_{FP} = (\partial_\mu \bar{c}^a) D_\mu^{ab} c^b \quad . \quad (1.5)$$

Hierbei sind die  $\Psi_f^i$  die grassmannwertigen Fermion-Felder in der Fundamentaldarstellung der  $SU(3)$ . Mit dem Index  $f$  werden die unterschiedlichen Quarksorten, die sogenannten *Flavours*, durchnummeriert und die  $m_f$  stehen für die zugeordneten Strommassen. Die eichkovariante Ableitung in  $\mathcal{L}_F$  ist

$$D_\mu = \partial_\mu - g T^a A_\mu^a \quad , \quad (1.6)$$

wobei die  $T^a$  die Generatoren der Lie-Algebra in der fundamentalen Darstellung der  $SU(3)$  und die  $A_\mu^a$  die lokalen Vektorfelder über dem Hilbertraum der QCD

---

<sup>1</sup>Dabei arbeiten wir in natürlichen Einheiten ( $c = \hbar = 1$ ).

sind. Letztere werden als Austauschfeld der starken (Farb-) Wechselwirkung, also als Gluon-Feld, interpretiert.  $\mathcal{L}_F$  ist daher die fermionische Lagrangedichte. Die Feldstärketensoren (in adjungierter Darstellung)

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.7)$$

erlauben die einfache Notation der Selbstwechselwirkung und der kinetischen Energie des Feldes in  $\mathcal{L}_E$ . Die beiden folgenden Terme dienen der Einschränkung des Hilbertraums auf seinen physikalischen Anteil: Der Eichfixierungsterm  $\mathcal{L}_{EF}$  führt den Eich-Parameter  $\xi$  ein, der frei wählbar ist, wobei Messgrößen unabhängig von  $\xi$  sein müssen. In dieser Arbeit wird zur rechentechnischen Vereinfachung die Landau-Eichung ( $\xi = 0$ ) verwendet.<sup>2</sup> Der Fadeev-Popov-Term führt die grassmannwertigen Geist-Felder ein, die weitere unphysikalische Freiheitsgrade beseitigen sollen und keine physikalisch detektierbaren Teilchen beschreiben. Obwohl die Geist-Felder skalare Felder sind, genügen sie dennoch der Fermi-Statistik. Sie lassen sich auch als Folge der *BRS-Transformation* [Kug 97, HT 92] verstehen. Diese ist ein Resultat der lokalen Eichsymmetrien und ermöglicht die kanonische Quantisierung der QCD im Operatorformalismus und damit die Festlegung des physikalischen Teils des Hilbertraums. Der Vollständigkeit halber sei die BRS-Transformation hier kurz angegeben.

$$\delta_B A_\mu^a = \lambda D_\mu^{ab} c^b \quad (1.8)$$

$$\delta_B \Psi^i = i\lambda g (T^a)^i_j c^a \Psi^j \quad (1.9)$$

$$\delta_B \bar{c}^a = i\lambda \frac{1}{\xi} \partial^\mu A_\mu^a \quad (1.10)$$

$$\delta_B c^a = -\frac{1}{2} \lambda g f^{abc} c^b \bar{c}^c \quad (1.11)$$

Dabei ist  $\lambda$  eine grassmannwertige Konstante. Die BRS-Transformation ist nilpotent, d.h.  $\delta_B \delta_B = 0$ . Sie ist eine wesentliche Voraussetzung für die *Kugo-Ojima-Bedingung* [Kug 97, AS 01]. Diese liefert eine Beschreibung des Farb-Confinements, d.h. der Identifikation der physikalisch detektierbaren Zustände mit den Farb-Singulett-Zuständen.<sup>3</sup>

Wir definieren jetzt die euklidische Wirkung

$$S_E = \int d^D x \mathcal{L} \quad (1.12)$$

und das Quellenfunktional<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} & j_E[A, \bar{c}, c, \bar{\Psi}, \Psi; J, J_{\bar{c}}, J_c, \eta, \bar{\eta}] \\ &= \int d^D x \left( A \cdot J + \bar{c} \cdot J_{\bar{c}} + \bar{J}_c \cdot c + \sum_f \bar{\Psi}_f \cdot \eta_f + \bar{\eta}_f \cdot \Psi_f \right) . \end{aligned} \quad (1.13)$$

<sup>2</sup>Der wesentliche Vorteil der Landau-Eichung ist, dass der Gluon-Propagator transversal wird und man daher nur Ansätze für den transversalen Teil der später definierten Vertizes benötigt.

<sup>3</sup>Dies ist zu unterscheiden von einer dynamischen Beschreibung des Confinements über die Pole von Propagatoren.

<sup>4</sup>Das Skalarprodukt in (1.13) ist als Summation über die den jeweiligen Feldern und Quellen zugeordneten Farb- und Lorentzindizes zu lesen.

Damit schreibt sich das erzeugende Funktional der euklidischen Korrelationsfunktionen,  $Z_E$ , als

$$\begin{aligned} & Z_E[J, \bar{J}_c, J_{\bar{c}}, \eta, \bar{\eta}] \\ &= N \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \{ -S_E + j_E \} \end{aligned} \quad (1.14)$$

mit  $N$  derart, dass

$$Z_E[0, 0, 0, 0, 0] = 1 \quad . \quad (1.15)$$

Zur Untersuchung der Divergenzstruktur der Theorie sind die 1-Teilchen-reduziblen (1PI) Vertexfunktionen wichtig [Dri 97, Kuh 97, DKS 99]. Um diese zu erhalten, definiert man zunächst das Funktional der zusammenhängenden (*connected*) Green'schen Funktionen

$$W_E[J, \bar{J}_c, J_{\bar{c}}, \eta, \bar{\eta}] = \ln Z_E \quad . \quad (1.16)$$

Die effektiven Felder entstehen durch funktionales Ableiten nach den Quellen, also z.B.

$$\hat{A} = \frac{\delta}{\delta J} W[J, \bar{J}_c, J_{\bar{c}}, \eta, \bar{\eta}] \quad , \quad (1.17)$$

und mit einer Legendre-Transformation gelangt man zum gesuchten erzeugenden Funktional

$$\Gamma_E[\hat{A}, \hat{\bar{c}}, \hat{c}, \hat{\Psi}, \hat{\bar{\Psi}}] = W_E - j_E[\hat{A}, \hat{\bar{c}}, \hat{c}, \hat{\Psi}, \hat{\bar{\Psi}}; \dots] \quad . \quad (1.18)$$

Dadurch werden die zusammenhängenden, trunkierten<sup>5</sup> und 1PI Green'schen Funktionen  $G^{ct}$ , die sogenannten *eigentlichen Vertexfunktionen*, erzeugt. Formal gilt der folgende Zusammenhang.

$$G_{n_1 \dots n_5}^{ct} = \frac{\delta^n \Gamma_E}{\delta^{n_1} \hat{A} \delta^{n_2} \hat{\bar{c}} \delta^{n_3} \hat{c} \delta^{n_4} \hat{\Psi} \delta^{n_5} \hat{\bar{\Psi}}} \quad (1.19)$$

Die  $G^{ct}$  gehen als Vertexfunktionen  $\Gamma_i$  bzw.  $T_i$  in die im folgenden Abschnitt definierten Feynman-Regeln ein [Mut 87, Kug 97].

### 1.1.1 Green'sche Funktionen und Feynman-Regeln

Für Berechnungen der Divergenzstruktur nutzt man meist die Impulsraum-Darstellung. An der so transformierten Wirkung können die Basis-Vertizes abgelesen werden, wobei die Impulsabhängigkeit der Vertizes und Felder nicht notiert wurde und selbstverständlich die Einsteinkonvention gilt.<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} & S_E[A, \bar{c}, c, \bar{\Psi}, \Psi] \\ &= -\frac{1}{2} \int \bar{d}^D p_1 \bar{d}^D p_2 (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_2) \Gamma_{2a_1 a_2}^{p\mu_1 \mu_2} A_{a_1}^{\mu_1} A_{a_2}^{\mu_2} \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Eine trunkierte Green'sche Funktion entsteht durch die Entfernung aller Propagatoren auf den *externen* Linien [Mut 87].

<sup>6</sup>Wir nutzen, wie auch im Rest dieser Arbeit, die Konvention  $\bar{d} = \frac{d}{2\pi}$  und setzen eine dimensionelle Regularisierung voraus.

$$\begin{aligned}
& - \int \bar{d}^D p_1 \bar{d}^D p_2 (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_2) \tilde{\Gamma}_{2a_1 a_2}^p \bar{c}_{a_1} c_{a_2} \\
& - \sum_f \int \bar{d}^D p_1 \bar{d}^D p_2 (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_2) \bar{\Psi}_f^i \bar{\Gamma}_{2f}^{p ij} \Psi_f^j \\
& + \frac{1}{3!} g_0 \nu_0^\epsilon \int \prod_{l=1}^3 \bar{d}^D p_l (2\pi)^D \delta^D\left(\sum_{l=1}^3 p_l\right) \Gamma_{3a_1 a_2 a_3}^{p \mu_1 \mu_2 \mu_3} A_{a_1}^{\mu_1} A_{a_2}^{\mu_2} A_{a_3}^{\mu_3} \\
& + g_0 \nu_0^\epsilon \int \prod_{l=1}^3 \bar{d}^D p_l (2\pi)^D \delta^D\left(\sum_{l=1}^3 p_l\right) \tilde{\Gamma}_{3a_1 a_2 a_3}^{p \mu_3} \bar{c}_{a_1} c_{a_2} A_{a_3}^{\mu_3} \\
& + g_0 \nu_0^\epsilon \sum_f \int \prod_{l=1}^3 \bar{d}^D p_l (2\pi)^D \delta^D\left(\sum_{l=1}^3 p_l\right) \bar{\Psi}_f^i \bar{\Gamma}_{3f a_3}^{p ij \mu_3} \Psi_f^j A_{a_3}^{\mu_3} \\
& + \frac{1}{4!} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int \prod_{l=1}^4 \bar{d}^D p_l (2\pi)^D \delta^D\left(\sum_{l=1}^4 p_l\right) \Gamma_{4a_1 a_2 a_3 a_4}^{p \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} A_{a_1}^{\mu_1} A_{a_2}^{\mu_2} A_{a_3}^{\mu_3} A_{a_4}^{\mu_4}
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Daraus lassen sich die Propagatoren und die anderen zusammenhängenden Green'schen Funktionen ableiten.

$$\left. \frac{\delta^2 W_E[J, \bar{J}_c, \bar{J}_c, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_{a_2}^{\nu_2}(p_2) \delta J_{a_1}^{\nu_1}(p_1)} \right|_0 = (2\pi)^{-D} \delta^D(p_1 + p_2) D_{a_1 a_2}^{\nu_1 \nu_2}(p_1, p_2) \tag{1.21}$$

$$\left. \frac{\delta^2 W_E[J, \bar{J}_c, \bar{J}_c, \eta, \bar{\eta}]}{\delta \bar{J}_{c a_2}(p_2) \delta \bar{J}_{c a_1}(p_1)} \right|_0 = (2\pi)^{-D} \delta^D(p_1 + p_2) \tilde{D}_{a_1 a_2}(p_1, p_2) \tag{1.22}$$

$$\left. \frac{\delta^2 W_E[J, \bar{J}_c, \bar{J}_c, \eta, \bar{\eta}]}{\delta \eta_f^{i_2}(p_2) \delta \bar{\eta}_f^{i_1}(p_1)} \right|_0 = (2\pi)^{-D} \delta^D(p_1 + p_2) S_f^{i_1 i_2}(p_1, p_2) \tag{1.23}$$

Die 1PI Vertizes entstehen aus den Green'schen Funktionen durch Entfernung von 1PR-Termen und Amputation der äußeren Propagatoren. Diese sind wiederum als das negative Inverse des 2-Punkt-Vertex definiert, also z.B.

$$G_2^c(p_1, p_2) = D(p_1, p_2) = - [\Gamma_2(p_1, p_2)]^{-1} \tag{1.24}$$

und

$$G_3^c(p_1, p_2, p_3) = \tilde{g} D(p_1) D(p_2) D(p_3) \Gamma_3(p_1, p_2, p_3) \tag{1.25}$$

Bei Berechnungen von Streuamplituden wird in der Regel die Störungsrechnung benutzt, d.h. die Entwicklung nach Potenzen der Kopplungskonstanten. Die dabei auftretenden Integrale werden durch graphische Ersetzungsregeln dargestellt, die sogenannten Feynman-Graphen [Mut 87, Wei 95]. Wir notieren kurz die perturbativen Feynman-Regeln und ihre graphische Darstellung.

- Der Fermion-Propagator<sup>7</sup>

$$S_f^{p ij}(p) = \delta^{ij} \frac{1}{\not{p} + \hat{m}_f} = \begin{array}{c} i \quad j \\ \bullet \longleftarrow \bullet \end{array} \tag{1.26}$$

<sup>7</sup>Die Fermionmasse im Propagator ist eigentlich matrixwertig. Da es aber keinen Anlass zu Verwechslungen gibt, können wir auf das vollständige  $\hat{m}_f \cdot \mathbf{1}$  verzichten.

- Der Gluon-Propagator

$$\begin{aligned}
 D_{a_1 a_2}^{p \mu_1 \mu_2}(p) &= \delta_{a_1 a_2} \left[ \delta^{\mu_1 \mu_2} - (1 - \xi) \frac{p^{\mu_1} p^{\mu_2}}{p^2} \right] \frac{1}{p^2} \\
 &= \begin{array}{c} \mu_1, a_1 \\ \mu_2, a_2 \\ \text{---} \end{array} \quad (1.27)
 \end{aligned}$$

- Der Geist-Propagator

$$\tilde{D}_{a_1 a_2}^p(p) = -\delta^{a_1 a_2} \frac{1}{p^2} = \begin{array}{c} a_1 \\ \text{---} \leftarrow \text{---} \\ a_2 \end{array} \quad (1.28)$$

- Der 3-Gluon-Vertex

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{3 a_1 a_2 a_3}^{p \mu_1 \mu_2 \mu_3}(p_1, p_2, p_3) &= i f_{a_1 a_2 a_3} (\delta^{\mu_1 \mu_2} (p_1 - p_2)^{\mu_3} + \delta^{\mu_2 \mu_3} (p_2 - p_3)^{\mu_1} \\
 &\quad + \delta^{\mu_3 \mu_1} (p_3 - p_1)^{\mu_2}) \\
 &= \begin{array}{c} \mu_3, a_3 \\ \text{---} \\ \mu_1, a_1 \\ \mu_2, a_2 \end{array} \quad (1.29)
 \end{aligned}$$

- Der Fermion-Gluon-Vertex

$$\bar{\Gamma}_{3 a_3}^{p i j \mu_3} = T_{ij}^{a_3} \gamma^{\mu_3} = \begin{array}{c} \mu_3, a_3 \\ \text{---} \\ i \\ j \end{array} \quad (1.30)$$

- Der Geist-Gluon-Vertex

$$\tilde{\Gamma}_{3 a_1 a_2 a_3}^p(p) = i f_{a_1 a_2 a_3} p^{\mu_3} = \begin{array}{c} \mu_3, a_3 \\ \text{---} \\ \vec{p}, a_1 \\ a_2 \end{array} \quad (1.31)$$

- Der 4-Gluon-Vertex

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{4 a_1 a_2 a_3 a_4}^{p \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= f_{a_1 a_2, a_3 a_4} (\delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4}) \\
 &\quad + f_{a_1 a_3, a_4 a_2} (\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} - \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3}) \\
 &\quad + f_{a_1 a_4, a_2 a_3} (\delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} - \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4}) \\
 &= \begin{array}{c} \mu_1, a_1 \\ \mu_4, a_4 \\ \text{---} \\ \mu_2, a_2 \\ \mu_3, a_3 \end{array} \quad (1.32)
 \end{aligned}$$

## 1.2 Renormierung

Bei der Berechnung von Amplituden mit der QCD treten im Allgemeinen divergente Integrale auf, die sich bei Verwendung der Feynman-Regeln als Schleifengraphen manifestieren. Diese werden zunächst regularisiert, d.h. ihnen werden konvergente Werte zugeordnet und der divergente Anteil mathematisch fassbar gemacht. Wir nutzen dazu die dimensionelle Regularisierung [tHV 72, Mut 87, Zin 02]. Für die Dimension setzen wir

$$D = 4 - 2\epsilon \quad . \quad (1.33)$$

Damit kann man zur Auswertung (divergenter) Impulsintegrale die Formel

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{2m}}{(q^2 + K^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 + m)\Gamma(n - m - D/2)}{\Gamma(D/2)\Gamma(n)} (K^2)^{m-n+D/2} \quad (1.34)$$

verwenden und die folgende Entwicklung der  $\Gamma$ -Funktion benutzen.

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + O(\epsilon) \quad (1.35)$$

Danach müssen die so fassbar gemachten Divergenzen aus der Theorie entfernt werden. Dazu kann man entweder eine multiplikative Renormierung der Felder und Kopplungen durchführen oder Gegenterme in die Lagrangedichte einführen, die die Divergenzen subtrahieren. Da diese Verfahren für renormierbare Theorien äquivalent sind [Kug 97], werden sie meist parallel genutzt. Wir geben hier kurz die Renormierung der Felder und Kopplungen an.

$$A_\mu^a = (Z_3)^{1/2} A_{r\mu}^a \quad (1.36)$$

$$c^a = (\tilde{Z}_3)^{1/2} c_r^a \quad (1.37)$$

$$\Psi^i = (\bar{Z}_{2F})^{1/2} \Psi_r^i \quad (1.38)$$

$$g_0 = Z_g g_r \quad (1.39)$$

$$\xi = Z_3 \xi_r \quad (1.40)$$

$$m_f = Z_m m_r \quad (1.41)$$

Diese kombinieren sich zu weiteren Renormierungskonstanten für die Wechselwirkungs-Vertizes.

$$Z_1 = Z_g (Z_3)^{3/2} \quad (1.42)$$

$$\tilde{Z}_1 = Z_g \tilde{Z}_3 (Z_3)^{1/2} \quad (1.43)$$

$$\bar{Z}_{1F} = Z_g \bar{Z}_{2F} (Z_3)^{1/2} \quad (1.44)$$

$$Z_4 = (Z_g)^2 (Z_3)^2 \quad (1.45)$$

Dabei gehen wir – wie schon bei der Formulierung der Wirkung im Impulsraum – davon aus, dass die Kopplungskonstanten für die einzelnen Vertizes identisch sind und demzufolge auch mit einer gemeinsamen Renormierungskonstante behandelt werden müssen. Dies hat als unmittelbare Folge die Slavnov-Taylor-Identitäten (STI) [Mut 87].

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{\bar{Z}_{1F}}{\bar{Z}_{2F}} = \frac{Z_4}{Z_1} \quad (1.46)$$

Um die STI zu beweisen, greift man auf die BRS-Symmetrie zurück. Im Rahmen der Pfadintegraldarstellung ergeben sich aus der globalen BRS-Symmetrie die Ward-Takahashi-Identitäten [Kug 97, Mut 87], die als Spezialfall die STI beinhalten. Im Anhang I finden sich die fünf linear unabhängigen perturbativen Renormierungskonstanten der QCD in 1-Schleifen-Ordnung.

Mit der Gegenterm-Renormierung wird durch das BPHZ-Verfahren [Mut 87, Wei 96, Kug 97, Zin 02] sichergestellt, dass aus der Theorie sämtliche Divergenzen widerspruchsfrei entfernt werden.

### 1.2.1 Die Renormierungsgruppe

Durch den Prozess der Renormierung werden nur die divergenten Teile der Renormierungskonstanten eindeutig festgelegt. Dabei muss für den Übergang zwischen zwei Renormierungsschemata für die renormierten Vertizes die folgende Relation gelten.

$$\Gamma_{r'} = Z(r', r)\Gamma_r \quad (1.47)$$

Dies motiviert die Bezeichnung Renormierungsgruppe. Erst die Festlegung der endlichen Teile definiert ein bestimmtes Renormierungsschema. Wir nutzen in dieser Arbeit das  $MS$ -Schema,<sup>8</sup> bei dem die in (1.35) auftretende Divergenz subtrahiert wird [Mut 87, Kug 97, Zin 02]. Innerhalb eines Renormierungsschemas muss zusätzlich eine Renormierungsmasse bzw. -skala gewählt werden. In den Schemata, die dimensionelle Regularisierung verwenden, geschieht dies durch das in Gleichung (1.49) unten definierte  $\nu$ . Da diese Renormierungsmasse  $\nu$  notwendig willkürlich ist, müssen physikalische Größen von ihrem Wert unabhängig sein. Damit lassen sich im Allgemeinen vom Renormierungsschema abhängige Beziehungen, die Renormierungs-Gruppen-Gleichungen (RGG), herleiten. Wir geben hier die wesentlichen Gleichungen und Resultate für das  $MS$ - (und das  $\overline{MS}$ -) Schema an.

Zunächst wollen wir die Kopplungskonstante einheitenfrei definieren und setzen daher

$$\tilde{g} = g_0\nu^\epsilon \quad , \quad (1.48)$$

$$\tilde{g}_r = g_r\nu^\epsilon \quad . \quad (1.49)$$

Daraus folgt unmittelbar

$$g_r(\nu) = Z_g(\nu)^{-1}g_0 \quad . \quad (1.50)$$

Da die nackten Größen von  $\nu$  unabhängig sind, kann man unmittelbar die  $\beta$ -Funktion und die anomalen Dimensionen definieren [Mut 87].

$$\beta(g_r, \xi_r) = \nu \frac{\partial g_r}{\partial \nu} = -\epsilon g_r - \frac{\nu}{Z_g} \frac{\partial Z_g}{\partial \nu} g_r \quad (1.51)$$

$$\gamma_m(g_r, \xi_r) = -\frac{\nu}{m_r} \frac{dm_r}{d\nu} = \frac{\nu}{Z_m^{1/2}} \frac{dZ_m^{1/2}}{d\nu} \quad (1.52)$$

---

<sup>8</sup>Für die in dieser Arbeit vorkommenden theoretischen Rechnungen kann ohne jede Änderung auch das verwandte  $\overline{MS}$ -Schema angenommen werden, da die beiden Verfahren sich nur in konvergenten Termen unterscheiden.

$$\delta(g_r, \xi_r) = \nu \frac{\partial \xi_r}{\partial \nu} = -2\xi_r \gamma_G \quad (1.53)$$

$$\gamma_G(g_r, \xi_r) = \frac{\nu}{2Z_3} \frac{\partial Z_3}{\partial \nu} \quad (1.54)$$

$$\bar{\gamma}_F(g_r, \xi_r) = \frac{\nu}{2\bar{Z}_{2F}} \frac{\partial \bar{Z}_{2F}}{\partial \nu} \quad (1.55)$$

$$\tilde{\gamma}(g_r, \xi_r) = \frac{\nu}{2\tilde{Z}_3} \frac{\partial \tilde{Z}_3}{\partial \nu} \quad (1.56)$$

Damit lässt sich schließlich die folgende RGG aufstellen.

$$\left[ \nu \partial_\nu + \nu \frac{\partial g_r}{\partial \nu} g_r + \nu \sum_f \frac{\partial m_{f,r}}{\partial \nu} \partial_{m_{f,r}} + \nu \frac{\partial \xi_r}{\partial \nu} \partial_{\xi_r} - \frac{\nu}{Z_\Gamma} \frac{dZ_\Gamma}{d\nu} \right] \Gamma_r^{(n)}(\{p\}, g_r, \xi_r, \{m_r\}; \nu) = 0 \quad (1.57)$$

Durch die gleichförmige Impulsskalierung der Vertizes erhält man eine weitere Differenzialgleichung [GW 73, Kug 97].

$$[\lambda \partial_\lambda + \sum_f m_{f,r} \partial_{m_{f,r}} + \nu \partial_\nu - d_\Gamma] \Gamma_r^{(n)}(\lambda \{p\}, \dots; \nu) = 0 \quad (1.58)$$

Dabei ist  $d_\Gamma$  die Massendimension des Vertex,  $d_G$  und  $\tilde{d}$  sind die Massendimensionen des Gluon- bzw. Geist-Feldes,  $\bar{d}_F$  die des Fermion-Feldes.

$$d_\Gamma(\epsilon) = 4 - 2\epsilon - d_G n_G - \bar{d}_F \bar{n}_F - \tilde{d} \tilde{n} \quad (1.59)$$

$$d_G = \tilde{d} = 1 - \epsilon \quad (1.60)$$

$$\bar{d}_F = \frac{3 - 2\epsilon}{2} \quad (1.61)$$

Zusammen führen beide Gleichungen zur *t'Hooft-Weinberg-Gleichung* [Kug 97] ( $t = \ln \lambda$ ).

$$\left[ -\partial_t + \frac{\beta \partial}{\partial g_r} - (1 + \gamma_m) \frac{m_r \partial}{\partial m_r} - \omega \right] \Gamma^{(n)}(\lambda \{p\}; g, m, \nu) = 0 \quad (1.62)$$

$$\omega(g_r) = n\gamma_G + \tilde{n}\tilde{\gamma} - d_\Gamma \quad (1.63)$$

Zur Lösung der *t'Hooft-Weinberg-Gleichung* definiert man die sogenannte laufende Kopplung  $\bar{g}$ .

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = \beta(\bar{g}) \quad (1.64)$$

$$\bar{g}(0) = g_r \quad (1.65)$$

In 1-Schleifen-Ordnung ist die bekannte Lösung [Mut 87]

$$\bar{g}^2 = \frac{g_r^2}{1 + 2 \frac{\beta_0}{(4\pi)^2} g_r^2 t} \quad (1.66)$$

Mit  $t = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{p^2}{\nu^2} \right)$  kann man eine neue Massen- (bzw. Impuls-) Skala  $\Lambda$  einführen.

$$\bar{g}^2 = \frac{(4\pi)^2}{\beta_0 \ln(p^2/\Lambda^2)} \quad (1.67)$$

Der führende Koeffizient der  $\beta$ -Funktion ist RG-invariant und lautet

$$\beta_0 = \frac{33 - 2n_f}{3} \quad . \quad (1.68)$$

In 2-Schleifen-Ordnung ergibt sich schließlich der folgende Ausdruck für den RG-invarianten<sup>9</sup> Skalenparameter  $\Lambda$ .

$$\Lambda = \nu e^{-\frac{(4\pi)^2}{2\beta_0 \bar{g}^2}} \left( \frac{1 + \beta_1 \bar{g}^2 / \beta_0}{\beta_0 \bar{g}^2} \right)^{\beta_1 / 2\beta_0} \quad (1.69)$$

Da die  $\Lambda$ -Skala bezüglich  $\bar{g}^2$  in 0 über eine unendliche Laurent-Reihe verfügt und daher mit perturbativen Methoden nicht beschrieben werden kann, wird sie in dem in dieser Arbeit verfolgten erweiterten Ansatz eine besondere Rolle spielen.

Besonders erwähnenswert ist darüber hinaus die asymptotische Freiheit der QCD [GW 73], die sich in (1.66) zeigt. Da  $\bar{g} \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow +\infty$  eine stabile nichttriviale Nullstelle als UV-Fixpunkt ergibt, sofern  $\beta_0 > 0$  ist, verschwindet die laufende Kopplung für große Impulse, d.h. im perturbativen Limes.

Betrachtet man massive Quarks muss man das Entkopplungs-Theorem von Appellequist und Carazzone [LP 96b] beachten, wonach nur die Quarks mit renormierten Massen, die kleiner als die betrachtete Massenskala sind, zu den Koeffizienten der  $\beta$ -Funktion beitragen. Damit hängt auch  $\Lambda$  von den sogenannten *aktiven* Quarks-Flavours,  $n_f^*$ , ab. Das von der Fermionzahl  $n_f$  abhängende  $\beta_0(n_f)$  in (1.69) muss also durch  $\beta_0(n_f^*)$  ersetzt werden.<sup>10</sup> Daher sollte man je nach betrachtetem Massebereich genauer von  $\Lambda^{(n_f^*)}$  sprechen.

Wir befassen uns in Abschnitt 9.2 mit den daraus resultierenden Konsequenzen für die numerischen Lösungen.

### 1.2.2 Basisvertizes der QCD

Da der  $\tilde{\Gamma}_3$ -Vertex nur auf der auslaufenden Geist-Linie einen Impulsfaktor hat, müssen externe Geist-Linien bei der Bestimmung des oberflächlichen Divergenzgrades von Feynmandiagrammen wie Fermionen behandelt werden. Damit berechnet sich der oberflächliche Divergenzgrad von Feynman-Diagrammen in der QCD nach der folgenden Formel.

$$d_\Gamma = 4 - n_G - \frac{3}{2}(\bar{n}_F + \bar{n}) \quad (1.70)$$

Damit können wir die sieben oberflächlich divergenten Basisvertizes der QCD bestimmen:

$$\{\Gamma_{od}\} = \{\Gamma_2, \bar{\Gamma}_{2,f}, \tilde{\Gamma}_2, \Gamma_3, \bar{\Gamma}_{3,f}, \tilde{\Gamma}_3, \Gamma_4\} \quad . \quad (1.71)$$

<sup>9</sup>RG-Invarianz wird hier so verstanden, dass  $\Lambda$  nicht von der Renormierungs-Massenskala  $\nu$  abhängt.  $\Lambda$  ist dagegen nicht unabhängig vom Renormierungsschema.

<sup>10</sup>Es ist  $\beta_1(n_f^*) = 51 - \frac{19}{3}n_f^*$  ebenfalls von der Zahl aktiver Fermionen abhängig [Wei 96].

Im Rahmen der perturbativen QCD kann man alle anderen, oberflächlich konvergenten Vertizes als  $\{\Gamma_{ok}\}$  zusammenfassen. Sie können in einer sogenannten Skelettgraphenentwicklung [Zin 02] durch Schleifengraphen in den  $\{\Gamma_{od}\}$  perturbativ dargestellt werden. Die divergenten Anteile der oberflächlich konvergenten Vertizes kommen aus den divergenten Subgraphen der Skelettgraphenentwicklung, so dass im Rahmen der perturbativen Theorie für diese Vertizes keine eigenen Renormierungskonstanten definiert werden müssen. Damit ist die Renormierung der QCD auf die Renormierung der oberflächlich divergenten Basisvertizes beschränkt,<sup>11</sup> wie mit der BPHZ-Methode bewiesen wird. Für den in Kapitel 2 entwickelten erweiterten Ansatz folgt aus der Divergenzstruktur der oberflächlich konvergenten Vertizes, dass sie keine quasiperturbativen Modifikationen der nullten Ordnung entwickeln können und das Selbstkonsistenzproblem auf die Basisvertizes beschränkt bleibt.

### 1.3 Dyson-Schwinger-Gleichungen

In dieser Arbeit werden wir die Dyson-Schwinger-Gleichungen (DSG), die ursprünglich in der QED hergeleitet wurden [Dys 49, Sch 51], nutzen, um die Divergenzstruktur des erweiterten Ansatzes zu untersuchen und Selbstkonsistenzgleichungen zu formulieren. Wir geben an dieser Stelle eine kurze Zusammenfassung ihrer Herleitung an.

Grundlegend ist die Beobachtung, dass das Integral über eine Ableitung nach einem Feld verschwindet. Wir wählen als Beispiel das Gluon-Feld.

$$\frac{1}{Z_E[0]} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \frac{\delta}{\delta A(-p_1)} e^{-S_E - j_E} = 0 \quad (1.72)$$

Dies wird zu der sogenannten Master-DS-Gleichung im Gluon-Kanal.<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} 0 = & - \left[ \Gamma_2^{(0)} \frac{\delta}{\delta J(-p_1)} + \frac{g}{2} \int \bar{d}^D q \Gamma_3^{(0)} \frac{\delta}{\delta J(-q)} \frac{\delta}{\delta J(q-p_1)} \right. \\ & + \frac{g^2}{6} \int \bar{d}^D q \int \bar{d}^D k \Gamma_3^{(0)} \frac{\delta}{\delta J(-q)} \frac{\delta}{\delta J(-k)} \frac{\delta}{\delta J(q+k-p_1)} \\ & - g \int \bar{d}^D q \tilde{\Gamma}_3^{(0)} \frac{\delta}{\delta c(-q)} \frac{\delta}{\delta \bar{c}(q-p_1)} \\ & - g \sum_f^{N_f} \int \bar{d}^D q \frac{\delta}{\delta \eta(-q)} \bar{\Gamma}_{3,f}^{(0)} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(q-p_1)} \\ & \left. + \frac{1}{(2\pi)^D} J(p_1) \right] Z_E[J, J_{\bar{c}}, J_c, \eta, \bar{\eta}] \quad (1.73) \end{aligned}$$

Leitet man diese Gleichung wiederholt nach den Quellen ab, setzt letztere anschließend Null und spaltet die  $\delta$ -Funktionen der Impulserhaltung ab, kann man

<sup>11</sup>Durch diese Eigenschaft ist eine renormierbare (aber nicht superrenormierbare) Theorie definiert [Wei 96, Kug 97].

<sup>12</sup>Wir unterdrücken zur Vereinfachung der Notation Indizes und die Impulsabhängigkeit der Vertizes.

so die DSG für beliebige Vertizes im Gluon-Kanal berechnen. Die Herleitung der DSG im fermionischen und im Geist-Kanal erfolgt analog.

An (1.73) kann man insbesondere erkennen, dass der in unserer Notation linke äußere Impuls der DSG immer in einen *nackten* Vertex einläuft [Dri 97]. Die anderen in den Schleifengraphen der DSG auftretenden Vertizes und Propagatoren sind hingegen volle, nicht-perturbative Größen. Dennoch zeigen die DSG, wenn sie nicht-störungstheoretisch und exakt behandelt werden, die volle Symmetrie der ihnen zu Grunde liegenden vollen Vertizes. In Kapitel 3 werden wir eine Möglichkeit kennen lernen, diese immanente Symmetrie auch für eine störungstheoretische Behandlung stärker herauszuarbeiten, indem ein Teil der perturbativen Vertizes durch Resummation in volle Vertizes überführt wird. In Kapitel 5 und im Anhang H finden sich die DSG für die Basis-Vertizes.

Die DSG für alle Vertizes stellen ein gekoppeltes System von Integro-Differenzialgleichungen dar, das die Dynamik der Theorie beschreibt [IZ 80, Sti 96]. Formal hat es die folgende Gestalt.

$$\Gamma_{(n)} = \Gamma_{(n)}^{0,pert} + \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_n \left[ \{\Gamma_{(2)}\}, \dots, \{\Gamma_{(n+2)}\}; \{\Gamma_{(2)}^{0,pert}\}, \dots, \{\Gamma_{(n+2)}^{0,pert}\} \right] \quad (1.74)$$

Dabei sind die  $\Gamma_{(n)}$  die vollen Vertizes und  $\{\Gamma_{(n)}\}$  bezeichnet den Satz aller Vertizes mit  $n$  Beinen. Im Rahmen der Störungstheorie werden die vollen Vertizes durch ihre perturbativen Näherungen  $\Gamma_{(n)}^{pert}$  ersetzt.

$$\Gamma_{(n)}^{pert} = \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma_{(n)}^{[p],pert} \quad (1.75)$$

$$\Gamma_{(n)}^{[p],pert} = \Gamma_{(n)}^{0,pert} + \sum_{l=1}^p \left( \frac{g_0}{4\pi} \right)^{2l} \Gamma_{(n)}^{l,pert} \quad (1.76)$$

## 1.4 Bethe-Salpeter-Gleichungen

Für die amputierten Green'schen Funktionen ab den 4-Punkt-Amplituden kann man Zerlegungen nach dem Grad der Reduzibilität vornehmen. Die klassische Form dieser Überlegung [IZ 80, Sti 90] zerlegt eine 1-Teilchen-irreduzible 4-Punkt-Amplitude in einen 2-Teilchen-irreduzibeln Kern und einen Schleifengraphen. Die so gewonnene Gleichung heißt *Bethe-Salpeter-Gleichung* (BSG). Wir geben hier als Beispiel die BSG für einen 1PI Fermion-Gluon-Vertex ( $\bar{V}_{2,2f}$ ).

$$\quad (1.77)$$

Wir haben hier eine BSG im sogenannten s-Kanal angegeben. Dies beruht auf der Definition der *Mandelstam-Variablen*  $s, t$  und  $u$ .<sup>13</sup>

$$P := p_1 + p_2, \quad s := P^2 \quad (1.78)$$

<sup>13</sup>Die hier verwendete Definition unterscheidet sich in der Reihenfolge von  $t$  und  $u$  von der in der Literatur gebräuchlichen.

$$Q := p_1 + p_3, \quad t := Q^2 \quad (1.79)$$

$$R := p_1 + p_4, \quad u := R^2 \quad (1.80)$$

Auch in den anderen Kanälen ist es möglich, BSG aufzustellen. Wird sukzessive die BSG für die verschiedenen Kanäle formuliert und dies genutzt, um zu einem vollständig 2PI BS-Kern zu gelangen, erhält man ein manifest nichtlineares Gleichungssystem.

Wir werden in dieser Arbeit die BSG zum einen gebrauchen, um zu einer resummierten Form der DSG zu gelangen. Zum anderen werden wir die BSG des vollen 4-Gluon-Vertex verwenden, um einfachere Bestimmungsgleichungen für die Parameter des erweiterten Ansatzes herzuleiten, als das mit der DSG für den  $\Gamma_4$ -Vertex möglich wäre. Eine Übersicht über die in dieser Arbeit verwendeten BSG findet sich in Anhang D.

## 1.5 Die Operator-Produkt-Entwicklung

Die Operator-Produkt-Entwicklung (OPE) nach Wilson gestattet es, das Produkt von Feldern am gleichen Raumzeit-Punkt (zusammengesetzte Felder bzw. Operatoren) zu definieren. Für den zusammengesetzten Operator  $\hat{A}(x)\hat{B}(y)$  gilt

$$\hat{A}(x)\hat{B}(y) \stackrel{x \rightarrow y}{\sim} \sum_{i=0}^{\infty} C_i(x-y) \hat{O}_i\left(\frac{x+y}{2}\right) . \quad (1.81)$$

Dabei sind die  $\hat{O}_i$  wohldefinierte lokale Operatoren und die  $C_i$  komplexwertige Koeffizientenfunktionen, die das Divergenzverhalten für  $x \rightarrow y$  beschreiben. Die OPE gilt allgemein auch über die Störungstheorie hinaus [Kug 97].

Zur Motivation des erweiterten Ansatzes geben wir hier ein Resultat der OPE an. Behandelt man den Gluonpropagator als Vakuumserwartungswert eines Operatorprodukts des Eichfeldes, erhält man die folgende Entwicklung<sup>14</sup> [Sti 96].

$$\begin{aligned} -\Gamma(p^2, g(\nu); \nu) &= p^2 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g^{2n} \mathbb{L}_{0,n} \left( \frac{p^2}{\nu^2} \right) \right] \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Lambda^{2l}}{p^{2(l-1)}} \left[ L_{l,0} + \sum_{n=1}^{\infty} g^{2n} \mathbb{L}_{l,n} \left( \frac{p^2}{\nu^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.82)$$

Dabei sind die  $\mathbb{L}_{l,n}$  Polynome in  $\ln\left(\frac{p^2}{\nu^2}\right)$  vom Grad  $n$ , die  $L_{l,0}$  (komplexe) Zahlen.<sup>15</sup>

Wegen der Gestalt von  $\Lambda$  in (1.69) hat (1.82) die Form eines *resurgent Symbols* (Doppelentwicklung). Die im folgenden Kapitel definierten erweiterten Ansätze werden von formal ähnlicher Gestalt sein.

<sup>14</sup>Aus technischen Gründen werden eventuelle Fermionen als masselos angesehen.

<sup>15</sup>Dass  $L_{0,0}$  hier auf 1 gesetzt ist, entspricht dem später definierten strikten perturbativen Limes.

# Kapitel 2

## Der nicht-perturbativ erweiterte Ansatz

### 2.1 Grundlegende Ideen

Störungstheoretische Berechnungen im Rahmen der QCD führen zu allgemeinen Potenzreihen in der Kopplungskonstante  $g_r$ .

$$T = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (g_r^2)^i \quad (2.1)$$

Da die laufende Kopplung einen UV-Fixpunkt hat [GW 73, Pol 73], wird die Kopplung zumindest im Limes sehr großer Impulse klein. Daher wird die Potenzreihe häufig als zumindest semikonvergent angesehen und mit den führenden Gliedern eine näherungsweise Berechnung von Resultaten im Hochenergie-Limes durchgeführt. Die Fehlerabschätzung für diese Art der Entwicklung ist von der Gestalt [Zin 02, Sti 01a]

$$\min_{\{p\}} \left| \Gamma(g_r^2) - \sum_{n=0}^p \left( \frac{g_r}{4\pi} \right)^{2n} \Gamma_{pert}^{(n)} \right|_{g_r \approx 0} \sim e^{-\frac{const}{g_r^2}} \quad (2.2)$$

Zudem ist für renormierbare, aber nicht superrenormierbare Theorien wie die QCD bekannt, dass die perturbative Entwicklung unvollständig ist und man damit aus der perturbativen Entwicklung die eigentliche Funktion durch eine Borel-Transformation nicht eindeutig rekonstruieren kann. Die fehlenden Terme haben nach (2.2) eine Betragsschranke der funktionalen Form  $\sim e^{-c/g^2}$ . Erweitert man die Potenzreihe (2.1) so, dass sie auch derartige Terme beschreiben kann, erhält man ein sogenanntes *resurgent Symbol* [Eca 81]. An Hand von Modellamplituden kann man zeigen, dass die Behandlung feldtheoretischer Amplituden mit den Mitteln der Theorie resurgenter Funktionen wesentliche Vorteile bietet [Sti 01a]. Insbesondere lässt sich eine eindeutige Borel-Resummation der nicht-perturbativ ergänzten semikonvergenten Reihe durchführen und das Problem der t'Hooft-Singularitäten<sup>1</sup> [tHo 79, Sti 01a] umgehen.

---

<sup>1</sup>Die mathematische Bedingung für eine eindeutige Rekonstruktion der gesuchten Funktion aus der semikonvergenten Störungsreihe im Rahmen eines Borel-Prozesses ist ein endlicher

Ein Vergleich mit der funktionalen Gestalt von  $\Lambda$  in (1.69) legt zusammen mit der aus der OPE stammenden Entwicklung in (1.82) nahe, für die Vertizes der QCD einen mit Blick auf die resurgenten Funktionen erweiterten Ansatz zu wählen. Dazu fassen wir die Kopplungskonstante  $g_r$  und die  $\Lambda$ -Skala formal als unabhängige Parameter auf. Damit erhalten wir

$$\Gamma = \Gamma(p, g_r(\nu), \Lambda; \nu) \quad . \quad (2.3)$$

Dies lässt sich durch eine formale Doppelentwicklung in  $g_r$  und  $\Lambda$  analog zu (1.82) beschreiben.<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \Gamma(p, g_r(\nu), \Lambda; \nu) = & I(p^2) \left\{ \left[ L_{0,0}(p) + \sum_{n=1}^{\infty} g^{2n} L_{0,n} \left( \frac{p}{\nu} \right) \right] \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Lambda^{2l}}{p^{2l}} \left[ L_{l,0}(p) + \sum_{n=1}^{\infty} g^{2n} L_{l,n} \left( \frac{p}{\nu} \right) \right] \right\} \quad (2.4) \end{aligned}$$

Wir interessieren uns nun zunächst ausschließlich für die Terme  $\sim g_r^0$  und  $\sim \Lambda^n$  mit  $n \geq 0$ , die *nicht-perturbativ erweiterten* oder *quasiperturbativen* Terme der nullten Ordnung, die die erweiterten Feynman-Regeln definieren. Für die funktionale Form des Ansatzes lassen wir uns von den folgenden Grundsätzen leiten [Sti 96, DKS 99, DS 99, Ewe 04].

- Im formalen Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  soll der erweiterte Ansatz bis auf eine noch mögliche multiplikative Konstante (entsprechend einer *endlichen* Renormierung) in den perturbativen übergehen, also  $\Gamma_{erw} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow 0} c_\Gamma \cdot \Gamma_{pert}$ . Mit dem strikten perturbativen Limes meinen wir die Forderung, dass  $c_\Gamma \equiv 1$  sein muss. In den bisherigen Arbeiten zum erweiterten Ansatz (mit Ausnahme von [Ewe 04]) wurde bisher stets der strikte perturbative Limes gefordert. Wie in [Sti 01a] dargestellt, werden mit den weiter unten definierten Ansätzen (z.B. (2.5)) die höheren perturbativen Anteile (mit Entwicklungen in  $k^2/\nu^2$  z.B. bei den sogenannten *leading logs*) im gleichen Formalismus wie die nicht-perturbativen Terme (mit Entwicklungen in  $k^2/\Lambda^2$ ) behandelt. Dies entspricht einer LL-ähnlichen Resummation, die den strikten perturbativen Limes im Allgemeinen zerstört.
- Im Limes großer Impulse sollen die erweiterten Vertizes ebenfalls in ihre perturbativen Partner modulo einer Konstante übergehen. Diese Konstante soll sich von der oben schon definierten nicht unterscheiden, also  $\Gamma_{erw}(\lambda\{p\}, \dots) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} c_\Gamma \cdot \Gamma_{pert}(\lambda\{p\}, \dots)$ .
- Der Divergenzgrad der Vertizes – und damit auch der Divergenzgrad der Schleifenintegrale – soll sich nicht ändern. Diese Bedingung muss gestellt werden, damit die Theorie renormierbar bleibt.

Öffnungswinkel um die positive reelle Achse im Ursprung der komplexen Ebene für den Konvergenzbereich der Potenzreihe. Wie von t'Hooft gezeigt, sind die Singularitäten der perturbativen Entwicklung der QCD gerade von einer Gestalt, die keinen endlichen Öffnungswinkel zulässt.

<sup>2</sup>Die Impulsabhängigkeit von  $L_{l,0}$  und  $L_{l,n}$  beschränkt sich dabei auf tensorielle Strukturen wie die Lorentz-Tensoren. Die Polynome in den Impulsquadraten sind in (2.4) schon explizit notiert.

Da in der QCD wegen des faktoriellen Anwachsens der Diagrammanzahl mit der Schleifenanzahl nur eine sehr begrenzte Zahl an Parametern für die Potenzreihe praktisch zugänglich ist, erscheint es als legitim, für konkrete Rechnungen einen einfacheren und handhabbareren Ansatz zu wählen. Daher verwenden wir eine Approximation der nicht-perturbativ modifizierten Vertizes nullter quasiperturbativer Ordnung durch rationale Funktionen in den Impulsen und in  $\Lambda$ . Diese verallgemeinerten Padé-Approximanten<sup>3</sup> haben überdies den Vorteil, dass mit ihnen eine Berechnung von Schleifenintegralen mit den aus dem *perturbativen* Zugang bekannten Methoden möglich ist. Für eine ausführliche Diskussion der hier kurz dargestellten Argumente verweisen wir auf [Sti 01a].

Wenn wir mit  $r$  den (Nenner-) Grad der Approximation bezeichnen, hat ein bosonischer Propagator die folgende Gestalt.<sup>4</sup>

$$-(\Gamma_2^{(r)})^{-1} \approx \frac{\sum_{i=0}^r a_i (p^2)^{r-i} \Lambda^{2i}}{\sum_{j=0}^{r+1} b_j (p^2)^{r+1-j} \Lambda^{2j}} \quad (2.5)$$

Betrachtet man die Entwicklung für  $\Gamma_2^{(r)}$ , fällt sofort ihre strukturelle Ähnlichkeit mit (1.82) auf. In ähnlicher Weise ergeben sich die nullten Ordnungen der weiteren Vertizes. Insbesondere wird durch die Gestalt des Propagators die Polstruktur der zugeordneten Wechselwirkungsvertizes festgelegt. Das wesentliche Problem ist nun, wie die zusätzlichen Parameter für die erweiterten Vertizes zu bestimmen sind.

Damit der erweiterte Ansatz wohldefiniert ist, müssen sich die zusätzlichen Parameter selbstkonsistent aus der Theorie berechnen lassen. Hierbei hilft die folgende Beobachtung [Sti 96].

$$\Pi(\epsilon) = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} = \frac{1}{\beta_0} (1 + \mathcal{O}(\epsilon, \epsilon \ln \epsilon)) \quad (2.6)$$

Diese Gleichung folgt aus den exakten Integraldarstellungen von  $Z_g$  und  $\Lambda$ . Sie ist insbesondere unabhängig von der Kopplungskonstanten und im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  endlich. Für unsere Zwecke ist vor allem interessant, dass es mit diesem Mechanismus möglich ist, divergente Beiträge der Ordnung  $g_0^2$  zur Modifikation der nullten Ordnung, also der Parameter der erweiterten Ansätze, nutzen zu können.

Das in (1.74) definierte DSG-System erlaubt es, Beziehungen zwischen den Parametern herzuleiten. Für die Basisvertizes lautet es schematisch folgendermaßen.

$$\Gamma_{od} = \Gamma^{0,pert} + \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2} \Phi_\Gamma \left[ \{\Gamma^{0,pert}\}, \{\Gamma_{od}\}, \{\Gamma_{ok}\} \right] \quad (2.7)$$

<sup>3</sup>Die Bestimmung der Koeffizienten des Ansatzes erfolgt in unserem Schema nicht durch Taylor-Entwicklung, sondern durch das direkte Ablesen an den Vorfaktoren der jeweiligen  $p_i^2$ -Monome.

<sup>4</sup>Alle Tensorstrukturen sind unterdrückt.

Dabei werden die  $\Gamma_{ok}$  ihrerseits durch Skelettgraphenentwicklung auf die  $\{\Gamma_{od}\}$  zurückgeführt, so dass das System abgeschlossen ist.<sup>5</sup> Mit (2.6) werden nun die führenden  $\frac{1}{\epsilon}$ -Divergenzen aus (2.7) endlich und zugleich zu Beiträgen nullter quasiperturbativer Ordnung. Dies erlaubt die Konstruktion von SKG.

Der bekannte perturbative Ansatz stellt einen Versuch dar, für die Amplituden der QCD Lösungen im Raum der summierbar-divergenten Reihen in der Kopplung  $g_r^2$  zu finden. Mit dem hier vorgestellten erweiterten Ansatz versuchen wir mit einer den bekannten perturbativen Methoden vergleichbaren Systematik Lösungen im umfassenderen Raum der *resurgent Funktionen* von  $g_r^2$  zu berechnen, die im Limes  $g_r^2 \rightarrow 0$  durch eine Entwicklung mit der formalen Gestalt von (1.82) beschrieben werden.

## 2.2 Erweiterte Feynman-Regeln

Wir formulieren nun die erweiterten Feynmanregeln im Approximationsgrad  $r$ . Dazu definieren wir noch die folgende Abkürzung.

$$\Pi_i(\{p\}) = \prod_{j=1}^i \prod_{s=1}^r (p_j^2 + u_{r,s}\Lambda^2) \quad (2.8)$$

Ausführliche Argumentationen hierzu finden sich in [Sti 96, DKS 99, DS 99]. Da wir in Landau-Eichung ( $\xi = 0$ ) arbeiten, wodurch die longitudinalen Anteile abgekoppelt sind, formulieren wir nur den vollständig transversalen Teil der Feynman-Regeln für Gluon-Vertizes.

- Der Gluon-Propagator

$$\begin{aligned} & D_{a_1 a_2}^{[r,0]\mu_1 \mu_2}(\vec{p}) \\ &= \delta_{a_1 a_2} t^{\mu_1 \mu_2}(\vec{p}) \frac{1}{b^{(r+1)/2}} \frac{\prod_{s=1}^r (p^2 + u_{r,s}\Lambda^2)}{\prod_{s=1} (p^2 + u_{r,s+}\Lambda^2)(p^2 + u_{r,s-}\Lambda^2)} \\ &= \text{~~~~~} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Weil die Propagator-Pole aus physikalischen Gründen<sup>6</sup> paarweise komplex konjugiert sein sollten, haben wir hier eine gegenüber (2.5) veränderte Definition der Parameter gewählt.

$$u_{r,s+} = u_{r,s-}^* \quad (2.10)$$

<sup>5</sup>Genauer gesagt wird nur der in den externen Impulsen faktorisierende Teil der  $\Gamma_{ok}$  durch die Basisvertizes ausgedrückt. Die Teile der Vertizes, die in Impulskombinationen wie den Mandelstam-Variablen faktorisieren, können (und müssen) noch eigene Ansätze haben. Diese werden jedoch mit dem Mechanismus der kompensierenden Pole (MKP, siehe Abschnitt 2.5) eindeutig festgelegt.

<sup>6</sup>Wie in [Sti 96, Sti 01a] dargestellt, bilden die Pole den Schnitt (bzw. die Schnitte) in der komplexen Ebene des Impulsquadrates nach. Daher erwartet man, dass sie zueinander komplex konjugiert sind. Damit ist in die Parameter die für diese Beschreibung geltende Confinement-Bedingung integriert. Wir führen dieses Thema in Abschnitt 9.3 weiter aus.

Diese Schreibweise ist jedoch insbesondere für die in Schleifenrechnungen notwendige Partialbruchzerlegung (PBZ) ungünstig. Daher verwenden wir mit offensichtlichen Gleichsetzungen die folgende Definition.<sup>7</sup>

$$D^{[r,0]} \sim \frac{1}{b} \frac{\prod_{s=1}^r (p^2 + u_{r,s} \Lambda^2)}{\prod_{s=1}^{r+1} (p^2 + \hat{u}_{r,s} \Lambda^2)} \quad (2.11)$$

- Der Fermion-Propagator

$$\begin{aligned} S_f^{[r,0]ij}(\vec{p}) &= \delta^{ij} \frac{1}{\bar{b}} \frac{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,s}^{(f)})}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{p} + \kappa_{r,s+}^{(f)}) (\not{p} + \kappa_{r,s-}^{(f)})} \\ &= \text{---}\leftarrow \end{aligned} \quad (2.12)$$

Es zeigt sich bei der Analyse der DSG für  $S_f$ , dass  $\bar{b} \equiv 1$  bleibt. Wie beim Gluon-Propagator setzen wir aus physikalischen Gründen<sup>8</sup> auch hier die Propagator-Pole jeweils paarweise komplex konjugiert an.

$$\kappa_{r,s+} = \kappa_{r,s-}^* \quad (2.13)$$

Auch hier wird in den Rechnungen analog zu (2.11) die folgende Konvention verwendet.<sup>9</sup>

$$S^{[r,0]} \sim \frac{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,s}^{(f)})}{\prod_{s=1}^{r+1} (\not{p} + \hat{\kappa}_{r,s}^{(f)})} \quad (2.14)$$

- Der Geist-Propagator

Nach [Dri 97] bleibt der Geist-Propagator in Landau-Eichung perturbativ, wenn man den strikten perturbativen Limes fordert. Da wir weniger strenge Anforderungen haben, kann  $\tilde{D}$  einen multiplikativen Faktor ausbilden [Ewe 04].

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{a_1 a_2}^{[r,0]}(\vec{p}) &= -\delta_{a_1 a_2} \frac{1}{\bar{b}} \frac{1}{p^2} \\ &= \text{---}\leftarrow \text{---} \end{aligned} \quad (2.15)$$

<sup>7</sup>In den Vorgängerarbeiten wurde  $u_{r,s}$  als  $u_{r,2s}$  parametrisiert.

<sup>8</sup>Siehe dazu auch Abschnitt 9.3.

<sup>9</sup>Die  $\kappa$ 's sind wieder matrixwertig. In den Vorgängerarbeiten wurde  $\kappa_{r,2s}^{(f)}$  statt  $\kappa_{r,s}^{(f)}$  verwendet.

- Der  $\Gamma_3$ -Vertex

$$\begin{aligned}
 & \Gamma_3^{[r,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3}_{a_1 a_2 a_3}(p_1, p_2, p_3) \\
 = & i f_{a_1 a_2 a_3} t^{\mu_1 \mu'_1}(\vec{p}_1) t^{\mu_2 \mu'_2}(\vec{p}_2) t^{\mu_3 \mu'_3}(\vec{p}_3) \\
 & \Pi_3^{-1} \sum_{k_1 k_2 k_3=0}^r (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (\Lambda^2)^{3r-(k_1+k_2+k_3)} \\
 & \left( \delta^{\mu'_1 \mu'_2} (p_1 - p_2)^{\mu'_3} C_{k_1 k_2; k_3}^r + \delta^{\mu'_2 \mu'_3} (p_2 - p_3)^{\mu'_1} C_{k_2 k_3; k_1}^r \right. \\
 & \left. + \delta^{\mu'_3 \mu'_1} (p_3 - p_1)^{\mu'_2} C_{k_3 k_1; k_2}^r \right) \\
 = & \text{Diagram of } \Gamma_3 \text{ vertex with three wavy lines} \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

Dabei folgt aus der Bose-Symmetrie für die Vertex-Parameter  $C_{ij;k}^r$  die Symmetriebeziehung

$$C_{ij;k}^r = C_{ji;k}^r \quad . \tag{2.17}$$

- Der  $\bar{\Gamma}_{3,f}$ -Vertex

$$\begin{aligned}
 & \bar{\Gamma}_3^{[r,0] i_1 i_2 \mu_3}_{f a_3}(-p_1, p_2, p_3) \\
 = & T_{a_3}^{i_1 i_2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,s}^f)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_3 + u_{r,s} \Lambda^2)} \\
 & \sum_{n_1 n_2 m=0}^r \not{p}_1^{n_1} \gamma^\mu \not{p}_2^{n_2} (\not{p}_3)^m \bar{C}_{m; n_1 n_2}^{r,f} \\
 & \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,s}^f)} \\
 = & \text{Diagram of } \bar{\Gamma}_{3,f} \text{ vertex with two arrows and one wavy line} \tag{2.18}
 \end{aligned}$$

Nur mit der hier gewählten Reihenfolge der matrixwertigen Faktoren für den fermionischen Beitrag zum Vertex ist der Vertexparameter in seinen hinteren beiden Indizes symmetrisch.

$$\bar{C}_{m; n_1 n_2}^f = \bar{C}_{m; n_2 n_1}^f \tag{2.19}$$

Bei der Analyse der DSG für den  $\bar{\Gamma}_{3,f}$  zeigt sich, dass  $\bar{C}_{r;rr}^{r,f} \equiv 1$  wie beim strikt perturbativen Limes ist, da sich diese Konstante nicht selbstkonsistent reproduzieren kann. Gegenüber anderen Arbeiten, beispielweise [Kuh 97], wurde der  $\bar{\Gamma}_{3,f}$ -Vertex hier ohne eine explizite Abhängigkeit von den Strommassen  $m_f$  angesetzt.

- Der  $\tilde{\Gamma}_3$ -Vertex

Wie die Analyse der DSG für diesen Vertex zeigt, verschwindet der einzige 1-Schleifen-Beitrag zur Divergenzstruktur der DSG in Landau-Eichung exakt. Daher können sich hier keine nicht-perturbativen Erweiterungen etablieren. Der  $\tilde{\Gamma}_3$ -Vertex bleibt *perturbativ*.

- Der  $\Gamma_4$ -Vertex

Die Ansätze für den  $\Gamma_4$ -Vertex werden im nächsten Abschnitt behandelt. Im Vorgriff auf den in Abschnitt 2.5 zu besprechenden Mechanismus der kompensierenden Pole (MKP) notieren wir hier nur die generelle Gestalt des vollen, auch von Mandelstam-Variablen abhängigen Vertex.

$$\begin{aligned} T_4^{r,0}(s, t, u, \{p_i^2\}, \Lambda) &= \Gamma_4^{r,0}(\{p_i^2\}, \Lambda^2) + R_s^{r,0}(s, \{p_i^2\}, \Lambda) \\ &\quad R_t^{r,0}(t, \{p_i^2\}, \Lambda) + R_u^{r,0}(u, \{p_i^2\}, \Lambda) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dabei haben die  $R_x$  jeweils Pole in der Mandelstam-Variable  $x$ .

Damit haben wir die erweiterten Feynman-Regeln bereits vollständig aufgezählt.<sup>10</sup> Denn die noch verbleibenden oberflächlich *konvergenten* Vertizes  $\Gamma_{ok}$  können in den Schleifenintegralen der DSG und BSG keine quasiperturbativen Korrekturen der nullten Ordnung ausbilden. Verfolgt man die Herkunft der Divergenzen aus Schleifenintegralen, dann können in den Amplituden für die oberflächlich konvergenten Vertizes die Divergenzen nur aus Subgraphen stammen. Aus dimensionellen Gründen muss dann mindestens ein konvergentes Schleifenintegral vorhanden sein. Damit übersteigt aber die Zahl der Potenzen von  $\tilde{g}^2$  immer die der Potenzen von  $\frac{1}{\epsilon}$  und ein Beitrag  $\sim \tilde{g}^0$  nach Anwendung von (2.6) ist ausgeschlossen.

## 2.3 Der $\Gamma_4$ -Vertex

Das vollständig systematische Verfahren zur Bestimmung der nullten quasiperturbativen Ordnung des 4-Gluon-Vertex kann man wie folgt zusammenfassen. Man multipliziert sämtliche möglichen Lorentz-Farb-Tensorstrukturen mit passenden, die Bose-Symmetrie herstellenden invarianten Funktionen von  $p_1^2 \dots p_4^2$ . Dabei sind die Nenner der rationalen Approximanten durch die Forderung der Selbstkonsistenz auf  $\Pi_4$  gemäß (2.8) festgelegt. Die Zähler werden mit geeigneten reellen Koeffizienten parametrisiert, deren Symmetrieeigenschaften aus der Forderung der Bose-Symmetrie folgen und damit die Symmetrie der invarianten Funktionen festlegen ( $f(p_1^2, \dots, p_4^2) \sim X_{abcd} p_1^{2a} p_1^{2b} p_1^{2c} p_1^{2d}$ ). Dieses Vorgehen ist jedoch in seiner vollen Allgemeinheit wenig zweckmäßig, da die BSG auch auf

---

<sup>10</sup>Im Rahmen des in Abschnitt 2.5 vorgestellten Mechanismus der kompensierenden Pole wird deutlich, dass man für die  $\{\Gamma_{ok}\}$  Terme in den verallgemeinerten Mandelstam-Variablen wie in (2.20) zulassen muss. Diese sind jedoch mit den Ansätzen für die Vertizes niedrigerer Stufe schon eindeutig bestimmt und haben auf das SKG-System keine Auswirkungen [Dri 97, Kuh 97, DS 99].

1-Schleifen-Niveau nichtlinear in  $\Gamma_4$  ist.<sup>11</sup> Dadurch entsteht bei den Schleifenrechnungen eine große Zahl von Termen. Zugleich wird eine numerische Auswertung der SKG erschwert, da die Laufzeit der Programme nach den Erfahrungen dieser Arbeit stark von der Anzahl der Terme in der BSG abhängt. Man muss sich daher auf die Betrachtung sinnvoller und effizient handhabbarer Strukturen beschränken, so dass ein Mindestmaß an Selbstkonsistenz gewahrt bleibt. Trotz dieser Nachteile ist die Verwendung der BSG einer Behandlung mit der DSG des  $\Gamma_4$ -Vertex vorzuziehen. Wie schon erwähnt, kann die DSG auf 1-Schleifen-Niveau die fundamentale Nichtlinearität des Selbstkonsistenzproblems für den  $\Gamma_4$ -Vertex nicht beschreiben. Zudem kommen in ihr notwendig tadpole-artige Terme vor, die eine triviale Symmetrisierung notwendig machen. DSG und BSG unterscheiden sich lediglich in diesen, die Symmetrie einer exakten Behandlung der DSG brechenden Terme. Man erhält aus der resummierten DSG auf 1-Schleifen-Niveau die entsprechende BSG, indem man den perturbativen Vertex der tadpole-artigen Terme durch einen vollen  $\Gamma_4$ -Vertex ersetzt.

Wir werden im Folgenden exploratorisch vorgehen und hinnehmen, dass die erweiterten Ansätze nur partiell selbstkonsistenzfähig sind. Dies bedeutet, dass in den Schleifenrechnungen überzählige Strukturen entstehen können, die nicht im Ansatz vorkommen. Fordert man das selbstkonsistente Verschwinden dieser Strukturen, ergeben sich Nebenbedingungen, die leicht dazu führen können, dass das SKG-System unlösbar wird. Nach den Erfahrungen dieser Arbeit ist es daher sinnvoll, diese Nebenbedingungen erst nachträglich numerisch zu überprüfen.

Wir werden in den folgenden Abschnitten drei sukzessive allgemeiner werdende Ansätze untersuchen. Als Minimalanforderung an einen erweiterten Ansatz für den  $\Gamma_4$ -Vertex ist selbstverständlich, dass die perturbative Lorentz-Farb-Tensorstruktur im Ansatz enthalten sein muss. In den folgenden Abschnitten wird unsere Auswahl der Tensorstrukturen noch weiter erläutert und begründet.

### 2.3.1 Die Lorentz-Tensorstruktur

Um unter den vielen Möglichkeiten vernünftig eingeschränkte Tensorstrukturen auswählen zu können, müssen wir die folgenden Überlegungen beachten. In die SKG gehen in Landau-Eichung nur die transversal projizierten Anteile der gluonischen Amplituden ein. Explizit zum zugeordneten externen Impuls  $k^\mu$  proportionale Terme auf Gluonlinien verschwinden durch Transversalprojektion<sup>12</sup> und scheiden damit für den erweiterten Ansatz aus. Die Skalarprodukte von Impulsen gehören zu den Mandelstam-Variablen der  $T_4$ -Amplitude. Mit Polen in diesen Kanälen sorgt der MKP [DKS 99, DS 99] für die Subtraktion der unphysikalischen Pole bei Schleifengraphen mit erweiterten Vertizes und damit für die Wohldefiniertheit des erweiterten Ansatzes. Der Wert der entsprechenden Polpositionen in diesen Kanälen ist daher schon aus den Vertizes niedrigerer

<sup>11</sup>Die in [Dri 97] verwendete DSG ist auf 1-Schleifen-Niveau *linear* in den Parametern des  $\Gamma_4$ -Vertex, weswegen eine größere Zahl von Tensorstrukturen betrachtet werden konnte.

<sup>12</sup>Der Transversalprojektor (B.1) bildet mit dem Longitudinalprojektor (B.3) eine vollständige Zerlegung der zweiparametrischen, dimensionslosen Lorentz-Tensorstruktur.

Stufe festgelegt. Somit sind auch Terme  $\sim \frac{p_i \cdot p_j}{|p_i||p_j|}$  ausgeschlossen. Der perturbative Vertex ist – entsprechend seinem Divergenzgrad – konstant bezüglich der Impulse und proportional zu den dimensionslosen Lorentz-Tensorstrukturen. Damit verfügen wir in jedem Fall über die drei dimensionslosen Basistensoren<sup>13</sup>

$$\Gamma_1 = \delta^{12}\delta^{34} \quad , \quad (2.21)$$

$$\Gamma_2 = \delta^{13}\delta^{24} \quad , \quad (2.22)$$

$$\Gamma_3 = \delta^{14}\delta^{23} \quad (2.23)$$

und die aus ihnen gebildete vollständig symmetrische Summe  $S_4$  sowie die drei partiell antisymmetrischen Linearkombinationen  $\Gamma_4$ ,  $\Gamma_5$  und  $\Gamma_6$  (siehe Anhang B.1). Darüber hinaus könnten noch Lorentz-Tensoren höherer Impulspotenz vorkommen. Da diese unter Wirkung des MKP jedoch nicht in die Partialbruchzerlegung im Sinne von (2.63) eingehen, müssen sie effektiv zu einer Erhöhung des perturbativen Divergenzgrades führen und verstoßen so gegen unsere Voraussetzungen.

Auch ohne formalen Beweis ist somit hinreichend begründet, sich bei der Konstruktion des erweiterten Ansatzes auf die dimensionslosen Lorentz-Strukturen zu beschränken und damit eine vollständige Beschreibung des Lorentz-Sektors für den quasiperturbativen Vertex nullter Ordnung durchführen zu können [Dri 97].

### 2.3.2 Die Farbstruktur

Aus den drei Basisstrukturen der  $SU(3)$ ,  $\delta_{ab}$ ,  $f_{abc}$  und  $d_{abc}$ , lassen sich insgesamt 15 verschiedene Farbtensoren vierter Stufe bilden. In Anhang A.3.2 sind die entsprechenden Abkürzungen definiert. Zwischen den  $C^{(i)}$  bestehen aber vielfältige Abhängigkeiten, so dass nur acht linear unabhängig sind [PT 80]. Eine mögliche Wahl einer Basis ist [Sch 03]

$$C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}, C^{(4)}, C^{(5-6)}, C^{(13)}, C^{(14)}, C^{(15)} \quad . \quad (2.24)$$

### 2.3.3 Bose-symmetrische Tensorstrukturen

Zur Konstruktion Bose-symmetrischer Tensorstrukturen ist die Transformation der Basistensoren für die Lorentz- und die Farb-Tensoren unter der verlangten Bose-Symmetrie zu untersuchen. Entsprechende Permutationstabellen finden sich in Anhang A.3.2 und B.4.2. Die Analyse ergibt, dass sich die Farb-Tensoren  $C^{(1)}$  bis  $C^{(6)}$  mit den obigen Lorentz-Tensoren zu Bose-symmetrischen Strukturen kombinieren lassen. Bei den Farb-Tensoren  $C^{(10)}$  bis  $C^{(15)}$  gelingt dies nicht, wie man an Tabelle 2.1 ablesen kann. Offensichtlich bilden diese Tensoren eine sechsdimensionale Permutationsgruppe. Die Lorentz-Basistensoren bilden dagegen eine nur dreidimensionale Permutationsgruppe.

Damit verbleiben wir bei der in Tabelle 2.2 notierten Bose-symmetrisierbaren Tensor-Basis<sup>14</sup> für den  $\Gamma_4$ -Vertex.

<sup>13</sup>Die hier definierten  $\Gamma$ 's haben nichts mit den Vertizes zu tun. Die Indexzahlen  $i$  stehen symbolisch für die Vektorindizierung  $\mu_i$ .

<sup>14</sup>Wegen (A.54) sind von den 18 Tensoren nur 15 linear unabhängig, es handelt sich also

|            |             |             |             |
|------------|-------------|-------------|-------------|
| {abcd}     | {dabc}      | {cabd}      | {dacb}      |
| $C^{(10)}$ | $-C^{(12)}$ | $-C^{(11)}$ | $-C^{(12)}$ |
| $C^{(11)}$ | $C^{(14)}$  | $-C^{(15)}$ | $-C^{(13)}$ |
| $C^{(12)}$ | $-C^{(13)}$ | $C^{(13)}$  | $C^{(14)}$  |
| $C^{(13)}$ | $C^{(15)}$  | $-C^{(14)}$ | $-C^{(15)}$ |
| $C^{(14)}$ | $-C^{(11)}$ | $-C^{(12)}$ | $-C^{(10)}$ |
| $C^{(15)}$ | $C^{(10)}$  | $C^{(10)}$  | $C^{(11)}$  |

Tabelle 2.1: Permutationen der nicht selbstkonsistenzfähigen Farb-Tensoren

|                   |                   |                   |                   |                   |                   |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $C^{(4)}\Gamma_1$ | $C^{(4)}\Gamma_2$ | $C^{(4)}\Gamma_3$ | $C^{(1)}\Gamma_1$ | $C^{(1)}\Gamma_2$ | $C^{(1)}\Gamma_3$ |
| $C^{(5)}\Gamma_1$ | $C^{(5)}\Gamma_2$ | $C^{(5)}\Gamma_3$ | $C^{(2)}\Gamma_1$ | $C^{(2)}\Gamma_2$ | $C^{(2)}\Gamma_3$ |
| $C^{(6)}\Gamma_1$ | $C^{(6)}\Gamma_2$ | $C^{(6)}\Gamma_3$ | $C^{(3)}\Gamma_1$ | $C^{(3)}\Gamma_2$ | $C^{(3)}\Gamma_3$ |

Tabelle 2.2:  $\Gamma_4$ -Basistensoren

### 2.3.4 Zur Konstruktion der erweiterten Ansätze

Nach den obigen Ausführungen zur Lorentz-Tensorstruktur können wir uns hier auf die Ansätze beschränken, die Polynome in den vier Impulsquadraten  $p_1^2, p_2^2, p_3^2$  und  $p_4^2$  sind [Dri 97]. Wir betrachten nun zwei Möglichkeiten, wie man die Bose-Symmetrie der Zählerapproximanten realisieren kann. Zunächst fordern wir, dass die Vertexparameter im Zähler vollständig symmetrisch unter Permutationen der vier Indizes sind. Anschließend betrachten wir, angeregt von den Erfahrungen aus dieser Arbeit, Ansätze mit Mandelstam-Symmetrie,<sup>15</sup> d.h. mit nur noch partieller Symmetrie in den Indizes der Vertex-Parameter. Der Ansatz mit vollständig symmetrischen Parametern ist als Spezialfall in den Mandelstam-symmetrischen Parametern enthalten.

### 2.3.5 Vollständig symmetrische Parameter

Die offensichtlichste Möglichkeit, eine Bose-symmetrische Tensorstruktur zu definieren, ist die perturbative Struktur aus (1.29). Wir kürzen diese Struktur mit  $T_4$  ab und notieren sie als

$$T_4 = \frac{3}{2}C^{(4)}\Gamma_4 + \frac{1}{2}C^{(5-6)}\Gamma_{5-6} \quad . \quad (2.25)$$

---

um keine Basis im mathematischen Sinn. In der vorliegenden Darstellung lässt sich die Bose-Symmetrie jedoch besonders einfach diskutieren.

<sup>15</sup>Die Definition der Symmetriebedingungen findet sich in (2.36).

Zwei weitere Strukturen lassen sich mit den Farbtensoren  $C^{(1)}$  bis  $C^{(3)}$  bilden,<sup>16</sup>  $D_4$  und  $E_4$ .

$$D_4 = S^{(4)}S_4 \quad (2.26)$$

$$E_4 = C^{(1)}\Gamma_1 + C^{(2)}\Gamma_2 + C^{(3)}\Gamma_3 \quad (2.27)$$

Diese drei Strukturen haben die Eigenschaft, unter Permutation der Indizes vollständig symmetrisch zu sein, wie man an den Permutationstabellen A.3 und B.2 ablesen kann.

Weitere Strukturen lassen sich auf diese drei Basisstrukturen zurückführen. Die entsprechenden Definitionen finden sich in Anhang A.3.2

$$\begin{aligned} F_4 &= C^{(16)}\Gamma_4 + C^{(17)}\Gamma_5 + C^{(18)}\Gamma_6 \\ &= 3E_4 - D_4 \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} G_4 &= (C^{(7)} + C^{(8)} + C^{(9)})S_4 \\ &= \frac{1}{3}D_4 \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} H_4 &= C^{(7)}\Gamma_1 + C^{(8)}\Gamma_2 + C^{(9)}\Gamma_3 \\ &= -\frac{1}{3}T_4 + \frac{2}{3}E_4 - \frac{1}{3}D_4 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Wie man an der Tabelle 2.2 ablesen kann, wäre eine mögliche weitere Struktur das aus den Diagonalelementen gebildete  $A_4$ .

$$A_4 = C^{(4)}\Gamma_1 + C^{(5)}\Gamma_2 + C^{(6)}\Gamma_3 \quad (2.31)$$

An den Permutationstabellen kann man aber ablesen, dass die Bose-Symmetrie dafür Vertexparameter erfordert, die antisymmetrisch unter jeder Vertauschung von zwei Indizes sind. Diese können aber nicht zur Selbstkonsistenz der nullten Ordnung beitragen, da sie in Schleifenintegralen den Divergenzgrad immer um 2 reduzieren, so dass sämtliche Schleifenintegrale proportional zur  $A_4$ -Struktur konvergent werden.

Damit gelangen wir zu dem folgenden erweiterten Ansatz für den  $\Gamma_4$ -Vertex.

$$\begin{aligned} \Gamma_4 &= \Pi_4^{-1} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4}^r (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} (\Lambda^2)^{4r - \sum k_i} \\ &\quad \{T_4 T_{k_1 k_2 k_3 k_4} + D_4 D_{k_1 k_2 k_3 k_4} + E_4 E_{k_1 k_2 k_3 k_4}\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Für  $D_4$  und  $E_4$ , die im perturbativen Limes nicht existieren, muss der entsprechende Limes verschwinden, also

$$D_{rrrr} = E_{rrrr} = 0 \quad . \quad (2.33)$$

Die Parametersätze  $\{T\}$ ,  $\{D\}$  und  $\{E\}$  sind vollständig symmetrisch. Wir müssen wieder zwei Fälle unterscheiden. Der einfachste Ansatz für einen erweiterten

<sup>16</sup> $S^{(4)}$  ist in (A.51) und  $S_4$  in (B.11) definiert.

$\Gamma_4$ -Vertex ist eine Beschränkung auf die  $T_4$ -Struktur. In der Tat ist es möglich, diesen Ansatz selbstkonsistent zu formulieren. Sobald man über die perturbative Struktur hinausgehen möchte, muss man für eine konsistente Formulierung sowohl  $D_4$  als auch  $E_4$  hinzunehmen.

### 2.3.6 Mandelstam-symmetrische Parameter

Wie schon bei den vollständig symmetrischen Parametern können wir uns auf die sogenannten Basistensoren in Tabelle 2.2 beschränken. Das Transformationsverhalten der Basistensoren unter Vertauschungen, das in den Tabellen A.3 und B.2 notiert ist, führt zu dem folgenden Ansatz, der an die drei Mandelstam-Kanäle der BSG angepasst ist.

$$\begin{aligned} \Gamma_4 = & \frac{1}{\prod_4(p_1, p_2, p_3, p_4)} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} p_1^{2k_1} p_2^{2k_2} p_3^{2k_3} p_4^{2k_4} \Lambda^{8r-2\sum k_i} \\ & \left\{ C^{(4)}(\Gamma_3 - \Gamma_2) T_{k_1 k_2; k_3 k_4} + C^{(5)}(\Gamma_1 - \Gamma_3) T_{k_1 k_3; k_2 k_4} \right. \\ & C^{(6)}(\Gamma_2 - \Gamma_1) T_{k_1 k_4; k_2 k_3} \\ & C^{(1)} \Gamma_1 E_{k_1 k_2; k_3 k_4} + C^{(1)}(\Gamma_3 + \Gamma_2) D_{k_1 k_2; k_3 k_4} \\ & C^{(2)} \Gamma_2 E_{k_1 k_3; k_2 k_4} + C^{(2)}(\Gamma_1 + \Gamma_3) D_{k_1 k_3; k_2 k_4} \\ & \left. C^{(3)} \Gamma_3 E_{k_1 k_4; k_2 k_3} + C^{(3)}(\Gamma_2 + \Gamma_1) D_{k_1 k_4; k_2 k_3} \right\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Wir müssen wieder fordern, dass

$$D_{rr;rr} = E_{rr;rr} = 0 \quad (2.35)$$

gilt. Die Symmetrie der Vertexparameter muss an die Symmetrie der Basistensoren angepasst sein. Aus den Vertauschungen  $a \leftrightarrow b$ ,  $c \leftrightarrow d$  und  $(a, b) \leftrightarrow (c, d)$  (im  $s$ -Kanal) kann man die folgenden Bedingungen an die Parameter ablesen.

$$X_{ab;cd} = X_{ba;cd} = X_{ab;dc} = X_{cd;ab}, \quad (X = T, E, D) \quad (2.36)$$

Durch diese Mandelstam-symmetrischen Parameter wird gleichzeitig der Ansatz mit minimalen Einschränkungen (und damit maximaler Anzahl der Variablen) definiert, der ohne die Bose-Symmetrie zu verletzen mit drei verschiedenen Parametersätzen formuliert werden kann. Als Spezialfall ist zudem der vorhergehende Ansatz (2.32) in (2.34) enthalten.

Geht man an dieser Stelle systematisch vor, muss man jedem Tensor aus der 15-dimensionalen Tensorbasis einen eigenen Parameter mit passenden Symmetriebedingungen zuordnen. Wir diskutieren die Konsequenzen dieses Ansatzes wieder an Hand der 18 oben vorgestellten Basistensoren.

Zunächst betrachten wir die Koeffizienten, die den Elementen aus der  $A_4$ -Struktur,  $C^{(4)}\Gamma_1$  (und symmetrische) aus Tabelle 2.2, zugeordnet werden müssen. Aus den Vertauschungen im  $s$ -Kanal erhalten wir die folgenden Symmetriebedingungen.

$$A_{ab;cd} = -A_{ba;cd} = -A_{ab;dc} = A_{cd;ab} \quad (2.37)$$

Die partielle Antisymmetrie der Parameter hat jedoch zur Folge, dass eine große Zahl der Koeffizienten identisch verschwinden muss. Für den Approximationsgrad  $r = 1$  verbleibt sogar nur eine von 0 verschiedene Parameterklasse,  $A_{10;10}$ , alle anderen müssen gleich Null sein. Für den allgemeinen Approximationsgrad  $r$  sichert nur die Tatsache, dass  $A_{rr-1;rr-1} \neq 0$  ist, die Existenz von quasiperturbativen Termen der nullten Ordnung. Auch wenn die Terme aus der  $A_4$ -Struktur für eine selbstkonsistente Reproduktion des Ansatzes ohne Nebenbedingungen zugelassen werden müssen, erscheint es aus praktischen Erwägungen zur Begrenzung des Rechenaufwands, der Laufzeit des numerischen Lösungsalgorithmus und nach den Erfahrungen aus dieser Arbeit als effizienter, diese Terme wegzulassen.

Bei den Tensoren aus der  $T_4$ - und  $D_4$ - Struktur muss bei dem systematischen Ansatz jeweils ein eigener Koeffizient für jeden der beiden Summanden in (2.34) definiert werden. Wir erhalten also zwei weitere Parametersätze,  $\{T'\}$  und  $\{D'\}$ . Damit können wir das folgende Beispiel für diesen systematischen Ansatz angeben.<sup>17</sup>

$$\begin{aligned} \Gamma_4 \sim & C^{(4)}\Gamma_3 T_{ab;cd} - C^{(4)}\Gamma_2 T'_{ab;cd} \\ & + C^{(1)}\Gamma_3 D_{ab;cd} + C^{(1)}\Gamma_2 D'_{ab;cd} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Wegen der Vertauschungen im  $s$ -Kanal gelten die folgenden Beziehungen zwischen  $\{T\}$  und  $\{T'\}$  sowie  $\{D\}$  und  $\{D'\}$ .

$$X_{ab;cd} = X'_{ba,cd} = X'_{ab,dc} = X_{cd;ab} \quad \text{für } (X = T, D) \quad (2.39)$$

Man kann (2.38) jedoch in einfacher Weise in einen Mandelstam-symmetrischen und einen partiell antisymmetrischen Teil mit den Parametern  $T^{mand}$  und  $T^{anti}$  bzw.  $D^{mand}$  und  $D^{anti}$  umschreiben.

$$\begin{aligned} (2.38) &= \frac{1}{2}C^{(4)}(T - T')_{ab;cd}(\Gamma_3 + \Gamma_2) + \frac{1}{2}C^{(4)}(T + T')_{ab;cd}(\Gamma_3 - \Gamma_2) \\ &+ \frac{1}{2}C^{(1)}(D + D')_{ab;cd}(\Gamma_3 + \Gamma_2) + \frac{1}{2}C^{(1)}(D - D')_{ab;cd}(\Gamma_3 - \Gamma_2) \\ &= C^{(4)}T_{ab;cd}^{anti}(\Gamma_3 + \Gamma_2) + C^{(4)}T_{ab;cd}^{mand}(\Gamma_3 - \Gamma_2) \\ &+ C^{(1)}D_{ab;cd}^{mand}(\Gamma_3 + \Gamma_2) + \frac{1}{2}C^{(1)}D_{ab;cd}^{anti}(\Gamma_3 - \Gamma_2) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Für die antisymmetrischen Parameter gelten die gleichen Argumente, die wir schon für die antisymmetrischen Parameter aus der  $A_4$ -Struktur angeführt haben. Daher erscheint es aus praktischen Gründen gerechtfertigt, diese Strukturen wegzulassen.

Damit haben wir die Konsequenzen eines systematischen Ansatzes mit den 15 linear unabhängigen Basistensoren für den  $\Gamma_4$ -Vertex untersucht. Im Rest dieser Arbeit werden wir uns auf den in (2.34) definierten Mandelstam-symmetrischen Teil beschränken und den partiell antisymmetrischen vernachlässigen. Auch wenn damit keine vollständig selbstkonsistente Reproduktion der Tensorstrukturen in der  $\Gamma_4$ -BSG erreicht werden kann, ist diese Wahl wegen der oben angeführten Überlegungen geboten.

<sup>17</sup>Dieser Ansatz entspricht dem in [Dri 97] diskutierten.

Mit (2.34) haben wir damit den hinreichend allgemeinen Ansatz gefunden, mit dem eine effektive exploratorische Untersuchung der  $\Gamma_4$ -BSG möglich ist. Zugleich haben wir eine systematische Erweiterung für den in [Dri 97] erstmals diskutierten Ansatz für den  $\Gamma_4$ -Vertex auf einen allgemeinen Approximationsgrad  $r$  angegeben. Auch wenn mit Mandelstam-symmetrischen Parametern eine konsistente Theorie ohne die aus der  $D_4$ - und  $E_4$ -Struktur stammenden Tensoren formuliert werden kann, betrachten wir diesen Fall in dieser Arbeit wegen seiner notwendig starken Einschränkungen an die  $T$ -Parameter nicht.

Um in den folgenden Rechnungen eine kondensierte Schreibweise nutzen zu können, teilen wir die Vertexparameter in drei Mandelstam-Symmetrieklassen ein.

$$\begin{aligned} X^s &= [X_{ab;cd}] \\ X^t &= [X_{ac;db}] \\ X^u &= [X_{ad;bc}] \end{aligned} \tag{2.41}$$

## 2.4 Renormierung

Obwohl sich im nicht-perturbativ erweiterten Ansatz eine Gegenterm-Renormierung [Kug 97] *formal* in bekannter Weise durchführen lässt (die erweiterten Ansätze greifen erst auf der Ebene der Feynman-Graphen), so ergeben sich dennoch einige Probleme bei der konkreten Wahl eines Renormierungsschemas. Dies liegt insbesondere darin begründet, dass der erweiterte Ansatz zu Ergebnissen für die divergenten Anteile der Amplituden führt, die in der perturbativen Theorie nicht vorkommen. Daher lassen sich einige Resultate der perturbativen Renormierung nicht ohne Weiteres übertragen.

Konkret sind zwei Probleme zu lösen. Zunächst muss eine Renormierungsvorschrift gefunden werden, die mit der resurgenten Doppelentwicklung korrespondiert. Wir illustrieren dies anhand eines bosonischen Zweipunktvertex [Sti 01a].

$$\begin{aligned} -\Gamma_2(k^2) &= k^2 \{L_{00} + \mathbb{L}_{01}(t)\bar{g}^2 + \mathbb{L}_{02}(t)\bar{g}^4 + \dots\} \\ &+ \Lambda^2 \{L_{10} + \mathbb{L}_{11}(t)\bar{g}^2 + \mathbb{L}_{12}(t)\bar{g}^4 + \dots\} \\ &+ \frac{\Lambda^4}{k^2} \{L_{20} + \mathbb{L}_{21}(t)\bar{g}^2 + \mathbb{L}_{22}(t)\bar{g}^4 + \dots\} \\ &+ \frac{\Lambda^6}{k^4} \{L_{30} + \dots\} + \dots \end{aligned} \tag{2.42}$$

Hierbei sind die  $\mathbb{L}_{np}$ -Koeffizienten für  $p \geq 1$  ein Polynom  $p$ -ten Grades in

$$t = \frac{1}{2} \log \left( \frac{k^2}{\nu^2} \right) . \tag{2.43}$$

Sofern  $L_{00} = 1$  wie in (1.82) ist, spricht man von der Erhaltung des strikten perturbativen Limes. Diese Struktur reproduziert sich (in der regularisierten Version mit  $\epsilon \neq 0$ ) bei Verwendung in den DSG konsistent und liefert im Allgemeinen in den  $L_{n0}$  und  $\mathbb{L}_{np}$  divergente Beiträge für alle  $n$ . Im Unterschied zur

perturbativen Situation, wo man zeigen kann, dass sich sämtliche Divergenzen proportional zu  $k^2$  mit *einem* Gegenterm beseitigen lassen, muss man hier jedoch mindestens für jede Potenz von  $\Lambda^2$  mit einem unabhängigen Gegenterm rechnen. Zudem sind die für  $n \geq 2$  entstehenden Divergenzen vom Typ

$$\frac{\Lambda^4}{k^2} \frac{1}{\epsilon}, \quad \frac{\Lambda^6}{k^4} \frac{1}{\epsilon}, \quad \dots \quad (2.44)$$

resummierbar zu Approximanten von der Form

$$\frac{\Lambda^4}{k^2 + u_{2s}\Lambda^2} \frac{1}{\epsilon}, \dots \quad (2.45)$$

und führen so auf zwei Probleme. Erstens ist nicht *a priori* klar, dass zur Renormierung dieses einen Vertex eine *endliche* Zahl an Gegentermen ausreicht. Damit würde aus einer prinzipiell renormierbaren Theorie eine unrenormierbare, was den gesamten Ansatz in Frage stellte. Zweitens sind die für diese Art von Divergenz notwendigen Gegenterme von der grundsätzlichen Struktur

$$\frac{1}{\epsilon} \Lambda^4 \int d^4x A(x) \square^{-1} A(x) \quad (2.46)$$

usw. und damit *nichtlokal*, was den Charakter der lokalen Eichtheorie grundlegend änderte. Vor diesem Hintergrund erscheint es als zwingend, von dem Renormierungsschema zu fordern, dass es mindestens die Terme proportional zu  $\Lambda^{2n}$  ( $n \geq 2$ ) schon aus der Renormierung der Anteile proportional zu  $k^2$  und  $\Lambda^2$  *endlich* etablieren muss.<sup>18</sup> Damit ist aber auch begründet, dass man die (perturbativen) Anteile mit  $n = 0$  anders behandelt als die zu  $\Lambda^2$  gehörigen.

Für den hier verfolgten nicht-perturbativ erweiterten Ansatz nach [Sti 96] ist weiterhin wichtig, dass die  $\beta$ -Funktion der renormierten Theorie invariant und auf ihrem perturbativen Wert bleibt. Dies muss insbesondere für  $\beta_0$ , den im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  führenden Term der Entwicklung nach  $g_r$ , gelten.

$$\beta(g_r) = -\epsilon g_r - \beta_0 \frac{g_r^3}{(4\pi)^2} - \dots \quad (2.47)$$

Genau diese Bedingung geht in den Beweis der besonderen Eigenschaften von  $\Pi(\epsilon)$  ein.<sup>19</sup> Damit darf sich über die Wahl des Renormierungsschemas mit der Definition der  $\beta$ -Funktion durch

$$\beta(g_r) = \nu \frac{dg_r}{d\nu} \quad (2.48)$$

hier keine Änderung ergeben. Dies stellt ebenfalls eine starke Einschränkung an die Wahl der Renormierung dar.

<sup>18</sup>Dabei ist keineswegs sicher, dass ein solches Schema existiert. Daher ist es sehr bemerkenswert, dass das im Folgenden diskutierte Selbstkonsistenzverfahren diese Möglichkeit eröffnet.

<sup>19</sup>Die Invarianz der  $\beta$ -Funktion wird auch bei Gitterrechnungen verwendet [MM 94].

### 2.4.1 Renormierungsschemata

Im Rahmen des nicht-perturbativ erweiterten Ansatzes ist es eine Grundannahme, dass man die perturbativen Techniken wegen der asymptotisch freien Form der Erweiterung an den Vertizes weitgehend übernehmen kann. Daher liegt es nahe, das gesuchte Renormierungsschema durch Übertragung der perturbativen Renormierung zu erhalten, wobei wir insbesondere dimensionelle Regularisierung voraussetzen wollen. Wir nehmen an, dass die Renormierung durch Gegenterme zu einer multiplikativen Renormierung äquivalent ist. Wegen der besonderen Stellung der Terme in der ersten Zeile von (2.42) müssen wir allerdings erwarten, dass eine unterschiedliche Behandlung der Terme  $\sim \Lambda^0$  und der Terme  $\sim \Lambda^{2n}$  mit  $n \geq 1$  notwendig ist. In diesem Zusammenhang gehen wir zunächst von einer nicht resummierten Theorie aus, d.h. dass die führenden Koeffizienten der Vertizes auf den perturbativen Wert (d.h. 1) gesetzt sind. Betrachten wir zunächst die naive Übertragung des perturbativen Vorgehens. Dies hat die folgenden Konsequenzen.

- Die Renormierungskonstanten ergeben sich aus den divergenten Anteilen der DSG bzw. BSG.
- Die neuen impulsabhängigen Renormierungskonstanten<sup>20</sup> müssen die gleiche Impulsstruktur wie die Divergenzen der störungstheoretischen Schleifenintegrale aufweisen, um diese kompensieren zu können. Daher kommen zur Abhängigkeit der perturbativen Renormierungskonstante von  $\epsilon$  noch Abhängigkeiten von den äußeren Impulsen und von  $\Lambda$ -Potenzen.
- Die Renormierung sorgt dafür, dass die divergenten Anteile der Schleifenintegrale kompensiert werden, so dass nur konvergente Anteile zurückbleiben. Damit wäre der  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus zur Erzeugung von SKG in der nullten quasiperturbativen Ordnung in  $g^2$  zur Konstruktion von Selbstkonsistenzgleichungen, so wie in [Sti 96] vorgestellt, nicht mehr anwendbar. SKG für die DSG ließen sich allenfalls noch aus den konvergenten Beiträgen gewinnen. Da jedoch endliche Renormierungen immer noch möglich sind, müsste man diese SKG immer an physikalische Werte anpassen, welche entweder nicht bekannt oder aus prinzipiellen Gründen (wie bei Geist-Parametern) gar nicht messbar sind.
- Die STI gälten in diesem Fall für sämtliche Impulskombinationen in den Renormierungskonstanten und müssten an die Stelle der SKG aus dem  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus treten.

Dieses Vorgehen bereitet einige Probleme. Erstens gelingt auf diese Weise keine Lösung der das dynamische Verhalten der Theorie beschreibenden DSG. Deren Lösung verbleibt unklar. Doch gerade Konsequenzen des dynamischen Verhaltens sind das Ziel unserer Untersuchungen. Zweitens muss dann jede Fourier-Komponente renormiert werden. Anstelle einer Renormierungskonstante erhält man eine von den Impulsen abhängige *Renormierungsfunktion*. Es ist

---

<sup>20</sup>Diese Bezeichnung ist der Analogie zum perturbativen Fall geschuldet.

unklar, ob diese von Gegentermen mit einer für beliebiges  $r$  endlichen Anzahl von Parametern geliefert werden kann. Drittens erhält man auf 1-Schleifen-Niveau eine unzureichende Zahl von Bestimmungsgleichungen für die Parameter des erweiterten Ansatzes, so dass nicht sicher gestellt werden kann, dass eine selbstkonsistente Bestimmung aller Parameter aus diesen Gleichungen möglich ist. In der Tat gibt es aus den STI in Landau-Eichung [Mut 87] nur vier linear unabhängige Gleichungen. Auf *1-Schleifen-Niveau* gelten dann die folgenden Gleichungen.

$$Z_1 = \tilde{Z}_1 + Z_3 - \tilde{Z}_3 + \mathcal{O}\left(\frac{g^2}{\epsilon \ln(\epsilon)}, \frac{g^4}{\epsilon}\right) \quad (2.49)$$

$$Z_1 = Z_{1F} + Z_3 - Z_2 + \mathcal{O}\left(\frac{g^2}{\epsilon \ln(\epsilon)}, \frac{g^4}{\epsilon}\right) \quad (2.50)$$

$$\tilde{Z}_1 = Z_{1F} + \tilde{Z}_3 - Z_2 + \mathcal{O}\left(\frac{g^2}{\epsilon \ln(\epsilon)}, \frac{g^4}{\epsilon}\right) \quad (2.51)$$

$$Z_4 = 2Z_1 - Z_3 + \mathcal{O}\left(\frac{g^2}{\epsilon \ln(\epsilon)}, \frac{g^4}{\epsilon}\right) \quad (2.52)$$

Verglichen damit erlauben die DSG und die BSG des 4-Punkt-Vertex selbst ohne die Geist-Vertizes die Konstruktion der SKG aus fünf linear unabhängigen Gleichungen. Sofern wir weiterhin bei der Bestimmung von SKG aus den DSG bleiben wollen, müssen wir daher einen anderen Weg finden, wie wir eine konsistente Renormierung durchführen können.

- Eine wichtige Beobachtung ist, dass der  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus selbst eine Renormierungsmöglichkeit für divergente Terme darstellt: Die divergenten Terme proportional zu  $\frac{\tilde{g}^2}{\epsilon} \Lambda^{-2\epsilon}$  werden in konvergente Terme nullter Ordnung überführt. In der Tat gilt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\tilde{g}^2}{\epsilon} \Lambda^{-2\epsilon} \right)^p = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Pi(\epsilon)^p = \frac{1}{\beta_0^p} \quad . \quad (2.53)$$

So lässt sich in einfacher Weise auch eine Renormierung der Subdivergenzen motivieren.

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon})^p \frac{1}{\epsilon^{p-n}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \left( \frac{\tilde{g}^2}{\epsilon} \Lambda^{-2\epsilon} \right)^p \epsilon^n \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\Pi(\epsilon)^p \cdot \epsilon^n] \\ &= \frac{1}{\beta_0^p} \cdot 0 = 0, \quad (n \geq 0) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Damit hat man ein Schema gefunden, das sich auf alle divergenten Teile der Schleifengraphen anwenden lässt. Dann ist allerdings unklar, auf welche Weise man an dieser Stelle die  $\beta$ -Funktion dieser Renormierung berechnen soll. Gelten die Slavnov-Taylor-Identitäten (und gibt es damit *eine* eindeutige Kopplungskonstante), lässt sich die  $\beta$ -Funktion aus der Kopplungsrenormierung z.B. über

$$Z_g = Z_1 Z_3^{-\frac{3}{2}} \quad (2.55)$$

berechnen. In diesem Schema bleibt dagegen unklar, wie man die  $\beta$ -Funktion ausrechnen kann. Vor allem aber ist nicht sicher gestellt, dass sie auf ihrem perturbativen Wert bleibt, so wie wir das für die Anwendung des  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus voraussetzen müssen. Damit scheidet dieser Ansatz zunächst aus.

- Da die mit  $\Pi(\epsilon)$  zu gewinnenden SKG ihrer Natur nach Gleichungen zwischen endlichen Größen sind, könnte man den Beitrag der Schleifen-Diagramme über  $\Pi(\epsilon)$  als *endliche* Renormierung begreifen. Während die Renormierung also über Gegenterme erfolgt (nach Regularisierung z.B. im  $MS$ -Schema), wird das SKG-System durch die endliche Renormierung erzeugt, die sich aus der Anwendung des  $\Pi(\epsilon)$ -Schemas auf die gleichen Schleifen ergibt, durch die auch die Renormierung festgelegt wird. Notieren wir die Renormierung z.B. multiplikativ, dann wird der aus Gegentermen stammende Teil

$$Z^{MS} = 1 + z_1^{MS} \frac{g^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^2 \epsilon} \quad (2.56)$$

durch eine – in gewisser Weise willkürliche – *endliche* Renormierung (also einen Wechsel des Renormierungsschemas) erweitert zu

$$Z^{\Pi(\epsilon)} = Z^{MS} + \frac{1}{\beta_0} z_1^{MS} \quad . \quad (2.57)$$

Damit erhält man zumindest aus den DSG ein SKG-System, jedoch sind die hierfür nötigen Renormierungskonstanten immer noch von den äußeren Impulsen abhängige *Renormierungsfunktionen*.<sup>21</sup> Ebensovienig ist gesichert, dass die  $\beta$ -Funktion invariant bleibt. Schließlich führt die Anwendung der STI auf diese Funktionen zu starken Einschränkungen. Schon die Frage, wie man die von drei äußeren Impulsen abhängige Renormierungsfunktion des  $\Gamma_4$ -Vertex mit der von einem äußeren Impuls abhängigen Renormierungsfunktion der Propagatoren vergleicht, ist intuitiv nicht befriedigend zu beantworten.

- Wie schon ausgeführt, ist bei der Renormierung des erweiterten Ansatzes eine unterschiedliche Behandlung der perturbativen und der zu Potenzen von  $\Lambda$  proportionalen Terme zu erwarten. Ein weiterer Versuch besteht daher darin, die Gegenterm-Renormierung lediglich an die Terme führender Impulspotenz ( $\sim \Lambda^0$ ) anzupassen. Der andere Teil der Divergenzen würde dann direkt durch den  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus renormiert. Doch auch diese Vorschrift umgeht nicht das Problem der Impulsabhängigkeit der Renormierung. Damit bleiben sämtliche Probleme mit den Renormierungsfunktionen und auch mit der Invarianz der  $\beta$ -Funktion bestehen.
- Die letzte Möglichkeit ist schließlich, die perturbative Renormierung in allen Ordnungen zu übernehmen und die dann noch übrigbleibenden Divergenzen mit  $\Pi(\epsilon)$  zu beseitigen. Diese Renormierungsvorschrift erlaubt es

---

<sup>21</sup>In  $z_1$  ist zur Illustration der Analogie die Impulsabhängigkeit *nicht* notiert.

tatsächlich – auch wenn das Vorgehen sehr radikal erscheint – die Renormierung konsistent durchzuführen. Die perturbativen Renormierungskonstanten erfüllen bekanntlich die STI und mit der BPHZ-Renormierung ist auch das Problem überlappender Divergenzen gelöst. Die Invarianz der  $\beta$ -Funktion ist trivial gegeben. Wir benötigen offensichtlich auch keine erweiterten Ansätze für die Gegenterme – diese bleiben auf ihren perturbativen Werten. Zudem hat die oben erwähnte Eigenschaft des  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus, nicht-führende Divergenzen verschwinden zu lassen, die Konsequenz, dass das Selbstkonsistenz-Problem der nullten quasiperturbativen Ordnung nur von den Divergenzen höchster  $\frac{1}{\epsilon}$ -Potenz bestimmt wird und damit abgeschlossen ist.<sup>22</sup> Wir verwenden daher diese Renormierungsvorschrift bei der Konstruktion der Selbstkonsistenzgleichungen. Ein an dieser Stelle noch ungeklärtes Problem ist, ob die Renormierung mit  $\Pi(\epsilon)$  sich mit einer endlichen Anzahl von Gegentermen beschreiben lässt. Da sich die Eigenschaften von  $\Pi(\epsilon)$  aber schon auf rein perturbativer Ebene herleiten lassen, ist zu vermuten, dass zur Anwendung dieses Mechanismus gerade nur die *perturbativen* Gegenterme benötigt werden.

## 2.5 Schattenpole und punktierte Graphen

Bei der Auswertung von Schleifengraphen in den 3- und 4-Punkt-Vertizes tritt das Problem auf, dass z.B. in der Kombination  $\Gamma_3(q^2, \dots)D(q^2)\Gamma_3(q^2, \dots)$  auf der inneren Gluonlinie nur *ein* Faktor in den Vertex-Polen vom Gluon-Propagator kompensiert werden kann und so *unphysikalische* Pole auf der  $D(q^2)$  zugeordneten inneren Linie auftauchen. In [DKS 99, DS 99] wird ein Mechanismus vorgestellt, der diese unphysikalischen Pole, die ein Artefakt des von uns gewählten Ansatzes sind, konsistent aus den Graphen entfernt, indem die Mandelstam-Kanäle der 1PI Vertexfunktionen (ab  $n = 4$ ) entsprechende Gegenterme liefern. Wir geben eine kurze Illustration des Arguments [Kuh 97].

Für den inversen Fermion-Propagator gilt unter Ausnutzung der entsprechenden DSG die folgende Beziehung.

$$-c_{r,t}^f = \tilde{g}^2 \left[ \text{Diagram} \cdot (\not{p} + \kappa_{r,t}^f) \right]_{\not{p} = -\kappa_{r,t}^f} \quad (2.58)$$

Dabei ist  $c_{r,t}^f$  ein Parameter der reellwertigen Parametrisierung des  $\bar{\Gamma}_2$ -Vertex.

<sup>22</sup>Die nicht-führenden Divergenzen tragen in dem hier verwendeten Schema zu den höheren quasiperturbativen Ordnungen bei. Diese müssen sich aus den Lösungen für die nullte quasiperturbative Ordnung rekursiv ergeben. Auch wenn konvergente Terme in der Entwicklung nach  $\epsilon$  in enger Beziehung zu Messgrößen stehen, ist eine direkte Bestimmung über letztere nicht zulässig. Ein Ziel des SKG-Verfahrens ist es gerade, die Parameter der Theorie aus sich selbst zu bestimmen und damit dann die Messgrößen zu berechnen.

Das Residuum des  $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex in  $\not{p} = -\kappa_{r,t}^{(f)}$  ergibt analog die folgende Relation.

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= \left[ (\not{p} + \kappa_{r,t}^{(f)}) \leftarrow \bar{\Gamma}_3 \right]_{\not{p} = -\kappa_{r,t}^{(f)}} \\
 &= \tilde{g}^2 \left[ (\not{p} + \kappa_{r,t}^{(f)}) \leftarrow \bar{T}_{4s} \right]_{\not{p} = -\kappa_{r,t}^{(f)}} \quad (2.59)
 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist dabei als Bedingung an den  $s$ -Kanal von  $\bar{T}_{4s}$  zu interpretieren, der dort einen Polterm  $\sim (\not{p} + \kappa_{r,t}^{(f)})^{-1}$  haben muss.<sup>23</sup> Dieser Polterm wiederum ist durch die obige Gleichung eindeutig festgelegt. Zugleich haben wir auch eine diagrammatische Repräsentation des Schattenpols eingeführt. Zusammen führen die beiden Gleichungen zu

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= \tilde{g}^2 \left[ \text{Diagram} \cdot \left( -\frac{1}{c_{r,t}^{(f)}} \right) \cdot \text{Diagram} \right]_{\not{p} = -\kappa_{r,t}^{(f)}} \quad (2.60)
 \end{aligned}$$

Dadurch wird der *kompensierende Pol* (oder Schattenpol) in  $\bar{T}_{4s}$  festgelegt. Wir definieren nun eine explizite diagrammatische Repräsentation für sämtliche kompensierenden Pole in diesem Kanal, auch *Schattengraph* genannt.

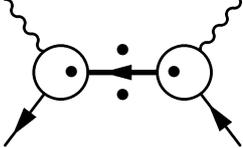
$$\text{Diagram} = \sum_{t=1}^r \text{Diagram} \cdot \left( \frac{-(c_{r,t}^{(f)})^{-1}}{\not{p} + \kappa_{r,t}^{(f)}} \right) \cdot \text{Diagram} \quad (2.61)$$

Man kann nun zeigen [DKS 99, DS 99], dass der hier gewonnene Term genau zur Entfernung der überzähligen und damit unphysikalischen Pole auf der inneren Linie des entsprechenden Austauschgraphen führt und dass sich auf diese Weise ein konsistenter Formalismus zur Entfernung sämtlicher derartiger Artefakte über eine passende Definition entsprechender Mandelstam-Pol-Terme in den höheren  $T$ -Amplituden der QCD erreichen lässt. Mit diesen Ergebnissen kann man nun einen *entschärften* (oder *punktierten*) Austauschgraphen definieren.

$$\text{Diagram} := \bar{\Gamma}_3 \leftarrow \bar{\Gamma}_3 + \text{Diagram} \quad (2.62)$$

<sup>23</sup> $\bar{T}_{4s}$  ist die im  $s$ -Kanal 1PI Amplitude.

Die Wirkung des entschärften Graphen sieht man in der Partialbruchzerlegung für den Austauschgraphen, die nur noch die physikalischen Propagatorpole aufweist.



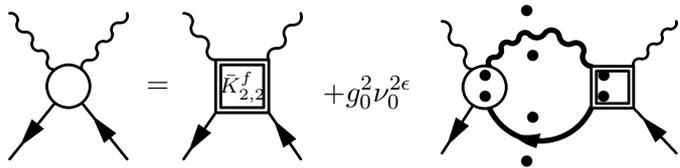
$$= \sum_{t=1}^{r+1} \bar{\Gamma}_{3,f}^{[r,0]}(-p_1, -\hat{\kappa}_{r,t}^f, k_1) \frac{1}{\not{q} + \hat{\kappa}_{r,t}^f} \left( (\not{q} + \hat{\kappa}_{r,t}^f) S_f^{[r,0]}(q) \right) \Big|_{\not{q} = -\hat{\kappa}_{r,t}^f} \bar{\Gamma}_{3,f}^{[r,0]}(-\hat{\kappa}_{r,t}^f, p_2, k_2) \quad (2.63)$$

Im Rahmen dieser Arbeit werden wir – anders als z.B. in [Kuh 97] – immer direkt mit dieser partialbruchzerlegten Form des erweiterten Ansatzes arbeiten. Somit können wir uns auf den Standpunkt stellen, dass die punktierten Vertizes und Propagatoren die eigentlich *physikalischen* sind. Damit ist es auch nicht länger notwendig, Ansätze für die Schattengraphen anzugeben und die Lösung der ihnen zugeordneten DSG [Dri 97, Kuh 97] auszurechnen. Die dafür notwendige selbstkonsistente Reproduktion von Poltermen der Form (2.61) in den DSG für z.B.  $\bar{T}_{4s}$  wurde in [Dri 97] exemplarisch für die 4-Gluon-T-Matrix bewiesen.

Die entschärften inneren Propagator-Linien geben außerdem Anlass zu einem erweiterten Begriff von *Reduzibilität bezüglich gepunkteter Linien*, was bei den weiteren Überlegungen hilfreich sein wird. Wir verstehen darunter die naive Übertragung des bekannten Konzeptes der Reduzibilität auf gepunktete Linien, also auch eine entsprechende Reduzibilität in sogenannten *Schattenpolen*. Hierbei muss man allerdings beachten, dass letztere aus den entsprechenden Kanälen der erweiterten  $T$ -Amplituden stammen.

## 2.6 Bethe-Salpeter-Gleichungen

Für den erweiterten Ansatz müssen die BSG mit entschärften inneren Linien formuliert werden. Dies gelingt problemlos [Kuh 97], indem wir von den BS-Kernen die erweiterte Reduzibilität verlangen. Wir formulieren dies kurz für das schon bekannte Beispiel aus (1.77).



$$\quad (2.64)$$

Dabei muss der hier verwendete BS-Kern  $\bar{K}_{2,2}^f$  im erweiterten Sinne reduziibel sein, d.h. insbesondere, dass er keine expliziten Terme enthält, die einen kompensierenden Pol für Fermion-Linien (bzw. im allgemeinen Fall auch für Gluon-Linien) im s-Kanal liefern.<sup>24</sup> Auch in seiner Skelettgraphen-Zerlegung

<sup>24</sup>Die kompensierenden Pole für die punktierte Schleife der BSG werden damit notwendig der verbleibenden  $\bar{T}_{2,2f}$ -Amplitude erzeugt.

darf dieser Fall nicht vorkommen. Dies ist jedoch schon durch die gewöhnliche Reduzibilitätsbedingung an  $\bar{K}_{2,2f}$  gesichert.

In gleicher Weise lässt sich die BSG natürlich auch im gluonischen Kanal formulieren. Dabei treten allerdings mehr Diagramme auf, da es drei Schleifengraphen gibt. Eine Übersicht über typische BSG, wie wir sie für die Resummation der DSG benötigen, findet sich im Anhang D.

## 2.7 Selbstkonsistenz-Gleichungen

Die grundlegenden Ideen zur Konstruktion der Selbstkonsistenz-Gleichungen wurden schon in Abschnitt 2.4 vorgestellt. Wir fassen hier das Vorgehen auf 1-Schleifen-Niveau kurz zusammen.

Wir werden für die im Folgenden vorgestellten resummierten DSG der QCD die 1-Schleifen-Graphen berechnen. Nachdem jeweils der perturbative Anteil dieser Graphen subtrahiert worden ist, wird mit dem  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus der verbleibende Teil der Divergenzstruktur in eine Modifikation der nullten Ordnung verwandelt. Danach wird die gesamte Gleichung mit dem Nenner des entsprechenden Vertex durchmultipliziert, um sie in eine im Wesentlichen polynomiale Gleichung verwandeln zu können. Aus dieser erhält man die SKG dann durch Koeffizientenvergleich bezüglich der Monome in den  $p_i^2$  bzw.  $p_i$ .<sup>25</sup> Da die resultierenden Gleichungen von einheitlicher Massendimension sind, kann man die  $\Lambda$ -Skala aus den Gleichungen entfernen, wenn man sämtliche Parameter mit der für die jeweilige SKG typischen  $\Lambda$ -Potenz dividiert und eventuelle dimensionsbehaftete Parameter wie z.B.  $\hat{m}_f$  oder  $\kappa_{r,s}^f$  passend umskaliert. In einer masselosen Theorie bereitet dies keine Probleme. Anders als [Kuh 97] gehen wir davon aus, dass auch in einer Theorie mit massiven Fermionen eine formale Skalierung der Strommassen mit der  $\Lambda$ -Skala zulässig ist und entsprechende Terme daher gleichfalls mit dem  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus behandelt werden dürfen. Daher weisen unsere erweiterten Ansätze keine explizite Abhängigkeit von den externen Strommassen auf. Diese gehen lediglich über die perturbativen Größen in die SKG ein und treiben sie so an.

Ein weiterer wesentlicher Unterschied zu älteren Arbeiten ist die Behandlung der nicht-perturbativen Korrekturen des nackten Vertex. Da wir den strikten perturbativen Limes aufgegeben haben, dürfen auch die Monome mit der höchsten Impulspotenz über den  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus jeweils eine SKG liefern.<sup>26</sup>

Die DSG des  $\Gamma_4$ -Vertex hat die unangenehme Eigenschaft, auf 1-Schleifen-Niveau nicht die  $\Gamma_4\Gamma_4$ -Schleife zu entwickeln, die ein wesentlicher Bestandteil für die selbstkonsistente Reproduktion der Tensorstrukturen ist. Daher ist sie für unsere Zwecke weniger geeignet. In der Tat ist gerade dieser für die Renormierungskonstante  $Z_4$  wichtige Graph nur tadpole-artig in der DSG enthalten. Viel geeigneter ist die BSG für diesen Vertex. Die Konstruktion der SKG erfolgt

---

<sup>25</sup>In früheren Arbeiten [DKS 99, DS 99] wurde eine Residuenbildung an den Polen der DSG vorgenommen. Das hier verwendete Schema ist dazu äquivalent, wie in Anhang F anhand einer Modellamplitude vorgeführt wird.

<sup>26</sup>Auf den Sonderfall der Geistschleifen in der DSG des Gluon-Propagators und des  $\Gamma_3$ -Vertex bzw. der BSG des  $\Gamma_4$ -Vertex gehen wir später ein.

in der gleichen Weise wie bei den DSG. Eine gesonderte Resummation der BSG ist nicht erforderlich, weil diese keine expliziten nackten Vertizes aufweist.

Eine weitere für die mathematische Analyse der SKG wichtige Technik ist die Rücknahme der Partialbruchzerlegung, wie sie im Anhang G dargestellt ist. Dadurch werden die zunächst noch in den Parametern scheinbar gebrochen-rationalen Gleichungen zu einem manifest multinomialen Gleichungssystem.



## Kapitel 3

# Resummierte DSG

Wir werden in diesem Kapitel darlegen, wie man durch eine Resummation mit entsprechend angepassten BSG die 3-Punkt-Gleichungen so ändern kann, dass in den nicht-tadpole-artigen Diagrammen nur noch volle Vertizes vorkommen. Dies hat den Vorteil, dass die in den DSG nicht manifeste grundsätzliche Symmetrie der Vertizes bezüglich gleichartiger äußerer Beine schon mit niedrigem Approximationsgrad  $r$  besser dargestellt werden kann. Auf 1-Schleifen-Niveau erwartet man deshalb verbesserte Bestimmungsgleichungen für die erweiterten Parameter.

Die Resummation von DSG ist z.B. für den fermionischen Kanal des  $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex lange bekannt [Dys 49, Kuh 97] und einfach durchzuführen. Mit (1.77) erhält man aus der unresummierten DSG zunächst die folgende Gleichung.

$$\text{Diagram} = \text{Tree} + \tilde{g}^2 \text{Loop} \quad (3.1)$$

Entscheidend ist nun die Frage, ob sich diese Art der Resummierung mit dem oben eingeführten Mechanismus der kompensierenden Pole verträgt, so dass sie auch mit dem von uns genutzten erweiterten Ansatz verwendet werden kann. Stellt man sich auf den Standpunkt, dass die punktierten Graphen die eigentliche physikalische Umsetzung der erweiterten Feynman-Regeln sind, erledigt sich diese Frage in trivialer Weise. Man kann aber darüber hinaus gute Argumente für die Konsistenz dieser Formulierung der DSG mit unserem erweiterten Ansatz finden.

Für den von uns geführten diagrammatischen Beweis der Resummation im erweiterten Schema ist es wichtig zu klären, wie punktierte innere Linien in Verbindung mit einem perturbativen Vertex zu behandeln sind. Betrachtet man die Interpretation eines punktierten Graphen in (2.63), so geht eine punktierte Linie bei einem perturbativen Vertex in ihr unpunktirtes Gegenstück über.

Vor diesem Hintergrund kann man die folgende Identität angeben.

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} \quad (3.2)$$

Verfolgt man die Herkunft der kompensierenden Pole aus den Mandelstam-Kanälen der Vertizes höherer Stufe, begründet sich diese Gleichung aus der Tatsache, dass ein solcher Vertex  $X$ , kombiniert mit einem nackten Vertex und den vollen Propagatoren, die überflüssigen Pole auf den inneren Linien gar nicht erst ausbildet. Daher kann ein solches Diagramm keine kompensierenden Terme für die Schleife liefern. Anders gesagt: eine entsprechende Residuenbildung an den Anteilen aus den Mandelstam-Polen von  $X$  liefert keine Beiträge.

Die Resummation der DSG mit der punktierten BSG (2.64) resultiert dann in der folgenden Rechnung [Kuh 97].

$$\begin{aligned} & \text{Diagram 1} \\ = & \text{Diagram 2} + \tilde{g}^2 \text{Diagram 3} \\ & + \tilde{g}^4 \text{Diagram 4} \\ = & \text{Diagram 5} + \tilde{g}^2 \text{Diagram 6} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dabei darf die letzte Gleichung nur im Sinne der Partialbruchzerlegung gemäß (2.63) gelesen werden.<sup>1</sup>

Für den  $\tilde{\Gamma}_3$ -Vertex im Geist-Kanal lässt sich eine analoge Gleichung aufstellen. Die Resummation im gluonischen Kanal lässt sich dagegen mit den etablierten BSG nicht erreichen. Kern des Problems ist hierbei die Präsenz des  $\Gamma_4$ -Vertex in den DSG, die notwendig auf 2-Schleifen-Graphen führt.

<sup>1</sup>Der volle  $\tilde{\Gamma}_3$ -Vertex kann nach Konstruktion des erweiterten Ansatzes keine kompensierenden Pole aus Mandelstam-Kanälen entwickeln. Ebenso wenig können nach der Definition der im erweiterten Sinne reduzierbaren BS-Kerne in Abschnitt 2.5 von diesen die kompensierenden Pole geliefert werden. In der zweiten Zeile von (3.3) stellt dies noch kein Problem dar, da die kompensierenden Pole dort von der  $T$ -Amplitude erzeugt werden. In der partialbruchzerlegten Form sind Terme für kompensierende Pole dagegen nicht mehr explizit nötig.

### 3.1 Angepasste BSG

Die wesentliche Idee zur Resummation der DSG auch im gluonischen Kanal ist die Überlegung, dass die übliche Art der Reduzibilitätsanalyse in den BSG keine gluonischen 2-Schleifen-Terme erzeugen kann. Diese sind für eine Resummation aber unabdingbar. Wir müssen die BSG daher mit einem modifizierten Reduzibilitätsbegriff aufstellen und fordern daher von den BS-Kernen 1- und 2-Teilchen-irreduzibel in einem Kanal<sup>2</sup> zu sein und in diesem zusätzlich 3-Gluonlinien-Irreduzibilität aufzuweisen. Diese Forderung lässt wegen der Erhaltung der Fermionenzahl insbesondere die oben verwendete gewöhnliche BSG im fermionischen Kanal invariant. Wir geben an dieser Stelle als Beispiel für eine so erhaltene BSG die der  $T_{2,2s}$ -Amplitude im  $s$ -Kanal an. Dabei verzichten wir im Sinne einer übersichtlicheren Darstellung bei den Graphen auf die Punkte, die Übertragung ist trivial.

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram} = \text{Diagram} + \frac{1}{2} \tilde{g}^2 \text{Diagram} \\
 & + \frac{1}{6} \tilde{g}^4 \text{Diagram} \\
 & - \tilde{g}^2 \text{Diagram} \\
 & - \tilde{g}^2 \sum_f \text{Diagram}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Strukturell ähnliche Gleichungen finden sich für die übrigen Amplituden mit 2 linken Beinen. Darüber hinaus benötigen wir noch die BSG für Amplituden mit 3 linken Gluonbeinen. Diese unterscheiden sich von (3.4) durch das Auftauchen von zusätzlichen strukturellen Termen. In der BSG zu  $T_{3,2s}$  erscheinen z.B. Terme von der Struktur  $\frac{3}{2} \Gamma_3 DK_{2,2s}$  und  $\frac{1}{2} T_{2,2s} DDK_{3,2s}$ . Die entsprechende Gleichung sowie die Erklärung der Vorfaktoren finden sich im Anhang D.

### 3.2 DSG im gluonischen Kanal

Mit den oben hergeleiteten modifizierten BSG kann man nun wie in (3.3) durch Einsetzen in die unresummierten DSG und symbolisches Umklammern der Untergraphen die gluonischen Kanäle der Basis-Vertizes resumieren [Wie 01a].

<sup>2</sup>Wir verwenden in unseren Beispielen stets den  $s$ -Kanal.

Wir notieren hier abschließend als Beispiel die DSG des  $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex.

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram of } \bar{\Gamma}_3 \\
 = & \text{Tree-level vertex} + \frac{1}{2} \tilde{g}^2 \text{Diagram 1} \\
 & + \frac{1}{6} \tilde{g}^4 \text{Diagram 2} - \tilde{g}^2 \text{Diagram 3} - \tilde{g}^2 \sum_f \text{Diagram 4}
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

# Kapitel 4

## BSG des $\Gamma_4$ -Vertex

Da die DSG des  $\Gamma_4$ -Vertex für 1-Schleifen-Rechnungen weniger geeignet ist, verwenden wir die entsprechenden BSG. Um die dem  $\Gamma_4$ -Vertex inhärente Symmetrie zu erhalten, werden wir eine BSG aufstellen müssen, die Reduzibilität in allen drei Mandelstam-Kanälen betrachtet, so dass wir eine Gleichung für die 1PI Amplitude  $\Gamma_4$  bekommen. Wir arbeiten bei unserer Darstellung wiederum mit allgemeinen, unpunktieren Graphen.

Die BSG für die im  $s$ -Kanal 1PI  $T_{2,2}^s$ -Amplitude haben wir bereits in verkürzter Notation in (3.4) gegeben. Da wir hier mit 2-Teilchen-irreduziblen (2PI) BS-Kernen arbeiten, wiederholen wir sie an dieser Stelle mit passender Benennung der Vertizes und unter Berücksichtigung der modifizierten Reduzibilitätsanforderungen an die BS-Kerne.

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram of } T_{2,2}^s = \text{Diagram of } L_{2,2}^s + \frac{1}{2} \tilde{g}^2 \text{Diagram of } T_{2,2}^s L_{2,2}^s \\
 & - \tilde{g}^2 \text{Diagram of } \tilde{T}_{2,2}^s \tilde{L}_{2,2}^s \\
 & - \tilde{g}^2 \sum_f \text{Diagram of } \tilde{T}_{2,2}^s \tilde{L}_{2,2}^s \text{ with loop}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Hierbei bedeutet der Index  $s$  bei den  $T$ -Amplituden die übliche 1PI im  $s$ -Kanal, bei den BS-Kernen  $L$  dagegen 1PI *und* 2PI im  $s$ -Kanal. Der hier auftretende Kern  $L_{2,2}^s$  enthält nach Konstruktion noch die Austauschgraphen im  $t$ - und  $u$ -Kanal und ist in diesen daher lediglich zusammenhängend. Wir interessieren uns nun für die BSG dieses Kerns im  $u$ -Kanal.<sup>1</sup> Dazu führen wir bei den

<sup>1</sup>Wir weisen nochmals darauf hin, dass die Rolle der Mandelstam-Variablen  $t$  und  $u$  gegenüber der in der Literatur üblichen vertauscht ist.

BS-Kernen den unteren Index ein, der 1PI in den jeweiligen Kanälen anzeigt. Nachdem der  $u$ -Kanal-Austauschgraph aus  $L_{2,2s}^s$  entfernt wurde (er wird durch den entsprechenden Beitrag aus  $T_{2,2}^s$  kompensiert und erzeugt so  $T_{2,2}^{su}$ ), müssen wir die BSG für  $L_{2,2su}^s$  aufstellen [BL 77].

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram } L_{su}^s = \text{Diagram } L_{su}^{su} + \frac{1}{2} \tilde{g}^2 \text{Diagram } L_u^u \text{ with } T^u \text{ loop} - \tilde{g}^2 \text{Diagram } L_u^u \text{ with } \tilde{T}^u \text{ loop} \\
 & - \tilde{g}^2 \sum_f \text{Diagram } L_u^u \text{ with } \tilde{T}_u^u \text{ loop} - \tilde{g}^2 \text{Diagram } \text{Square with 4 circles} \\
 & + \tilde{g}^2 \text{Diagram } \text{Square with 4 circles and arrows} + \text{umgekehrte Pfeilrichtung} \\
 & + \tilde{g}^2 \sum_{f, f'} \text{Diagram } \text{Square with 4 circles and arrows } f, f' + \text{umgekehrte Pfeilrichtung} \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Dabei sind die letzten drei Diagramme 2PR im  $s$ -Kanal. Sie kompensieren so die Terme, die in den ersten drei Schleifengraphen durch die Präsenz der Austauschgraphen im  $s$ -Kanal in den  $T$ -Amplituden und BS-Kernen erzeugt werden, obwohl sie aus  $L_s^s$  schon eliminiert wurden. Die Erzeugung dieser sogenannten *Überzählungskorrekturen* ist auch der wesentliche Vorteil der Beschränkung auf 2PI BS-Kerne. Nähme man die 3-Gluonlinien-Irreduzibilität mit hinzu, müsste man Korrekturterme von der Struktur  $\{\Gamma_3 D \Gamma_3\} DD \{T_{2,2s} DDT_{2,2s}\}$  im  $u$ -Kanal betrachten. Dies wäre mit einigem Aufwand verbunden, lieferte aber nur Beiträge zur 2-Schleifen-Ordnung, die wir bei unseren weiteren Rechnungen igno-

rieren werden. Der Preis dafür ist eine neuer Satz BS-Kerne. Weil wir diese ebenfalls durch Skelettgraphenentwicklung behandeln können, hat dies keine weiteren Konsequenzen.

Stellt man nun noch die BSG für den  $L_{sut}^{su}$ -Kern auf und kombiniert man die Gleichungen, erhält man das folgende Ergebnis. Dabei ist  $M_4$  der in allen Kanälen 1PI und 2PI BS-Kern. Für  $T^{stu}$  setzen wir  $\Gamma_4$  ein, den vollen 4-Gluon-Vertex, für den wir den quasiperturbativen Ansatz nullter Ordnung bestimmen wollen.

$$\begin{aligned}
 \Gamma_4 &= M_4 + \frac{1}{2}\tilde{g}^2 \left( T_{2,2}^s L_{2,2}^s + T^u L_u^u + T^t L_t^t \right) \\
 &\quad - \tilde{g}^2 \sum_f \left( \bar{T}_{2,2}^s \bar{L}_{2,2}^s + \bar{T}_u^u \bar{L}_u^u \right) \\
 &\quad - \tilde{g}^2 \sum_f \left( T^t L_t^t \right) \\
 &\quad - \tilde{g}^2 \left( \tilde{T}_{2,2}^s \tilde{L}_{2,2}^s + \tilde{T}_u^u \tilde{L}_u^u + T^t L_t^t \right)
 \end{aligned}$$

+ t- und u-Kanal  
 + drei Diagramme mit  
 umgekehrter  
 Pfeilrichtung

+ t- und u-Kanal  
 + drei Diagramme mit  
 umgekehrter  
 Pfeilrichtung

(4.3)

Die hier auftretenden Korrekturterme wie der Boxgraph  $\{\Gamma_3 D \Gamma_3 D \Gamma_3 D \Gamma_3 D\}$  entstehen dadurch, dass die nur in einem Kanal reduzierbaren Kerne und Amplituden der BSG überzählige Graphen produzieren, die in dieser Form der BSG explizit subtrahiert werden müssen. Hätten wir von Anfang an mit 3-Gluonlinien-Irreduzibilität gearbeitet, wären an dieser Stelle eine Vielzahl solcher Überzählungskorrekturen zu beachten.

Es ist nicht selbstverständlich, dass diese Gleichung forminvariant beim Übergang zu der in Abschnitt 2.5 definierten erweiterten Irreduzibilität ist, d.h. beim Ersetzen der partiell 1PI Amplituden durch sogenannte 1PI und 1-Schatten-irreduzible Amplituden auf beiden Seiten der Gleichung. Diese Eigenschaft wurde in [DS 99] für den vergleichbaren Fall der  $\Gamma_4$ -DSG bewiesen. Daher kann (4.3) unverändert für das nicht-perturbativ erweiterte Schema übernommen werden und wird so in Kapitel 6 für die nullte quasiperturbative Ordnung ausgewertet. Dabei werden wir zur Vereinfachung die Bezeichnungen aus (4.3) auch für die erweitert irreduziblen Amplituden übernehmen.

Auch für den in (4.3) vorkommenden 1PI und 2PI BS-Kern  $M_4$  könnte man

noch eine BSG aufstellen. Diese involvierte dann partiell 3PI BS-Kerne. Zudem tragen die Terme aus der  $M_4$ -BSG nur zu den 2-Schleifen-Graphen bei. Daher verzichten wir auf eine Ausformulierung. Für  $M_4$  können wir in nullter quasiperturbativer Näherung auf Grund der hohen Reduzibilitätsvoraussetzungen den nackten 4-Gluon-Vertex  $\Gamma_4^{(0,pert)}$  ansetzen. Denn die darüber hinausgehenden Terme haben, wie von Baker und Lee gezeigt [BL 77], einerseits sogar mindestens drei Schleifen, andererseits aber nur eine sogenannte *Overall-Divergenz*. Das bedeutet, dass sie nur *einen* Faktor  $\frac{1}{\epsilon}$  entwickeln können und so über den  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus höchstens Terme der Ordnung  $\tilde{g}^4$ , jedoch keine  $\sim \tilde{g}^0$  erzeugen. Mit anderen Worten:  $M_4^{(0)} = \Gamma_4^{(0,pert)}$  ist *exakt*. Damit haben wir für die Bestimmung der nullten quasiperturbativen Ordnung eine Gleichung, die in ihrer Struktur der  $\Gamma_4$ -DSG ähnlich, aber voll crossing-symmetrisch ist und mit den für die DSG entwickelten Methoden behandelt werden kann.



# Kapitel 5

## Die Dyson-Schwinger-Gleichungen der QCD

Mit den Dyson-Schwinger-Gleichungen der QCD können die vollen, nicht-perturbativen Amplituden untersucht werden. Die Vertizes bis zur ersten Schleifenordnung werden sowohl perturbativ als auch resummiert nicht-perturbativ vorgestellt und ihre führenden divergenten Teile berechnet. Bei der Präsentation dieser Gleichungen werden die Symmetrie-Faktoren aus den Feynman-Regeln explizit angegeben, ebenso Vorzeichen aus der Fermi-Statistik.

### 5.1 Die DSG des Gluon-Propagators

$$\begin{aligned}
 - \left[ \text{wavy line} \right]^{-1} &= - \left[ \text{wavy line} \right]^{-1} + \frac{1}{2} \tilde{g}^2 \text{ (self-energy loop)} \\
 &+ \frac{1}{2} \tilde{g}^2 \text{ (ghost loop)} \\
 &+ \frac{1}{6} \tilde{g}^4 \text{ (box diagram } T_4) \\
 &- \tilde{g}^2 \text{ (triangle diagram } \tilde{\Gamma}_3) \\
 &- \tilde{g}^2 \sum_f \text{ (triangle diagram } \tilde{\Gamma}_3)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

### Perturbative Ergebnisse

Aus den perturbativen 1-Schleifen-Rechnungen sind die Divergenzen des Gluon-Propagators gut bekannt. Wir führen hier nur die transversalen Anteile auf, da in Landau-Eichung die longitudinalen Anteile verschwinden müssen.

- Gluonschleife

$$\frac{1}{2}\tilde{g}^2 \text{ (Gluon loop) } \sim \frac{25}{4}\delta_{ab}t^{\mu\nu}(k)\frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2\epsilon}k^2 \quad (5.2)$$

- Tadpole

$$\frac{1}{2}\tilde{g}^2 \text{ (Tadpole) } \sim 0 \quad (5.3)$$

Dieses Resultat entsteht durch das bekannte Verschwinden skalenfreier Integrale in dimensioneller Regularisierung.

- Geistschleife

$$\tilde{g}^2 \text{ (Ghost loop) } \sim -\frac{1}{4}\delta_{ab}t^{\mu\nu}(k)\frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2\epsilon}k^2 \quad (5.4)$$

- Fermionschleife

$$\tilde{g}^2 \sum_f \text{ (Fermion loop) } \sim \sum_f \frac{2}{3}\delta_{ab}t^{\mu\nu}(k)\frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2\epsilon}k^2 \quad (5.5)$$

### Die Gluonschleife

Nichtperturbativ ist zu lösen:

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{g}^2}{2} \text{ (Gluon loop with } \Gamma_3 \text{)} \\ &= \frac{\tilde{g}^2}{2} \int \bar{d}^D q i f_{am_1 n_1} t^{\mu\mu'}(k) [(-k-b)^{\beta_1} \delta^{\mu'\alpha_1} + (b-a)^{\mu'} \delta^{\alpha_1\beta_1} + (a+k)^{\alpha_1} \delta^{\mu'\beta_1}] \\ & \quad \times D_{m_1 m_2}^{\beta_1\beta_2}(b) D_{n_1 n_2}^{\alpha_1\alpha_2}(a) i f_{bn_2 m_2} t^{\nu\nu'}(k) \left[ (k+a)^{\alpha_2} \delta^{\nu'\beta_2} F^r(k^2, a^2; b^2) \right. \\ & \quad \left. + (b-a)^{\nu'} \delta^{\beta_2\alpha_2} F^r(a^2, b^2; k^2) + (-b-k)^{\beta_2} \delta^{\alpha_2\nu'} F(b^2, k^2; a^2) \right] . \end{aligned} \quad (5.6)$$

Es ergibt sich hier für die Kontraktion der Farbindices:

$$i f_{amn} i f_{bnm} = 3\delta_{ab} \quad . \quad (5.7)$$

Für das Schleifenintegral erhält man damit (cf. [Wie 01]):

$$\begin{aligned}
I &\sim \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \frac{1}{b^2} \delta_{ab} t^{\mu\nu}(k) \left[ \prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,s} \Lambda^2) \right]^{-1} \\
&\times \sum_{m=0}^r \left\{ \Lambda^{2(r-m)} k^{2(m+1)} \left[ \frac{15}{2} C_{mr;r}^r - \frac{5}{4} C_{rr;m}^r \right] \right. \\
&\quad \left. - 9 \Lambda^{2(r+1-m)} k^{2m} \left( -C_{r-1r;m}^r + C_{rr;m}^r \varsigma_1 \right) \right\} . \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Zur Definition von  $\varsigma_r$  siehe Anhang B.2.

### Der Tadpole

$$\begin{aligned}
&\frac{\tilde{g}^2}{2} \text{Diagram: a wavy line with a tadpole loop} \\
&= \frac{\tilde{g}^2}{2} \int \bar{d}^D q t^{\mu\kappa_1}(k) t^{\nu\kappa_2}(k) D_{cd}^{\kappa_3\kappa_4}(q) \left[ C_{abcd}^{(4)} \Gamma_4^{\kappa_1\kappa_4\kappa_2\kappa_3} \right. \\
&\quad \left. + C_{ac,db}^{(5)} \Gamma_5^{\kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4} + C^{(6)} \Gamma_6^{\kappa_1\kappa_3\kappa_4\kappa_2} \right] \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Kontraktion der Farbindizes und der Lorentztensoren führt auf

$$I \sim \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \delta_{ab} t^{\mu\nu}(k) \frac{1}{b} \frac{27}{4} \Lambda^2 (\varsigma_1 - \sigma_1) . \quad (5.10)$$

Die  $\sigma_r$  sind in Anhang B.2 definiert.

### Die Geistschleife

Dieser Graph lässt sich besonders einfach berechnen.

$$\begin{aligned}
&\frac{\tilde{g}^2}{2} \text{Diagram: a wavy line with a ghost loop} \\
&\sim - \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \right) \frac{1}{b^2} \delta_{ab} t^{\mu\nu}(k) \frac{1}{4} k^2 \Lambda^{2\epsilon} \quad (5.11)
\end{aligned}$$

Das ist bis auf die Modifikation aus dem nicht-perturbativen Limes des Geist-Propagators das perturbative Resultat. Dabei haben wir hier passend mit  $\Lambda^{2\epsilon}$  erweitert, um die für die Anwendung des  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus notwendige  $\Lambda$ -Potenz einzufügen. Damit auch die Geistschleife zu den quasiperturbativen Termen nullter Ordnung beitragen kann, muss man die folgende Entwicklung durchführen

$$\Lambda^{2\epsilon} = 1 + \epsilon \ln(\Lambda^2) + \mathcal{O}(\epsilon, \ln \epsilon) \quad (5.12)$$

und nach dem ersten Term abbrechen. Dies erscheint auf den ersten Blick als recht willkürlich, ist aber aus zwei Gründen gerechtfertigt. Erstens haben wir eine nicht-perturbative Modifikation für den Geist-Propagator zugelassen. Daher kann man durchaus den multiplikativen Faktor  $\tilde{b}$  mit dem notwendigen Faktor  $\Lambda^\epsilon$  versehen.<sup>1</sup> Zweitens verschwinden die Polfaktoren des Geist-Propagators nur in Landau-Eichung, d.h. in allen anderen Eichungen entwickelt die Geistschleife ohne weiteres die für den  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus nötigen Terme.

### Die Fermionschleife

$$\begin{aligned}
& \tilde{g}^2 \sum_f \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\
&= \tilde{g}^2 \sum_f t^{\mu\mu'}(k) t^{\nu\nu'}(k) \int \bar{d}^D q \text{Tr} \left\{ \gamma^{\mu'} T_a^{ij} S_f^{il}(b) \right. \\
& \quad \left. T_b^{kl} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{b} + \kappa_{r,s}^f)} \frac{N^\nu(-\not{b}, -\not{q}, k)}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (-\not{q} + \kappa_{r,s}^{(f)})} S_f^{kj}(-a) \right\} \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Für die Kontraktion der Farbtensorstruktur gilt:

$$T_a^{ij} \delta^{il} T_b^{kl} \delta^{kj} = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad . \quad (5.14)$$

Auch hier sei für die Berechnung des Impulsintegrals auf [Wie 01a] verwiesen. Weitere Details finden sich auch bei [Pot 00, Kuh 97]. Man erhält das folgende Ergebnis.<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
I &\sim 2 \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \delta_{ab} t^{\mu\nu}(k) \left[ \prod_{s=1}^r k^2 + u_{r,s} \Lambda^2 \right]^{-1} \sum_f \sum_{m=0}^r k^{2m} \\
& \quad \left[ \frac{1}{3} k^2 \bar{C}_{m;rr}^{r,f} - \bar{C}_{m;r-1,r-1}^{r,f} + \bar{C}_{m;r-2,r}^{r,f} + \bar{C}_{m;r-1,r}^{r,f} \varpi_1^f - \bar{C}_{m;rr}^{r,f} \varpi_2^f \right] \quad (5.15)
\end{aligned}$$

Die Definition für  $\varpi_r^f$  kann in Anhang B.2 nachgelesen werden.

## 5.2 Die DSG des Fermion-Propagators

Die DS-Gleichung des Fermion-Propagators lautet.

$$-\left[ \text{---} \leftarrow \text{---} \right]^{-1} = -\left[ \text{---} \leftarrow \text{---} \right]^{-1} + \tilde{g}^2 \text{---} \circlearrowleft \text{---} \quad (5.16)$$

<sup>1</sup>Bei dem Gluon-Faktor  $b$  wird dieser Faktor dann immer gemäß (5.12) entwickelt.

<sup>2</sup>Man beachte, dass gegenüber den genannten Arbeiten die explizite Abhängigkeit des  $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex von den Fermion-Strommassen eliminiert wurde.

Damit ist die DSG schon auf 1-Schleifen-Niveau *exakt*.

### Perturbative Ergebnisse

$$\tilde{g}^2 \left[ \text{Diagram: a loop with a wavy line and a ghost line} \right] \sim -4 \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \delta^{ij} \hat{m}_f \quad (5.17)$$

Dass hier kein Term  $\sim \not{p}$  auftaucht, ist eine Besonderheit der Landau-Eichung.

### Nicht-perturbative Ergebnisse

$$\begin{aligned} & \tilde{g}^2 \left[ \text{Diagram: a loop with a wavy line and a ghost line, with a circle labeled } \bar{\Gamma}_3 \text{ inside} \right] \\ &= \tilde{g}^2 \int \bar{d}^D q \gamma^\mu T_a^{ik} S_f^{kl}(b) T_b^{lj} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,s}^{(f)})} \frac{N^\nu(\not{p}, \not{k}, a^2)}{\prod_{s=1}^r (a^2 + u_{r,s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{k} + \kappa_{r,s}^{(f)})} \\ & \quad \times D_{ab}^{\mu\nu}(a^2) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Die Kontraktion der Farbindices ergibt:

$$T_a^{ik} \delta^{kl} T_b^{lj} \delta_{ab} = \frac{4}{3} \delta^{ij} \quad . \quad (5.19)$$

Mit der Lösung des Impulsintegrals, die sich wiederum detailliert in [Wie 01a] und [Kuh 97] findet, erhält man das folgende Resultat.

$$I \sim 4 \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \frac{1}{b} \delta^{ij} \left[ \prod_{s=1}^r \not{k} + \kappa_{r,s}^{(f)} \right]^{-1} \sum_{n=0}^r \not{k}^n (\bar{C}_{r;r-1,n}^{f,r} - \bar{C}_{r;r,n}^{f,r} \varpi_1^f) \quad (5.20)$$

## 5.3 Die DSG des Geist-Propagators

Die Gleichung des Geist-Propagators ist strukturell gleich der vorher behandelten Gleichung für den Fermion-Propagator.

$$- \left[ \text{Diagram: a dashed line with an arrow} \right]^{-1} = - \left[ \text{Diagram: a dashed line with an arrow} \right]^{-1} + \tilde{g}^2 \left[ \text{Diagram: a loop with a wavy line and a ghost line, with a circle labeled } \tilde{\Gamma}_3 \text{ inside} \right] \quad (5.21)$$

Auch diese Gleichung ist damit auf 1-Schleifen-Niveau exakt.

### Perturbative Ergebnisse

$$\tilde{g}^2 \left[ \text{Diagram: a loop with a wavy line and a ghost line} \right] = -\frac{9}{4} \frac{1}{\epsilon} \tilde{g}^2 \delta_{ab} k^2 \quad (5.22)$$

### Nicht-perturbative Ergebnisse

Für den einzigen divergenten Graphen findet man:

$$\tilde{g}^2 \leftarrow \text{---} \left( \text{---} \right) \leftarrow \text{---} \sim -\frac{9}{4} \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \frac{1}{b} \delta_{ab} k^2 \quad . \quad (5.23)$$

Dieses Ergebnis entspricht in erster Näherung in  $\epsilon$  bis auf die den perturbativen Limes modifizierende Konstante aus dem Gluonpropagator dem perturbativen Ergebnis. Dies ist der Grund, warum eine Einführung einer ebensolchen Modifikation auch für den Geist-Propagator notwendig ist.

### 5.4 Der 3-Gluon-Vertex

Die DS-Gleichung des 3-Gluon-Vertex lautet wie folgt.

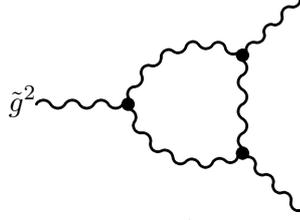
$$\begin{aligned} & \text{---} \left( \Gamma_3 \right) \text{---} \\ = & \text{---} \left( \Gamma_3 \right) \text{---} + \frac{1}{2} \tilde{g}^2 \text{---} \left( \text{---} \right) \text{---} \\ & + \frac{1}{2} \tilde{g}^2 \text{---} \left( \Gamma_3 \right) \text{---} + \frac{1}{2} \tilde{g}^2 \text{---} \left( \Gamma_3 \right) \text{---} \\ & + \frac{1}{6} \tilde{g}^4 \text{---} \left( \text{---} \right) \text{---} - \tilde{g}^2 \text{---} \left( \text{---} \right) \text{---} \\ & - \tilde{g}^2 \sum_f \text{---} \left( \text{---} \right) \text{---} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Wir berechnen nacheinander die Divergenzen der führenden 1-Schleifen-Terme. Diese entstehen durch das Entwickeln der im  $s$ -Kanal irreduziblen Kerne bezüglich der vollen Basisvertizes der Theorie. Da diese vollständig punktierten Graphen noch in keiner Publikation ausführlich berechnet wurden, werden wir auf die wichtigsten Details der Rechnung eingehen.

### Perturbative Ergebnisse

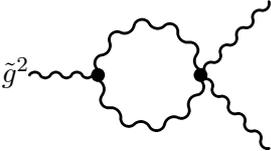
Die Ergebnisse für die Divergenzen der perturbativen Schleifen sind wohl bekannt [PT80].

- Gluon-Dreiecks-Schleife



$$\begin{aligned} & \sim i \frac{3}{2} f_{a_1 a_2 a_3} \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \delta^{\mu'_1 \mu'_2} (p_1 - p_2)^{\mu'_3} + \delta^{\mu'_1 \mu'_3} (p_3 - p_1)^{\mu'_2} \right. \\ & \quad \left. + \delta^{\mu'_2 \mu'_3} (p_2 - p_3)^{\mu'_1} \right\} \end{aligned} \quad (5.25)$$

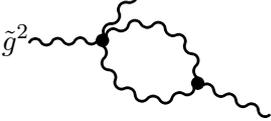
- Tadpole-artige Terme



$$\sim i \frac{45}{4} f_{a_1 a_2 a_3} \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \delta^{\mu'_1 \mu'_3} p_1^{\mu'_2} - \delta^{\mu'_1 \mu'_2} p_1^{\mu'_3} \right\} \quad (5.26)$$

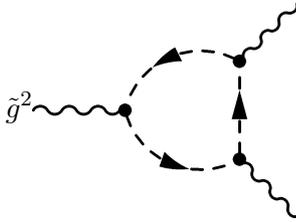


$$\sim i \frac{45}{4} f_{a_1 a_2 a_3} \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \delta^{\mu'_3 \mu'_2} p_3^{\mu'_1} - \delta^{\mu'_3 \mu'_1} p_3^{\mu'_2} \right\} \quad (5.27)$$



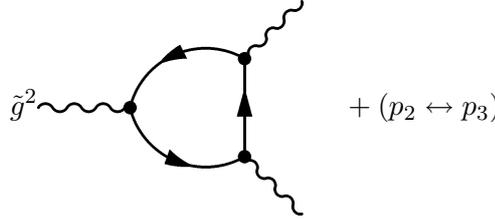
$$\sim i \frac{45}{4} f_{a_1 a_2 a_3} \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \delta^{\mu'_2 \mu'_1} p_2^{\mu'_3} - \delta^{\mu'_2 \mu'_3} p_2^{\mu'_1} \right\} \quad (5.28)$$

- Geist-Dreiecks-Schleife



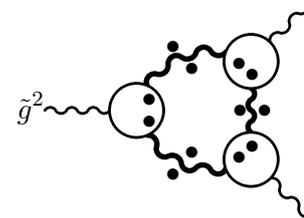
$$\begin{aligned} & + (p_2 \leftrightarrow p_3) \\ & \sim -i \frac{1}{8} f_{a_1 a_2 a_3} \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \delta^{\mu'_1 \mu'_2} (p_1 - p_2)^{\mu'_3} + \delta^{\mu'_1 \mu'_3} (p_3 - p_1)^{\mu'_2} \right. \\ & \quad \left. + \delta^{\mu'_2 \mu'_3} (p_2 - p_3)^{\mu'_1} \right\} \end{aligned} \quad (5.29)$$

- Fermion-Dreiecks-Schleife



$$\begin{aligned} & \sim -i \sum_f \frac{2}{3} f_{a_1 a_2 a_3} \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \delta^{\mu'_1 \mu'_2} (p_1 - p_2)^{\mu'_3} + \delta^{\mu'_1 \mu'_3} (p_3 - p_1)^{\mu'_2} \right. \\ & \quad \left. + \delta^{\mu'_2 \mu'_3} (p_2 - p_3)^{\mu'_1} \right\} \end{aligned} \quad (5.30)$$

#### 5.4.1 Die Gluon-Dreiecks-Schleife



$$\begin{aligned} = & \tilde{g}^2 \int \bar{d}^D q i f_{a_1 k_1 m_1} t^{\mu_1 \mu'_1}(p_1) [\delta^{\mu'_1 \alpha_1} (p_1 + A)^{\gamma_1} F(p_1^2, \dot{A}^2; \dot{C}^2) \\ & + \delta^{\alpha_1 \gamma_1} (-A - C)^{\mu'_1} F(\dot{A}^2, \dot{C}^2; p_1^2) + \delta^{\gamma_1 \mu'_1} (C - p_1)^{\alpha_1} F(\dot{C}^2, p_1^2; \dot{A}^2)] \\ & \times D_{k_1 k_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(\dot{A}) i f_{k_2 a_2 l_2} t^{\mu_2 \mu'_2}(p_2) [\delta^{\alpha_2 \mu'_2} (A - p_2)^{\beta_2} F(\dot{A}^2, p_2^2; \dot{B}^2) \\ & + \delta^{\mu'_2 \beta_2} (p_2 + B)^{\alpha_2} F(p_2^2, \dot{B}^2; \dot{A}^2) + \delta^{\beta_2 \alpha_2} (-B - A)^{\mu'_2} F(\dot{B}^2, \dot{A}^2; p_2^2)] \\ & \times D_{l_2 l_3}^{\beta_2 \beta_3}(\dot{B}) i f_{l_3 a_3 m_3} t^{\mu_3 \mu'_3}(p_3) [\delta^{\beta_3 \mu'_3} (B - p_3)^{\gamma_3} F(\dot{B}^2, p_3^2; \dot{C}^2) \\ & + \delta^{\mu'_3 \gamma_3} (p_3 + C)^{\beta_3} F(p_3^2, \dot{C}^2; \dot{B}^2) + \delta^{\gamma_3 \beta_3} (-C - B)^{\mu'_3} F(\dot{C}^2, \dot{B}^2; p_3^2)] \\ & \times D_{m_3 m_1}^{\gamma_1 \gamma_3}(\dot{C}) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Hierbei bedeuten die Punkte über den Variablen  $A^2, B^2$  und  $C^2$ , dass bezüglich dieser noch eine Partialbruchzerlegung vorgenommen werden muss und dann die überzähligen unphysikalischen Pole aus dem Integral zu entfernen sind (vgl. (2.63)).

Für die Kontraktion der Farbtensoren findet man:

$$i f_{a_1 k_1 m_1} \delta_{k_1 k_2} i f_{k_2 a_2 l_2} \delta_{l_2 l_3} i f_{l_3 a_3 m_3} \delta_{m_1 m_3} = i \frac{3}{2} f_{a_1 a_2 a_3} \quad . \quad (5.32)$$

Die Kontraktion der Lorentzstruktur und die Berechnung des Impulsintegrals kann an dieser Stelle nicht ausführlich präsentiert werden. Man macht sich dabei zu Nutze, dass das Diagramm maximal linear divergent ist. Dies bedeutet, dass alle Terme, die nach einer PBZ mindestens eine quadratische Potenz in den äußeren Impulsen haben, nicht zu den divergenten Termen beitragen können. Außerdem kann man für die Vereinfachung der Integration die Beziehung (B.2) und die Ergebnisse aus Anhang B.5 nutzen. So sieht man ohne explizite Ausführung der Impulsverschiebung, dass von den möglichen 27 Termen

nur 7 zum divergenten Teil der Amplitude beitragen können. Deren Tensorstrukturen seien hier noch kurz aufgeschrieben.

$$\frac{1}{3}q^6 q^{\mu'_2} q^{\mu'_3} (5p_1 - p_2 - p_3)^{\mu'_1} E_9 \quad (5.33)$$

$$\frac{1}{3}q^6 q^{\mu'_1} q^{\mu'_3} (-5p_2 + p_1 + p_3)^{\mu'_2} E_{12} \quad (5.34)$$

$$\frac{1}{3}q^6 q^{\mu'_1} q^{\mu'_3} (5p_2 - p_1 - p_3)^{\mu'_2} E_{15} \quad (5.35)$$

$$\frac{1}{3}q^6 q^{\mu'_1} q^{\mu'_2} (-5p_3 + p_1 + p_2)^{\mu'_3} E_{16} \quad (5.36)$$

$$\frac{1}{3}q^6 q^{\mu'_1} q^{\mu'_2} (5p_3 - p_1 - p_2)^{\mu'_3} E_{17} \quad (5.37)$$

$$\frac{1}{3}q^6 q^{\mu'_2} q^{\mu'_3} (-5p_1 + p_2 + p_3)^{\mu'_1} E_{27} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{4}{3}(D-1)q^6 \left[ q^{\mu'_1} q^{\mu'_2} (p_2 - p_1)^{\mu'_3} \right. \\ & \quad \left. + q^{\mu'_1} q^{\mu'_3} (p_1 - p_3)^{\mu'_2} \right. \\ & \quad \left. + q^{\mu'_2} q^{\mu'_3} (p_3 - p_2)^{\mu'_1} \right] E_{18} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Die hier auftretenden  $E_i$  sind Kombinationen aus Vertex- und Propagatorparametern und den äußeren Impulsen.  $E_{18}$  ist das in (B.27) definierte  $\Sigma_S$ . Der Vollständigkeit halber sei noch die sich bei Feynmanparametrisierungen des Nenners ergebende Impulsverschiebung

$$q \rightarrow q - \frac{1}{3}(p_1(1-3z) - p_2 - 3zyp_3) \quad (5.40)$$

angegeben. Der linear divergente Teil in (5.39) darf wegen der symmetrischen Integration vernachlässigt werden. Offensichtlich unterscheiden sich die Terme (5.33) und (5.38), (5.34) und (5.35) sowie (5.36) und (5.37) in ihrer Tensorstruktur jeweils nur durch ein Vorzeichen. Die wesentliche Beobachtung ist nun, dass diese Terme sich in der Tat gegeneinander wegheben. Nach passender Umbenennung der Summationsvariablen in den  $E_i$  zeigt man dies durch Anwendung von (B.83) bei der Rücknahme der PBZ. Somit bleibt nur Term (5.39) übrig, der zur Divergenz des Graphen noch einen Beitrag leisten kann. Für eben diesen Term können wir nun das Impulsintegral notieren.

$$\begin{aligned} I_{imp} &= \int d^D q \frac{1}{(q^2 + K^2)^6} \times \{\text{Tensor von (5.39)}\} \\ &\sim -\frac{1}{\epsilon} \frac{\Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \left[ \delta^{\mu'_1 \mu'_2} (p_2 - p_1)^{\mu'_3} \right. \\ & \quad \left. + \delta^{\mu'_1 \mu'_3} (p_1 - p_3)^{\mu'_2} + \delta^{\mu'_2 \mu'_3} (p_3 - p_2)^{\mu'_1} \right] \end{aligned} \quad (5.41)$$

Damit finden wir das folgende Gesamtergebnis. Für die Definition der  $\Delta^r$  verweisen wir auf Anhang B.2.

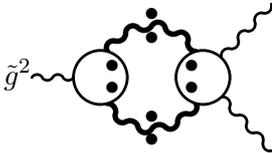
$$\begin{aligned} I &\sim i \frac{3}{2} f_{a_1 a_2 a_3} t^{\mu_1 \mu'_1}(p_1) t^{\mu_2 \mu'_2}(p_2) t^{\mu_3 \mu'_3}(p_3) \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \\ & \quad \left\{ \delta^{\mu'_1 \mu'_2} (p_1 - p_2)^{\mu'_3} + \delta^{\mu'_1 \mu'_3} (p_3 - p_1)^{\mu'_2} + \delta^{\mu'_2 \mu'_3} (p_2 - p_3)^{\mu'_1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,s} \Lambda^2) \right\}^{-1} \\
& \times \sum_{t_1 t_2 t_3=1}^{r+1} \sum_{k_1 k_2 k_3=0}^r \sum_{l_1 l_2 l_3=0}^r \sum_{m_1 m_2 m_3=0}^r \{ \Delta^r(u, t_1) \Delta^r(u, t_2) \Delta^r(u, t_3) \}^{-1} \\
& \times C_{k_1 k_2; k_3}^r C_{l_1 l_2; l_3}^r C_{m_1 m_2; m_3}^r (p_1^2)^{k_3} (p_2^2)^{l_3} (p_3^2)^{m_3} (-\hat{u}_{r, t_1})^{k_1+l_2} (-\hat{u}_{r, t_2})^{l_1+m_2} \\
& \times (-\hat{u}_{r, t_3})^{m_1+k_2} (\Lambda^2)^{9r-k_3-l_3-m_3} \tag{5.42}
\end{aligned}$$

Zu dieser Schleife gehört noch ein Diagramm, bei dem lediglich  $p_2$  und  $p_3$  vertauscht sind. Hier macht man sich mit obigem Ergebnis schnell klar, dass dies auf die Rechnung keinerlei Einfluss hat, so dass sich beide Amplituden addieren. Dies kompensiert genau den Symmetriefaktor aus der DS-Gleichung.

### 5.4.2 Die tadpole-artigen Terme

In der DS-Gleichung (5.24) treten an der dritten und vierten Stelle schon die Terme auf, die dem Tadpole-Graphen in der DS-Gleichung des Gluon-Propagators entsprechen. Kennzeichnend ist hier, dass sie auch in den vollständig resummierten und schattenreduzierten Amplituden einen nackten Vertex behalten. Zusätzlich zu diesen tritt in der von uns benutzten Näherung noch ein weiterer Term auf. Dieser entsteht aus dem resummierten  $K_{2,2s}$ -BS-Kern. Diesen können wir auf 1-Schleifen-Niveau durch den  $\Gamma_4$ -Vertex approximieren. Wir stellen hier zunächst das Ergebnis vor, das sich aus dem zur perturbativen Farb- und Tensorstruktur proportionalen Ansatz ergibt.



$$\begin{aligned}
& = \int \bar{d}^D q i f_{a_1 k_1 l_1} t^{\mu_1 \mu'_1} (p_1) \left[ \delta^{\mu'_1 \kappa_1} (p_1 + b)^{\lambda_1} F^r(p_1^2, \dot{b}^2; \dot{c}^2) \right. \\
& \quad \left. + \delta^{\kappa_1 \lambda_1} (-b + c)^{\mu'_1} F^r(\dot{b}^2, \dot{c}^2; p_1^2) + \delta^{\lambda_1 \mu'_1} (-c - p_1)^{\kappa_1} F^r(\dot{c}^2, p_1^2; \dot{b}^2) \right] \\
& \quad \times D_{k_1 k_2}^{\kappa_1 \kappa_2} (b) \left\{ \frac{3}{2} C_{l_2 k_2 a_2 a_3}^{(4)} (\Gamma_4)^{\lambda_2 \kappa_2 \mu'_2 \mu'_3} + \frac{1}{2} C_{l_2 k_2 a_2 a_3}^{(5-6)} (\Gamma_{5-6})^{\lambda_2 \kappa_2 \mu'_2 \mu'_3} \right\} \\
& \quad (\Pi_4(\dot{b}^2, \dot{c}^2, (p_2)^2, (p_3)^2))^{-1} \\
& \quad \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4=0}^r T_{n_1 n_2 n_3 n_4}^4 (\dot{c}^2)^{n_1} (\dot{b}^2)^{n_2} ((p_2)^2)^{n_3} ((p_3)^2)^{n_4} (\Lambda^2)^{4r-\Sigma n_i} \\
& \quad D_{l_1 l_2}^{\lambda_1 \lambda_2} (c) t^{\mu_2 \mu'_2} (p_2) t^{\mu_3 \mu'_3} (p_3) \tag{5.43}
\end{aligned}$$

Die Kontraktion der Farbstruktur lässt sich mit den im Anhang A.3 angegebenen Tabellen einfach durchführen.

$$\begin{aligned}
& i f_{a_1 k_1 l_1} \times \left[ \frac{3}{2} C^{(4)} \Gamma_4 + \frac{1}{2} C^{(5-6)} \Gamma_{(5-6)} \right] \Big|_{l_1 k_1 a_2 a_3} \\
& = -i \frac{9}{2} f_{a_1 a_2 a_3} \Gamma_4 \tag{5.44}
\end{aligned}$$

Die Ausführung der nun vereinfachten Lorentzkontraktionen und Berechnung des Schleifenintegrals mit den Formeln aus Anhang B.5 liefert dann das folgende Endergebnis.

$$\begin{aligned}
I &\sim i9f_{a_1 a_2 a_3} t^{\mu_1 \mu'_1}(p_1) t^{\mu_2 \mu'_2}(p_2) t^{\mu_3 \mu'_3}(p_3) \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \left\{ \delta^{\mu'_1 \mu'_3} p_1^{\mu'_2} - \delta^{\mu'_1 \mu'_2} p_1^{\mu'_3} \right\} \\
&\times \sum_{k_1 k_2 k_3=0}^r \Sigma_{\Gamma T}(k_1; k_2, k_3) ((p_1)^2)^{k_1} ((p_2)^2)^{k_2} ((p_3)^2)^{k_3} (\Lambda^2)^{3r-\Sigma k_i} \\
&[\Pi_3((p_1)^2), (p_2)^2, (p_3)^2)]^{-1}
\end{aligned} \tag{5.45}$$

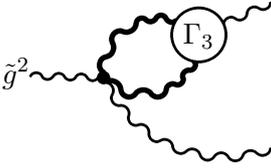
Dabei ist  $\Sigma_{\Gamma T}$  wie folgt definiert.

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\Gamma T}(a; b, c) &= \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{k_2 k_3=0}^r \sum_{yx=0}^r \frac{(-\hat{u}_{r,t_1})^{k_3+y} (-\hat{u}_{r,t_2})^{k_2+x}}{\Delta^r(u, t_1) \Delta^r(u, t_2)} \\
&\{C_{ak_2; k_3}^r + \frac{1}{4} C_{k_2 k_3; a}^r\} T_{yxbc}^{r,4}
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Es gilt offensichtlich

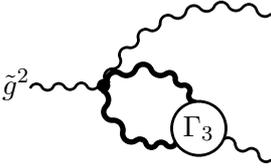
$$\Sigma_{\Gamma T}(a; b, c) = \Sigma_{\Gamma T}(a; c, b) \quad . \tag{5.47}$$

Die beiden anderen in der DS-Gleichung vorkommenden tadpole-artigen Graphen unterscheiden sich von diesem nur durch den perturbativen  $\Gamma_4$ -Vertex anstelle des vollen Vertex. Dies führt dazu, dass mit dem MKP keine überzähligen Pole entfernt werden müssen. Daher kann die PBZ einfach zurückgenommen werden. Man erhält die entsprechenden Diagramme durch passende Vertauschung der Impulse und Indizes.



$$\begin{aligned}
&\sim i9f_{a_1 a_2 a_3} t^{\mu_1 \mu'_1}(p_1) t^{\mu_2 \mu'_2}(p_2) t^{\mu_3 \mu'_3}(p_3) \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \left\{ \delta^{\mu'_3 \mu'_2} p_3^{\mu'_1} - \delta^{\mu'_3 \mu'_1} p_3^{\mu'_2} \right\} \\
&\times \sum_{k=0}^r (C_{kr;r}^r + \frac{1}{4} C_{rr;k}^r) (\Lambda^2)^{r-k} (p_3^2)^k \left[ \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,s} \Lambda^2) \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{5.48}$$

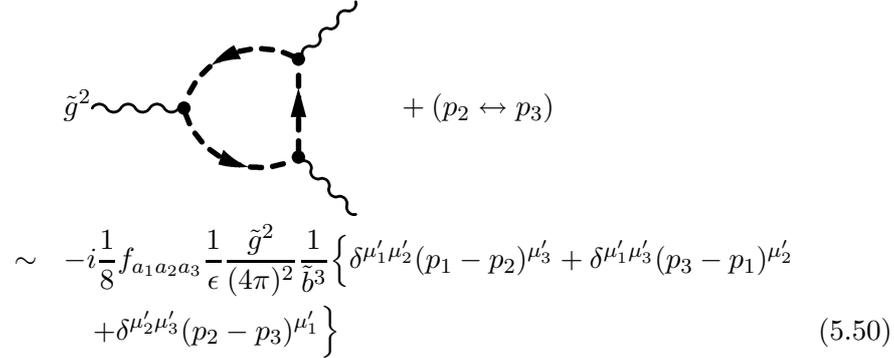
und



$$\begin{aligned}
&\sim i9f_{a_1 a_2 a_3} t^{\mu_1 \mu'_1}(p_1) t^{\mu_2 \mu'_2}(p_2) t^{\mu_3 \mu'_3}(p_3) \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \left\{ \delta^{\mu'_2 \mu'_1} p_2^{\mu'_3} - \delta^{\mu'_2 \mu'_3} p_2^{\mu'_1} \right\} \\
&\times \sum_{k=0}^r (C_{kr;r}^r + \frac{1}{4} C_{rr;k}^r) (\Lambda^2)^{r-k} (p_2^2)^k \left[ \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,s} \Lambda^2) \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

### 5.4.3 Die Geist-Dreiecks-Schleife

Abgesehen von einem multiplikativen Faktor, der aus dem Geist-Propagator stammt, entwickelt dieser Vertex in Landau-Eichung keine nicht-perturbativen Korrekturen. Wir verzichten daher auf eine ausführliche Rechnung und geben gleich das Ergebnis an.

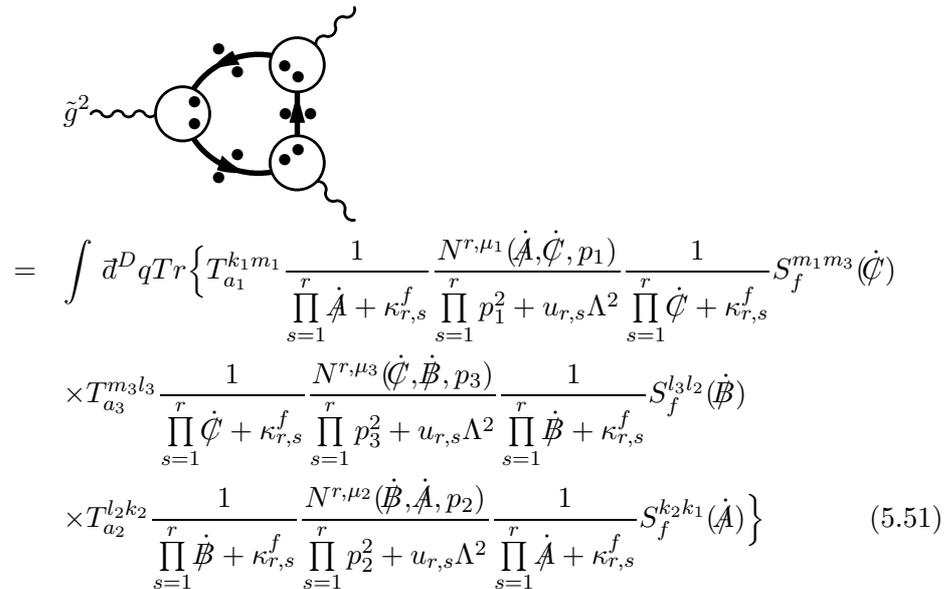


$$\sim -i \frac{1}{8} f_{a_1 a_2 a_3} \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\tilde{b}_3} \left\{ \delta^{\mu'_1 \mu'_2} (p_1 - p_2)^{\mu'_3} + \delta^{\mu'_1 \mu'_3} (p_3 - p_1)^{\mu'_2} + \delta^{\mu'_2 \mu'_3} (p_2 - p_3)^{\mu'_1} \right\} \quad (5.50)$$

Auch hier muss man wie bei der Geistschleife in der DSG des Gluon-Propagators mit  $\Lambda^{2\epsilon}$  erweitern und nach (5.12) geeignet entwickeln, damit man über den  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus Beiträge zu den quasiperturbativen Korrekturen der nullten Ordnung erhalten kann. Die dazu gehörende Argumentation findet sich in Abschnitt 5.1.

### 5.4.4 Die Fermion-Dreiecks-Schleife

Dies Diagramm ist das letzte, das für die DS-Gleichung des 3-Gluon-Vertex benötigt wird. Die Punkte über den Variablen bedeuten hier wieder, dass in dem Integral noch eine Partialbruchzerlegung mit anschließender Entfernung der unphysikalischen Pole durchzuführen ist.



$$= \int \tilde{d}^D q T_r \left\{ T_{a_1}^{k_1 m_1} \frac{1}{\prod_{s=1}^r \dot{A} + \kappa_{r,s}^f} \frac{N^{r, \mu_1}(\dot{A}, \dot{C}, p_1)}{\prod_{s=1}^r p_1^2 + u_{r,s} \Lambda^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r \dot{C} + \kappa_{r,s}^f} S_f^{m_1 m_3}(\dot{C}) \right. \\ \times T_{a_3}^{m_3 l_3} \frac{1}{\prod_{s=1}^r \dot{C} + \kappa_{r,s}^f} \frac{N^{r, \mu_3}(\dot{C}, \dot{B}, p_3)}{\prod_{s=1}^r p_3^2 + u_{r,s} \Lambda^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r \dot{B} + \kappa_{r,s}^f} S_f^{l_3 l_2}(\dot{B}) \\ \left. \times T_{a_2}^{l_2 k_2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r \dot{B} + \kappa_{r,s}^f} \frac{N^{r, \mu_2}(\dot{B}, \dot{A}, p_2)}{\prod_{s=1}^r p_2^2 + u_{r,s} \Lambda^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r \dot{A} + \kappa_{r,s}^f} S_f^{k_2 k_1}(\dot{A}) \right\} \quad (5.51)$$

Wir haben hier Transversalprojektoren bezüglich der äußeren Beine aus Gründen der Übersichtlichkeit vernachlässigt. Die Kontraktion der Fermion-Indizes ergibt

$$T_{a_1}^{k_1 m_1} \delta^{m_1 m_3} T_{a_3}^{m_3 l_3} \delta^{l_3 l_2} T_{a_2}^{l_2 k_2} \delta^{k_2 k_1} = \frac{1}{4} (d_{a_1 a_2 a_3} - i f_{a_1 a_2 a_3}) \quad . \quad (5.52)$$

Die Berechnung des Schleifenintegrals dieser linear divergenten Amplitude liefert dann das folgende Endergebnis.

$$\begin{aligned} I \sim & \frac{d_{a_1 a_2 a_3} - i f_{a_1 a_2 a_3}}{4} \left\{ \prod_{s=1}^r p_1^2 + u_{r,s} \Lambda^2 \prod_{s=1}^r p_2^2 + u_{r,s} \Lambda^2 \prod_{s=1}^r p_3^2 + u_{r,s} \Lambda^2 \right\}^{-1} \\ & \sum_{t_1 t_2 t_3=1}^r \left\{ \Delta^r(\kappa^{(f)}, t_1) \Delta^r(\kappa^{(f)}, t_2) \Delta^r(\kappa^{(f)}, t_3) \right\}^{-1} \sum_{m_1 n_1 n'_1=0}^r \sum_{m_2 n_2 n'_2=0}^r \sum_{m_3 n_3 n'_3=0}^r \\ & \times \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \frac{4}{3} \left\{ \delta^{\mu_1 \mu_2} (p_1 - p_2)^{\mu_3} + \delta^{\mu_2 \mu_3} (p_2 - p_3)^{\mu_1} + \delta^{\mu_3 \mu_1} (p_3 - p_1)^{\mu_2} \right\} \\ & \times \bar{C}_{m_1; n_1 n'_1}^{f,r} \bar{C}_{m_2; n_2 n'_2}^{f,r} \bar{C}_{m_3; n_3 n'_3}^{f,r} (p_1^2)^{m_1} (p_2^2)^{m_2} (p_3^2)^{m_3} (-\hat{\kappa}_{r,t_1}^f)^{n_1+n'_2} \\ & \times (-\hat{\kappa}_{r,t_2}^f)^{n_2+n'_3} (-\hat{\kappa}_{r,t_3}^f)^{n_3+n'_1} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Des weiteren bekommt man aus der DS-Gleichung noch einen weiteren Graphen, bei dem die Reihenfolge von  $p_2$  und  $p_3$  (und der zugehörigen Indizes) vertauscht ist. Vollzieht man die relevanten Schritte nach, erkennt man, dass aus der Lorentz-Tensorstruktur ein Faktor von  $-1$  kommt. Da  $d_{a_1 a_2 a_3}$  invariant unter Vertauschung ist und  $f_{a_1 a_2 a_3}$  einen Faktor von  $-1$  liefert, tragen nur die Terme proportional zu den antisymmetrischen Strukturkonstanten bei. Wir erhalten somit für die Summe über beide Diagramme und über die Fermionsorten das Folgende.

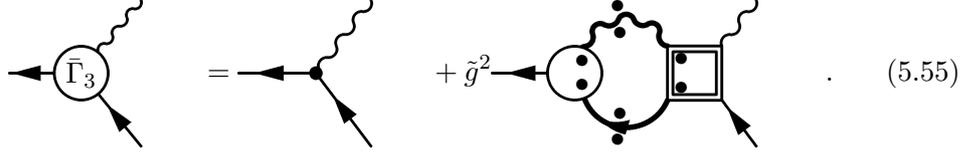
$$\begin{aligned} I \sim & - \sum_f \frac{2}{3} i f_{a_1 a_2 a_3} \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \left\{ \delta^{\mu_1 \mu_2} (p_1 - p_2)^{\mu_3} + \delta^{\mu_2 \mu_3} (p_2 - p_3)^{\mu_1} \right. \\ & \left. + \delta^{\mu_3 \mu_1} (p_3 - p_1)^{\mu_2} \right\} \left\{ \prod_{s=1}^r p_1^2 + u_{r,s} \Lambda^2 \prod_{s=1}^r p_2^2 + u_{r,s} \Lambda^2 \prod_{s=1}^r p_3^2 + u_{r,s} \Lambda^2 \right\}^{-1} \\ & \sum_{t_1 t_2 t_3=1}^r \left\{ \Delta^r(\kappa^{(f)}, t_1) \Delta^r(\kappa^{(f)}, t_2) \Delta^r(\kappa^{(f)}, t_3) \right\}^{-1} \sum_{m_1 n_1 n'_1=0}^r \sum_{m_2 n_2 n'_2=0}^r \sum_{m_3 n_3 n'_3=0}^r \\ & \times \bar{C}_{m_1; n_1 n'_1}^{f,r} \bar{C}_{m_2; n_2 n'_2}^{f,r} \bar{C}_{m_3; n_3 n'_3}^{f,r} (p_1^2)^{m_1} (p_2^2)^{m_2} (p_3^2)^{m_3} (-\hat{\kappa}_{r,t_1}^f)^{n_1+n'_2} \\ & \times (-\hat{\kappa}_{r,t_2}^f)^{n_2+n'_3} (-\hat{\kappa}_{r,t_3}^f)^{n_3+n'_1} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Dies ist im Wesentlichen das in (B.28) definierte  $\bar{\Sigma}^{f,r}$ .

Die Fermion-Schleife hat, wenn sie mit  $\gamma_5$  enthaltenden Vertizes ausgewertet wird, eine enge Beziehung zur Anomalie [Kug 97] der QCD. Daher wäre es interessant zu untersuchen, ob die mit unseren Ansätzen gewonnenen Ergebnisse mit der Anomaliefreiheit der QCD vereinbar sind. Diese Frage liegt aber außerhalb unserer Themenstellung.

## 5.5 Der Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex

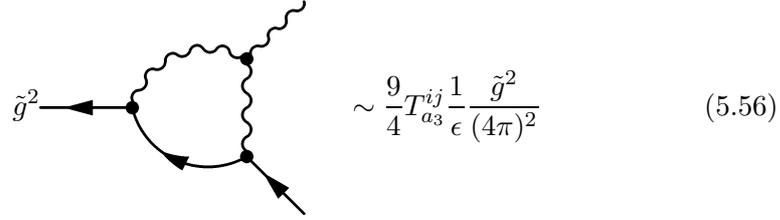
Die resummierte DS-Gleichung lautet hier:



$$\Gamma_3 = \text{tree-level vertex} + \tilde{g}^2 \times \text{loop diagram} \quad (5.55)$$

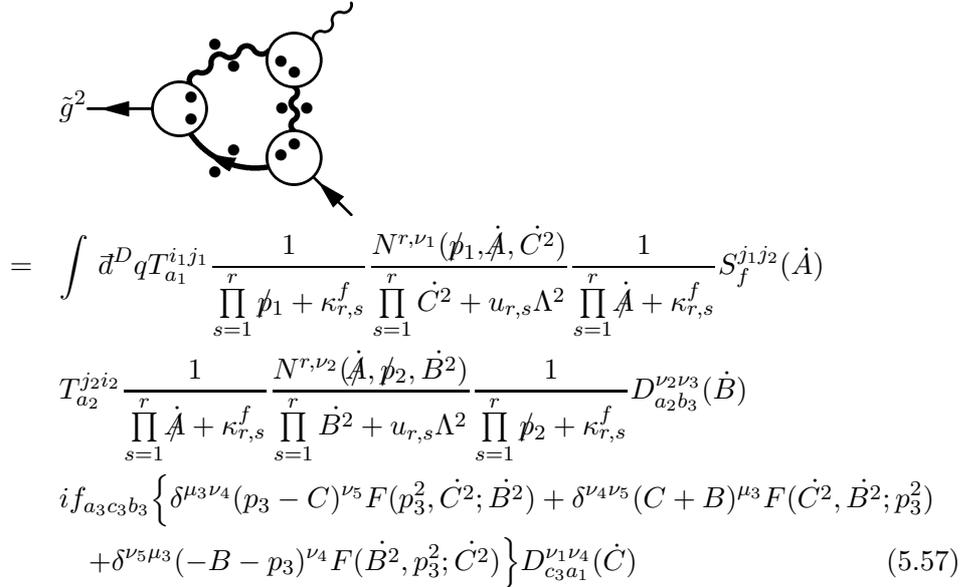
Diese Gleichung ist schon verschiedentlich berechnet worden. Details findet man in [Kuh 97, Wie 01a]. Wie schon bei der Gleichung für den Fermion-Propagator trägt auch hier nur ein Graph zu den Divergenzen bei. Zudem kann man sich durch einfache Symmetrieüberlegungen an den resummierten Graphen schnell klar machen, dass auf 1-Schleifen-Niveau der Fermion- und der Gluon-Kanal identische Ergebnisse liefern müssen. Es reicht daher, den Fermion-Kanal zu berechnen.

### Perturbative Ergebnisse



$$\sim \frac{9}{4} T_{a_3}^{ij} \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2} \quad (5.56)$$

### 5.5.1 Die Fermion-Fermion-Gluon-Schleife



$$\begin{aligned} &= \int d^D q T_{a_1}^{i_1 j_1} \frac{1}{\prod_{s=1}^r \not{p}_1 + \kappa_{r,s}^f} \frac{N^{r, \nu_1}(\not{p}_1, \dot{A}, \dot{C}^2)}{\prod_{s=1}^r \dot{C}^2 + u_{r,s} \Lambda^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r \dot{A} + \kappa_{r,s}^f} S_f^{j_1 j_2}(\dot{A}) \\ & T_{a_2}^{j_2 i_2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r \dot{A} + \kappa_{r,s}^f} \frac{N^{r, \nu_2}(\dot{A}, \not{p}_2, \dot{B}^2)}{\prod_{s=1}^r \dot{B}^2 + u_{r,s} \Lambda^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r \not{p}_2 + \kappa_{r,s}^f} D_{a_2 b_3}^{\nu_2 \nu_3}(\dot{B}) \\ & i f_{a_3 c_3 b_3} \left\{ \delta^{\mu_3 \nu_4} (p_3 - C)^{\nu_5} F(p_3^2, \dot{C}^2; \dot{B}^2) + \delta^{\nu_4 \nu_5} (C + B)^{\mu_3} F(\dot{C}^2, \dot{B}^2; p_3^2) \right. \\ & \left. + \delta^{\nu_5 \mu_3} (-B - p_3)^{\nu_4} F(\dot{B}^2, p_3^2; \dot{C}^2) \right\} D_{c_3 a_1}^{\nu_1 \nu_4}(\dot{C}) \quad (5.57) \end{aligned}$$

Die Kontraktion der Farbtensoren und der Fermiindizes ergibt:

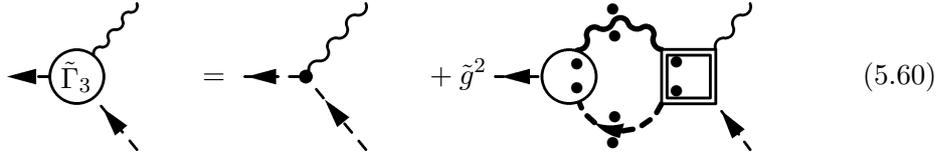
$$T_{a_1}^{i_1 j_1} \delta^{j_1 j_2} T_{a_2}^{j_2 i_2} \delta_{a_2 b_3} i f_{a_3 c_3 b_3} \delta_{c_3 a_1} = -\frac{3}{2} T_{a_3}^{i_1 i_2} \quad (5.58)$$

Nach der Lorentzkontraktion und Berechnung des Impulsintegrals sowie Addition mit dem Diagramm mit vertauschten Impulsen  $p_2$  und  $p_3$  erhalten wir das folgende Ergebnis.

$$\begin{aligned}
 I \sim & \frac{9}{4} T_{a_3}^{i_1 i_2} \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \left[ \prod_{s=1}^r \not{p}_1 + \kappa_{r,s}^f \right]^{-1} \sum_{n_1 n_2' k_3=0}^r (\not{p}_1)^{n_1} \gamma^{\mu_3} \sum_{t_1 t_2 t_3=1}^{r+1} \\
 & \sum_{m_1 n_1'=0}^r \sum_{m_2 n_2=0}^r \sum_{k_1 k_2=0}^r \{ \Delta^r(\kappa^{(f)}, t_1) \Delta^r(u, t_2) \Delta^r(u, t_3) \}^{-1} (-\hat{u}_{r,t_3})^{m_1+k_1} \\
 & (-\hat{u}_{r,t_2})^{m_2+k_2} (-\hat{\kappa}_{r,t_1}^f)^{n_1' n_2} \bar{C}_{m_1; n_1 n_1'}^{f,r} \bar{C}_{m_2; n_2 n_2'}^{f,r} C_{k_1 k_2; k_3}^r (\Lambda^2)^{3r-m_1-m_2-k_3} \\
 & (p_3^2)^{k_3} (p_2)^{n_2'} \left[ \prod_{s=1}^r p_3^2 + u_{r,s} \Lambda^2 \prod_{s=1}^r \not{p}_2 + \kappa_{r,s}^f \right]^{-1} \quad (5.59)
 \end{aligned}$$

## 5.6 Der Geist-Antigeist-Gluon-Vertex

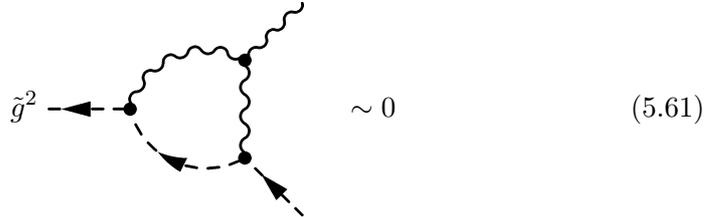
Die resummierte DS-Gleichung lautet hier wie folgt.



$$\tilde{\Gamma}_3 = \text{tree-level diagram} + \tilde{g}^2 \text{loop diagram} \quad (5.60)$$

Ebenso wie bei der  $\tilde{\Gamma}_3$ -Gleichung macht man sich schnell klar, dass auf 1-Schleifen-Niveau nur ein Diagramm zu den Divergenzen beitragen kann. Es lässt sich jedoch einfach zeigen, dass der divergente Anteil dieses Diagramms wie der des perturbativen Diagramms in Landau-Eichung *exakt verschwindet*, weshalb wir nur das letztere betrachten. Durch die  $\tilde{\Gamma}_3$ -Gleichung wird trotz eines multiplikativen Faktors beim Geist-Propagator der perturbative Wert für diesen Vertex erzwungen.

### Perturbative Ergebnisse



$$\tilde{g}^2 \text{loop diagram} \sim 0 \quad (5.61)$$



# Kapitel 6

## Die Bethe-Salpeter-Gleichung des $\Gamma_4$ -Vertex

Nachdem wir in Kapitel 4 die BSG des  $\Gamma_4$ -Vertex hergeleitet haben, müssen wir nun die auf 1-Schleifen-Niveau beitragenden Terme identifizieren und berechnen. Zudem stehen wir vor dem Problem, dass die verschiedenen Ansätze für den  $\Gamma_4$ -Vertex manche Diagramm-Berechnung mehrmals nötig machen. Wir wenden uns zuerst der Bestimmung der 1-Schleifen-Terme zu.

### 6.1 Die BSG auf 1-Schleifen-Niveau

Ersetzt man den 2PI Kern  $M_4$  der BSG durch den perturbativen  $\Gamma_4^{(0,pert)}$ -Vertex, erhält man eine der DSG sehr ähnliche Gleichung. In ihrer Skelettgraphenentwicklung in den nackten Vertizes sind die beiden Gleichungen auf 1-Schleifen-Niveau sogar identisch. Damit lässt sich aus beiden die perturbative Renormierungskonstante bestimmen [PT80]. Alle BS-Kerne außer  $M_4$  werden durch die Austauschgraphen in den Kanälen, für die nicht 2PI gefordert ist, bzw. durch den vollen  $\Gamma_4$ -Vertex ersetzt.

$$\Gamma_4 = \text{tree-level vertex} + \frac{1}{2} \tilde{g}^2 \text{[exchange diagram]} + \frac{1}{2} \tilde{g}^2 \text{[self-energy diagram]}$$

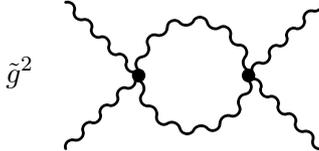
$$\begin{aligned}
 & +\frac{1}{2}\tilde{g}^2 \quad \text{[Diagram: Square with wavy external lines and two internal circles]} \\
 & +\tilde{g}^2 \quad \text{[Diagram: Square with wavy external lines and two internal circles]} \\
 & +\tilde{g}^2 \quad \text{[Diagram: Square with wavy external lines and two internal circles]} \\
 & +\tilde{g}^2 \quad \text{[Diagram: Square with wavy external lines and two internal circles]} \\
 & + 3 \text{ symm. Diagramme} \quad +\tilde{g}^2 \quad \text{[Diagram: Square with wavy external lines and two internal circles]} \\
 & +\tilde{g}^2 \quad \text{[Diagram: Square with wavy external lines and two internal circles]} \\
 & -\tilde{g}^2 \quad \text{[Diagram: Square with dashed lines and arrows]} \\
 & -\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ symm. Diagramme} \\ + 3 \text{ mit umgekehrter Pfeil-} \\ \text{richtung} \end{array} \right\} \\
 & -\sum_f \tilde{g}^2 \quad \text{[Diagram: Square with wavy external lines and two internal circles]} \\
 & -\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ symm. Diagramme} \\ + 3 \text{ mit umgekehrter Pfeil-} \\ \text{richtung} \end{array} \right\} \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

## 6.2 Perturbative Ergebnisse

Zur Notation der Ergebnisse werden die Abkürzungen aus den Anhängen A.3.2 und B.1 verwendet. Für die im Folgenden präsentierten Diagramme gilt dabei, dass die Impulse von links oben gegen den Uhrzeigersinn von  $p_1$  bis  $p_4$  zugewiesen werden.

In der BSG kommen die hier im s-Kanal berechneten Diagramme grundsätzlich auch in den beiden anderen Kanälen vor. Daher müssen die gewonnenen Ergebnisse symmetrisiert werden. Dies ist jedoch durch einen einfachen Austausch der Impulse und der zugehörigen Farb- und Lorentz-Tensorindizes möglich. Die so gewonnenen Ergebnisse müssen dann noch auf die kanonische Reihenfolge der Parameter umgeschrieben werden. Entsprechende Permutationstabellen finden sich in Anhang A.3.2 und B.4.2. Damit entfällt eine explizite Berechnung der Diagramme für andere Kanäle.

- Die  $\Gamma_4\Gamma_4$ -Schleife



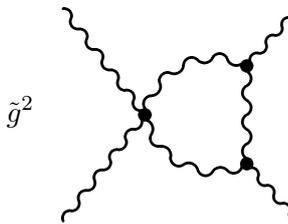
$$\sim \left[ -\frac{27}{4}C^{(4)}\Gamma_4 + \frac{15}{4}S^{(4)}\Gamma_1 + \frac{7}{8}S^{(4)}S_4 - \frac{5}{4}C^{(5-6)}\Gamma_1 - \frac{7}{24}C^{(5-6)}S_4 \right] \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2\epsilon} \quad (6.2)$$

### Symmetrisierte Ergebnisse

Die Summe der drei Kanäle ergibt

$$I \sim \left[ -8T_4 + \frac{51}{8}D_4 \right] \frac{g_\mu^2}{(4\pi)^2\epsilon} \quad (6.3)$$

- Die  $\Gamma_4\Gamma_3\Gamma_3$ -Schleife



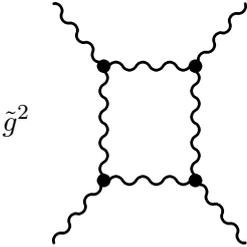
$$\sim \left[ -3S^{(4)}\Gamma_1 + C^{(5-6)}\Gamma_1 - \frac{1}{4}S^{(4)}S_4 + \frac{1}{12}C^{(5-6)}S_4 \right] \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2\epsilon} \quad (6.4)$$

### Symmetrisierte Ergebnisse

Die Summe der drei Kanäle – also über 6 Diagramme – ergibt

$$I \sim \left[ 2T_4 - \frac{15}{2}D_4 \right] \frac{g_\mu^2}{(4\pi)^2\epsilon} \quad (6.5)$$

- Die 4-Gluonen-Box



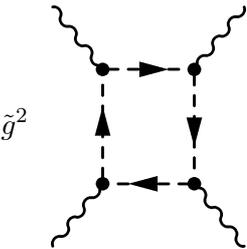
$$\sim \left[ \frac{3}{2}S^{(4)} - \frac{3}{2}C^{(4)} - \frac{1}{2}C^{(5-6)} \right] S_4 \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2 \epsilon} \quad (6.6)$$

**Symmetrisierte Ergebnisse**

Die Summe der drei Kanäle ergibt

$$I \sim \left[ \frac{9}{2}D_4 \right] \frac{g_\mu^2}{(4\pi)^2 \epsilon} \quad (6.7)$$

- Die 4-Geister-Box



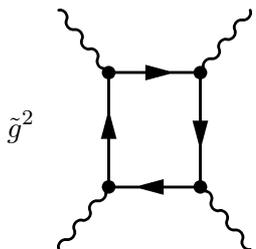
$$\sim \frac{1}{24} \left[ \frac{3}{4}S^{(4)} - \frac{3}{4}C^{(4)} - \frac{1}{2}C^{(5-6)} \right] S_4 \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2 \epsilon} \quad (6.8)$$

**Symmetrisierte Ergebnisse**

Die Summe der drei Kanäle und über die Diagramme mit umgekehrter Pfeilrichtung ergibt

$$I \sim \left[ \frac{3}{16}D_4 \right] \frac{g_\mu^2}{(4\pi)^2 \epsilon} \quad (6.9)$$

- Die 4-Fermionen-Box



+ Diagramm mit umgekehrten Pfeilen

$$\sim \sum_f \left[ -\frac{1}{9}S^{(4)}\Gamma_{6-4} + \frac{2}{9}[-2T_4 + 3C^{(5)}\Gamma_5] \right] \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2 \epsilon} \quad (6.10)$$

**Symmetrisierte Ergebnisse**

Die Summe der drei Kanäle ergibt

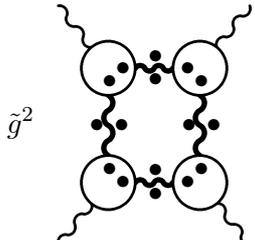
$$I \sim \sum_f \left[ -\frac{2}{3} T_4 \right] \frac{g_\mu^2}{(4\pi)^2 \epsilon} \quad . \quad (6.11)$$

Durch Einsetzen in die BSG lässt sich nun zeigen, dass sich für die perturbative Gleichung die Bestimmung der Renormierungskonstanten ergibt.

$$\Gamma_4^p = T_4 \left( 1 + \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2 \epsilon} \left[ -2 + \frac{2}{3} N f \right] \right) \quad (6.12)$$

Dies bedeutet, dass sich die nicht zu  $T_4$  proportionalen Farb- und Tensorstrukturen genau herausheben. Hier zeigt sich die besondere Stellung der perturbativen Struktur  $T_4$ .

**6.3 Graphen ohne  $\Gamma_4$** **Die 4-Gluonen-Box**



$$\begin{aligned} & \sim \left[ \frac{3}{2} S^{(4)} - \frac{3}{2} C^{(4)} - \frac{1}{2} C^{(5-6)} \right] S_4 \\ & (\Pi_4(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2))^{-1} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4=0}^r (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} (\Lambda^2)^{4r - \sum k_i} \\ & \frac{\tilde{g}^2 (\Lambda^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{1}{b^4} \Sigma_{4\Gamma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \end{aligned} \quad (6.13)$$

mit

$$\begin{aligned} & \Sigma_{4\Gamma}(a, b, c, d) \\ & = \sum_{t_1 t_2 t_3 t_4=1}^{r+1} \sum_{k_2 k_3 l_2 l_3 m_2 m_3 n_2 n_3=0}^r \\ & \quad \times \frac{(-\hat{u}_{t_1} \Lambda^2)^{k_2+l_3} (-\hat{u}_{t_2} \Lambda^2)^{l_2+m_3} (-\hat{u}_{t_3} \Lambda^2)^{m_2+n_3} (-\hat{u}_{t_4} \Lambda^2)^{n_2+k_3}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2) \Delta(u, t_3) \Delta(u, t_4)} \\ & \quad \times C_{a, k_2 k_3}^{3,r} C_{b, l_2 l_3}^{3,r} C_{c, m_2 m_3}^{3,r} C_{d, n_2 n_3}^{3,r} (\Lambda^2)^{6r - \sum k_i + l_i + m_i + n_i} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Wie man sieht, ist  $\Sigma_{4\Gamma}$  vollständig symmetrisch unter Vertauschung der Argumente.

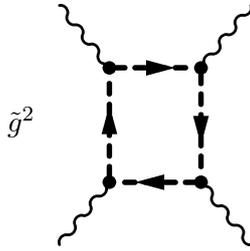
### Symmetrisierte Ergebnisse

Für die Summe der drei Kanäle erhält man:

$$I \sim \frac{1}{\Pi_4(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2)} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4=0}^r (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} (\Lambda^2)^{4r-\sum k_i} \\ \frac{9}{2} D_4 \frac{\tilde{g}^2 (\Lambda^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{1}{b^4} \Sigma_{4\Gamma}(k_1, k_2; k_3, k_4) \quad . \quad (6.15)$$

### Die 4-Geister-Box

Es ergibt sich das perturbative Resultat ergänzt um die Skalierung des Geist-Propagators.



$$\sim \frac{1}{24} \left[ \frac{3}{4} S^{(4)} - \frac{3}{4} C^{(4)} - \frac{1}{2} C^{(5-6)} \right] S_4 \frac{1}{b^4} \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2 \epsilon} \quad (6.16)$$

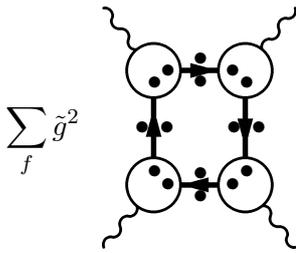
Damit dieses Diagramm trotz der in Landau-Eichung perturbativen Struktur der Geist-Vertizes zu den quasiperturbativen Korrekturen nullter Ordnung beitragen kann, müssen wir wie bei der Geist-Schleife in der Gluon-Propagator-DSG mit  $\Lambda^{2\epsilon}$  erweitern und geeignet entwickeln. Die auch hier zutreffende Argumentation findet sich in Abschnitt 5.1.

### Symmetrisierte Ergebnisse

Für die Summe der drei Kanäle mit je zwei Pfeilrichtungen findet man

$$I \sim \frac{3}{16} D_4 \frac{1}{b^4} \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2 \epsilon} \quad . \quad (6.17)$$

### Die 4-Fermionen-Box



+ Diagramm mit umgekehrter Pfeilrichtung

$$\sim \left[ -\frac{1}{9} S^{(4)} \Gamma_{6-4} + \frac{2}{9} (-2T_4 + 3C^{(5)}) \Gamma_5 \right]$$

$$\begin{aligned}
& (\Pi_4(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2))^{-1} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4=0}^r (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} (\Lambda^2)^{4r-\sum k_i} \\
& \frac{\tilde{g}^2(\Lambda^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2 \epsilon} \bar{\Sigma}_{4\bar{\Gamma}}(k_1, k_2, k_3, k_4)
\end{aligned} \tag{6.18}$$

mit

$$\begin{aligned}
& \bar{\Sigma}_{4\bar{\Gamma}}(a, b, c, d) \\
& = \sum_f \sum_{t_1 t_2 t_3 t_4=1}^{r+1} \sum_{k_2 k_3 l_2 l_3 m_2 m_3 n_2 n_3=0}^r \\
& \frac{(-\hat{\kappa}_{t_1} \Lambda^2)^{k_2+l_3} (-\hat{\kappa}_{t_2})^{l_2+m_3} (-\hat{\kappa}_{t_3})^{m_2+n_3} (-\hat{\kappa}_{t_4})^{n_2+k_3}}{\Delta(\kappa, t_1) \Delta(\kappa, t_2) \Delta(\kappa, t_3) \Delta(\kappa, t_4)} \\
& \bar{C}_{a, k_2 k_3}^{f, r} \bar{C}_{b, l_2 l_3}^{f, r} \bar{C}_{c, m_2 m_3}^{f, r} \bar{C}_{d, n_2 n_3}^{f, r} (\Lambda)^{6r-\sum k_i+l_i+m_i+n_i}
\end{aligned} \tag{6.19}$$

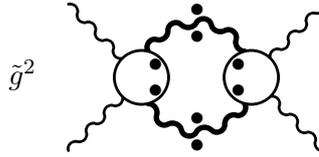
Wie man sieht, ist auch  $\bar{\Sigma}_{4\bar{\Gamma}}$  vollständig symmetrisch unter Vertauschung der Argumente.

## 6.4 Graphen mit $\Gamma_4$

### 6.4.1 Symmetrische Vertexparameter – $T_4$

Da die Farb- und Lorentz-Tensorstruktur des vollen  $\Gamma_4$ -Vertex sich hier wie die perturbative verhält, kommt man leicht auf die entsprechenden Ergebnisse.

#### Die $\Gamma_4\Gamma_4$ -Schleife



The diagram shows a central loop structure with two vertices (represented by circles) and four external wavy lines. The vertices are connected by a thick, wavy line. Each vertex has two external wavy lines. The diagram is labeled  $\tilde{g}^2$  on the left.

$$\begin{aligned}
& \sim \left[ -\frac{27}{4} C^{(4)} \Gamma_4 + \frac{15}{4} S^{(4)} \Gamma_1 + \frac{7}{8} S^{(4)} S_4 - \frac{5}{4} C^{(5-6)} \Gamma_1 - \frac{7}{24} C^{(5-6)} S_4 \right] \\
& \frac{1}{\Pi_4(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2)} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4=0}^r (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} (\Lambda^2)^{4r-\sum k_i} \\
& \frac{\tilde{g}^2(\Lambda^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{1}{b^2} \Sigma_{TT}(k_1, k_2; k_3, k_4)
\end{aligned} \tag{6.20}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Sigma_{TT}(a, b; c, d) & = \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{k_3 k_4 l_1 l_2=0}^r \frac{(-\hat{u}_{t_1} \Lambda^2)^{k_3+l_2} (-\hat{u}_{t_2} \Lambda^2)^{k_4+l_1}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2)} \\
& T_{a, b, k_3 k_4}^r T_{l_1 l_2 c, d}^r (\Lambda^2)^{4r-\sum k_i+l_i} \\
& = \Sigma_{TT}(b, a; c, d) = \Sigma_{TT}(a, b; d, c) \\
& = \Sigma_{TT}(c, d; a, b)
\end{aligned} \tag{6.21}$$

$\Sigma_{TT}$  ist also bis auf eine Vertauschung eines Elementes aus  $\{a, b\}$  mit einem aus  $\{c, d\}$  symmetrisch und damit Mandelstam-symmetrisch im  $s$ -Kanal.

### Symmetrisierte Ergebnisse

Auf perturbativem Niveau war die Symmetrisierung der Ergebnisse im  $s$ -Kanal auf direktem Weg durchführbar. Bei der Rechnung mit vollem  $\Gamma_4$ -Vertex entsteht zum ersten Mal das Problem, dass mit  $\Sigma_{TT}$  ein nicht vollständig symmetrischer Parameter auftritt. Dennoch muss die Summe über die Graphen aller Kanäle ein Bose-symmetrisches Ergebnis liefern. Dabei kann aber nicht gefordert werden, dass sich für eine selbstkonsistente Formulierung der BSG nur die Farb- und Lorentz-Tensorstrukturen reproduzieren, die auch in den Ansätzen vorkommen. In der Tat werden wir sehen, dass Strukturen auftreten, die bei vollständig symmetrischen Vertexparametern identisch verschwinden. Erst im Rahmen des Selbstkonsistenzmechanismus können wir Nebenbedingungen formulieren, die zum Verschwinden dieser Strukturen führen.

Damit lässt sich die Summe der drei Kanäle kondensiert notieren.

$$\begin{aligned}
& \text{Summe der drei Kanäle} \\
= & \frac{1}{\Pi_4(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2)} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4=0}^r (\Lambda^2)^{4r-\sum k_i} \frac{\tilde{g}^2 (\Lambda^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{1}{b^2} \\
& \left\{ \left[ -\frac{27}{4} C^{(4)} \Gamma_4 + \frac{15}{4} S^{(4)} \Gamma_1 + \frac{7}{8} S^{(4)} S_4 - \frac{5}{4} C^{(5-6)} \Gamma_1 - \frac{7}{24} C^{(5-6)} S_4 \right] \right. \\
& \left. \Sigma_{TT}(k_1, k_2; k_3, k_4) p_1^{2k_1} p_2^{2k_2} p_3^{2k_3} p_4^{2k_4} \right\} \\
& + \left[ -\frac{27}{4} C^{(6)} \Gamma_6 + \frac{15}{4} S^{(4)} \Gamma_3 + \frac{7}{8} S^{(4)} S_4 - \frac{5}{4} C^{(4-5)} \Gamma_3 - \frac{7}{24} C^{(4-5)} S_4 \right] \\
& \left. \Sigma_{TT}(k_1, k_2; k_3, k_4) p_4^{2k_1} p_1^{2k_2} p_2^{2k_3} p_3^{2k_4} \right\} \\
& + \left[ -\frac{27}{4} C^{(5)} \Gamma_5 + \frac{15}{4} S^{(4)} \Gamma_2 + \frac{7}{8} S^{(4)} S_4 - \frac{5}{4} C^{(6-4)} \Gamma_2 - \frac{7}{24} C^{(6-4)} S_4 \right] \\
& \left. \Sigma_{TT}(k_1, k_2; k_3, k_4) p_3^{2k_1} p_1^{2k_2} p_2^{2k_3} p_4^{2k_4} \right\}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

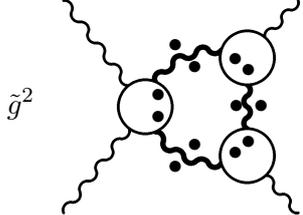
Nur an vollständig symmetrischen Punkten im  $p_i^2$ -Raum manifestiert sich die perturbative Struktur

$$-8T_4 + \frac{51}{8}D_4 \quad . \tag{6.23}$$

Dennoch ist dieses Ergebnis Bose-symmetrisch. Bei Vertauschung der Impulse am  $\Gamma_4$ -Vertex bleibt dieser Ausdruck invariant.

Besonders bemerkenswert sind hierbei die Terme proportional zu  $C^{(5-6)}S_4$  usw., denn diese Struktur, die Terme  $\sim C^{(5)}\Gamma_2$  enthält, verschwindet auf perturbativem Niveau identisch. Dies ist ein Hinweis darauf, welche Strukturen bei einem erweiterten Ansatz mit nicht vollständig symmetrischen Vertex-Parametern noch betrachtet werden können.

**Die  $\Gamma_4\Gamma_3\Gamma_3$ -Schleife**



$$\begin{aligned}
& \tilde{g}^2 \\
& \sim [C^{(5-6)}\Gamma_1 - 3S^{(4)}\Gamma_1 - \frac{1}{4}S^{(4)}S_4 - \frac{1}{12}C^{(5-6)}S_4] \\
& (\Pi_4(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2))^{-1} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4=0}^r (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} (\Lambda^2)^{4r-\sum k_i} \\
& \frac{\tilde{g}^2 (\Lambda^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{1}{b^3} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}(k_1, k_2; k_3, k_4) \tag{6.24}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
& \Sigma_{T\Gamma\Gamma}(a, b; c, d) \\
& = \sum_{t_1 t_2 t_3=1}^{r+1} \sum_{k_3 k_4 l_1 l_2 m_1 m_2=0}^r \frac{(-\hat{u}_{t_1} \Lambda^2)^{k_3+m_2} (-\hat{u}_{t_2} \Lambda^2)^{k_4+l_1} (-\hat{u}_{t_3} \Lambda^2)^{l_2+m_1}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2) \Delta(u, t_3)} \\
& T_{a,b,k_3 k_4}^r C_{m_1 m_2, c}^{3,r} C_{l_1 l_2, d}^{3,r} (\Lambda^2)^{6r-\sum k_i+l_i+m_i} \tag{6.25}
\end{aligned}$$

Dabei hat  $\Sigma_{T\Gamma\Gamma}$  nur zwei Symmetrien.

$$\Sigma_{T\Gamma\Gamma}(a, b; c, d) = \Sigma_{T\Gamma\Gamma}(b, a; c, d) \tag{6.26}$$

$$= \Sigma_{T\Gamma\Gamma}(a, b; d, c) \tag{6.27}$$

Das zweite Diagramm des s-Kanals, das durch die Vertauschung des  $\Gamma_4$ -Vertex mit den beiden  $\Gamma_3$ -Vertizes mit den Parametern  $\Sigma_{\Gamma T\Gamma}$  entsteht, lässt sich in einfacher Weise durch das bekannte  $\Sigma_{T\Gamma\Gamma}$  ausdrücken.

$$\Sigma_{\Gamma T\Gamma}(a, b; c, d) = \Sigma_{T\Gamma\Gamma}(c, d; a, b) \tag{6.28}$$

So kann man einen im s-Kanal Mandelstam-symmetrischen Term definieren.

$$\Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym}(a, b; c, d) = \Sigma_{T\Gamma\Gamma}(a, b; c, d) + \Sigma_{T\Gamma\Gamma}(c, d; a, b) \tag{6.29}$$

Oben an Stelle von  $\Sigma_{T\Gamma\Gamma}$  eingesetzt, erhält man die Summe über die beiden Diagramme des s-Kanals.

**Symmetrisierte Ergebnisse**

Hier gilt das oben für die Symmetrisierung von  $\Sigma_{TT}$  gesagte in gleicher Weise.

$$\begin{aligned}
& \text{Summe über 6 Diagramme} \\
& \sim \frac{\tilde{g}^2 (\Lambda^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{1}{b^3} \frac{1}{\Pi_4(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2)} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4=0}^r (\Lambda^2)^{4r-\sum k_i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ [C^{(5-6)}\Gamma_1 - 3S^{(4)}\Gamma_1 - \frac{1}{4}S^{(4)}S_4 - \frac{1}{12}C^{(5-6)}S_4] \right. \\
& \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym}(k_1, k_2; k_3, k_4)(p_1^2)^{k_1}(p_2^2)^{k_2}(p_3^2)^{k_3}(p_4^2)^{k_4} \\
& + [C^{(4-5)}\Gamma_3 - 3S^{(4)}\Gamma_3 - \frac{1}{4}S^{(4)}S_4 - \frac{1}{12}C^{(4-5)}S_4] \\
& \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym}(k_1, k_2; k_3, k_4)(p_4^2)^{k_1}(p_1^2)^{k_2}(p_2^2)^{k_3}(p_3^2)^{k_4} \\
& + [C^{(6-4)}\Gamma_2 - 3S^{(4)}\Gamma_2 - \frac{1}{4}S^{(4)}S_4 - \frac{1}{12}C^{(6-4)}S_4] \\
& \left. \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym}(k_1, k_2; k_3, k_4)(p_3^2)^{k_1}(p_1^2)^{k_2}(p_2^2)^{k_3}(p_4^2)^{k_4} \right\}
\end{aligned} \tag{6.30}$$

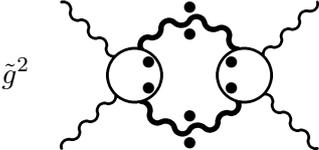
Von den Graphen mit Beiträgen des  $\Gamma_4$ -Vertex fehlt nun noch die  $\Gamma_4\Gamma_3$ -Schleife aus der  $\Gamma_3$ -DSG. Diese ist in Kapitel 5 schon berechnet worden.

Wir untersuchen die selbstkonsistente Reproduktion des Ansatzes in Kapitel 8. Dabei zeigen wir, dass die Nebenbedingungen, die für das Verschwinden der zusätzlichen Tensorstrukturen sorgen, zu wenig plausiblen Einschränkungen für die Vertexparameter führen.

#### 6.4.2 Erweiterte Strukturen – $D_4$ und $E_4$

Wie wir oben gezeigt haben, ist man mit der  $T_4$ -Struktur allein nicht in der Lage, einen konsistenten Ansatz unter plausiblen Nebenbedingungen zu formulieren. Daher erweitern wir den Ansatz für den  $\Gamma_4$ -Vertex und verwenden (2.32). In der  $\Gamma_4$ -Gleichung gehen die erweiterten Strukturen  $D_4$  und  $E_4$  nur in zwei Diagrammklassen ein. Dazu kommt noch die  $\Gamma_4\Gamma_3$ -Schleife aus der  $\Gamma_3$ -DSG. Diese sind im Folgenden notiert.

#### Die $\Gamma_4\Gamma_4$ -Schleife



$$\begin{aligned}
& \tilde{g}^2 \\
& \sim (\Pi_4(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2))^{-1} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4=0}^r (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} \frac{1}{b^2} (\Lambda^2)^{4r - \sum k_i} \\
& \frac{\tilde{g}^2 (\Lambda^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2 \epsilon} \left\{ \left[ -\frac{27}{4}C^{(4)}\Gamma_4 + \frac{15}{4}S^{(4)}\Gamma_1 + \frac{7}{8}S^{(4)}S_4 - \frac{5}{4}C^{(5-6)}\Gamma_1 \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{7}{24}C^{(5-6)}S_4 \right] \Sigma_{TT}(k_1, k_2; k_3, k_4) \right. \\
& + [50C^{(1)}\Gamma_1 + 10S^{(4)}\Gamma_1 + \frac{35}{3}C^{(1)}S_4 - \frac{7}{3}S^{(4)}S_4] \Sigma_{DD}(k_1, k_2; k_3, k_4) \\
& + [27C^{(1)}\Gamma_1 + C^{(2)}\Gamma_3 + C^{(3)}\Gamma_2] \Sigma_{EE}(k_1, k_2; k_3, k_4) \\
& + \left[ -\frac{51}{2}C^{(1)}\Gamma_1 + \frac{7}{2}C^{(1)}S_4 - \frac{17}{2}C^{(5-6)}\Gamma_1 \right. \\
& \left. - \frac{7}{6}C^{(5-6)}S_4 \right] \Sigma_{TD}^{sym}(k_1, k_2; k_3, k_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{3}{2} C^{(4)} \Gamma_4 - \frac{27}{2} C^{(1)} \Gamma_1 + 2C^{(5-6)} \Gamma_1 \right. \\
& \quad \left. - \frac{7}{12} C^{(5-6)} S_4 \right] \Sigma_{TE}^{sym}(k_1, k_2; k_3, k_4) \\
& + \left[ 45C^{(1)} \Gamma_1 + \frac{7}{6} S^{(4)} S_4 + S^{(4)} \Gamma_1 \right] \Sigma_{DE}^{sym}(k_1, k_2; k_3, k_4) \left. \right\} \\
\end{aligned} \tag{6.31}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Sigma_{DD}(a, b; c, d) &= \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{k_3 k_4 l_1 l_2=0}^r \frac{(-\hat{u}_{t_1} \Lambda^2)^{k_3+l_2} (-\hat{u}_{t_2} \Lambda^2)^{k_4+l_1}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2)} \\
& \quad D_{a,b,k_3 k_4}^r D_{l_1 l_2 c, d}^r (\Lambda^2)^{4r - \sum k_i + l_i} \\
&= \Sigma_{DD}(b, a; c, d) = \Sigma_{DD}(a, b; d, c) \\
&= \Sigma_{DD}(c, d; a, b) \\
\end{aligned} \tag{6.32}$$

und

$$\begin{aligned}
\Sigma_{EE}(a, b; c, d) &= \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{k_3 k_4 l_1 l_2=0}^r \frac{(-\hat{u}_{t_1} \Lambda^2)^{k_3+l_2} (-\hat{u}_{t_2} \Lambda^2)^{k_4+l_1}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2)} \\
& \quad E_{a,b,k_3 k_4}^r E_{l_1 l_2 c, d}^r (\Lambda^2)^{4r - \sum k_i + l_i} \\
&= \Sigma_{EE}(b, a; c, d) = \Sigma_{EE}(a, b; d, c) \\
&= \Sigma_{EE}(c, d; a, b) \\
\end{aligned} \tag{6.33}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\Sigma_{TD}^{sym}(a, b; c, d) &= \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{k_3 k_4 l_1 l_2=0}^r \frac{(-\hat{u}_{t_1} \Lambda^2)^{k_3+l_2} (-\hat{u}_{t_2} \Lambda^2)^{k_4+l_1}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2)} \\
& \quad (T_{a,b,k_3 k_4}^r D_{l_1 l_2 c, d}^r + D_{a,b,k_3 k_4}^r T_{l_1 l_2 c, d}^r) (\Lambda^2)^{4r - \sum k_i + l_i} \\
\end{aligned} \tag{6.34}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{TE}^{sym}(a, b; c, d) &= \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{k_3 k_4 l_1 l_2=0}^r \frac{(-\hat{u}_{t_1} \Lambda^2)^{k_3+l_2} (-\hat{u}_{t_2} \Lambda^2)^{k_4+l_1}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2)} \\
& \quad (T_{a,b,k_3 k_4}^r E_{l_1 l_2 c, d}^r + E_{a,b,k_3 k_4}^r T_{l_1 l_2 c, d}^r) (\Lambda^2)^{4r - \sum k_i + l_i} \\
\end{aligned} \tag{6.35}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{DE}^{sym}(a, b; c, d) &= \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{k_3 k_4 l_1 l_2=0}^r \frac{(-\hat{u}_{t_1} \Lambda^2)^{k_3+l_2} (-\hat{u}_{t_2} \Lambda^2)^{k_4+l_1}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2)} \\
& \quad (D_{a,b,k_3 k_4}^r E_{l_1 l_2 c, d}^r + E_{a,b,k_3 k_4}^r D_{l_1 l_2 c, d}^r) (\Lambda^2)^{4r - \sum k_i + l_i} \\
\end{aligned} \tag{6.36}$$

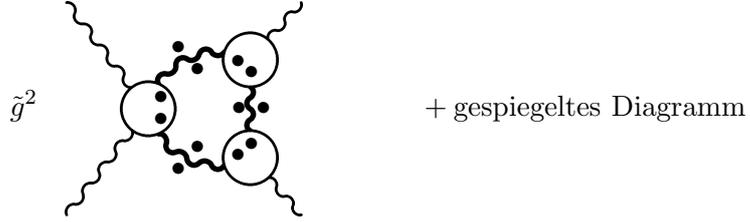
$$\tag{6.37}$$

Die hier zusätzlich definierten Größen sind wie  $\Sigma_{TT}$  Mandelstam-symmetrisch.

### Symmetrisierte Ergebnisse

Die Summe der Kanäle wird zu einem sehr umfangreichem Ergebnis und findet sich im Anhang in (E.1).

Die  $\Gamma_4\Gamma_3\Gamma_3$ -Schleife



$$\begin{aligned}
& \sim (\Pi_4(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2))^{-1} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4=0}^r (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} (\Lambda^2)^{4r-\sum k_i} \frac{1}{b^3} \\
& \left\{ [C^{(5-6)}\Gamma_1 - 3S^{(4)}\Gamma_1 - \frac{1}{4}S^{(4)}S_4 - \frac{1}{12}C^{(5-6)}S_4] \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym}(k_1, k_2; k_3, k_4) \right. \\
& + [15C^{(1)}\Gamma_1 - 5C^{(5-6)}\Gamma_1 - C^{(1)}S_4 + \frac{1}{3}C^{(5-6)}S_4] \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym}(k_1, k_2; k_3, k_4) \\
& \left. + [9C^{(1)}\Gamma_1 - C^{(5-6)}\Gamma_1 + \frac{1}{6}C^{(5-6)}S_4] \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym}(k_1, k_2; k_3, k_4) \right\} \frac{\tilde{g}^2 (\Lambda^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2 \epsilon}
\end{aligned} \tag{6.38}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym}(a, b; c, d) &= \sum_{t_1 t_2 t_3=1}^{r+1} \sum_{k_3 k_4 l_1 l_2 m_1 m_2=0}^r (\Lambda^2)^{6r-\sum k_i+l_i+m_i} \\
& \frac{(-\hat{u}_{t_1} \Lambda^2)^{k_3+m_2} (-\hat{u}_{t_2} \Lambda^2)^{k_4+l_1} (-\hat{u}_{t_3} \Lambda^2)^{l_2+m_1}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2) \Delta(u, t_3)} \\
& (D_{a,b,k_3 k_4}^r C_{m_1 m_2, c}^{3,r} C_{l_1 l_2, d}^{3,r} + D_{c,d,k_3 k_4}^r C_{m_1 m_2, a}^{3,r} C_{l_1 l_2, b}^{3,r})
\end{aligned} \tag{6.39}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym}(a, b; c, d) &= \sum_{t_1 t_2 t_3=1}^{r+1} \sum_{k_3 k_4 l_1 l_2 m_1 m_2=0}^r (\Lambda^2)^{6r-\sum k_i+l_i+m_i} \\
& \frac{(-\hat{u}_{t_1} \Lambda^2)^{k_3+m_2} (-\hat{u}_{t_2} \Lambda^2)^{k_4+l_1} (-\hat{u}_{t_3} \Lambda^2)^{l_2+m_1}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2) \Delta(u, t_3)} \\
& (E_{a,b,k_3 k_4}^r C_{m_1 m_2, c}^{3,r} C_{l_1 l_2, d}^{3,r} + E_{c,d,k_3 k_4}^r C_{m_1 m_2, a}^{3,r} C_{l_1 l_2, b}^{3,r})
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Dabei erfüllen die hier neu hinzukommenden  $\Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym}$  und  $\Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym}$  ebenfalls die Mandelstam-Symmetrie im  $s$ -Kanal.

**Symmetrisierte Ergebnisse**

Die symmetrisierten Ergebnisse aus den sechs Diagrammen findet sich in (E.2).

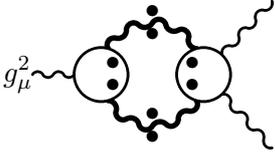
**Selbstkonsistenzfähigkeit**

In Kapitel 8 werden die Nebenbedingungen untersucht, die sich aus der  $\Gamma_4$ -BSG mit vollständig symmetrischen Parametern ergeben. Dort werden sich

zwei Konsequenzen zeigen. Erstens produziert auch der erweiterte Parameter-satz Tensorstrukturen, die zu  $A_4$  gehören und daher unmittelbar Nebenbedingungen erzeugen. Zweitens sind die zur Notation unserer Ergebnisse genutzten  $\Sigma$ -Parameter lediglich Mandelstam-symmetrisch, so dass zur Erhaltung der vollständigen Symmetrie der Vertexparameter weitere Nebenbedingungen gefordert werden müssen.

### Die $\Gamma_3\Gamma_4$ -Schleife

Die  $\Gamma_3\Gamma_4$ -Schleife ist ein tadpole-artiger Term aus der DSG für den  $\Gamma_3$ -Vertex, über den der volle  $\Gamma_4$ -Vertex in die Gleichungen der niedrigeren Vertizes zurückkoppelt. Dabei tragen insbesondere auch Terme proportional zu  $D_4$  und  $E_4$  zu den SKG bei.



$$\begin{aligned}
& \sim t^{\mu_1\mu'_1}(p_1)t^{\mu_2\mu'_2}(p_2)t^{\mu_3\mu'_3}(p_3)\frac{1}{\epsilon}\frac{\tilde{g}^2\Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}}\frac{1}{\Pi_3((p_1)^2,(p_2)^2,(p_3)^2)} \\
& if_{a_1a_2a_3}\left\{\delta^{\mu'_1\mu'_3}p_1^{\mu'_2}-\delta^{\mu'_1\mu'_2}p_1^{\mu'_3}\right\}\sum_{k_1k_2k_3=0}^r(p_1)^{2k_1}(p_2)^{2k_2}(p_3)^{2k_3}(\Lambda^2)^{3r-\Sigma k_i} \\
& \frac{1}{b^2}\{9\Sigma_{\Gamma T}(k_1;k_2,k_3)-2\Sigma_{\Gamma E}(k_1;k_2,k_3)\}
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Dabei ist  $\Sigma_{\Gamma E}$  analog zu (5.46) definiert.

### Symmetrisierte Ergebnisse

Die SKG des  $\Gamma_3$ -Vertex muss zur Konstruktion der SKG trivial symmetrisiert werden. Dazu summieren wir über die Ergebnisse, die man erhält, wenn jeweils einer der drei Impulse in einen nackten  $\Gamma_4$ -Vertex in der DSG hineinfließt.

Summe über drei Kanäle

$$\begin{aligned}
& \sim if_{a_1a_2a_3}\frac{1}{\epsilon}\frac{\tilde{g}^2\Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}}\frac{1}{b^2}\frac{1}{\Pi_3((p_1)^2,(p_2)^2,(p_3)^2)} \\
& \sum_{k_1k_2k_3=0}^r(p_1)^{2k_1}(p_2)^{2k_2}(p_3)^{2k_3}(\Lambda^2)^{3r-\Sigma k_i} \\
& \left(\left\{\delta^{\mu'_1\mu'_3}p_1^{\mu'_2}-\delta^{\mu'_1\mu'_2}p_1^{\mu'_3}\right\}\left[\frac{45}{4}\Sigma_{\Gamma T}(k_1;k_2,k_3)-\frac{5}{2}\Sigma_{\Gamma E}(k_1;k_2,k_3)\right]\right. \\
& +\left\{\delta^{\mu'_1\mu'_2}p_2^{\mu'_3}-\delta^{\mu'_2\mu'_3}p_2^{\mu'_1}\right\}\left[\frac{45}{4}\Sigma_{\Gamma T}(k_2;k_3,k_1)-\frac{5}{2}\Sigma_{\Gamma E}(k_2;k_3,k_1)\right] \\
& \left.+\left\{\delta^{\mu'_2\mu'_3}p_3^{\mu'_1}-\delta^{\mu'_3\mu'_1}p_3^{\mu'_2}\right\}\left[\frac{45}{4}\Sigma_{\Gamma T}(k_3;k_1,k_2)-\frac{5}{2}\Sigma_{\Gamma E}(k_3;k_1,k_2)\right]\right)
\end{aligned} \tag{6.42}$$

### 6.4.3 Mandelstam-symmetrischer $\Gamma_4$ -Vertex

Nachdem sich gezeigt hat, dass die für eine selbstkonsistente Formulierung des Ansatzes mit vollständig symmetrischen Vertexparametern notwendigen Nebenbedingungen (siehe Kapitel 8) zu sehr starken und wenig plausibeln Einschränkungen führen, untersuchen wir hier den allgemeineren Ansatz mit Mandelstam-symmetrischen Parametern. Für den  $\Gamma_4$ -Vertex nutzen wir also nunmehr den Ansatz (2.34).

Zur vereinfachten Notation der Ergebnisse nutzen wir die folgenden Konventionen:

- Die Ordnung der Indizes an den Mandelstam-symmetrischen Vertexparametern wird entsprechend der Definition in (2.41) angegeben und auch in den  $\Sigma$ -Parametern verwendet.
- Die Ordnung der Impulsindizes, von denen die  $\Sigma$ -Parameter abhängen, wird durch einen Strich mit tiefgestellter Indexanordnung bzw. Kanal-Bezeichnung angegeben.

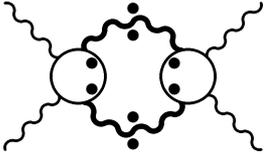
$$\Sigma|klmn := \Sigma(k, l; m, n) \quad (6.43)$$

$$\Sigma|_s \stackrel{(E.6)}{:=} \Sigma(k, l; m, n) \quad (6.44)$$

Damit können wir im Folgenden die drei neu zu berechnenden Diagramme notieren.

#### Die $\Gamma_4\Gamma_4$ -Schleife

Für den s-Kanal erhalten wir das folgende Ergebnis.



$$\begin{aligned} & \sim \frac{1}{\Pi_4(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2)} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4=0}^r (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} \frac{1}{b^2} (\Lambda^2)^{4r-\Sigma k_i} \\ & \frac{\tilde{g}^2 (\Lambda^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2 \epsilon} \left\{ -3C^{(4)}(\Gamma_3 - \Gamma_2) \Sigma_{TT}^{ss} - \frac{3}{4} C^{(4)}(\Gamma_3 - \Gamma_2) \{ \Sigma_{TT}^{sym st} + \Sigma_{TT}^{sym su} \} \right. \\ & + \left[ \frac{3}{4} S^{(4)} - \frac{3}{4} C^{(4)} - \frac{1}{4} (C^{(5)} - C^{(6)}) \right] \left[ 2\Gamma_1 - \frac{1}{2}(\Gamma_1 - \Gamma_3) + \frac{1}{24} S_4 \right] \{ \Sigma_{TT}^{tt} + \Sigma_{TT}^{uu} \} \\ & + \left[ -\frac{3}{4} S^{(4)} - \frac{3}{4} C^{(4)} + \frac{1}{4} (C^{(5)} - C^{(6)}) \right] \left[ -2\Gamma_1 - \frac{1}{2}(\Gamma_2 - \Gamma_1) - \frac{1}{24} S_4 \right] \Sigma_{TT}^{sym tu} \\ & + 24C^{(1)}\Gamma_1 \Sigma_{EE}^{ss} + C^{(2)} \left( \frac{1}{2}\Gamma_3 + \frac{1}{24} S_4 \right) \{ \Sigma_{EE}^{tt} + \Sigma_{EE}^{uu} \} \\ & + \frac{3}{4} C^{(1)}\Gamma_1 \{ \Sigma_{EE}^{sym st} + \Sigma_{EE}^{sym su} \} + C^{(3)} \left( \frac{1}{2}\Gamma_2 + \frac{1}{24} S_4 \right) \Sigma_{EE}^{sym tu} \\ & + 8C^{(1)} \left( \frac{7}{6} S_4 - \Gamma_1 \right) \Sigma_{DD}^{ss} + C^{(2)} \left( \frac{9}{2}\Gamma_1 + \frac{9}{2}\Gamma_3 + \frac{1}{24} S_4 \right) \{ \Sigma_{DD}^{tt} + \Sigma_{DD}^{uu} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +C^{(1)}(\Gamma_1 - \frac{7}{12}S_4)\{\Sigma_{DD}^{sym\ st} + \Sigma_{DD}^{sym\ su}\} + C^{(3)}(\frac{9}{2}\Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_2 + \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{DD}^{sym\ tu} \\
& - \frac{1}{2}C^{(4)}(\Gamma_2 - \Gamma_3)\{\Sigma_{symTE}^{sym\ st} + \Sigma_{symTE}^{sym\ su}\} - \frac{27}{4}C^{(1)}\Gamma_1\{\Sigma_{symTE}^{sym\ ts} + \Sigma_{symTE}^{sym\ us}\} \\
& - C^{(6)}(\frac{3}{4}\Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_2 - \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTE}^{sym\ tt} + C^{(5)}(\frac{3}{4}\Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_3 - \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTE}^{sym\ tu} \\
& - C^{(5)}(\frac{1}{2}\Gamma_3 - \frac{3}{4}\Gamma_1 + \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTE}^{sym\ ut} + C^{(6)}(\frac{1}{2}\Gamma_2 - \frac{3}{4}\Gamma_1 + \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTE}^{sym\ uu} \\
& - \frac{1}{2}C^{(4)}(\Gamma_3 - \Gamma_2)\{\Sigma_{symTD}^{sym\ st} + \Sigma_{symTD}^{sym\ su}\} - 3C^{(1)}(2\Gamma_1 - \frac{7}{12}S_4)\Sigma_{symTD}^{sym\ ts} \\
& - C^{(6)}(3\Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_3 - \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTD}^{sym\ tt} + C^{(5)}(3\Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_2 - \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTD}^{sym\ tu} \\
& - 3C^{(1)}(2\Gamma_1 - \frac{7}{12}S_4)\Sigma_{symTD}^{sym\ us} + C^{(5)}(3\Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_2 - \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTD}^{sym\ ut} \\
& - C^{(6)}(3\Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_3 - \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTD}^{sym\ uu} + 12C^{(1)}\Gamma_1\Sigma_{symDE}^{sym\ ss} \\
& + \frac{1}{2}C^{(1)}(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \frac{1}{24}S_4)\{\Sigma_{symDE}^{sym\ st} + \Sigma_{symDE}^{sym\ su}\} + \frac{15}{4}C^{(1)}\Gamma_1\{\Sigma_{symDE}^{sym\ ts} \\
& + \Sigma_{symDE}^{sym\ us}\} + C^{(2)}(\frac{3}{4}\Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_2 + \frac{1}{24}S_4)\{\Sigma_{symDE}^{sym\ tt} + \Sigma_{symDE}^{sym\ uu}\} \\
& + C^{(3)}(\frac{3}{4}\Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_3 + \frac{1}{24}S_4)\{\Sigma_{symDE}^{sym\ tu} + \Sigma_{symDE}^{sym\ ut}\} \Big|_{k_1k_2k_3k_4}
\end{aligned} \tag{6.45}$$

Im Vergleich zum vorhergehenden Kapitel ist an den Parametern noch die Mandelstam-Struktur der Vertex-Parameter angegeben, so dass sich auch die Definition der  $\Sigma$ -Parameter entsprechend ändern muss. Es gilt:

$$\Sigma_{symXY}^{sym\ ij} \sim X_{abyx}^i Y_{xycd}^j + Y_{abyx}^j X_{xycd}^i \quad . \tag{6.46}$$

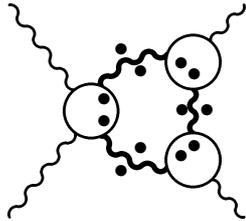
Die Reihenfolge der Kanal-Indizes ist also in der Regel nicht beliebig.

### Symmetrisierte Ergebnisse

Durch Symmetrisierung erhalten wir nun ohne weitere Rechnung auch die Ergebnisse des t- und des u-Kanals, die wir in (E.4) notieren.

### Die $\Gamma_4\Gamma_3\Gamma_3$ -Schleife

Hier erhält man für den Beitrag der beiden Schleifen im s-Kanal das folgende Ergebnis.



$$\begin{aligned}
& \sim \frac{1}{\Pi_4(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2)} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4=0}^r (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} \frac{1}{b^3} (\Lambda^2)^{4r-\sum k_i} \\
& \frac{\tilde{g}^2(\Lambda^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2 \epsilon} \left\{ \left( \frac{1}{2} C^{(5)} - \frac{1}{2} C^{(4)} - \frac{3}{4} S^{(4)} \right) (2\Gamma_1 + \frac{1}{6} S_4) \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym t} \right. \\
& - \left( \frac{1}{2} C^{(6)} - \frac{1}{2} C^{(4)} + \frac{3}{4} S^{(4)} \right) (2\Gamma_1 + \frac{1}{6} S_4) \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym u} \\
& + 9C^{(1)} \Gamma_1 \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym s} - C^{(5)} \left( \Gamma_1 - \frac{1}{6} S_4 \right) \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym t} + C^{(6)} \left( \Gamma_1 - \frac{1}{6} S_4 \right) \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym u} \\
& + 3C^{(1)} \left( 2\Gamma_1 - \frac{1}{3} S_4 \right) \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym s} - C^{(5)} \left( 4\Gamma_1 - \frac{1}{6} S_4 \right) \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym t} \\
& \left. + C^{(6)} \left( 4\Gamma_1 - \frac{1}{6} S_4 \right) \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym u} \right\} \Big|_{k_1 k_2 k_3 k_4} \quad (6.47)
\end{aligned}$$

### Symmetrisierte Ergebnisse

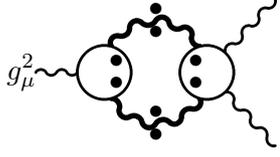
Dieses Ergebnis lässt sich in (E.5) nachlesen.

### Selbstkonsistenzfähigkeit

Die beiden Schleifengraphen aus der  $\Gamma_4$ -BSG zeigen das nach der Analyse der Tensorstrukturen in Kapitel 2 zu erwartende Verhalten: Alle 18 sogenannten Basistensoren aus Tabelle 2.2 werden erzeugt. Wie die Diskussion in Kapitel 8 zeigen wird, ist der Mandelstam-symmetrische Ansatz ohne zusätzliche Nebenbedingungen nicht selbstkonsistenzfähig. Erst mit partiell antisymmetrischen Vertexparametern entstehen keine unmittelbaren Nebenbedingungen aus der Tensor-Struktur mehr. Anders als in den beiden vorher betrachteten Fällen sind die Nebenbedingungen aber nicht mehr so stark, dass eine selbstkonsistente Lösung des Mandelstam-symmetrischen Ansatz als ausgeschlossen erscheint.

### Die $\Gamma_4\Gamma_3$ -Schleife in der $\Gamma_3$ -DSG

Als letzter Graph ist noch der tadpole-artige Term in der  $\Gamma_3$ -DSG neu zu berechnen.



The diagram shows a loop structure with two vertices. The left vertex is connected to an external line labeled  $g_\mu^2$ . The right vertex is connected to an external wavy line. The loop itself consists of two vertices connected by a wavy line, with several internal lines connecting them.

$$\begin{aligned}
& \sim t^{\mu_1 \mu'_1}(p_1) t^{\mu_2 \mu'_2}(p_2) t^{\mu_3 \mu'_3}(p_3) \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{b^2} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \frac{1}{\Pi_3((p_1)^2, (p_2)^2, (p_3)^2)} \\
& i f_{a_1 a_2 a_3} \left\{ \delta^{\mu'_1 \mu'_3} p_1^{\mu'_2} - \delta^{\mu'_1 \mu'_2} p_1^{\mu'_3} \right\} \sum_{k_1 k_2 k_3=0}^r (p_1)^{2k_1} (p_2)^{2k_2} (p_3)^{2k_3} (\Lambda^2)^{3r-\sum k_i} \\
& \left\{ 6\Sigma_{\Gamma T}^s + \frac{3}{2} (\Sigma_{\Gamma T}^t + \Sigma_{\Gamma T}^u) + \Sigma_{\Gamma D}^t + \Sigma_{\Gamma D}^u - \Sigma_{\Gamma E}^t - \Sigma_{\Gamma E}^u \right\} \Big|_{k_1 k_2 k_3} \quad (6.48)
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \Sigma_{\Gamma X}^i(a; b, c) &= \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{klmn=0}^r (\Lambda^2)^{4r-(k+l+m+n)} \\ &\quad \frac{(-\hat{u}_{r,t_1})^{k+n} (-\hat{u}_{r,t_2})^{l+m}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2)} (C_{al;k}^r + \frac{1}{4} C_{lk;a}^r) X_{mnb}^i \quad . \quad (6.49) \end{aligned}$$

### Symmetrisierte Ergebnisse

Für die triviale Symmetrisierung der  $\Gamma_3$ -Vertex-DSG benötigt man noch die symmetrisierte Variante dieser Schleife.

$$\begin{aligned} I &\sim t^{\mu_1 \mu'_1}(p_1) t^{\mu_2 \mu'_2}(p_2) t^{\mu_3 \mu'_3}(p_3) \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{b^2} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \frac{1}{\Pi_3((p_1)^2, (p_2)^2, (p_3)^2)} \\ &\quad i f_{a_1 a_2 a_3} \sum_{k_1 k_2 k_3=0}^r (p_1)^{2k_1} (p_2)^{2k_2} (p_3)^{2k_3} (\Lambda^2)^{3r-\Sigma k_i} \\ &\quad \left[ \left\{ \delta^{\mu'_1 \mu'_3} p_1^{\mu'_2} - \delta^{\mu'_1 \mu'_2} p_1^{\mu'_3} \right\} \right. \\ &\quad \left. \left\{ 6\Sigma_{\Gamma T}^s + \frac{3}{2}(\Sigma_{\Gamma T}^t + \Sigma_{\Gamma T}^u) + \Sigma_{\Gamma D}^t + \Sigma_{\Gamma D}^u - \Sigma_{\Gamma E}^t - \Sigma_{\Gamma E}^u \right\} \Big|_{k_1 k_2 k_3} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \delta^{\mu'_1 \mu'_2} p_2^{\mu'_3} - \delta^{\mu'_2 \mu'_3} p_2^{\mu'_1} \right\} \right. \\ &\quad \left. \left\{ 6\Sigma_{\Gamma T}^s + \frac{3}{2}(\Sigma_{\Gamma T}^t + \Sigma_{\Gamma T}^u) + \Sigma_{\Gamma D}^t + \Sigma_{\Gamma D}^u - \Sigma_{\Gamma E}^t - \Sigma_{\Gamma E}^u \right\} \Big|_{k_2 k_3 k_1} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \delta^{\mu'_2 \mu'_3} p_3^{\mu'_1} - \delta^{\mu'_1 \mu'_3} p_3^{\mu'_2} \right\} \right. \\ &\quad \left. \left\{ 6\Sigma_{\Gamma T}^s + \frac{3}{2}(\Sigma_{\Gamma T}^t + \Sigma_{\Gamma T}^u) + \Sigma_{\Gamma D}^t + \Sigma_{\Gamma D}^u - \Sigma_{\Gamma E}^t - \Sigma_{\Gamma E}^u \right\} \Big|_{k_3 k_1 k_2} \right] (6.50) \end{aligned}$$



## Kapitel 7

# Kondensate der Bewegungsgleichungen

Für die numerische Bestimmung der Parameter des erweiterten Ansatzes greift man in der Regel auf Varianten des mehrdimensionalen Newton-Verfahrens zurück. Um diese Verfahren anwenden zu können, sind die Bedingungen wie für ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem zu erfüllen, d.h. die Determinante der numerischen Jacobi-Matrix muss von 0 verschieden sein. Das bedeutet insbesondere, dass man für  $n$  Variablen auch  $n$  linear unabhängige Gleichungen benötigt. Wie in Kapitel 8 diskutiert, liefern die DSG und die BSG der Vertizes Gleichungen entsprechend der Parameterzahl dieser Vertizes. Aus den DSG der Propagatoren erhalten wir Gleichungen entsprechend der Anzahl der Propagator-Pole sowie für den multiplikativen Faktor. Diese letzte Gleichung fehlt wieder, wenn man auf Terme ohne ganze  $\Lambda$ -Potenz verzichtet. Damit benötigt man für jeden Propagator jeweils  $r$  weitere Gleichungen.

Die bisher in den Arbeiten zum erweiterten Ansatz verwendete Strategie [Str 96, Dri 97, Grü 02, Ewe 04] bestand darin, vollständige Kondensate der Propagatoren und Vertizes zur Bestimmung der zur Anwendung eines Newton-Verfahrens fehlenden Gleichungen zu berechnen.<sup>1</sup> Dabei betrachtet man die DSG der QCD an *einem* Ort  $x$  – ganz im Sinne der Wilson’schen OPE. Im Impulsraum resultiert daraus eine Integration über die äußeren Impulse ohne Kontraktion der Tensorstruktur. Problematisch an diesem Verfahren ist die Tatsache, dass jede derart vollständig kontrahierte Bewegungsgleichung (d.h. jedes Kondensat eines der Basis-Vertizes) nur genau eine Bestimmungsgleichung liefert. Zur Konstruktion eines für allgemeine Approximationsstufe  $r$  anwendbaren Verfahrens ist dieses Vorgehen daher ungeeignet, da man sukzessive die Kondensate der oberflächlich konvergenten Vertizes berechnen muss und kein abgeschlossenes Gleichungssystem erhält.

Statt mit vollständig kontrahierten Bewegungsgleichungen zu rechnen, kann man jedoch auch – ganz im Sinne der allgemeinen Form der OPE [Wei 96, Kug 97] – lediglich zwei äußere Beine auf den gleichen Ort setzen bzw. im Impulsraum über zwei äußere Beine integrieren und so *partielle Kondensate* aus-

---

<sup>1</sup>Da dort nur der Approximationsgrad  $r = 1$  explizit berechnet wurde, reichte diese Strategie aus.

rechnen. Dies liefert bei den Kondensaten der Propagatoren keinen Unterschied, bei den Kondensaten der 3-Punkt-Vertizes verbleibt aber ein Bein unintegriert.<sup>2</sup> Dieses Bein hat  $r$  Pole entsprechend der Zahl der Propagator-Nullstellen. Damit eignen sich die partiellen Kondensate für eine geschlossene Definition eines für Newton-Verfahren vollständig bestimmten Gleichungssystems. Um mit den Rechnungen zu den DSG und der BSG konsistent zu bleiben, beschränken wir uns auf die Kontraktion der Terme aus der 1-Schleifen-Entwicklung.

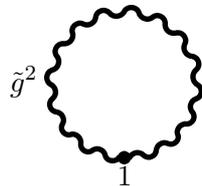
Verzichtet man darauf, die Gleichungen für die führende Impulspotenz auch zu den SKG heranzuziehen, damit der perturbative Limes mit führenden Vertex-Parametern identisch 1 nicht strukturell ausgeschlossen wird,<sup>3</sup> fehlt für jeden Basisvertex jeweils eine Gleichung. Um sich bei der Analyse der SKG die Möglichkeit zu erhalten, die Terme ohne ganze  $\Lambda$ -Potenz nicht zu verwenden, muss man über die partiellen Vertex-Kondensate hinaus auch die vollständigen Kondensate der Propagatoren berechnen. Die eigentlich ebenfalls notwendigen vollständigen Kondensate der 3-Punkt-Vertizes und von  $\Gamma_4$  betrachten wir nicht, da dazu 3-Schleifen-Graphen zu berechnen wären. Wir verwenden statt dessen die aus der  $A_4$ -Struktur des  $\Gamma_4$ -Vertex stammenden SKG bzw. Nebenbedingungen.<sup>4</sup>

Die folgenden Kondensatberechnungen erfordern die richtige Extraktion der führenden  $\frac{1}{\epsilon^2}$ -Divergenzen für die 2-Schleifen-Graphen. Die hierfür benötigte Technik, alle möglichen Definitionen von divergenten Subgraphen zu untersuchen, beruht auf einer Kombination der Waldformel [PT 84, Mut 87, Kug 97, Zin 02] mit dem Prinzip der Kompensation nicht-lokaler Divergenzen. Da sie schon in früheren Arbeiten dargelegt bzw. benutzt wurde [Hüb 89, Str 96], verzichten wir auf eine Diskussion.

## 7.1 Propagator-Kondensate

### 7.1.1 Gluon-Propagator

Für den Gluon-Propagator wird das Kondensat mit einem perturbativen und einem vollen zusätzlichen Propagator gebildet. Daher erhalten wir auf 2-Schleifen-Niveau die folgende Gleichung für das Kondensat.



<sup>2</sup>In der QCD kommen 1-Punkt-Amplituden nicht vor. Sie sind aber aus anderen Theorien, z.B. skalare  $\phi^3$ -Theorie [Grü 02], bekannt.

<sup>3</sup>In [Sti 01a] wird ein starkes Argument dafür angegeben, dass die Einbeziehung der manifest quasi-perturbativen Terme ohne ganzzahlige  $\Lambda$ -Potenz in die SKG eine Verletzung des perturbativen Limes *erzwingt*. Man kann dies an der SKG des Geist-Propagators ablesen.

<sup>4</sup>Aus der  $A_4$ -Struktur kommen hinreichend viele Gleichungen, um sogar das partielle  $\Gamma_3$ -Kondensat weglassen zu können.

$$\begin{aligned}
 &= \tilde{g}^2 \text{ (diagram)} + \frac{1}{2} \tilde{g}^4 \text{ (diagram)} \\
 &+ \frac{1}{2} \tilde{g}^4 \text{ (diagram)} - \tilde{g}^4 \text{ (diagram)} \\
 &- \tilde{g}^4 \sum_f \text{ (diagram)} \tag{7.1}
 \end{aligned}$$

Da der perturbative Gluon-Propagator keine Skalen aufweist, können Beiträge zum perturbativen Gluon-Kondensat nur aus der Fermion-Schleife kommen. In den höheren Schleifenordnungen sind auch nur jene mit Fermion-Schleifen relevant, da alle anderen Graphen auf perturbativem Niveau skalenfrei sind. Im Fall chiraler Fermionen verschwindet das Gluon-Kondensat.

**Perturbative Fermion-Schleife**

Die Divergenz-Analyse der Subgraphen ergibt, dass nur die Integration über die Fermion-Schleife einen divergenten Subgraphen liefern kann und so zu den gesuchten Termen  $\sim \frac{1}{\epsilon^2}$  beiträgt. Weil die in (5.5) berechnete perturbative Fermion-Schleife in Landau-Eichung ein skalenfreies Ergebnis aufweist, verschwindet das Kondensat dann sogar bei massiven Fermionen.

$$\text{ (diagram) } \sim 0 \tag{7.2}$$

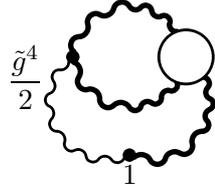
**Gluon-Propagator**

Da der erweiterte Gluon-Propagator nicht mehr skalenfrei ist, liefert die Berechnung des Kondensats einen nicht-verschwindenden Term  $\sim \Lambda^2$ .

$$\tilde{g}^2 \text{ (diagram)}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta^{ab} \int \bar{d}^D q t^{\mu\nu}(q) \frac{\prod_{s=1}^r q^2 + u_{r,s} \Lambda^2}{b \prod_{s=1}^{r+1} q^2 + \hat{u}_{r,s} \Lambda^2} \\
&= \delta^{ab} \int_0^1 dx \int \bar{d}^D q \sum_{t=1}^{r+1} \frac{\prod_{s=1}^r (u_{r,s} - \hat{u}_{r,t})}{b \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (\hat{u}_{r,s} - \hat{u}_{r,t})} \frac{q^2 \delta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu}{(q^2 + x \hat{u}_{r,t} \Lambda^2)^2} \\
&\sim -\frac{3}{4} \delta^{ab} \delta^{\mu\nu} \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2} \frac{(\Lambda^2)^{-\epsilon}}{\epsilon} \sum_{t=1}^{r+1} \frac{\prod_{s=1}^r (u_{r,s} - \hat{u}_{r,t})}{b \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (\hat{u}_{r,s} - \hat{u}_{r,t})} \hat{u}_{r,t} \Lambda^2 \\
&= -\frac{3}{4b} \delta^{ab} \delta^{\mu\nu} \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2} \frac{(\Lambda^2)^{-\epsilon}}{\epsilon} (\varsigma_1 - \sigma_1) \Lambda^2 \tag{7.3}
\end{aligned}$$

### Gluon-Schleife



$$\frac{\tilde{g}^4}{2} \sim I \tag{7.4}$$

In diesem Graphen sind alle drei Subgraphen divergent. Die quadratisch divergente Gluon-Schleife ist schon in (5.8) berechnet worden. Wir erhalten ihren Beitrag zu den Kondensatgleichungen,  $I_{DSG}$ , durch eine weitere Integration. Die Subgraphen vom Typ  $D^{pert} \Gamma_3^{pert} D \Gamma_3 D$  sind logarithmisch divergent, die verbleibende Integration über einen vollen Propagator ist dagegen quadratisch divergent. Wir berechnen zunächst die entsprechenden Subgraphen,  $I_{S1}$  und  $I_{S2}$ .

$$\begin{aligned}
I_{S1} &\sim -f_{axy_1} f_{by_2x} \frac{\Lambda^{-2\epsilon}}{b^2 (4\pi)^2 \epsilon} \frac{\sum_{m=0}^r C_{rr;m}^{3,r} q^{2m}}{\prod_{s=1}^r (q^2 + u_{r,s} \Lambda^2)} \\
&\quad \left( \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda_1 \lambda_2} - \frac{1}{6} S_4^{\mu\nu \lambda_1 \lambda_2} \right) \\
&\sim I_{S2} \tag{7.5}
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen muss  $I_{S2}$  das gleiche Resultat wie  $I_{S1}$  liefern. Die Integration über den verbliebenen Gluon-Propagator ergibt dann für den gemeinsamen Beitrag zu den Kondensatgleichungen,  $I_K$ , das folgende Ergebnis.

$$\begin{aligned}
I_K &\sim -\frac{29}{2b^3} \delta_{ab} \delta^{\mu\nu} \frac{\tilde{g}^4}{(4\pi)^4} \frac{\Lambda^{-4\epsilon}}{\epsilon^2} \\
&\quad (C_{rr;r\varsigma_1}^r - C_{rr;r-1}^r) \Lambda^2 \tag{7.6}
\end{aligned}$$

Damit keine perturbativen Korrekturen in die SKG dieses Kondensats eingehen, müssen wir von diesem Ergebnis noch den Teil abziehen, der bei der Integration der nackten Subschleife  $D^{pert}\Gamma_3^{pert}D^{pert}\Gamma_3^{pert}D^{pert}$  mit dem vollen Gluon-Propagator entsteht. Mit den Ergebnissen der vorigen Rechnung können wir  $I_{K,pert}$  einfach notieren.

$$I_{K,pert} \sim -\frac{29}{2b}\delta_{ab}\delta^{\mu\nu}\frac{\tilde{g}^4}{(4\pi)^4}\frac{\Lambda^{-2\epsilon}}{\epsilon^2}(\varsigma_1 - \sigma_1)\Lambda^2 \quad (7.7)$$

Für den Anteil aus der DSG (d.h. denjenigen, bei dem der in der DSG auftretende Subgraph als erster berechnet wurde) finden wir das Folgende.

$$I_{DSG} \sim \frac{3}{4b^3}\delta_{ab}\delta^{\mu\nu}\frac{\tilde{g}^4}{(4\pi)^4}\frac{\Lambda^{-4\epsilon}}{\epsilon^2} \left( -\frac{61}{4}C_{rr;r}^r\varsigma_1 + \frac{33}{2}C_{r-1r;r}^r - \frac{5}{4}C_{rr;r-1}^{3,r} \right)\Lambda^2 \quad (7.8)$$

Zuletzt benötigen wir noch das Ergebnis der zugehörigen perturbativen Korrekturen  $I_{DSG,pert}$ . Mit (5.2) finden wir das folgende Resultat.

$$I_{DSG,pert} \sim -\frac{3}{4b}\delta_{ab}\delta^{\mu\nu}\frac{\tilde{g}^4}{(4\pi)^4}\frac{\Lambda^{-2\epsilon}}{\epsilon^2}\frac{25}{4}(\varsigma_1 - \sigma_1)\Lambda^2 \quad (7.9)$$

Damit haben wir für das Gesamtergebnis

$$I = I_K + I_{DSG} \quad (7.10)$$

und für die perturbativen Korrekturen

$$I_{pert} = I_{K,pert} + I_{DSG,pert} \quad (7.11)$$

### Tadpole-Schleife

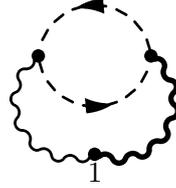
Da der  $\Gamma_4^{pert}$ -Vertex keine Impulsabhängigkeiten hat, sind die beiden Gluon-Schleifen voneinander unabhängig und können getrennt berechnet werden. Man erhält das Ergebnis für die Kondensatgleichung aus der Integration des Tadpoles in (5.10).

$$\frac{\tilde{g}^4}{2} \text{Diagram} \sim \frac{1}{\epsilon^2}\frac{\tilde{g}^4\Lambda^{-4\epsilon}}{(4\pi)^4}\delta_{ab}\delta^{\mu\nu}\frac{1}{b^3}\frac{81}{16}\Lambda^2(\varsigma_1 - \sigma_1) \quad (7.12)$$

Wegen der Skalenfreiheit der perturbativen Integrale entwickelt dieser Graph keine Korrekturen der perturbativen Terme.

### Geist-Schleife

Die beiden Subgraphen vom Typ  $D^{pert}\tilde{\Gamma}_3^{pert}\tilde{D}\tilde{\Gamma}_3^{pert}D$  sind nach Abzählen der Vertex-Dimensionen logarithmisch divergent. Der Impulsbeitrag aus dem  $\tilde{\Gamma}_3$ -Vertex trägt jedoch den Impuls der *auslaufenden* Geist-Linie. Weil außerdem die Wirkung des Transversalprojektors auf den Gluonlinien derart ist, dass jeweils eine Potenz des Integrationsimpulses des Subgraphen vernichtet wird, sind beide Subgraphen konvergent. Man kann also nur Beiträge  $\sim \frac{1}{\epsilon^2}$  aus der in (5.11) berechneten Geist-Schleife der DSG erhalten. Damit können wir das folgende Ergebnis notieren.

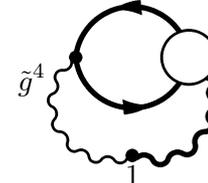


$$\sim \frac{3}{16\tilde{b}\tilde{b}^2}\delta^{ab}\delta^{\mu\nu}\frac{\tilde{g}^4}{(4\pi)^4}\frac{(\Lambda^2)^{-\epsilon}}{\epsilon^2}(\varsigma_1 - \sigma_1)\Lambda^2 \quad (7.13)$$

Da die Geist-Schleife in (5.11) jedoch unabhängig von  $\Lambda$  ist, fehlt ein Faktor  $\Lambda^{-2\epsilon}$  für die *zweifache* Anwendung des  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus. Daher gehört dieser Graph formal zu den Korrekturen der perturbativen Terme.

### Fermion-Schleife

Wie bei der perturbativen Rechnung entwickelt die Fermion-Schleife nur bei Integration der Ergebnisse aus der DSG eine Divergenz  $\sim \frac{1}{\epsilon^2}$ . Mit (5.15) erhält man das folgende Resultat.



$$\sim \frac{3}{2b}\frac{1}{\epsilon^2}\frac{\tilde{g}^4\Lambda^{-4\epsilon}}{(4\pi)^4}\delta_{ab}\delta^{\mu\nu}\sum_f\left\{\left[-\bar{C}_{r;r-1,r-1}^{r,f}+\bar{C}_{r;r-2,r}^{r,f}+\bar{C}_{r;r-1,r}^{r,f}\varpi_1^f-\bar{C}_{r;rr}^{r,f}\varpi_2^f\right]+\left[-\frac{1}{3}\bar{C}_{r;rr}^{r,f}\varsigma_1+\frac{1}{3}\bar{C}_{r-1;rr}^{r,f}\right]\Lambda^2\right\} \quad (7.14)$$

Für die Korrektur der perturbativen Terme findet man mit (5.5) schnell das folgende Ergebnis.

$$I_{pert}\sim-\frac{1}{2b}\frac{1}{\epsilon^2}\frac{\tilde{g}^4\Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^4}\delta_{ab}\delta^{\mu\nu}\sum_f(\varsigma_1-\sigma_1)\Lambda^2 \quad (7.15)$$

#### 7.1.2 Fermion-Propagator

Das Kondensat des Fermion-Propagators hat Massendimension 3. Bei der Berechnung des 2-Schleifen-Graphen kommen daher nur divergente Subgraphen vor.

$$\begin{aligned}
& \tilde{g}^2 \text{ (circle with vertex 1)} \\
= & \tilde{g}^2 \text{ (circle with vertex 1)} + \tilde{g}^4 \text{ (circle with vertex 1 and a self-energy loop)}
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Da im Lauf der weiteren Rechnung die symmetrischen Produktsommen der  $\hat{\kappa}$ -Parameter eine wichtige Rolle spielen werden, kürzen wir diese mit  $\varrho_n^f$  ab.

$$\varrho_1^f = \varpi_1^f \tag{7.17}$$

$$\varrho_2^f = \sum_{\substack{t_1 t_2 = 1 \\ t_1 \leq t_2}}^{r+1} \hat{\kappa}_{t_1}^f \hat{\kappa}_{t_2}^f \tag{7.18}$$

$$\varrho_3^f = \sum_{\substack{t_1 t_2 t_3 = 1 \\ t_1 \leq t_2 \leq t_3}}^{r+1} \hat{\kappa}_{t_1}^f \hat{\kappa}_{t_2}^f \hat{\kappa}_{t_3}^f \tag{7.19}$$

### Perturbativer Fermion-Propagator

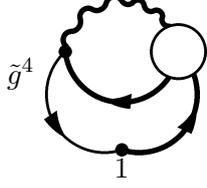
$$\tilde{g}^2 \text{ (circle with vertex 1)} \sim -\delta^{ij} \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2} \hat{m}_f^3 \tag{7.20}$$

### Fermion-Propagator

$$\begin{aligned}
& \tilde{g}^2 \text{ (circle with vertex 1)} \\
\sim & -\delta^{ij} \frac{\Lambda^{-2\epsilon}}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2} \left( \varrho_3^f - \pi_1^f \varrho_2^f + \varpi_1^f \pi_2^f - \pi_3^f \right)
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Dabei haben wir im Vorgriff auf eine Skalierung auch der fermionischen Parameter – insbesondere der Vertex-Pole – mit  $\Lambda$  den Faktor  $\Lambda^{-2\epsilon}$  für den  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus aus dem Integral herausgezogen.

## Schleifen-Graph



(7.22)

Hier sind alle drei Subgraphen divergent und getrennt zu berechnen. Wir berechnen zunächst das Ergebnis für den Subgraphen  $S^{pert}\bar{\Gamma}_3^{pert}S\bar{\Gamma}_3S$ ,  $I_{S1}$ .

$$\begin{aligned}
I_{S1} &\sim \int \bar{d}^D q \frac{t^{\lambda_1 \lambda_2}(q)}{b \prod_{s=1}^{r+1} (q^2 + \hat{u}_s \Lambda^2)} \frac{4}{3} \delta^{ij} \frac{\tilde{g}^4}{(4\pi)^2} \frac{\Lambda^{-2\epsilon}}{\epsilon} \frac{1}{4} \sum_{m=0}^r q^{2m} \Lambda^{2r-2m} \\
&\quad \left[ \left( -\frac{1}{3} \not{q} \gamma^{\lambda_1} \gamma^\sigma \gamma^{\lambda_2} \gamma^\sigma + \frac{2}{3} \gamma^\sigma \gamma^{\lambda_1} \not{q} \gamma^{\lambda_2} \gamma^\sigma - \frac{1}{3} \gamma^\sigma \gamma^{\lambda_1} \gamma^\sigma \gamma^{\lambda_2} \not{q} \right) \bar{C}_{m;rr}^f \right. \\
&\quad \left. + \hat{m}_f \gamma^{\lambda_1} \gamma^\sigma \gamma^{\lambda_2} \gamma^\sigma \bar{C}_{m;rr}^f + (\gamma^\sigma \gamma^{\lambda_1} \gamma^{\lambda_2} \gamma^\sigma \right. \\
&\quad \left. + \gamma^\sigma \gamma^{\lambda_1} \gamma^\sigma \gamma^{\lambda_2}) (\bar{C}_{m;rr}^f \varpi_1^f - \bar{C}_{m;rr-1}^f) \right] \\
&\sim -\delta^{ij} \frac{\tilde{g}^4}{(4\pi)^4} \frac{\Lambda^{-4\epsilon}}{\epsilon^2} \frac{2}{b} \Lambda^2 \left[ \bar{C}_{r;rr}^f \varsigma_1 (\varpi_1^f - \hat{m}_f) - \bar{C}_{r-1;rr}^f (\varpi_1^f - \hat{m}_f) \right. \\
&\quad \left. - \bar{C}_{r;rr-1}^f \varsigma_1 + \bar{C}_{r-1;rr-1}^f \right] \tag{7.23}
\end{aligned}$$

Hierfür sind noch die perturbativen Korrekturen zu berechnen, die aus dem Subgraphen  $S^{pert}\bar{\Gamma}_3^{pert}S^{pert}\bar{\Gamma}_3^{pert}S^{pert}$  stammen. Dies ist mit dem obigen Ergebnis einfach möglich.

$$I_{S1,pert} \sim 0 \tag{7.24}$$

Der zweite Subgraph ist  $S^{pert}\bar{\Gamma}_3^{pert}D\bar{\Gamma}_3S$ , der logarithmisch divergent ist. Wir notieren das Ergebnis in  $I_{S2}$ .

$$\begin{aligned}
I_{S2} &\sim \int \bar{d}^D q \frac{4}{3} \delta^{ij} \frac{\tilde{g}^4}{(4\pi)^2} \frac{\Lambda^{-2\epsilon}}{\epsilon} \frac{1}{4b} \sum_{n=0}^r \gamma^\sigma \gamma^{\lambda_1} \frac{1}{\prod_{s=1}^{r+1} (\not{q} + \hat{\kappa}_s)} \\
&\quad \not{q}^n \bar{C}_{r;nr}^f \left( \delta^{\sigma\sigma'} \delta^{\lambda_1 \lambda_2} - \frac{1}{6} S_4^{\sigma\sigma' \lambda_1 \lambda_2} \right) \gamma^{\lambda_2} \gamma^{\sigma'} \\
&\sim -\frac{28}{9b} \delta^{ij} \frac{\tilde{g}^4}{(4\pi)^4} \frac{\Lambda^{-4\epsilon}}{\epsilon^2} \left[ \bar{C}_{r;rr}^f \varrho_3^f \right. \\
&\quad \left. - \bar{C}_{r;rr-1}^f \varrho_2^f + \bar{C}_{r;rr-2}^f \varpi_1^f - \bar{C}_{r;rr-3}^f \right] \tag{7.25}
\end{aligned}$$

Die perturbative Korrektur ergibt sich in der bekannten Weise.

$$I_{S2,pert} \sim \int \bar{d}^D q \frac{4}{3} \delta^{ij} \frac{\tilde{g}^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{4} \gamma^\sigma \gamma^{\lambda_1} \frac{\prod_{s=1}^r (\not{q} + \kappa_s^{(f)})}{\prod_{s=1}^{r+1} (\not{q} + \hat{\kappa}_s)}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \delta^{\sigma\sigma'} \delta^{\lambda_1\lambda_2} - \frac{1}{6} S_4^{\sigma\sigma'\lambda_1\lambda_2} \right) \gamma^{\lambda_2} \gamma^{\sigma'} \\
& \sim -\frac{28}{9} \delta^{ij} \frac{\tilde{g}^4}{(4\pi)^4} \frac{\Lambda^{-2\epsilon}}{\epsilon^2} \left[ \varrho_3^f \right. \\
& \quad \left. - \pi_1^f \varrho_2^f + \pi_2^f \varpi_1^f - \pi_3^f \right]
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Weitere Korrekturterme kommen nicht vor, da sie zu anderen Divergenzregionen als der hier betrachteten gehören.<sup>5</sup>

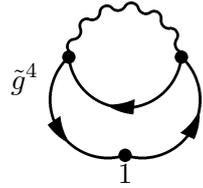
Damit muss noch der Subgraph aus der DSG berechnet werden. Da sich in Landau-Eichung dafür keine Terme  $\sim \not{q}$  entwickeln, kann man mit dem Resultat aus (5.20) das folgenden Ergebnis für  $I_{DSG}$  notieren.

$$\begin{aligned}
I_{DSG} \sim & \frac{4}{b} \delta^{ij} \frac{\tilde{g}^4}{(4\pi)^4} \frac{\Lambda^{-4\epsilon}}{\epsilon^2} \left[ (\bar{C}_{r;rr-1}^f - \bar{C}_{r;rr}^f \varpi_1^f) (\hat{m}_f \varpi_1^f + \hat{m}_f^2 + \varrho_2^f) \right. \\
& - (\hat{m}_f + \varpi_1^f) (\bar{C}_{r;r-1r-1}^f - \bar{C}_{r;rr-1}^f \varpi_1^f) \\
& \left. + (\bar{C}_{r;r-1r-2}^f - \bar{C}_{r;rr-2}^f \varpi_1^f) \right]
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Mit dem perturbativen Beitrag zur DSG aus (5.17) gelangt man zu dem folgenden Resultat für die perturbative Korrektur.

$$\begin{aligned}
I_{DSG,pert} \sim & -4 \delta^{ij} \frac{\tilde{g}^4}{(4\pi)^4} \frac{\Lambda^{-2\epsilon}}{\epsilon^2} \left[ (\varpi_1^f - \pi_1^f + \hat{m}_f) \hat{m}_f^2 \right. \\
& \left. + \hat{m}_f \left( \varrho_2^f - \pi_1^f \varpi_1^f + \pi_2^f \right) \right]
\end{aligned} \tag{7.28}$$

Mit diesen Rechnungen kann man nun auch die führende Divergenz für das rein perturbative Kondensat angeben.



$$\sim -\frac{1}{\epsilon^2} \frac{\tilde{g}^4}{(4\pi)^4} \hat{m}_f^3 \left\{ \frac{28}{9} + 12 \right\} \tag{7.29}$$

Damit sind sämtliche für die weitere Diskussion wichtigen Terme des Fermion-Kondensats berechnet. Die weitere Behandlung der aus dem Kondensat resultierenden Gleichungen wird in Kapitel 8 diskutiert.

### 7.1.3 Geist-Propagator

Da der Geist-Propagator schon in der DSG keine Beiträge jenseits der quasiperturbativen Korrekturen zu den perturbativen Termen der nullten Ordnung entwickelt und bis auf den multiplikativen Faktor auf seinem perturbativen Wert

<sup>5</sup>Ersetzt man die Fermion-Propagatoren aus der Kondensatbildung durch nackte, muss man auch einen nackten  $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex einsetzen und befindet sich damit in der perturbativen Korrektur für einen anderen Subgraphen.

bleibt, ist nicht zu erwarten, dass diese Kondensat-Gleichung darüber hinausgehende Terme entwickeln kann. Dies bestätigt man durch eine kurze Analyse der folgenden Gleichung.

$$= \tilde{g}^2 \text{ (loop)} + \tilde{g}^4 \text{ (loop)} \quad (7.30)$$

In der Tat ist der einzige Graph, der nicht wegen seiner Skalenfreiheit verschwindet, die Geist-Gluon-Schleife. In diesem Graphen entwickelt nur der Subgraph  $\tilde{D}^{pert} \tilde{\Gamma}_3^{pert} \tilde{D} \tilde{\Gamma}_3 \tilde{D}$  Divergenzen, die nicht durch eine folgende skalenfreie Integration verschwinden.

$$\sim -\frac{9}{4b\tilde{b}^2} \delta_{ab} \frac{\tilde{g}^4}{(4\pi)^4} \frac{\Lambda^{-2\epsilon}}{\epsilon^2} (\varsigma_1 - \sigma_1) \Lambda^2 \quad (7.31)$$

Die zugeordnete perturbative Korrektur ist damit leicht abzulesen.

$$I_{pert} \sim -\frac{9}{4b} \delta_{ab} \frac{\tilde{g}^4}{(4\pi)^4} \frac{\Lambda^{-2\epsilon}}{\epsilon^2} (\varsigma_1 - \sigma_1) \Lambda^2 \quad (7.32)$$

## 7.2 Partielle Kondensate

### 7.2.1 $\Gamma_3$ -Vertex

Aus der  $\Gamma_3$ -DSG erhalten wir die folgende Kondensatgleichung auf 2-Schleifen-Niveau.

$$= \tilde{g}^2 \text{ (loop)} + \tilde{g}^4 \text{ (loop)}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}\tilde{g}^4 \text{ (diagram: two vertices connected by a wavy line, each with two external wavy lines)} +\frac{1}{2}\tilde{g}^4 \text{ (diagram: one vertex with a loop and two external wavy lines)} \\
& +\frac{1}{2}\tilde{g}^4 \text{ (diagram: one vertex with a loop and one external wavy line)} \\
& -\tilde{g}^4 \sum_f \text{ (diagram: two vertices connected by a wavy line, each with two external wavy lines, with a loop on the right vertex)} - (p_2 \leftrightarrow p_3) \\
& -\tilde{g}^4 \text{ (diagram: one vertex with a loop and one external wavy line, with a dashed line loop)} - (p_2 \leftrightarrow p_3) \tag{7.33}
\end{aligned}$$

### Perturbative Kondensate

Um den perturbativen Limes der einzelnen Diagramme bestimmen zu können, muss zunächst das rein perturbative Ergebnis berechnet werden.

- $\Gamma_3^{pert}$ -Vertex

$$\text{ (diagram: one vertex with two external wavy lines) } = \frac{5}{4} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} i f_{a_1 a_2 a_3} \{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \} \tag{7.34}$$

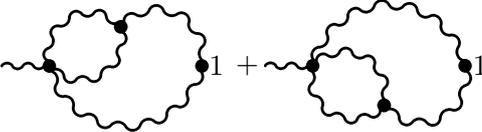
- Drei-Gluon-Schleife

$$\text{ (diagram: one vertex with two external wavy lines and a loop) } + (p_2 \leftrightarrow p_3) = \frac{15}{4} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon^2} i f_{a_1 a_2 a_3} \{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \} \tag{7.35}$$

- Hantelgraph

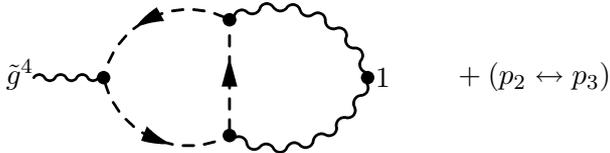
$$\text{ (diagram: two vertices connected by a wavy line, each with two external wavy lines) } = -\frac{45}{8} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon^2} i f_{a_1 a_2 a_3} \{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \} \tag{7.36}$$

- Tadpole-artige Graphen



$$= -\frac{135}{16} \frac{1}{(4\pi)^4} \frac{1}{\epsilon^2} i f_{a_1 a_2 a_3} \{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \} \quad (7.37)$$

- 3-Geister-Schleife



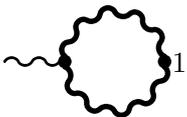
$$\sim -i \frac{5}{32} \frac{1}{(4\pi)^4} \frac{1}{\epsilon^2} f_{a_1 a_2 a_3} \{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \} \quad (7.38)$$

- 3-Fermion-Schleife



$$= -\sum_f \frac{5}{6} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon^2} i f_{a_1 a_2 a_3} \{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \} \quad (7.39)$$

Der  $\Gamma_3^{pert}$ -Vertex mit nicht-perturbativen Propagatoren



$$= i f_{a_1 a'_2 a'_3} \int \bar{d}^D k \left\{ \delta^{\mu_1 \mu'_2} \left[ \frac{3}{2} p_1 + k \right]^{\mu'_3} - 2 \delta^{\mu'_2 \mu'_3} k^{\mu_1} + \delta^{\mu'_3 \mu_1} \left[ k - \frac{3}{2} p_1 \right]^{\mu'_2} \right\} \\ \times D_{a'_2 a_2}^{\mu'_2 \mu_2} \left( -\frac{p_1}{2} - k \right) D_{a'_3 a_3}^{\mu'_3 \mu_3} \left( -\frac{p_1}{2} + k \right) \quad (7.40)$$

Kontraktion der Lorentzindizes und Ausführung des Impulsintegration dieses linear divergenten Integrals liefern das erwartete Ergebnis.

$$I \sim \frac{5}{4} \frac{1}{\epsilon} \frac{\Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^2} i f_{a_1 a_2 a_3} \{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \} \quad (7.41)$$

Damit erhält man hieraus keine Anteile zu den nicht-perturbativen Selbstkonsistenzgleichungen der nullten Ordnung.

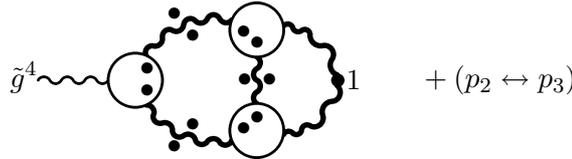
Das volle  $\Gamma_3$ -Kondensat

$$\begin{aligned}
&= if_{a_1 a_2 a_3} \int \bar{d}^D k \left\{ \delta^{\mu_1 \mu_2} \left[ \frac{3}{2} + k \right]^{\mu_3} F(p_1^2, \left(\frac{p_1}{2} + k\right)^2; \left(k - \frac{p_1}{2}\right)^2) \right. \\
&\quad - 2\delta^{\mu_2 \mu_3} k^{\mu_1} F\left(\left(\frac{p_1}{2} + k\right)^2, \left(k - \frac{p_1}{2}\right)^2; p_1^2\right) \\
&\quad \left. + \delta^{\mu_3 \mu_1} \left[ k - \frac{3}{2} p_1 \right]^{\mu_2} F\left(\left(k - \frac{p_1}{2}\right)^2, p_1^2; \left(\frac{p_1}{2} + k\right)^2\right) \right\} \\
&\quad \times D_{a_2 a_2}^{\mu_2 \mu_2} \left(-\frac{p_1}{2} - k\right) D_{a_3 a_3}^{\mu_3 \mu_3} \left(-\frac{p_1}{2} + k\right) \tag{7.42}
\end{aligned}$$

Die Kontraktion der Lorentztensoren und Berechnung des Impulsintegrals liefern nach Rücknahme der dazu benötigten Partialbruchzerlegung das folgende Ergebnis.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\epsilon} \frac{\Lambda^{-2\epsilon}}{b(4\pi)^2} if_{a_1 a_2 a_3} \left\{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \right\} \left[ \prod_{s=1}^r p_1^2 + u_{r,s} \Lambda^2 \right]^{-1} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^r (\Lambda^2)^{r-k} (p_1^2)^k \left[ C_{kr;r}^r + \frac{1}{4} C_{rr;k}^r \right] \tag{7.43}
\end{aligned}$$

## Kondensat der 3-Gluon-Schleife



Dieser Vertex enthält formal drei Subdivergenzen. Hier interessiert nur die führende Divergenz proportional zu  $\frac{1}{\epsilon^2}$ , da die anderen nicht zu den SK-Gleichungen der nullten Ordnung beitragen. Man erkennt durch einfaches Abzählen der Impulspotenzen, dass das Integral über die vier äußeren Gluonlinien konvergent ist, weshalb diese Subdivergenz nicht beitragen kann und vernachlässigt wird. Die beiden anderen Subdivergenzen müssen jedoch separat berechnet werden.

Dazu betrachten wir zunächst die linke 3-Gluon-Schleife des Graphen. Diese wurde schon berechnet, so dass wir (5.42) nutzen können. Zur Berechnung der ersten Subdivergenz müssen wir also nur noch die Kontraktion über den Impuls und zwei zusätzliche volle Propagatoren berechnen. Da das verbleibende Teilintegral linear divergent ist, bereitet dies keine größeren Probleme.

$$\begin{aligned}
I_{S1} \sim & \frac{15}{4b^5} i f_{a_1 a_2 a_3} \left[ \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \right]^2 \{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \} \left[ \prod_{s=1}^r p_1^2 + u_{r,s} \Lambda^2 \right]^{-1} \\
& \sum_{t_1 t_2 t_3=1}^{r+1} \sum_{k_1 k_2 k_3=0}^r \sum_{l_1 l_2=0}^r \sum_{m_1 m_2=0}^r \left[ \Delta^r(u, t_1) \Delta^r(u, t_2) \Delta^r(u, t_3) \right]^{-1} \\
& C_{k_1 k_2; k_3}^r C_{l_1 l_2; r}^r C_{m_1 m_2; r}^r (p_1^2)^{k_3} (-\hat{u}_{r, t_1})^{k_1 + l_2} (-\hat{u}_{r, t_2})^{l_1 + m_2} \\
& \times (-\hat{u}_{r, t_3})^{m_1 + k_2} (\Lambda^2)^{7r - k_3} \tag{7.44}
\end{aligned}$$

Die perturbative Korrektur dieses divergenten Anteils erhält man aus dem folgenden Graphen, der mit der gleichen Integrationsreihenfolge zu rechnen ist.

$$\begin{aligned}
& \tilde{g}^4 \text{ (diagram of a bubble with two external lines)} 1 + (p_2 \leftrightarrow p_3) \tag{7.45}
\end{aligned}$$

Damit finden wir mit den Ergebnissen der obigen Rechnung den folgenden Ausdruck.

$$I_{S1, \text{pert}} \sim \frac{15}{4b^2} i f_{a_1 a_2 a_3} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\tilde{g}^4 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^4} \{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \} \tag{7.46}$$

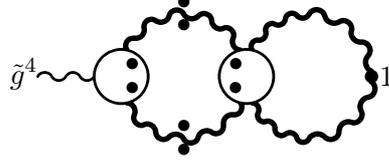
Dies unterscheidet sich lediglich durch einen nicht-perturbativen Faktor von dem perturbativen Ergebnis (5.25).

Für den zweiten Divergenzanteil wird zuerst die Subschleife  $D\Gamma_3 D\Gamma_3 D$  berechnet.

$$\begin{aligned}
I_{S2} = & \int d^D q \Gamma_3^{\mu_1 \beta \gamma}(p_1, \dot{B}, \dot{A}) D^{\gamma \gamma_2}(\dot{A}) D^{\beta \beta_1}(\dot{B}) \\
& \frac{1}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \left\{ \delta^{\beta_1 \gamma_2} \delta^{\mu_2 \mu_3} - \frac{1}{6} S^{\beta_1 \gamma_2 \mu_2 \mu_3} \right\} \left[ \prod_{s=1}^r \dot{A}^2 + u_{r,s} \Lambda^2 \right]^{-1} \\
& \times \sum_{t_3=1}^{r+1} (\Delta^r(u, t_3))^{-1} \sum_{k_2 k_3=0}^r \sum_{l_1 l_3=0}^r C_{r k_2; k_3}^r C_{l_1 r; l_3}^r (-\hat{u}_{r, t_3})^{k_2 + l_1} (\dot{A}^2)^{l_3} \\
& \times (\dot{B}^2)^{k_3} (\Lambda^2)^{2r - k_3 - l_3} \left[ \prod_{s=1}^r \dot{B}^2 + u_{r,s} \Lambda^2 \right]^{-1} \tag{7.47}
\end{aligned}$$

Führt man dann die Lorentzkontraktionen aus, erkennt man leicht, dass sich in dem linear divergenten Integral keine divergenten Terme führender Ordnung ausbilden. Daher ist der obige Beitrag der einzige zur führenden Divergenz des Kondensates.

## Der Hantelgraph


(7.48)

Im Gegensatz zum vorherigen Graphen gibt es hier nur eine Möglichkeit, ein divergentes Integral zu parametrisieren. Beide Schleifen müssen separat berechnet werden, wobei wir von vollständig symmetrischen  $\Gamma_3$ -Parametern ausgehen. Dabei ist die Integrationsreihenfolge unerheblich, da über den  $\Gamma_4$ -Vertex keine Impulskopplung erfolgt. Wir geben zunächst das Ergebnis für den erweiterten  $\Gamma_4$ -Vertex mit vollständig symmetrischen Parametern an.

$$\begin{aligned}
I^e &= -\frac{5}{4b^4} i f_{a_1 a_2 a_3} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-4\epsilon}}{(4\pi)^4} \{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \} \frac{1}{\prod_{s=1}^r p_1^2 + u_{r,s} \Lambda^2} \\
&\quad \sum_{k_1=0}^r \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{l m x y=0}^r (p_1^2)^{k_1} (\Lambda^2)^{r-k_1} \frac{(-\hat{u}_{r,t_1})^{l+x} (-\hat{u}_{r,t_2})^{m+y}}{\Delta^r(u, t_1) \Delta(u, t_2)} \\
&\quad C_{k_1 l; m}^r \left\{ \frac{9}{2} T_{yx; rr} - E_{yx; rr} \right\}
\end{aligned} \tag{7.49}$$

Für Mandelstam-symmetrische Parameter lautet dies wie folgt.

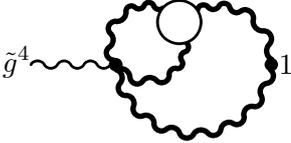
$$\begin{aligned}
I^m &= -\frac{5}{8b^4} i f_{a_1 a_2 a_3} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-4\epsilon}}{(4\pi)^4} \{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \} \frac{1}{\prod_{s=1}^r p_1^2 + u_{r,s} \Lambda^2} \\
&\quad \sum_{k_1=0}^r \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{l m x y=0}^r (p_1^2)^{k_1} (\Lambda^2)^{r-k_1} \frac{(-\hat{u}_{r,t_1})^{l+x} (-\hat{u}_{r,t_2})^{m+y}}{\Delta^r(u, t_1) \Delta(u, t_2)} \\
&\quad C_{k_1 l; m}^r \left\{ 6T_{yx; rr}^s + \frac{3}{2} (T_{yx; rr}^t + T_{yx; rr}^u) + D_{yx; rr}^t + D_{yx; rr}^u \right. \\
&\quad \quad \left. - E_{yx; rr}^t - E_{yx; rr}^u \right\}
\end{aligned} \tag{7.50}$$

Die perturbative Korrektur ist für beide Terme identisch und ergibt sich, indem man zunächst die Subschleife  $\Gamma_3^{pert} D^{pert} \Gamma_4^{pert} D^{pert}$  berechnet.

$$I_{pert} \sim -\frac{45}{8b^2} i f_{a_1 a_2 a_3} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\tilde{g}^2 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^4} \{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \} \tag{7.51}$$

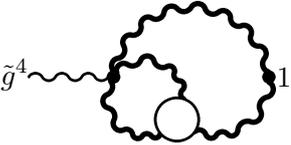
## Kondensate der tadpole-artigen Terme

Auch bei diesen Kondensaten kann man sich analog zu dem obigen Graphen schnell überlegen, dass nur die Integration über das Ergebnis der DSG-Rechnungen Beiträge zur führenden Divergenz liefern kann. Dies geschieht wieder durch einfaches Abzählen der Impulspotenzen bei den möglichen Parametrisierungen.



$$\begin{aligned}
&= \frac{45}{8b^4} i f_{a_1 a_2 a_3} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\tilde{g}^4 \Lambda^{-4\epsilon}}{(4\pi)^4} C_{rr;r} \left\{ \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} + \frac{1}{12} p_1^\beta S_4^{\beta \mu_1 \mu_2 \mu_3} - \frac{3}{4} \delta^{\mu_2 \mu_3} p_1^{\mu_1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} (\delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} - \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3}) \right\} \quad (7.52)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir den in B.11 definierten vollständig symmetrischen Tensor  $S_4$  benutzt.



$$\begin{aligned}
&= \frac{45}{8b^4} i f_{a_1 a_2 a_3} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\tilde{g}^4 \Lambda^{-4\epsilon}}{(4\pi)^4} C_{rr;r} \left\{ -\delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \frac{1}{12} p_1^\beta S_4^{\beta \mu_1 \mu_2 \mu_3} + \frac{3}{4} \delta^{\mu_2 \mu_3} p_1^{\mu_1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} (\delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} - \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3}) \right\} \quad (7.53)
\end{aligned}$$

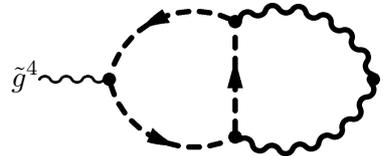
Die Summe der beiden Graphen zeigt dann das erwartete Verhalten.

$$I \sim -\frac{135}{16b^4} i f_{a_1 a_2 a_3} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\tilde{g}^4 \Lambda^{-4\epsilon}}{(4\pi)^4} C_{rr;r} \left\{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \right\} \quad (7.54)$$

Die perturbative Korrektur entsteht hier, indem man wiederum die Subschleife  $\Gamma_3^{pert} D_4^{pert} \Gamma_4^{pert} D^{pert}$  betrachtet.

$$I_{pert} \sim -\frac{135}{16b^2} i f_{a_1 a_2 a_3} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\tilde{g}^4 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^4} \left\{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \right\} \quad (7.55)$$

### Kondensat der Geisterschleife



$$+ (p_2 \leftrightarrow p_3) \quad (7.56)$$

Wir geben das wegen der Erkenntnisse über Geist-Vertizes in Landau-Eichung vorhersehbare Resultat hier der Vollständigkeit halber an. Die Geist-Schleife entwickelt – wie die 3-Gluon-Schleife – nur in einem Subgraphen zu der führenden Divergenz beitragende Terme. Der wesentliche Grund ist, dass in dem logarithmisch divergenten Subgraphen  $D\tilde{\Gamma}_3 \tilde{D}\tilde{\Gamma}_3 D$  der Impulsbeitrag auf dem auslaufenden Bein eines  $\tilde{\Gamma}_3$ -Vertex nicht vom Integrationsimpuls abhängt, wodurch

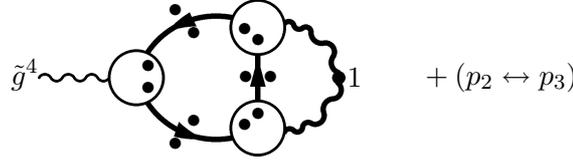
das erste Integral konvergent wird.

$$I \sim -i \frac{5}{32b^2\tilde{b}^3} f_{a_1 a_2 a_3} \{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\tilde{g}^4 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^4} \quad (7.57)$$

Die perturbative Korrektur kann man daran einfach ablesen.

$$I_{pert} \sim -i \frac{5}{32b^2} f_{a_1 a_2 a_3} \{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\tilde{g}^4 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^4} \quad (7.58)$$

### Kondensat der Fermionschleife



Wie man durch einfaches Abzählen der Impulspotenzen zeigen kann, entwickelt auch dieser Graph nur bei einer Parametrisierung führende Divergenzen. Diese ist gerade die, in der man die Ergebnisse der DS-Rechnungen nutzen kann.

$$\begin{aligned} I &= - \sum_f \frac{5}{6b^2} i f_{a_1 a_2 a_3} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\tilde{g}^4 \Lambda^{-4\epsilon}}{(4\pi)^4} \{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \} \left[ \prod_{s=1}^r p_1^2 + u_{r,s} \Lambda^2 \right]^{-1} \\ &\times \sum_{t_1 t_2 t_3=1}^{r+1} \sum_{m_1=0}^r \sum_{n_1 n_2 n_3=0}^r \sum_{n'_1 n'_2 n'_3=0}^r [\Delta^r(\kappa^{(f)}, t_1) \Delta^r(\kappa^{(f)}, t_2) \Delta^r(\kappa^{(f)}, t_3)]^{-1} \\ &\times \bar{C}_{m_1; n_1 n'_1}^{f,r} \bar{C}_{r; n_2 n'_2}^{f,r} \bar{C}_{r; n_3 n'_3}^{f,r} (-\kappa_{r,t_1}^{(f)})^{n_1+n'_2} (-\kappa_{r,t_2}^{(f)})^{n_2+n'_3} (-\kappa_{r,t_3}^{(f)})^{n_3+n'_1} \quad (7.59) \end{aligned}$$

Für die perturbative Korrektur müssen wir den Graphen

$$\tilde{g}^4 \sum_f \quad (7.60)$$

berechnen. Mit obiger Rechnung finden wir leicht das folgende Resultat.

$$I_{pert} \sim - \sum_f \frac{5}{6b^2} i f_{a_1 a_2 a_3} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\tilde{g}^4 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^4} \{ \delta^{\mu_1 \mu_2} p_1^{\mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} p_1^{\mu_2} \} \quad (7.61)$$

### 7.2.2 $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex

Für den  $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex gibt es zwei Möglichkeiten, ein partielles Kondensat zu definieren. Integriert man über ein Gluon- und ein Fermion-Bein, entwickelt das so definierte Kondensat lediglich lineare Subdivergenzen. Die Bestimmung der SKG geschieht bezüglich der fermionischen Parameter. Eine anschauliche Interpretation dieses Kondensats ist jedoch schwierig. Der wichtigste Nachteil ist jedoch, dass das Kondensat eine fundamentale Asymmetrie in der Tensor- und Matrixstruktur aufweist, so dass die Bestimmung eindeutiger SKG schwierig wird. Daher ist diese Kondensatbildung weniger geeignet und wird in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet. Integriert man dagegen über die beiden Fermion-Beine, ist es leichter dieses Kondensat anschaulich zu interpretieren (z.B. als Aussendung eines Gluons aus einem sozusagen gebundenen Fermion-Antifermion-Zustand). Außerdem zeigt dieses Kondensat besser die geforderte Symmetrie, wenn man die abschließende Transversalprojektion an dem Gluon-Bein berücksichtigt. Dafür entwickelt es eine quadratische Subdivergenz und die Bestimmung der SKG erfolgt bezüglich der gluonischen Parameter. Es ist daher besser für unsere Zwecke zu gebrauchen und wird in der weiteren Rechnung analysiert.

Auf 2-Schleifen-Niveau findet man für das partielle Kondensat des  $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex die folgenden Gleichung.

$$\begin{aligned}
 & \tilde{g}^2 \text{ (diagram: wavy line to a circle with a fermion loop)} \\
 = & \tilde{g}^2 \text{ (diagram: wavy line to a circle with a fermion loop)} + \frac{\tilde{g}^4}{2} \text{ (diagram: wavy line to a complex multi-loop structure)} \\
 & + (p_2 \leftrightarrow p_3) \tag{7.62}
 \end{aligned}$$

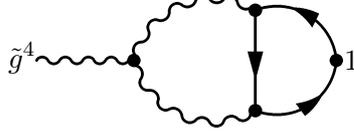
#### Perturbative Resultate

Wir berechnen zunächst die perturbativen Ergebnisse für dieses partielle Kondensat.

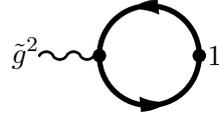
- $\bar{\Gamma}_3^{pert}$ -Vertex

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}^2 \text{ (diagram: wavy line to a circle with a fermion loop)} & \sim T_{ij}^a \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2 \epsilon} \left[ -\hat{m}_f \frac{1}{2} (\not{p}\gamma^\mu - \gamma^\mu \not{p}) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{6} (\not{p}\gamma^\mu \not{p} + p^2 \gamma^\mu) \right] \tag{7.63}
 \end{aligned}$$

- Schleifen-Graph

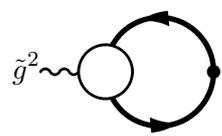


$$\begin{aligned}
&\sim T_{ij}^a \frac{\tilde{g}^4}{(4\pi)^4 \epsilon^2} \left\{ -\frac{3}{8} \left[ 4\hat{m}_f(\gamma^\mu \not{k} - \gamma^\mu \not{k}) - \frac{49}{45} \gamma^\mu k^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{4} \left[ \frac{1}{2} \hat{m}_f(\gamma^\mu \not{k} - \gamma^\mu \not{k}) - \frac{1}{12} \gamma^\mu k^2 \right] \right\} \Big|_{trans} \\
&= \left\{ \frac{71}{144} \gamma^\mu k^2 - \frac{3}{8} \hat{m}_f(\gamma^\mu \not{k} - \gamma^\mu \not{k}) \right\} T_{ij}^a \frac{\tilde{g}^4}{(4\pi)^4 \epsilon^2} \quad (7.64)
\end{aligned}$$

 $\bar{\Gamma}_3^{pert}$ -Vertex


$$\begin{aligned}
&\sim T_{ij}^a \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2} \frac{\Lambda^{-2\epsilon}}{\epsilon} \left\{ \gamma^\mu \left[ (\varpi_1^f)^2 - \pi_1^f \varpi_1^f - \varrho_2^f \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (\not{p} \gamma^\mu - \gamma^\mu \not{p}) [\varpi_1^f - \pi_1^f] - \frac{1}{6} (\not{p} \gamma^\mu \not{p} + p^2 \gamma^\mu) \right\} \quad (7.65)
\end{aligned}$$

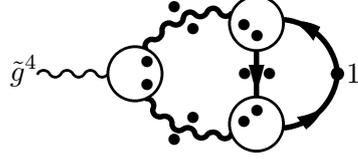
Die perturbativen Korrekturen bestimmen sich aus dem Graphen mit nur nackten Vertizes.

 $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex


$$\begin{aligned}
&\sim T_{ij}^a \frac{\tilde{g}^2}{(4\pi)^2} \frac{\Lambda^{-2\epsilon}}{\epsilon} \frac{\sum_{m=0}^r p^{2m} \Lambda^{2r-2m}}{\prod_{s=1}^r (p^2 + u_{r,s} \Lambda^2)} \\
&\quad \left\{ \gamma^\mu \left[ \bar{C}_{mrr}^f \left( (\varpi_1^f)^2 - \varrho_2^f \right) - \bar{C}_{mrr-1}^f \varpi_1^f \right] \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} (\not{p} \gamma^\mu - \gamma^\mu \not{p}) \left[ \bar{C}_{mrr}^f \varpi_1^f - \bar{C}_{mrr-1}^f \right] \\
&\quad \left. - \frac{1}{6} \bar{C}_{mrr}^f (\not{p} \gamma^\mu \not{p} + p^2 \gamma^\mu) \right\} \quad (7.66)
\end{aligned}$$

Die perturbative Korrektur dieses Graphen ist auch hier der Graph mit nur nackten Vertizes, der oben berechnet wurde.

## Schleifen-Graph


(7.67)

Dieses partielle Kondensat hat zwei Subgraphen, die nicht-verschwindende Divergenzen liefern können. Wir berechnen zunächst den Subgraphen  $S\bar{\Gamma}_3 S\bar{\Gamma}_3 S$ . Im Lauf der Rechnung stellt man fest, dass der Beitrag des Graphen mit  $p_2 \leftrightarrow p_3$  exakt einen Faktor 2 für die divergenten Anteile bedeutet und somit den statistischen Faktor aus der DSG kompensiert.

$$\begin{aligned}
I_{S1} \sim & -\frac{3}{2} T_a^{ij} \frac{\tilde{g}^4 \Lambda^{-2\epsilon}}{4b^2 (4\pi)^{2\epsilon}} \int d^D q \sum_{t_3=1}^{r+1} \sum_{mn'n'=0}^r \sum_{vw'w'=0}^r \\
& \frac{\Gamma_3^{\mu_1 \beta' \alpha'}(k, -\dot{B}, \dot{A}) D^{\beta \beta'}(\dot{B}^2) D^{\alpha \alpha'}(\dot{A}^2)}{\prod_{s=1}^r (\dot{B}^2 + u_{r,s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (\dot{A}^2 + u_{r,s} \Lambda^2) \frac{(-\hat{\kappa}_{t_3}^f)^{n'+w}}{\Delta^r(\kappa^f, t_3)}} \\
& \left\{ 2\bar{C}_{v;wr}^f \left[ \bar{C}_{m;n'r}^f \left( \varpi_1^f - \frac{1}{2} \not{k} - \frac{1}{3} \not{q} \right) - \bar{C}_{m;r-1n'}^f \right] \gamma^\beta \gamma^\alpha \right. \\
& + \bar{C}_{m;n'r}^f \bar{C}_{v;wr}^f \gamma^x \gamma^\beta (\hat{\kappa}_{t_3}^f + \frac{2}{3} \not{q}) \gamma^\alpha \gamma^x \\
& \left. + 2\gamma^\beta \gamma^\alpha \bar{C}_{m;n'r}^f \left[ \bar{C}_{v;wr}^f \left( \varpi_1^f + \frac{1}{2} \not{k} - \frac{1}{3} \not{q} \right) - \bar{C}_{v;wr-1}^f \right] \right\} \quad (7.68)
\end{aligned}$$

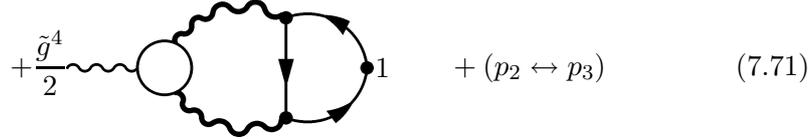
Dabei stehen die punktierten Variablen wieder für die noch vorzunehmenden PBZ. Rechnet man das verbliebene, maximal quadratisch divergente Schleifenintegral aus, erhält man das folgende Ergebnis, wobei die aus der DSG des  $\Gamma_3$ -Vertex folgende vollständige Symmetrie der  $C^{3,r}$ -Parameter explizit vorausgesetzt wird.

$$\begin{aligned}
I_{S1} \sim & -\frac{3}{2} T_a^{ij} \frac{\tilde{g}^4 \Lambda^{-4\epsilon}}{4b^2 (4\pi)^4 \epsilon^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,s} \Lambda^2)} \sum_{t_1 t_2 t_3=1}^{r+1} \sum_{k_1 k_2 k_3=0}^r \sum_{mn'n'=0}^r \sum_{vw=0}^r \\
& \frac{(-\hat{u}_{t_1})^{k_2+m} (-\hat{u}_{t_2})^{k_3+v} (-\hat{\kappa}_{t_3}^f)^{n'+w} k^{2k_1} \Lambda^{10r-2k_1}}{\Delta^r(u, t_1) \Delta^r(u, t_2) \Delta^r(\kappa^f, t_3)} \left\{ \bar{C}_{m;rn}^f \bar{C}_{vwr}^f \right. \\
& \left\{ 4\gamma^\mu C_{k_3 k_2; k_1} \left[ (\hat{u}_{t_1} + \hat{u}_{t_2}) \Lambda^2 + \frac{4}{5} k^2 \right] - 2C_{k_1 k_2; k_3} (k^\mu \not{k} + \gamma^\mu k^2) \right. \\
& + 4C_{k_1 k_2; k_3} \varpi_1^f (\gamma^\mu \not{k} - k^\mu \gamma^\mu) + C_{k_3 k_2; k_1} \left[ -\frac{17}{18} \gamma^\mu k^2 + 2k^\mu \not{k} + \frac{7}{18} k^\mu \not{k} \right] \\
& \left. \left. + C_{k_3 k_2; k_1} \left[ \frac{4}{15} \gamma^\mu k^2 + \frac{31}{30} k^\mu \not{k} \right] \right\} \right. \\
& \left. - 4C_{k_1 k_2; k_3} \bar{C}_{m;rn}^f \bar{C}_{vwr-1}^f (\gamma^\mu \not{k} - k^\mu \gamma^\mu) \right\} \quad (7.69)
\end{aligned}$$

Man beachte hierbei, dass der Term mit einem zusätzlichen  $\hat{\kappa}_{t_3}^f$  verschwindet. Da die Terme  $\sim \not{k}k^\mu$  durch den obligatorischen Transversalprojektor an das verbliebene gluonische Bein verschwinden, erhalten wir die folgende Darstellung, wobei wir die longitudinalen Terme vernachlässigen.

$$\begin{aligned}
I_{S1}^{trans} \sim & -\frac{3}{8b^2} T_a^{ij} \frac{\tilde{g}^4 \Lambda^{-4\epsilon}}{(4\pi)^4 \epsilon^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,s} \Lambda^2)} \sum_{t_1 t_2 t_3=1}^{r+1} \sum_{k_1 k_2 k_3=0}^r \sum_{mn'=0}^r \sum_{vw=0}^r \\
& \frac{(-\hat{u}_{t_1})^{k_2+m} (-\hat{u}_{t_2})^{k_3+v} (-\hat{\kappa}_{t_3}^f)^{n'+w} k^{2k_1} \Lambda^{10r-2k_1}}{\Delta^r(u, t_1) \Delta^r(u, t_2) \Delta^r(\kappa(f), t_3)} C_{k_3 k_2; k_1} \bar{C}_{m; rn}^f \\
& \left\{ \bar{C}_{v; wr}^f \left\{ 4\gamma^\mu (\hat{u}_{t_1} + \hat{u}_{t_2}) \Lambda^2 + 4\varpi_1^f (\gamma^\mu \not{k} - \not{k} \gamma^\mu) - \frac{49}{45} \gamma^\mu k^2 \right\} \right. \\
& \left. - 4\bar{C}_{v; wr-1}^f (\gamma^\mu \not{k} - \not{k} \gamma^\mu) \right\} \quad (7.70)
\end{aligned}$$

Für die perturbativen Korrekturen ist der folgende Graph mit der gleichen Integrationsreihenfolge zu berechnen.



Mit den obigen erhaltenen Ergebnissen finden wir für für die perturbative Korrektur im transversalen Sektor das folgende Ergebnis.

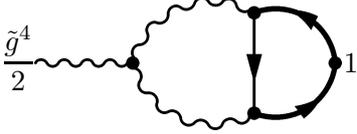
$$\begin{aligned}
I_{S1, pert}^{trans} \sim & -\frac{3}{8b^2} T_a^{ij} \frac{\tilde{g}^4 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^4 \epsilon^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,s} \Lambda^2)} \sum_{k_1=0}^r C_{rr; k_1} (k^2)^{k_1} \Lambda^{2r-2k_1} \\
& \left\{ 8\gamma^\mu (\varsigma_1 - \sigma_1) \Lambda^2 + 4\hat{m}_f (\gamma^\mu \not{k} - \not{k} \gamma^\mu) - \frac{49}{45} \gamma^\mu k^2 \right\} \quad (7.72)
\end{aligned}$$

Der letzte divergente Subgraph ist der in der DSG berechnete. Mit (5.59) können wir daher direkt die verbleibende Integration ausführen und erhalten das folgende Resultat.

$$\begin{aligned}
I_{S2} = & \frac{9}{4b^2} T_a^{ij} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\tilde{g}^4 \Lambda^{-4\epsilon}}{(4\pi)^4} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,s} \Lambda^2)} \sum_{t_1 t_2 t_3=1}^{r+1} \sum_{k_1 k_2 k_3=0}^r \sum_{mn'=0}^r \sum_{vw=0}^r \\
& \frac{(-\hat{u}_{t_1})^{k_2+m} (-\hat{u}_{t_2})^{k_3+v} (-\hat{\kappa}_{t_3}^f)^{n'+w} k^{2k_1} \Lambda^{10r-2k_1}}{\Delta^r(u, t_1) \Delta^r(u, t_2) \Delta^r(\kappa(f), t_3)} C_{k_3 k_2; k_1} \left\{ \bar{C}_{m; rn}^f \bar{C}_{v; wr}^f \right. \\
& \left\{ [(\varpi_1^f)^2 - \varrho_2^f] \gamma^\mu - \frac{1}{6} k^2 \gamma^\mu + \frac{1}{12} \not{k} \gamma^\mu \not{k} + \frac{1}{2} \varpi_1^f (\gamma^\mu \not{k} - \not{k} \gamma^\mu) \right\} \\
& \left. - \gamma^\mu \varpi_1^f \bar{C}_{m; r-1n}^f \bar{C}_{v; wr}^f + \bar{C}_{m; r-1n}^f \gamma^\mu \bar{C}_{v; wr-1}^f + \frac{1}{2} \not{k} \gamma^\mu \bar{C}_{m; rn}^f \bar{C}_{v; wr-1}^f \right\}
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\gamma^\mu \not{k} \bar{C}_{m;r-1n}^f \bar{C}_{v;wr}^f - \frac{1}{2}\gamma^\mu \left[ \bar{C}_{m;rn}^f \bar{C}_{v;wr-2}^f + \bar{C}_{m;r-2n}^f \bar{C}_{v;wr}^f \right] \Big\} \quad (7.73)$$

Die perturbative Korrektur ergibt sich hier aus dem folgenden Graphen, der in derselben Reihenfolge der Impulsintegrationen zu berechnen ist.



$$+ (p_2 \leftrightarrow p_3) \quad (7.74)$$

Mit den Ergebnissen der obigen Rechnung finden wir dafür den folgenden Ausdruck.

$$I_{S2,pert} \sim \frac{9}{4} T_a^{ij} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\tilde{g}^4 \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^4} \left\{ \left[ (\varpi_1^f)^2 - \varrho_2^f \right] \gamma^\mu - \frac{1}{6} k^2 \gamma^\mu + \frac{1}{12} \not{k} \gamma^\mu \not{k} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\varpi_1^f - \pi_1^f) (\gamma^\mu \not{k} - \not{k} \gamma^\mu) + \gamma^\mu (\pi_1^f)^2 - \gamma^\mu \varpi_1^f \pi_1^f - \gamma^\mu \pi_2^f \right\} \quad (7.75)$$

### 7.2.3 $\tilde{\Gamma}_3$ -Vertex

Das partielle Kondensat des  $\tilde{\Gamma}_3$ -Vertex entwickelt über die Divergenz aus der DSG hinaus keine weitere nicht-logarithmische Divergenz. Zudem treten keine Terme auf, die eine Rücknahme der PBZ verhindern können. Weil der  $\tilde{\Gamma}_3$ -Vertex in Landau-Eichung aber keine Divergenz entwickeln kann (das ist der Grund, warum er auf seinem perturbativen Wert bleibt), kann auch das partielle Kondensat keine führenden Divergenzen  $\sim \frac{1}{\epsilon^2}$  entwickeln. Daher können wir auf eine explizite Berechnung verzichten.

## 7.3 Volle Kondensate

Sofern man auf Terme der führenden Impuls Potenz bei der Konstruktion der SKG verzichten möchte, benötigt man auch die vollständigen Kondensate der Wechselwirkungsvertizes, um eine der Variablenanzahl entsprechende Zahl von SKG erhalten zu können. Bildet man die Kondensatgleichungen wie im vorhergehenden Abschnitt an den DSG auf 1-Schleifen-Niveau, muss man notwendig auch bis zu 3-Schleifen-Graphen betrachten. Wie oben erwähnt haben wir mit den zusätzlichen Gleichungen aus der  $A_4$ -Struktur des  $\Gamma_4$ -Vertex hinreichend zusätzliche Bedingungen, um die noch fehlenden vier vollständigen Kondensate nicht betrachten zu müssen. Daher verzichten wir in dieser Arbeit auf die Berechnung der vollen Vertexkondensate.

## Kapitel 8

# Selbstkonsistenzgleichungen

Die Konstruktion der SKG erfolgt wie in Abschnitt 2.7 beschrieben. Wir geben im folgenden die SKG an, die sich aus den 1-Schleifen-Rechnungen ergeben, wenn als Approximationsstufe für die erweiterten Vertizes  $r = 1$  gewählt wird. Wir formulieren die Gleichung ohne explizite  $\Lambda$ -Abhängigkeit, d.h. die externen Strommassen  $m_f$  sind mit  $\Lambda$  skaliert, so dass wir ein Gleichungssystem mit dimensionslosen Zahlen erhalten. Dieses stark nichtlineare Gleichungssystem notieren wir im *Selbstkonsistenzvektor*  $\vec{S}$ , die einzelnen Elemente des Vektors werden im Folgenden definiert. Eine Lösung der SKG erfordert

$$\vec{S} \equiv 0 \quad . \quad (8.1)$$

Die Definitionen der in den folgenden Abschnitten auftauchenden Abkürzungen sind in Anhang B.2 zusammengefasst.

### 8.1 SKG der Propagatoren

#### 8.1.1 SKG des Gluon-Propagators

Zur Beschreibung der SKG aus dem Gluon-Propagator müssen wir die Ergebnisse der Schleifenrechnungen in zwei Anteile zerlegen. Nur der erste entwickelt die maximale Impulspotenz und wird mit  $\Upsilon_2$  bezeichnet. Dieser Teil der Integrale trägt auch im perturbativen Limes bei. Der zweite Teil, mit  $\Omega_2$  abgekürzt, trägt dagegen zur maximalen  $\Lambda$ -Potenz bei und hat manifest nicht-perturbativen Charakter.

$$\Upsilon_2(a+1) = \frac{15}{2b^2\beta_0}C_{ar;r}^r - \frac{5}{4b^2\beta_0}C_{rr;a}^r + \Phi_2(a) - \frac{2}{3\beta_0} \sum_f \bar{C}_{a;rr}^{r,f} \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} \Omega_2(a) = & -\frac{9}{b^2\beta_0}(\varsigma_1 C_{rr;a}^r - C_{r-1r;a}^r) + \frac{27}{4b\beta_0}(\varsigma_1 - \sigma_1)\sigma_{r-a} \\ & - \sum_f \frac{2}{\beta_0}(-\bar{C}_{a;r-1r-1}^{r,f} + \bar{C}_{a;r-2r}^{r,f} + \bar{C}_{a;r-1r}^{r,f}\varpi_1^f - \bar{C}_{a;rr}^{r,f}\varpi_2^f) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Dabei haben wir für den Anteil aus der Geist-Schleife die Abkürzung  $\Phi_2$  verwendet.

$$\Phi_2(a) = \begin{cases} -\frac{1}{4b^2\beta_0}\sigma_{r-a}, & \text{quasipert.} \\ -\frac{1}{4\beta_0}\sigma_{r-a} & \text{pert.} \end{cases} \quad (8.4)$$

Je nachdem ob man für diesen Terme eine Behandlung nach (5.12) durchführt oder nicht, muss die Divergenz aus der Geist-Schleife entweder zu den quasiperturbativen Termen nullter Ordnung oder zur perturbativen Renormierung bzw. einer LL-resummierten Variante<sup>1</sup>) zugeordnet werden. Damit erhalten wir die folgenden SKG.

$$S_2(r+1) = -b+1 + \frac{13}{2\beta_0} - \frac{2}{3\beta_0}N_f - \Upsilon_2(r+1) \quad (8.5)$$

$$S_2(a) = -b\varsigma_{r+1-a} + \sigma_{r+1-a}\left(1 + \frac{13}{2\beta_0} - \frac{2}{3\beta_0}N_f\right) - \Upsilon_2(a) - \Omega_2(a) \quad (8.6)$$

$$S_2(0) = -b\varsigma_{r+1} - \Omega_2(0) \quad (8.7)$$

Bedingt durch die Struktur der Gluon-Propagator-DSG auf 1-Schleifen-Niveau (die linke *nackte* Vertizes enthält und nicht resummierbar ist), sind diese Gleichungen nichtlinear in den Propagator-Parametern aber linear in den Vertex-Parametern. Eine strukturelle Besonderheit dieser SKG ist auch, dass sie aus zwei Beiträgen  $-\Upsilon_2$  und  $\Omega_2$  zusammengesetzt ist. Dadurch nehmen die Gleichungen  $S_2(r+1)$  und  $S_2(0)$  eine besondere Stellung ein. Die Erfahrungen dieser Arbeit zeigen, dass zumindest für Approximationsgrad  $r=1$  die besondere Gestalt dieser SKG ein wesentliches Hindernis bei der numerischen Bestimmung von Lösungen des SKG-Systems ist.

### 8.1.2 SKG des Geist-Propagators

Wir erhalten aus der Gleichung für den Geist-Propagator unabhängig vom Approximationsgrad  $r$  genau die eine Bestimmungsgleichung, die wir für den multiplikativen Faktor  $\tilde{b}$  benötigen.

$$\tilde{S}_2 = -\tilde{b} + 1 - \frac{9}{4}\frac{1}{\beta_0}\left(\frac{1}{\tilde{b}\tilde{b}} - 1\right) \quad (8.8)$$

Diese Gleichung ist verglichen mit den anderen SKG recht einfach, da  $\tilde{b}$  hier nur über den multiplikativen Faktor des Gluon-Propagators in das Gleichungssystem zurückkoppelt. Bemerkenswert ist insbesondere, dass ein strikt perturbativer Geist-Propagator ( $\tilde{b}=1$ ) notwendig auch  $b=1$  erfordert.

Sofern man für Terme ohne mindestens eine ganzzahlige Potenz von  $\Lambda$  die Anwendung des  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus nicht zulässt, kann man aus dieser DSG keine SKG ableiten.

---

<sup>1</sup>Durch Resummation der *leading logarithms* von  $\ln^p\left(\frac{k^2}{\nu^2}\right)$  auf  $\ln^p\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right)$  entsteht in den rein perturbativen Termen eine Konstante wie  $\tilde{b}^2$ .

### 8.1.3 SKG des Fermion-Propagators

Da die führende Impulspotenz des Schleifenintegrals in Landau-Eichung verschwindet und daher keine SKG liefert, gibt es hier eine Gleichung weniger. Wieder können den Propagator-Nullstellen keine Gleichungen zugeordnet werden. Wir erhalten dabei strukturell identische Gleichungen entsprechend der betrachteten Fermionenzahl. Bei massiven Fermionen unterscheiden sie sich durch den Wert der Strommassen, die über die perturbativen Ergebnisse in die SKG eingehen. Aber auch bei chiralen Fermionen können wir die Gleichungen nicht durch eine einzige Gleichung ohne Fermion-Index  $f$  ersetzen. Ebenso wenig kann man die Fermion-Summen in den gluonischen DSG durch einen Faktor  $N_f$  ersetzen. Der Grund dafür ist, dass das nichtlineare SKG-System durchaus verschiedene Werte für die fermionischen Parameter und insbesondere verschiedene nichtverschwindende Werte für die Polpositionen der Fermion-Propagatoren, d.h. der Fermionmassen, zulassen kann. Eine derartige spontane Symmetriebrechung in den Parametern allein auf Grund der *dynamischen* Eigenschaften der DSG wäre ein höchst bemerkenswertes Phänomen.

Wir definieren für den Schleifenbeitrag die folgende Abkürzung.

$$\tilde{\Upsilon}_2^f(a) = \frac{4}{b\beta_0} (\bar{C}_{r;r-1,a}^{f,r} - \varpi_1^f \bar{C}_{r;ra}^{f,r}) \quad (8.9)$$

Dann lassen sich die SKG folgendermaßen schreiben.

$$\bar{S}_2^f(a) = -\varpi_{r+1-a}^f + \pi_{r+1-a}^f + \pi_{r-a}^f \hat{m}_f \left(1 - \frac{4}{\beta_0}\right) - \tilde{\Upsilon}_2^f(a) \quad (8.10)$$

Dabei muss man beachten, dass  $\pi_{r+1}^f = 0$  ist, weil es nur  $r$  Propagator-Nullstellen gibt. Eine Gleichung für  $a = r + 1$  fehlt, da die DSG in Landau-Eichung keinen Beitrag zur höchsten Impulspotenz liefern kann.

## 8.2 SKG der Vertizes

### 8.2.1 SKG des $\Gamma_3$ -Vertex

Da in der DSG des  $\Gamma_3$ -Vertex tadpole-artige Terme vorkommen, die nicht re summierbar sind, ist die Symmetrie von  $\Gamma_3$  in der DSG nicht manifest.<sup>2</sup> Damit die SKG und die Parameter diese Symmetrie berücksichtigen, führen wir eine triviale Symmetrisierung durch. Das hat zudem den Vorteil, dass auf diese Weise stark einschränkende Nebenbedingungen abgeschwächt werden. Gleichzeitig sind aber nur noch vollständig symmetrisierte Kombinationen der  $\Gamma_3$ -Parameter zugänglich. In der Tat werden vollständig symmetrische Parameter sogar erzwungen, wenn man die tadpole-artigen Terme nicht modifiziert.

Bei dem Term aus der Geist-Dreiecks-Schleife fehlt der für die Konstruktion der SKG notwendige Faktor  $\Lambda^{-2\epsilon}$ , so dass man passend erweitert muss, wenn man den  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus anwenden will. Der dann überzählige Faktor  $\Lambda^{+2\epsilon}$  ersetzt in den Gleichungen die willkürliche Renormierungsskala  $\nu_0^{2\epsilon}$ .

<sup>2</sup>Eine exakte Lösung der DSG würde diese Symmetrie wieder aufweisen.

Wir formulieren die SKG wieder für allgemeine Approximationsstufe  $r$  und benötigen dafür  $\Theta_{abc}^3$ .

$$\Theta_{abc}^3 = \sigma_{r-a}\sigma_{r-b}\sigma_{r-c} \quad (8.11)$$

Nun definieren wir den vollständig symmetrischen Teil der SKG,  $\Upsilon_3$ .

$$\begin{aligned} \Upsilon_3(a; b, c) &= \frac{3}{2b^3\beta_0}\Sigma_S^r(a, b, c) + \frac{2}{3\beta_0}\sum_f \bar{\Sigma}^{f,r}(a, b, c) \\ &+ \Phi_3(a, b, c) \end{aligned} \quad (8.12)$$

Dabei wird für den von der 3-Geister-Schleife abhängigen Teil die Abkürzung

$$\Phi_3(a, b, c) = \begin{cases} -\frac{1}{8b^3\beta_0}\Theta_{abc}^3, & \text{quasipert.} \\ -\frac{1}{8\beta_0}\Theta_{abc}^3 & \text{pert.} \end{cases} \quad (8.13)$$

verwendet, entsprechend der möglichen unterschiedlichen Behandlung dieses Terms im SKG-Mechanismus. Dazu kommt noch der partiell symmetrische Anteil aus den tadpole-artigen Termen mit Beteiligung des  $\Gamma_4$ -Vertex, den wir in  $\Omega_3^k$  zusammenfassen. Der Index  $k$  steht bezeichnet dabei die verschiedenen Ansätze für  $\Gamma_4$ . Wir bilden  $\Omega_3^k$  bezüglich der Tensorkomponente  $\delta^{\mu_1\mu_2}p_1^{\mu_3}$ .

$$\Omega_3^t(a; b, c) = -\frac{1}{3}\frac{9}{2b^2\beta_0}\Sigma_{\Gamma T}(a; b, c) - \frac{2}{3}\frac{9}{2b^2\beta_0}\Theta_{abc}^3(C_{ar;r}^r + \frac{1}{4}C_{rr;a}^r) \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} \Omega_3^e(a; b, c) &= -\frac{1}{3}\frac{9}{2b^2\beta_0}\Sigma_{\Gamma T}(a; b, c) - \frac{1}{3}\frac{1}{b^2\beta_0}\Sigma_{\Gamma E}(a; b, c) \\ &- \frac{2}{3}\frac{9}{2b^2\beta_0}\Theta_{abc}^3(C_{ar;r}^r + \frac{1}{4}C_{rr;a}^r) \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} \Omega_3^m(a; b, c) &= -\frac{1}{3}\frac{1}{2b^2\beta_0}\{6\Sigma_{\Gamma T}^s + \frac{3}{2}\Sigma_{\Gamma T}^{t+u} + \Sigma_{\Gamma D}^{t+u} - \Sigma_{\Gamma E}^{t+u}\}_{|a;bc} \\ &- \frac{2}{3}\frac{9}{2b^2\beta_0}\Theta_{abc}^3(C_{ar;r}^r + \frac{1}{4}C_{rr;a}^r) \end{aligned} \quad (8.16)$$

Dazu kommt für denselben Vertex-Parameter  $C_{ab;c}^r$  noch eine Gleichung aus der Tensorstruktur  $\delta^{\mu_1\mu_3}p_1^{\mu_2}$  mit  $\Omega_3^k(b; c, a)$ . Schon hier sieht man, dass die Symmetrie der Vertex-Parameter des  $\Gamma_3$ -Vertex von  $\Omega_3^k$  nicht eingehalten wird, was zu starken Einschränkungen an die zulässigen Parameter führt.

Die SKG aus dem  $\Gamma_3$ -Vertex ergeben sich damit wie folgt.

$$\begin{aligned} S_3^k(a; b, c) &= C_{ab;c}^r - \Theta_{abc}^3(1 - \frac{34}{4\beta_0} - \frac{2}{3\beta_0}N_f) \\ &- \Upsilon_3(a, b, c) - \Omega_3^k(a; b, c) \end{aligned} \quad (8.17)$$

Wegen der Tensorstruktur der symmetrisierten tadpole-artigen Terme entsteht allerdings noch eine weitere Gleichung, die sich von dieser nur durch den Vertex-Parameter unterscheidet.

$$\begin{aligned} \hat{S}_3^k(a; b, c) &= C_{ac;b}^r - \Theta_{abc}^3(1 - \frac{34}{4\beta_0} - \frac{2}{3\beta_0}N_f) \\ &- \Upsilon_3(a, b, c) - \Omega_3^k(a; b, c) \end{aligned} \quad (8.18)$$

Daraus folgt dann, dass

$$C_{ab;c}^r = C_{ac;b}^r, \quad \forall \{a, b, c\} \quad . \quad (8.19)$$

Damit müssen die Vertex-Parameter des  $\Gamma_3$ -Vertex unabhängig von der Approximationsordnung  $r$  *vollständig symmetrisch* sein. Eine explizite Untersuchung, ob dies auch für alle Schleifenordnungen gilt, liegt außerhalb unserer Möglichkeiten. Es gibt allerdings starke Argumente für diese These. Auch in höheren Schleifenordnungen müssen die Graphen eine Lorentz-Tensorstruktur entwickeln, die mit der perturbativen Tensorstruktur verträglich ist, also aus den insgesamt sechs Basistensoren für den  $\Gamma_3$ -Vertex ( $\delta^{\mu_i \mu_j} p_i^{\mu_k}$ ) zusammengesetzt ist. Dazu gibt es im Wesentlichen drei Möglichkeiten. Erstens kann ein Graph wie die Gluon-Dreiecks-Schleife in die perturbative Tensorstruktur und die Divergenz faktorisieren. Zweitens kann der Graph wie die tadpole-artigen Terme nur einen Teil der Struktur, proportional zu jeweils einem der äußeren Impulse  $p_k^{\mu_i}$ , entwickeln. Drittens könnte der Graph nur mit einem der sechs Basistensoren in die DSG eingehen, was aber wegen der Vertauschbarkeit der beiden rechten Beine nicht möglich sein sollte. Wir schließen diesen Fall daher aus.<sup>3</sup> Terme mit einer tadpole-artigen Tensorstruktur müssen wegen der Vertauschbarkeit der rechten Beine aber ebenso – wie oben gesehen – in den zugehörigen  $\Sigma$ -Parametern den linken äußeren Impuls auszeichnen. Die einzige Möglichkeit, eine Gleichung wie (8.18) zu vermeiden, ist daher eine vollständige Kompensation aller Terme mit tadpole-artiger Tensorstruktur. Dann aber wären die resultierenden SKG vollständig symmetrisch. Damit sind partiell symmetrische  $\Gamma_3$ -Parameter nicht mit der Struktur der SKG zu vereinbaren.

Eine mindestens ebenso gravierende Beschränkung folgt ebenso unmittelbar aus den SKG. Auch  $\Omega_3^k$  muss symmetrisch sein.

$$\Omega_3^k(a; b, c) = \Omega_3^k(b; c, a) \quad (8.20)$$

Mit dieser Gleichung werden die Parameter von  $\Gamma_3$ - und  $\Gamma_4$ -Vertex in manifest asymmetrischer Weise miteinander verknüpft, was sie sehr stark einschränkt. Im Hinblick auf eine Lösung der SKG und damit eine selbstkonsistente Formulierung der Theorie sind derartige Beziehungen hinderlich. Man kann aber nicht ausschließen, dass sich unter anderem in dieser Beziehung eine wesentliche Eigenschaft der DSG zeigt: Zwar wird durch sie ein Impuls ausgezeichnet, bei einer *exakten* Behandlung (d.h. nicht beschränkt auf eine endliche Schleifenordnung) weist die DSG dennoch die volle Symmetrie der zugehörigen Vertizes auf. Es sei an dieser Stelle noch angemerkt, dass auch die Einbeziehung partiell antisymmetrischer Parameter für den  $\Gamma_4$ -Vertex die Situation nicht verbesserte. Ebenso wenig sind diese Beziehungen ein Artefakt der BS-Resummation. Aus einer trivial symmetrisierten nicht-resummierten DSG folgen analoge Relationen. Daher ist die einzige Möglichkeit, dieses Problem zu vermeiden, den Ansatz für den  $\Gamma_3$ -Vertex abzuändern – im Gegensatz zu den bisherigen Erkenntnissen

---

<sup>3</sup>Wenn sich dennoch Graphen mit dieser Eigenschaft finden lassen, dann müssten sie sich – mitsamt der ihnen zugeordneten  $\Sigma$ -Parameter – zu einer der beiden anderen Symmetrieklassen kombinieren lassen. Effektiv kann sich diese Struktur damit nicht etablieren.

[Kuh 97, DKS 99, DS 99]. Falls man dennoch Lösungen bzw. Näherungslösungen der SKG finden könnte, die (8.20) genügen, so wäre dies ein sehr bemerkenswertes Ergebnis.

Der  $\Gamma_3$ -Vertex liefert  $\frac{(r+1)^2(r+2)}{2}$  SKG, die den Vertex-Parametern zugeordnet werden können.

### 8.2.2 Die SKG des $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex

Wie schon beim Fermion-Propagator gibt es für jede Fermionsorte einen eigenen Satz von SKG, die selbst bei chiralen Fermionen nicht in einer Gleichung ohne Fermion-Index  $f$  zusammengefasst werden dürfen. Anders als beim  $\Gamma_3$ -Vertex fehlen hier tadpole-artige Terme. Daher sind die SKG strukturell identisch und es gibt keine einschränkenden Nebenbedingungen. Wir formulieren sie hier für allgemeinen Approximationsgrad  $r$ . Um die bei den anderen Vertices genutzten Konventionen zu respektieren, formulieren wir zunächst den der Symmetrie des  $\bar{C}^f$ -Parameter entsprechenden Schleifenbeitrag.

$$\bar{\Upsilon}_3^f(a; b, c) = \frac{9}{4b^2\beta_0} \Sigma_A^{f,r}(a; b, c) \quad (8.21)$$

Mit der Definition

$$\bar{\Theta}_{a;bc}^{f,3} = \pi_{r-b}^{(f)} \pi_{r-c}^{(f)} \sigma_{r-a} \quad (8.22)$$

ergeben sich die folgenden SKG.

$$\begin{aligned} \bar{S}_3^f(a; b, c) &= \bar{C}_{a;b,c}^{f,r} - \bar{\Theta}_{a;bc}^{f,3} \left(1 + \frac{9}{4\beta_0}\right) \\ &\quad - \bar{\Upsilon}_3^f(a; b, c) \end{aligned} \quad (8.23)$$

Dies sind für jede Fermionsorte  $\frac{(r+1)^2(r+2)}{2}$  Gleichungen, die wir den entsprechenden Vertex-Parametern von  $\bar{\Gamma}_3$  zuordnen können.

## 8.3 Die SKG für den $\Gamma_4$ -Vertex

Bei der Konstruktion der SKG zeigt sich der Grund, warum die BSG (6.1) der entsprechenden DSG vorzuziehen ist. Da tadpole-artige Terme hier fehlen, müssen wir nicht *a priori* mit zusätzlichen, einschränkenden Nebenbedingungen rechnen. Wir werden jedoch unten sehen, dass die Eigenschaften der Bose-symmetrischen Tensorstrukturen und die drei verschiedenen Mandelstam-Kanäle mit den von uns verwendeten Ansätzen für den  $\Gamma_4$ -Vertex notwendig zusätzliche Einschränkungen produzieren.

Wir gewinnen die SKG aus den Ergebnissen von Kapitel 4 dadurch, dass wir aus ihnen den Beitrag in  $s$ -Kanal-Ordnung ablesen. Die beiden anderen Kanäle erhält man durch passende Permutation der den äußeren Impulsen zugeordneten Indizes bzw. Exponenten. Die dazu notwendigen Permutationen für die Tensorstrukturen finden sich in Tabelle A.3 bzw. Tabelle B.2.

Zunächst notieren wir den Teil der Gleichungen, der unabhängig von den  $\Gamma_4$ -Vertex-Parametern ist. Er stammt aus den Diagrammen Nr. 2 bis 7 aus

Gleichung (6.1). Dieser Teil hat in allen SKG die gleiche Struktur und ist manifest völlig symmetrisch bezüglich der äußeren Impulse. Wir verwenden dafür die Abkürzung  $\Upsilon_i$ , wobei der Index  $i$  für die vier möglichen Basis-Strukturen steht:

1.  $i = E$ :  $C^{(1)}\Gamma_1$  sowie die beiden anderen zur  $E_4$ -Struktur gehörenden „Diagonalelemente“ aus Tabelle 2.2,
2.  $i = D$ :  $C^{(1)}\Gamma_2$  sowie die fünf anderen Basis-Tensoren (aus  $D_4 - E_4$ ),
3.  $i = T$ :  $C^{(4)}\Gamma_3$  sowie die fünf anderen zu  $T_4$ -Struktur<sup>4</sup> gehörenden Tensoren, davon drei mit umgekehrtem Vorzeichen ,
4.  $i = A$ :  $C^{(4)}\Gamma_1$  sowie die beiden anderen zur  $A_4$ -Struktur gehörenden Tensoren.

Diese Benennung ist insbesondere dem Fall Mandelstam-symmetrischer Vertex-Parameter angepasst. In der  $T_4$ -Struktur müssen wir die alternierenden Vorzeichen für die Bose-Symmetrie beachten.

$$\Upsilon_E(a, b, c, d) = \frac{9}{2\beta_0 b^4} \Sigma_{4\Gamma} + \Phi_4(a, b, c, d) \quad (8.24)$$

$$\Upsilon_D(a, b, c, d) = \Upsilon_E \quad (8.25)$$

$$\Upsilon_T(a, b, c, d) = - \sum_f \frac{2}{3\beta_0} \bar{\Sigma}_{4\bar{\Gamma}} \quad (8.26)$$

$$\Upsilon_A(a, b, c, d) = 0 \quad (8.27)$$

Dabei haben wir den Anteil aus der 4-Geister-Schleife mit  $\Phi_4$  abgekürzt, da dieser Term je nach Behandlung der Geist-Terme verschiedene Werte haben muss – je nachdem, ob die Geist-Terme den perturbativen Logarithmen oder den quasiperturbativen Korrekturen zugeschlagen werden.

$$\Phi_4(a, b, c, d) = \begin{cases} \frac{3}{16b^4\beta_0} \Theta_{abcd}^4, & \text{quasipert.} \\ \frac{3}{16\beta_0} \Theta_{abcd}^4 & \text{pert.} \end{cases} \quad (8.28)$$

Bei den von  $\Gamma_4$  abhängigen Teilen der SKG notieren wir zunächst nur den Teil, der im  $s$ -Kanal entsteht, d.h. die Anteile proportional zu  $C^{(1)}\Gamma_1$ ,  $C^{(1)}\Gamma_2$ ,  $C^{(4)}\Gamma_3$  und  $C^{(4)}\Gamma_1$ . Die anderen SKG entstehen daraus durch passende Permutationen (*Crossing*-Symmetrien) bezüglich der externen Parameter.

### 8.3.1 Vollständig symmetrische Vertexparameter

Wir notieren den Anteil der beiden von  $\Gamma_4$  abhängigen Graphenklassen zu den SKG mit der Abkürzung  $\Omega_i^k$ , wobei der Index  $k$  die beiden hier betrachteten Ansätze für den  $\Gamma_4$ -Vertex unterscheidet und  $i$  wie oben zur Klassifikation der Tensorstruktur gebraucht wird. Aus der Definition der  $\Sigma$ -Parameter in Abschnitt 6.4 wissen wir, dass  $\Omega_i^k$  Mandelstam-symmetrisch im  $s$ -Kanal sein muss,

<sup>4</sup>Man beachte (B.8) und die beiden folgenden Definitionen.

aber nicht notwendig vollständig symmetrisch ist. Wir betrachten zunächst den Fall, dass nur die perturbative Tensorstruktur  $T_4$  aus (2.32) im Ansatz für  $\Gamma_4$  verwendet wurde.

### $T_4$ -Struktur

Mit den abkürzenden Schreibweisen aus Anhang E.2.3 und B.2 erhalten wir das folgende Ergebnis für die Beiträge zu den SKG.

$$\begin{aligned} \Omega_E^t(a, b, c, d) &= \frac{37}{16\beta_0} \Sigma_{TT} \Big|_s + \frac{7}{16\beta_0} \Sigma_{TT} \Big|_{t+u} \\ &\quad - \frac{10}{4\beta_0} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_s - \frac{1}{4\beta_0} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_{t+u} \end{aligned} \quad (8.29)$$

$$\begin{aligned} \Omega_D^t(a, b, c, d) &= \frac{37}{16\beta_0} \Sigma_{TT} \Big|_t + \frac{7}{16\beta_0} \Sigma_{TT} \Big|_{s+u} \\ &\quad - \frac{10}{4\beta_0} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_t - \frac{1}{4\beta_0} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_{s+u} \end{aligned} \quad (8.30)$$

$$\begin{aligned} \Omega_T^t(a, b, c, d) &= -\frac{27}{8\beta_0} \Sigma_{TT} \Big|_s - \frac{37}{48\beta_0} \Sigma_{TT} \Big|_u + \frac{7}{48\beta_0} \Sigma_{TT} \Big|_t \\ &\quad + \frac{1}{\beta_0} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_t + \frac{1}{12\beta_0} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_{t-u} \end{aligned} \quad (8.31)$$

$$\Omega_A^t(a, b, c, d) = \frac{7}{48\beta_0} \Sigma_{TT} \Big|_{t-u} + \frac{1}{12\beta_0} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_{t-u} \quad (8.32)$$

Dazu kommen jeweils noch die Gleichungen der permutierten Basistensoren, die über die Permutationstabellen A.3 und B.2 einfach ableitbar sind, wenn man beachtet, dass sich dann auch die Reihenfolge der externen Variablen an den  $\Sigma$ -Parametern ändert. So gewinnt man z.B. den Beitrag proportional zu  $C^1\Gamma_3$  aus  $\Omega_D^t$  dadurch, dass man  $t \rightarrow u$  und  $u \rightarrow t$  durchführt.<sup>5</sup> Diese Gleichungen führen zu einer großen Zahl an Nebenbedingungen. Wir notieren zunächst die strukturellen SKG für beliebige Approximationsstufe  $r$ .

$$S_E^t(a, b, c, d) = -\Upsilon_E^t(a, b, c, d) - \Omega_E^t(a, b, c, d) \quad (8.33)$$

$$S_D^t(a, b, c, d) = -\Upsilon_D^t(a, b, c, d) - \Omega_D^t(a, b, c, d) \quad (8.34)$$

$$\begin{aligned} S_T^t(a, b, c, d) &= T_{abcd} - \Theta_{abcd}^4 \left(1 + \frac{1}{\beta_0} \left(-2 + \frac{2}{3} N_f\right)\right) \\ &\quad - \Upsilon_D^t(a, b, c, d) - \Omega_D^t(a, b, c, d) \end{aligned} \quad (8.35)$$

$$S_A^t(a, b, c, d) = -\Omega_A^t(a, b, c, d) \quad (8.36)$$

Dabei haben wir

$$\Theta_{abcd}^4 = \sigma_{r-a} \sigma_{r-b} \sigma_{r-c} \sigma_{r-d} \quad (8.37)$$

genutzt.

<sup>5</sup>Siehe dazu auch Anhang E.2.3.

**Nebenbedingungen** Bisher haben wir die SKG nur für jeweils einen Repräsentanten der verschiedenen Tensorstrukturen formuliert. Führt man den oben geschilderten Prozess für die anderen Basistensoren durch, erhält man weitere Einschränkungen an die Parameter. Da eine Lösung der SKG durch  $\vec{S} = 0$  beschrieben ist und sämtliche anderen Terme der  $\Gamma_4$ -SKG, insbesondere die Vertex-Parameter selbst, vollständig symmetrisch sind, folgt die vollständige Symmetrie der  $\Omega$ -Parameter.

$$\Omega_i^t(a, b; c, d) = \Omega_i^t(\pi(a), \pi(b); \pi(c), \pi(d)), \quad \forall i, \pi \in \text{Perm}\{a, b, c, d\} \quad (8.38)$$

Analysiert man die  $\Omega$ -Parameter auf ihre Symmetrie-Eigenschaften im  $s$ -Kanal, stellen sich nur (8.29) und (8.32) als symmetrisch unter den Vertauschungen  $a \leftrightarrow b$  und  $c \leftrightarrow d$  heraus. Damit erhalten wir im allgemeinen Fall je 2 linear unabhängige Gleichungen aus  $\Omega_E^t$  und  $\Omega_A^t$  und je 3 linear unabhängige aus  $\Omega_D^t$  und  $\Omega_T^t$ . Betrachtet man die  $\Sigma$ -Parameter als unabhängige Variablen, gibt es im allgemeinen Fall 6 linear unabhängige. Da vollständig symmetrische  $\Sigma$ -Parameter (8.38) erfüllen, müssen sie die Lösung maximaler Dimension für dieses LGS sein.

$$\Sigma_{TT} \Big|_s = \Sigma_{TT} \Big|_t = \Sigma_{TT} \Big|_u \quad (8.39)$$

$$\Sigma_{T\Gamma\Gamma} \Big|_s = \Sigma_{T\Gamma\Gamma} \Big|_t = \Sigma_{T\Gamma\Gamma} \Big|_u \quad (8.40)$$

Das hat wiederum sehr starke Einschränkungen an die Vertex-Parameter zur Folge. Besondere die zweite Gleichung erfordert die Gleichsetzung von  $\Gamma_3$ - und  $\Gamma_4$ -Vertex-Parametern, was in gewisser Weise eine unnatürliche Einschränkung des Lösungsraumes bedeutet, vor allem da (8.20) schon ähnliche, aber nicht gleiche Beziehungen zwischen den Parametern des  $\Gamma_3$ - und des  $\Gamma_4$ -Vertex beschreibt. Dies weist darauf hin, dass dieser Ansatz zu restriktiv gewählt war.

### Erweiterte Struktur - $D_4$ und $E_4$

Nachdem die perturbative Tensorstruktur allein zu stark einschränkenden Nebenbedingungen führt, untersuchen wir nun die SKG für die erweiterte Tensorstruktur gemäß (2.32). Da die  $\Upsilon_i$  unverändert bleiben, müssen wir nur die  $\Omega$ -Parameter neu definieren. Wir benutzen zur Notation wieder die Konventionen aus Anhang E.2.3 und B.2.

$$\begin{aligned} \Omega_E^e(a, b; c, d) = & \frac{1}{b^2\beta_0} \left\{ \frac{37}{16} \Sigma_{TT} \Big|_s + \frac{7}{16} \Sigma_{TT} \Big|_{t+u} + \frac{104}{3} \Sigma_{DD} \Big|_s - \frac{7}{6} \Sigma_{DD} \Big|_{t+u} \right. \\ & + \frac{27}{2} \Sigma_{EE} \Big|_s - 11 \Sigma_{TD}^{sym} \Big|_s - \frac{27}{4} \Sigma_{TE}^{sym} \Big|_s + \frac{283}{12} \Sigma_{DE}^{sym} \Big|_s \\ & \left. + \frac{7}{12} \Sigma_{DE}^{sym} \Big|_{t+u} \right\} \\ & + \frac{1}{b^3\beta_0} \left\{ -\frac{13}{4} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_s - \frac{1}{4} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_{t+u} + 14 \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_s \right. \\ & \left. + 9 \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_s \right\} \end{aligned} \quad (8.41)$$

$$\begin{aligned}
\Omega_D^e(a, b; c, d) &= \frac{1}{b^2\beta_0} \left\{ \frac{37}{16} \Sigma_{TT} \Big|_t + \frac{7}{16} \Sigma_{TT} \Big|_{s+u} + \frac{14}{3} \Sigma_{DD} \Big|_s + \frac{23}{6} \Sigma_{DD} \Big|_t - \frac{7}{6} \Sigma_{DD} \Big|_u \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \Sigma_{EE} \Big|_u + \frac{7}{4} \Sigma_{TD}^{sym} \Big|_s + \frac{7}{12} \Sigma_{DE}^{sym} \Big|_{s+u} + \frac{13}{12} \Sigma_{DE}^{sym} \Big|_t \right\} \\
&\quad + \frac{1}{b^3\beta_0} \left\{ -\frac{1}{4} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_{s+u} - \frac{13}{4} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_t - \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_s \right\} \quad (8.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_T^e(a, b; c, d) &= \frac{1}{b^2\beta_0} \left\{ -\frac{27}{8} \Sigma_{TT} \Big|_s - \frac{5}{8} \Sigma_{TT} \Big|_u + \frac{7}{48} \Sigma_{TT} \Big|_{t-u} - \frac{17}{4} \Sigma_{TD}^{sym} \Big|_u \right. \\
&\quad \left. + \frac{7}{12} \Sigma_{TD}^{sym} \Big|_{t-u} - \frac{3}{4} \Sigma_{TE}^{sym} \Big|_s + \Sigma_{TE}^{sym} \Big|_u + \frac{7}{24} \Sigma_{TE}^{sym} \Big|_{t-u} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{b^3\beta_0} \left\{ \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_u + \frac{1}{12} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_{t-u} - 5 \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_u - \frac{1}{3} \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_{t-u} \right. \\
&\quad \left. - \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_u - \frac{1}{6} \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_{t-u} \right\} \quad (8.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_A^e(a, b; c, d) &= \frac{1}{b^2\beta_0} \left\{ \frac{7}{48} \Sigma_{TT} \Big|_{t-u} + \frac{7}{12} \Sigma_{TD}^{sym} \Big|_{t-u} + \frac{7}{24} \Sigma_{TE}^{sym} \Big|_{t-u} \right\} \\
&\quad \frac{1}{b^3\beta_0} \left\{ \frac{1}{12} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_{t-u} - \frac{1}{3} \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_{t-u} - \frac{1}{6} \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym} \Big|_{t-u} \right\} \quad (8.44)
\end{aligned}$$

Damit können wir die SKG in gewohnter Weise notieren.

$$S_E^e(a, b, c, d) = E_{abcd} + D_{abcd} - \Upsilon_E(a, b, c, d) - \Omega_E^e(a, b; c, d) \quad (8.45)$$

$$S_D^e(a, b, c, d) = D_{abcd} - \Upsilon_D(a, b, c, d) - \Omega_D^e(a, b; c, d) \quad (8.46)$$

$$\begin{aligned}
S_T^e(a, b, c, d) &= T_{abcd} - \Theta_{abcd}^4 \left( 1 + \frac{1}{\beta_0} \left( -2 + \frac{2}{3} N_f \right) \right) \\
&\quad - \Upsilon_D(a, b, c, d) - \Omega_D^e(a, b; c, d) \quad (8.47)
\end{aligned}$$

$$S_A^e(a, b, c, d) = -\Omega_A^e(a, b; c, d) \quad (8.48)$$

**Nebenbedingungen** Hier wird untersucht, ob man mit den zusätzlichen Tensorstrukturen im  $\Gamma_4$ -Vertex die im obigen Absatz geschilderten Probleme vermeiden kann. Wiederum muss gelten, dass die  $\Omega$ -Parameter vollständig symmetrisch sind.

$$\Omega_i^e(a, b; c, d) = \Omega_i^e(\pi(a), \pi(b); \pi(c), \pi(d)), \quad \forall i, \pi \in \text{Perm}\{a, b, c, d\} \quad (8.49)$$

Wie oben sind nur  $\Omega_E^e$  und  $\Omega_A^e$  symmetrisch unter den Vertauschungen im  $s$ -Kanal. Aus den insgesamt 18 Basis-Tensoren erhalten wir 14 linear unabhängige Gleichungen. Es gibt 9 verschiedene  $\Sigma$ -Parameter, die in den 3 Kanälen vorkommen, insgesamt sind das 27 verschiedene  $\Sigma$ -Parameter. Fasst man die durch (8.49) definierten Nebenbedingungen ebenfalls als LGS in den  $\Sigma$ -Parametern auf, erhalten wir noch genau 13 freie Parameter. Das entsprechende Gleichungssystem findet sich in Anhang E.3.1. Diese Einschränkungen sind immer noch sehr stark, da vollständig symmetrische  $\Sigma$ -Parameter 9 freie Parameter bedeuten.<sup>6</sup> Da außerdem die verschiedenen  $\Sigma$ -Parameter nicht unabhängig sind,

<sup>6</sup>Mit vollständig symmetrischen  $\Sigma$ -Parametern ist unter den gemachten Annahmen gerade die Lösung minimaler Dimension für das LGS definiert, wenn man nicht die noch weniger plausible Möglichkeit zulässt, dass zu verschiedenen Parameterkombinationen gehörende  $\Sigma$ -Parameter linear abhängig sind.

ist unklar, ob das Gleichungssystem nicht doch die vollständige Symmetrie erzwingt. In jedem Fall kann der hier betrachtete Ansatz der grundsätzlichen Komplexität des  $\Gamma_4$ -Vertex nicht hinreichend Rechnung tragen.

### 8.3.2 Mandelstam-symmetrische Parameter

Da sich an den  $\Upsilon$ -Parametern nichts ändert, formulieren wir wie im letzten Abschnitt zunächst die  $\Omega$ -Parameter, die sich mit Mandelstam-symmetrischen Vertex-Parametern aus dem Ansatz (2.34) ergeben. Diese haben wir aus Gründen der Übersichtlichkeit in Anhang E.2.4 notiert.

Die SKG für Mandelstam-symmetrische Vertex-Parameter haben nun die folgende Form, die wir wie oben besprochen im  $s$ -Kanal gewonnen haben.

$$S_E^m(a, b, c, d) = E_{ab;cd} - \Upsilon_E(a, b, c, d) - \Omega_E^m(a, b; c, d) \quad (8.50)$$

$$S_D^m(a, b, c, d) = D_{ab;cd} - \Upsilon_D(a, b, c, d) - \Omega_D^m(a, b; c, d) \quad (8.51)$$

$$S_T^m(a, b, c, d) = T_{ab;cd} - \Theta_{abcd}^4 \left(1 + \frac{1}{\beta_0} \left(-2 + \frac{2}{3} N_f\right)\right) - \Upsilon_D(a, b, c, d) - \Omega_D^m(a, b; c, d) \quad (8.52)$$

$$S_A^m(a, b, c, d) = -\Omega_A^m(a, b; c, d) \quad (8.53)$$

Selbstverständlich liefern auch die anderen Basistensoren eigene SKG. Aber nur die Tensoren  $C^{(1)}\Gamma_3$  und  $-C^{(4)}\Gamma_2$  liefern Beiträge, die nicht durch Permutation der äußeren Parameter zu erhalten sind.

**Nebenbedingungen** Die Mandelstam-symmetrischen Vertex-Parameter erzwingen für eine Lösung der SKG die Mandelstam-Symmetrie der  $\Omega$ -Parameter.

$$\Omega_i^m(a, b; c, d) = \Omega_i^m(b, a; c, d) = \Omega_i^m(a, b; d, c) \quad (8.54)$$

Wir überprüfen die Existenz von Nebenbedingungen durch die Vertauschung  $a \leftrightarrow b$ . Mit den Ergebnissen von Abschnitt E.2.3 finden wir die folgenden Relationen.

$$\Omega_E^m(b, a; c, d) = \Omega_E^m(a, b; c, d) \quad (8.55)$$

$$\Omega_A^m(b, a; c, d) = -\Omega_A^m(a, b; c, d) \quad (8.56)$$

Für die anderen beiden SKG ergibt sich je eine Nebenbedingung. Diese sind in Anhang E.3.2 notiert. Damit ist die Zahl der Nebenbedingungen pro Kombination der äußeren Parameter für die symmetrischen Vertex-Parameter von 14 auf 2 gesunken.<sup>7</sup> Dies schränkt den Lösungsraum nicht so stark ein, als dass weitere Symmetriebedingungen an die  $\Sigma$ -Parameter gestellt werden müssten. Dennoch können diese Nebenbedingungen sozusagen zu einer Überbestimmung des Gleichungssystems führen, so dass die SKG keine Lösung mehr haben. Wenn man das Problem der Nebenbedingungen grundsätzlich vermeiden will, muss man auf den in Kapitel 2 vorgestellten Ansatz mit zusätzlichen partiell antisymmetrischen Parametersätzen zurückgreifen. Nach den Überlegungen in Kapitel 2

<sup>7</sup>Für die Kombinationen  $(a, a, a, a)$  sind die Nebenbedingungen trivial erfüllt, so dass sich für das gesamte SKG-System eine geringere Zahl ergibt.

und den Erfahrungen mit den numerischen Lösungen der SKG hat dies jedoch wahrscheinlich keine Auswirkung auf die Lösbarkeit. Daher führte es lediglich zu umfangreicheren Ergebnissen und längeren Laufzeiten der Programme.

## 8.4 SKG aus den Kondensaten

Aus den in Kapitel 7 berechneten BGK lassen sich weitere Bestimmungsgleichungen ableiten. Die vollständigen Kondensate der Propagatoren liefern jeweils eine zusätzliche Gleichung, die partiellen Kondensate der Vertizes jeweils  $r$  Gleichungen.

### 8.4.1 Propagator-Kondensate

#### Gluon-Propagator

Für den Gluon-Propagator ergibt sich mit den Ergebnissen aus Abschnitt 7.1.1 die folgende Gleichung.

$$\begin{aligned}
S_2^K &= \frac{3}{4}(\varsigma_1 - \sigma_1) - \frac{29}{2b\beta_0} \left[ \frac{1}{b^2} (C_{rr;r\varsigma_1} - C_{rr;r-1}) - (\varsigma_1 - \sigma_1) \right] \\
&+ \frac{3}{4b\beta_0} \left[ \frac{1}{b^2} \left( -\frac{61}{4} C_{rr;r\varsigma_1} + \frac{33}{2} C_{r-1r;r} - \frac{5}{4} C_{rr;r-1} \right) + \frac{25}{4} (\varsigma_1 - \sigma_1) \right] \\
&+ \frac{81}{16b^3\beta_0} (\varsigma_1 - \sigma_1) - \Phi_2^K \\
&- \frac{2}{3b\beta_0} \sum_f \left[ -\bar{C}_{r;r-1r-1}^f + \bar{C}_{r;rr-2}^f + \bar{C}_{r;rr-1}^f \varpi_1^f - \bar{C}_{r;rr}^f \varpi_2^f \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3} (\bar{C}_{r;rr}^f \sigma_1 - \bar{C}_{r-1;rr}^f) + \frac{1}{3} (\varsigma_1 - \sigma_1) \right] \tag{8.57}
\end{aligned}$$

Für den Anteil aus der Geist-Schleife,  $\Phi_2^K$ , gilt die folgende Beziehung, je nachdem, ob man den Beitrag dieser Schleife zu den perturbativen Termen rechnet oder durch passende Erweiterung und Entwicklung doch in die quasiperturbativen Terme nullter Ordnung einbezieht.

$$\Phi_2^K = \begin{cases} \frac{3}{16b\beta_0} \left( \frac{1}{b^2} - 1 \right) (\varsigma_1 - \sigma_1), & \text{quasipert.} \\ 0, & \text{pert.} \end{cases} \tag{8.58}$$

#### Fermion-Propagator

Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 7.1.2 findet man die folgende Gleichung für das Kondensat des Fermion-Propagators.

$$\begin{aligned}
\bar{S}_2^K &= \varrho_3^f - \pi_1^f \varrho_2^f + \varpi_1^f \pi_2^f - \pi_3^f - \hat{m}_f^3 \\
&+ \frac{1}{\beta_0} \left\{ -\frac{2}{b} \left[ (\bar{C}_{r;rr\varsigma_1}^f - \bar{C}_{r-1;rr}^f) (\varpi_1^f - \hat{m}_f) - \bar{C}_{r;rr-1}^f \varsigma_1 + \bar{C}_{r-1;rr-1}^f \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{28}{9} \left[ \frac{1}{b} \left( \bar{C}_{r;rr}^f \varrho_3^f - \bar{C}_{r;rr-1}^f \varrho_2^f + \bar{C}_{r;rr-2}^f \varpi_1^f - \bar{C}_{r;rr-3}^f \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\varrho_3^f - \varrho_2^f \pi_1^f + \varpi_1^f \pi_2^f - \pi_3^f\right)] \\
& +4\left[\frac{1}{b}\left((\bar{C}_{r;rr-1}^f - \bar{C}_{r;rr}^f \varpi_1^f)(\hat{m}_f \varpi_1^f + \hat{m}_f^2 + \varrho_2^f)\right.\right. \\
& \quad \left. - (\hat{m}_f + \varpi_1^f)(\bar{C}_{r;r-1r-1}^f - \bar{C}_{r;rr-1}^f \varpi_1^f) + \bar{C}_{r;r-2r-1}^f - \bar{C}_{r;r-2r}^f \varpi_1^f\right) \\
& \quad \left. - (\hat{m}_f^2(\hat{m}_f + \varpi_1^f - \pi_1^f) + \hat{m}_f(\varrho_2^f - \varpi_1^f \pi_1^f + \pi_2^f))\right]\} \quad (8.59)
\end{aligned}$$

### Geist-Propagator

Der Vollständigkeit halber geben wir hier auch die Kondensatgleichung für den Geist-Propagator an. Da dieser in Landau-Eichung im Wesentlichen in seiner perturbativen Gestalt bleibt, gibt es nur dann Beiträge zur nullten quasiperturbativen Ordnung, wenn man das Ergebnis aus Abschnitt 7.1.3 passend mit  $\Lambda^{-2\epsilon}$  erweitert und entwickelt.

$$\tilde{S}_2^K = \tilde{\Phi}_2^K \quad (8.60)$$

Dabei ist

$$\tilde{\Phi}_2^K = \begin{cases} -\frac{9}{4b\beta_0^2}\left(\frac{1}{b^2} - 1\right)(\varsigma_1 - \sigma_1), & \text{quasipert.} \\ 0, & \text{pert.} \end{cases} \quad (8.61)$$

### 8.4.2 Partielles $\Gamma_3$ -Kondensat

Um die Gleichungen aus dem partiellen Gluon-Kondensat notieren zu können, definieren wir zunächst den Beitrag aus der Geist-Schleife.

$$\Phi_3^K(a) = \begin{cases} -\frac{5}{32b^2\beta_0}\left(\frac{1}{b^3} - 1\right)\sigma_{r-a}, & \text{quasipert.} \\ -\frac{5}{32\beta_0}\sigma_{r-a}, & \text{pert.} \end{cases} \quad (8.62)$$

Danach fassen wir den Anteil aus den nicht-perturbativen Schleifen inklusive der perturbativen Korrekturen der Subgraphen in  $\Upsilon_3^K$  zusammen. Dabei formulieren wir wegen der beiden Ansätze für den nicht-perturbativ erweiterten  $\Gamma_4$ -Vertex zwei Varianten: eine für den Ansatz mit vollständig symmetrischen Parametern, eine für Mandelstam-symmetrische Parameter.

$$\begin{aligned}
\Upsilon_3^{K,e}(a) &= -\frac{5}{4b}(C_{ar;r} - \sigma_{r-a}) + \frac{1}{b^2\beta_0}\left\{\frac{15}{8b^3}\Sigma_S(a,r,r) - \frac{9}{4b^2}\Sigma_{\Gamma T}(a;r,r)\right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2b^2}\Sigma_{\Gamma E}(a;r,r) - \frac{135}{32b^2}C_{rr;r}\sigma_{r-a} + \frac{5}{6}\sum_f \bar{\Sigma}^f(a,r,r)\right. \\
& \quad \left. - \sigma_{r-a}\left(-5 - \frac{5}{32} + \frac{5}{6}N_f\right)\right\} \quad (8.63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_3^{K,m}(a) &= -\frac{5}{4b}(C_{ar;r} - \sigma_{r-a}) + \frac{1}{b^2\beta_0}\left\{\frac{15}{8b^3}\Sigma_S(a,r,r) - \frac{1}{4b^2}\left[6\Sigma_{\Gamma T}^s(a;r,r)\right.\right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{2}\Sigma_{\Gamma T}^{t+u}(a;r,r) + \Sigma_{\Gamma D}^{t+u}(a;r,r) - \Sigma_{\Gamma E}^{t+u}(a;r,r)\right] - \frac{135}{32b^2}C_{rr;r}\sigma_{r-a} \\
& \quad \left. + \frac{5}{6}\sum_f \bar{\Sigma}^f(a,r,r) - \sigma_{r-a}\left(-5 - \frac{5}{32} + \frac{5}{6}N_f\right)\right\} \quad (8.64)
\end{aligned}$$

Damit können wir die Kondensatgleichungen notieren.<sup>8</sup>

$$S_3^{K,i}(a) = \Upsilon_3^{K,i}(a) - \Phi_3^K(a) \quad (8.65)$$

Das Standardmodell geht in Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen davon aus, dass es insgesamt sechs Quarkflavours gibt [LP 96b]. Vor diesem Hintergrund ist es besonders bemerkenswert, dass der perturbative Limes des partiellen Kondensats, der sich mit dem Beitrag der Geist-Schleife zu

$$S_3^{K,pert} = -5 + \frac{5}{6}N_f \quad (8.66)$$

ergibt, für  $N_f = 6$  *exakt verschwindet*.

### 8.4.3 Partielles $\bar{\Gamma}_3$ -Kondensat

Mit den Ergebnissen aus Kapitel 7 kann man die Gleichungen für das partielle  $\bar{\Gamma}_3$ -Kondensat in der folgenden Weise zusammenfassen. Wie bei der DSG des Gluon-Propagators kommen in dieser Kondensatgleichung quadratisch divergente Integrale vor, so dass sich beim Koeffizientenvergleich zwei grundlegende Strukturen ausbilden. Mit der zusätzlichen Abkürzung

$$\begin{aligned} \Sigma_A^{K,f}(a) = & \sum_{t_1 t_2 t_3=1}^{r+1} \sum_{k_2 k_3=0}^r \sum_{m n'=0}^r \sum_{v w=0}^r \frac{(-\hat{u}_{t_1})^{k_2+m} (-\hat{u}_{t_2})^{k_3+v} (-\hat{\kappa}_{t_3}^f)^{n'+w}}{\Delta^r(u, t_1) \Delta^r(u, t_2) \Delta^r(\kappa^f, t_3)} \\ & (\hat{u}_{t_1} + \hat{u}_{t_2}) C_{k_3 k_2; a} \bar{C}_{m; r n'}^f \bar{C}_{v; w r}^f \end{aligned} \quad (8.67)$$

kann man diese folgendermaßen notieren.

$$\begin{aligned} \bar{\Upsilon}_3^K(a+1) = & \frac{1}{3}(\bar{C}_{a; r r}^f - \sigma_{r-a}) + \frac{1}{8\beta_0} \left\{ \frac{49}{15b^2} \left( \Sigma_A^{f,r}(a; r, r) - C_{r r; a}^r \right) \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \left( \frac{1}{b^2} \Sigma_A^{f,r}(a; r, r) - \sigma_{r-a} \right) \right\} \quad (8.68) \\ \bar{\Omega}_3^K(a) = & \sigma_{r-a} [(\varpi_1^f)^2 - \pi_1^f \varpi_1^f - \varrho_2^f] - \bar{C}_{a; r r}^f [(\varpi_1^f)^2 - \varrho_2^f] + \bar{C}_{a; r r-1}^f \varpi_1^f \\ & + \frac{1}{4\beta_0} \left\{ -\frac{6}{b^2} \left( \Sigma_A^{K,f}(a) - 2C_{r r; a}^r (\varsigma_1 - \sigma_1) \right) \right. \\ & + 9 \left( \frac{1}{b^2} \left[ \Sigma_A^f(a; r, r) [(\varpi_1^f)^2 - \varrho_2^f] - \Sigma_A^f(a; r, r-1) \varpi_1^f \right] \right. \\ & \left. \left. + \Sigma_A^f(a; r-1, r-1) - \Sigma_A^f(a; r, r-2) \right) \right. \\ & \left. - \sigma_{r-a} [(\varpi_1^f)^2 - \varrho_2^f + (\pi_1^f)^2 - \varpi_1^f \pi_1^f - \pi_2^f] \right\} \quad (8.69) \end{aligned}$$

Wie auch beim Gluon-Propagator müssen wir hier die zwei Sonderfälle  $a = r+1$  und  $a = 0$  betrachten, in denen jeweils nur eine Struktur zu den Kondensatgleichungen beiträgt.

$$\bar{S}_3^K(r+1) = \bar{\Upsilon}_3^K(r+1) \quad (8.70)$$

$$\bar{S}_3^K(a) = \bar{\Upsilon}_3^K(a) + \bar{\Omega}_3^K(a) \quad (8.71)$$

$$\bar{S}_3^K(0) = \bar{\Omega}_3^K(0) \quad (8.72)$$

<sup>8</sup>Wir haben hier für die Kondensatgleichung keine triviale Symmetrisierung durchgeführt, da die unsymmetrisierte DSG ebenso wie die Kondensatbildung den Impuls  $p_1$  in gleicher Weise auszeichnet.

Damit liefert diese Kondensatgleichung trotz der lediglich  $r$  Vertex-Polstellen insgesamt  $r + 1$  Gleichungen.

### Nebenbedingungen

In den Kondensatgleichungen in Abschnitt 7.2.2 kommt eine weitere Tensorstruktur,  $\not{k}\gamma^\mu - \gamma^\mu\not{k}$ , vor. Diese gehört nicht zu den dimensionslosen Lorentz-Tensoren, die wir im erweiterten Ansatz für den Gluon-Propagator verwendet haben. Dennoch darf diese Struktur wegen der Besonderheiten eines partiellen Kondensates nicht ausgeschlossen werden. Daher liefert sie durch den üblichen Koeffizientenvergleich einen weiteren vollständigen Satz von  $r$  Gleichungen, die wir hier als Nebenbedingungen auffassen wollen.

$$\begin{aligned}
\bar{N}_3^K &= \bar{C}_{a;rr}^f \varpi_1^f - \bar{C}_{a;rr-1}^f - \sigma_{r-a}(\varpi_1^f - \pi_1^f) \\
&+ \frac{1}{\beta_0} \left\{ \frac{3}{2} \left( \Sigma_A^f(a; r, r) \varpi_1^f - \Sigma_A^f(a; r, r-1) - C_{rr;a}^r \hat{m}_f \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{9}{4} \left( \Sigma_A^f(a; r, r) \varpi_1^f - \Sigma_A^f(a; r, r-1) - \sigma_{r-a}(\varpi_1^f - \pi_1^f) \right) \right\}
\end{aligned} \tag{8.73}$$



## Kapitel 9

# Numerische Lösungen

Nachdem wir im letzten Kapitel die SKG formuliert haben, stehen wir nun vor dem Problem, Lösungen für dieses nichtlineare Gleichungssystem zu finden. Durch mathematische Untersuchungen ist wohl bekannt, dass sich nichtlineare Gleichungssysteme (NLGS) in ihrem Lösungsverhalten fundamental von linearen Gleichungssystemen (LSG) unterscheiden [SK 04, Cry 94, Stu 02]. Da der  $n$ -dimensionale Lösungsraum durch jede Gleichung auf eine allgemeine Hyperfläche (anstatt einer Ebene) eingeschränkt wird, können schon weniger als  $n$  Gleichungen die Lösungsmannigfaltigkeit auf die Dimension 0 einschränken – oder gar ein unlösbares System definieren.<sup>1</sup> Umgekehrt sind auch (mehrdimensionale) Lösungsmannigfaltigkeiten möglich – obwohl alle Gleichungen linear unabhängig sind. Selbst für den Fall, dass man ein System gefunden hat, das eine Lösungsmannigfaltigkeit der Dimension 0 definiert, muss man allgemein mit mehreren diskreten Lösungen rechnen. Weil wir in dieser Arbeit die Nebenbedingungen an die Parameter des erweiterten Ansatzes nach physikalischen Gesichtspunkten gewählt haben, können wir die SKG mit rein reellen Größen parametrisieren, weshalb wir nur reelle Lösungen des Gleichungssystems betrachten. Die algebraische Lösungstheorie betrachtet NLGS für gewöhnlich nur über den komplexen Zahlen. Da man erwarten muss, dass komplexe Lösungen – wenn überhaupt Lösungen existieren – dominieren und so numerische Lösungsverfahren vor allem in unphysikalischen Bereichen konvergieren, ist die reelle Parametrisierung für diese Arbeit dennoch vorzuziehen.

### 9.1 Lösungsverfahren

Die numerische Lösung eines NLGS erfolgt in der Regel durch ein – modifiziertes – mehrdimensionales Newton-Verfahren. Eine notwendige Voraussetzung für ein Newton-Verfahren ist aber, dass die Zahl der linear unabhängigen Gleichungen der der Variablen entspricht [Pr+ 92, SK 04, Cry 94]. Daher sind wir gezwungen, die Situation für LGS wiederherzustellen und über die aus den DSG stammenden Gleichungen weitere hinzuzunehmen.

---

<sup>1</sup>Für LGS entsteht diese Situation nur bei überbestimmten, vom Rest der Variablen unabhängigen Subsystemen.

Entscheidend für die numerische Behandlung ist damit die Gesamtzahl der unabhängigen Variablen aus dem nicht-perturbativ erweiterten Ansatz. Wir müssen hier zwischen den beiden Ansätzen für den  $\Gamma_4$ -Vertex unterscheiden und benutzen zur Unterscheidung wieder die gleichen Abkürzungen wie in Kapitel 8. Die Variablenanzahl berechnet sich in Abhängigkeit von der Zahl der Fermionen und dem Approximationsgrad  $r$  dann wie folgt.

$$N_V^e = (N_f + 1) \left[ 2r + 1 + \frac{(r+1)^2(r+2)}{2} \right] + 3 \binom{r+4}{4} \quad (9.1)$$

$$N_V^m = (N_f + 1) \left[ 2r + 1 + \frac{(r+1)^2(r+2)}{2} \right] + 3 \frac{(r+1)(r+2)[(r+2)(r+2) + 2]}{8} \quad (9.2)$$

Wir geben in Tabelle 9.1 und Tabelle 9.2 einen kurzen Überblick über das Wachstum der Variablenzahl mit dem Approximationsgrad.

| $r$ | $N_f = 0$ | $N_f = 2$ | $N_f = 6$ |
|-----|-----------|-----------|-----------|
| 1   | 24        | 42        | 78        |
| 3   | 152       | 246       | 434       |
| 5   | 515       | 789       | 1337      |
| 7   | 1293      | 1899      | 3111      |

Tabelle 9.1: Variablenanzahl  $N_V^e$

| $r$ | $N_f = 0$ | $N_f = 2$ | $N_f = 6$ |
|-----|-----------|-----------|-----------|
| 1   | 27        | 45        | 81        |
| 3   | 212       | 306       | 494       |
| 5   | 830       | 1104      | 1652      |
| 7   | 2301      | 2907      | 4119      |

Tabelle 9.2: Variablenanzahl  $N_V^m$

Für die numerische Lösung nutzen wir das in der GNU Standard Library [Ga+ 03] implementierte Hybrid-Verfahren mit Differenzenapproximation für die Jacobi-Matrix des Gleichungssystems. Die zumindest theoretisch genaueren Verfahren mit expliziter Berechnung der Jacobi-Matrix verwenden wir nicht, da die manuelle Ableitung der SKG derart kompliziert und fehleranfällig ist, dass eine numerische Berechnung effizienter ist und der geringfügige Verlust an Konvergenzgeschwindigkeit mehr als kompensiert wird. Für weitere Details zu den verwendeten Lösungsmethoden siehe [Ga+ 03] und [Pr+ 92] und die darin angegebenen Referenzen.

Wichtig sind auch Abschätzungen zur Laufzeit des Programms. Wie man an der Definition der  $\Sigma$ -Parameter ablesen kann, ist jede Berechnung dieser Parameter etwa  $\mathcal{O}((r+1)^4)$ . Die Zahl dieser Parameter steigt etwa so schnell wie die Zahl der Variablen  $N_V$ , die  $\mathcal{O}((r+1)^4)$  ist. Das verwendete numerische

Lösungsverfahren benötigt mindestens eine Berechnung der Jacobi-Matrix – diese ist  $\mathcal{O}((N_V)^2)$  – und deren Invertierung – von der Ordnung  $\mathcal{O}(N_V \log(N_V))$  [Pr+ 92]. Die numerischen Verfahren sind insgesamt in der Regel  $\mathcal{O}((N_V)^2)$  [Pr+ 92]. Wir verwenden dies auch als Abschätzung für den GSL-Algorithmus. Damit haben wir für die Laufzeit des Programms in Abhängigkeit vom Approximationsgrad  $r$  die folgende untere Abschätzung.

$$T_P(r) \geq \mathcal{O}((r+1)^{16}) \quad (9.3)$$

Damit ist das Problem zwar in polynomialer Zeit lösbar, der hohe Exponent bedeutet aber für praktische Rechnungen, dass größere Approximationsgrade als etwa  $r = 5$  numerisch nicht oder nur mit großem Aufwand zugänglich sind.

Benutzt man die Formeln zur Rücknahme der PBZ in den  $\Sigma$ -Parametern, kann man die Komplexität der  $\Sigma$ -Berechnung etwa um zwei Größenordnungen herabsetzen, insbesondere deshalb, weil dann früher mit rein reellen Werten gerechnet werden kann. Gleichzeitig hat dies den Nachteil, dass sich die notwendigen Berechnungen nicht mehr für allgemeines  $r$  programmieren lassen, da eine allgemeine Formel zur Berechnung der Rücknahme der PBZ nicht vorhanden ist.<sup>2</sup>

Wie in Anhang G gezeigt, führt die Rücknahme der PBZ – explizite Formeln dafür sind allerdings nur für  $r \leq 3$  bekannt – auf ein polynomiales Gleichungssystem. Für dieses sind in der Literatur alternative Lösungsverfahren bekannt. Bevor wir mit der Diskussion fortfahren, werden wir einen kurzen Blick auf diese Verfahren werfen.

Eine Möglichkeit zur Bestimmung einer Lösung sind Homotopie-Verfahren [MS 87, Zul 88], die ausgehend von einer geschickt gewählten Startlösung (z.B. eines geeignet vereinfachten Systems) prinzipiell sämtliche diskreten Lösungen finden können. Dabei hängt die Komplexität dieser Verfahren stark von der Qualität der Startlösung ab. Die bisherigen Erfahrungen weisen aber darauf hin, dass die Komplexität mit  $n$  stark zunimmt. Versuche mit dieser Methode an einem weniger komplizierten SKG-System führten nicht zu Ergebnissen [Grü 01]. Und auch das von Ewering in [Ewe 04] hergeleitete SKG-System für erweiterte Ansätze im elektroschwachen Sektor konnte bisher nicht erfolgreich gelöst werden [Sti 04].

Für polynomiale NLGS existiert auch eine weit ausgebaute *algebraische* Lösungstheorie. Dabei bestimmt man die Lösungsmannigfaltigkeit über die Berechnung der zugehörigen Gröbner-Basen [BV 93, CLO 92, Stu 02].<sup>3</sup> Mit der Ermittlung der Gröbner-Basis wäre auf völlig systematischem Weg die Bestimmung (und Parametrisierung) der Lösungsmannigfaltigkeit möglich. Überdies ließen sich die Lösungen auch algebraisch klassifizieren und es wären Aussagen über die Verträglichkeit der SKG untereinander möglich. Auch wenn die Bestimmung einer Gröbner-Basis durchaus auch mit Computer-Programmen durchgeführt werden kann (vgl. z.B. die entsprechenden Abschnitte in den Handbüchern [Wol 03, Hec 03, CGO 04]), muss angesichts der Komplexität der

<sup>2</sup>Damit bedeutet die Rücknahme der PBZ ein erhöhtes Risiko von Programmierfehlern.

<sup>3</sup>Es gibt auch andere Definitionen entsprechender Basen zur Bestimmung des Ideals für das NLGS [GBY 01].

hier diskutierten SKG und des Umfangs einer Gröbner-Basis für strukturell wesentlich einfachere Probleme [Stu 02] bezweifelt werden, ob dieses Verfahren wirkliche Vorteile böte.

In der Tat gibt [GG 03] die folgende Abschätzung für die Komplexität der Berechnung einer Gröbner-Basis bei der Lösung eines Problems mit  $n$  Unbekannten.

$$T_{Gr} \approx \mathcal{O}(2^{(2^n)}) \quad (9.4)$$

In dem gleichen Verhältnis steigt auch der maximale Polynom-Grad zumindest in Zwischenschritten an. Vielleicht noch viel gravierender ist dagegen, dass auch die Zahl der in der Gröbner-Basis auftretenden Polynome wie  $2^{(2^n)}$  anwächst [GG 03, Sti 05], was einen doppelt-exponentiellen Anstieg auch des Speicherplatz-Bedarfs bedeutet. Für die in dieser Arbeit definierten SKG ist  $n$  schon für  $r = 1$  mindestens von der Größenordnung 20. Solange keine Möglichkeit gefunden wurde, die Komplexität der SKG drastisch zu erniedrigen, besteht daher keinerlei Aussicht, jemals eine solche vollständige Lösung zu erreichen.

## 9.2 Externe Parameter

### 9.2.1 Gluonische Theorie

Betrachtet man die SKG für die rein gluonische Theorie, sind die Gleichungen skalenfrei. Daher kann man (willkürlich) einen der Parameter auf den Wert 1 setzen. Das bedeutet gleichzeitig, dass das zu lösende Gleichungssystem eine Variable weniger umfasst, man also eine Gleichung weglassen könnte. In der Tat wurde dieses Verfahren in früheren Arbeiten [Ewe 04] angewendet und auch wir werden in einem Teil der Auswertung diesem Vorgehen folgen. Allerdings hat dies einen bedeutenden Nachteil: Es ist unklar, welche der Gleichungen weggelassen werden kann. Daher ist zu prüfen, ob die Auswahl der weggelassenen Gleichung Einfluss auf die Lösungen hat bzw. ob der als Lösung erhaltene Parametersatz die weggelassene Gleichung minimiert.

### 9.2.2 Fermionen

Sobald man die QCD mit massiven Fermionen betrachtet, sind die SKG nicht länger skalenfrei, d.h. dass keine weiteren Gleichungen eliminiert werden können. Stattdessen benötigt man Werte für die Strom-Massen der Fermionen in Einheiten der  $\Lambda$ -Skala. Da das in dieser Arbeit hergeleitete SKG-System sowohl für das  $MS$ - wie für das  $\overline{MS}$ -Schema gilt,<sup>4</sup> können wir die üblicherweise für das  $\overline{MS}$ -Schema angegebenen experimentellen Werte nutzen. In Tabelle 9.3 geben wir einen kurzen Überblick über die renormierten Fermion-Massen  $m_f$  für eine Renormierungsskala von  $\nu = 2 \text{ GeV}$  [Ei+ 04]. Bei der Festlegung der Werte für die numerische Rechnung sind vor allem die Verhältnisse zwischen den leichten Quarks ( $u$ ,  $d$  und  $s$ ) zu beachten. Diese sind in Tabelle 9.4 notiert [Ei+ 04].

<sup>4</sup>Die *endliche* Änderung der Renormierung beim Schemawechsel hat keinen Einfluss auf die führende Divergenzstruktur.

| Flavour | Ladung          | Massenbereich  |
|---------|-----------------|--|
| $u$     | $\frac{2}{3}e$  | 1.5 bis 4.0 MeV                                      |
| $d$     | $-\frac{1}{3}e$ | 4.0 bis 8.0 MeV                                      |
| $s$     | $-\frac{1}{3}e$ | 80 bis 130 MeV                                       |
| $c$     | $\frac{2}{3}e$  | 1150 bis 1350 MeV                                    |
| $b$     | $-\frac{1}{3}e$ | 4.1 bis 4.4 GeV                                      |
| $t$     | $\frac{2}{3}e$  | $174.3 \pm 5.1$ GeV<br>bis $178.1^{10.4}_{-8.3}$ GeV |

Tabelle 9.3: Strom-Massen der Quarks

| Verhältnis        | Wert        |
|-------------------|-------------|
| $\frac{m_u}{m_d}$ | 0.3 bis 0.7 |
| $\frac{m_s}{m_d}$ | 17 bis 22   |

Tabelle 9.4: Massenverhältnisse

Für Betrachtungen bei endlicher Energie ist ebenso wichtig, dass  $\Lambda$  von der Zahl der sozusagen zur Verfügung stehenden Fermionen abhängig ist. Betrachtet man die QCD bei Energien unterhalb z.B. der  $c$ -Schwelle, tragen die so genannten schweren Quarks effektiv nicht zu den Wechselwirkungen bei, die  $\Lambda$ -Skala berechnet sich (obwohl physikalisch alle sechs Quarks existieren) nur mit den drei sogenannten *aktiven* Quarks [Wei 96, Ca+ 98].<sup>5</sup> Wir geben daher in Tabelle 9.5 die an die entsprechenden Fermion-Zahlen angepassten Werte für die  $\Lambda$ -Skalen im  $\overline{MS}$ -Schema an [Ca+ 98, BBG 04, Bet 04]. Eine Bestimmung von  $\Lambda^{(6)}$  scheint noch nicht vorgenommen worden zu sein.

In den numerischen Rechnungen werden wir für den Fall leichter Quarks – insbesondere auch für chirale (masselose) Quarks – einen Wert von

$$\Lambda_l \approx 250 \text{ MeV} \quad (9.5)$$

verwenden. Dies ist wegen der großen Unsicherheiten bei den Strom-Massen gerechtfertigt. Für schwere Quarks werden wir dagegen

$$\Lambda_s^{(4)} \approx 300 \text{ MeV} \quad (9.6)$$

$$\Lambda_s^{(5)} \approx 210 \text{ MeV} \quad (9.7)$$

benutzen. Auch spielen die Unsicherheiten bei den Strom-Massen eine größere Rolle als der genaue Wert von  $\Lambda^{(n)}$ .

<sup>5</sup>Man sagt auch, die anderen drei Quark-Freiheitsgrade bleiben *eingefroren*. Siehe auch die entsprechenden Ausführungen in Abschnitt 1.2.1.

| $N_f$ | $\Lambda_{\overline{MS}}^{(n)}$ | Quelle   |
|-------|---------------------------------|----------|
| 0     | $259 \pm 1 \pm 20$ MeV          | [Göc 05] |
| 2     | $261 \pm 17 \pm 26$ MeV         | [Göc 05] |
| 3     | $260 \pm 12 \pm 26$ MeV         | [Göc 05] |
| 4     | $294_{-39}^{+41}$ MeV           | [Bet 04] |
| 4     | $305 \pm 25 \pm 50$ MeV         | [Ca+ 98] |
| 5     | $217_{-23}^{+25}$ MeV           | [Ei+ 04] |

Tabelle 9.5: Werte für  $\Lambda^{(n)}$ 

### 9.3 Physikalische Randbedingungen

Wie schon bei der Definition der erweiterten Ansätze in Kapitel 2 erwähnt, müssen diese zusätzlichen physikalischen Randbedingungen genügen.

#### 9.3.1 Confinement

Bei der Formulierung der Ansätze insbesondere für die Propagatoren haben wir eine Parametrisierung gewählt, die insbesondere geeignet ist, Lösungen zu beschreiben, in denen die Propagatoren *Confinement* zeigen.

Wir sagen, dass ein Propagator Confinement zeigt, wenn er abseits der reellen euklidischen Achse über Pole in der Ebene des komplexen Impulsquadrates verfügt. Diese Pole beschreiben kurzlebige Elementaranregungen und führen dazu, dass die Elementaranregungen des betreffenden Feldes nicht als asymptotisch detektierbare Teilchen auftreten, d.h. dass *S*-Matrixelemente<sup>6</sup> für diese Anregungen verschwinden [DKS 99]. Die Lebensdauer der Zustände ist dabei invers proportional zur Größe des Imaginärteils von  $\hat{u}$  bzw.  $\hat{\kappa}$ . Verglichen mit der  $\Lambda$ -Skala kleine Werte für z.B.  $\Im(\hat{u})$  weisen daher auf ein wenig ausgeprägtes Confinement und damit vergleichsweise langreichweitige Wechselwirkungen hin. Die experimentelle Situation insbesondere durch Jet-Experimente [Mut 87, LP 96b] weist jedoch auf kurze Lebensdauern und kurzreichweitige Wechselwirkungen im Rahmen der QCD hin. Wir können daher von den numerischen Lösungen fordern, dass sie *starkes Confinement* beschreiben, also Werte für  $\Im(\hat{u})$  bzw.  $\Im(\hat{\kappa})$  haben, die in etwa in der Größenordnung der  $\Lambda$ -Skala sind. Eine Lösung ohne Confinement (*Non-Confinement-Lösung*) zeichnet sich dagegen dadurch aus, dass mindestens ein Pol auf der reellen Achse liegt.<sup>7</sup>

<sup>6</sup>Zur Definition der *S*-Matrix siehe z.B. [IZ 80, Mut 87, MM 94, Zin 02].

<sup>7</sup>Damit beschreibt sie als freie Teilchen detektierbare Elementaranregungen.

### 9.3.2 Tachyon-Freiheit

Die zweite wesentliche physikalische Randbedingung ist, dass die Propagatoren keine *tachyonischen* Zustände [DKS 99, AS 01] beschreiben dürfen.<sup>8</sup> Ein Propagator beschreibt dann einen tachyonischen Zustand, wenn er über einen Pol auf der *positiven* reellen euklidischen Impulsquadrat-Achse verfügt. Dagegen liegen die Pole physikalischer Teilchen grundsätzlich auf der negativen euklidischen Achse. Für die Pole in der komplexen Ebene ist die Situation weniger eindeutig. Zwar beschreibt ein Pol in der positiv reellen euklidischen Halbebene eine kurzlebige tachyonische Elementaranregung, man kann aber nicht ausschließen, dass auf diese Weise zumindest bei niedrigen Approximationsstufen  $r$  ein physikalischer Pol in der negativen Halbebene approximiert wird. Im Rahmen dieser Arbeit werden wir dennoch fordern, dass sämtliche Pole eines Propagators in der sogenannten *minkowskischen* (negativ reellen) Halbebene liegen müssen [DKS 99].

### 9.3.3 Reflexionspositivität

Schließlich muss man von den Propagatoren noch *Reflexionspositivität* [MM 94, AS 01] fordern, die als wesentlicher Teil der *Osterwalder-Schrader-Bedingungen* die positive Definitheit der Norm im Hilbert-Raum für physikalische Zustände in die euklidische Theorie überträgt [AS 01]. Während es schwer ist, für eine Theorie allgemein die Einhaltung der Reflexionspositivität zu beweisen, kann man für konkrete Beispiele wie z.B. die Propagatoren einfache Bedingungen angeben, wann die Reflexionspositivität verletzt ist. Für die Propagatoren muss man daher fordern, dass sie entlang der positiven reellen Achse keine negativen Werte annehmen dürfen [DKS 99, AS 01].<sup>9</sup> Damit müssen auch die Nullstellen der Propagatoren auf der negativen reellen Halbachse liegen. Für höhere Approximationsstufen erwartet man gleichermaßen, dass auch die komplex-konjugierten Nullstellen (die Pole des 2-Punkt-Vertex) in der negativen reellen Halbebene liegen.

Damit erhält man für die qualitative Anordnung der Pole und Nullstellen z.B. eines Gluon-Propagators mit allgemeinem Approximationsgrad  $r > 1$  eine Darstellung wie in Abbildung 9.1 [Sti 96].

### 9.3.4 Bedingungen an die Parameter

Durch die unterschiedliche Art der Parametrisierung für den Gluon- und den Fermion-Propagator ergeben sich auch unterschiedliche Bedingungen an die jeweiligen erweiterten Parameter.

---

<sup>8</sup>Es ist unmittelbar klar, dass diese das Kausalitätsprinzip verletzen.

<sup>9</sup>Der perturbative Geist-Propagator verletzt mit seinem negativen Vorzeichen diese Bedingung offensichtlich. Da Geister Artefakte der Eichung (bzw. der BRS-Symmetrie) sind, müssen sie keine physikalischen Randbedingungen erfüllen.

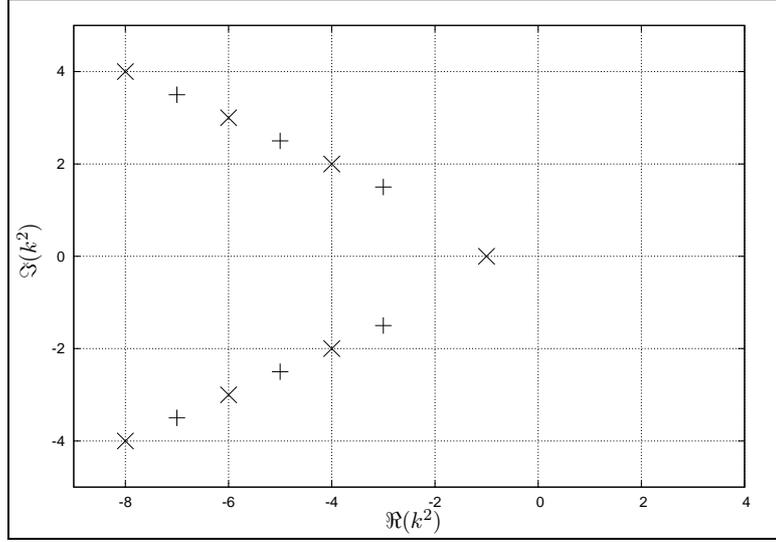


Abbildung 9.1: Nullstellen und Polpositionen eines allgemeinen Gluonpropagators in der komplexen  $k^2$ -Ebene. ( $\times$  bedeutet Nullstellen,  $+$  bedeutet Polpositionen.)

### Gluon-Propagator

Die physikalischen Randbedingungen an den Gluon-Propagator lassen sich einfach ablesen.

$$b > 0 \quad (9.8)$$

$$\Re(u_{r,s}) > 0 \quad (9.9)$$

$$\Re(\hat{u}_{r,s}) > 0 \quad (9.10)$$

### Fermion-Propagator

Die physikalischen Randbedingungen an den Fermion-Propagator sind wegen der  $\gamma$ -Matrizen nicht direkt ablesbar. Daher ist der Propagator (2.14) so umzuschreiben, dass der Nenner eine skalare Funktion wird. Dazu betrachten wir den Propagator für  $r = 1$ .<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\not{p} + \kappa_{1,1}}{(\not{p} + \hat{\kappa}_{1,1})(\not{p} + \hat{\kappa}_{1,2})} &= -\not{p} \frac{p^2 + 2\kappa_{1,1}\Re(\hat{\kappa}_{1,1}) - \hat{\kappa}_{1,1}\hat{\kappa}_{1,2}}{(p^2 + \hat{\kappa}_{1,1}^2)(p^2 + \hat{\kappa}_{1,2}^2)} \\ &+ \mathbf{1} \cdot \frac{\kappa_{1,1}(\hat{\kappa}_{1,1}\hat{\kappa}_{1,2} - p^2) + 2p^2\Re(\hat{\kappa}_{1,1})}{(p^2 + \hat{\kappa}_{1,1}^2)(p^2 + \hat{\kappa}_{1,2}^2)} \end{aligned} \quad (9.11)$$

Die Forderung nach Confinement und Tachyon-Freiheit führen unmittelbar zu der Bedingung

$$|\Re(\hat{\kappa}_{1,1/2})| > |\Im(\hat{\kappa}_{1,1/2})| > 0 \quad . \quad (9.12)$$

<sup>10</sup>Der Flavour-Index ist unterdrückt.

Die Bedingungen zur Reflexionspositivität sind für den Fermion-Propagator nicht in einfacher Weise nachzurechnen. Wir nutzen an dieser Stelle die Analogie zum perturbativen Propagator, der die entsprechenden Bedingungen erfüllen muss. Damit fordern wir, dass die Koeffizientenfunktionen der Anteile proportional zu  $-\not{p}$  und  $\mathbf{1}$  jeweils auf der positiven reellen euklidischen Achse größer als Null sind. Damit kann man für  $r = 1$  die folgenden zusätzlichen Einschränkungen herleiten.

$$\Re(\kappa_{1,1})\Re(\hat{\kappa}_{1,1/2}) > 0 \quad (9.13)$$

$$2\Re(\kappa_{1,1})\Re(\hat{\kappa}_{1,1/2}) > \hat{\kappa}_{1,1}\hat{\kappa}_{1,2} \quad (9.14)$$

$$2\Re(\hat{\kappa}_{1,s}) > \Re(\kappa_{1,1}) > 0 \quad (9.15)$$

Möchte man für den Fermion-Propagator in allgemeiner Approximationsstufe  $r$  Bedingungen für Reflexionspositivität herleiten (Confinement und Tachyon-Freiheit sind mit der Verallgemeinerung von (9.12) auf allgemeines  $\hat{\kappa}_{r,s}$  gewährleistet), erkennt man schnell, dass die Parametrisierung des Fermion-Propagators an diese Fragestellung nicht optimal angepasst ist. Daher muss die Reflexionspositivität für jedes  $r$  getrennt untersucht werden.

### Vertizes

Die Osterwalder-Schrader-Bedingungen (OSB) betreffen nicht nur die Propagatoren, sondern gelten allgemein für die Green'schen Funktionen [AS 01]. Eine Überprüfung sämtlicher Bedingungen liegt aber außerhalb der Möglichkeiten dieser Arbeit. Dazu wäre eine Untersuchung des gekoppelten  $\Gamma_2$ - $\Gamma_3$ - $\Gamma_4$ -Systems notwendig, wobei die jeweiligen Teilamplituden reflexionspositiv sein müssen. Dennoch wären Untersuchungen dazu, ob der erweiterte Ansatz die OSB für sämtliche Green'schen Funktionen respektiert, sehr interessant und könnten zu neuen Einschränkungen für die Parameter des Ansatzes und zu Hinweisen für eine geschickte Formulierung eines selbstkonsistenten Ansatzes führen. Wir werden in dieser Arbeit nur eine Bedingung an die erweiterten Vertizes stellen. Da die führenden Koeffizienten der erweiterten Vertizes den perturbativen Limes beschreiben und für diesen die OSB gelten sollten, fordern wir, dass die führenden Koeffizienten zumindest in ihrem Vorzeichen mit den perturbativen Werten übereinstimmen.

$$\tilde{b} > 0 \quad (9.16)$$

$$C_{rr;r}^r > 0 \quad (9.17)$$

$$\bar{C}_{r;rr}^f > 0 \quad (9.18)$$

$$T_{rr;rr} > 0 \quad (9.19)$$

Zudem werden wir Lösungen bevorzugen, die sich dem strikten perturbativen Limes (alle Koeffizienten gleich 1) zumindest annähern.

## 9.4 Implementierung

Zur Bestimmung der Startwerte für den Lösungsalgorithmus nutzen wir die in der GSL enthaltenen stochastischen Standardfunktionen. Der Zufallszahlen-

generator wird über die Systemzeit initialisiert. Die Startwerte liegen für alle Parameter etwa im Bereich

$$-20 \leq x_i \leq 20, \quad (9.20)$$

wobei beide Vorzeichen gleich häufig vorkommen. Für die Größenordnung der Startwerte gilt, dass sie gehäuft in dem Intervall

$$-6 \leq \ln(|x_i|) \leq +2 \quad (9.21)$$

vorkommen. Wesentlich kleinere Werte sind weniger wahrscheinlich.

Das Programm versucht nun für jeden zufällig bestimmten Satz von Startwerten eine Lösung zu finden. Bricht der GNU-Lösungsalgorithmus ab (weil entweder eine numerische Lösung gefunden wurde oder keine weitere Konvergenz festgestellt wurde), wird der aktuelle Variablensatz nur dann verworfen, wenn sein Fehlerbetrag  $\chi$  größer als eine bestimmte Schwelle  $s_\chi$  ist. Auf diese Weise wird der Raum der Variablen,  $\mathbf{R}^{N_V}$ , sozusagen *stochastisch abgetastet*.

Im Programm sind die SKG so formuliert, dass sie für allgemeinen ungeraden Approximationsgrad  $r$  lauffähig sind. Wegen der verschiedenen Möglichkeiten, aus den SKG in Kapitel 8 eine Auswahl zu treffen, sollten die SKG für jedes  $r$  manuell festgelegt werden. Wesentlich zur Reduktion der Rechenzeit ist hier die Beobachtung, dass die  $\Sigma$ -Parameter sich aus kleineren Bausteinen,  $\Omega_X(a, t_1, t_2)$  zusammensetzen.<sup>11</sup> Formal kann man schreiben:

$$\Sigma_{XY}(a, b) \sim \sum_{t_1 t_2} \frac{\Omega_X(a, t_1, t_2) \Omega_Y(b, t_2, t_1)}{\Delta(x, t_1) \Delta(y, t_2)} \quad (9.22)$$

mit

$$\Omega_X(a, t_1, t_2) \sim \sum_{mn} X_{amn} (-x_{t_1})^m (-y_{t_2})^n \quad (9.23)$$

Dieses Vorgehen verringert die Laufzeit erheblich, sorgt aber für einen erheblichen Anstieg des Speicherplatzbedarfs.

Für den Fall  $r = 1$  kann man mit den Formeln aus Anhang G die PBZ zurücknehmen. Damit erhält man ein wesentlich polynomiales SKG-System, das nur noch Pole in 0 für die Propagatorkonstanten  $b$  und  $\tilde{b}$  hat,<sup>12</sup> wohingegen die anderen Pole (die aus den  $\Delta$ -Faktoren stammen) entfernt wurden. Dies sorgt für eine höhere numerische Stabilität und sollte die Konvergenzgeschwindigkeit verbessern. Zudem verringert sich die Laufzeit wegen der schon ausgeführten Summationen über die  $t_i$  um mindestens eine Größenordnung. Da für die Rücknahme der PBZ in dem hier notwendigen speziellen Fall keine allgemeinen Formeln bekannt sind, ist diese Option nur für  $r = 1$  implementiert.

## 9.5 Zur Bewertung numerischer Lösungen

Zur Interpretation und Bewertung der erhaltenen numerischen Lösungen nutzen wir die folgenden Bedingungen.

<sup>11</sup>Diese  $\Omega$ -Parameter haben nichts mit den in Kapitel 8 definierten gemein.

<sup>12</sup>Diese Definition der Parameter verhindert, dass das numerische Verfahren gegen die triviale (Pseudo-) Lösung der dann polynomialen SKG konvergiert.

1. Wir benutzen als erstes Kriterium zur Klassifikation der Näherungslösungen die Länge des Selbstkonsistenzvektors  $\vec{S}$  pro Variable.

$$\chi = \frac{1}{N_V} |\vec{S}| \quad (9.24)$$

Wir unterscheiden nun zwischen zwei verschiedenen Arten von Lösungen. Für *numerische Lösungen* gilt, dass sie

$$\log_{10}(\chi) \approx -17 \pm 1 \quad (9.25)$$

erreichen, was in etwa den Grenzen der benutzten Lösungsroutinen entspricht. Wir gehen davon aus, dass eine derartige numerische Lösung eine algebraische Lösung des betrachteten NLGS gut approximiert.<sup>13</sup> Man muss allerdings betonen, dass der Fehlervektor eines NLGS beliebig klein werden kann, ohne dass sich das System auch nur in der Nähe einer algebraischen Lösung in den komplexen Zahlen befindet, wie man sich an der Funktion  $f(z) = zz^* + \delta$ ,  $\delta > 0$  schnell klar macht.

Für *numerische Pseudo-Lösungen* gilt dagegen, dass sie als Resultat der Fehlerminimierung im Hybrid-Algorithmus Werte von

$$\log_{10}(\chi) \approx -3 \pm 3 \quad (9.26)$$

liefern.<sup>14</sup> In einem Plot, der die Werte einer Variable gegen  $\chi$  aufträgt, bilden sie ein „Kontinuum“. Für die Existenz dieser Pseudo-Lösungen kann es mehrere Gründe geben.

- (a) Der Hybrid-Algorithmus kann wegen numerischer Instabilitäten eine algebraische Lösung nicht besser approximieren.
- (b) Es existiert eine Lösung für allgemeine, komplexwertige Parameter, deren Imaginärteile genügend klein sind, dass sie in der Nähe der Pseudo-Lösung liegen. Gerade für die Propagatoren sind (bei gleichem Approximationsgrad  $r$ ) auch rein reellwertige Propagator-Pole (also z.B.  $\hat{u}_{r,s}$ ) möglich, so dass Pseudo-Lösungen mit vergleichsweise kleinem Imaginärteil diese approximieren können.
- (c) Es handelt sich um ein lokales Minimum von  $\chi$ , das der Hybrid-Algorithmus nicht verlassen konnte. Die Pseudo-Lösung approximiert keine algebraische Lösung.

Ein Resultat dieser Arbeit ist, dass das in Kapitel 8 definierte SKG-System (sofern man mindestens alle Gleichungen aus den DSG und BSG betrachtet) für  $r = 1$  keine allen Bedingungen genügenden *numerischen Lösungen* liefert. Daher werden wir auch die Pseudo-Lösungen auf physikalisch sinnvolle Ergebnisse hin untersuchen. Dabei stellt sich heraus, dass viele dieser Pseudo-Lösungen auch die SKG und Nebenbedingungen gut minimieren, die zu ihrer Bestimmung nicht herangezogen wurden.

<sup>13</sup>Allerdings hängt die theoretische Genauigkeit, mit der eine *tatsächliche* Lösung approximiert wird, zusätzlich von der Komplexität des Algorithmus ab. Daher dürfte sie nicht in der Größenordnung von  $\chi$  liegen [Cry 94].

<sup>14</sup>In der Regel werden Lösungen mit  $\chi > 0.1$  nicht ausgewertet.

2. Wesentlich für die Beurteilung einer numerischen Lösung ist ihre physikalische Plausibilität. Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 9.3 verlangen wir, dass die numerischen Lösungen die Bedingungen für Confinement, Tachyon-Freiheit und Reflexionspositivität erfüllen. Zusätzlich können wir – zumindest so lange keine schweren Quarks ( $c, b$  und  $t$ ) beteiligt sind – verlangen, dass die Parameter der erweiterten Ansätze maximal etwa von der Größenordnung der  $\Lambda$ -Skala sind. Für sehr viel größere Parameter erwartete man Effekte, die auch im sogenannten perturbativen Regime großer Impulse noch ausgeprägt sind.
3. Eine physikalisch interessante Lösung sollte *alle* SKG erfüllen. Wir können – gerade bei niedrigem Approximationsgrad  $r$  – nicht erwarten, dass wir eine solche Lösung finden. Daher müssen wir eine Reihenfolge der SKG aufstellen.
  - (a) Zunächst sollen die SKG aus den DSG erfüllt sein.
  - (b) Danach betrachten wir die SKG aus der  $\Gamma_4$ -BSG.
  - (c) Danach kommen die SKG aus den Propagator-Kondensaten.
  - (d) Zuletzt ziehen wir die SKG aus den Teil-Kondensaten der Vertizes heran.

Sofern bestimmte (höherrangige) SKG durch andere ersetzt werden, ist bei den Lösungen zu überprüfen, in wie weit die ersetzte SKG verletzt ist.

4. Wir setzen für die Vertex-Parameter bestimmte Symmetrien voraus. Diese führen wegen des eingeschränkten Ansatzes für den  $\Gamma_4$ -Vertex zu Nebenbedingungen. Daher ist zu prüfen, ob die erhaltenen Parameter des  $\Gamma_4$ -Vertex die geforderte Symmetrie zeigen und ob die daraus folgenden Nebenbedingungen auch erfüllt sind.

Bei der Auswertung der erhaltenen numerischen Lösungen und Pseudo-Lösungen gehen wir daher wie folgt vor. Zunächst überprüfen wir, ob die Parameter die physikalischen Randbedingungen Confinement, Tachyon-Freiheit und Reflexionspositivität erfüllen. Alle anderen Parametersätze werden aussortiert. Aus den dann überbleibenden möglichen Lösungen werden die  $N_A$  Parametersätze ( $N_A$  liegt zwischen 500 und 2500) mit dem geringsten Fehlerbetrag  $\chi$  bestimmt. Für diese Parametersätze wird eine Bewertungszahl  $\zeta_P$  errechnet, die sich aus der Erfüllung von ausgewählten SKG und Randbedingungen und dem zugeordneten Minimierungsfehler  $\chi$  ergibt. An dieser Stelle wird auch die Forderung nach starkem Confinement in die Bewertung der Lösungen einfließen. Die genaue Definition von  $\zeta_P$  findet sich in Anhang C. Wir werden bei der Diskussion der numerischen Lösungen und Pseudo-Lösungen den Parametersatz präsentieren, der nach der Definition von  $\zeta_P$  die vorgegebenen Bedingungen am besten erfüllt.<sup>15</sup>

---

<sup>15</sup>In der Regel existieren weitere Parametersätze mit vergleichbarem  $\zeta_P$ , die ebenso als Lösungen in Frage kommen. Die Beschränkungen dieser Arbeit lassen eine Präsentation nicht zu.

## 9.6 Ergebnisse für $r = 1$

Wir geben zunächst die Ergebnisse für eine rein gluonische Theorie an. Hier untersuchen wir, in wie weit die Einbeziehung der Geist-Schleifen in die quasiperturbativen Terme einen Einfluss auf die numerischen Lösungen hat. Zudem kann man hier den Effekt untersuchen, der durch das Weglassen einer SKG entsteht. Anschließend wenden wir uns den Termen mit Fermionen zu, wobei wir sowohl chirale wie massive Fermionen betrachten.

Bei den im Folgenden präsentierten Werten für die Parameter des erweiterten Ansatzes ist zu beachten, dass schon die Rundung auf Zahlen mit siebenstelliger Genauigkeit eine Vergrößerung von  $\chi$  um mehrere Größenordnungen bedeuten kann. Dies ist auch eine Folge des stark nichtlinearen Charakters des betrachteten Gleichungssystems. Zugleich zeigt sich darin, dass das hier betrachtete Selbstkonsistenzproblem schlecht konditioniert ist. Weil die gerundeten Werte für die Berechnung der Nebenbedingungen genutzt werden, können einzelne SKG Abweichungen entwickeln, die mit der Größenordnung von  $\chi$  nicht vereinbar sind. Dennoch kann man diese SKG sinnvoll als zusätzliche Nebenbedingung zur Auswahl der besten Lösungen nutzen.

### 9.6.1 Rein gluonische Theorie

Da die Theorie keine Massenskala außer der  $\Lambda$ -Skala enthält, besteht noch die zusätzliche Freiheit, einen Parameter auf 1 zu setzen. Um mit anderen Arbeiten zu diesem Thema vergleichbar zu bleiben, wählen wir den Realteil von  $u_{1,1}$ . Es wird sich zeigen, dass wir keine numerischen Lösungen finden können, wenn wir sämtliche SKG aus den DSG einbeziehen, die nicht durch Symmetrien vereinfacht werden können. Erst wenn man eine SKG durch die Bedingung  $\Re(u_{1,1}) = 1$  ersetzt, kann man numerische Lösungen finden.

### Perturbative Geist-Schleifen

Wir betrachten hier die Konsequenzen, die sich ergeben, wenn man die Geist-Schleifen zu den perturbativen Korrekturen zählt. Abbildung 9.2 zeigt die besten numerischen Pseudo-Lösungen, die den physikalischen Randbedingungen entsprechen. Dies sind etwa vier Prozent der insgesamt erhaltenen numerischen Pseudo-Lösungen. Die minimalen Werte von  $\chi$  liegen hier etwa eine halbe Größenordnung über denen, die sich bei Verletzung der physikalischen Randbedingungen ergeben. An dieser Stelle zeigt sich deutlich, dass das SKG-System nicht im Hinblick auf physikalische Randbedingungen konstruiert wurde. Weiterhin sind die starken Abweichungen der Propagator-Nullstelle vom Wert 1 auffällig. Dies ist ein Indiz dafür, dass die Qualität der numerischen Pseudo-Lösungen nicht besonders gut ist. Dieses Lösungsverhalten legt nahe, dass die SKG miteinander unvereinbar sind und über keine der gesuchten reellen Lösungen verfügen.

Zur Ermittlung der nach unseren Kriterien besten Pseudo-Lösung berechnen wir  $\zeta_P$ . Wir präsentieren den so erhaltenen Parametersatz in Tabelle C.5 in Anhang C. Es ist bemerkenswert, dass die Nebenbedingungen an die Lösung mit

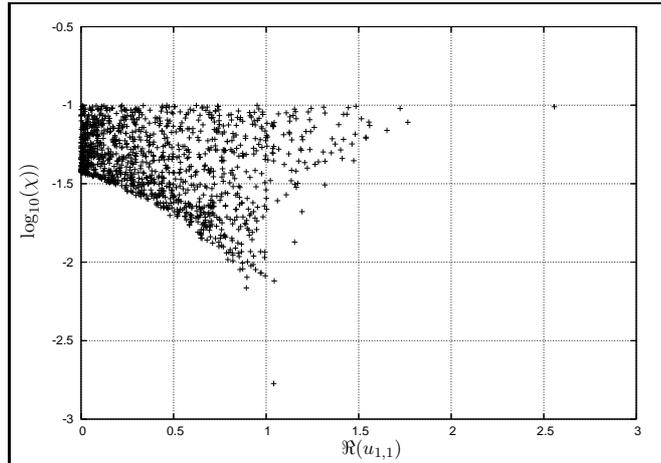


Abbildung 9.2: Der Realteil der Propagator-Nullstelle aufgetragen gegen den Fehler  $\log_{10}(\chi)$  ( $n_f = 0$ , Geist-Schleifen perturbativ, 1272 Werte).

einer Genauigkeit erfüllt werden, die in der Größenordnung des Minimierungsfehlers liegt.<sup>16</sup> Dabei fällt auf, dass sich mit guter Genauigkeit Mandelstamsymmetrische Lösungen für die  $\Gamma_4$ -Parameter etablieren lassen, wie man an den Werten von  $\Xi_7$  und  $\Xi_8$  in der Tabelle erkennen kann. Dies rechtfertigt unser Vorgehen, keine Terme mit partiell antisymmetrischen Vertex-Parametern zuzulassen. Dagegen wird die geforderte Symmetrie für den  $\Gamma_3$ -Vertex wesentlich schlechter erfüllt. Außerdem ist der perturbative Limes für den Gluon-Propagator relativ stark verletzt: Ein Wert von  $b \approx 1.46$  bedeutet eine signifikante Abweichung.

Fasst man die Forderung  $\Re(u_{1,1}) = 1$  als zusätzliche SKG auf, kann man willkürlich eine der SKG aus den DSG weglassen. Wir untersuchen zunächst, welche Konsequenzen die Ersetzung von  $S_2(0) = 0$  hat. Es ist bemerkenswert, dass sich für das so reduzierte SKG-System numerische Lösungen finden lassen. In Abbildung 9.3 zeigen wir den Realteil der Propagator-Nullstelle,  $\Re(u_{1,1})$ , für die alle physikalischen Randbedingungen erfüllenden Parametersätze. Diese umfassen hier nur etwa fünf Prozent der insgesamt erhaltenen Lösungen aus den numerischen Rechnungen. Auch die Mehrzahl der *numerischen Lösungen* der modifizierten SKG ist unphysikalisch.

Wir präsentieren den nach unserem Bewertungssystem besten Parametersatz in Tabelle C.6. Gegenüber der Lösung mit unmodifizierten SKG fällt auf, dass die grundlegenden Symmetrien zwar exakt erfüllt werden, dafür aber die Randbedingungen aus dem  $\Gamma_4$ -Vertex und insbesondere die aus dem  $\Gamma_3$ -Vertex verletzt werden. Wie an  $\Xi_4$  abzulesen, wird zudem die weggelassene SKG  $S_2(0)$  nur relativ schlecht minimiert, was in ähnlicher Weise auch für die anderen erhaltenen numerischen Lösungen gilt. Das unterstreicht die Vermutung, dass das SKG-System mit allen Gleichungen aus den DSG nicht lösbar ist. Weiter-

<sup>16</sup>Bei einem Vergleich zwischen den Nebenbedingungen und  $\chi$  ist Vorsicht geboten, da die Werte der Nebenbedingungen mit den *gerundeten* Werten berechnet werden.

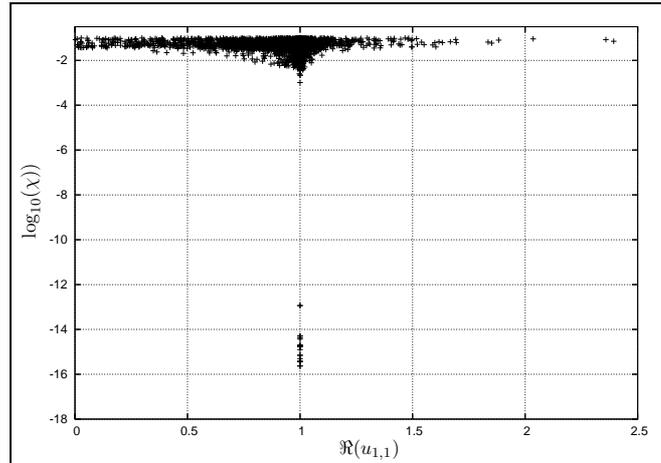


Abbildung 9.3: Der Realteil der Propagator-Nullstelle aufgetragen gegen den Fehler  $\log_{10}(\chi)$  ( $n_f = 0$ , Geist-Schleifen perturbativ, 3416 Werte).

hin fällt an den in Tabelle C.6 notierten Parametern der Vertizes auf, dass sie wesentlich größer als die in Tabelle C.5 notierten sind. Auch diese Eigenschaft kann man bei den anderen numerischen Lösungen wiederfinden.

Das Weglassen anderer SKG führt ebenfalls auf numerische Lösungen. Gibt man die Bedingung  $C_{11;0}^r - C_{01;1}^r = 0$  auf, wird die für den  $\Gamma_3$ -Vertex auf 1-Schleifen-Niveau bewiesene Symmetrie der Vertex-Parameter verletzt. Auch für diese Variante genügt nur ein geringer Prozentsatz der Parametersätze den physikalischen Randbedingungen. Dabei sind die Parameter von einer vergleichbaren Größenordnung wie die Parameter für die unmodifizierten SKG. Man kann daraus schließen, dass diese Lösungen aus physikalischer Sicht interessanter sind. Wir notieren sie in Tabelle C.7. Besonders bemerkenswert ist die Tatsache, dass die Parameter der  $T_4$ -Struktur im  $\Gamma_4$ -Vertex sehr ähnliche Werte haben. Zusammen mit den sehr gut erfüllten Nebenbedingungen aus dem  $\Gamma_4$ -Vertex spricht dies für die Möglichkeit eines Mandelstam-symmetrischen oder sogar vollständig symmetrischen Ansatzes zumindest für diese Struktur. Die Verletzung der Nebenbedingungen aus dem  $\Gamma_3$ -Vertex in  $\Xi_6$  ist sogar kleiner als in den anderen Varianten mit einer ersetzten SKG. Daher spricht vieles dafür, dass die DSG auf 1-Schleifen-Niveau eine zu starke Symmetrie für den  $\Gamma_3$ -Vertex fordern. Wir werden in Kapitel 10 die Möglichkeit diskutieren, wie man durch einen modifizierten Ansatz für den  $\Gamma_3$ -Vertex dieses Problem beheben könnte.

In Abbildung 9.4 präsentieren wir die aus den drei besprochenen SKG-Varianten resultierenden Gluon-Propagatoren entlang der reellen euklidischen Achse. Bei dem Graphen, der aus der Bestimmung mit allen SKG resultiert, zeigt sich in der verschobenen Nullstelle deutlich, dass er aus einer numerischen Pseudo-Lösung resultiert. Bemerkenswert ist, dass der Gluon-Propagator, der ohne vollständige Symmetrie der  $\Gamma_3$ -Vertex-Parameter gewonnen wurde, mit dem aus dem nicht modifizierten System relativ gut übereinstimmt. Allen drei Propagatoren ist jedoch gemeinsam, dass ihre Pole relativ nahe an der positiven reellen euklidischen Halbebene liegen.

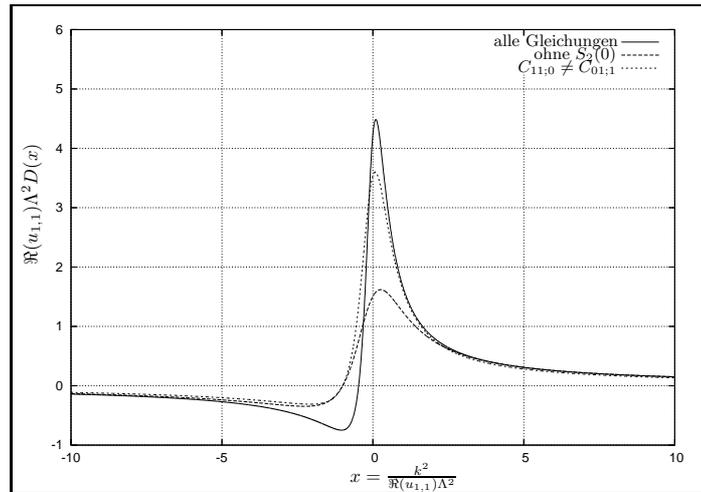


Abbildung 9.4: Transversale Gluon-Propagatoren der besten Parametersätze entlang der reellen euklidischen Achse, skaliert mit  $\Re(u_{1,1})\Lambda^2$  in Einheiten von  $\Re(u_{1,1})$  ( $n_f = 0$ , Geist-Schleifen perturbativ).

### Mit Termen der Geist-Schleifen

Betrachtet man sämtliche SKG aus den DSG, findet der Algorithmus für diese Variante ebenfalls nur numerische Pseudo-Lösungen. In Tabelle C.8 präsentieren wir den Parametersatz mit dem geringsten  $\zeta_p$ . Die Unterschiede zu den Parametern mit Geist-Schleife liegen im Detail. Dabei sind vor allem die Parameter des erweiterten  $\Gamma_4$ -Vertex betroffen. Weil in beiden Fällen jeweils numerische Pseudo-Lösungen betrachtet werden mussten, kann man zwischen beiden Varianten keinen qualitativen Unterschied feststellen.

Berechnet man Lösungen ohne die Gleichung  $S_2(1)$ , findet man wiederum numerische Lösungen. Es stellt sich aber heraus, dass alle numerischen Lösungen, die den physikalischen Randbedingungen genügen, eine starke Verletzung von  $S_2(1)$  von der Größenordnung 1.0 bedeuten. Dies ist wesentlich schlechter als das in Tabelle C.8 gefundene  $\chi$ . Daher entsprechen die so bestimmten Parametersätze nicht den Anforderungen an physikalisch signifikante Lösungen.

Das Weglassen von  $S_2(0)$  ergibt gegenüber der in Abschnitt 9.6.1 besprochenen Situation keine wesentliche Veränderung. Schließlich untersuchen wir noch, welche Konsequenzen sich für die Lösungen ergeben, wenn man nicht länger  $C_{11;0} = C_{01;1}$  fordert. Die daraus resultierenden Parameterwerte sind in Tabelle C.9 notiert. Ebenso wie in dem Fall mit perturbativen Geist-Schleifen wird die Nebenbedingung  $\Xi_6$  besonders gut erfüllt.

Zur Illustration zeigen wir die vier Gluon-Propagatoren für die betrachteten Varianten der SKG in Abbildung 9.5. Dabei kann man die drei auch in Abbildung 9.4 dargestellten Fälle jeweils miteinander vergleichen. Die Unterschiede sind angesichts der Freiheiten bei der Wahl der Nebenbedingungen und der Bestimmung der besten Lösung nicht so groß, als dass man ein qualitativ anderes Verhalten der Lösungen konstatieren könnte.

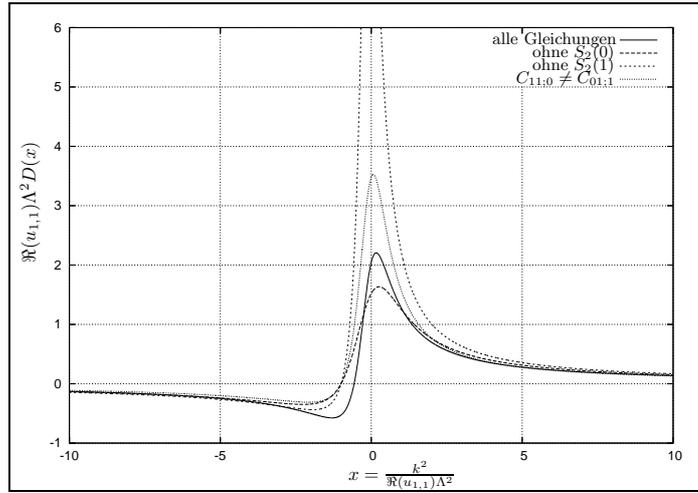


Abbildung 9.5: Transversale Gluon-Propagatoren der besten Parametersätze entlang der reellen euklidischen Achse, skaliert mit  $\Re(u_{1,1})\Lambda^2$  in Einheiten von  $\Re(u_{1,1})$  ( $n_f = 0$ , Geist-Schleifen nicht-perturbativ)

Insgesamt müssen wir für die rein gluonische Theorie feststellen, dass eine Lösung des SKG-Systems nur dann möglich ist, wenn man wichtige SKG aus den DSG weglässt. Dann lassen sich zwar physikalisch sinnvolle Lösungen finden, es zeigt sich jedoch, dass je nach ersetzter SKG die Parameter der numerischen Lösungen zum Teil stark unterschiedlich ausfallen. Dies verdeutlicht noch einmal die Unlösbarkeit des vorher betrachteten SKG-Systems. Auch wird deutlich, dass der numerische Algorithmus trotz der starken, physikalisch motivierten Einschränkungen an die Parameter vor allem zu Lösungen in unphysikalischen Bereichen konvergiert. Dies kann man als ein Zeichen dafür werten, dass die hier untersuchten erweiterten Ansätze noch nicht optimal an die physikalischen Randbedingungen angepasst sind. In Kapitel 10 werden wir dieses Problem aufgreifen.

### 9.6.2 SKG mit zwei Fermionen

In diesem Abschnitt betrachten wir die QCD mit zwei Fermion-Sorten. Diese entsprechen physikalisch dem  $u$ - und  $d$ -Quark. Durch die Einbeziehung der Fermionen tragen mit  $\bar{S}_2^f(a)$  und  $\bar{S}_3^f(a, b, c)$  zwei gegenüber der rein gluonischen Theorie neue Typen zum SKG-System bei. Gleichzeitig erhalten die Gleichungen der gluonischen Parameter neue Freiheiten. Über die experimentell bestimmten Strom-Massen der Quarks ist eine externe Massenskala für die Quarks gesetzt, so dass es nicht mehr notwendig ist, einen Parameter willkürlich auf den Wert 1 festzulegen. Es ist jedoch möglich – und für die leichten Quarks  $u$  und  $d$  auch physikalisch sinnvoll – den Fall chiraler Fermionen zu betrachten. Dann wird wie in der rein gluonischen Theorie wieder  $\Re(u_{1,1})$  auf den Wert 1 gesetzt. Zudem besteht so wiederum die Möglichkeit, eine der SKG wegzulassen.

### Perturbative Geist-Schleifen

Wir betrachten zunächst den Fall massiver Fermionen. Man kann die hier bestimmten Lösungen für  $\Re(u_{1,1})$  dazu nutzen, um die Größenordnung dieser Nullstelle für die rein gluonische Theorie zu bestimmen. Wiederum finden wir keine numerischen Lösungen. Die Qualität der numerischen Pseudo-Lösungen entspricht in etwa denen der rein gluonischen Theorie. Allerdings sinkt der Anteil der allen physikalischen Randbedingungen genügenden Parametersätze auf unter ein Promille. Wir präsentieren in Tabelle C.10 den Satz mit dem geringsten  $\zeta_p$ . Zusätzlich zeigen wir in Abbildung 9.6 den transversalen Anteil des Gluon-Propagators sowie die Anteile der Fermion-Propagatoren proportional zu  $-\not{p}$ . Man erkennt deutlich, dass nur das  $d$ -Quark ein starkes Confinement aufweist. Das  $u$ -Quark zeigt ein wesentlich schwächeres Confinement.<sup>17</sup>

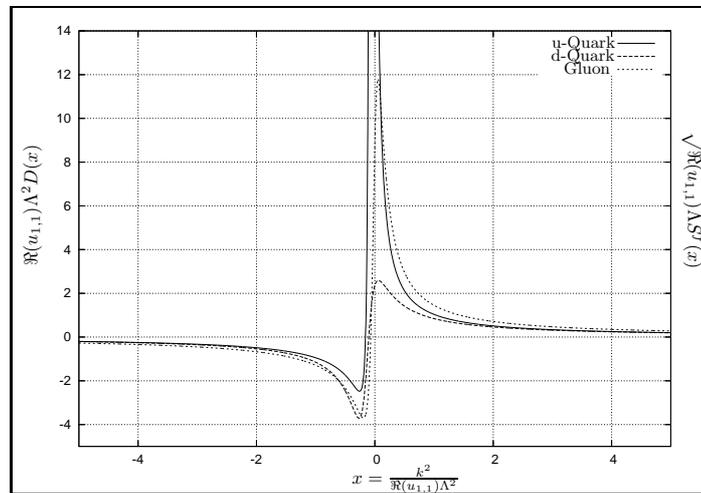


Abbildung 9.6: Transversaler Gluon-Propagator und zu  $-\not{p}$  proportionaler Anteil der Fermion-Propagatoren des besten Parametersatzes entlang der reellen euklidischen Achse ( $n_f = 2$ , massive Fermionen, Geist-Schleifen perturbativ). Für die Fermion-Propagatoren gilt die rechte Skala.

Betrachtet man chirale Fermionen und lässt  $S_2(0)$  bei der Bestimmung der SKG weg, werden nur 4 Lösungen gefunden, die den physikalischen Randbedingungen genügen. Die beste so erhaltene Lösung hat einen wesentlich höheren Minimierungsfehler  $\chi$  als der mit massiven Fermionen bestimmte Parametersatz. Die Propagatoren verhalten sich qualitativ nicht anders als die in Abbildung 9.6. Wir verzichten daher auf eine Präsentation dieser Parameter.

Lässt man bei chiralen Fermionen stattdessen die Forderung  $C_{11;0} = C_{01;1}$  weg, findet sich in der zur Verfügung stehenden Rechenzeit genau eine numerische Pseudo-Lösung, die den physikalischen Randbedingungen genügt. Für die damit beschriebenen Fermion-Propagatoren findet sich die bemerkenswerte Eigenschaft, dass beide Fermionen ein wesentlich stärkeres Confinement aufweisen als dies bei den anderen besten Lösungen der Fall war. Allerdings zeigt dafür

<sup>17</sup>Das Maximum des  $u$ -Quark-Propagators liegt bei etwa 5400.

der Gluon-Propagator ein sehr schwaches Confinement. Wir verzichten daher darauf, die Parameter dieser Lösung anzugeben.

### Mit Termen der Geist-Schleifen

Auch hier werden in allen betrachteten Varianten keine numerischen Lösungen gefunden. Betrachtet man massive Fermionen, erhält man numerische Pseudo-Lösungen, deren  $\chi$  mit dem Minimierungsfehler vergleichbar ist, den das rein gluonische System für die unmodifizierten SKG hat. Wir notieren den Parametersatz mit dem geringsten  $\zeta_p$  in Tabelle C.11. Für die Randbedingungen gilt, dass sie mit Ausnahme des starken Confinements in einer Größenordnungen von  $10^{-4}$  bis  $10^{-1}$  verletzt werden. Die Abweichungen vom perturbativen Limes bewegen sich im Bereich der Lösungen für die rein gluonische Theorie.

Betrachtet man chirale Fermionen, kann man wie in der rein gluonischen Theorie eine Gleichung ersetzen. Wählt man dafür  $S_2(0)$ , muss man feststellen, dass sich das Lösungsverhalten nicht verbessert sondern sogar verschlechtert. Die numerischen Pseudo-Lösungen, die den physikalischen Randbedingungen entsprechen, haben einen wesentlich höheren Minimierungsfehler als in der massiven Theorie mit dem unmodifizierten SKG-System. Ersetzt man  $S_2(1)$ , ist das Lösungsverhalten ähnlich dem der Variante mit massiven Fermionen. Von allen numerischen bestimmten Parametersätzen genügen nur etwa 6 Promille den physikalischen Randbedingungen. Die Lösung mit dem besten  $\zeta_p$  beschreibt Fermion-Propagatoren mit schwach ausgeprägtem Confinement, die sich sehr stark dem perturbativen Limes annähern. Damit sind beide Fermion-Propagatoren fast identisch. Man kann also nur eine sehr schwache spontane Symmetriebrechung feststellen. Da sich dieses Phänomen an diesem Parametersatz gut darstellen lässt, sind in Abbildung 9.7 die jeweiligen Anteile des Gluon-Propagators und der Fermion-Propagatoren aufgetragen. Für die Lösung mit massiven Fermionen ergibt sich ein qualitativ ähnliches Bild, jedoch sind die beiden Fermion-Propagatoren noch schwerer graphisch zu trennen.

Zusammenfassend muss man für die Theorie mit zwei Fermionen konstatieren, dass die schon für die rein gluonische Theorie festgestellten Probleme bei der Bestimmung numerischer Lösungen nicht gemildert werden konnten. Das Weglassen einer SKG ist nicht mehr ausreichend, um noch numerische Lösungen zuzulassen. Gleichzeitig wird es im Rahmen der zur Verfügung stehenden Rechenzeit schwieriger, eine statistisch signifikante Zahl von physikalischen Lösungen zu finden. Auch wenn die numerischen Pseudo-Lösungen im Rahmen der Erwartungen gute Näherungen für die restlichen Nebenbedingungen darstellen, werden keine Lösungen bevorzugt, die für den Gluon- wie für beide Fermion-Propagatoren starkes Confinement beschreiben. Üblicherweise zeigt immer einer der Fermion-Propagatoren ein relativ schwaches Confinement. Damit entspricht ein solcher Propagator im Wesentlichen einem perturbativen Fermion.<sup>18</sup> Wie bei der rein gluonischen Theorie konvergiert der numerische Algorithmus vor allem gegen tachyonische Lösungen. Dies bestätigt die These, dass die betrachteten SKG den physikalischen Randbedingungen nur ungenügend angepasst sind.

---

<sup>18</sup>Es muss sich dabei jedoch, anders als bei den abgebildeten Propagatoren, nicht immer um das  $u$ -Quark handeln.

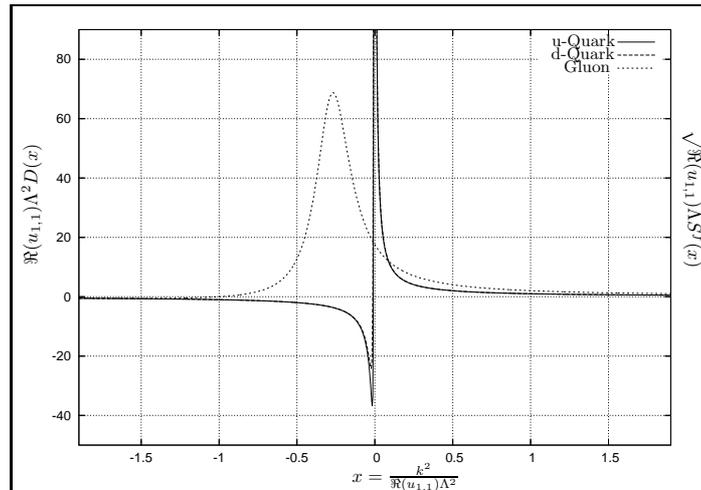


Abbildung 9.7: Transversaler Gluon-Propagator und zu  $-\not{p}$  proportionaler Anteil der Fermion-Propagatoren des besten Parametersatzes entlang der reellen euklidischen Achse ( $n_f = 2$ , chirale Fermionen, mit Geist-Schleifen, ohne  $S_2(0)$ ). Für die Fermion-Propagatoren gilt die rechte Skala.

### 9.6.3 SKG mit vier und sechs Fermionen

Die Hinzunahme von zwei weiteren Fermionen, die physikalisch dem  $s$ - und  $c$ -Quark entsprechen, führt nicht zu einem verbesserten Lösungsverhalten. Da das  $c$ -Quark über eine verglichen mit der  $\Lambda$ -Skala große Strom-Masse verfügt, kann man an dieser Stelle auch den Einfluss schwerer Quarks auf die Lösungen der SKG untersuchen.

Zwar werden auch für vier massive Fermionen Parametersätze mit  $\chi < 1$  bestimmt, diese genügen jedoch nicht den physikalischen Randbedingungen. Und auch für chirale Fermionen konnte bei Ersetzung der SKG  $S_2(0)$  keine physikalische Lösung gefunden werden. Dies bestätigt die Beobachtung, dass sich durch die Fermionen das Lösungsverhalten verschlechtert. Wir verzichten daher auf eine ausführliche Diskussion.

Für den physikalisch relevanten Fall mit sechs Fermionen wurde eine Rechnung mit chiralen Fermionen durchgeführt. Der numerische Algorithmus konvergierte nicht gegen Lösungen mit Minimierungsfehler  $\chi < 1$ . Wir müssen also feststellen, dass die Addition weiterer Fermionen die Lösbarkeit des SKG-Systems noch zusätzlich verschlechtert hat.

Eine Untersuchung der Lösungen mit  $\chi > 1$  könnte Parametersätze liefern, die formal den physikalischen Randbedingungen genügen. Es stellt sich bei numerischen Pseudo-Lösungen mit einem derart hohen Minimierungsfehler jedoch immer mehr die Frage, in wie weit die so erhaltenen Werte noch physikalisch interpretierbar sind. Die Wahrscheinlichkeit, zufällige Artefakte des numerischen Algorithmus zu erhalten, die mit einer Lösung des SKG-Systems nichts zu tun haben, nimmt stark zu. Daher müssen wir uns mit der Feststellung begnügen, keine unseren Ansprüchen genügenden Lösungen für vier und sechs Fermionen

gefunden zu haben.

#### 9.6.4 Weitere Varianten der SKG

Für den physikalisch weniger interessanten Fall mit nur einem chiralen Fermion<sup>19</sup> wurde untersucht, ob man wie bei dem gluonischen System numerische Lösungen erhalten kann. Der Algorithmus kann Lösungen mit einem Minimierungsfehler  $\chi$  in der Größenordnung von  $10^{-10}$  bestimmen. Diese Lösungen stehen zwischen numerischen Lösungen und numerischen Pseudo-Lösungen. Es stellt sich jedoch heraus, dass die allen physikalischen Randbedingungen genügenden Lösungen lediglich einen Minimierungsfehler in der Größenordnung von  $10^{-4}$  haben und damit zu den Pseudo-Lösungen gehören. Wiederum sind Lösungen mit schwachem Confinement für den Fermion-Propagator bevorzugt. Es gelingt zwar eine Lösung zu finden, in der beide Propagatoren starkes Confinement zeigen, diese hat jedoch nur noch einen Minimierungsfehler von  $10^{-2}$ . Diese Ergebnisse unterstreichen nochmals, dass die Einbeziehung von Fermionen die Lösbarkeit des SKG-Systems stark verschlechtert.

Im Verlauf dieser Arbeit konnte weitere Erfahrungen mit dem Lösungsverhalten des SKG-Systems gemacht werden. Wir haben in den bisher diskutierten Rechnungen stets nur Mandelstam-symmetrische Parameter für den  $\Gamma_4$ -Vertex genutzt. Fordert man vollständig symmetrische Parameter, ändert sich das Lösungsverhalten des SKG-Systems nicht wesentlich. Wie oben diskutiert, erhält man keine numerischen Lösungen für das unmodifizierte SKG-System. Dagegen sind modifizierte Systeme numerisch lösbar. Da sich qualitativ am Lösungsverhalten nichts ändert, verzichten wir auf eine weitere Diskussion. Genau dieses Verhalten des SKG-System ergibt sich auch, wenn man sich auf einen rein perturbativen  $\Gamma_4$ -Vertex beschränkt. Man kann daher feststellen, dass die Betrachtung des nicht-perturbativ erweiterten  $\Gamma_4$ -Vertex die grundsätzlichen Probleme bei der Bestimmung von numerischen Lösungen für die resummierten DSG nicht lösen konnte.

#### 9.6.5 Zusammenfassung

Die durchgeführten numerischen Rechnungen zeigen, dass das in dieser Arbeit hergeleitete vollständige System von SKG für den Approximationsgrad  $r = 1$  unter den physikalischen Bedingungen für die Parameter der erweiterten Ansätze nicht lösbar ist. Betrachtet man die rein gluonische Theorie, findet man jedoch schon bei der Ersetzung einer Gleichung numerische Lösungen. Daraus darf man schließen, die hier hergeleiteten SKG sich sozusagen *in der Nähe* eines lösbaren Systems befinden.

Sobald man auch Fermionen zulässt, erhält man keine numerischen Lösungen mehr. Dabei ist es unerheblich, ob man massive oder chirale Fermionen betrachtet. Anscheinend hat die Strom-Masse der Fermionen keinen wesentlichen Einfluss auf die Lösbarkeit des SKG-Systems. Viel entscheidender ist

---

<sup>19</sup>Fermionen kommen stets paarweise in Generationen vor. Der Fall wird durch die empirischen Daten ausgeschlossen und würde unter anderem zur Verletzung der Anomaliefreiheit führen.

nach den numerischen Ergebnissen die reine Anzahl der Fermionen. Dies gilt in gleicher Weise auch für die betrachteten numerischen Pseudo-Lösungen, deren Qualität mit der Zahl der Fermionen abnimmt. Dies muss man als starken Hinweis darauf werten, dass durch die fermionischen Terme in dem SKG-System unvereinbare Terme produziert werden. Um dieses Problem zu beheben, muss man sehr wahrscheinlich die erweiterten Ansätze modifizieren. Wir gehen auf diese Fragestellung im folgenden Kapitel weiter ein.

Schließlich kann man die hier erhaltenen Lösungen mit denen in [Dri 97] und [Kuh 97] bestimmten vergleichen. Wegen den in dieser Arbeit vorgenommenen technischen Verbesserungen bei der Formulierung der DSG und den modifizierten erweiterten Ansätzen ist dieser Vergleich nicht in direkter Weise möglich. Zusätzlich sind die Ergebnisse in [Dri 97] und [Kuh 97] für eine linear transformierte Form der Parameter angegeben, die für die dort hergeleitete Form der DSG spezifisch ist. Außerdem fehlen insbesondere Angaben über die Größe der numerischen Fehler für den jeweiligen Parametersatz. Wir können dennoch feststellen, dass wir in der gluonischen Theorie qualitativ ähnliche Ergebnisse wie in [Dri 97] erhalten haben. Für die Lösungen mit Fermionen aus [Dri 97] kann man jedoch folgern, dass in beiden betrachteten Fällen der Fermion-Propagator die damals nicht betrachteten OSB verletzt. Dies gilt ebenso für die Lösungen mit massiven Quarks, die in [Kuh 97] hergeleitet wurden. Insofern widersprechen die hier gefundenen Ergebnisse den damaligen Resultaten nicht. Derartige Lösungen konnten auch für das in dieser Arbeit betrachtete System gefunden werden. Wir präsentieren sie jedoch wegen ihres unphysikalischen Charakters nicht.

# Kapitel 10

## Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit konnten wir für die Renormierung des nicht-perturbativ erweiterten Ansatzes eine eindeutige Vorschrift angeben. Daraus wurde ein Verfahren zur Konstruktion der SKG aus den quasiperturbativen Termen nullter Ordnung abgeleitet. Damit konnte die in den bisherigen Arbeiten zum erweiterten Ansatz nicht eindeutig beantwortete Frage, wie Terme mit nicht mindestens einer ganzen Potenz von  $\Lambda$  hinsichtlich der SKG zu behandeln sind, gelöst werden.

Mit der Formulierung einer in allen Mandelstam-Kanälen crossing-symmetrischen BSG für den 4-Gluon-Vertex wurde eine Gleichung gefunden, die die entsprechende DSG ersetzen kann und eine nichtlineare Behandlung des 4-Gluon-Vertex im erweiterten Ansatz schon auf 1-Schleifen-Niveau erlaubt. Zudem hat diese BSG den Vorteil, keine tadpole-artigen Terme zu erzeugen, so dass anders als bei der DSG des 3-Gluon-Vertex keine triviale Symmetrisierung vorgenommen werden muss.

Die Berechnungen der DSG und BSG konnten erstmals für die QCD für allgemeinen Approximationsgrad  $r$  durchgeführt werden. Die BS-resummierte Form der 3-Punkt-DSG trägt den Symmetrien der nicht-perturbativ erweiterten Feynman-Regeln besser Rechnung und erlaubt eine verbesserte Bestimmung der quasiperturbativen Terme schon für einen niedrigen Approximationsgrad.

Die Bewegungsgleichungskondensate (BGK) der Propagatoren konnten erstmals auf 2-Schleifen-Niveau berechnet und damit ohne Rückgriff auf empirische oder semi-empirische Daten ausgewertet werden. Zusätzlich erfolgte erstmals die Formulierung und Berechnung der partiellen BGK auf 2-Schleifen-Niveau.

Die SKG der QCD wurden erstmals für allgemeinen Approximationsgrad  $r$  formuliert und die daraus resultierenden Nebenbedingungen abgeleitet. Dabei konnten wir als ein Resultat dieser Arbeit zeigen, dass durch den betrachteten Ansatz die vollständige Symmetrie der Parameter des 3-Gluon-Vertex erzwungen wird. Für den 4-Gluon-Vertex konnten wir zeigen, dass dieser mit Mandelstam-symmetrischen Parametern selbstkonsistenzfähig ist. Das Fehlen von partiell antisymmetrischen Termen im Ansatz führt zu erfüllbaren Nebenbedingungen. Darüber hinaus konnten aus den BGK zusätzliche SKG gewonnen werden, die die sogenannte *Unterbestimmtheit* des SKG-Systems, wenn man es

als LGS betrachtet, in systematischer Weise kompensieren können.

Weiterhin wurden die physikalischen Randbedingungen für die Lösungen des SKG-Systems untersucht. Dabei wurden erstmals auch die OSB für die Propagatoren untersucht. Für den Gluon-Propagator konnten bei allgemeinen Approximationsgrad  $r$  Bedingungen für die Reflexionspositivität angegeben werden, wohingegen dies beim Fermion-Propagator nur für Approximationsgrad  $r = 1$  durchgeführt wurde.

Abschließend haben wir nach numerischen Lösungen für die SKG gesucht. Diese Suche wurde für die QCD erstmals gleichzeitig bezüglich aller Parameter des erweiterten Ansatzes durchgeführt.

Wie die Analyse des rein gluonischen SKG-Systems zeigt, ist das vollständige SKG-System aus den DSG numerisch nicht lösbar. Das Entfernen einzelner, ausgewählter Gleichungen erlaubt jedoch numerische Lösungen zu erhalten. Die Lösungen der gluonischen SKG zeigen konsistent, dass zwar die Bedingungen an Mandelstam-symmetrische  $\Gamma_4$ -Vertex-Parameter erfüllbar sind, jedoch die vollständige Symmetrie der  $\Gamma_3$ -Parameter weitaus schlechter realisiert werden kann. Dies ist ein Hinweis darauf, dass der Ansatz für den  $\Gamma_3$ -Vertex zu stark eingeschränkt gewählt war.

Die Einbeziehung von Fermionen kann dieses Bild nicht verbessern. Es gelingt wiederum nicht, numerische Lösungen für die von uns betrachteten SKG-Systeme zu finden. Die Fermionen sind also nicht geeignet, die Probleme der rein gluonischen Theorie zu beheben. Darüber hinaus muss man feststellen, dass es besonders schwer ist, physikalisch sinnvolle Fermion-Propagatoren zu erhalten. Neben der Tendenz der SKG, tachyonische Zustände zu bevorzugen, macht auch das gewünschte und physikalisch sinnvolle starke Confinement der Fermionen Probleme. Schon bei zwei Fermionen bildet in der Regel mindestens eines lediglich schwaches Confinement aus. Auch dies kann man als starken Hinweis darauf werten, dass der betrachtete Ansatz die physikalische Situation nicht hinreichend gut beschreibt.

Ein weiteres wesentliches Problem bei der Identifikation der den physikalischen Randbedingungen genügenden Lösungen sind die Osterwalder-Schrader-Bedingungen. Wie in Kapitel 9 festgestellt, sind die Ansätze für die Fermion-Propagatoren und damit auch die für die  $\bar{\Gamma}_3$ -Vertizes nicht so formuliert, dass eine einfache Überprüfbarkeit der OSB gewährleistet ist.

Da die Gültigkeit der OSB für die Beschreibung physikalischer Zustände in der euklidischen Formulierung der QCD notwendig ist, sind an dieser Stelle weitere Untersuchungen von Nöten. Insbesondere ist zu untersuchen, welche Einschränkungen aus den OSB für die Wechselwirkungsvertizes folgen. Eine Möglichkeit wäre an dieser Stelle, dass die Vertizes über den ganzen Impulsbereich das gleiche Vorzeichen wie ihre perturbativen Grenzwerte haben müssen. Für diesen Fall sind von den in Anhang C vorgestellten Lösungen einige als unphysikalisch zu identifizieren. Die aus den OSB folgenden Einschränkungen sollten dann zu einer Neuformulierung der Ansätze genutzt werden.

Zur Einbeziehung der OSB ist insbesondere eine Modifikation der fermionischen Vertizes nötig. Nach den Erfahrungen dieser Arbeit sollte man den Ansatz für den Fermion-Propagator dahingehend modifizieren, dass er neben

der perturbativen Struktur  $\frac{1}{\not{p} + m_f}$  mit einer skalaren Funktion in  $p^2$  erweitert wird. Damit gelangen wir zum folgenden modifizierten Ansatz für den Fermion-Propagator.

$$S_{i,j}^{r,f;mod}(p) = \delta_{ij} \frac{1}{\not{p} + m_f} \frac{\prod_{s=0}^r (p^2 + \kappa_{r,s}^{(f)} \Lambda^2)}{\prod_{s=0}^r (p^2 + \bar{\kappa}_{r,s}^{(f)} \Lambda^2)} \quad (10.1)$$

Es bleibt zu klären, ob die matrixwertige Polstelle auf ihrem perturbativen Wert bleibt oder ob auch hier nicht-perturbative Korrekturen vorgenommen werden müssen. Außerdem muss für eine selbstkonsistente Formulierung ein entsprechend modifizierter Ansatz für den Fermion-Gluon-Vertex gefunden werden.

Eine weitere wesentliche Modifikation betrifft den  $\Gamma_3$ -Vertex. Wir haben, wie oben erwähnt, für das rein gluonische System starke Indizien zusammengetragen, dass sich schon dort die erweiterten Ansätze nicht selbstkonsistent reproduzieren. Wie in Kapitel 8 gezeigt, müssen die Parameter des in dieser Arbeit betrachteten Ansatzes für den  $\Gamma_3$ -Vertex vollständig symmetrisch sein, um die DSG erfüllen zu können. Die starke Verletzung der daraus erhaltenen Nebenbedingung in den numerischen Ergebnissen ist ein Hinweis darauf, dass der Ansatz für den  $\Gamma_3$ -Vertex erweitert werden sollte. Da alternative Lorentz-Tensoren im transversalen Sektor nicht zur Verfügung stehen,<sup>1</sup> muss man eine alternative Farbstruktur wählen. Die Darstellungstheorie der  $SU(3)$  legt dazu die symmetrischen  $d_{abc}$ -Tensoren nahe. Dann erweitert sich der Ansatz für den  $\Gamma_3$ -Vertex in der folgenden Weise

$$\begin{aligned} \Gamma_3 &= if_{a_1 a_2 a_3} \Pi_3^{-1} \sum_{k_1 k_2 k_3} ((p_1)^2)^{k_1} ((p_2)^2)^{k_2} ((p_3)^2)^{k_3} \Lambda^{6r-2 \sum k_i} \\ &\quad \left[ C_{k_1 k_2; k_3}^r \delta^{\mu_1 \mu_2} (p_1 - p_2)^{\mu_3} + C_{k_2 k_3; k_1}^r \delta^{\mu_2 \mu_3} (p_2 - p_3)^{\mu_1} \right. \\ &\quad \left. + C_{k_3 k_1; k_2}^r \delta^{\mu_3 \mu_1} (p_3 - p_1)^{\mu_2} \right] \\ &\quad + d_{a_1 a_2 a_3} \Pi_3^{-1} \sum_{k_1 k_2 k_3} ((p_1)^2)^{k_1} ((p_2)^2)^{k_2} ((p_3)^2)^{k_3} \Lambda^{6r-2 \sum k_i} \\ &\quad \left[ B_{k_1 k_2; k_3}^r \delta^{\mu_1 \mu_2} (p_1 - p_2)^{\mu_3} + B_{k_2 k_3; k_1}^r \delta^{\mu_2 \mu_3} (p_2 - p_3)^{\mu_1} \right. \\ &\quad \left. + B_{k_3 k_1; k_2}^r \delta^{\mu_3 \mu_1} (p_3 - p_1)^{\mu_2} \right] \end{aligned} \quad (10.2)$$

Dabei sind die neuen Parameter  $B_{ab;c}^r$  partiell antisymmetrisch.

$$B_{ab;c}^r = -B_{ba;c}^r \quad (10.3)$$

Dies ist zugleich die einzige Möglichkeit, ohne divergenzerhöhende Tensorstrukturen einen erweiterten Ansatz im transversalen Sektor zu formulieren. Wegen der partiellen Antisymmetrie der  $B_{ab;c}^r$  verschwinden viele davon abhängige divergente Anteile identisch, wie mit Beispielrechnungen in Anhang B.6 bewiesen

<sup>1</sup>In [DKS 99] wird zusätzlich auch die Tensorstruktur  $(p_1 - p_2)^{\mu_3} (p_2 - p_3)^{\mu_1} (p_3 - p_1)^{\mu_2}$  betrachtet. Diese erhöht jedoch in Schleifenintegralen nach einer PBZ den Divergenzgrad und kann daher ausgeschlossen werden.

wird. Daher kann der erweiterte Ansatz für den  $\Gamma_3$ -Vertex sinnvoll nur mit einem Ansatz für den  $\Gamma_4$ -Vertex betrachtet werden, der ebenfalls partiell antisymmetrische Parameter zulässt.

Für weitere Untersuchungen über den nicht-perturbativ erweiterten Ansatz bieten sich in der QCD mehrere Problemstellungen an. Als erste ist hier die Untersuchung der OSB für das gekoppelte System der Green'schen Funktionen zu nennen. Hieraus wären dann Bedingungen für die erweiterten Ansätze abzuleiten, die die Identifikation physikalischer Lösungen des SKG-Systems erlauben. In diesem Zusammenhang sollte auch der modifizierte Fermion-Propagator (10.1) betrachtet werden. Dieser könnte eine einfachere Untersuchung der OSB auch im fermionischen Sektor zulassen. Eine weitere wichtige Fragestellung ist, welche Konsequenzen die Erweiterung des 3-Gluon-Vertex und die Einbeziehung von partiell antisymmetrischen Termen für den 4-Gluon-Vertex haben und ob so physikalische Lösungen für die SKG bei Approximationsgrad  $r = 1$  erhalten werden können. Zuletzt ist die Bestimmung der Bindungspole von Green'schen Funktionen wie z.B. des 4-Fermion-Vertex zu nennen. Hier wäre zu überprüfen, ob mit den Modifikationen des erweiterten Ansatzes und den selbstkonsistent bestimmten Parameterwerten Vorhersagen für die Massen von z.B. leichten Mesonen wie  $\rho$ ,  $\pi^0$  und  $\pi^\pm$  gemacht werden können, die mit den empirischen Daten übereinstimmen .

# Anhang A

## Mathematischer Anhang

### A.1 Variablenzahl

Für die Programmierung ist die Zahl der unabhängigen Variablen, die sich aus den Parametern des erweiterten Ansatzes ergibt, von großem Interesse. Zudem kann man aus den vorgestellten Formeln unmittelbar eine Parametrisierung ablesen.

Für die Propagator-Parameter ist unmittelbar klar, dass sich jeweils

$$n_p = 2r + 1 \quad (\text{A.1})$$

Variablen ergeben. (Bei  $N_f$  Fermionen sind das also insgesamt  $(N_f + 1)(2r + 1)$  Parameter aus den Propagatoren.) Dazu kommt noch je ein multiplikativer Faktor für den Gluon- und Geist-Propagator.

Die  $\Gamma_3$ -Vertexparameter sind in den vorderen beiden Indizes symmetrisch, daher gibt es insgesamt

$$n_3 = \frac{1}{2}(r + 1)^2(r + 2) \quad (\text{A.2})$$

Parameter. Da die Parameter des  $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex die gleiche Art der Symmetrie aufweisen (die Parameter sind in den hinteren beiden Indizes symmetrisch), gilt dieses Ergebnis auch für sie. Setzte man vollständig symmetrische Parameter für den  $\Gamma_3$ -Vertex an – was als ein Ergebnis dieser Arbeit aus den SKG folgt –, erhält man mit Standardformeln der Kombinatorik

$$\begin{aligned} n'_3 &= \binom{r + 3}{3} \\ &= \frac{1}{6}(r + 1)(r + 2)(r + 3) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Für die Mandelstam-symmetrischen Parameter des  $\Gamma_4$ -Vertex gelten die folgenden Beziehungen.

$$X_{ab;cd} = X_{ba;cd} = X_{ab;dc} = X_{cd;ab} \quad (\text{A.4})$$

Damit ergibt sich für die Zahl der Parameter das folgende.

$$n_4 = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^i \left[ \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=0}^k (1) + \sum_{l=0}^j (1) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^i \left( \frac{1}{2} i(i+1) + j + 1 \right) \\
&= \sum_{i=0}^r \frac{1}{2} (i+1) [i(i+1) + i + 2] \\
&= \sum_{s=1}^{r+1} \frac{1}{2} s(s^2 + 1) \\
&= \frac{1}{8} (r+1)(r+2)[(r+1)(r+2) + 2] \tag{A.5}
\end{aligned}$$

Für vollständig symmetrische Parameter folgt das Ergebnis aus der gleichen Standardformel wie in (A.3).

$$\begin{aligned}
n'_4 &= \binom{r+4}{4} \\
&= \frac{1}{24} (r+1)(r+2)(r+3)(r+4) \tag{A.6}
\end{aligned}$$

### A.1.1 Potenzsummen

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1) \tag{A.7}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \tag{A.8}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 \tag{A.9}$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \tag{A.10}$$

## A.2 Clifford-Algebra im Euklidischen

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = -2\delta^{ab} \cdot \mathbf{1} \tag{A.11}$$

$$\gamma^x \gamma^x = -D \cdot \mathbf{1} \tag{A.12}$$

$$\gamma^x \gamma^a \gamma^x = (D-2)\gamma^a \tag{A.13}$$

$$\gamma^x \gamma^a \gamma^b \gamma^x = -(D-4)\gamma^a \gamma^b + 4\delta^{ab} \cdot \mathbf{1} \tag{A.14}$$

$$\gamma^x \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^x = (D-4)\gamma^a \gamma^b \gamma^c + 2\gamma^c \gamma^b \gamma^a \tag{A.15}$$

$$tr\{\mathbf{1}\} = 4 \tag{A.16}$$

$$tr\{\gamma^a \gamma^b\} = -4\delta^{ab} \tag{A.17}$$

$$tr\{\gamma^a \gamma^b\} = -4\delta^{ab} \tag{A.18}$$

$$tr\{\gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d\} = 4(\delta^{ab} \delta^{cd} - \delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc}) \tag{A.19}$$

### A.3 Die SU(3)

Wir geben im folgenden die für diese Arbeit wesentlichen Ergebnisse aus der Darstellungstheorie der SU(3) [PT 80, LP 96b, Dri 97] an.

#### A.3.1 Adjungierte Darstellung

Für die adjungierte Darstellung der SU(3) sind die folgenden Formeln wichtig [PT 80, LP 96b, Dri 97]. Zusammen mit mit Definitionen aus Abschnitt A.3.2 geben sie alle in dieser Arbeit benötigten Ergebnisse der Darstellungstheorie wieder.

$$(T^a)_{bc} := -if_{abc} \quad (\text{A.20})$$

$$d_{abc} = d_{acb} \quad (\text{A.21})$$

$$d_{abb} = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$d_{ab,cd} := d_{abn}d_{cdn} \quad (\text{A.23})$$

$$S^{(4)} = 3\{d_{ab,cd} + d_{ac,bd} + d_{ad,bc}\} \quad (\text{A.24})$$

$$f_{axy}d_{bxy} = 0 \quad (\text{A.25})$$

$$0 = f_{abn}d_{cdn} + f_{cbn}d_{adn} + f_{dbn}d_{acn} \quad (\text{A.26})$$

$$[T^a, T^b] = if_{abc}T^c \quad (\text{A.27})$$

$$\{T^a, T^b\} = \frac{1}{N_C}\delta_{ab} + d^{abc}T^c \quad (\text{A.28})$$

$$T_{ij}^a T_{jk}^b = \frac{1}{2N_C}\delta^{ab}\delta_{ik} + \frac{1}{2}d^{abc}T_{ik}^c + \frac{i}{2}f_{abc}T_{ik}^c \quad (\text{A.29})$$

$$\text{Tr}(T^a) = 0 \quad (\text{A.30})$$

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab} \quad (\text{A.31})$$

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c) = \frac{1}{4}d_{abc} + \frac{i}{4}f_{abc} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(T^a T^b T^c T^d) &= \frac{1}{4N_C}\delta^{ab}\delta^{cd} + \frac{1}{8}(d_{ab,cd} - f_{ab,cd}) \\ &\quad + \frac{i}{8}(d_{abx}f_{cdx} + f_{abx}d_{cdx}) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

$$= \frac{3}{4}S^{(4)} + \frac{N_C}{6}C^{(5)} + \frac{N_C}{3}C^{(6)} \quad (\text{A.34})$$

$$T_{ij}^a T_{jk}^a = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C}\delta_{ik} \quad (\text{A.35})$$

$$T_{ij}^a T_{jk}^b f_{abc} = i\frac{N_C}{2}T_{ik}^c \quad (\text{A.36})$$

#### A.3.2 Fundamentale Darstellung

Für die Gell-Mann-Matrizen  $t^a$  gilt

$$t^a = \frac{1}{2}\lambda^a \quad , \quad (\text{A.37})$$

wobei die  $\lambda^a$  die Generatoren der  $SU(3)$  sind und die folgende Kommutatorrelation die Strukturkonstanten der  $SU(3)$  definiert.

$$[t^a, t^b] = if_{abc}t^c \quad (\text{A.38})$$

$$f_{abc} = -f_{acb} \quad (\text{A.39})$$

$$f_{aab} = 0 \quad (\text{A.40})$$

$$f_{axy}f_{bxy} = N_C\delta_{ab} \quad (\text{A.41})$$

$$f_{axy}f_{byz}f_{czx} = \frac{N_C}{2}f_{abc} \quad (\text{A.42})$$

$$f_{ab,cd} := f_{abn}f_{cdn} \quad (\text{A.43})$$

$$d_{ab,cd} := d_{abn}d_{cdn} \quad (\text{A.44})$$

$$C_{abcd}^{(1)} := \delta^{ab}\delta^{cd} \quad (\text{A.45})$$

$$C_{abcd}^{(2)} := \delta^{ac}\delta^{bd} \quad (\text{A.46})$$

$$C_{abcd}^{(3)} := \delta^{ad}\delta^{bc} \quad (\text{A.47})$$

$$C_{abcd}^{(4)} := f_{ab,cd} \quad (\text{A.48})$$

$$C_{abcd}^{(5)} := f_{ac,db} \quad (\text{A.49})$$

$$C_{abcd}^{(6)} := f_{ad,bc} \quad (\text{A.50})$$

$$S_{abcd}^{(4)} := C^{(1)} + C^{(2)} + C^{(3)} \quad (\text{A.51})$$

$$f_{am,bn}f_{cn,dm} = \frac{3}{4}S^{(4)} + \frac{N_C}{6}C^{(5)} + \frac{N_C}{3}C^{(6)} \quad (\text{A.52})$$

$$C^{(i-j)} = C^{(i)} - C^{(j)} \quad (\text{A.53})$$

$$0 = C^{(4)} + C^{(5)} + C^{(6)} \quad (\text{A.54})$$

$$f_{ab,cd} = \frac{2}{3}(C^{(2)} - C^{(3)}) + d_{ac,bd} - d_{bc,ad} \quad (\text{A.55})$$

$$d_{ax,bx} = \frac{5}{3}\delta_{ab} \quad (\text{A.56})$$

$$d_{axy}f_{byz}f_{czx} = \frac{3}{2}d_{abc} \quad (\text{A.57})$$

$$d_{axy}d_{byz}f_{czx} = -\frac{5}{6}f_{abc} \quad (\text{A.58})$$

$$d_{axy}d_{byz}d_{czx} = -\frac{1}{2}d_{abc} \quad (\text{A.59})$$

$$(\text{A.60})$$

### Multiplikationstabelle I

In Tabelle A.1 geben wir die Ergebnisse für die Kontraktionen der Farbtensoren in der  $\Gamma_4$ -BSG an. Analoge Tabellen finden sich auch bei [Dri 93, Sch 03].

| $C_{abyx}^{(i)} C_{xycd}^{(j)}$ | $C^{(1)}$   | $C^{(2)}$   | $C^{(3)}$   | $C^{(4)}$            | $C^{(5)}$   | $C^{(6)}$   | $S^{(4)}$                    | $C^{(5-6)}$                                      |
|---------------------------------|-------------|-------------|-------------|----------------------|---|---|------------------------------|--|
| $C^{(1)}$                       | $8C^{(1)}$  | $C^{(1)}$   | $C^{(1)}$   | 0                    | $-3C^{(1)}$   | $3C^{(1)}$  | $10C^{(1)}$                  | $-6C^{(1)}$                                      |
| $C^{(2)}$                       | $C^{(1)}$   | $C^{(2)}$   | $C^{(3)}$   | $-C^{(4)}$           | $-C^{(6)}$  | $-C^{(5)}$  | $S^{(4)}$                    | $C^{(5-6)}$                                      |
| $C^{(3)}$                       | $C^{(1)}$   | $C^{(3)}$   | $C^{(2)}$   | $C^{(4)}$            | $C^{(5)}$   | $C^{(6)}$   | $S^{(4)}$                    | $C^{(5-6)}$                                      |
| $C^{(4)}$                       | 0           | $-C^{(4)}$  | $C^{(4)}$   | $-3C^{(4)}$          | $\frac{3}{2}C^{(4)}$  | $\frac{3}{2}C^{(4)}$  | 0                            | 0  |
| $C^{(5)}$                       | $-3C^{(1)}$ | $-C^{(6)}$  | $C^{(5)}$   | $\frac{3}{2}C^{(4)}$ | $\frac{3}{4}S^{(4)} - \frac{3}{4}C^{(4)}$<br>$-\frac{1}{4}C^{(5-6)}$  | $-\frac{3}{4}S^{(4)} - \frac{3}{4}C^{(4)}$<br>$+\frac{1}{4}C^{(5-6)}$ | $-3C^{(1)}$<br>$+C^{(5-6)}$  | $\frac{3}{2}S^{(4)}$<br>$-\frac{1}{2}C^{(5-6)}$  |
| $C^{(6)}$                       | $3C^{(1)}$  | $-C^{(5)}$  | $C^{(6)}$   | $\frac{3}{2}C^{(4)}$ | $-\frac{3}{4}S^{(4)} - \frac{3}{4}C^{(4)}$<br>$+\frac{1}{4}C^{(5-6)}$ | $\frac{3}{4}S^{(4)} - \frac{3}{4}C^{(4)}$<br>$-\frac{1}{4}C^{(5-6)}$  | $3C^{(1)}$<br>$-C^{(5-6)}$   | $-\frac{3}{2}S^{(4)}$<br>$+\frac{1}{2}C^{(5-6)}$ |
| $S^{(4)}$                       | $10C^{(1)}$ | $S^{(4)}$   | $S^{(4)}$   | 0                    | $-3S^{(1)}$<br>$+C^{(5-6)}$   | $3S^{(1)}$<br>$-C^{(5-6)}$  | $10C^{(1)}$<br>$+2S^{(4)}$   | $-6C^{(1)}$<br>$+2C^{(5-6)}$                     |
| $C^{(5-6)}$                     | $-6C^{(1)}$ | $C^{(5-6)}$ | $C^{(5-6)}$ | 0                    | $\frac{3}{2}S^{(4)}$<br>$-\frac{1}{2}C^{(5-6)}$                       | $-\frac{3}{2}S^{(4)}$<br>$+\frac{1}{2}C^{(5-6)}$                      | $-6C^{(1)}$<br>$+2C^{(5-6)}$ | $3S^{(4)}$<br>$-C^{(5-6)}$                       |

Tabelle A.1: Multiplikationstabelle I

**Multiplikationstabelle II**

In Tabelle A.2 notieren wir die Kontraktionen der Farbtensoren, wie sie in der  $\Gamma_3$ -DSG vorkommen sowie die Kontraktion der Tensoren mit  $\delta_{xy}$ .

| $C_{abyx}^{(i)} F_{xy}^{(j)}$ | $f_{xyc}$            | $\delta_{xy}$     |
|-------------------------------|----------------------|-------------------|
| $C^{(1)}$                     | 0                    | $8\delta_{ab}$    |
| $C^{(2)}$                     | $-f_{abc}$           | $\delta_{ab}$     |
| $C^{(3)}$                     | $f_{abc}$            | $\delta_{ab}$     |
| $S^{(4)}$                     | 0                    | $10\delta_{ab}$   |
| $C^{(4)}$                     | $-3f_{abc}$          | 0                 |
| $C^{(5)}$                     | $\frac{3}{2}f_{abc}$ | $-N_C\delta_{ab}$ |
| $C^{(6)}$                     | $\frac{3}{2}f_{abc}$ | $N_C\delta_{ab}$  |

Tabelle A.2: Multiplikationstabelle II

**Permutationen**

In Tabelle A.3 sind die Permutationen der Farbtensoren unter ausgewählten Vertauschungen, insbesondere denen im  $u$ - und  $t$ -Kanal notiert.

| $abcd$           | $cabd$           | $dacb$           | $bacd$           |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| $C_{abcd}^{(i)}$ | $C_{abcd}^{(j)}$ | $C_{abcd}^{(k)}$ | $C_{abcd}^{(l)}$ |
| $C^{(1)}$        | $C^{(2)}$        | $C^{(3)}$        | $C^{(1)}$        |
| $C^{(2)}$        | $C^{(3)}$        | $C^{(1)}$        | $C^{(3)}$        |
| $C^{(3)}$        | $C^{(1)}$        | $C^{(2)}$        | $C^{(2)}$        |
| $C^{(4)}$        | $C^{(5)}$        | $C^{(6)}$        | $-C^{(4)}$       |
| $C^{(5)}$        | $C^{(6)}$        | $C^{(4)}$        | $-C^{(6)}$       |
| $C^{(6)}$        | $C^{(4)}$        | $C^{(5)}$        | $-C^{(5)}$       |
| $C^{(5-6)}$      | $C^{(6-4)}$      | $C^{(4-5)}$      | $-C^{(5-6)}$     |
| $S^{(4)}$        | $S^{(4)}$        | $S^{(4)}$        | $S^{(4)}$        |

Tabelle A.3: Permutationen der Farbtensoren

# Anhang B

## Impulsintegrale

### B.1 Tensorstrukturen

$$t^{12}(q) := \delta^{12} - \frac{q^{(1)}q^{(2)}}{q^2} \quad (\text{B.1})$$

$$t^{1x}(q-p)q^x := t^{1x}(q-p)p^x \quad (\text{B.2})$$

$$l^{12}(q) := \frac{q^{(1)}q^{(2)}}{q^2} \quad (\text{B.3})$$

$$\delta^{12,34} := \delta^{12}\delta^{34} \quad (\text{B.4})$$

$$(\Gamma_1)^{1234} := \delta^{12,34} \quad (\text{B.5})$$

$$(\Gamma_2)^{1234} := \delta^{13,24} \quad (\text{B.6})$$

$$(\Gamma_3)^{1234} := \delta^{14,23} \quad (\text{B.7})$$

$$(\Gamma_4)^{1234} := \Gamma_3 - \Gamma_2 \quad (\text{B.8})$$

$$(\Gamma_5)^{1234} := \Gamma_1 - \Gamma_3 \quad (\text{B.9})$$

$$(\Gamma_6)^{1234} := \Gamma_2 - \Gamma_1 \quad (\text{B.10})$$

$$(S_4)^{1234} := \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 \quad (\text{B.11})$$

$$0 = \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6 \quad (\text{B.12})$$

### B.2 Abkürzungen

Zur kompakten Notation der Ergebnisse in dieser Arbeit nutzen wir die folgenden Abkürzungen.

#### B.2.1 Kombinationen der Propagator-Parameter

Auf punktierten Linien entwickeln sich sogenannte Residuenfaktoren. Wir kürzen sie mit  $\Delta$  ab. Sofern es sich um mit  $\Lambda$  skalierte Gleichungen handelt, wird das hier noch auftauchende  $\Lambda$  entfernt.

$$\Delta^r(u, t) := \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} \Lambda^2(\hat{u}_{r,s} - \hat{u}_{r,t}) \prod_{\bar{s}=1}^r \Lambda^2(u_{r,s} - \hat{u}_{r,t}), \quad (\text{B.13})$$

$$\Delta^r(\kappa^{(f)}, t) := \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (\hat{\kappa}_{r,s}^{(f)} - \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)}) \prod_{\bar{s}=1}^r (\kappa_{r,s}^{(f)} - \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)}). \quad (\text{B.14})$$

Wir nutzen die symmetrischen Funktionen.

$$\sigma_1 := \sum_{s=1}^r u_{r,s} \quad (\text{B.15})$$

$$\sigma_2 := \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^r u_{r,i} u_{r,j} \quad (\text{B.16})$$

$$\sigma_n := \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_n}}^r u_{r,i_1} u_{r,i_2} \cdots u_{r,i_n} \quad (\text{B.17})$$

$$\varsigma_1 := \sum_{i=1}^{r+1} \hat{u}_{r,i} \quad (\text{B.18})$$

$$\varsigma_n := \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n=1 \\ i_1 < \dots < i_n}}^{r+1} \hat{u}_{r,i_1} \cdots \hat{u}_{r,i_n} \quad (\text{B.19})$$

$$\pi_1^f := \sum_{s=1}^r \kappa_{r,s}^f \quad (\text{B.20})$$

$$\pi_n^f := \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_n}}^r \kappa_{r,i_1}^f \cdots \kappa_{r,i_n}^f \quad (\text{B.21})$$

$$\varpi_1^f := \sum_{i=1}^{r+1} \hat{\kappa}_{r,i}^f \quad (\text{B.22})$$

$$\varpi_n^f := \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n=1 \\ i_1 < \dots < i_n}}^{r+1} \hat{\kappa}_{r,i_1}^f \cdots \hat{\kappa}_{r,i_n}^f \quad (\text{B.23})$$

$$\varrho_1^f := \varpi_1^f \quad (\text{B.24})$$

$$\varrho_2^f := \sum_{\substack{t_1 t_2=1 \\ t_1 \leq t_2}}^{r+1} \hat{\kappa}_{t_1}^f \hat{\kappa}_{t_2}^f \quad (\text{B.25})$$

$$\varrho_3^f := \sum_{\substack{t_1 t_2 t_3=1 \\ t_1 \leq t_2 \leq t_3}}^{r+1} \hat{\kappa}_{t_1}^f \hat{\kappa}_{t_2}^f \hat{\kappa}_{t_3}^f \quad (\text{B.26})$$

## B.2.2 $\Sigma$ -Parameter

Wir geben einen Überblick über die in dieser Arbeit verwendeten  $\Sigma$ -Faktoren.

$\Gamma_3$ -Vertex

$$\begin{aligned} \Sigma_S^r(a, b, c) &:= \sum_{t_1 t_2 t_3=1}^{r+1} \sum_{k_1 k_2=0}^r \sum_{l_1 l_2=0}^r \sum_{m_1 k m_2=0}^r [\Delta^r(u, t_1) \Delta^r(u, t_2) \Delta^r(u, t_3)]^{-1} \\ &\quad \times (\Lambda^2)^{9r-(a+b+c)} C_{k_1 k_2; a}^r C_{l_1 l_2; b}^r C_{m_1 m_2; c}^r \\ &\quad \times (-\hat{u}_{r, t_1})^{k_1+l_2} (-\hat{u}_{r, t_2})^{l_1+m_2} (-\hat{u}_{r, t_3})^{m_1+k_2} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_S^{f,r}(a, b, c) &:= \sum_{t_1 t_2 t_3=1}^{r+1} \sum_{n_1 n_2 n_3=0}^r \sum_{n'_1 n'_2 n'_3=0}^r [\Delta^r(\kappa^{(f)}, t_1) \Delta^r(\kappa^{(f)}, t_2) \Delta^r(\kappa^{(f)}, t_3)]^{-1} \\ &\quad \times \bar{C}_{a; n_1 n'_1}^{f,r} \bar{C}_{b; n_2 n'_2}^{f,r} \bar{C}_{c; n_3 n'_3}^{f,r} \\ &\quad \times (-\hat{\kappa}_{r, t_1}^{(f)})^{n_1+n'_2} (-\hat{\kappa}_{r, t_2}^{(f)})^{n_2+n'_3} (-\hat{\kappa}_{r, t_3}^{(f)})^{n_3+n'_1} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

$\bar{\Gamma}_3$ -Vertex

$$\begin{aligned} \Sigma_A^{f,r}(a; b, c) &:= \sum_{t_1 t_2 t_3=1}^{r+1} \sum_{m_1 m_2=0}^r \sum_{n'_1 n_2=0}^r \sum_{k_1 k_2=0}^r [\Delta^r(\kappa^{(f)}, t_1) \Delta^r(u, t_2) \Delta^r(u, t_3)]^{-1} \\ &\quad \times (\Lambda^2)^{2r-a} C_{k_1 k_2; a}^r \bar{C}_{m_1; b n'_1}^{f,r} \bar{C}_{m_2; n_2 c}^{f,r} \\ &\quad \times (-\hat{u}_{r, t_3})^{m_1+k_1} (-\hat{u}_{r, t_2})^{m_2+k_2} (-\hat{\kappa}_{r, t_1}^{(f)})^{n'_1+n_2} \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Es ist offensichtlich, dass  $\Sigma_S^r(a, b, c)$  und  $\bar{\Sigma}_S^{f,r}(a, b, c)$  invariant unter allen Permutationen von  $(a, b, c)$  sind, wohingegen  $\Sigma_A^{f,r}(a, b, c)$  nur unter Vertauschung von  $b$  und  $c$  invariant ist.

$\Gamma_4$ -Vertex

Unabhängig vom Ansatz für den  $\Gamma_4$ -Vertex sind die folgenden  $\Sigma$ -Parameter.

$$\begin{aligned} &\Sigma_{4\Gamma}(a, b, c, d) \\ &:= \sum_{t_1 t_2 t_3 t_4=1}^{r+1} \sum_{k_2 k_3 l_2 l_3 m_2 m_3 n_2 n_3=0}^r \\ &\quad \times \frac{(-\hat{u}_{t_1} \Lambda^2)^{k_2+l_3} (-\hat{u}_{t_2} \Lambda^2)^{l_2+m_3} (-\hat{u}_{t_3} \Lambda^2)^{m_2+n_3} (-\hat{u}_{t_4} \Lambda^2)^{n_2+k_3}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2) \Delta(u, t_3) \Delta(u, t_4)} \\ &\quad \times C_{a, k_2 k_3}^{3,r} C_{b, l_2 l_3}^{3,r} C_{c, m_2 m_3}^{3,r} C_{d, n_2 n_3}^{3,r} (\Lambda^2)^{6r-\sum k_i+l_i+m_i+n_i} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{aligned} &\bar{\Sigma}_{4\bar{\Gamma}}(a, b, c, d) \\ &:= \sum_f \sum_{t_1 t_2 t_3 t_4=1}^{r+1} \sum_{k_2 k_3 l_2 l_3 m_2 m_3 n_2 n_3=0}^r \\ &\quad \times \frac{(-\hat{\kappa}_{t_1} \Lambda^2)^{k_2+l_3} (-\hat{\kappa}_{t_2} \Lambda^2)^{l_2+m_3} (-\hat{\kappa}_{t_3} \Lambda^2)^{m_2+n_3} (-\hat{\kappa}_{t_4} \Lambda^2)^{n_2+k_3}}{\Delta(\kappa, t_1) \Delta(\kappa, t_2) \Delta(\kappa, t_3) \Delta(\kappa, t_4)} \\ &\quad \times \bar{C}_{a, k_2 k_3}^{f,r} \bar{C}_{b, l_2 l_3}^{f,r} \bar{C}_{c, m_2 m_3}^{f,r} \bar{C}_{d, n_2 n_3}^{f,r} (\Lambda)^{6r-\sum k_i+l_i+m_i+n_i} \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Die anderen  $\Sigma$ -Parameter hängen von Ansatz für  $\Gamma_4$  ab. Zunächst definieren wir die  $\Sigma$ -Parameter für vollständig symmetrische Vertex-Parameter. Wir formulieren hier für allgemeine Strukturen  $X$  und  $Y$ ,  $X, Y = (T, D, E)$ ,  $X \neq Y$ .

$$\Sigma_{XX}(a, b; c, d) := \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{k_3 k_4 l_1 l_2=0}^r \frac{(-\hat{u}_{t_1} \Lambda^2)^{k_3+l_2} (-\hat{u}_{t_2} \Lambda^2)^{k_4+l_1}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2)} X_{a,b,k_3 k_4} X_{l_1 l_2 c, d} (\Lambda^2)^{4r - \sum k_i + l_i} \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} & \Sigma_{XY}^{sym}(a, b; c, d) \\ := & \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{k_3 k_4 l_1 l_2=0}^r \frac{(-\hat{u}_{t_1} \Lambda^2)^{k_3+l_2} (-\hat{u}_{t_2} \Lambda^2)^{k_4+l_1}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2)} \\ & (X_{a,b,k_3 k_4} Y_{l_1 l_2 c, d} + Y_{a,b,k_3 k_4} X_{l_1 l_2 c, d}) (\Lambda^2)^{4r - \sum k_i + l_i} \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned} & \Sigma_{X\Gamma}(a, b; c, d) \\ := & \sum_{t_1 t_2 t_3=1}^{r+1} \sum_{k_3 k_4 l_1 l_2 m_1 m_2=0}^r \frac{(-\hat{u}_{t_1} \Lambda^2)^{k_3+m_2} (-\hat{u}_{t_2} \Lambda^2)^{k_4+l_1} (-\hat{u}_{t_3} \Lambda^2)^{l_2+m_1}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2) \Delta(u, t_3)} \\ & X_{a,b,k_3 k_4} C_{m_1 m_2, c}^{3,r} C_{l_1 l_2, d}^{3,r} (\Lambda^2)^{6r - \sum k_i + l_i + m_i} \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Für den Ansatz mit Mandelstam-symmetrischen Parametern bleibt die Struktur der entsprechenden  $\Sigma$ -Faktoren ungeändert. Es müssen lediglich die Kanal-Indizes  $i$  und  $j$ , ( $i, j = (s, t, u)$ ,  $i \neq j$ ), passend verteilt werden.

$$\Sigma_{XX}^{ii}(a, b; c, d) := \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{k_3 k_4 l_1 l_2=0}^r \frac{(-\hat{u}_{t_1} \Lambda^2)^{k_3+l_2} (-\hat{u}_{t_2} \Lambda^2)^{k_4+l_1}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2)} X_{a,b,k_3 k_4}^i X_{l_1 l_2 c, d}^i (\Lambda^2)^{4r - \sum k_i + l_i} \quad (\text{B.35})$$

$$\begin{aligned} & \Sigma_{XX}^{sym ij}(a, b; c, d) \\ := & \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{k_3 k_4 l_1 l_2=0}^r \frac{(-\hat{u}_{t_1} \Lambda^2)^{k_3+l_2} (-\hat{u}_{t_2} \Lambda^2)^{k_4+l_1}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2)} \\ & (X_{a,b,k_3 k_4}^i X_{l_1 l_2 c, d}^j + X_{a,b,k_3 k_4}^j X_{l_1 l_2 c, d}^i) (\Lambda^2)^{4r - \sum k_i + l_i} \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

In der folgenden Gleichung darf auch  $i = j$  gesetzt werden.

$$\begin{aligned} & \Sigma_{sym XY}^{sym ij}(a, b; c, d) \\ := & \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{k_3 k_4 l_1 l_2=0}^r \frac{(-\hat{u}_{t_1} \Lambda^2)^{k_3+l_2} (-\hat{u}_{t_2} \Lambda^2)^{k_4+l_1}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2)} \\ & (X_{a,b,k_3 k_4}^i Y_{l_1 l_2 c, d}^j + Y_{a,b,k_3 k_4}^j X_{l_1 l_2 c, d}^i) (\Lambda^2)^{4r - \sum k_i + l_i} \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

$$\begin{aligned}
& \Sigma_{X\Gamma\Gamma}^i(a, b; c, d) \\
:= & \sum_{t_1 t_2 t_3=1}^{r+1} \sum_{k_3 k_4 l_1 l_2 m_1 m_2=0}^r \frac{(-\hat{u}_{t_1} \Lambda^2)^{k_3+m_2} (-\hat{u}_{t_2} \Lambda^2)^{k_4+l_1} (-\hat{u}_{t_3} \Lambda^2)^{l_2+m_1}}{\Delta(u, t_1) \Delta(u, t_2) \Delta(u, t_3)} \\
& X_{a,b,k_3 k_4}^i C_{m_1 m_2, c}^{3,r} C_{l_1 l_2, d}^{3,r} (\Lambda^2)^{6r - \sum k_i + l_i + m_i} \tag{B.38}
\end{aligned}$$

und

$$\Sigma_{X\Gamma\Gamma}^{sym i}(a, b; c, d) := \Sigma_{X\Gamma\Gamma}^i(a, b; c, d) + \Sigma_{X\Gamma\Gamma}^i(c, d; a, b) \tag{B.39}$$

## B.3 Integrationsformeln

### B.3.1 Dimensionelle Regularisierung

$$D := 4 - 2\epsilon \tag{B.40}$$

$$\bar{d}^D q := \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tag{B.41}$$

Sofern bei divergenten Integralen  $\sim$  verwendet wird, geschieht dies in dem Sinne, dass nur die führende Divergenz in  $\epsilon$  berechnet wird.

$$I \sim \frac{c}{\epsilon^n} := I = \frac{c}{\epsilon^n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^{n-1}}\right) \tag{B.42}$$

Zur Auswertung der Impulsintegral wird die folgende Standardformel verwendet.

$$\int \bar{d}^D q \frac{(q^2)^m}{(q^2 + M^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 + m) \Gamma(n - m - D/2)}{\Gamma(D/2) \Gamma(n)} (M^2)^{n-m-D/2} \tag{B.43}$$

Ist  $f$  eine beliebige nichtsinguläre Funktion in  $q^2$ , gilt:

$$\int \bar{d}^D q q^{\mu_1} \dots q^{\mu_m} f(q^2) = 0 \tag{B.44}$$

für  $m$  ungerade und

$$\int \bar{d}^D q q^{\mu_1} q^{\mu_2} f(q^2) = \frac{\delta^{\mu_1 \mu_2}}{D} \int \bar{d}^D q q^2 f(q^2) \tag{B.45}$$

$$\int \bar{d}^D q q^{\mu_1} q^{\mu_2} q^{\mu_3} q^{\mu_4} f(q^2) = \frac{S_4^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}}{D(D+2)} \int \bar{d}^D q q^2 f(q^2) \tag{B.46}$$

für  $m$  gerade.

Wir nutzen die folgenden Entwicklungen der  $\Gamma$ -Funktion für kleine  $\epsilon > 0$  [Mut 87].

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{B.47}$$

$$\Gamma(-1 + \epsilon) = -\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{B.48}$$

mit der Euler-Konstante [BS+ 95]

$$\gamma_E \approx 0.57722 \tag{B.49}$$

**Feynmanparametrisierung**

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(xA + (1-x)B)^{\alpha+\beta}} \quad (\text{B.50})$$

**B.3.2 Symmetrische Schleifenintegrale**

Durch eine symmetrische Wahl für die Parametrisierung der Schleifenintegrale gelingt eine wesentliche rechen-technische Erleichterung. Diese besteht darin, dass die formal notwendige Verschiebung des Integrationsimpulses nach Ausintegration der Parameterintegrale bei maximal linear divergenten Schleifenintegralen keine Beiträge liefert und so die schon vor der Verschiebung vorhandenen Strukturen reproduziert werden. Bei quadratisch divergenten Integralen lässt sich der Beitrag aus der Impulsverschiebung in einfacher Weise ausrechnen.

**Eine 2-Vertizes-Schleife**

Die symmetrische Parametrisierung lautet hier

$$\vec{a} = \vec{q} - \frac{1}{2}\vec{p} \quad , \quad (\text{B.51})$$

$$\vec{b} = \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{p} \quad . \quad (\text{B.52})$$

Dies führt auf das folgende Schleifenintegral.

$$I_2 = \int \vec{d}^D q \frac{f(q)}{(a^2 + M)^n \cdot (b^2 + N)^n} \quad (\text{B.53})$$

$$= \int_0^1 dx \int \vec{d}^D q \frac{1}{(xa^2 + (1-x)b^2 + N + x(M-N))^{2n}}$$

$$= \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^1 dx \int \vec{d}^D q \frac{f(q)x^{n-1}(1-x)^{n-1}}{(q^2 + \vec{q} \cdot \vec{p}(1-2x) + \frac{1}{4}p^2 + \tilde{M})^{2n}} \quad (\text{B.54})$$

Die Impulsverschiebung ist also

$$\vec{q} \rightarrow \vec{q}' = \vec{q} - \frac{1}{2}\vec{p}(1-2x) \quad . \quad (\text{B.55})$$

Wir betrachten die interessanten Fälle quadratischer, linearer und logarithmischer Divergenz, also machen wir den folgenden Ansatz für  $f(q)$ .

$$f(q) = c_1(q^2)^{2n-1} + c_2(q^2)^{2n-2}\vec{q} \cdot \vec{p} + c_3(q^2)^{2n-2} \quad (\text{B.56})$$

Weiterhin nutzen wir die folgende Abkürzung.

$$\tilde{N} = \frac{1}{4}p^2(1 - (1-2x)^2) + \tilde{M} \quad (\text{B.57})$$

$$= \frac{1}{4}p^2(1 - (1-2x)^2) + x(M-N) + N \quad (\text{B.58})$$

Damit erhalten wir das folgende Ergebnis.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^1 dx \int \bar{d}^D q' \frac{f(q') x^{n-1} (1-x)^{n-1}}{(q'^2 + \tilde{N})^{2n}} \\
&\sim \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} \left\{ c_3 \int \bar{d}^D q \frac{q^{2n-2}}{(q^2 + \tilde{N})^{2n}} \right. \\
&\quad + c_2 \int \bar{d}^D q \frac{(q^2)^{2n-2} \vec{q} \cdot \vec{p} - (q^2)^{2n-2} (\frac{1}{2}(1-2x)p^2)}{(q^2 + \tilde{N})^{2n}} \\
&\quad \left. + c_1 \int \bar{d}^D q \frac{((q^2)^{2n-1} - (q^2)^{2n-2} \vec{q} \cdot \vec{p} (\frac{1}{2}(1-2x) + (q^2)^{2n-2} (\frac{1}{4}(1-2x)^2 p^2))}{(q^2 + \tilde{N})^{2n}} \right\} \\
&\sim \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} \\
&\quad \left\{ c_1 \left[ -\frac{2n\tilde{N}}{\epsilon} + \frac{1}{4\epsilon} (1-2x)^2 p^2 \right] + c_2 \left[ -\frac{1}{2\epsilon} (1-2x)p^2 \right] + c_3 \frac{1}{\epsilon} \right\} \quad (B.59)
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} = 1 \quad (B.60)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} (1-2x) = 0 \quad (B.61)$$

$$\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} x = \frac{1}{2} \quad (B.62)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} (1-2x)^2 \\
&= \frac{1}{4} \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \left( \frac{1}{4} - x^2 \right)^{n-1} 4x^2 \\
&= \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \frac{(-1)^i}{2i+3} \frac{1}{4^n} =: \zeta_n \quad (B.63)
\end{aligned}$$

$$n = 1 : \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx x^2 = \frac{1}{12} = \zeta_1 \quad (B.64)$$

$$n = 2 : 6 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \left( \frac{1}{4} - x^2 \right) x^2 = \frac{1}{20} = \zeta_2 \quad (\text{B.65})$$

$$n = 3 : 30 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \left( \frac{1}{4} - x^2 \right)^2 x^2 = \frac{1}{28} = \zeta_3 \quad (\text{B.66})$$

Damit finden wir für den divergenten Anteil von  $I_2$  das folgende Ergebnis.

$$I_2 \sim \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon} \left\{ c_1 \left[ -n(M+N) - np^2 \left( \frac{1}{2} - 2\zeta_n \right) + \zeta_n p^2 \right] + c_3 \right\} \quad (\text{B.67})$$

### Eine 3-Vertizes-Schleife

Die symmetrische Parametrisierung lautet hier

$$\vec{A} = \vec{q} + \frac{1}{3}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \quad , \quad (\text{B.68})$$

$$\vec{B} = \vec{q} + \frac{1}{3}(\vec{p}_2 - \vec{p}_3) \quad , \quad (\text{B.69})$$

$$\vec{C} = \vec{q} + \frac{1}{3}(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) \quad , \quad (\text{B.70})$$

$$0 = p_1^\sigma + p_2^\sigma + p_3^\sigma \quad . \quad (\text{B.71})$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned} & \int d^D q \frac{f(q)}{(A^2 + M_1)^n (B^2 + M_2)^n (C^2 + M_3)^n} \quad (\text{B.72}) \\ &= \frac{\Gamma(3n)}{\Gamma(n)^3} \int_0^1 dx dy \int d^D q \frac{x^{n-1} (1-x)^{n-1} y^{2n-1} (1-y)^{n-1} f(q)}{(y(xA^2 + (1-x)B^2) + (1-y)C^2 + N)^{3n}} \quad . \end{aligned}$$

Die Impulsverschiebung ist

$$\vec{q} \rightarrow \vec{q}' = \vec{q} - \frac{2}{3}(\vec{p}_3 - \vec{p}_1 - 3y\vec{p}_3 - 3xy\vec{p}_2) \quad . \quad (\text{B.73})$$

Da bei diesem Schleifentypus üblicherweise nur linear divergente Integrale vorkommen, beschränken wir uns hier auf diesen Fall und untersuchen lediglich den aus der Impulsverschiebung stammenden Term des logarithmisch divergenten Beitrags in der Parameterintegration. Die entsprechenden Integrale kann man für  $n = 1$  und  $n = 2$  ausrechnen.

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{3} \int_0^1 dx dy y [\vec{p}_3 - \vec{p}_1 - 3y\vec{p}_3 - 3xy\vec{p}_2] \\ &= -\frac{2}{3} \left[ \frac{1}{2}(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) - \vec{p}_3 - \frac{1}{2}\vec{p}_2 \right] \\ &= \frac{1}{3} [\vec{p}_1 + \vec{p}_3 + \vec{p}_2] \\ &= 0 \quad (\text{B.74}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3} \int_0^1 dx dy x(1-x)y^3(1-y) [\vec{p}_3 - \vec{p}_1 - 3y\vec{p}_3 - 3xy\vec{p}_2] \\
&= -\frac{2}{3} \left[ \frac{1}{120} (\vec{p}_3 - \vec{p}_1) - \frac{1}{60} \vec{p}_3 - \frac{1}{120} \vec{p}_2 \right] \\
&= \frac{1}{180} [\vec{p}_1 + \vec{p}_3 + \vec{p}_2] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.75}$$

und ebenso für  $n = 3$ .

## B.4 Integrationen für den $\Gamma_4$ -Vertex

Das folgende Integral findet Verwendung bei der Berechnung der logarithmisch divergenten Diagramme für den  $\Gamma_4$ -Vertex. Dabei wird wesentlich die vereinfachte Berechnung der führenden divergenten Terme dieser Diagramme ausgenutzt.

$$I(\Gamma_i, \Gamma_j) = (4\pi)^2 \epsilon \int \bar{d}^D q \frac{(\Gamma_i)^{12yx} t^{yy'}(q) t^{xx'}(q) (\Gamma_j)^{xy34}}{(q^2 + M^2)^2} \Big|_{\epsilon=0} \tag{B.76}$$

### B.4.1 Integrationstabelle I

In Tabelle B.1 sind die für die Berechnung der Diagramme notwendigen Ergebnisse notiert.

### B.4.2 Permutationen

In Tabelle B.2 sind die Permutationen der Farbtensoren unter ausgewählten Vertauschungen, insbesondere denen im  $u$ - und  $t$ -Kanal notiert.

| $I(\Gamma_i, \Gamma_j)$                     | $\Gamma_1$             | $\Gamma_2$  | $\Gamma_3$  | $\Gamma_4$             | $\Gamma_5$  | $\Gamma_6$   | $S_4$                                     | $\frac{4}{q^2} \delta^{xy} q^{(3)} q^{(4)}$ |
|---|------------------------|---|---|------------------------|---|--|---|---|
| $\Gamma_1$                                  | $3\Gamma_1$            | $\frac{3}{4}\Gamma_1$   | $\frac{3}{4}\Gamma_1$   | 0                      | $\frac{9}{4}\Gamma_1$   | $-\frac{9}{4}\Gamma_1$   | $\frac{9}{2}\Gamma_1$                     | $3\Gamma_1$                                 |
| $\Gamma_2$                                  | $\frac{3}{4}\Gamma_1$  | $\frac{1}{2}\Gamma_3 + \frac{1}{24}S_4$                               | $\frac{1}{2}\Gamma_2 + \frac{1}{24}S_4$                               | $-\frac{1}{2}\Gamma_4$ | $\frac{1}{4}\Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_6$<br>$-\frac{1}{24}S_4$ | $-\frac{1}{4}\Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_5$<br>$+\frac{1}{24}S_4$ | $\frac{1}{4}\Gamma_1 + \frac{7}{12}S_4$   | $\Gamma_1 - \frac{1}{6}S_4$                 |
| $\Gamma_3$                                  | $\frac{3}{4}\Gamma_1$  | $\frac{1}{2}\Gamma_2 + \frac{1}{24}S_4$                               | $\frac{1}{2}\Gamma_3 + \frac{1}{24}S_4$                               | $\frac{1}{2}\Gamma_4$  | $\frac{1}{4}\Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_5$<br>$-\frac{1}{24}S_4$ | $-\frac{1}{4}\Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_6$<br>$+\frac{1}{24}S_4$ | $\frac{1}{4}\Gamma_1 + \frac{7}{12}S_4$   | $\Gamma_1 - \frac{1}{6}S_4$                 |
| $\Gamma_4$                                  | 0                      | $-\frac{1}{2}\Gamma_4$  | $\frac{1}{2}\Gamma_4$   | $\Gamma_4$             | $-\frac{1}{2}\Gamma_4$  | $-\frac{1}{2}\Gamma_4$   | 0   | 0   |
| $\Gamma_5$                                  | $\frac{9}{4}\Gamma_1$  | $\frac{1}{4}\Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_6$<br>$-\frac{1}{24}S_4$     | $\frac{1}{4}\Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_5$<br>$-\frac{1}{24}S_4$     | $-\frac{1}{2}\Gamma_4$ | $2\Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_5$<br>$+\frac{1}{24}S_4$           | $-2\Gamma_1$<br>$\frac{1}{2}\Gamma_6$<br>$-\frac{1}{24}S_4$        | $\frac{17}{4}\Gamma_1 - \frac{7}{12}S_4$  | $2\Gamma_1 + \frac{1}{6}S_4$                |
| $\Gamma_6$                                  | $-\frac{9}{4}\Gamma_1$ | $-\frac{1}{4}\Gamma_1$<br>$\frac{1}{2}\Gamma_5$<br>$+\frac{1}{24}S_4$ | $-\frac{1}{4}\Gamma_1$<br>$\frac{1}{2}\Gamma_6$<br>$+\frac{1}{24}S_4$ | $-\frac{1}{2}\Gamma_4$ | $-2\Gamma_1$<br>$\frac{1}{2}\Gamma_6$<br>$-\frac{1}{24}S_4$       | $2\Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_5$<br>$+\frac{1}{24}S_4$            | $-\frac{17}{4}\Gamma_1 + \frac{7}{12}S_4$ | $-2\Gamma_1 - \frac{1}{6}S_4$               |
| $S_4$                                       | $\frac{9}{2}\Gamma_1$  | $\frac{1}{4}\Gamma_1 + \frac{7}{12}S_4$                               | $\frac{1}{4}\Gamma_1 + \frac{7}{12}S_4$                               | 0                      | $\frac{17}{4}\Gamma_1 - \frac{7}{12}S_4$                          | $-\frac{17}{4}\Gamma_1 + \frac{7}{12}S_4$                          | $5\Gamma_1 + \frac{7}{6}S_4$              | $5\Gamma_1 - \frac{1}{3}S_4$                |
| $\frac{4}{q^2} \delta^{xy} q^{(1)} q^{(2)}$ | $3\Gamma_1$            | $\Gamma_1 - \frac{1}{6}S_4$   | $\Gamma_1 - \frac{1}{6}S_4$   | 0                      | $2\Gamma_1 + \frac{1}{6}S_4$                                      | $-2\Gamma_1 - \frac{1}{6}S_4$                                      | $5\Gamma_1 - \frac{1}{3}S_4$              | $2S_4$                                      |
| $\Gamma_{5-6}$                              | $\frac{9}{2}\Gamma_1$  | $2\Gamma_1 - \frac{7}{12}S_4$   | $2\Gamma_1 - \frac{7}{12}S_4$   | 0                      | $\frac{5}{2}\Gamma_1 + \frac{7}{12}S_4$                           | $-\frac{5}{2}\Gamma_1 - \frac{7}{12}S_4$                           | $\frac{17}{2}\Gamma_1 - \frac{7}{6}S_4$   | $4\Gamma_1 + \frac{1}{3}S_4$                |

Tabelle B.1.: Integrationstabelle I

|                     |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1234                | 3124                | 4132                | 2134                |
| $(\Gamma_i)^{1234}$ | $(\Gamma_j)^{1234}$ | $(\Gamma_k)^{1234}$ | $(\Gamma_l)^{1234}$ |
| $\Gamma_1$          | $\Gamma_2$          | $\Gamma_3$          | $\Gamma_1$          |
| $\Gamma_2$          | $\Gamma_3$          | $\Gamma_1$          | $\Gamma_3$          |
| $\Gamma_3$          | $\Gamma_1$          | $\Gamma_2$          | $\Gamma_2$          |
| $\Gamma_4$          | $\Gamma_5$          | $\Gamma_6$          | $-\Gamma_4$         |
| $\Gamma_5$          | $\Gamma_6$          | $\Gamma_4$          | $-\Gamma_6$         |
| $\Gamma_6$          | $\Gamma_4$          | $\Gamma_5$          | $-\Gamma_5$         |
| $\Gamma_{5-6}$      | $\Gamma_{6-4}$      | $\Gamma_{4-5}$      | $\Gamma_{5-6}$      |
| $S_4$               | $S_4$               | $S_4$               | $S_4$               |

Tabelle B.2: Permutationen der Lorentz-Tensoren

## B.5 Integrationen für den $\Gamma_3$ -Vertex

### B.5.1 Vollständig symmetrische $\Gamma_3$ -Vertex-Parameter

Das folgende Integral tritt bei der Berechnung der tadpoleartigen  $\Gamma_3\Gamma_4$ -Schleife in der DSG des  $\Gamma_3$ -Vertex auf, wenn die  $\Gamma_3$ -Vertex-Parameter vollständig symmetrisch angesetzt sind.

$$\begin{aligned}
F^{xy} &= (4\pi)^2 \epsilon \int \bar{d}^D q \frac{t^{yy'}(A)t^{xx'}(B)}{(q^2 + M^2)^2} (\delta^{\mu_3 x'} (p_3 - B)^{y'} \\
&\quad + \delta^{x' y'} (B + A)^{\mu_3} + \delta^{y' \mu_3} (-A - p_3)^{x'}) \Big|_{\epsilon=0} \\
&= \frac{5}{4} (p_3^{(y)} \delta_{x\mu_3} - p_3^{(x)} \delta^{y\mu_3})
\end{aligned} \tag{B.77}$$

Dies ist in symmetrischer Parametrisierung zu rechnen mit

$$p_3 + B - A = 0. \tag{B.78}$$

Die Ergebnisse für die Tensoren aus dem  $\Gamma_4$ -Vertex finden sich in Tabelle B.3. Zusätzlich finden sich dort die Ergebnisse der Kontraktion  $\Gamma_4$  mit  $\delta^{xy}$  statt  $F^{xy}$ .

Bei umgekehrter Reihenfolge der Vertizes ist das folgende Integral zu verwenden.

$$F^{yx} = (4\pi)^2 \epsilon \int \bar{d}^D q \frac{t^{yy'}(A)t^{xx'}(B)}{(q^2 + M^2)^2} (\delta^{\mu_1 y'} (p_1 + A)^{x'})$$

|                            |  |                 |
|----------------------------|--|-----------------|
| $\Gamma_i^{12yx} F_j^{xy}$ | $\frac{5}{4}(p_3^{(y)} \delta^{x3} - p_3^{(x)} \delta^{y3})$ | $\delta^{xy}$   |
| $\Gamma_1$                 | 0  | $4\delta^{12}$  |
| $\Gamma_2$                 | $\frac{5}{4}(p_3^{(1)} \delta^{23} - p_3^{(2)} \delta^{13})$ | $\delta^{12}$   |
| $\Gamma_3$                 | $\frac{5}{4}(p_3^{(2)} \delta^{13} - p_3^{(1)} \delta^{23})$ | $\delta^{12}$   |
| $\Gamma_4$                 | $\frac{5}{2}(p_3^{(2)} \delta^{13} - p_3^{(1)} \delta^{23})$ | 0               |
| $\Gamma_5$                 | $\frac{5}{4}(p_3^{(1)} \delta^{23} - p_3^{(2)} \delta^{13})$ | $3\delta^{12}$  |
| $\Gamma_6$                 | $\frac{5}{4}(p_3^{(1)} \delta^{23} - p_3^{(2)} \delta^{13})$ | $-3\delta^{12}$ |
| $S_4$                      | 0  | $6\delta^{12}$  |

Tabelle B.3: Integrationstabelle IIa

|  |            |  |  |
|--|------------|--|--|
| $F_i^{yx} \Gamma_j^{xy23}$                                   | $\Gamma_1$ | $\Gamma_2$   | $\Gamma_3$   |
| $\frac{5}{4}(p_1^{(x)} \delta^{y1} - p_1^{(y)} \delta^{x1})$ | 0          | $\frac{5}{4}(p_1^{(2)} \delta^{31} - p_1^{(3)} \delta^{21})$ | $\frac{5}{4}(p_1^{(3)} \delta^{21} - p_1^{(2)} \delta^{31})$ |

Tabelle B.4: Integrationstabelle IIb

$$\begin{aligned}
& +\delta^{y'x'}(-A-B)^{\mu_1} + \delta^{x'\mu_3}(B-p_1)^{y'} \Big|_{\epsilon=0} \\
& = \frac{5}{4}(p_1^{(x)} \delta_{y\mu_1} - p_1^{(y)} \delta^{x\mu_1}) \tag{B.79}
\end{aligned}$$

Die entsprechenden Ergebnisse für die Kontraktion mit den Tensoren des  $\Gamma_4$ -Vertex sind in Tabelle B.4 notiert.

### B.5.2 Partiiell symmetrische $\Gamma_3$ -Vertex-Parameter

Bei dem partiell symmetrischen Ansatz für die  $\Gamma_3$ -Vertex-Parameter muss das folgende Integral betrachtet werden.

$$\begin{aligned}
F^{yx} &= (4\pi)^2 \epsilon \int \bar{d}^D q \frac{t^{yy'}(A)t^{xx'}(B)}{(q^2 + M^2)^2} (\delta^{\mu_1 y'}(p_1 + A)^{x'} C_{mk_y; k_x} \\
& + \delta^{y'x'}(-A-B)^{\mu_1} C_{k_y k_x; m} + \delta^{x'\mu_1}(B-p_1)^{y'} C_{k_x m; k_y}) \Big|_{\epsilon=0} \\
&= p_1^{(x)} \delta_{y\mu_1} C_{mk_y; k_x} - p_1^{(y)} \delta^{x\mu_1} C_{k_x m; k_y} \\
& + \frac{1}{12} S^{\mu_1 \sigma xy} p_1^{(\sigma)} (C_{mk_y; k_x} - C_{k_x m; k_y}) \\
& + \frac{1}{4} (p_1^{(x)} \delta_{y\mu_1} - p_1^{(y)} \delta^{x\mu_1}) C_{k_y k_x; m} \tag{B.80}
\end{aligned}$$

Dies ist in symmetrischer Parametrisierung zu rechnen mit

$$p_3 + B - A = 0. \tag{B.81}$$

Zudem ist an dieser Stelle eine weitere Beobachtung wichtig. Verschwindet in den  $\Sigma_{\Gamma X}$ -Parametern der Term proportional zu  $C_{mk_y;k_x} - C_{k_x m;k_y}$ , lässt sich eine vereinfachte Lösung angeben.

$$F^{yx} = (p_1^{(x)} \delta^{y\mu_1} - p_1^{(y)} \delta^{x\mu_1})(C_{mk_y;k_x} + \frac{1}{4}C_{k_y k_x;m}) \quad (\text{B.82})$$

Und in der Tat darf man diese vereinfachte Darstellung verwenden, weil allgemein für Terme proportional zu  $C_{mk_y;k_x} - C_{k_x m;k_y}$  gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{y x k l=0}^r (C_{a y;x} - C_{x a;y}) f(t_1)^{y+l} f(t_2)^{x+k} X_{k l c d}^i \\ = & \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{\substack{y x=0 \\ y < x}}^r \omega(y, x) (f(t_1)^{x-y} - f(t_2)^{x-y}) \sum_{k l=0}^r f(t_1)^{y+l} f(t_2)^{y+k} X_{k l c d}^i \\ = & \sum_{\substack{y x=0 \\ y < x}}^r \omega(y, x) \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} (f(t_1)^{x-y} - f(t_2)^{x-y}) \eta(t_1, t_2) \\ = & \sum_{\substack{y x=0 \\ y < x}}^r \omega(y, x) \cdot 0 = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.83})$$

da offensichtlich  $\eta(t_1, t_2) = \eta(t_2, t_1)$ .

## B.6 Erweiterter $\Gamma_3$ -Vertex

Werden in den  $\Sigma$ -Parametern des erweiterten  $\Gamma_3$ -Vertex die partiell antisymmetrischen Parameter mit in den beiden relevanten Indizes symmetrischen Parametern kombiniert, kann man zeigen, dass ein Teil dieser  $\Sigma$ -Parameter identisch verschwindet.

$$\begin{aligned} \Sigma_{B X} & \sim \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{k l x y=0}^r B_{a;x y} f(t_1)^{x+l} f(t_2)^{y+k} X_{k l; \dots} \\ & = \sum_{\substack{x y=0 \\ x < y}}^r \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{k l=0}^r (B_{a;x y} f(t_1)^{y-x} + B_{a;y x} f(t_2)^{y-x}) f(t_1)^{x+l} f(t_2)^{y+k} X_{k l; \dots} \\ & = \sum_{\substack{x y=0 \\ x < y}}^r \omega(x, y) \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} (f(t_1)^{y-x} - f(t_2)^{y-x}) \eta(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

$$= 0 \quad (\text{B.85})$$

Außerdem kann noch die folgenden Kombination vorkommen.

$$\sum_{x y=0}^r (B_{x;a y} + B_{y;x a}) \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{k l=0}^r f(t_1)^{x+l} f(t_2)^{y+k} X_{k l; \dots}$$

$$= \sum_{xy=0}^r (B_{x;ay} + B_{x;ya}) \sum_{t_1 t_2=1}^{r+1} \sum_{kl=0}^r f(t_1)^{x+l} f(t_2)^{y+k} X_{kl;\dots} \quad (\text{B.86})$$

$$= 0 \quad (\text{B.87})$$

Diese verschwindet für  $X_{kl;\dots} = X_{lk;\dots}$  ebenfalls. Kombiniert man dies mit den Ergebnissen der bisherigen Rechnungen zum  $\Gamma_3$ -Vertex, sieht man, dass die meisten Kombinationen partiell antisymmetrischer Parameter mit symmetrischen Parametern keine Beiträge zu den DSG liefern werden. Daraus kann man insbesondere folgern, dass eine Betrachtung der zusätzlichen  $\Gamma_3$ -Struktur nur sinnvoll geschehen kann, wenn auch partiell antisymmetrische Terme im  $\Gamma_4$ -Ansatz berücksichtigt werden.

## Anhang C

# Ergänzungen zu numerischen Lösungen

### C.1 $\Lambda$ -skalierte Strom-Massen

| Flavour     | skalierte Masse |
|-------------|-----------------|
| $\hat{m}_u$ | 0.012           |
| $\hat{m}_d$ | 0.024           |
| $\hat{m}_s$ | 0.52            |

Tabelle C.1: Strom-Massen für leichte Quarks

| Flavour     | skalierte Masse |
|-------------|-----------------|
| $\hat{m}_u$ | 0.01            |
| $\hat{m}_d$ | 0.02            |
| $\hat{m}_s$ | 0.4             |
| $\hat{m}_c$ | 4.0             |

Tabelle C.2: Strom-Massen mit  $c$ -Quark

| Flavour     | skalierte Masse |
|-------------|-----------------|
| $\hat{m}_u$ | 0.0143          |
| $\hat{m}_d$ | 0.0286          |
| $\hat{m}_s$ | 0.571           |
| $\hat{m}_c$ | 5.71            |
| $\hat{m}_b$ | 20.2            |
| $\hat{m}_t$ | 833.0           |

Tabelle C.3: Strom-Massen ab  $b$ -Quark

Wir verzichten hier auf die Angabe von Unsicherheits-Intervallen. Wegen der

nichtlinearen Natur der SKG müsste man die Auswirkungen von Änderungen an  $\hat{n}_f$  jeweils gesondert überprüfen.

## C.2 Transformationen für skalenfreie SKG

In der rein gluonischen Theorie oder bei chiralen Fermionen sind die SKG skalenfrei. Dies bedeutet eine zusätzliche Freiheit in der Wahl der Parameter. Es ist daher zweckmäßig, in diesen Fällen einen der Parameter auf den Wert 1 zu setzen. Wir wählen dafür jeweils  $\Re(u_{1,1})$ . Damit erfüllt die Nullstelle des Gluon-Propagators in diesen Fällen immer die physikalischen Randbedingungen. Wir notieren in Tabelle C.4 die Transformation der Parameter. Dabei führen wir keine neue Notation für die transformierten Größen ein, weil die Unterscheidung zwischen den beiden Fällen in dieser Arbeit stets aus dem Kontext klar wird.

| Parameter                   | Transformation   |
|-----------------------------|--|
| $\Re(u_{r,1})$              | 1  |
| $u_{r,s}$                   | $\frac{u_{r,s}}{\Re(u_{r,1})}$ für $s > 1$   |
| $\hat{u}_{1,1}$             | $\frac{\hat{u}_{r,s}}{\Re(u_{r,1})}$   |
| $C_{k_1 k_2; k_3}^r$        | $\frac{C_{k_1 k_2; k_3}^r}{(\Re(u_{r,1}))^{k_1+k_2+k_3}}$                          |
| $X_{k_1 k_2; k_3 k_4}$      | $\frac{X_{k_1 k_2; k_3 k_4}}{(\Re(u_{r,1}))^{k_1+k_2+k_3+k_4}}$                    |
| $\hat{K}_{r,s}^{(f)}$       | $\frac{\hat{K}_{r,s}^{(f)}}{\sqrt{\Re(u_{r,1})}}$                                  |
| $\hat{\hat{K}}_{r,s}^f$     | $\frac{\hat{\hat{K}}_{r,s}^f}{\sqrt{\Re(u_{r,1})}}$                                |
| $\bar{C}_{m,n_1 n_2}^{f,r}$ | $\frac{\bar{C}_{m,n_1 n_2}^{f,r}}{(\Re(u_{r,1}))^m \sqrt{\Re(u_{r,1})}^{n_1+n_2}}$ |

Tabelle C.4: Transformation der Parameter für skalenfreie SKG

## C.3 Bewertungsschema für numerische Lösungen

Bei der numerischen Suche nach Lösungen werden in der Regel nur  $N_V$  der SKG verwendet. Mit den Ausführungen aus Abschnitt 9.5 benötigt man daher jenseits des Minimierungsfehlers  $\chi$  ein System zur Bewertung der numerischen (Pseudo-) Lösungen. Wir definieren dazu eine Reihe von Nebenbedingungen,  $\Xi_i$  für gluonische Parameter bzw.  $\Xi_i^f$  für fermionische Parameter.

$$\Xi_1 = S_3^K(0) \quad (C.1)$$

$$\Xi_2 = S_3^K(r) \quad (C.2)$$

$$\Xi_3 = S_2^K \quad (\text{C.3})$$

$$\Xi_4 = S_2(0) \quad (\text{C.4})$$

$$\Xi_5 = S_2(r) \quad (\text{C.5})$$

$$\Xi_6 = 1 + 100 \cdot |\Omega_3(r; r, r-1) - \Omega_3(r-1, r, r)| \quad (\text{C.6})$$

$$\Xi_7 = 1 + 100 \cdot |\Omega_{4E}^m(r, r-1, r, r) - \Omega_{4E}^m(r-1, r, r, r)| \quad (\text{C.7})$$

$$\Xi_8 = 1 + 100 \cdot |\Omega_{4A}^m(r, r-1, r, r) + \Omega_{4E}^m(r-1, r, r, r)| \quad (\text{C.8})$$

$$\Xi_9 = 1 + |1 - b| \quad (\text{C.9})$$

$$\Xi_{10} = 1 + |1 - \tilde{b}| \quad (\text{C.10})$$

$$\Xi_{11} = 1 + |1 - C_{rr;r}^r| \quad (\text{C.11})$$

$$\Xi_{12} = 1 + |1 - T_{rr;rr}| \quad (\text{C.12})$$

$$\Xi'_{13} = 1 + 100 \cdot |C_{11;0}^1 - C_{01;1}^1| \quad (\text{C.13})$$

Die letzten vier Bedingungen erklären sich dadurch, dass wir Lösungen bevorzugen, die den strikten perturbativen Limes (siehe Kapitel 2) annähern. Mit  $\Xi_4$  und  $\Xi_5$  gehen hier zusätzlich Bedingungen aus der SKG des Gluon-Propagators ein. Ziel ist, besonders gut an die DSG des Gluon-Propagators angepasste Lösungen besser zu bewerten. Für die Forderung nach maximalem Confinement kommt dazu noch der Term  $\Xi_C$ , der Lösungen aussortieren hilft, bei denen der Imaginärteil von  $\hat{u}_{r,s}$  sehr klein ist.

Sobald man Fermionen betrachtet, kommen dazu noch die Nebenbedingungen aus dem fermionischen Sektor. Auch hier überprüfen wir wieder – um besonders an die DSG des Fermion-Propagators angepasste Lösungen zu erhalten – zwei exemplarische Gleichungen aus dessen SKG.

$$\bar{\Xi}_1^f = \bar{S}_3^{f,K}(0) \quad (\text{C.14})$$

$$\bar{\Xi}_2^f = \bar{S}_3^{f,K}(r) \quad (\text{C.15})$$

$$\bar{\Xi}_3^f = \bar{S}_2^{f,K} \quad (\text{C.16})$$

$$\bar{\Xi}_4^f = \bar{S}_2^f(0) \quad (\text{C.17})$$

$$\bar{\Xi}_5^f = \bar{S}_2^f(r) \quad (\text{C.18})$$

$$\bar{\Xi}_6^f = N_3^{f,K}(0) \quad (\text{C.19})$$

$$\bar{\Xi}_7^f = N_3^{f,K}(r) \quad (\text{C.20})$$

$$\bar{\Xi}_8^f = 1 + |1 - \bar{C}_{rr;r}^{f,r}| \quad (\text{C.21})$$

$$(\text{C.22})$$

Wir bestimmen damit dann die Kennzahl  $\zeta_P$  für jeden Parametersatz mit der folgenden Formel.

$$\begin{aligned} \zeta_P = & \sum_{n=0}^{12} \log_{10}(\Xi_n) + \log_{10}(\Xi_C) + \sum_{f=1}^{n_f} \sum_{n=0}^{k_{max}} \log_{10}(\bar{\Xi}_n^f) \\ & + 4 \cdot \log_{10}(\chi) \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Hierbei ist der Minimierungsfehler  $\chi$  besonders stark gewichtet, um so seine besondere Bedeutung bei der Ermittlung der numerischen Lösungen und die besondere Gewichtung der SKG aus den DSG und BSG abzubilden.

## C.4 Parametersätze

### C.4.1 Rein gluonische Theorie

#### Ohne Geist-Schleife

| Parameter       | Wert                                  | Parameter   | Wert                      |
|-----------------|---------------------------------------|-------------|---------------------------|
| $b$             | 1.458653                              | $D_{00;00}$ | $-2.154732 \cdot 10^{-2}$ |
| $\Re(u_{1,1})$  | 0.4709820                             | $D_{10;00}$ | $-5.939041 \cdot 10^{-2}$ |
| $\hat{u}_{1,1}$ | $(6.481604 \cdot 10^{-2}, 0.3981536)$ | $D_{11;00}$ | $2.851029 \cdot 10^{-3}$  |
| $\tilde{b}$     | 0.9296052                             | $D_{10;01}$ | $-4.370898 \cdot 10^{-2}$ |
| $C_{00;0}$      | -0.5749366                            | $D_{11;01}$ | $8.752355 \cdot 10^{-2}$  |
| $C_{00;1}$      | -0.1484305                            | $E_{00;00}$ | 0.1212799                 |
| $C_{10;0}$      | -0.2114374                            | $E_{10;00}$ | $-4.325328 \cdot 10^{-2}$ |
| $C_{11;0}$      | 1.773678                              | $E_{11;00}$ | -0.5766192                |
| $C_{10;1}$      | 1.769279                              | $E_{10;01}$ | $8.357253 \cdot 10^{-2}$  |
| $C_{11;1}$      | 0.8713625                             | $E_{11;01}$ | 0.3524685                 |
| $T_{00;00}$     | $-5.969437 \cdot 10^{-2}$             | $\chi$      | $2.173 \cdot 10^{-2}$     |
| $T_{10;00}$     | $2.378296 \cdot 10^{-2}$              | $\zeta_P$   | -31.51                    |
| $T_{11;00}$     | $6.902260 \cdot 10^{-2}$              | $\Xi_1$     | $-4.134 \cdot 10^{-2}$    |
| $T_{10;10}$     | $8.623752 \cdot 10^{-2}$              | $\Xi_2$     | 0.7790028                 |
| $T_{11;01}$     | 0.3727467                             | $\Xi_3$     | -0.2221                   |
| $T_{11;11}$     | 0.7431978                             | $\Xi_6$     | 27.42                     |
|                 |                                       | $\Xi_7$     | 1.002                     |
|                 |                                       | $\Xi_8$     | 1.003                     |

Tabelle C.5: Numerische Lösung für  $r = 1$  und  $N_f = 0$ , ohne Geist-Schleife

| Parameter       | Wert                   | Parameter   | Wert                      |
|-----------------|------------------------|-------------|---------------------------|
| $b$             | 1.437116               | $D_{00;00}$ | 1.061427                  |
| $\Re(u_{1,1})$  | 1.0                    | $D_{10;00}$ | 0.9390718                 |
| $\hat{u}_{1,1}$ | (0.1837981, 0.9596855) | $D_{11;00}$ | 0.8691458                 |
| $\tilde{b}$     | 1.071743               | $D_{10;01}$ | -6.142000                 |
| $C_{00;0}$      | -6.024788              | $D_{11;01}$ | 18.50552                  |
| $C_{00;1}$      | -2.285497              | $E_{00;00}$ | 0.7135424                 |
| $C_{10;0}$      | -2.285497              | $E_{10;00}$ | -0.5524056                |
| $C_{11;0}$      | 3.725636               | $E_{11;00}$ | 2.934383                  |
| $C_{10;1}$      | 3.725636               | $E_{10;01}$ | 3.034508                  |
| $C_{11;1}$      | 0.6309506              | $E_{11;01}$ | -6.796741                 |
| $T_{00;00}$     | 1.315516               | $\chi$      | $2.353214 \cdot 10^{-16}$ |
| $T_{10;00}$     | -0.3200810             | $\zeta_P$   | -154.2                    |
| $T_{11;00}$     | 0.3282300              | $\Xi_1$     | -0.4025203                |
| $T_{10;10}$     | 1.185735               | $\Xi_2$     | 1.089880                  |
| $T_{11;01}$     | -1.273014              | $\Xi_3$     | $1.169815 \cdot 10^{-2}$  |
| $T_{11;11}$     | 4.107178               | $\Xi_4$     | 0.3458647                 |
|                 |                        | $\Xi_6$     | 138.7508                  |
| $\Xi_7$         | 2.467878               | $\Xi_8$     | 4.955902                  |

Tabelle C.6: Numerische Lösung für  $r = 1$  und  $N_f = 0$ , berechnet ohne  $S_2(0)$ .

| Parameter       | Wert                                       | Parameter   | Wert                      |
|-----------------|--|-------------|---------------------------|
| $b$             | 1.231239                                   | $D_{00;00}$ | 0.6474155                 |
| $\Re(u_{1,1})$  | 1.0  | $D_{10;00}$ | -0.3499309                |
| $\hat{u}_{1,1}$ | ( $9.239685 \cdot 10^{-2}$ , $0.5827784$ ) | $D_{11;00}$ | 0.1283736                 |
| $\tilde{b}$     | 1.045672                                   | $D_{10;01}$ | 0.6529875                 |
| $C_{00;0}$      | -0.3677721                                 | $D_{11;01}$ | -0.1788037                |
| $C_{00;1}$      | $-4.075380 \cdot 10^{-2}$                  | $E_{00;00}$ | -0.2044354                |
| $C_{10;0}$      | $-4.075380 \cdot 10^{-2}$                  | $E_{10;00}$ | 0.1971431                 |
| $C_{11;0}$      | $3.933481 \cdot 10^{-3}$                   | $E_{11;00}$ | $-3.811153 \cdot 10^{-2}$ |
| $C_{10;1}$      | 2.372001                                   | $E_{10;01}$ | 0.3437441                 |
| $C_{11;1}$      | 1.015082                                   | $E_{11;01}$ | 0.1006127                 |
| $T_{00;00}$     | 0.6352899                                  | $\chi$      | $4.781 \cdot 10^{-18}$    |
| $T_{10;00}$     | 0.6925588                                  | $\zeta_P$   | -181.2                    |
| $T_{11;00}$     | 0.7585279                                  | $\Xi_1$     | -0.7651                   |
| $T_{10;10}$     | 0.7308674                                  | $\Xi_3$     | -2.607                    |
| $T_{11;01}$     | 0.7413454                                  | $\Xi_5$     | $-1.251 \cdot 10^{-7}$    |
| $T_{11;11}$     | 0.7241628e                                 | $\Xi'_{13}$ | 237.8                     |
|                 |  | $\Xi_6$     | 21.81                     |
|                 |  | $\Xi_7$     | 1.025                     |

Tabelle C.7: Numerische Lösung für  $r = 1$  und  $N_f = 0$ , Geist-Schleifen perturbativ,  $C_{11;0}^1 \neq C_{01;1}^1$

## Mit Geist-Schleife

| Parameter       | Wert                     | Parameter   | Wert                      |
|-----------------|--------------------------|-------------|---------------------------|
| $b$             | 1.337674                 | $D_{00;00}$ | $7.882593 \cdot 10^{-3}$  |
| $\Re(u_{1,1})$  | 0.5677323                | $D_{10;00}$ | $7.120270 \cdot 10^{-3}$  |
| $\hat{u}_{1,1}$ | (0.1378170, 0.5938486 )  | $D_{11;00}$ | $1.441842 \cdot 10^{-2}$  |
| $\tilde{b}$     | 1.061614                 | $D_{10;01}$ | $2.674163 \cdot 10^{-2}$  |
| $C_{00;0}$      | -1.008752                | $D_{11;01}$ | $7.324296 \cdot 10^{-2}$  |
| $C_{00;1}$      | -0.3576470               | $E_{00;00}$ | $3.910559 \cdot 10^{-2}$  |
| $C_{10;0}$      | -0.4032281               | $E_{10;00}$ | $1.166079 \cdot 10^{-2}$  |
| $C_{11;0}$      | 1.877719                 | $E_{11;00}$ | $1.397900 \cdot 10^{-3}$  |
| $C_{10;1}$      | 1.929849                 | $E_{10;01}$ | $-1.319368 \cdot 10^{-3}$ |
| $C_{11;1}$      | 0.9399603                | $E_{11;01}$ | $4.590266 \cdot 10^{-2}$  |
| $T_{00;00}$     | $1.161555 \cdot 10^{-2}$ | $\chi$      | $1.692 \cdot 10^{-2}$     |
| $T_{10;00}$     | 0.1656320                | $\zeta_p$   | -36.51                    |
| $T_{11;00}$     | 0.2127592                | $\Xi_1$     | $-2.501 \cdot 10^{-5}$    |
| $T_{10;10}$     | 0.2177747                | $\Xi_2$     | 0.8669                    |
| $T_{11;01}$     | 0.4153831                | $\Xi_3$     | 0.3057                    |
| $T_{11;11}$     | 0.7370246                | $\Xi_6$     | 45.77                     |
|                 |                          | $\Xi_7$     | 1.684                     |
| $\Xi_5$         | $3.877 \cdot 10^{-2}$    | $\Xi_8$     | 1.338                     |

Tabelle C.8: Numerische Lösung für  $r = 1$  und  $N_f = 0$ , mit Geist-Schleifen

| Parameter       | Wert                      | Parameter   | Wert                      |
|-----------------|---------------------------|-------------|---------------------------|
| $b$             | 1.221626                  | $D_{00;00}$ | 0.2604543                 |
| $\Re(u_{1,1})$  | 1.0                       | $D_{10;00}$ | $1.610695 \cdot 10^{-2}$  |
| $\hat{u}_{1,1}$ | (0.1048387, 0.5833589 )   | $D_{11;00}$ | $8.002259 \cdot 10^{-2}$  |
| $\tilde{b}$     | 1.044195                  | $D_{10;01}$ | 0.1717764                 |
| $C_{00;0}$      | -0.4126905                | $D_{11;01}$ | $-3.652401 \cdot 10^{-2}$ |
| $C_{00;1}$      | $-4.045645 \cdot 10^{-2}$ | $E_{00;00}$ | $7.728340 \cdot 10^{-2}$  |
| $C_{10;0}$      | $-4.045645 \cdot 10^{-2}$ | $E_{10;00}$ | 0.1455289                 |
| $C_{11;0}$      | $8.688523 \cdot 10^{-2}$  | $E_{11;00}$ | $9.707027 \cdot 10^{-2}$  |
| $C_{10;1}$      | 2.379583                  | $E_{10;01}$ | 1.235066                  |
| $C_{11;1}$      | 1.029643                  | $E_{11;01}$ | -1.266093                 |
| $T_{00;00}$     | 0.8165166                 | $\chi$      | $6.160738 \cdot 10^{-18}$ |
| $T_{10;00}$     | 0.6512880                 | $\zeta_P$   | -179.3                    |
| $T_{11;00}$     | 0.6902173                 | $\Xi_1$     | -0.7232                   |
| $T_{10;10}$     | 0.7453249                 | $\Xi_2$     | 1.002                     |
| $T_{11;01}$     | 0.6552262                 | $\Xi_3$     | -2.451                    |
| $T_{11;11}$     | 0.7480135                 | $\Xi'_{13}$ | 230.3                     |
|                 |                           | $\Xi_6$     | 24.12                     |
|                 |                           | $\Xi_7$     | 1.015                     |

Tabelle C.9: Numerische Lösung für  $r = 1$  und  $N_f = 0$ , mit Geist-Schleifen,  $C_{11;0}^1 \neq C_{01;1}^1$

## C.4.2 Zwei Fermionen

| Parameter                  | Wert                                  | Parameter   | Wert                      |
|----------------------------|---------------------------------------|-------------|---------------------------|
| $b$                        | 1.387260                              | $T_{00;00}$ | $2.265236 \cdot 10^{-4}$  |
| $\Re(u_{1,1})$             | $6.960854 \cdot 10^{-2}$              | $T_{10;00}$ | $-8.444960 \cdot 10^{-4}$ |
| $\hat{u}_{1,1}$            | $(5.362237 \cdot 10^{-3}, 0.1049411)$ | $T_{11;00}$ | $6.592655 \cdot 10^{-3}$  |
| $\tilde{b}$                | 1.077686                              | $T_{10;10}$ | $-7.948074 \cdot 10^{-3}$ |
| $\Re(\kappa_{1,1}^{f=u})$  | 0.4500362                             | $T_{11;01}$ | $3.805970 \cdot 10^{-2}$  |
| $\hat{\kappa}_{1,1}^{f=u}$ | $(0.2391376, 9.007098 \cdot 10^{-3})$ | $T_{11;11}$ | 0.8043992                 |
| $\Re(\kappa_{1,1}^{f=d})$  | 0.3775897                             | $D_{00;00}$ | $-4.053941 \cdot 10^{-4}$ |
| $\hat{\kappa}_{1,1}^{f=d}$ | $(0.4128999, 0.1953736)$              | $D_{10;00}$ | $-1.717685 \cdot 10^{-3}$ |
| $C_{00;0}$                 | $1.726555 \cdot 10^{-3}$              | $D_{11;00}$ | $7.244433 \cdot 10^{-3}$  |
| $C_{00;1}$                 | $-1.772785 \cdot 10^{-2}$             | $D_{10;01}$ | $5.130162 \cdot 10^{-4}$  |
| $C_{10;0}$                 | $-1.813734 \cdot 10^{-2}$             | $D_{11;01}$ | $4.402626 \cdot 10^{-2}$  |
| $C_{11;0}$                 | $9.124362 \cdot 10^{-2}$              | $E_{00;00}$ | $3.453427 \cdot 10^{-4}$  |
| $C_{10;1}$                 | $9.008693 \cdot 10^{-2}$              | $E_{10;00}$ | $6.221645 \cdot 10^{-4}$  |
| $C_{11;1}$                 | 1.851390                              | $E_{11;00}$ | $5.904457 \cdot 10^{-3}$  |
| $\bar{C}_{0;00}^{f=u}$     | $2.453282 \cdot 10^{-2}$              | $E_{10;01}$ | $-2.904073 \cdot 10^{-3}$ |
| $\bar{C}_{0;01}^{f=u}$     | $4.743378 \cdot 10^{-2}$              | $E_{11;01}$ | $5.847458 \cdot 10^{-2}$  |
| $\bar{C}_{0;11}^{f=u}$     | $8.813084 \cdot 10^{-2}$              |             |                           |
| $\bar{C}_{1;00}^{f=u}$     | 0.4438828                             | $\chi$      | $1.374 \cdot 10^{-3}$     |
| $\bar{C}_{1;01}^{f=u}$     | 0.9818207                             | $\zeta_p$   | -43.28                    |
| $\bar{C}_{1;11}^{f=u}$     | 2.123375                              |             |                           |
| $\bar{C}_{0;00}^{f=d}$     | -0.1512512                            |             |                           |
| $\bar{C}_{0;01}^{f=d}$     | -0.2266342                            |             |                           |
| $\bar{C}_{0;11}^{f=d}$     | -0.3300068                            |             |                           |
| $\bar{C}_{1;00}^{f=d}$     | 1.296591                              |             |                           |
| $\bar{C}_{1;01}^{f=d}$     | 2.395136                              |             |                           |
| $\bar{C}_{1;11}^{f=d}$     | 4.658441                              |             |                           |

Tabelle C.10: Numerische Lösung für  $r = 1$  und  $N_f = 2$ , Geist-Schleifen perturbativ, massive Fermionen

| Parameter                  | Wert   | Parameter   | Wert                      |
|----------------------------|--|-------------|---------------------------|
| $b$                        | 1.339910   | $T_{00;00}$ | $-1.758336 \cdot 10^{-2}$ |
| $\Re(u_{1,1})$             | 0.1450104  | $T_{10;00}$ | $-5.330716 \cdot 10^{-3}$ |
| $\hat{u}_{1,1}$            | $(2.469248 \cdot 10^{-2}, 0.2481525)$              | $T_{11;00}$ | $9.874980 \cdot 10^{-3}$  |
| $\tilde{b}$                | 1.070485   | $T_{10;10}$ | $1.039002 \cdot 10^{-2}$  |
| $\Re(\kappa_{1,1}^{f=u})$  | 0.1574736  | $T_{11;01}$ | 0.1064558                 |
| $\hat{\kappa}_{1,1}^{f=u}$ | $(8.659818 \cdot 10^{-2}, 1.035822 \cdot 10^{-2})$ | $T_{11;11}$ | 0.8050438                 |
| $\Re(\kappa_{1,1}^{f=d})$  | 0.1449813  | $D_{00;00}$ | $2.697496 \cdot 10^{-3}$  |
| $\hat{\kappa}_{1,1}^{f=d}$ | $(8.431480 \cdot 10^{-2}, 5.475873 \cdot 10^{-2})$ | $D_{10;00}$ | $5.271706 \cdot 10^{-3}$  |
| $C_{00;0}$                 | $-8.065879 \cdot 10^{-2}$                          | $D_{11;00}$ | $6.719000 \cdot 10^{-3}$  |
| $C_{00;1}$                 | -0.1249672   | $D_{10;01}$ | $3.549319 \cdot 10^{-3}$  |
| $C_{10;0}$                 | -0.1270091   | $D_{11;01}$ | $2.954399 \cdot 10^{-2}$  |
| $C_{11;0}$                 | 0.4182377  | $E_{00;00}$ | $2.521776 \cdot 10^{-2}$  |
| $C_{10;1}$                 | 0.4176892  | $E_{10;00}$ | $3.480055 \cdot 10^{-2}$  |
| $C_{11;1}$                 | 1.283301   | $E_{11;00}$ | $-4.417395 \cdot 10^{-2}$ |
| $\bar{C}_{0;00}^{f=u}$     | $-1.560174 \cdot 10^{-5}$                          | $E_{10;01}$ | $4.508214 \cdot 10^{-2}$  |
| $\bar{C}_{0;01}^{f=u}$     | $-3.600838 \cdot 10^{-3}$                          | $E_{11;01}$ | $-4.463196 \cdot 10^{-2}$ |
| $\bar{C}_{0;11}^{f=u}$     | $-2.508773 \cdot 10^{-2}$                          |             |                           |
| $\bar{C}_{1;00}^{f=u}$     | $4.349557 \cdot 10^{-2}$                           | $\chi$      | $3.025 \cdot 10^{-4}$     |
| $\bar{C}_{1;01}^{f=u}$     | 0.2732196  | $\zeta_P$   | -93.81                    |
| $\bar{C}_{1;11}^{f=u}$     | 1.739012   |             |                           |
| $\bar{C}_{0;00}^{f=d}$     | $-1.085194 \cdot 10^{-3}$                          |             |                           |
| $\bar{C}_{0;01}^{f=d}$     | $-3.549449 \cdot 10^{-3}$                          |             |                           |
| $\bar{C}_{0;11}^{f=d}$     | $-3.344137 \cdot 10^{-2}$                          |             |                           |
| $\bar{C}_{1;00}^{f=d}$     | $3.578254 \cdot 10^{-2}$                           |             |                           |
| $\bar{C}_{1;01}^{f=d}$     | 0.2508402  |             |                           |
| $\bar{C}_{1;11}^{f=d}$     | 1.710501   |             |                           |

Tabelle C.11: Numerische Lösung für  $r = 1$  und  $N_f = 2$ , mit Geist-Schleifen



# Anhang D

## Bethe-Salpeter-Gleichungen

Für die Resummation der DSG werden die folgenden BSG im s-Kanal benötigt.

### Fermion- bzw. Geist-Kanal

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \tilde{g}^2 \text{Diagram 3} \\
 \text{Diagram 1: Circle with two wavy lines and two fermion lines} \\
 \text{Diagram 2: Square with two wavy lines and two fermion lines} \\
 \text{Diagram 3: Circle with two wavy lines and two fermion lines, with a fermion loop}
 \end{array} \tag{D.1}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \tilde{g}^2 \text{Diagram 3} \\
 \text{Diagram 1: Circle with two wavy lines and two ghost lines} \\
 \text{Diagram 2: Square with two wavy lines and two ghost lines} \\
 \text{Diagram 3: Circle with two wavy lines and two ghost lines, with a ghost loop}
 \end{array} \tag{D.2}$$

### Gluon-Kanal

Die Struktur der Gleichungen bleibt gleich auch bei den Amplituden, die rechts Fermion- oder Geist-Beine bzw. drei Gluonbeine haben.

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \frac{1}{2}\tilde{g}^2 \text{Diagram 3} \\
 \text{Diagram 1: Circle with four wavy lines} \\
 \text{Diagram 2: Square with four wavy lines} \\
 \text{Diagram 3: Circle with four wavy lines, with a wavy loop} \\
 \text{Diagram 4: Circle with four wavy lines, with a wavy loop and a ghost loop} \\
 \text{Diagram 5: Circle with four wavy lines, with a fermion loop} \\
 \text{Diagram 6: Circle with four wavy lines, with a ghost loop}
 \end{array} \tag{D.3}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \frac{1}{2}\tilde{g}^2 \text{Diagram 3} \\
 \text{Diagram 1: Circle with two wavy lines and two fermion lines} \\
 \text{Diagram 2: Square with two wavy lines and two fermion lines} \\
 \text{Diagram 3: Circle with two wavy lines and two fermion lines, with a wavy loop}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{6}\tilde{g}^4 \quad -\tilde{g}^2 \\
& -\tilde{g}^2 \sum_f
\end{aligned}
\tag{D.4}$$

$$\begin{aligned}
& = \quad +\frac{1}{2}\tilde{g}^2 \\
& +\frac{1}{6}\tilde{g}^4 \quad -\tilde{g}^2 \\
& -\tilde{g}^2 \sum_f
\end{aligned}
\tag{D.5}$$

$$\begin{aligned}
& = \quad +\frac{3}{2} \quad +\frac{3}{2} \\
& +\frac{1}{2}\tilde{g}^2 \quad +\frac{1}{2}\tilde{g}^2 \\
& +\frac{1}{2}\tilde{g}^2 \quad +\frac{1}{2}\tilde{g}^2 \\
& +\frac{1}{6}\tilde{g}^4 \quad -\tilde{g}^2 \\
& -\tilde{g}^2 \sum_f
\end{aligned}
\tag{D.6}$$

Für die Resummation der DSG ist es wichtig, den Faktor  $\frac{3}{2}$  vor dem zweiten bzw. dritten Graphen der rechten Seite von D.6 zu erklären. Im graphischen Formalismus werden innere Crossing-Symmetrien über die statistischen Vorfaktoren der Graphenklassen verarbeitet. Daher muss man die eigentlichen sechs Graphen mit Blick auf die anschließende Verwendung in einer *inneren* zweifachen Gluonschleife wie in der DSG des  $\Gamma_4$ -Vertex zu zwei Äquivalenzklassen zusammenfassen. Wir notieren im folgenden die sechs Ursprungsgraphen. Der

Vorfaktor  $\frac{1}{2}$  erscheint, weil hier explizit auch *innere* Crossing-Symmetrien aufgeführt werden.

$$\begin{aligned}
 & \frac{3}{2} \text{ [Diagram 1]} + \frac{3}{2} \text{ [Diagram 2]} \\
 \mathbb{R} \quad & \frac{1}{2} \text{ [Diagram 3]} + \frac{1}{2} \text{ [Diagram 4]} \\
 & + \frac{1}{2} \text{ [Diagram 5]} + \frac{1}{2} \text{ [Diagram 6]} \\
 & + \frac{1}{2} \text{ [Diagram 7]} + \frac{1}{2} \text{ [Diagram 8]}
 \end{aligned}
 \tag{D.7}$$

The diagrams are Feynman diagrams for a four-point process. Each diagram consists of four external wavy lines and a central square loop. A circle is attached to the top-left vertex of the square. The diagrams represent different internal crossing symmetries of the loop. The first two diagrams have a coefficient of  $\frac{3}{2}$ , while the remaining six diagrams have a coefficient of  $\frac{1}{2}$ . The symbol  $\mathbb{R}$  is placed to the left of the second row of diagrams.



## Anhang E

# Ergebnisse für den $\Gamma_4$ -Vertex

Wir notieren hier die umfangreichen Ergebnisse, die sich aus der Symmetrisierung der im s-Kanal berechneten Schleifen-Diagramme ergeben.

### E.1 Symmetrische Parameter

#### E.1.1 $\Gamma_4\Gamma_4$ -Schleife

Summe der drei Kanäle

$$\begin{aligned}
& \sim \frac{1}{\Pi_4(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2)} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4=0}^r (\Lambda^2)^{4r-\sum k_i} \frac{\tilde{g}^2(\Lambda^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{1}{b^2} \\
& \left\{ \Sigma_{TT}(k_1, k_2; k_3, k_4) \left( \left[ -\frac{27}{4} C^{(4)} \Gamma_4 + \frac{15}{4} S^{(4)} \Gamma_1 + \frac{7}{8} S^{(4)} S_4 - \frac{5}{4} C^{(5-6)} \Gamma_1 \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{7}{24} C^{(5-6)} S_4 \right] (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} + \left[ -\frac{27}{4} C^{(6)} \Gamma_6 + \frac{15}{4} S^{(4)} \Gamma_3 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{7}{8} S^{(4)} S_4 - \frac{5}{4} C^{(4-5)} \Gamma_3 - \frac{7}{24} C^{(4-5)} S_4 \right] (p_4^2)^{k_1} (p_1^2)^{k_2} (p_2^2)^{k_3} (p_3^2)^{k_4} \right. \\
& \quad \left. + \left[ -\frac{27}{4} C^{(5)} \Gamma_5 + \frac{15}{4} S^{(4)} \Gamma_2 + \frac{7}{8} S^{(4)} S_4 - \frac{5}{4} C^{(6-4)} \Gamma_2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{7}{24} C^{(6-4)} S_4 \right] (p_3^2)^{k_1} (p_1^2)^{k_2} (p_2^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} \right) \\
& + \Sigma_{DD}(k_1, k_2; k_3, k_4) \left( \left[ 50 C^{(1)} \Gamma_1 + 10 S^{(4)} \Gamma_1 + \frac{35}{3} C^{(1)} S_4 - \frac{7}{3} S^{(4)} S_4 \right] \right. \\
& \quad \left. (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} + \left[ 50 C^{(3)} \Gamma_3 + 10 S^{(4)} \Gamma_3 + \frac{35}{3} C^{(3)} S_4 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{7}{3} S^{(4)} S_4 \right] (p_4^2)^{k_1} (p_1^2)^{k_2} (p_2^2)^{k_3} (p_3^2)^{k_4} + \left[ 50 C^{(2)} \Gamma_2 + 10 S^{(4)} \Gamma_2 + \frac{35}{3} C^{(2)} S_4 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{7}{3} S^{(4)} S_4 \right] (p_3^2)^{k_1} (p_1^2)^{k_2} (p_2^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} \right) \\
& + \Sigma_{EE}(k_1, k_2; k_3, k_4) \left( \left[ 27 C^{(1)} \Gamma_1 + C^{(2)} \Gamma_3 + C^{(3)} \Gamma_2 \right] \right. \\
& \quad \left. (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} + \left[ 27 C^{(3)} \Gamma_3 + C^{(2)} \Gamma_1 + C^{(1)} \Gamma_2 \right] \right. \\
& \quad \left. (p_4^2)^{k_1} (p_1^2)^{k_2} (p_2^2)^{k_3} (p_3^2)^{k_4} + \left[ 27 C^{(2)} \Gamma_2 + C^{(3)} \Gamma_1 + C^{(1)} \Gamma_3 \right] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (p_3^2)^{k_1} (p_1^2)^{k_2} (p_2^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} \\
& + \Sigma_{TD}^{sym}(k_1, k_2; k_3, k_4) \left( \left[ -\frac{51}{2} C^{(1)} \Gamma_1 + \frac{7}{2} C^{(1)} S_4 - \frac{17}{2} C^{(5-6)} \Gamma_1 \right. \right. \\
& \quad - \frac{7}{6} C^{(5-6)} S_4 \left. \right] (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} + \left[ -\frac{51}{2} C^{(3)} \Gamma_3 + \frac{7}{2} C^{(3)} S_4 \right. \\
& \quad - \frac{17}{2} C^{(4-5)} \Gamma_3 - \frac{7}{6} C^{(4-5)} S_4 \left. \right] (p_4^2)^{k_1} (p_1^2)^{k_2} (p_2^2)^{k_3} (p_3^2)^{k_4} + \left[ -\frac{51}{2} C^{(2)} \Gamma_2 \right. \\
& \quad + \frac{7}{2} C^{(2)} S_4 - \frac{17}{2} C^{(6-4)} \Gamma_2 - \frac{7}{6} C^{(6-4)} S_4 \left. \right] (p_3^2)^{k_1} (p_1^2)^{k_2} (p_2^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} \\
& + \Sigma_{TE}^{sym}(k_1, k_2; k_3, k_4) \left( \left[ \frac{3}{2} C^{(4)} \Gamma_4 - \frac{27}{2} C^{(1)} \Gamma_1 + 2C^{(5-6)} \Gamma_1 \right. \right. \\
& \quad - \frac{7}{12} C^{(5-6)} S_4 \left. \right] (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} + \left[ \frac{3}{2} C^{(6)} \Gamma_6 - \frac{27}{2} C^{(3)} \Gamma_3 \right. \\
& \quad + 2C^{(4-5)} \Gamma_3 - \frac{7}{12} C^{(4-5)} S_4 \left. \right] (p_4^2)^{k_1} (p_1^2)^{k_2} (p_2^2)^{k_3} (p_3^2)^{k_4} + \left[ \frac{3}{2} C^{(5)} \Gamma_5 \right. \\
& \quad - \frac{27}{2} C^{(2)} \Gamma_2 + 2C^{(6-4)} \Gamma_2 - \frac{7}{12} C^{(6-4)} S_4 \left. \right] (p_3^2)^{k_1} (p_1^2)^{k_2} (p_2^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} \\
& + \Sigma_{DE}^{sym}(k_1, k_2; k_3, k_4) \left( \left[ 45C^{(1)} \Gamma_1 + \frac{7}{6} S^{(4)} S_4 + S^{(4)} \Gamma_1 \right] \right. \\
& \quad (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} + \left[ 45C^{(3)} \Gamma_3 + \frac{7}{6} S^{(4)} S_4 + S^{(4)} \Gamma_3 \right] \\
& \quad (p_4^2)^{k_1} (p_1^2)^{k_2} (p_2^2)^{k_3} (p_3^2)^{k_4} + \left[ 45C^{(2)} \Gamma_2 + \frac{7}{6} S^{(4)} S_4 + S^{(4)} \Gamma_2 \right] \\
& \quad \left. \left. (p_3^2)^{k_1} (p_1^2)^{k_2} (p_2^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} \right) \right\} \tag{E.1}
\end{aligned}$$

### E.1.2 $\Gamma_4 \Gamma_3 \Gamma_3$ -Schleife

Summe der 6 Diagramme

$$\begin{aligned}
& \sim \frac{1}{\Pi_4(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2)} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4=0}^r (\Lambda^2)^{4r-\sum k_i} \frac{\tilde{g}^2(\Lambda^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{1}{b^3} \\
& \left\{ \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym}(k_1, k_2; k_3, k_4) \left( \left[ C^{(5-6)} \Gamma_1 - 3S^{(4)} \Gamma_1 - \frac{1}{4} S^{(4)} S_4 - \frac{1}{12} C^{(5-6)} S_4 \right] \right. \right. \\
& \quad (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} + \left[ C^{(4-5)} \Gamma_3 - 3S^{(4)} \Gamma_3 - \frac{1}{4} S^{(4)} S_4 - \frac{1}{12} C^{(4-5)} S_4 \right] \\
& \quad (p_4^2)^{k_1} (p_1^2)^{k_2} (p_2^2)^{k_3} (p_3^2)^{k_4} + \left[ C^{(6-4)} \Gamma_2 - 3S^{(4)} \Gamma_2 - \frac{1}{4} S^{(4)} S_4 - \frac{1}{12} C^{(6-4)} S_4 \right] \\
& \quad \left. \left. (p_3^2)^{k_1} (p_1^2)^{k_2} (p_2^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} \right) \right. \\
& + \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym}(k_1, k_2; k_3, k_4) \left( \left[ 15C^{(1)} \Gamma_1 - 5C^{(5-6)} \Gamma_1 - C^{(1)} S_4 + \frac{1}{3} C^{(5-6)} S_4 \right] \right. \\
& \quad (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} + \left[ 15C^{(3)} \Gamma_3 - 5C^{(4-5)} \Gamma_3 - C^{(3)} S_4 + \frac{1}{3} C^{(4-5)} S_4 \right] \\
& \quad (p_4^2)^{k_1} (p_1^2)^{k_2} (p_2^2)^{k_3} (p_3^2)^{k_4} + \left[ 15C^{(2)} \Gamma_2 - 5C^{(6-4)} \Gamma_2 - C^{(2)} S_4 + \frac{1}{3} C^{(6-4)} S_4 \right] \\
& \quad \left. \left. (p_3^2)^{k_1} (p_1^2)^{k_2} (p_2^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Sigma_{E\Gamma}^{sym}(k_1, k_2; k_3, k_4) \left( [9C^{(1)}\Gamma_1 - C^{(5-6)}\Gamma_1 + \frac{1}{6}C^{(5-6)}S_4] \right. \\
& (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} + \left( [9C^{(3)}\Gamma_3 - C^{(4-5)}\Gamma_3 + \frac{1}{6}C^{(4-5)}S_4] \right. \\
& (p_4^2)^{k_1} (p_1^2)^{k_2} (p_2^2)^{k_3} (p_3^2)^{k_4} + \left( [9C^{(2)}\Gamma_2 - C^{(6-4)}\Gamma_2 + \frac{1}{6}C^{(6-4)}S_4] \right. \\
& \left. \left. (p_3^2)^{k_1} (p_1^2)^{k_2} (p_2^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{E.2}$$

## E.2 Mandelstam-symmetrische Parameter

### E.2.1 $\Gamma_4\Gamma_4$ -Schleife

Zur notatorischen Vereinfachung unterdrücken wir an den  $\Sigma$ -Parametern wieder die Impulsabhängigkeit. Da es aber keine einfache Symmetrietransformation bezüglich der Mandelstam-Kanäle unter den  $\Sigma_x^i$  gibt, notieren wir die Vertauschung der Impulse in der Form

$$\Sigma(a, b, c, d) = \Sigma|_{abcd} \tag{E.3}$$

für den gesamten Beitrag eines Kanals. Damit erhalten wir das folgende Ergebnis.

$$\begin{aligned}
& \text{Summe der drei Kanäle} \\
\sim & \frac{1}{\Pi_4(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2)} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4=0}^r (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} \frac{1}{b^2} (\Lambda^2)^{4r-\Sigma k_i} \\
& \frac{\tilde{g}^2(\Lambda^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2 \epsilon} \left[ \left\{ -3C^{(4)}(\Gamma_3 - \Gamma_2)\Sigma_{TT}^{ss} - \frac{3}{4}C^{(4)}(\Gamma_3 - \Gamma_2)\{\Sigma_{TT}^{sym st} + \Sigma_{TT}^{sym su}\} \right. \right. \\
& + \left[ \frac{3}{4}S^{(4)} - \frac{3}{4}C^{(4)} - \frac{1}{4}(C^{(5)} - C^{(6)}) \right] \left[ 2\Gamma_1 - \frac{1}{2}(\Gamma_1 - \Gamma_3) + \frac{1}{24}S_4 \right] \{\Sigma_{TT}^{tt} + \Sigma_{TT}^{uu}\} \\
& + \left[ -\frac{3}{4}S^{(4)} - \frac{3}{4}C^{(4)} + \frac{1}{4}(C^{(5)} - C^{(6)}) \right] \left[ -2\Gamma_1 - \frac{1}{2}(\Gamma_2 - \Gamma_1) - \frac{1}{24}S_4 \right] \Sigma_{TT}^{sym tu} \\
& + 24C^{(1)}\Gamma_1\Sigma_{EE}^{ss} + C^{(2)}\left(\frac{1}{2}\Gamma_3 + \frac{1}{24}S_4\right)\{\Sigma_{EE}^{tt} + \Sigma_{EE}^{uu}\} \\
& + \frac{3}{4}C^{(1)}\Gamma_1\{\Sigma_{EE}^{sym st} + \Sigma_{EE}^{sym su}\} + C^{(3)}\left(\frac{1}{2}\Gamma_2 + \frac{1}{24}S_4\right)\Sigma_{EE}^{sym tu} \\
& + 8C^{(1)}\left(\frac{7}{6}S_4 - \Gamma_1\right)\Sigma_{DD}^{ss} + C^{(2)}\left(\frac{9}{2}\Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_3 + \frac{1}{24}S_4\right)\{\Sigma_{DD}^{tt} + \Sigma_{DD}^{uu}\} \\
& + C^{(1)}\left(\Gamma_1 - \frac{7}{12}S_4\right)\{\Sigma_{DD}^{sym st} + \Sigma_{DD}^{sym su}\} + C^{(3)}\left(\frac{9}{2}\Gamma_1 + \frac{9}{2}\Gamma_2 + \frac{1}{24}S_4\right)\Sigma_{DD}^{sym tu} \\
& - \frac{1}{2}C^{(4)}(\Gamma_2 - \Gamma_3)\{\Sigma_{symTE}^{sym st} + \Sigma_{symTE}^{sym su}\} - \frac{27}{4}C^{(1)}\Gamma_1\{\Sigma_{symTE}^{sym ts} + \Sigma_{symTE}^{sym us}\} \\
& - C^{(6)}\left(\frac{3}{4}\Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_2 - \frac{1}{24}S_4\right)\Sigma_{symTE}^{sym tt} + C^{(5)}\left(\frac{3}{4}\Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_3 - \frac{1}{24}S_4\right)\Sigma_{symTE}^{sym tu} \\
& - C^{(5)}\left(\frac{1}{2}\Gamma_3 - \frac{3}{4}\Gamma_1 + \frac{1}{24}S_4\right)\Sigma_{symTE}^{sym ut} + C^{(6)}\left(\frac{1}{2}\Gamma_2 - \frac{3}{4}\Gamma_1 + \frac{1}{24}S_4\right)\Sigma_{symTE}^{sym uu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}C^{(4)}(\Gamma_3 - \Gamma_2)\{\Sigma_{symTD}^{sym\ st} + \Sigma_{symTD}^{sym\ su}\} - 3C^{(1)}(2\Gamma_1 - \frac{7}{12}S_4)\Sigma_{symTD}^{sym\ ts} \\
& -C^{(6)}(3\Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_3 - \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTD}^{sym\ tt} + C^{(5)}(3\Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_2 - \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTD}^{sym\ tu} \\
& -3C^{(1)}(2\Gamma_1 - \frac{7}{12}S_4)\Sigma_{symTD}^{sym\ us} + C^{(5)}(3\Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_2 - \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTD}^{sym\ ut} \\
& -C^{(6)}(3\Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_3 - \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTD}^{sym\ uu} \\
& +12C^{(1)}\Gamma_1\Sigma_{symDE}^{sym\ ss} + \frac{1}{2}C^{(1)}(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \frac{1}{24}S_4)\{\Sigma_{symDE}^{sym\ st} + \Sigma_{symDE}^{sym\ su}\} \\
& +\frac{15}{4}C^{(1)}\Gamma_1\{\Sigma_{symDE}^{sym\ ts} + \Sigma_{symDE}^{sym\ us}\} + C^{(2)}(\frac{3}{4}\Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_2 + \frac{1}{24}S_4)\{\Sigma_{symDE}^{sym\ tt} \\
& +\Sigma_{symDE}^{sym\ uu}\} + C^{(3)}(\frac{3}{4}\Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_3 + \frac{1}{24}S_4)\{\Sigma_{symDE}^{sym\ tu} + \Sigma_{symDE}^{sym\ ut}\} \Big|_{k_1k_2k_3k_4} \\
& +\left\{ -3C^{(5)}(\Gamma_1 - \Gamma_3)\Sigma_{TT}^{ss} - \frac{3}{4}C^{(5)}(\Gamma_1 - \Gamma_3)\{\Sigma_{TT}^{sym\ st} + \Sigma_{TT}^{sym\ su}\} \right. \\
& +\left. \left[ \frac{3}{4}S^{(4)} - \frac{3}{4}C^{(5)} - \frac{1}{4}(C^{(6)} - C^{(4)}) \right] \left[ 2\Gamma_2 - \frac{1}{2}(\Gamma_2 - \Gamma_1) + \frac{1}{24}S_4 \right] \{\Sigma_{TT}^{tt} + \Sigma_{TT}^{uu}\} \right. \\
& +\left. \left[ -\frac{3}{4}S^{(4)} - \frac{3}{4}C^{(5)} + \frac{1}{4}(C^{(6)} - C^{(4)}) \right] \left[ -2\Gamma_2 - \frac{1}{2}(\Gamma_3 - \Gamma_2) - \frac{1}{24}S_4 \right] \Sigma_{TT}^{sym\ tu} \right. \\
& +24C^{(2)}\Gamma_2\Sigma_{EE}^{ss} + C^{(3)}(\frac{1}{2}\Gamma_1 + \frac{1}{24}S_4)\{\Sigma_{EE}^{tt} + \Sigma_{EE}^{uu}\} \\
& +\frac{3}{4}C^{(2)}\Gamma_2\{\Sigma_{EE}^{sym\ st} + \Sigma_{EE}^{sym\ su}\} + C^{(1)}(\frac{1}{2}\Gamma_3 + \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{EE}^{sym\ tu} \\
& +8C^{(2)}(\frac{7}{6}S_4 - \Gamma_2)\Sigma_{DD}^{ss} + C^{(3)}(\frac{9}{2}\Gamma_2 + \frac{1}{2}\Gamma_1 + \frac{1}{24}S_4)\{\Sigma_{DD}^{tt} + \Sigma_{DD}^{uu}\} \\
& +C^{(2)}(\Gamma_2 - \frac{7}{12}S_4)\{\Sigma_{DD}^{sym\ st} + \Sigma_{DD}^{sym\ su}\} + C^{(1)}(\frac{9}{2}\Gamma_2 + \frac{1}{2}\Gamma_3 + \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{DD}^{sym\ tu} \\
& -\frac{1}{2}C^{(5)}(\Gamma_3 - \Gamma_1)\{\Sigma_{symTE}^{sym\ st} + \Sigma_{symTE}^{sym\ su}\} - \frac{27}{4}C^{(2)}\Gamma_2\{\Sigma_{symTE}^{sym\ ts} + \Sigma_{symTE}^{sym\ us}\} \\
& -C^{(4)}(\frac{3}{4}\Gamma_2 - \frac{1}{2}\Gamma_3 - \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTE}^{sym\ tt} + C^{(6)}(\frac{3}{4}\Gamma_2 - \frac{1}{2}\Gamma_1 - \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTE}^{sym\ tu} \\
& -C^{(6)}(\frac{1}{2}\Gamma_1 - \frac{3}{4}\Gamma_2 + \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTE}^{sym\ ut} + C^{(4)}(\frac{1}{2}\Gamma_3 - \frac{3}{4}\Gamma_2 + \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTE}^{sym\ uu} \\
& -\frac{1}{2}C^{(5)}(\Gamma_1 - \Gamma_3)\{\Sigma_{symTD}^{sym\ st} + \Sigma_{symTD}^{sym\ su}\} - 3C^{(2)}(2\Gamma_2 - \frac{7}{12}S_4)\Sigma_{symTD}^{sym\ ts} \\
& -C^{(4)}(3\Gamma_2 - \frac{1}{2}\Gamma_1 - \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTD}^{sym\ tt} + C^{(6)}(3\Gamma_2 - \frac{1}{2}\Gamma_3 - \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTD}^{sym\ tu} \\
& -3C^{(2)}(2\Gamma_2 - \frac{7}{12}S_4)\Sigma_{symTD}^{sym\ us} + C^{(6)}(3\Gamma_2 - \frac{1}{2}\Gamma_3 - \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTD}^{sym\ ut} \\
& -C^{(4)}(3\Gamma_2 - \frac{1}{2}\Gamma_1 - \frac{1}{24}S_4)\Sigma_{symTD}^{sym\ uu} \\
& +12C^{(2)}\Gamma_2\Sigma_{symDE}^{sym\ ss} + \frac{1}{2}C^{(2)}(\Gamma_3 + \Gamma_1 + \frac{1}{24}S_4)\{\Sigma_{symDE}^{sym\ st} + \Sigma_{symDE}^{sym\ su}\} \\
& +\frac{15}{4}C^{(2)}\Gamma_2\{\Sigma_{symDE}^{sym\ ts} + \Sigma_{symDE}^{sym\ us}\} + C^{(3)}(\frac{3}{4}\Gamma_2 + \frac{1}{2}\Gamma_3 + \frac{1}{24}S_4)\{\Sigma_{symDE}^{sym\ tt} \\
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Sigma_{symDE}^{sym\ uu} \} + C^{(1)} \left( \frac{3}{4} \Gamma_2 + \frac{1}{2} \Gamma_1 + \frac{1}{24} S_4 \right) \{ \Sigma_{symDE}^{sym\ tu} + \Sigma_{symDE}^{sym\ ut} \} \Big|_{k_3 k_1 k_2 k_4} \\
& + \left\{ -3C^{(6)} (\Gamma_2 - \Gamma_1) \Sigma_{TT}^{ss} - \frac{3}{4} C^{(6)} (\Gamma_2 - \Gamma_1) \{ \Sigma_{TT}^{sym\ st} + \Sigma_{TT}^{sym\ su} \} \right. \\
& + \left[ \frac{3}{4} S^{(4)} - \frac{3}{4} C^{(6)} - \frac{1}{4} (C^{(4)} - C^{(5)}) \right] \left[ 2\Gamma_3 - \frac{1}{2} (\Gamma_3 - \Gamma_2) + \frac{1}{24} S_4 \right] \{ \Sigma_{TT}^{tt} + \Sigma_{TT}^{uu} \} \\
& + \left[ -\frac{3}{4} S^{(4)} - \frac{3}{4} C^{(6)} + \frac{1}{4} (C^{(4)} - C^{(5)}) \right] \left[ -2\Gamma_3 - \frac{1}{2} (\Gamma_1 - \Gamma_3) - \frac{1}{24} S_4 \right] \Sigma_{TT}^{sym\ tu} \\
& + 24C^{(3)} \Gamma_3 \Sigma_{EE}^{ss} + C^{(1)} \left( \frac{1}{2} \Gamma_2 + \frac{1}{24} S_4 \right) \{ \Sigma_{EE}^{tt} + \Sigma_{EE}^{uu} \} \\
& + \frac{3}{4} C^{(3)} \Gamma_3 \{ \Sigma_{EE}^{sym\ st} + \Sigma_{EE}^{sym\ su} \} + C^{(2)} \left( \frac{1}{2} \Gamma_1 + \frac{1}{24} S_4 \right) \Sigma_{EE}^{sym\ tu} \\
& + 8C^{(3)} \left( \frac{7}{6} S_4 - \Gamma_3 \right) \Sigma_{DD}^{ss} + C^{(1)} \left( \frac{9}{2} \Gamma_3 + \frac{1}{2} \Gamma_2 + \frac{1}{24} S_4 \right) \{ \Sigma_{DD}^{tt} + \Sigma_{DD}^{uu} \} \\
& + C^{(3)} \left( \Gamma_3 - \frac{7}{12} S_4 \right) \{ \Sigma_{DD}^{sym\ st} + \Sigma_{DD}^{sym\ su} \} + C^{(2)} \left( \frac{9}{2} \Gamma_3 + \frac{1}{2} \Gamma_1 + \frac{1}{24} S_4 \right) \Sigma_{DD}^{sym\ tu} \\
& - \frac{1}{2} C^{(6)} (\Gamma_1 - \Gamma_2) \{ \Sigma_{symTE}^{sym\ st} + \Sigma_{symTE}^{sym\ su} \} - \frac{27}{4} C^{(3)} \Gamma_3 \{ \Sigma_{symTE}^{sym\ ts} + \Sigma_{symTE}^{sym\ us} \} \\
& - C^{(5)} \left( \frac{3}{4} \Gamma_3 - \frac{1}{2} \Gamma_1 - \frac{1}{24} S_4 \right) \Sigma_{symTE}^{sym\ tt} + C^{(4)} \left( \frac{3}{4} \Gamma_3 - \frac{1}{2} \Gamma_2 - \frac{1}{24} S_4 \right) \Sigma_{symTE}^{sym\ tu} \\
& - C^{(4)} \left( \frac{1}{2} \Gamma_2 - \frac{3}{4} \Gamma_3 + \frac{1}{24} S_4 \right) \Sigma_{symTE}^{sym\ ut} + C^{(5)} \left( \frac{1}{2} \Gamma_1 - \frac{3}{4} \Gamma_3 + \frac{1}{24} S_4 \right) \Sigma_{symTE}^{sym\ uu} \\
& - \frac{1}{2} C^{(6)} (\Gamma_2 - \Gamma_1) \{ \Sigma_{symTD}^{sym\ st} + \Sigma_{symTD}^{sym\ su} \} - 3C^{(3)} \left( 2\Gamma_3 - \frac{7}{12} S_4 \right) \Sigma_{symTD}^{sym\ ts} \\
& - C^{(5)} \left( 3\Gamma_3 - \frac{1}{2} \Gamma_2 - \frac{1}{24} S_4 \right) \Sigma_{symTD}^{sym\ tt} + C^{(4)} \left( 3\Gamma_3 - \frac{1}{2} \Gamma_1 - \frac{1}{24} S_4 \right) \Sigma_{symTD}^{sym\ tu} \\
& - 3C^{(3)} \left( 2\Gamma_3 - \frac{7}{12} S_4 \right) \Sigma_{symTD}^{sym\ us} + C^{(4)} \left( 3\Gamma_3 - \frac{1}{2} \Gamma_1 - \frac{1}{24} S_4 \right) \Sigma_{symTD}^{sym\ ut} \\
& - C^{(5)} \left( 3\Gamma_3 - \frac{1}{2} \Gamma_2 - \frac{1}{24} S_4 \right) \Sigma_{symTD}^{sym\ uu} \\
& + 12C^{(3)} \Gamma_3 \Sigma_{symDE}^{sym\ ss} + \frac{1}{2} C^{(3)} (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \frac{1}{24} S_4) \{ \Sigma_{symDE}^{sym\ st} + \Sigma_{symDE}^{sym\ su} \} \\
& + \frac{15}{4} C^{(3)} \Gamma_3 \{ \Sigma_{symDE}^{sym\ ts} + \Sigma_{symDE}^{sym\ us} \} + C^{(1)} \left( \frac{3}{4} \Gamma_3 + \frac{1}{2} \Gamma_1 + \frac{1}{24} S_4 \right) \{ \Sigma_{symDE}^{sym\ tt} \\
& + \Sigma_{symDE}^{sym\ uu} \} + C^{(2)} \left( \frac{3}{4} \Gamma_3 + \frac{1}{2} \Gamma_2 + \frac{1}{24} S_4 \right) \{ \Sigma_{symDE}^{sym\ tu} + \Sigma_{symDE}^{sym\ ut} \} \Big|_{k_4 k_1 k_2 k_3} \Big] \\
\end{aligned} \tag{E.4}$$

### E.2.2 $\Gamma_4 \Gamma_3 \Gamma_3$ -Schleife

Wir nutzen die gleiche Konvention wie oben, um die Impulsabhängigkeit der  $\Sigma$ -Parameter zu notieren. Dann erhält man das folgende Ergebnis.

$$\begin{aligned}
& \text{Summe der 3 Kanäle} \\
& \sim \frac{1}{\Pi_4(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2)} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4=0}^r (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (p_4^2)^{k_4} \frac{1}{b^3} (\Lambda^2)^{4r - \sum k_i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{g}^2(\Lambda^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2\epsilon} \left[ \left\{ \left( \frac{1}{2}C^{(5)} - \frac{1}{2}C^{(4)} - \frac{3}{4}S^{(4)} \right) (2\Gamma_1 + \frac{1}{6}S_4) \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym t} \right. \right. \\
& - \left( \frac{1}{2}C^{(6)} - \frac{1}{2}C^{(4)} + \frac{3}{4}S^{(4)} \right) (2\Gamma_1 + \frac{1}{6}S_4) \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym u} \\
& + 9C^{(1)}\Gamma_1 \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym s} - C^{(5)}(\Gamma_1 - \frac{1}{6}S_4) \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym t} + C^{(6)}(\Gamma_1 - \frac{1}{6}S_4) \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym u} \\
& + 3C^{(1)}(2\Gamma_1 - \frac{1}{3}S_4) \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym s} - C^{(5)}(4\Gamma_1 - \frac{1}{6}S_4) \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym t} \\
& \left. \left. + C^{(6)}(4\Gamma_1 - \frac{1}{6}S_4) \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym u} \right\} \Big|_{k_1 k_2 k_3 k_4} \right. \\
& + \left\{ \left( \frac{1}{2}C^{(6)} - \frac{1}{2}C^{(5)} - \frac{3}{4}S^{(4)} \right) (2\Gamma_2 + \frac{1}{6}S_4) \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym t} \right. \\
& - \left( \frac{1}{2}C^{(4)} - \frac{1}{2}C^{(5)} + \frac{3}{4}S^{(4)} \right) (2\Gamma_2 + \frac{1}{6}S_4) \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym u} \\
& + 9C^{(2)}\Gamma_2 \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym s} - C^{(6)}(\Gamma_2 - \frac{1}{6}S_4) \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym t} + C^{(4)}(\Gamma_2 - \frac{1}{6}S_4) \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym u} \\
& + 3C^{(2)}(2\Gamma_2 - \frac{1}{3}S_4) \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym s} - C^{(6)}(4\Gamma_2 - \frac{1}{6}S_4) \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym t} \\
& \left. \left. + C^{(4)}(4\Gamma_2 - \frac{1}{6}S_4) \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym u} \right\} \Big|_{k_3 k_1 k_2 k_4} \right. \\
& + \left\{ \left( \frac{1}{2}C^{(4)} - \frac{1}{2}C^{(6)} - \frac{3}{4}S^{(4)} \right) (2\Gamma_3 + \frac{1}{6}S_4) \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym t} \right. \\
& - \left( \frac{1}{2}C^{(5)} - \frac{1}{2}C^{(6)} + \frac{3}{4}S^{(4)} \right) (2\Gamma_3 + \frac{1}{6}S_4) \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym u} \\
& + 9C^{(3)}\Gamma_3 \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym s} - C^{(4)}(\Gamma_3 - \frac{1}{6}S_4) \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym t} + C^{(5)}(\Gamma_3 - \frac{1}{6}S_4) \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym u} \\
& + 3C^{(3)}(2\Gamma_3 - \frac{1}{3}S_4) \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym s} - C^{(4)}(4\Gamma_3 - \frac{1}{6}S_4) \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym t} \\
& \left. \left. + C^{(5)}(4\Gamma_3 - \frac{1}{6}S_4) \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym u} \right\} \Big|_{k_4 k_1 k_3 k_2} \right. \\
& \left. \right] \tag{E.5}
\end{aligned}$$

### E.2.3 Symmetrie der $\Sigma$ -Parameter

Für die Analyse der SKG ist es wichtig, die Symmetrie der  $\Sigma$ -Parameter unter Permutationen zu untersuchen. Wir wiederholen die Abkürzungen für die Mandelstam-symmetrischen Parameterklassen.

$$\begin{aligned}
s & \simeq 1, 2, 3, 4 & \sim a, b, c, d \\
t & \simeq 1, 3, 4, 2 & \sim 3, 1, 2, 4 \sim a, c, d, b \\
u & \simeq 1, 4, 2, 3 & \sim 4, 1, 3, 2 \sim a, d, b, c
\end{aligned} \tag{E.6}$$

Wir betrachten zunächst die Ergebnisse der  $\Gamma_4\Gamma_4$ -Schleife. Dort lautet die allgemeine Definition der  $\Sigma$ -Parameter wie folgt.

$$\Sigma_{sym XY}^{sym ij} \Big|_{abcd} \sim X^i{}_{abyx} Y^j{}_{xycd} + Y^j{}_{abyx} X^i{}_{xycd} \tag{E.7}$$

Wie man sich schnell überzeugt, gelten die folgenden Identitäten.

$$\Sigma_{symXY}^{sym ij} \Big|_{abcd} = \Sigma_{symXY}^{sym ij} \Big|_{cdab} \quad (\text{E.8})$$

$$\Sigma_{symXY}^{sym st} \Big|_i = \Sigma_{symXY}^{sym ts} \Big|_i \quad (\text{E.9})$$

$$\Sigma_{symXY}^{sym tu} \Big|_i = \Sigma_{symXY}^{sym ut} \Big|_i \quad (\text{E.10})$$

$$\Sigma_{symXY}^{sym tt} \Big|_i = \Sigma_{symXY}^{sym uu} \Big|_i \quad (\text{E.11})$$

$$(\text{E.12})$$

Für Nebenbedingungen aus den SKG muss man die Konsequenzen einer Vertauschung, z.B.  $a \leftrightarrow b$ , betrachten.

1.  $s \rightarrow (b, a, c, d)$

$$\Sigma_{symXY}^{sym si} \Big|_{bacd} = \Sigma_{symXY}^{sym si} \Big|_s \quad \forall i \in \{s, t, u\} \quad (\text{E.13})$$

$$\Sigma_{symXY}^{sym tu} \Big|_{bacd} = \Sigma_{symXY}^{sym tt} \Big|_s \quad (\text{E.14})$$

$$\Sigma_{symXY}^{sym uu} \Big|_{bacd} = \Sigma_{symXY}^{sym ut} \Big|_s \quad (\text{E.15})$$

$$(\text{E.16})$$

2.  $t \rightarrow (b, c, d, a)$

$$\Sigma_{symXY}^{sym si} \Big|_{bcda} = \Sigma_{symXY}^{sym si} \Big|_u \quad \forall i \in \{s, t, u\} \quad (\text{E.17})$$

$$\Sigma_{symXY}^{sym tt} \Big|_{bcda} = \Sigma_{symXY}^{sym tu} \Big|_u \quad (\text{E.18})$$

$$\Sigma_{symXY}^{sym tu} \Big|_{bcda} = \Sigma_{symXY}^{sym tt} \Big|_u \quad (\text{E.19})$$

$$(\text{E.20})$$

3.  $u \rightarrow (b, d, a, c)$

$$\Sigma_{symXY}^{sym si} \Big|_{bdac} = \Sigma_{symXY}^{sym si} \Big|_t \quad \forall i \in \{s, t, u\} \quad (\text{E.21})$$

$$\Sigma_{symXY}^{sym tt} \Big|_{bdac} = \Sigma_{symXY}^{sym tu} \Big|_t \quad (\text{E.22})$$

$$\Sigma_{symXY}^{sym tu} \Big|_{bdac} = \Sigma_{symXY}^{sym tt} \Big|_t \quad (\text{E.23})$$

$$(\text{E.24})$$

Für die  $\Sigma_{X\Gamma}^{sym i}$ -Parameter finden wir das folgenden Verhalten unter der Transformation  $a \leftrightarrow b$ .

$$\Sigma_{X\Gamma}^{sym s} \Big|_t \leftrightarrow \Sigma_{X\Gamma}^{sym s} \Big|_u \quad (\text{E.25})$$

$$\Sigma_{X\Gamma}^{sym t} \Big|_s \leftrightarrow \Sigma_{X\Gamma}^{sym u} \Big|_s \quad (\text{E.26})$$

$$\Sigma_{X\Gamma}^{sym u} \Big|_t \leftrightarrow \Sigma_{X\Gamma}^{sym t} \Big|_u \quad (\text{E.27})$$

$$\Sigma_{X\Gamma}^{sym u} \Big|_u \leftrightarrow \Sigma_{X\Gamma}^{sym t} \Big|_t \quad (\text{E.28})$$

### E.2.4 $\Omega$ -Parameter

Wir notieren hier die unübersichtlichen  $\Omega$ -Parameter für die SKG, die sich mit Mandelstam-symmetrischen  $\Gamma_4$ -Vertex-Parametern ergeben.

$$\begin{aligned}
\Omega_E^m(a, b; c, d) = & \frac{1}{b^2\beta_0} \left\{ \left[ \frac{37}{64}\Sigma_{TT}^{tt+uu} + \frac{37}{64}\Sigma_{TT}^{sym\,tu} + 12\Sigma_{EE}^{ss} \right. \right. \\
& + \frac{3}{8}\Sigma_{EE}^{sym\,st+su} + \frac{2}{3}\Sigma_{DD}^{ss} + \frac{5}{24}\Sigma_{DD}^{sym\,st+su} \\
& - \frac{27}{8}\Sigma_{sym\,TE}^{sym\,ts+us} - \frac{17}{8}\Sigma_{sym\,TD}^{sym\,ts+us} \\
& + 6\Sigma_{sym\,DE}^{sym\,ss} + \frac{1}{96}\Sigma_{sym\,DE}^{sym\,st+su} + \left. \frac{15}{8}\Sigma_{sym\,DE}^{sym\,ts+us} \right] \Big|_s \\
& + \left[ \frac{13}{64}\Sigma_{TT}^{tt+uu} + \frac{1}{64}\Sigma_{TT}^{sym\,tu} + \frac{1}{48}\Sigma_{EE}^{sym\,tu} \right. \\
& + \left. \frac{1}{48}\Sigma_{DD}^{sym\,tu} + \frac{13}{48}\Sigma_{sym\,DE}^{sym\,tu+ut} \right] \Big|_t \\
& + \left[ \frac{1}{64}\Sigma_{TT}^{tt+uu} + \frac{13}{64}\Sigma_{TT}^{sym\,tu} + \frac{1}{48}\Sigma_{EE}^{tt+uu} \right. \\
& + \left. \frac{1}{48}\Sigma_{DD}^{tt+uu} + \frac{13}{48}\Sigma_{sym\,DE}^{sym\,tt+uu} \right] \Big|_u \left. \right\} \\
& + \frac{1}{b^3\beta_0} \left\{ \left[ -\frac{13}{8}\Sigma_{TT\Gamma}^{sym\,t+u} + 9\Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym\,s} - 5\Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym\,s} \right] \Big|_s \right. \\
& \left. - \frac{1}{8}\Sigma_{TT\Gamma}^{sym\,t+u} \Big|_t - \frac{1}{8}\Sigma_{TT\Gamma}^{sym\,t+u} \Big|_u \right\} \tag{E.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_D^m(a, b; c, d) = & \frac{1}{b^2\beta_0} \left\{ \left[ \frac{1}{64}\Sigma_{TT}^{tt+uu} + \frac{13}{64}\Sigma_{TT}^{sym\,tu} + \frac{14}{3}\Sigma_{DD}^{ss} \right. \right. \\
& - \frac{7}{24}\Sigma_{DD}^{sym\,st+su} + \frac{7}{8}\Sigma_{sym\,TD}^{sym\,ts+us} + \left. \frac{25}{96}\Sigma_{sym\,DE}^{sym\,st+su} \right] \Big|_s \\
& + \left[ \frac{37}{64}\Sigma_{TT}^{tt+uu} + \frac{37}{64}\Sigma_{TT}^{sym\,tu} + \frac{1}{48}\Sigma_{EE}^{sym\,tu} \right. \\
& + \left. \frac{109}{48}\Sigma_{DD}^{sym\,tu} + \frac{19}{48}\Sigma_{sym\,DE}^{sym\,tu+ut} \right] \Big|_t \\
& + \left[ \frac{13}{64}\Sigma_{TT}^{tt+uu} + \frac{1}{64}\Sigma_{TT}^{sym\,tu} + \frac{13}{48}\Sigma_{EE}^{tt+uu} \right. \\
& + \left. \frac{1}{48}\Sigma_{DD}^{tt+uu} + \frac{13}{48}\Sigma_{sym\,DE}^{sym\,tt+uu} \right] \Big|_u \left. \right\} \\
& + \frac{1}{b^3\beta_0} \left\{ \left[ -\frac{1}{8}\Sigma_{TT\Gamma}^{sym\,t+u} - \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym\,s} \right] \Big|_s \right. \\
& \left. - \frac{13}{8}\Sigma_{TT\Gamma}^{sym\,t+u} \Big|_t - \frac{1}{8}\Sigma_{TT\Gamma}^{sym\,t+u} \Big|_u \right\} \tag{E.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_T^m(a, b; c, d) = & \frac{1}{b^2\beta_0} \left\{ \left[ -\frac{3}{2}\Sigma_{TT}^{ss} - \frac{3}{8}\Sigma_{TT}^{sym\,st+su} - \frac{13}{64}\Sigma_{TT}^{tt+uu} + \frac{1}{64}\Sigma_{TT}^{sym\,tu} \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{4}\Sigma_{sym\,TE}^{sym\,st+su} - \frac{1}{4}\Sigma_{sym\,TD}^{sym\,st+su} \right] \Big|_s \\
& + \left[ \frac{1}{192}\Sigma_{TT}^{tt+uu} + \frac{13}{192}\Sigma_{TT}^{sym\,tu} + \frac{13}{48}\Sigma_{sym\,TE}^{sym\,tt+uu} \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{48}\Sigma_{sym\,TE}^{sym\,ts+us} - \frac{1}{48}\Sigma_{sym\,TD}^{sym\,ts+us} \right] \Big|_t \right. \\
& \left. + \left[ \frac{1}{192}\Sigma_{TT}^{tt+uu} + \frac{13}{192}\Sigma_{TT}^{sym\,tu} + \frac{13}{48}\Sigma_{sym\,TE}^{sym\,tt+uu} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{48}\Sigma_{sym\,TE}^{sym\,ts+us} - \frac{1}{48}\Sigma_{sym\,TD}^{sym\,ts+us} \right] \Big|_u \right. \\
& \left. + \frac{1}{b^3\beta_0} \left\{ \left[ -\frac{1}{8}\Sigma_{TT\Gamma}^{sym\,t+u} - \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym\,s} \right] \Big|_s \right. \right. \\
& \left. - \frac{13}{8}\Sigma_{TT\Gamma}^{sym\,t+u} \Big|_t - \frac{1}{8}\Sigma_{TT\Gamma}^{sym\,t+u} \Big|_u \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{48} \Sigma_{symTD}^{sym\,tt+uu} \Big|_t \\
& + \left[ -\frac{37}{192} \Sigma_{TT}^{tt+uu} - \frac{37}{192} \Sigma_{TT}^{sym\,tu} + \frac{17}{48} \Sigma_{symTE}^{sym\,tu+ut} \right. \\
& \left. - \frac{71}{48} \Sigma_{symTD}^{sym\,tu+ut} \Big|_u \right\} \\
& + \frac{1}{b^3 \beta_0} \left\{ -\frac{1}{12} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym\,t-u} \Big|_s + \left[ -\frac{1}{12} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym\,u} - \frac{1}{6} \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym\,u} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{6} \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym\,u} \Big|_t + \left[ \frac{13}{12} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym\,t} - \frac{23}{6} \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym\,t} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{23}{6} \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym\,t} \Big|_u \right] \right\} \tag{E.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_A^m(a, b; c, d) & = \frac{1}{b^2 \beta_0} \left\{ \left[ -\frac{37}{64} \Sigma_{TT}^{tt+uu} + \frac{37}{64} \Sigma_{TT}^{sym\,tu} \right] \Big|_s + \left[ \frac{13}{192} \Sigma_{TT}^{tt+uu} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{192} \Sigma_{TT}^{sym\,tu} + \frac{1}{48} \Sigma_{symTE}^{sym\,tt+uu} + \frac{13}{48} \Sigma_{symTD}^{sym\,tt+uu} \right] \Big|_t \right. \\
& \left. + \left[ -\frac{1}{192} \Sigma_{TT}^{tt+uu} - \frac{13}{192} \Sigma_{TT}^{sym\,tu} - \frac{1}{48} \Sigma_{symTE}^{sym\,tu+ut} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{13}{48} \Sigma_{symTD}^{sym\,tu+ut} \right] \Big|_u \right. \\
& \left. + \frac{1}{b^3 \beta_0} \left\{ -\frac{13}{12} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym\,t-u} \Big|_s + \left[ -\frac{1}{12} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym\,u} - \frac{1}{6} \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym\,u} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{6} \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym\,u} \Big|_t + \left[ \frac{1}{12} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym\,t} + \frac{1}{6} \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym\,t} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{6} \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym\,t} \Big|_u \right] \right\} \tag{E.32}
\end{aligned}$$

## E.3 Nebenbedingungen

### E.3.1 Symmetrische Parameter

$$\begin{aligned}
0 & = [(\Sigma_{TT}(ca; bd) - \Sigma_{TT}(da; bc)) + 4(\Sigma_{TD}^{sym}(ca; bd) - \Sigma_{TD}^{sym}(da; bc))] \\
& + 2(\Sigma_{TE}^{sym}(ca; bd) - \Sigma_{TE}^{sym}(da; bc)) \tag{E.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 & = \frac{b}{2} \left[ +\frac{7}{2} (\Sigma_{TD}^{sym}(ca; bd) - \Sigma_{TD}^{sym}(da; bc)) - 12 (\Sigma_{TE}^{sym}(ca; bd) - \Sigma_{TE}^{sym}(da; bc)) \right] \\
& - \frac{5}{6} (\Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym}(ca; bd) - \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym}(da; bc)) + \frac{13}{3} (\Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym}(ca; bd) - \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym}(da; bc)) \\
& + \frac{2}{3} (\Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym}(ca; bd) - \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym}(da; bc)) \tag{E.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 & = \frac{b}{2} \left[ \frac{27}{4} (\Sigma_{TT}(ca; bd) - \Sigma_{TT}(ab; cd)) - \frac{3}{2} (\Sigma_{TE}^{sym}(ca; bd) - \Sigma_{TE}^{sym}(ab; cd)) \right] \\
& + \frac{1}{12} (\Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym}(ca; bd) - \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym}(ab; cd)) - \frac{1}{3} (\Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym}(ca; bd) - \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym}(ab; cd)) \\
& - \frac{1}{6} (\Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym}(ca; bd) - \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym}(ab; cd)) \tag{E.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 & = \frac{b}{2} [76(\Sigma_{TD}^{sym}(ab; cd) - \Sigma_{TD}^{sym}(da; bc))] \\
& - 14(\Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym}(ab; cd) - \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym}(da; bc))
\end{aligned}$$

$$+9(\Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym}(ab; cd) - \Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym}(da; bc)) \quad (E.36)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{b}{2} \left[ \frac{15}{4} (\Sigma_{TT}(ca; bd) - \Sigma_{TT}(da; bc)) - (\Sigma_{EE}(ca; bd) - \Sigma_{EE}(da; bc)) \right. \\ &\quad \left. + (\Sigma_{DE}^{sym}(ca; bd) - \Sigma_{DE}^{sym}(da; bc)) \right] \\ &\quad - 3\Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym}(ca; bd) - \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym}(da; bc) \end{aligned} \quad (E.37)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{b}{2} [ -(\Sigma_{EE}(ca; bd) - \Sigma_{EE}(da; bc)) + \frac{7}{2} (\Sigma_{TD}^{sym}(ca; bd) - \Sigma_{TD}^{sym}(da; bc)) ] \\ &\quad - (\Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym}(ca; bd) - \Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym}(da; bc)) \end{aligned} \quad (E.38)$$

$$0 = (\Sigma_{DD}(da; bc) - \Sigma_{DD}(ab; cd)) \quad (E.39)$$

Dazu kommen noch je zwei zyklische Gleichungen, davon je eine linear unabhängige.

### E.3.2 Mandelstam-symmetrische Parameter

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{b^2\beta_0} \left\{ \frac{3}{16} (\Sigma_{TT}^{sym\,tu} - \Sigma_{TT}^{tt+uu}) \Big|_s + \left[ \frac{9}{16} \Sigma_{TT}^{tt+uu} + \frac{3}{8} \Sigma_{TT}^{sym\,tu} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} \Sigma_{EE}^{sym\,tu} + \frac{9}{4} \Sigma_{DD}^{sym\,tu} + \frac{1}{8} \Sigma_{sym\,TD}^{sym\,tu+ut} \right] \Big|_t - \left[ \frac{9}{16} \Sigma_{TT}^{sym\,tu} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{8} \Sigma_{TT}^{tt+uu} - \frac{1}{4} \Sigma_{EE}^{tt+uu} + \frac{9}{4} \Sigma_{DD}^{tt+uu} + \frac{1}{8} \Sigma_{sym\,TD}^{sym\,tt+uu} \right] \Big|_u \right\} \\ &\quad + \frac{1}{b^3\beta_0} \left\{ -\frac{3}{2} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym\,t+u} \Big|_{t-u} \right\} \end{aligned} \quad (E.40)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{b^2\beta_0} \left\{ \frac{7}{32} (\Sigma_{TT}^{sym\,tu} - \Sigma_{TT}^{tt+uu}) \Big|_s \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{19}{96} \Sigma_{TT}^{tt+uu} + \frac{25}{96} \Sigma_{TT}^{sym\,tu} - \frac{1}{12} \Sigma_{sym\,TE}^{sym\,tt+uu} + \frac{3}{2} \Sigma_{sym\,TD}^{sym\,tt+uu} \right] \Big|_t \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{19}{96} \Sigma_{TT}^{sym\,tu} + \frac{25}{96} \Sigma_{TT}^{tt+uu} - \frac{1}{12} \Sigma_{sym\,TE}^{sym\,tu} + \frac{3}{2} \Sigma_{sym\,TD}^{sym\,tu} \right] \Big|_u \right\} \\ &\quad + \frac{1}{b^3\beta_0} \left\{ -\frac{1}{6} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym\,t-u} \Big|_s + \left[ -\frac{7}{6} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym\,u} + 4\Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym\,u} + 4\Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym\,u} \right] \Big|_t \right. \\ &\quad \left. - \left[ -\frac{7}{6} \Sigma_{T\Gamma\Gamma}^{sym\,t} + 4\Sigma_{E\Gamma\Gamma}^{sym\,t} + 4\Sigma_{D\Gamma\Gamma}^{sym\,t} \right] \Big|_u \right\} \end{aligned} \quad (E.41)$$

## Anhang F

# Selbstkonsistenzgleichungen

### F.1 Residuenbildung und Koeffizientenvergleich

Wir nutzen hier eine skalare Modellamplitude mit zwei Polen, die in der Systematik des erweiterten Ansatzes formuliert worden sein soll. Aus einer 1-Schleifen-Rechnung soll ein Ergebnis kommen, dass mit dem  $\Pi(\epsilon)$ -Mechanismus behandelt wurde. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir für den perturbativen Wert 1 an. Dann erhalten wir die folgende Gleichung, die den DSG bzw. BSG der QCD entspricht.

$$\frac{c_0 p^4 + c_1 p^2 \Lambda^2 + c_2 \Lambda^4}{(p^2 + u_1 \Lambda^2)(p^2 + u_2 \Lambda^2)} = 1 + \frac{1}{\beta_0} \frac{I_0 p^4 + I_1 p^2 \Lambda^2 + I_2 \Lambda^4}{(p^2 + u_1 \Lambda^2)(p^2 + u_2 \Lambda^2)} \quad (\text{F.1})$$

Um daraus mit Residuenbildung SKG gewinnen zu können, müssen entsprechende Partialbruchzerlegungen vorgenommen werden. Mit  $\sigma_1 = u_1 + u_2$  und  $\sigma_2 = u_1 u_2$  erhalten wir für die linke Seite von (F.1) den folgenden Ausdruck.

$$\begin{aligned} (\text{F.1}) &= c_0 + \frac{-(c_1 - c_0 \sigma_1) u_1 \Lambda^4 + (c_2 - c_0 \sigma_2) \Lambda^4}{p^2 + u_1 \Lambda^2} \\ &\quad + \frac{-(c_1 - c_0 \sigma_1) u_2 \Lambda^4 + (c_2 - c_0 \sigma_2) \Lambda^4}{p^2 + u_2 \Lambda^2} \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Eine analoge Gleichung für die PBZ von  $I(p^2)$  erhält man durch den Austausch  $c_i \leftrightarrow I_i$ . Damit erhalten wir durch Residuenbildung an den Polen das folgende SKG-System.

$$c_0 = 1 + \frac{1}{\beta_0} I_0 \quad (\text{F.3})$$

$$-(c_1 - c_0 \sigma_1) u_1 + (c_2 - c_0 \sigma_2) = \frac{1}{\beta_0} [-(I_1 - I_0 \sigma_1) u_1 + (I_2 - I_0 \sigma_2)] \quad (\text{F.4})$$

$$-(c_1 - c_0 \sigma_1) u_2 + (c_2 - c_0 \sigma_2) = \frac{1}{\beta_0} [-(I_1 - I_0 \sigma_1) u_2 + (I_2 - I_0 \sigma_2)] \quad (\text{F.5})$$

Bildet man die SKG dagegen durch Koeffizientenvergleich aus (F.1), erhält man das folgende Gleichungssystem.

$$c_0 = 1 + \frac{1}{\beta_0} I_0 \quad (\text{F.6})$$

$$c_1 = \sigma_1 + \frac{1}{\beta_0} I_1 \quad (\text{F.7})$$

$$c_2 = \sigma_2 + \frac{1}{\beta_0} I_2 \quad (\text{F.8})$$

Diese beiden Gleichungssysteme kann man ineinander überführen. Bildet man  $-(\text{F.7})u_1 + (\text{F.8})$ , findet man

$$-(c_1 - \sigma_1)u_1 + c_2 - \sigma_2 = \frac{1}{\beta_0} [-I_1 u_1 + I_2] \quad . \quad (\text{F.9})$$

Setzt man in diese Gleichung noch (F.6) ein, ergibt sich (F.4). Die noch fehlende Gleichung (F.5) erhält man analog mit  $u_2$  statt  $u_1$ . Damit sind beide Darstellungen äquivalent.

Dieses Verfahren lässt sich prinzipiell auch für beliebiges  $r$  durchführen, neue Einsichten abseits umfangreicher Formeln lassen sich aber nicht gewinnen. Damit ist gezeigt, dass beide Verfahren zur Bildung der SKG in der Tat äquivalent sind. Wie man oben sieht, hat das Koeffizientenverfahren den wesentlichen Vorteil „einfachere“ Bestimmungsgleichungen zu liefern.

# Anhang G

## Partialbruchzerlegungen

Bei der Partialbruchzerlegung einer gebrochenrationalen Funktion wird immer angenommen, dass der Nennergrad größer als der Zählergrad ist und dass keine mehrfachen Polstellen vorkommen. Dann gilt:

$$\frac{f(x)}{\prod_{t=1}^{r+1} (x + a_t)} = \sum_{t=1}^{r+1} \frac{1}{x + a_t} \frac{f(-a_t)}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t)}. \quad (\text{G.1})$$

### G.1 Rücknahme der PBZ ohne Insertionen

Für die Rücknahme der PBZ ohne weitere Insertionen wie (G.5) wie sie bei punktierten Graphen vorkommen, sind allgemeine Formeln bewiesen worden [Grü 02, Wie 01b]. Wir geben hier die Resultate<sup>1</sup> an.

$$\sum_{t=1}^{r+1} \frac{(-a_t)^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t)} = 0 \quad (\text{G.2})$$

für  $n < r$ ,

$$\sum_{t=1}^{r+1} \frac{(-a_t)^r}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t)} = 1, \quad (\text{G.3})$$

$$\sum_{t=1}^{r+1} \frac{(-a_t)^{r+n}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t)} = (-1)^n \sum_{\substack{t_1, \dots, t_n \\ t_1 \leq \dots \leq t_n}} a_{t_1} \cdot \dots \cdot a_{t_n} \quad (\text{G.4})$$

für  $n > 0$ .

---

<sup>1</sup>Der Beweis für  $n > r$  erfolgt durch partielle Differentiation nach  $a_k$  und Induktion. Der Beweis für  $n \leq r$  findet sich in [Pot 00].

## G.2 Rücknahme der PBZ mit Insertionen

Bei der Berechnung „punktierter“ Graphen treten in der allgemeinen Form der PBZ aus (G.1) zusätzlich Insertionen von der Form

$$\Delta^r(-a_t) = \prod_{s=1}^r (b_s - a_t) \quad (\text{G.5})$$

auf. Man betrachtet nun den folgenden Ausdruck.

$$\Sigma_m^r = \sum_{t=1}^{r+1} \frac{(-a_t)^m}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t) \Delta^r(-a_t)} \quad (\text{G.6})$$

Mit den Definitionen

$$\delta_r = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{r+1} (a_i - a_j) \quad (\text{G.7})$$

und

$$\beta_r = \prod_{s=1}^r \prod_{t=1}^{r+1} (b_s - a_t) \quad (\text{G.8})$$

folgt:

$$(G.6) = (\delta_r)^{-1} \sum_{t=1}^{r+1} \frac{(-a_t)^m \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j; i,j \neq t}}^{r+1} (a_i - a_j) (-1)^{r+1-t}}{\Delta^r(-a_t)} \quad (\text{G.9})$$

$$= (\delta_r \beta_r)^{-1} \sum_{t=1}^{r+1} (-a_t)^m \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j; i,j \neq t}}^{r+1} (a_i - a_j) (-1)^{r+1-t} \prod_{s=1}^r \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq t}}^{r+1} (b_s - a_l) \quad (\text{G.10})$$

Definiere nun die symmetrischen Funktionen.

$$\sigma_0^r = 1 \quad (\text{G.11})$$

$$\sigma_1^r = \sum_{l=1}^r b_l \quad (\text{G.12})$$

$$\sigma_n^r = \sum_{\substack{l_1, \dots, l_n=1 \\ l_1 < \dots < l_n}}^r b_{l_1} \cdot \dots \cdot b_{l_n} \quad (\text{G.13})$$

$$\sigma_r^r = \prod_{l=1}^r b_l \quad (\text{G.14})$$

### G.2.1 Allgemeine Betrachtungen

Für praktische Rechnungen wären Formeln zur Rücknahme für allgemeines  $r$  wünschenswert.

$$(G.10) = (\delta_r \beta_r)^{-1} \sum_{t=1}^{r+1} (-a_t)^m \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j; i,j \neq t}}^{r+1} (a_i - a_j) (-1)^{r+1-t}$$

$$\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq t}}^{r+1} \sum_{s=0}^r \sigma_s^r (-a_l)^{r-s} \quad (G.15)$$

$$= (\delta_r \beta_r)^{-1} \sum_{t=1}^{r+1} (-a_t)^m \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j; i,j \neq t}}^{r+1} (a_i - a_j) (-1)^{r+1-t}$$

$$\times \sum_{\substack{s_1, \dots, s_r=0 \\ s_1 \leq \dots \leq s_r}}^r \sigma_{s_1}^r \cdot \dots \cdot \sigma_{s_r}^r \sum_{\pi \in \text{Perm}_r(r-s_1, \dots, r-s_r)} \quad (G.16)$$

$$\times (-a_1)^{\pi(1)} \cdot \dots \cdot (-a_{t-1})^{\pi(t-1)} (-a_{t+1})^{\pi(t)} \cdot \dots \cdot (-a_{r+1})^{\pi(r)}$$

Nun hilft einem die folgende Beobachtung weiter.

$$\prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{r+1} (a_i - a_j) = \sum_{\sigma \in \text{Perm}_{r+1}(0,1,\dots,r)} (a_1)^{\sigma(0)} \cdot \dots \cdot (a_{r+1})^{\sigma(r+1)}$$

$$\times \text{sign}(\sigma) \text{sign}(r, r-1, \dots, 0), \quad (G.17)$$

$$\prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j; i,j \neq t}}^{r+1} (a_i - a_j) = \sum_{\sigma \in \text{Perm}_r(0,1,\dots,r-1)} (a_1)^{\sigma(0)} \cdot \dots \cdot (a_{t-1})^{\sigma(t-2)}$$

$$\times (a_{t+1})^{\sigma(t-1)} \cdot \dots \cdot (a_{r+1})^{\sigma(r-1)}$$

$$\times \text{sign}(\sigma) \text{sign}(r-1, r-2, \dots, 0) \quad (G.18)$$

Dabei bezeichnen  $\pi$  und  $\sigma$  die Permutationen der entsprechenden Zahlentupel, die Summen gehen also über alle Permutationen der Exponenten verteilt auf die jeweiligen Basen, die Menge aller Permutationen von  $n$  Elementen wird abgekürzt mit  $\text{Perm}_n$ . Mit  $\text{sign}(\sigma)$  ist das Vorzeichen der jeweiligen Permutation gemeint; für eine zyklische Vertauschung von  $(0, 1, \dots, n)$  ergibt sich 1, für eine antizyklische  $-1$ . Einsetzen ergibt.

$$(G.17) = (\delta_r \beta_r)^{-1} \sum_{t=1}^{r+1} (-a_t)^m \sum_{\sigma \in \text{Perm}_r(0,1,\dots,r-1)} (a_1)^{\sigma(0)} \cdot \dots \cdot (a_{t-1})^{\sigma(t-2)}$$

$$(a_{t+1})^{\sigma(t-1)} \cdot \dots \cdot (a_{r+1})^{\sigma(r-1)} \text{sign}(\sigma) \text{sign}(r-1, \dots, 0) (-1)^{r+1-t}$$

$$\times \sum_{\substack{s_1, \dots, s_r=0 \\ s_1 \leq \dots \leq s_r}}^r \sigma_{s_1}^r \cdot \dots \cdot \sigma_{s_r}^r \sum_{\pi \in \text{Perm}_r(r-s_1, \dots, r-s_r)} (-a_1)^{\pi(1)} \cdot \dots \cdot$$

$$\times (-a_{t-1})^{\pi(t-1)} (-a_{t+1})^{\pi(t)} \cdot \dots \cdot (-a_{r+1})^{\pi(r)} \quad (G.19)$$

$$\begin{aligned}
&= (\delta_r \beta_r)^{-1} \sum_{\substack{s_1, \dots, s_r=0 \\ s_1 \leq \dots \leq s_r}}^r \sigma_{s_1}^r \cdot \dots \cdot \sigma_{s_r}^r \sum_{t=1}^{r+1} \sum_{\sigma \in \text{Perm}_r(0,1, \dots, r-1)} \quad (G.20) \\
&\quad \sum_{\pi \in \text{Perm}_r(r-s_1, \dots, r-s_r)} (a_1)^{\sigma(0)+\pi(1)} \cdot \dots \cdot (a_{t-1})^{\sigma(t-2)+\pi(t-1)} (a_t)^m \\
&\quad (a_{t+1})^{\sigma(t-1)+\pi(t)} \cdot \dots \cdot (a_{r+1})^{\sigma(r-1)+\pi(r)} \\
&\quad \times \text{sign}(\sigma) \text{sign}(r-1, r-2, \dots, 0) (-1)^{m+t+1-\sum_{i=1}^r s_i} \quad (G.21)
\end{aligned}$$

Das Problem besteht nun darin, aus diesem Ausdruck (G.17) auszuklammern. Dies ist uns leider nicht in voller Allgemeinheit möglich. Daher müssen wir uns auf das Studium der Fälle mit  $r = 1, 2$  und  $3$  beschränken, in denen diese Prozedur explizit ausführbar ist.

## G.2.2 Rücknahme für kleine $r$

Für kleine  $r$  kann man die Rücknahme der PBZ explizit durchführen, wobei Computer-Algebra-Systeme wie MATHEMATICA<sup>©</sup> [Wol 03] hilfreich sind. Trotz allgemeinem  $m$  ist die Rücknahme ein endliches Problem, was durch die folgende Beobachtung [Sti 01b], die eine Rekursionsformel zur Bestimmung beliebiger  $m$  darstellt, deutlich wird.

Sei  $m \geq r$ . Es folgt.

$$\begin{aligned}
&\frac{(-a_t)^m}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t) \Delta^r(-a_t)} \\
&= (-a_t)^{m-r} \frac{\Delta^r(-a_t) + (-a_t)^r - \Delta^r(-a_t)}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t) \Delta^r(-a_t)} \\
&= \frac{(-a_t)^{m-r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t)} - \sum_{l=1}^r \sigma_l^r \frac{(-a_t)^{m-l}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t) \Delta^r(-a_t)} \quad (G.22)
\end{aligned}$$

Für den ersten Term kann man die oben vorgestellten Formeln zur Zurücknahme der Partialbruchzerlegung ohne Insertionen nutzen. Insgesamt findet man also:

$$\Sigma_{m \geq r}^r = \sum_{t=1}^{r+1} \frac{(-a_t)^{m-r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t)} - \sum_{l=1}^r \sigma_l^r \Sigma_{m-l}^r \quad (G.23)$$

Damit können wir für die niedrigsten Werte von  $r$  die notwendigen Summen explizit ausrechnen.

**Formeln für  $r = 1$** 

Für  $r = 1$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Sigma_m^1 &= \sum_{t=1}^2 \frac{(-a_t)^m}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^2 (a_s - a_t) \Delta^1(-a_t)} \\ &= (\delta_1 \beta_1)^{-1} \{(-a_1)^m a_2 - (-a_2)^m a_1 + b_1(-(-a_1)^m + (-a_2)^m)\} \end{aligned} \quad \text{G.24}$$

Nun findet man für  $m = 0$  als einzigem relevanten Term:

$$\Sigma_0^1 = (\delta_1 \beta_1)^{-1} \{a_2 - a_1 + b_1(-1 + 1)\} = -(\beta_1)^{-1} \quad , \quad \text{G.25}$$

alle höheren Terme ergeben sich durch Anwendung der Rekursionsformel.

**Formeln für  $r = 2$** 

Für  $r = 2$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Sigma_m^2 &= (\delta_2 \beta_2)^{-1} (\zeta_0^m - \sigma_1^2 \zeta_1^m + (\sigma_1^2)^2 \zeta_2^m + \sigma_2^2 \zeta_3^m \\ &\quad - \sigma_1^2 \sigma_2^2 \zeta_4^m + (\sigma_2^2)^2 \zeta_5^m) \end{aligned} \quad \text{G.26}$$

mit den implizit aus (G.21) definierten  $\zeta_i^m$ :

$$\begin{aligned}\zeta_0^m &= (-a_1)^m (-(a_2)^2 (a_3)^3 + (a_2)^3 (a_3)^2) - (-a_2)^m (-(a_1)^2 (a_3)^3 + (a_1)^3 (a_3)^2) \\ &\quad + (-a_3)^m (-(a_1)^2 (a_2)^3 + (a_1)^3 (a_2)^2) \quad , \end{aligned} \quad \text{G.27}$$

$$\begin{aligned}\zeta_1^m &= (-a_1)^m (-a_2 (a_3)^3 + (a_2)^3 a_3) - (-a_2)^m (-a_1 (a_3)^3 + (a_1)^3 a_3) \\ &\quad + (-a_3)^m (-a_1 (a_2)^3 + (a_1)^3 a_2) \quad , \end{aligned} \quad \text{G.28}$$

$$\begin{aligned}\zeta_2^m &= (-a_1)^m (-a_2 (a_3)^2 + (a_2)^2 a_3) - (-a_2)^m (-a_1 (a_3)^2 + (a_1)^2 a_3) \\ &\quad + (-a_3)^m (-a_1 (a_2)^2 + (a_1)^2 a_2) \quad , \end{aligned} \quad \text{G.29}$$

$$\begin{aligned}\zeta_3^m &= (-a_1)^m (-(a_2)^2 a_3 - (a_3)^3 + (a_2)^3 + a_2 (a_3)^2) \\ &\quad - (-a_2)^m (-(a_1)^2 a_3 - (a_3)^3 + (a_1)^3 + a_1 (a_3)^2) \\ &\quad + (-a_3)^m (-(a_1)^2 a_2 - (a_2)^3 + (a_1)^3 + a_1 (a_2)^2) \quad , \end{aligned} \quad \text{G.30}$$

$$\begin{aligned}\zeta_4^m &= (-a_1)^m (-(a_3)^2 + (a_2)^2) - (-a_2)^m (-(a_3)^2 + (a_1)^2) \\ &\quad + (a_3)^m (-(a_2)^2 + (a_1)^2) \quad , \end{aligned} \quad \text{G.31}$$

$$\zeta_5^m = (-a_1)^m (-a_3 + a_2) - (-a_2)^m (-a_3 + a_1) + (-a_3)^m (-a_2 + a_1) \quad \text{G.32}$$

Man findet für  $m = 0$ :

$$\zeta_0^0 = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) \quad , \quad \text{G.33}$$

$$\zeta_1^0 = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)(a_1 + a_2 + a_3) \quad , \quad \text{G.34}$$

$$\zeta_2^0 = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3) \quad , \quad \text{G.35}$$

$$\zeta_3^0 = -(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3) \quad , \quad \text{G.36}$$

$$\zeta_4^0 = 0 \quad , \quad \text{G.37}$$

$$\zeta_5^0 = 0 \quad \text{G.38}$$

und für  $m = 1$ :

$$\zeta_0^1 = -(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)a_1a_2a_3 \quad , \quad (\text{G.39})$$

$$\zeta_1^1 = 0 \quad , \quad (\text{G.40})$$

$$\zeta_2^1 = 0 \quad , \quad (\text{G.41})$$

$$\zeta_3^1 = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)(a_1 + a_2 + a_3) \quad , \quad (\text{G.42})$$

$$\zeta_4^1 = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3) \quad , \quad (\text{G.43})$$

$$\zeta_5^1 = 0 \quad (\text{G.44})$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \Sigma_0^2 &= (\beta_2)^{-1} \{ a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - \sigma_1^2(a_1 + a_2 + a_3) \\ &\quad + (\sigma_1^2)^2 - \sigma_2^2 \} \end{aligned} \quad (\text{G.45})$$

$$\Sigma_1^2 = (\beta_2)^{-1} \{ -a_1a_2a_3 + \sigma_2^2(a_1 + a_2 + a_3) - \sigma_1^2\sigma_2^2 \} \quad (\text{G.46})$$

### Formeln für $r = 3$

Für  $r = 3$  findet man die folgende Aufteilung:

$$\begin{aligned} \Sigma_m^3 &= (\delta_3\beta_3)^{-1} \{ \zeta_1^m - \sigma_1^3\zeta_2^m + (\sigma_1^3)^2\zeta_3^m - (\sigma_1^3)^3\zeta_4^m + \sigma_2^3\zeta_5^m - \sigma_1^3\sigma_2^3\zeta_6^m \\ &\quad + (\sigma_2^3)^2\zeta_7^m + (\sigma_1^3)^2\sigma_2^3\zeta_8^m - \sigma_1^3(\sigma_2^3)^2\zeta_9^m + (\sigma_2^3)^3\zeta_{10}^m - \sigma_3^3\zeta_{11}^m + \sigma_1^3\sigma_3^3\zeta_{12}^m \\ &\quad - \sigma_2^3\sigma_3^3\zeta_{13}^m - (\sigma_1^3)^2\sigma_3^3\zeta_{14}^m + \sigma_1^3\sigma_2^3\sigma_3^3\zeta_{15}^m - (\sigma_2^3)^2\sigma_3^3\zeta_{16}^m - \sigma_1^3(\sigma_3^3)^2\zeta_{17}^m \\ &\quad + \sigma_2^3(\sigma_3^3)^2\zeta_{18}^m - (\sigma_3^3)^3\zeta_{19}^m \quad , \end{aligned} \quad (\text{G.47})$$

wobei die Parameter  $\zeta_i^m$  implizit aus (G.21) definiert sind.

Es ergibt sich für  $m = 0$ :

$$\begin{aligned} \zeta_1^0 &= -\delta_3 \{ a_1^2a_2^2a_3^2 + a_1^2a_2^2a_3a_4 + a_1^2a_2a_3^2a_4 + a_1a_2^2a_3^2a_4 + a_1^2a_2^2a_4^2 \\ &\quad + a_1^2a_2a_3a_4^2 + a_1a_2^2a_3a_4^2 + a_1^2a_3^2a_4^2 + a_1a_2a_3^2a_4^2 + a_2^2a_3^2a_4^2 \} \quad , \end{aligned} \quad (\text{G.48})$$

$$\begin{aligned} \zeta_2^0 &= -\delta_3 \{ a_1^2a_2^2a_3 + a_1^2a_2a_3^2 + a_1a_2^2a_3^2 + a_1^2a_2^2a_4 + 2a_1^2a_2a_3a_4 + 2a_1a_2^2a_3a_4 \\ &\quad + a_1^2a_3^2a_4 + 2a_1a_2a_3^2a_4 + a_2^2a_3^2a_4 + a_1^2a_2a_4^2 + a_1a_2^2a_4^2 + a_1^2a_3a_4^2 \\ &\quad + 2a_1a_2a_3a_4^2 + a_2^2a_3a_4^2 + a_1a_3^2a_4^2 + a_2a_3^2a_4^2 \} \quad , \end{aligned} \quad (\text{G.49})$$

$$\begin{aligned} \zeta_3^0 &= -\delta_3 \{ a_1^2a_2a_3 + a_1a_2^2a_3 + a_1a_2a_3^2 + a_1^2a_2a_4 + a_1a_2^2a_4 + a_1^2a_3a_4 + 3a_1a_2a_3a_4 \\ &\quad + a_2^2a_3a_4 + a_1a_3^2a_4 + a_2a_3^2a_4 + a_1a_2a_4^2 + a_1a_3a_4^2 + a_2a_3a_4^2 \} \quad , \end{aligned} \quad (\text{G.50})$$

$$\zeta_4^0 = -\delta_3 \{ a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4 \} \quad , \quad (\text{G.51})$$

$$\zeta_5^0 = -\delta_3 \{ a_1^2a_2^2 + a_1^2a_3^2 + a_2^2a_3^2 - a_1a_2a_3a_4 + a_1^2a_4^2 + a_2^2a_4^2 + a_3^2a_4^2 \} \quad , \quad (\text{G.52})$$

$$\begin{aligned} \zeta_6^0 &= -\delta_3 \{ a_1^2a_2 + a_1a_2^2 + a_1^2a_3 + a_2^2a_3 + a_1a_2^2 + a_2a_3^2 + a_1^2a_4 + a_2^2a_4 \\ &\quad + a_3^2a_4 + a_1a_4^2 + a_2a_4^2 + a_3a_4^2 \} \quad , \end{aligned} \quad (\text{G.53})$$

$$\zeta_7^0 = -\delta_3 \{ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \} \quad , \quad (\text{G.54})$$

$$\zeta_8^0 = -\delta_3 \{ a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1a_4 + a_2a_4 + a_3a_4 \} \quad , \quad (\text{G.55})$$

$$\zeta_9^0 = -\delta_3 \{ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \} \quad , \quad (\text{G.56})$$

$$\zeta_{10}^0 = -\delta_3 \quad , \quad (\text{G.57})$$

$$\zeta_{11}^0 = \delta_3 \{ a_1^2a_2 + a_1a_2^2 + a_1^2a_3 + a_1a_2a_3 + a_2^2a_3 + a_1a_3^2 + a_2a_3^2 + a_1^2a_4 \}$$

$$+a_1a_2a_4 + a_2^2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4 + a_3^2a_4 + a_1a_4^2 + a_2a_4^2 + a_3a_4^2 \} , \quad (\text{G.58})$$

$$\zeta_{12}^0 = \delta_3 \{a_1 + a_2 + a_3 + a_4\}^2 , \quad (\text{G.59})$$

$$\zeta_{13}^0 = \delta_3 \{a_1 + a_2 + a_3 + a_4\} , \quad (\text{G.60})$$

$$\zeta_{14}^0 = \delta_3 \{a_1 + a_2 + a_3 + a_4\} , \quad (\text{G.61})$$

$$\zeta_{15}^0 = 2\delta_3 , \quad (\text{G.62})$$

$$\zeta_{16}^0 = 0 , \quad (\text{G.63})$$

$$\zeta_{17}^0 = 0 , \quad (\text{G.64})$$

$$\zeta_{18}^0 = 0 , \quad (\text{G.65})$$

$$\zeta_{19}^0 = 0 \quad (\text{G.66})$$

und für  $m = 1$ :

$$\zeta_1^1 = \delta_3 a_1 a_2 a_3 a_4 \{a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4\} , \quad (\text{G.67})$$

$$\zeta_2^1 = \delta_3 a_1 a_2 a_3 a_4 \{a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_4 + a_3 a_4\} , \quad (\text{G.68})$$

$$\zeta_3^1 = \delta_3 a_1 a_2 a_3 a_4 \{a_1 + a_2 + a_3 + a_4\} , \quad (\text{G.69})$$

$$\zeta_4^1 = \delta_3 a_1 a_2 a_3 a_4 , \quad (\text{G.70})$$

$$\zeta_5^1 = -\delta_3 a_1 a_2 a_3 a_4 \{a_1 + a_2 + a_3 + a_4\} , \quad (\text{G.71})$$

$$\zeta_6^1 = -2\delta_3 a_1 a_2 a_3 a_4 , \quad (\text{G.72})$$

$$\zeta_7^1 = 0 , \quad (\text{G.73})$$

$$\zeta_8^1 = 0 , \quad (\text{G.74})$$

$$\zeta_9^1 = 0 , \quad (\text{G.75})$$

$$\zeta_{10}^1 = 0 , \quad (\text{G.76})$$

$$\zeta_{11}^1 = 0 , \quad (\text{G.77})$$

$$\begin{aligned} \zeta_{12}^1 = & -\delta_3 \{a_1^2 a_2^2 + a_1^2 a_2 a_3 + a_1 a_2^2 a_3 + a_1^2 a_3^2 + a_1 a_2 a_3^2 + a_2^2 a_3^2 + a_1^2 a_2 a_4 \\ & + a_1 a_2^2 a_4 + a_1^2 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2^2 a_3 a_4 + a_1 a_3^2 a_4 + a_2 a_3^2 a_4 \\ & + a_1^2 a_4^2 + a_1 a_2 a_4^2 + a_2^2 a_4^2 + a_1 a_3 a_4^2 + a_2 a_3 a_4^2 + a_3^2 a_4^2\} , \end{aligned} \quad (\text{G.78})$$

$$\begin{aligned} \zeta_{13}^1 = & -\delta_3 \{a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2 + a_1^2 a_3 + 2a_1 a_2 a_3 + a_2^2 a_3 + a_1 a_3^2 + a_2 a_3^2 + a_1^2 a_4 \\ & + 2a_1 a_2 a_4 + a_2^2 a_4 + 2a_1 a_3 a_4 + 2a_2 a_3 a_4 + a_3^2 a_4 + a_1 a_4^2 \\ & + a_2 a_4^2 + a_3 a_4^2\} , \end{aligned} \quad (\text{G.79})$$

$$\zeta_{14}^1 = -\delta_3 \{a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_4 + a_3 a_4\} , \quad (\text{G.80})$$

$$\zeta_{15}^1 = -\delta_3 \{a_1 + a_2 + a_3 + a_4\} , \quad (\text{G.81})$$

$$\zeta_{16}^1 = -\delta_3 , \quad (\text{G.82})$$

$$\zeta_{17}^1 = \delta_3 , \quad (\text{G.83})$$

$$\zeta_{18}^1 = 0 , \quad (\text{G.84})$$

$$\zeta_{18}^1 = 0 , \quad (\text{G.85})$$

und schließlich für  $m = 2$ :

$$\zeta_1^2 = -\delta_3 a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 , \quad (\text{G.86})$$

$$\zeta_2^2 = 0 , \quad (\text{G.87})$$

$$\zeta_3^2 = 0 \quad , \quad (G.88)$$

$$\zeta_4^2 = 0 \quad , \quad (G.89)$$

$$\zeta_5^2 = \delta_3 a_1 a_2 a_3 a_4 \{a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_4 + a_3 a_4\} \quad , \quad (G.90)$$

$$\zeta_6^2 = \delta_3 a_1 a_2 a_3 a_4 \{a_1 + a_2 + a_3 + a_4\} \quad , \quad (G.91)$$

$$\zeta_7^2 = -\delta_3 a_1 a_2 a_3 a_4 \quad , \quad (G.92)$$

$$\zeta_8^2 = \delta_3 a_1 a_2 a_3 a_4 \quad , \quad (G.93)$$

$$\zeta_9^2 = \delta_3 a_1 a_2 a_3 a_4 \quad , \quad (G.94)$$

$$\zeta_{10}^2 = 0 \quad , \quad (G.95)$$

$$\zeta_{11}^2 = 0 \quad , \quad (G.96)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{12}^2 = & \delta_3 \{a_1^2 a_2^2 a_3 + a_1^2 a_2 a_3^2 + a_1 a_2^2 a_3^2 + a_1^2 a_2^2 a_4 + a_1^2 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2^2 a_3 a_4 \\ & + a_1^2 a_3^2 a_4 + a_1 a_2 a_3^2 a_4 + a_2^2 a_3^2 a_4 + a_1^2 a_2 a_4^2 + a_1 a_2^2 a_4^2 + a_1^2 a_3 a_4^2 \\ & + a_1 a_2 a_3 a_4^2 + a_2^2 a_3 a_4^2 + a_1 a_3^2 a_4^2 + a_2 a_3^2 a_4^2\} \quad , \quad (G.97) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{13}^2 = & \delta_3 \{a_1^2 a_2 a_3 + a_1 a_2^2 a_3 + a_1 a_2 a_3^2 + a_1^2 a_2 a_4 + a_1 a_2^2 a_4 + a_1^2 a_3 a_4 \\ & + 2a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2^2 a_3 a_4 + a_1 a_3^2 a_4 + a_2 a_3^2 a_4 + a_1 a_2 a_4^2 + a_1 a_3 a_4^2 \\ & + a_2 a_3 a_4^2\} \quad , \quad (G.98) \end{aligned}$$

$$\zeta_{14}^2 = \delta_3 \{a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4\} \quad , \quad (G.99)$$

$$\zeta_{15}^2 = 0 \quad , \quad (G.100)$$

$$\zeta_{16}^2 = 0 \quad , \quad (G.101)$$

$$\zeta_{17}^2 = -\delta_3 \{a_1 + a_2 + a_3 + a_4\} \quad , \quad (G.102)$$

$$\zeta_{18}^2 = -\delta_3 \quad , \quad (G.103)$$

$$\zeta_{19}^2 = 0 \quad . \quad (G.104)$$

$$(G.105)$$

Damit erhalten wir die folgenden Ausdrücke für die  $\Sigma_m^3$ .

$$\begin{aligned} \Sigma_0^3 = & (\beta_3)^{-1} \left\{ - \{a_1^2 a_2^2 a_3^2 + a_1^2 a_2^2 a_3 a_4 + a_1^2 a_2 a_3^2 a_4 + a_1 a_2^2 a_3^2 a_4 + a_1^2 a_2^2 a_4^2 \right. \\ & + a_1^2 a_2 a_3 a_4^2 + a_1 a_2^2 a_3 a_4^2 + a_1^2 a_3^2 a_4^2 + a_1 a_2 a_3^2 a_4^2 + a_2^2 a_3^2 a_4^2\} \\ & + \sigma_1^3 \{a_1^2 a_2^2 a_3 + a_1^2 a_2 a_3^2 + a_1 a_2^2 a_3^2 + a_1^2 a_2^2 a_4 + 2a_1^2 a_2 a_3 a_4 + 2a_1 a_2^2 a_3 a_4 \\ & + a_1^2 a_3^2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3^2 a_4 + a_2^2 a_3^2 a_4 + a_1^2 a_2 a_4^2 + a_1 a_2^2 a_4^2 + a_1^2 a_3 a_4^2 \\ & + 2a_1 a_2 a_3 a_4^2 + a_2^2 a_3 a_4^2 + a_1 a_3^2 a_4^2 + a_2 a_3^2 a_4^2\} \\ & - (\sigma_1^3)^2 \{a_1^2 a_2 a_3 + a_1 a_2^2 a_3 + a_1 a_2 a_3^2 + a_1^2 a_2 a_4 + a_1 a_2^2 a_4 + a_1^2 a_3 a_4 \\ & + 3a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2^2 a_3 a_4 + a_1 a_3^2 a_4 + a_2 a_3^2 a_4 + a_1 a_2 a_4^2 \\ & + a_1 a_3 a_4^2 + a_2 a_3 a_4^2\} \\ & + (\sigma_1^3)^3 \{a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4\} \\ & - \sigma_2^3 \{a_1^2 a_2^2 + a_1^2 a_3^2 + a_2^2 a_3^2 - a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1^2 a_4^2 + a_2^2 a_4^2 + a_3^2 a_4^2\} \\ & + \sigma_1^3 \sigma_2^3 \{a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2 + a_1^2 a_3 + a_2^2 a_3 + a_1 a_3^2 + a_2 a_3^2 + a_1^2 a_4 + a_2^2 a_4 \\ & + a_3^2 a_4 + a_1 a_4^2 + a_2 a_4^2 + a_3 a_4^2\} \\ & - (\sigma_2^3)^2 \{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2\} \\ & - (\sigma_1^3)^2 \sigma_2^3 \{a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_4 + a_3 a_4\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\sigma_1^3(\sigma_2^3)^2\{a_1 + a_2 + a_3 + a_4\} - (\sigma_2^3)^3 \\
& -\sigma_3^3\{a_1^2a_2 + a_1a_2^2 + a_1^2a_3 + a_1a_2a_3 + a_2^2a_3 + a_1a_3^2 + a_2a_3^2 \\
& \quad + a_1^2a_4 + a_1a_2a_4 + a_2^2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4 + a_3^2a_4 + a_1a_4^2 \\
& \quad + a_2a_4^2 + a_3a_4^2\} \\
& +\sigma_1^3\sigma_3^3\{a_1 + a_2 + a_3 + a_4\}^2 - (\sigma_2^3\sigma_3^3 + (\sigma_1^3)^2\sigma_3^3)\{a_1 + a_2 + a_3 + a_4\} \\
& + 2\sigma_1^3\sigma_2^3\sigma_3^3\} \tag{G.106}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_1^3 &= (\beta_3)^{-1}\{a_1a_2a_3a_4\{a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4\} \\
& -\sigma_1^3a_1a_2a_3a_4\{a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1a_4 + a_2a_4 + a_3a_4\} \\
& +((\sigma_1^3)^2 - \sigma_2^3)a_1a_2a_3a_4\{a_1 + a_2 + a_3 + a_4\} - (\sigma_1^3)^3 + 2\sigma_1^3\sigma_2^3 \\
& -\sigma_1^3\sigma_3^3\{a_1^2a_2^2 + a_1^2a_2a_3 + a_1a_2^2a_3 + a_1^2a_3^2 + a_1a_2a_3^2 + a_2^2a_3^2 + a_1^2a_2a_4 \\
& \quad + a_1a_2^2a_4 + a_1^2a_3a_4 + a_1a_2a_3a_4 + a_2^2a_3a_4 + a_1a_3^2a_4 + a_2a_3^2a_4 \\
& \quad + a_1^2a_4^2 + a_1a_2a_4^2 + a_2^2a_4^2 + a_1a_3a_4^2 + a_2a_3a_4^2 + a_3^2a_4^2\} \\
& +\sigma_2^3\sigma_3^3\{a_1^2a_2 + a_1a_2^2 + a_1^2a_3 + 2a_1a_2a_3 + a_2^2a_3 + a_1a_3^2 + a_2a_3^2 \\
& \quad + a_1^2a_4 + 2a_1a_2a_4 + a_2^2a_4 + 2a_1a_3a_4 + 2a_2a_3a_4 + a_3^2a_4 + a_1a_4^2 \\
& \quad + a_2a_4^2 + a_3a_4^2\} \\
& +(\sigma_1^3)^2\sigma_3^3\{a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1a_4 + a_2a_4 + a_3a_4\} \\
& -\sigma_1^3\sigma_2^3\sigma_3^3\{a_1 + a_2 + a_3 + a_4\} + (\sigma_2^3)^2\sigma_3^3 - \sigma_1^3(\sigma_3^3)^2\} \tag{G.107}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_2^3 &= (\beta_3)^{-1}\{-a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2 + \sigma_2^3a_1a_2a_3a_4\{a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1a_4 \\
& \quad + a_2a_4 + a_3a_4\} - \sigma_1^3\sigma_2^3a_1a_2a_3a_4\{a_1 + a_2 + a_3 + a_4\} \\
& +((\sigma_1^3)^2\sigma_2^3 - (\sigma_2^3)^2 - \sigma_1^3(\sigma_2^3)^2)a_1a_2a_3a_4 \\
& +\sigma_1^3\sigma_3^3\{a_1^2a_2^2a_3 + a_1^2a_2a_3^2 + a_1a_2^2a_3^2 + a_1^2a_2^2a_4 + a_1^2a_2a_3a_4 + a_1a_2^2a_3a_4 \\
& \quad + a_1^2a_3^2a_4 + a_1a_2a_3^2a_4 + a_2^2a_3^2a_4 + a_1^2a_2a_4^2 + a_1a_2^2a_4^2 + a_1^2a_3a_4^2 \\
& \quad + a_1a_2a_3a_4^2 + a_2^2a_3a_4^2 + a_1a_3^2a_4^2 + a_2a_3^2a_4^2\} \\
& -\sigma_2^3\sigma_3^3\{a_1^2a_2a_3 + a_1a_2^2a_3 + a_1a_2a_3^2 + a_1^2a_2a_4 + a_1a_2^2a_4 + a_1^2a_3a_4 \\
& \quad + 2a_1a_2a_3a_4 + a_2^2a_3a_4 + a_1a_3^2a_4 + a_2a_3^2a_4 + a_1a_2a_4^2 + a_1a_3a_4^2 \\
& \quad + a_2a_3a_4^2\} - (\sigma_1^3)^2\sigma_3^3\{a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4\} \\
& +\sigma_1^3(\sigma_3^3)^2\{a_1 + a_2 + a_3 + a_4\} - \sigma_2^3(\sigma_3^3)^2\} \tag{G.108}
\end{aligned}$$



# Anhang H

## Die DSG für den $\Gamma_4$ -Vertex

Wir notieren hier noch kurz die (in dieser Arbeit nicht benutzte) DSG für den  $\Gamma_4$ -Vertex. Die anderen DSG finden sich in dem entsprechenden Kapitel.

The diagrammatic equation (H.1) shows the decomposition of the  $\Gamma_4$  vertex into several terms:

- The left side is a circle labeled  $\Gamma_4$  with four wavy external lines.
- The right side is a sum of terms:
  - A tree-level diagram with a four-point vertex and four wavy external lines.
  - A term  $+\frac{1}{2}\tilde{g}^2$  multiplied by a diagram of a circle with four dots and a square with two dots, connected to four wavy external lines.
  - A term  $+\frac{1}{2}\tilde{g}^2$  multiplied by a diagram of a wavy line connected to a circle labeled  $T_{4s}$  with four dots, which is then connected to a square with two dots and four wavy external lines. This term is followed by the text "+2 zykl. Perm. (2, 3, 4)".
  - A term  $+\frac{1}{6}\tilde{g}^4$  multiplied by a diagram of a circle with four dots and a square with two dots, connected to four wavy external lines.
  - A term  $-\tilde{g}^2$  multiplied by a diagram of a circle with four dots and a square with two dots, connected to four wavy external lines, with a dashed line connecting the two vertices.
  - A term  $-\tilde{g}^2 \sum_f$  multiplied by a diagram of a circle with four dots and a square with two dots, connected to four wavy external lines, with a solid line connecting the two vertices.

(H.1)



## Anhang I

# Perturbative Renormierungskonstanten

$$Z_g = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \frac{11C_G - 4T_R N_f}{6} + O(g_R^4), \quad (\text{I.1})$$

$$Z_m = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2} \frac{3C_F}{\epsilon} + O(g_R^4), \quad (\text{I.2})$$

$$\bar{Z}_{2F} = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2} \frac{C_F \xi_R}{\epsilon} + O(g_R^4), \quad (\text{I.3})$$

$$Z_3 = 1 + \frac{g_R^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{1}{2} C_G \left( \frac{13}{3} - \xi_R \right) - \frac{4}{3} T_R N_f \right] + O(g_R^4), \quad (\text{I.4})$$

$$\tilde{Z}_{3FP} = 1 + \frac{g_R^2}{(4\pi)^2} \frac{C_G}{\epsilon} \frac{3 - \xi_R}{4} + O(g_R^4), \quad (\text{I.5})$$

$$(\text{I.6})$$

wobei für die Eichgruppe  $SU(N_C)$  gilt:

$$C_G = N_C, \quad T_R = \frac{1}{2}, \quad C_F = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C}. \quad (\text{I.7})$$



# Literaturverzeichnis

- [AS 01] R. Alkofer, L. von Smekal, Phys. Rep. **353** (2001), 281
- [Asp 04] R. Asprin, *Dämonenhatz*, Bergisch Gladbach 2004, 38
- [BBG 04] J. Blümlein, H. Böttcher, A. Guffanti, Nucl. Phys, Proc. Suppl. 135 (2004), 152
- [BBJ 81] P. Becher, M. Böhm, H. Joos, *Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung*, Stuttgart 1981
- [Bet 04] S. Bethke, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 121 (2003), 74; *ibid.* 135 (2004), 345; hep-ex/0407021
- [BL 77] M. Baker, C.K. Lee, Phys. Rev. **D15** (1977), 2201
- [BC 80] J.S. Ball, T. Chiu, Phys. Rev. **D22** (1980), 2250
- [BS+ 95] Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*, Thun/Frankfurt a.M. 1995
- [BV 93] T. Becker, V. Weispfennig, *Gröbner Bases* New York/Berlin 1993
- [Ca+ 98] C. Caso et. al. (Particle Data Group), The European Physical Journal **C3** (1998), 1 (<http://pdg.lbl.gov>)
- [CGO 04] C. Creutzig, K. Gehrs, W. Oevel, *Das MuPAD Tutorium, 3. Aufl.*, New York/Berlin 2004
- [CLO 92] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms, 2<sup>nd</sup> Ed.*, New York/Berlin, 1992
- [CN 73] J.M. Cornwall, R.E. Norton, Phys. Rev. **D10** (1973), 3338
- [Col 84] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge 1984
- [Cry 94] C.W. Cryer, *Numerische Mathematik I*, Vorlesungskript WS93/94 an der WWU Münster 1994, <http://wwwmath1.uni-muenster.de:8000/num/Vorlesungen>
- [DGH 94] J.F. Donoghue, E. Golowich, B.R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*, Cambridge 1994

- [DKS 99] L. Driesen, J. Fromm, J. Kuhrs, M. Stingl, Eur. Phys. J. A4 (1999), 381
- [Dri 93] L. Driesen, *Erste Ansätze in modifizierter Störungstheorie für Gluonium-Bindungszustände in der quarkfreien Quantenchromodynamik*, Diplomarbeit an der WWU Münster 1993
- [Dri 97] L. Driesen, *Die Basisvertices der Quantenchromodynamik und ihr Dyson-Schwinger-Selbstkonsistenzproblem im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungsreihe*, Dissertation an der WWU Münster 1997
- [DS 99] L. Driesen, M. Stingl, Eur. Phys. J. A4 (1999), 401
- [Dys 49] F.J. Dyson, The S-Matrix in Quantum Electrodynamics, Phys. Rev. **75** (1949), 1736
- [Dys 52] F.J. Dyson, Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics, Phys. Rev. **85**
- [EG+ 78] R.K. Ellis, H. Georgi, M. Machacek, H.D. Politzer, G.R. Ross, Phys. Lett. **78B** (1978) 281
- [Eca 81] J. Écalle, *Les Fonctions Résurgentes*, Tomes I-III, Publications Mathématiques d'Orsay Nr. 85-05, 81-06, 81-05, Orsay, Frankreich (1981 - 1985)
- [Ei+ 04] S. Eidelman et. al. (Particle Data Group), Phys. Lett. **B592** (2004), 1 (<http://pdg.lbl.gov>)
- [Ewe 00] A. Ewering, *Slavnov-Taylor-Identitäten im Rahmen von nicht-perturbativ erweiterten Feynman-Regeln für die Quantenchromodynamik*, Diplomarbeit an der WWU Münster 2000
- [Ewe 04] A. Ewering, *Dynamische Massenerzeugung und Symmetriebrechung im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungstheorie im elektroschwachen Sektor*, Dissertation an der WWU Münster 2004
- [Ga+ 03] M. Galessi et. al., *GNU Scientific Reference Manual*, 2<sup>nd</sup> ed., 2003; <http://www.gnu.org/software/gsl>
- [GBY 01] V.P. Gerdt, Y.A. Blinkov, D.A. Yanovich, *Computation of Janet Bases, I and II*, in: V.G. Ganzha et al. (Hrsg.), *Computer Algebra in Scientific Computing: CASC01*, New York/Berlin 2001, 233-263
- [GG 03] J.V. zur Gathen, J. Gerhard, *Modern Computer Algebra*, 2<sup>nd</sup> Ed., Cambridge 2003
- [Göc 05] M. Göckeler et. al., *A Determination of the Lambda Parameter from Full Lattice QCD*; arXiv:hep-ph/0502212
- [Grü 01] B. Grüter, *Persönliche Mitteilungen betreffend die Lösung von SKG mit Homotopie-Methoden*

- [Grü 02] B. Grüter, *Eine nichtperturbative Näherungslösung für die  $\phi^3$ -Theorie in 6 Dimensionen*, Diplomarbeit an der WWU Münster 2002
- [GW 73] D.J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 26 (1973), 1343
- [GW 73b] D.J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev **D8** (1973), 3633
- [Häb 89] U. Häbel, *Nicht-störungstheoretische Propagation des QCD-Eichfeldes*, Dissertation an der WWU Münster 1989
- [Hec 03] A. Heck, *Introduction to Maple, 3<sup>rd</sup> ed.*, New York 2003
- [HT 92] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton 1992
- [IZ 80] C. Itzykson, J. Zuber *Quantum Field Theory*, New York 1980
- [JJ 73] R. Jackiw, K. Johnson, Phys. Rev. D **8** (1973) 2386
- [Kak 93] M. Kaku, *Quantum Field Theory, a modern introduction*, Oxford 1993
- [Kug 97] T. Kugo, *Eichtheorie*, Berlin 1997
- [Kuh 97] J.G. Kuhrs, *Der Fermion-Sektor im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungstheorie für die Quantenchromodynamik*, Dissertation an der WWU Münster 1997
- [LP 96a] E. Leader, E. Predazzi, *An Introduction to Gauge Theories and Modern Particle Physics, Vol. 1*, Cambridge 1996
- [LP 96b] E. Leader, E. Predazzi, *An Introduction to Gauge Theories and Modern Particle Physics, Vol. 2*, Cambridge 1996
- [MP 78] W. Marciano, H. Pagels, *Quantum Chromodynamics* in Phys. Rep. **36**, 3 (1978), 137-276
- [MM 94] I. Montvay, G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge 1994
- [MS 87] A.P. Morgan, A. Sommesse, Appl. Math. Comp. **24** (1987), 101
- [Mut 87] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics, An introduction to perturbative methods in gauge theories*, Singapur 1987
- [Nak 69] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. Suppl. **43** (1969), 1
- [Na+ 88] N. Nakanishi et. al., Prog. Theor. Phys. Suppl. **95** (1988), 1
- [Pr+ 92] N. Press et. al., *Numerical Recipes in FORTRAN 77, Vol. I 2<sup>nd</sup> ed.*, Cambridge 1992
- [Pol 73] H. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973), 1346

- [Pot 00] K. Potzesny, *Nichtperturbative Korrekturen 1. Ordnung an  $\alpha_s$  zu Zweipunktfunktionen im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungstheorie*, Diplomarbeit an der WWU Münster 2000
- [PT 80] P. Pascual, R. Tarrach, Nucl. Phys. **B174** (1980), 123, **B181** 546 (Errata)
- [PT 84] P. Pascual, R. Tarrach, *QCD: Renormalization for the Practitioner*, Berlin 1984
- [Ram 81] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer* 2<sup>nd</sup> ed., Reading (USA) 1981
- [Raf 80] E. de Rafael, *Quantum Chromodynamics as a theoretical framework of the hadronic interactions* in Alonso, Tarrach (Hrsg.), *Quantum Chromodynamics Lecture Notes in Physics* **118**, Berlin 1980
- [Rom 69] P. Roman, *Introduction to Quantum Field Theory*, New York 1969
- [Sch 03] B. Schwentker, *Der  $O^+$ -Glueball im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungstheorie*, Diplomarbeit an der WUU Münster 2003
- [Sch 51] J. Schwinger, *On the Green's Functions of Quantized Fields, I and II*, Proc. Nat. Acad. Sci. **37** (1951), 452
- [SK 04] H.R. Schwarz, N. Köckler, *Numerische Mathematik, 5. Aufl.*, Wiesbaden 2004
- [Sme 98] L. v. Smekal, *Perspectives for Hadronic Physics from Dyson-Schwinger Equations for the Dynamics of Quark and Glue*, Habilitationsschrift Erlangen-Nürnberg 1998
- [Spr 95] M. Spratte, *Nichtperturbative Berechnung der Gluonselfenergie in Einschleifen-Näherung*, Diplomarbeit an der WWU Münster 1995
- [Sti 84] M. Stingl, *Unveröffentlichte Notizen zum  $\Gamma_3$ -Vertex*
- [Sti 86] M. Stingl, Phys. Rev. **D34** (1986), 3863
- [Sti 90] M. Stingl, *Unveröffentlichte Notizen zu 4-Punkt-Amplituden und Bethe-Salpeter-Kernen*
- [Sti 96] M. Stingl, *A Systematic Extended Iterative Solution for Quantum Chromodynamics*, Z. Physik **A 353** (1996), 423
- [Sti 01a] M. Stingl, *Field-Theory Amplitudes as Resurgent Functions*, MS-TP-01-4 (2001); arXiv:hep-ph/0207349
- [Sti 01b] M. Stingl, *Persönliche Mitteilungen zur Rücknahme der PBZ*
- [Sti 04] M. Stingl, *Persönliche Mitteilungen betreffend Aktivitäten der Linzer Arbeitsgruppe um W. Zulehner*

- [Sti 05] M. Stingl, *Persönliche Mitteilungen zu Gröbner-Basen*
- [Stu 02] B. Sturmfels, *Solving Systems of Polynomial Equations* (CBMS Series No. 97), Providence 2002
- [Str 96] A. Streibl, *Theorie der Vakuumkondensate der Quantenchromodynamik*, Dissertation an der WWU Münster 1996
- [Tay 01] J.C. Taylor (Hrsg.), *Gauge Theories in the Twentieth Century*, London 2001
- [tHV 72] G. 't Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. **B44** (1972), 189
- [tHo 73] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B61** (1973), 455
- [tHo 79] G. 't Hooft, *Can we make sense out of "Quantum Chromodynamics"*, in: A. Zichichi (Hrsg.), *The Why's of Subnuclear Physics*, (Proceedings Erice 1977), New York 1979
- [Voi 99] J.F. Voigt, *Analytische Berechnung der hadronischen Vakuumpolarisation des Photons mit nichtperturbativ erweiterten Feynmanregeln für die Quantenchromodynamik*, Dissertation an der WWU Münster 1999
- [Wie 01a] A. Wielenberg, *Untersuchung logarithmisch modifizierter nichtperturbativ-erweiterter Feynmanregeln der QCD in Landau-Eichung*, Diplomarbeit an der WWU Münster 2001
- [Wie 01b] A. Wielenberg, *Unveröffentlichte Notizen zur Rücknahme der PBZ*
- [Wil 69] K.G. Wilson, Phys. Rev. **179** (1969), 1499
- [Wei 95] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume I*, Cambridge 1996
- [Wei 96] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume II*, Cambridge 1996
- [WG 89] Z.X. Wang, D.R. Guo, *Special Functions*, Singapur 1989
- [Wol 03] S. Wolfram, *The Mathematica Book, 5<sup>th</sup> ed.*, Champaign (USA) 2003
- [Ynd 93] F.J. Ynduráin, *The Theory of Quark and Gluon Interaction, 2nd edition*, Berlin 1993
- [YM 54] C.N. Yang, R. Mills Phys. Rev. **96** (1954), 191
- [Zin 02] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena 4<sup>th</sup> ed.*, Oxford 2002
- [Zul 88] W. Zulehner, Math. of Comp. **50** (1988), 167



# Abkürzungsverzeichnis

|      |   |
|------|---|
| 1PI  | 1-Teilchen-irreduzibel                              |
| 1PR  | 1-Teilchen-reduzibel                                |
| 2PI  | 2-Teilchen-irreduzibel                              |
| BGK  | Bewegungsgleichungskondensat (Singular/Plural)      |
| BPHZ | Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann (-Renormierung) |
| BRS  | Becchi-Rouet-Stora (-Transformation)                |
| BS   | Bethe-Salpeter (-Kern)                              |
| BSG  | Bethe-Salpeter-Gleichung (Singular/Plural)          |
| GSL  | GNU Scientific Library                              |
| DSG  | Dyson-Schwinger-Gleichung (Singular/Plural)         |
| LGS  | Lineares Gleichungssystem                           |
| MKP  | Mechanismus der kompensierenden Pole                |
| MS   | Minimal Subtraction (-Schema)                       |
| NLGS | Nichtlineares Gleichungssystem                      |
| OPE  | Operator-Produkt-Entwicklung                        |
| OSB  | Osterwalder-Schrader-Bedingungen                    |
| PBZ  | Partialbruchzerlegung                               |
| QCD  | Quantenchromodynamik                                |
| QED  | Quantenelektrodynamik                               |
| RG   | Renormierungsgruppe                                 |
| RGG  | Renormierungsgruppen-Gleichung (Singular/Plural)    |
| STI  | Slavnov-Taylor-Identitäten                          |
| SKG  | Selbstkonsistenz-Gleichungen (Singular/Plural)      |
| UV   | Ultraviolett (-Fixpunkt)                            |



# Schlusswort

Herrn Prof. Dr. Manfred Stingl danke ich für die fruchtbaren Diskussionen und seine konstruktive Kritik. Ohne seine Anregungen würden in dieser Arbeit einige wichtige Aspekte fehlen.

Dr. André Wenning verdanke ich wichtige Hinweise für die Suche nach numerischen Lösungen des SKG-Systems. Dirk Homeier danke ich für sein freundliches Angebot, Korrektur zu lesen.

Meine Eltern Frieda und Hermann Wielenberg haben mich während der Erstellung dieser Arbeit stets unterstützt und damit wesentlich zu ihrem Gelingen beigetragen.

Meine Schwester Martina hat mich gezwungen, ein verständlicheres und fehlerfreieres Deutsch zu schreiben. Alle noch vorhandenen Fehler sind dem Autor anzulasten.

Die Feynman-Graphen in dieser Arbeit sind mit dem  $\text{\LaTeX}$ -Paket *feynMF* von Thorsten Ohl erstellt worden. Dieses Paket ist über den Server <ftp.dante.de> zu erhalten. Einige der in dieser Arbeit verwendeten Diagramme finden sich so oder ähnlich schon in [Wie 01a].

Für einen Teil der Formeln zur Rücknahme der PBZ mit Insertionen wurde zur Herleitung bzw. Überprüfung das Computeralgebrasystem  $\text{MATHEMATICA}$ © [Wol 03] verwendet.



# Lebenslauf

## Persönliche Daten

---

Andreas Wielenberg  
geboren am 15.9.1974 in Damme  
ledig

## Schulbildung

---

|                 |   |
|-----------------|---|
| 8/1981 - 7/1985 | Besuch der Grundschule Hollage in Wallenhorst       |
| 8/1985 - 7/1987 | Besuch der Orientierungstufe Hollage in Wallenhorst |
| 8/1987 - 6/1994 | Besuch des Gymnasiums Ursulaschule in Osnabrück     |
| 8.6.1994        | Zeugnis der Allgemeinen Hochschulreife              |

## Wehrdienst

---

|                  |   |
|------------------|---|
| 10/1994 - 9/1995 | Grundwehrdienst in Goslar und Barnstorf |
|------------------|---|

## Studium

---

|                   |  |
|-------------------|--|
| 10/1995 - 10/1997 | Grundstudium der Physik an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster  |
| 15.10.1997        | Vordiplom in Physik an der WWU Münster   |
| 10/1997 - 3/2001  | Hauptstudium der Physik an der WWU Münster   |
| 2/2000 - 1/2001   | Diplomarbeit bei Prof. Dr. M. Stingl<br>Titel: Untersuchung logarithmisch modifizierter nichtperturbativ-erweiterter Feynmanregeln der QCD in Landau-Eichung |
| 2.3.2001          | Diplom in Physik an der WWU Münster  |
| 3/2001            | Beginn der Dissertation bei Prof. Dr. M. Stingl am Institut für Theoretische Physik der WWU Münster  |

## Berufstätigkeit

---

|                  |  |
|------------------|--|
| 10/1999 - 3/2001 | Studentische Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik der WWU Münster        |
| 4/2001 - 1/2002  | Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik der WWU Münster   |
| 2/2002 - 7/2004  | Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik der WWU Münster |
| 8/2004 - 2/2005  | Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik der WWU Münster   |