

**Dominik Völker**

**Finitt optimale nichtparametrische  
Tests für Lebensdauerdaten**

– 2003 –



Angewandte Mathematik

**Finite optimale nichtparametrische  
Tests für Lebensdauerdaten**

Inauguraldissertation zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktors der Naturwissenschaften durch den  
Fachbereich Mathematik und Informatik der  
Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von  
**Dominik Völker**  
aus Lüdinghausen  
– 2003 –

Dekan:	PROF. DR. K. HINRICHS
Erster Gutachter:	PROF. DR. N. SCHMITZ
Zweiter Gutachter:	PROF. DR. A. JANSSEN (DÜSSELDORF)
Tag der mündlichen Prüfungen:	21.01.04, 28.01.04, 02.02.04
Tag der Promotion:	04.02.04

GEWIDMET  
MEINER FAMILIE



---

# INHALTSVERZEICHNIS

---

EINLEITUNG	1
1 AUSFALLRATEN, KUMULATIVE AUSFALLRATEN UND LEBENSDAUERVERTEILUNGEN	9
2 NICHTPARAMETRISCHE OPTIMALITÄTSEIGENSCHAFTEN OPTIMALER PARAMETRISCHER TESTS	19
2.1 Einseitige Hypothesen . . . . .	20
2.1.1 Unzensierte Daten . . . . .	20
2.1.2 Typ II-zensierte Daten . . . . .	27
2.1.3 Typ I-zensierte Daten . . . . .	33
2.2 Zweiseitige Hypothesen . . . . .	37
2.2.1 Eine stochastische Ordnung . . . . .	37
2.2.2 Unzensierte Daten . . . . .	39
2.2.3 Typ II-zensierte Daten . . . . .	44
2.3 Anmerkungen . . . . .	47
3 PERMUTATIONSTESTS	51
3.1 Der Permutationstest für unzensierte Daten . . . . .	52
3.2 Permutationstests für Typ I-zensierte Daten . . . . .	56
3.2.1 Modellbildung . . . . .	56
3.2.2 Umformulierung des Testproblems . . . . .	57

## Inhaltsverzeichnis

---

3.2.3	Die Suche nach optimalen Tests . . . . .	59
3.2.4	Unverfälschte Tests . . . . .	71
3.3	Permutationstests für Typ II-zensierte Daten . . . . .	73
3.3.1	Modellbildung . . . . .	73
3.3.2	Umformulierung des Testproblems . . . . .	75
3.3.3	Die Suche nach optimalen Tests . . . . .	77
3.3.4	Unverfälschte Tests . . . . .	87
3.4	Permutationstests für zufällig-zensierte Daten . . . . .	89
3.4.1	Modellbildung . . . . .	89
3.4.2	Umformulierung des Testproblems . . . . .	92
3.4.3	Die Suche nach optimalen Tests . . . . .	95
3.4.4	Unverfälschte Tests . . . . .	105
3.5	Tests mit der Anzahl der Realisierungen als Prüfgröße . . . . .	107
3.6	Anmerkungen . . . . .	114
<b>4</b>	<b>SIMULATIONSSTUDIEN</b>	<b>117</b>
4.1	Unzensierte Daten . . . . .	118
4.2	Typ I-zensierte Daten . . . . .	119
4.3	Fazit . . . . .	121
<b>5</b>	<b>ACCELERATED LIFE TESTING</b>	<b>125</b>
5.1	Kumulative Ausfallraten und nichtparametrische Hypothesen .	126
5.2	Accelerated Life Tests . . . . .	130
5.2.1	Tests bei einem Stressfaktor . . . . .	132
5.2.2	Tests bei mehreren Stressfaktoren . . . . .	143
5.3	Step-Stress Accelerated Life Tests . . . . .	147
5.4	Anmerkungen . . . . .	154
<b>6</b>	<b>KONKURRIERENDE RISIKEN</b>	<b>159</b>
6.1	Unzensierte Daten . . . . .	160
6.2	Typ II-zensierte Daten . . . . .	167
6.3	Typ I-zensierte Daten . . . . .	169
6.4	Anmerkungen . . . . .	175
	<b>LITERATURVERZEICHNIS</b>	<b>177</b>



---

## ABBILDUNGSVERZEICHNIS

---

1.1	Eine U-förmige Ausfallrate und die dazugehörige Dichte. . . .	12
1.2	Dichte, Verteilungsfunktion, Ausfallrate und kumulative Ausfallrate einer $Exp(0.5)$ - (---), $Exp(1)$ - (—) und $Exp(2)$ -Verteilung (—). . . . .	13
1.3	Dichte, Verteilungsfunktion, Ausfallrate und kumulative Ausfallrate einer $\mathcal{W}(0.75, 1)$ - (—), $\mathcal{W}(1.5, 1)$ - (---) und $\mathcal{W}(2.25, 1)$ -Verteilung (—). . . . .	14
1.4	Dichte, Verteilungsfunktion, Ausfallrate und kumulative Ausfallrate einer $\mathbf{LogN}(0, 0.5)$ - (—), $\mathbf{LogN}(0, 1)$ - (---) und $\mathbf{LogN}(0, 2)$ -Verteilung (—). . . . .	16
1.5	Dichte, Verteilungsfunktion, Ausfallrate und kumulative Ausfallrate einer $\Gamma_{0.5,1}$ - (—), $\Gamma_{2,1}$ - (---) und $\Gamma_{3,1}$ -Verteilung (—). . . . .	17
2.1	Zahlenbeispiel zu Beispiel 2.25 (Normalverteilung). . . . .	43
2.2	Zahlenbeispiel zu Beispiel 2.26 (Exponentialverteilung). . . . .	44
2.3	Graph der Prüfstatistik des $t$ -Tests im Fall $n = 2$ und $a_0 = 0$ . . . . .	50
3.1	Die Optimalitätseigenschaften des Permutationstests. . . . .	54
3.2	Die Optimalitätseigenschaften lokal gleichmäßig bester Tests. . . . .	65
3.3	Die Optimalitätseigenschaften lokal bester Tests. . . . .	67
4.1	Die (empirische) Gütefunktion des Permutationstests (—), des Log-Rangtests (---), des optimalen parametrischen Tests (—) und des Wicoxon-Rangtests (grau) zu den Niveaus $\alpha = 0.01$ , $\alpha = 0.05$ und $\alpha = 0.1$ (von oben nach unten). . . . .	120

## Abbildungsverzeichnis

---

4.2	Die empirische Gütefunktion des Permutationstests für unzensierte Daten (—), des Permutationstests für Typ I-zensierte Daten mit Zensierungszeitpunkt 2.772 (—) und des Log-Rangtests für Typ I-zensierte Daten mit Zensierungszeitpunkt 2.772 (---) zu den Niveaus $\alpha = 0.01$ , $\alpha = 0.05$ und $\alpha = 0.1$ (von oben nach unten). . . . .	122
4.3	Die empirische Gütefunktion des Permutationstests für unzensierte Daten (—), des Permutationstests für Typ I-zensierte Daten mit Zensierungszeitpunkt 1.386 (—) und des Log-Rangtests für Typ I-zensierte Daten mit Zensierungszeitpunkt 1.386 (---) zu den Niveaus $\alpha = 0.01$ , $\alpha = 0.05$ und $\alpha = 0.1$ (von oben nach unten). . . . .	123
5.1	Graph der Verteilungsfunktion einer $\Gamma_{5,1}$ -Verteilung (—) und der transformierten Verteilungsfunktionen im AFT-Model mit $g(s) = s^{1.2}$ im Fall $s = 1.5$ (---) und $s = 0.75$ (—). . . . .	131
5.2	Graph der Verteilungsfunktion einer $\Gamma_{5,1}$ -Verteilung (—) und der transformierten Verteilungsfunktionen im PH-Model mit $g(s) = s^{1.2}$ im Fall $s = 1.5$ (---) und $s = 0.75$ (—). . . . .	131
5.3	Graph der Verteilungsfunktion einer $\Gamma_{5,1}$ -Verteilung (—) und der transformierten Verteilungsfunktionen mit $g(s) = s^{1.2}$ und den Stress Pattern (1, 3, 1.5, 6, 2.5) (---) und (1, 3, 1.2, 6, 1.75) (—). . . . .	149
5.4	Graph der asymptotischen Prüfstatistik $T(r')$ in Abhängigkeit von $\beta$ . . . . .	157

---

## EINLEITUNG

---

In den Büchern zur Einführung in das Gebiet der Mathematischen Statistik, wie z.B. (Lehmann, 1986) oder (Witting, 1985), werden in einem geeigneten Sinn optimale Verfahren (Tests, Konfidenzbereiche, Schätzer, ...) für Situationen hergeleitet, in denen man *alle Daten*, die man aus einem statistischen Experiment gewinnen kann, zur Verfügung hat, um die statistische Entscheidung zu treffen. Daher kann man in solchen Situationen das statistische Experiment erst dann auswerten, wenn das zu untersuchende Merkmal bei allen Versuchsobjekten festgestellt wurde. In den Bereichen der *Zuverlässigkeitstheorie* (engl. *Reliability Theory*) und *Überlebenszeitanalyse* (engl. *Survival Analysis*), in denen Lebensdauern beobachtet werden, ist es allerdings aus Zeit und/oder Kosten und/oder anderen Gründen nicht erwünscht, so lange mit der Auswertung des Experiments zu warten, bis bei allen Versuchsobjekten das zu untersuchende Merkmal festgestellt wurde. In anderen Situationen wiederum ist es nicht möglich, das zu untersuchende Merkmal bei allen Versuchsobjekten festzustellen. Auch in diesen Fällen will man dennoch statistische Aussagen treffen können. Dazu zunächst drei Beispiele:

1. Ein Produzent von Kugellagern will die Qualität seiner Ware prüfen. Das zu untersuchende Merkmal ist in diesem Fall der Defekt des einzelnen Kugellagers. Da die Kugellager aber möglichst lange funktionieren sollen, kann es sehr lange dauern, bis das jeweilige Kugellager defekt ist.
2. In einer klinischen Studie werde ein neues Medikament gegen Krebs untersucht, so dass das zu untersuchende Merkmal in dieser Situation der Tod des einzelnen Patienten aufgrund von Krebs ist. Einer der Pa-

tienten der Studie stirbt allerdings bei einem Verkehrsunfall. Hier kann man das zu untersuchende Merkmal nicht mehr feststellen. Man besitzt jedoch die Information, dass der Patient nicht vor dem Verkehrsunfall an Krebs gestorben ist. Diese Information sollte man also ausnutzen.

3. In einer klinischen Studie ist es in der Regel nicht so, dass die Patienten alle zum gleichen Zeitpunkt in die Studie aufgenommen werden. Der Eintrittszeitpunkt des einzelnen Patienten ist eher zufällig über den Versuchszeitraum verteilt. Wird nun das Experiment nach einer gewissen Zeit abgebrochen, so übt das Versuchsende die Zensierung aus.

In Beispiel 1 entdeckt man auf Anhieb (mindestens) zwei Möglichkeiten, wie man die Laufzeit des Experiments verkürzen kann. Zum Einen kann man sich die Laufzeit des Experiments vorgeben, und zum Anderen kann man sich einen Prozentsatz von Versuchsobjekten vorgeben, die man beobachten möchte. Beide Vorgehensweisen führen damit in das Gebiet der *geplanten Zensierung*. Dabei unterliegen Daten einer geplanten Zensierung, falls man einen Mechanismus angeben kann, so dass die beobachteten Daten durch diesen Mechanismus aus den ursprünglichen, nicht beobachtbaren Daten hervorgehen. Die beiden gerade angesprochenen Zensierungsarten kann man folgendermaßen charakterisieren:

- (a) Vor dem Beginn des Experiments wird ein Zeitlimit  $C$  festgesetzt, nach dem die Studie beendet wird, egal wie viele oder welche Daten man bis dahin sammeln konnte. Bei dieser Art der Zensierung hat man also von allen Versuchsobjekten, die in dem Zeitintervall  $[0, C]$  beobachtet wurden, den genauen Zeitpunkt der Realisierung. Von allen anderen Beobachtungen ist nur bekannt, dass sie nach dem Zeitpunkt  $C$  realisiert werden. Wegen dieser Eigenschaft heißt diese Art der Zensierung *Intervall-Zensierung* oder auch *Typ I-Zensierung*. Während bei dieser Art der Zensierung die Anzahl der beobachteten Realisierungen zufallsabhängig ist, ist dies bei der nächsten Zensierungsart nicht der Fall.
- (b) Bei der sogenannten *Typ II-Zensierung* gibt man vor dem Beginn des Experiments eine Anzahl  $h$  von Daten vor, die man beobachten möchte, egal wie lange es dauert, diese  $h$  Daten zu erheben. In diesem Fall kann man also die  $h$  kleinsten Beobachtungswerte, d.h. die ersten  $h$  Komponenten der *Ordnungsstatistik*, und die Zensierungsindikatoren

beobachten. Im Unterschied zu Typ I-zensierten Daten steht bei dieser Art der Zensierung das Ende der Studie nicht fest, sondern hängt vom Zufall ab. Insbesondere hat man i.a. keine Obergrenze für die Dauer des Experiments gegeben. Dies ist auch der Nachteil gegenüber Typ I-zensierten Daten.

Auch die Beispiele 2 und 3 kann man in den Bereich der Zensierung einordnen:

- (c) Bei einer *zufälligen Zensierung* stellt man sich vor, dass die Beobachtungsdaten  $X_i$  durch sogenannte Zensierungszeiten  $Y_i$  überlagert werden, so dass man nur das Minimum von  $X_i$  und  $Y_i$  sowie die Art der Realisierung, d.h. die Information, ob eine zu untersuchende Beobachtung oder eine Zensierungszeit vorliegt, wahrnimmt.

In dieser Arbeit werden im Fall Typ I-, Typ II- bzw. zufällig-zensierter Daten optimale *Testverfahren* für verschiedene Fragestellungen hergeleitet. Dazu werden in Kapitel 1 einige *Verteilungsklassen* vorgestellt, die in der Praxis benutzt werden, um Lebensdauern von verschiedensten Versuchsobjekten zu modellieren. Zu ihnen gehören die Exponentialverteilungen, die Weibull-Verteilungen und die Lognormalverteilungen. Außerdem wird noch auf den Begriff der *Ausfallrate* (engl. *Hazard Rate*) und den der *kumulativen Ausfallrate* eingegangen. Es wird sich zeigen, dass man mit Hilfe der (kumulativen) Ausfallrate einige interessante Hypothesen formulieren kann.

Das zweite Kapitel widmet sich der Untersuchung des *Einstichprobenproblems*. Genauer geht man davon aus, dass die zugrundeliegenden Beobachtungen alle stochastisch unabhängig sind und der gleichen Verteilung genügen, wobei diese Verteilung aus einer vorgegebenen, durch einen reellwertigen Parameter  $\vartheta$  beschreibbaren Verteilungsklasse (z.B. der Klasse der Exponentialverteilungen) stammt. Im Fall einer einseitigen Fragestellung  $\mathbf{H} : \vartheta \leq \vartheta_0$ ,  $\mathbf{K} : \vartheta > \vartheta_0$ , d.h. bei der Fragestellung, ob die Daten dafür sprechen, dass die Versuchsobjekte einen vorgegebenen Qualitätsstandard einhalten oder nicht, werden für die in Kapitel 1 vorgestellten Verteilungsklassen gleichmäßig beste bzw. lokal beste Tests zum Niveau  $\alpha$  sowohl für unzensierte als auch für Typ I- und Typ II-zensierte Daten hergeleitet.

Für die zweiseitige Fragestellung  $\mathbf{H} : \vartheta = \vartheta_0$ ,  $\mathbf{K} : \vartheta \neq \vartheta_0$ , d.h. bei der Fragestellung, ob die Daten dafür sprechen, dass die Versuchsobjekte den

vorgegebenen Qualitätsstandard  $\vartheta_0$  besitzen oder nicht, werden gleichmäßig beste zum Niveau  $\alpha$  unverfälschte Tests sowohl im Fall unzensierter als auch im Fall Typ II-zensierter Daten hergeleitet. Dabei müssen die Beobachtungsdaten im Fall von Typ II-zensierten Daten einer Exponentialverteilung genügen oder aus einer Proportional Hazard Familie zu einem festen Baseline Hazard stammen.

Der entscheidende Punkt in Kapitel 2 ist allerdings, dass zusätzlich gezeigt wird, dass die oben angesprochenen besten Tests nicht nur beste Tests im Fall der parametrischen Fragestellung sind, sondern auch gewissen *nicht-parametrischen Optimalitätskriterien* genügen. Sie sind unverfälscht für eine große Klasse von „vergleichbaren“ Verteilungen und maximieren die Güte unter allen unverfälschten Tests auf einer „großen“ Teilklasse der Alternative gleichmäßig (siehe die Sätze 2.3, 2.10, 2.24 und 2.28). Dies sind die gleichen Optimalitätskriterien, die auch der Permutationstest für ein Zweistichprobenproblem erfüllt. Somit können einige Argumente, die häufig gegen die Anwendung parametrischer Verfahren vorgebracht werden, im Fall eines Einstichprobenproblems weitgehend entkräftet werden.

Anschließend wird in Kapitel 3 der *Permutationstest* für ein Zweistichprobenproblem genauer untersucht. Dieser nimmt bekanntlich eine Zwischenstellung zwischen den parametrischen Tests und den Rangtests ein. Zum Einen nutzt er die bei Lebensdauern vorliegende metrische Datenskala voll aus, und zum Anderen nimmt er die nichtparametrische Fragestellung ernst. In der Literatur wurden bislang als nichtparametrische Verfahren immer nur Rangtests für die verschiedenen Zensierungsarten hergeleitet (siehe z.B. (Hájek et al., 1999)). Da in (Gebhard, 1995) allerdings gezeigt werden konnte, dass der Permutationstest für unzensierte Daten auch gegenüber der Klasse der Exponentialverteilungen und der Klasse der Weibull-Verteilungen, also Verteilungen, die in der Zuverlässigkeitstheorie und Überlebenszeitanalyse eine wichtige Rolle spielen, optimal ist (siehe Satz 3.1), liegt es eigentlich nahe, auch im Fall von zensierten Daten nach optimalen Permutationstests zu suchen.

Die wesentliche Optimalität des Permutationstests für unzensierte Daten besteht darin, dass er unter allen unverfälschten Tests die Güte auf einer „großen“ Teilklasse der Alternative gleichmäßig maximiert (siehe (3.1)). Im dritten Kapitel wird gezeigt, dass solch ein Test im Fall von Typ I-, Typ II- und zufällig-zensierten Daten i.a. *nicht existiert* (siehe die Sätze 3.8,

3.21 und 3.33). Betrachtet man insbesondere eine Proportional Hazard Familie zu einem festen Baseline Hazard, so existiert bereits kein Permutationstest, der gegenüber zwei Punkten aus dieser Familie optimal ist. Aus diesem Grund wird daraufhin nach *lokal besten* Permutationstests gesucht. Dabei wird gezeigt, dass man an einen beliebigen Baseline Hazard eine Proportional Hazard Kurve anlegen kann und dann einen gegenüber dieser Kurve lokal besten Permutationstest findet (siehe Satz 3.13, Satz 3.23 und Satz 3.37). Der so konstruierte Permutationstest hängt dabei aber noch entscheidend von der Skala des Baseline Hazards ab. Da dies nicht erwünscht ist, wird diese Abhängigkeit mit Hilfe der Plug-In Methode beseitigt. Allerdings verlieren die so entstehenden Permutationstests ihre Optimalitätseigenschaften.

Da sich bei der Untersuchung der Permutationstests für die verschiedenen Zensierungsarten herausstellte, dass die *Anzahl der nicht zensierten Beobachtungen* entscheidend in die Prüfstatistiken eingeht, wird zum Abschluss dieses Kapitels gezeigt, dass Tests mit der Anzahl der nicht zensierten Beobachtungen als Prüfgröße auch in einem gewissen Sinn optimal sind. Wie der Vorzeichentest für unzensierte Daten erweisen sie sich dann als optimal, wenn jeder Beobachtung ein anderer Qualitätsmaßstab zugrunde liegt (siehe Satz 3.41, Satz 3.42 und Satz 3.43).

Um die Güte des Permutationstests mit der des lokal besten Rangtests und der des optimalen parametrischen Tests vergleichen zu können, werden in Kapitel 4 *Simulationsstudien* durchgeführt. Dabei wird zuerst die Güte des Permutationstests mit der des Log-Rangtests und der des optimalen parametrischen Tests im Fall von exponentialverteilten, unzensierten Daten verglichen. Dabei zeigte sich kaum einen Unterschied zwischen der Güte des Permutationstests und der des Log-Rangtests (siehe Abbildung 4.1). Dies war nach den Untersuchungen in (Gebhard, 1995) nicht zu erwarten. Dort wurde die Güte des Permutationstests mit der des Wilcoxon-Rangtests verglichen, und es zeigte sich ein deutlicher Güteabfall. Dazu ist allerdings zu sagen, dass der Wilcoxon-Rangtest im Gegensatz zum Log-Rangtest keinerlei Optimalitätseigenschaften gegenüber Exponentialverteilungen besitzt. Auch im Fall Typ I-zensierter Daten wird daraufhin die Güte der in Kapitel 3 vorgeschlagenen Permutationstests für Typ I-zensierte Daten mit der des Log-Rangtests für Typ I-zensierte Daten verglichen. Dabei ist erneut kaum ein Unterschied zwischen den beiden Gütefunktionen zu erkennen (siehe die Abbildungen 4.2 und 4.3). Da man die Permutationstests als die bestmöglichen

nichtparametrischen Verfahren und somit als Messlatte für die Rangtests ansehen kann, kann als Zwischenresultat festgehalten werden, dass die Anwendung von lokal besten Rangtests empfohlen werden kann. Diese besitzen dabei meist auch noch breite Optimalitätseigenschaften, insbesondere bei gegen  $\infty$  laufender Stichprobengröße.

In den bisherigen Situationen wurde immer nur eine geplante Zensierung benutzt, um die Laufzeit des zugrundeliegenden Experiments zu verkürzen. Hängt die Lebensdauer der Versuchsobjekte jedoch von bestimmten *Stressfaktoren* ab, so kann die Laufzeit des Experiments auch dadurch verkürzt werden, dass man die Versuchsobjekte unter einem höheren Stress beobachtet. Ein typisches Beispiel wäre die Untersuchung von Stromkabelisolierungen. Hier hängt die Lebensdauer von der Stromspannung ab (siehe Tabelle 5.1). Bei diesen Untersuchungen muss dann natürlich die Verteilung der Versuchsobjekte unter den verschiedenen Stressfaktoren bekannt sein. Dabei haben sich vor allem das *Proportional Hazard Model* und das *Accelerated Failure Time Model* als nützlich erwiesen. Im Proportional Hazard Model wirkt sich der Stress multiplikativ auf die Ausfallrate aus, und im Accelerated Failure Time Model wirkt sich der Stress multiplikativ auf die Lebenszeit aus (siehe (5.4) bzw. (5.2)). Der multiplikative Zusammenhang ist dabei oft bis auf einen Parameter  $\beta$  bestimmt (siehe (5.6) und (Nelson, 1990)), so dass man diesen Parameter als Widerstandsfähigkeit gegenüber den Stressfaktoren und somit als Gütemaßstab ansehen kann. In Kapitel 5 werden *lokal gleichmäßig beste Rangtests* für Hypothesen über diesen Parameter  $\beta$  sowohl für unzensierte als auch für Typ II-zensierte Daten hergeleitet (siehe die Sätze 5.6 bis 5.9). Für Typ I-zensierte Daten werden entsprechende naheliegende Rangtests vorgeschlagen (siehe Satz 5.10 und Satz 5.11). Ähnliche Ergebnisse erhält man auch für den Fall, dass der zu untersuchende Parameter  $\beta$  mehrdimensional ist (siehe die Sätze 5.12 bis 5.14).

Abschließend werden Situationen betrachtet, in denen die Versuchsobjekte nicht mehr unter konstanten Stressfaktoren beobachtet werden müssen. Im *Step-Stress Accelerated Failure Time Model* sind die Stressfaktoren immer nur in gewissen Zeitabschnitten als konstant angenommen (siehe (5.13)). Auch in diesem Fall lassen sich Rangtests für den oben angegebenen Parameter  $\beta$  rechtfertigen (siehe die Sätze 5.16 bis 5.18).

Das letzte hier behandelte Problem ist das Problem der *Konkurrierenden Risiken* (engl. *Competing Risks*). Dieses kann man anschaulich an einem



einfachen Beispiel beschreiben: Bei einem Elektrogerätehersteller beschwerten sich die Kunden darüber, dass die Geräte nicht lange genug halten. Der Hersteller stellt die Geräte jedoch nicht komplett selbst her, sondern er setzt nur die von verschiedenen Firmen produzierten Komponenten zusammen. Um nun der Beschwerde nach zu gehen, merkt er sich, wie lange die Geräte funktionsfähig waren und welches Bauteil den Fehler verursacht hat. Untersucht werden soll in so einer Situation natürlich das Verhältnis der Verteilungen der verschiedenen Komponenten zueinander. In Kapitel 6 werden (*lokal*) *gleichmäßig beste Rangtests* für solche Situationen sowohl für unzensierte als auch für Typ I- und Typ II-zensierte Daten hergeleitet. Im Gegensatz zu allen anderen für diese Situation vorgeschlagenen Rangtests wurde das Testproblem hier erst durch eine suffiziente Statistik vereinfacht. Dabei stellte sich heraus, dass im Proportional Hazard Model bereits die Anzahl der durch die verschiedenen Risiken verursachten Ausfälle eine suffiziente Statistik ist. Da diese aber eine Multinomialverteilung besitzt, war es möglich, sowohl gleichmäßig beste einseitige als auch gleichmäßig beste *zweiseitige Rangtests* herzuleiten (siehe die Sätze 6.5, 6.6 sowie 6.15 und 6.16). Außerdem wird ein  $\chi^2$ -Test für die Fragestellung vorgeschlagen, wie die einzelnen Risiken anteilmässig an der kumulativen Ausfallrate des gesamten Systems beteiligt sind. Auch ein Regressionsproblem für einen Lokationsparameter wird im Fall unzensierter und Typ-II zensierter Daten optimal gelöst (siehe Satz 6.7 und Satz 6.11). Für Typ-I zensierte Daten wird in Satz 6.18 ein naheliegender Test angegeben werden.

Bedanken möchte ich mich an erster Stelle bei HERRN PROF. DR. NOBERT SCHMITZ für seine immer freundliche und hilfsbereite Betreuung während der Entstehung dieser Arbeit. Weiter gilt mein Dank HERRN PROF. DR. ARNOLD JANSSEN, der trotz der Entfernung immer zu einem Dialog bereit war, insbesondere wenn es um einige Zwischenresultate ging, und mich auf die Problemstellung in Kapitel 6 aufmerksam gemacht hat. Außerdem ist die WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT zu nennen, durch deren Promotionsstipendium ich mich voll und ganz auf die Erstellung dieser Arbeit konzentrieren konnte. In diesem Zusammenhang bedanke ich mich auch bei HERRN PROF. DR. GEROLD ALSMEYER, der bereit war, einige nötige Gutachten zur Bewilligung des Stipendiums zu erstellen. Für die gründliche und kritische Durchsicht der hier vorliegenden Arbeit bedanke ich mich bei BARBARA DICKHUT und ANDREAS BAYER.

---

---

# Kapitel 1

## AUSFALLRATEN, KUMULATIVE AUSFALLRATEN UND LEBENSDAUERVERTEILUNGEN

---

Im ersten Kapitel sollen einige Lebensdauerverteilungen anhand ihrer Ausfallraten vorgestellt werden. Diese finden sich auch in jedem Buch zu den Themen der *Überlebenszeitanalyse* und *Zuverlässigkeitstheorie*, wie z.B. (Kalbfleisch and Prentice, 1980), (Mann et al., 1974) und (Lawless, 2003) oder in den Enzyklopädien (Johnson et al., 1994) und (Johnson et al., 1995). Um jedoch auf Aussagen über diese Verteilungen verweisen zu können und um herauszustellen, auf welche Probleme die später hergeleiteten Tests angewendet werden können, sollen die  $\mathfrak{M}$ -Dichten, Verteilungsfunktionen, Ausfallraten und kumulativen Ausfallraten der wichtigsten Verteilungen an dieser Stelle angegeben werden. Außerdem findet sich in diesem Kapitel noch ein Lemma, das die herausragende Stellung der Exponentialverteilungen in diesem Kontext betont und zeigt, wie man Ergebnisse für Exponentialverteilungen auf andere Verteilungsklassen verallgemeinern kann.

Zuerst soll nun der Begriff der Ausfallrate definiert werden: Bezeichne  $X : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathbb{B}_+)$  eine nicht negative Zufallsgröße<sup>1</sup> und  $F(t) := \mathbb{P}(X \leq t)$  die dazugehörige *Verteilungsfunktion*. Modelliert  $X$  z.B. den Todeszeitpunkt eines Patienten in einer Krebsstudie, so beschreibt  $\bar{F}(t) := 1 - F(t) = \mathbb{P}(X > t)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Patient zum Zeitpunkt  $t$  noch lebt.  $\bar{F}$  wird daher auch *Überlebensfunktion* genannt. Vorerst sei angenommen, dass  $F$  absolut stetig ist mit  $\mathfrak{M}$ -Dichte  $f$  und das

---

<sup>1</sup>Da Lebensdauerdaten immer Zeiten angeben, ist dies eine naheliegende Annahme.

$\bar{F}(t) > 0 \quad \forall t > 0$  gilt. Unter diesen Annahmen definiert man die *Ausfallrate*  $\lambda$  dieser Verteilung durch

$$\lambda(t) := \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(t < X \leq t + \Delta | X > t)}{\Delta} = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{F(t + \Delta) - F(t)}{\Delta(1 - F(t))} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

Im Englischen wird  $\lambda$  auch als *Hazard Rate* oder *Failure Rate* bezeichnet. Den Namen Ausfallrate kann man z.B. folgendermaßen begründen: Modelliert  $X$  einen Todeszeitpunkt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Todeszeitpunkt in das Intervall  $[t, t + \Delta]$  fällt, falls der Patient zum Zeitpunkt  $t$  noch lebt, für „kleine“  $\Delta$  ungefähr durch  $\Delta\lambda(t)$  gegeben.

Mindestens ebenso wichtig ist allerdings die *kumulative Ausfallrate*

$$\Lambda(t) := \int_{(0,t)} \lambda(s) d\mathbb{K}(s) = \int_{(0,t)} \frac{f(s)}{1 - F(s)} d\mathbb{K}(s).$$

Unter den obigen Annahmen erhält man sofort die Beziehung

$$\Lambda(t) = -\ln(1 - F(t)) = -\ln(\bar{F}(t)) \quad (1.1)$$

oder anders ausgedrückt

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) = \exp(-\Lambda(t)) = \exp\left(-\int_{(0,t)} \lambda(s) d\mathbb{K}(s)\right). \quad (1.2)$$

Kombiniert man diese Beziehung mit der Definition der Ausfallrate, so erhält man für die  $\mathbb{K}$ -Dichte von  $X$  den Ausdruck:

$$\begin{aligned} f(t) &= \lambda(t) \exp(-\Lambda(t)) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t) \\ &= \lambda(t) \exp\left(-\int_{(0,t)} \lambda(s) d\mathbb{K}(s)\right) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Desweiteren ist diese Beziehung auch umkehrbar: Definiert man  $f$  entsprechend (1.3), so ist  $\lambda$  die Ausfallrate und  $\Lambda$  die kumulative Ausfallrate der Verteilung von  $f$ .

In der nichtparametrischen Statistik werden häufig stetige und nicht nur  $\mathbb{K}$ -stetige Verteilungen betrachtet. Dabei kann man allerdings bei analoger Definition der Ausfallrate auf Probleme stoßen. Daher nimmt man die Beziehung (1.1) zur Hilfe:

**1.1 Definition** (KUMULATIVE AUSFALLRATE) Für eine stetige Verteilungsfunktion  $F$  mit  $F(0) = 0$  ist die kumulative Ausfallrate durch

$$\Lambda(t) := -\ln(1 - F(t)) = -\ln(\bar{F}(t))$$

gegeben. Offenbar ist mit  $F$  auch  $\Lambda$  wieder eine stetige Funktion mit  $\Lambda(0) = 0$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t) = \infty$ . Da die Konstanzbereiche von  $\Lambda$  genau die Konstanzbereiche von  $F$  sind, ist  $\Lambda$  weiterhin  $P_F$ -f.s. streng monoton wachsend.<sup>2</sup> Außerdem ist eine Verteilung durch die dazugehörige kumulative Ausfallrate eindeutig festgelegt. ■

Häufig wird die kumulative Ausfallrate einer stetigen Verteilung  $F$  durch

$$\Lambda(t) = \int_{(0,t)} \frac{1}{1-F} dP_F$$

definiert. Mit Hilfe von (Schmitz, 1995, Seite 51, Lemma (3.15)) zeigt man jedoch sofort, dass beide Definitionen übereinstimmen.

Von eigenständigem Interesse sind die drei folgenden Arten von Ausfallraten:

- (a)  $\lambda$  ist monoton wachsend;
- (b)  $\lambda \equiv \lambda_0$ ,  $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ , d.h.  $\lambda$  ist konstant;
- (c)  $\lambda$  ist monoton fallend.

Verteilungen mit monoton wachsenden (bzw. fallenden) Ausfallraten werden als *Increasing* (bzw. *Decreasing*) *Failure Rate* Verteilungen, kurz IFR- (bzw. DFR-) Verteilungen bezeichnet. IRF-Verteilungen treten z.B. bei Krebs- oder AIDS-Studien auf, während DFR-Verteilungen eher bei einer Studie über Herztransplantationen anzutreffen sind. Es haben sich allerdings auch andere Klassen von Ausfallraten als nützlich erwiesen (siehe z.B. (Barlow and Proschan, 1975)). Die obigen Klassen haben den Vorteil, dass sie sich mathematisch oft einfach behandeln lassen. In der Realität ist die Ausfallrate häufig nicht monoton. Sie hat eher eine U-Gestalt. Zu Beginn existieren oft „Kinderkrankheiten“, die dann mit der Zeit verschwinden, d.h. die Ausfallrate ist am Anfang monoton fallend und dann eine gewisse Zeit lang konstant. Ab einem gewissen Zeitpunkt machen sich dann „Alterungserscheinungen“ bemerkbar, so dass die Ausfallrate ab diesem Zeitpunkt wächst.

---

<sup>2</sup>Ist keine Verwechslung möglich, so wird das von  $X$  induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}^X$  mit  $P$  bezeichnet. Falls keine Zufallsgröße gegeben ist, so bezeichnet  $P_F$  das Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ , das zu der Verteilungsfunktion  $F$  gehört.

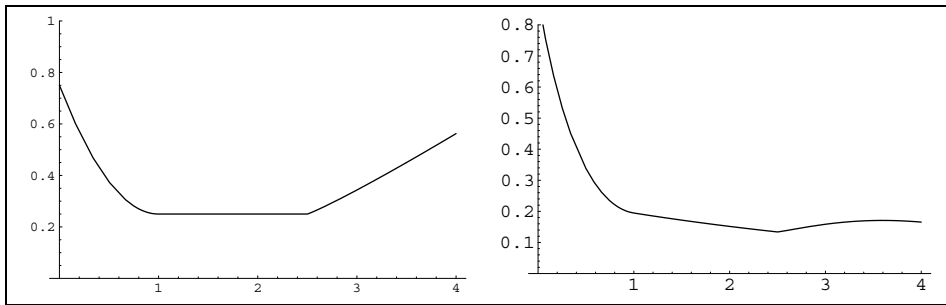


ABBILDUNG 1.1: Eine U-förmige Ausfallrate und die dazugehörige Dichte.

Der Schnitt der Klasse der IFR-Verteilungen mit der Klasse der DFR-Verteilungen besteht genau aus den Verteilungen mit konstanter Ausfallrate. Dies sind nach (Alsmeyer, 2000, Seite 146, Satz 31.6) die *Exponentialverteilungen*:

**1.2 Definition** (EXPONENTIALVERTEILUNG) Die Ausfallrate der Exponentialverteilung mit dem Parameter  $\theta$  (kurz  $Exp(\theta)$ ,  $\theta > 0$ ) ist durch

$$\lambda(t) := \theta \quad \forall t > 0$$

gegeben. Somit hat die kumulative Ausfallrate die Gestalt  $\Lambda(t) := \theta t \quad \forall t > 0$ . Nach (1.2) ergibt sich damit die Überlebensfunktion zu  $\bar{F}(t) := \exp(-\theta t) \quad \forall t > 0$ , und man erhält nach (1.3)

$$\frac{dExp(\theta)}{d\lambda}(t) := \theta \exp(-\theta t) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t)$$

als  $\lambda$ -Dichte von  $Exp(\theta)$  (siehe Abbildung 1.2). Da die Ausfallrate im Zeitablauf konstant ist, beschreiben Exponentialverteilungen gerade Objekte, die nicht „altern“ bzw. keine Verschleißerscheinungen zeigen. Exponentialverteilungen werden allerdings auch häufig eingesetzt, wenn diese Situation nicht vorliegt, da man bei dieser Verteilungsannahme oft zu konkreten Ergebnissen gelangen kann. ■

Die Exponentialverteilungen lassen sich in die folgende, oft benutzte Klasse von Verteilungen einbetten:

**1.3 Definition** (WEIBULL-VERTEILUNG) Die Ausfallrate der Weibull-Verteilung mit den Parametern  $\kappa$  und  $\eta$  (kurz  $\mathcal{W}(\kappa, \eta)$ ,  $\kappa, \eta > 0$ ) hat die Gestalt

$$\lambda(t) := \eta \kappa (\eta t)^{\kappa-1} \quad \forall t > 0.$$

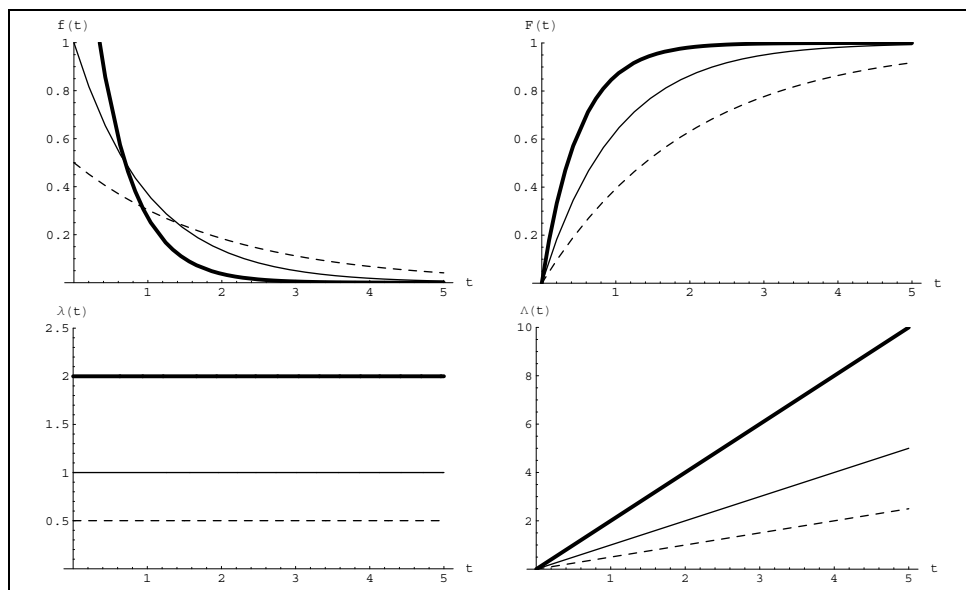


ABBILDUNG 1.2: Dichte, Verteilungsfunktion, Ausfallrate und kumulative Ausfallrate einer  $Exp(0.5)$ - (---),  $Exp(1)$ - (—) und  $Exp(2)$ -Verteilung (—).

Danach ergibt sich die kumulative Ausfallrate zu  $\Lambda(t) := (\eta t)^\kappa \quad \forall t > 0$ , und man erhält als Überlebensfunktion nach (1.2) gerade  $\bar{F}(t) := \exp(-(\eta t)^\kappa) \quad \forall t > 0$ . Weiter ist die  $\lambda$ -Dichte nach (1.3) durch

$$\frac{d\mathcal{W}(\kappa, \eta)}{d\lambda}(t) := \eta \kappa (\eta t)^{\kappa-1} \exp(-(\eta t)^\kappa) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(t)$$

gegeben. Für einige Beispiele siehe Abbildung 1.3. Wie bereits erwähnt, beinhaltet die Klasse der Weibull-Verteilungen die Exponentialverteilungen (es gilt  $\mathcal{W}(1, \eta) = Exp(\eta)$ ). Offenbar ist  $\kappa$  der Form- und  $\eta$  der Skalensparameter dieser Verteilungsklasse. Wie man unmittelbar einsieht, gehört die  $\mathcal{W}(\kappa, \eta)$ -Verteilung für  $\kappa \geq 1$  zu den IFR-Verteilungen und für  $\kappa \leq 1$  zu den DFR-Verteilungen. Weibull-Verteilungen werden beispielsweise benutzt, um die Lebensdauern von Kugellagern und elektronischen Bauteilen wie Kondensatoren zu beschreiben. ■

Die nächste Verteilungsklasse besitzt ihre Rechtfertigung im sogenannten *Proportional Hazard Model* (siehe (Cox, 1972)).

**1.4 Definition (PROPORTIONAL HAZARD FAMILIE)** Die *Proportional Hazard Familie* entsteht, in dem man sich eine Ausfallrate  $\lambda_0$  vorgibt (den so-

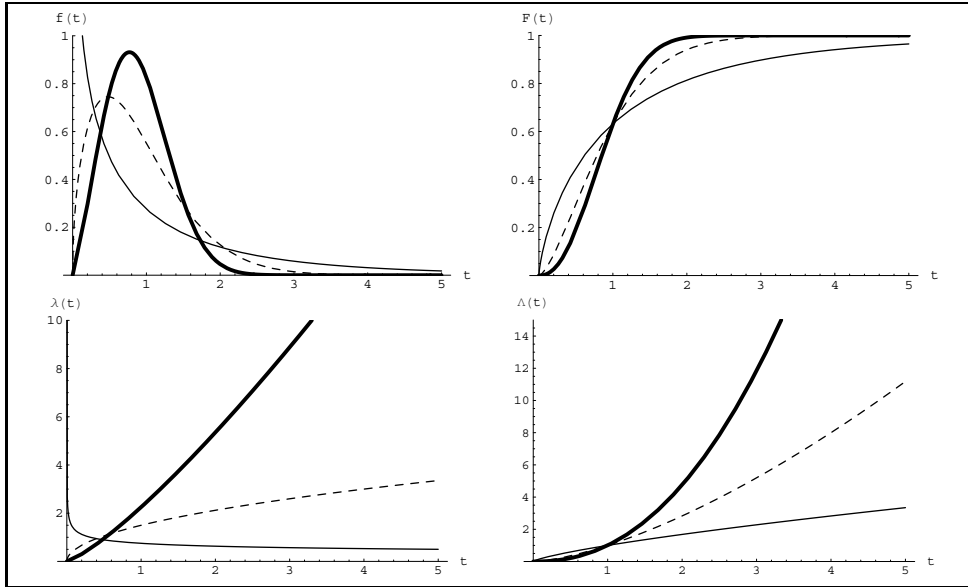


ABBILDUNG 1.3: Dichte, Verteilungsfunktion, Ausfallrate und kumulative Ausfallrate einer  $\mathcal{W}(0.75, 1)$ - (—),  $\mathcal{W}(1.5, 1)$ - (- - -) und  $\mathcal{W}(2.25, 1)$ -Verteilung (—).

genannten *Baseline Hazard*) und dann diese Ausfallrate mit Skalaren multipliziert. Die Ausfallrate der Verteilung  $P_\eta$  ( $\eta > 0$ ) ist demnach durch

$$\lambda(t) := \eta \lambda_0(t) \quad \forall t > 0 \quad (1.4)$$

und die kumulative Ausfallrate durch  $\Lambda(t) := \eta \Lambda_0(t) \quad \forall t > 0$  mit  $\Lambda_0(t) = \int_{(0,t)} \lambda_0(s) d\lambda(s)$  gegeben. Ist nun  $\lambda_0$  stückweise stetig, so ergibt sich nach (1.2) die Überlebensfunktion und nach (1.3) die  $\lambda$ -Dichte zu  $\bar{F}(t) := \exp(-\eta \Lambda_0(t)) \quad \forall t > 0$  bzw.

$$\frac{dP_\eta}{d\lambda}(t) := \eta \lambda_0(t) \exp(-\eta \Lambda_0(t)) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t). \quad (1.5)$$

Wählt man beispielsweise  $\lambda_0(t) = t^{\kappa-1}$ , so erhält man die Weibull-Verteilungen mit dem Formparameter  $\kappa$ . Man kann als Baseline Hazard aber auch eine Exponentialfunktion oder eine wie oben erwähnte U-förmige Funktion nehmen. In manchen Fällen wird der Baseline Hazard auch als stückweise konstant angenommen. Es sei allerdings angemerkt, dass durch dieses Vorgehen i.a. keine Skalenfamilie generiert wird, da sich die Ausfallrate bei einer Skalenfamilie anders als in (1.4) angegeben transformiert (siehe (5.3)).



Für testtheoretische Fragestellungen ist es wichtig festzustellen, dass die Klasse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $\{P_\eta : \eta \in I\}$  ( $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ ) eine einparametrische Exponentialfamilie in  $-\eta$  und  $\Lambda_0$  bildet. Somit ist  $\Lambda_0$  eine für diese Verteilungsklasse suffiziente Statistik. Nach Korollar 1.7 reicht es daher in manchen Fällen aus, nur Exponentialverteilungen zu betrachten. ■

Ermüdungsrisse in Metallen oder Lebensdauern von Halbleitern und Dioden werden oft durch *Lognormalverteilungen* modelliert:

**1.5 Definition (LOGNORMALVERTEILUNG)** Eine mit den Parametern  $a$  und  $\sigma^2$  lognormalverteilte Zufallsgröße (kurz  $\mathbf{LogN}(a, \sigma^2)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$ ) erhält man, in dem man eine mit den Parametern  $a$  und  $\sigma^2$  normalverteilte Zufallsgröße (kurz  $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ ) nimmt und auf diese die Exponentialfunktion anwendet. Bezeichnet  $\phi(t) := \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$  die  $\mathbb{N}$ -Dichte und  $\Phi(t) := \int_{(-\infty, t]} \phi(x) d\mathbb{N}(x)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{LogN}(a, \sigma^2)}{d\mathbb{N}}(t) &:= \frac{1}{\sigma t} \phi\left(\frac{\ln(t) - a}{\sigma}\right) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t) - a}{\sigma}\right)^2\right) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(t) \end{aligned}$$

als  $\mathbb{N}$ -Dichte und  $F(t) := \Phi((\ln(t) - a)/\sigma)$  als Verteilungsfunktion der Lognormalverteilung. Es kann gezeigt werden, dass die Ausfallrate stets ein Maximum annimmt und für  $t$  gegen  $\infty$  monoton gegen 0 strebt. Für einige Beispiele siehe Abbildung 1.4. ■

Bekanntlich besitzt die Zufallsgröße  $F \circ X$  für eine beliebige Zufallsgröße  $X$  mit stetiger Verteilungsfunktion  $F$  eine  $\mathfrak{R}(0, 1)$ -Verteilung. Das folgende Lemma zeigt, wie diese Zufallsgröße  $X$  auf die Verteilung der Zuverlässigkeitstheorie standardisiert werden kann. Diese Standardisierung kann auch als eine Art Zeittransformation angesehen werden.

**1.6 Lemma** Sei  $X$  eine nach  $F$  verteilte Zufallsgröße ( $F$  stetig mit  $F(0) = 0$ ),  $\Lambda$  die entsprechende kumulative Ausfallrate und  $Y$  eine  $\text{Exp}(1)$ -verteilte Zufallsgröße. Dann gilt:

- (a)  $\Lambda \circ X$  genügt einer  $\text{Exp}(1)$ -Verteilung.
- (b) Ist  $\Lambda^{-1}$  die Pseudo-Inverse von  $\Lambda$ , so ist  $\Lambda^{-1} \circ Y$  nach  $F$  verteilt.

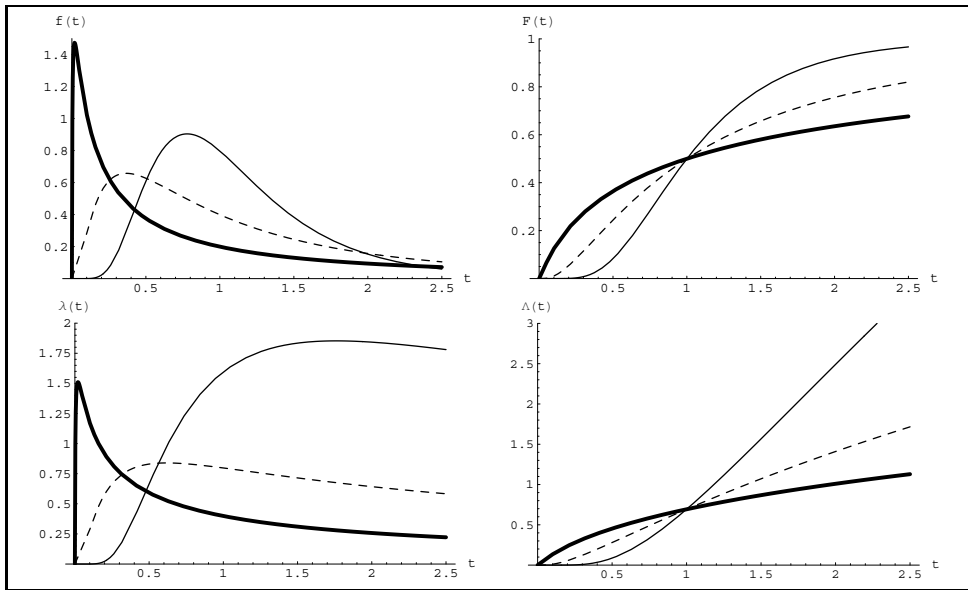


ABBILDUNG 1.4: Dichte, Verteilungsfunktion, Ausfallrate und kumulative Ausfallrate einer  $\text{LogN}(0, 0.5)$ - (—),  $\text{LogN}(0, 1)$ - (- - -) und  $\text{LogN}(0, 2)$ -Verteilung (—).

BEWEIS: Für den ersten Teil benutzt man im wesentlichen nur die Tatsache, dass  $F \circ X$  einer  $\mathfrak{R}(0, 1)$ -Verteilung genügt (siehe z.B. (Schmitz, 1995, Seite 51, Lemma (3.15))):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Lambda \circ X \leq t) &= \mathbb{P}(-\ln(1 - F \circ X(t)) \leq t) = \mathbb{P}(1 - F \circ X \geq e^{-t}) \\ &= \mathbb{P}(F \circ X \leq 1 - e^{-t}) = 1 - e^{-t} \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Der zweite Teil folgt auf ähnlichem Weg aus (Schmitz, 1995, Seite 49, Lemma (3.13)).  $\square$

Als Anwendung für die Proportional Hazard Familie erhält man sofort das folgende Korollar:

**1.7 Korollar** *Ist  $P_\eta$  wie in (1.5) verteilt, so besitzt  $P_\eta^{\Lambda_0}$  eine  $\text{Exp}(\eta)$ -Verteilung. Insbesondere gilt also: Besitzt  $X$  eine  $\mathcal{W}(\kappa, \eta)$ -Verteilung, so besitzt  $X^\kappa$  eine  $\text{Exp}(\eta^\kappa)$ -Verteilung.*

Desweiteren wird häufig die *Gammaverteilung* benötigt. Es wird sich zeigen, dass die kritischen Werte der parametrischen Tests oft durch die Fraktile der Gammaverteilung gegeben sind.

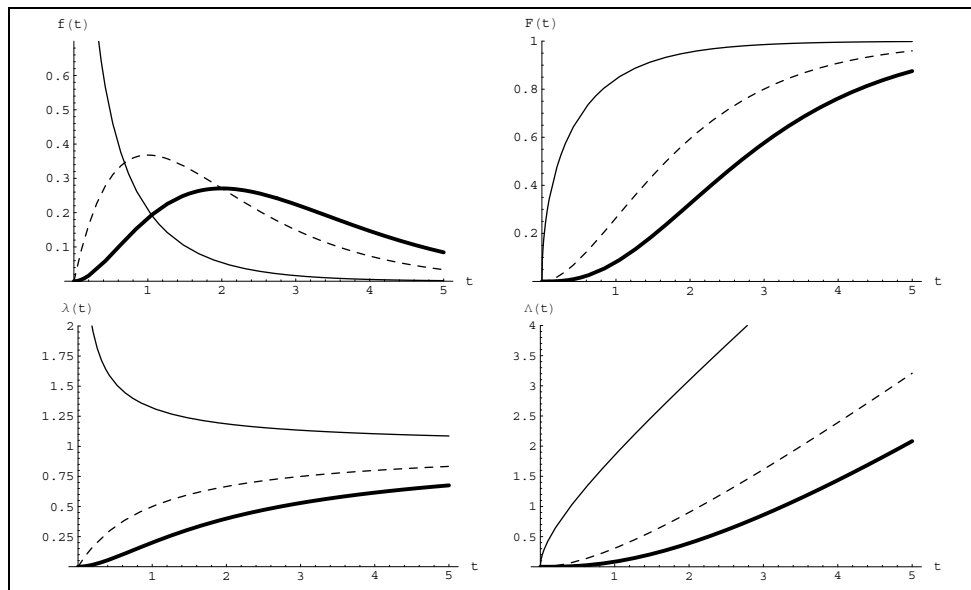


ABBILDUNG 1.5: Dichte, Verteilungsfunktion, Ausfallrate und kumulative Ausfallrate einer  $\Gamma_{0.5,1}$ - (—),  $\Gamma_{2,1}$ - (---) und  $\Gamma_{3,1}$ -Verteilung (—).

**1.8 Definition (GAMMAVERTEILUNG)** Die  $\lambda$ -Dichte einer Gammaverteilung mit den Parametern  $\xi$  und  $\beta$  (kurz  $\Gamma_{\xi,\beta}$ ,  $\xi, \beta > 0$ ) ist durch

$$\frac{d\Gamma_{\xi,\beta}}{d\lambda}(t) := \frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)} t^{\xi-1} \exp(-\beta t) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t)$$

gegeben. Einige Beispiele finden sich in Abbildung 1.5. Für  $\xi \leq 1$  gehört die Gammaverteilung zu den DFR-Verteilungen und für  $\xi \geq 1$  zu den IFR-Verteilungen. Gammaverteilungen lassen sich besonders einfach falten. Es gilt nämlich:  $\Gamma_{\xi_1,\beta} * \Gamma_{\xi_2,\beta} = \Gamma_{\xi_1+\xi_2,\beta}$ . Da weiter  $Exp(\theta) = \Gamma_{1,\theta}$  gilt, ist insbesondere die  $n$ -fache Faltung einer  $Exp(\theta)$ -Verteilung eine  $\Gamma_{n,\theta}$ -Verteilung. Aus diesem Grund besitzen die Prüfstatistiken der parametrischen Tests oft eine Gammaverteilung (siehe Korollar 1.7). Lebensdauerdaten werden allerdings eher selten mit Gammaverteilungen modelliert. ■

---

---

## Kapitel 2

### NICHTPARAMETRISCHE OPTIMALITÄTSEIGENSCHAFTEN OPTIMALER PARAMETRISCHER TESTS

---

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, dass die (z.B. nach (Lehmann, 1986, Kapitel 3 und 4) und (Witting, 1985, Kapitel 2)) wohlbekannten, gleichmäßig besten Tests zum Niveau  $\alpha$  für einseitige Testprobleme mit isotonem Dichtequotienten oder gleichmäßig besten zum Niveau  $\alpha$  unverfälschten Tests für zweiseitige Testprobleme bei Vorliegen einer einparametrischen Exponentialfamilie unter gewissen Bedingungen an die Gestalt des Tests auch nichtparametrischen Optimalitätsbedingungen genügen.

Die von (Fisher, 1935) und (Pitman, 1937) vorgeschlagenen *Permutationstests* besitzen im wesentlichen zwei nichtparametrische Eigenschaften (siehe (Gebhard, 1995)):

- (a) Sie sind zum Niveau  $\alpha$  unverfälscht für große nichtparametrische Hypothesen.
- (b) Sie maximieren unter allen zum Niveau  $\alpha$  unverfälschten Tests die Güte auf einer Teilklasse der Alternative gleichmäßig.

Es wird nun gezeigt, dass die oben angesprochenen Tests ebenfalls die Bedingungen (a) und (b) erfüllen. Man kann sie quasi als Analoga der Permutationstests für das Einstichprobenproblem ansehen. Somit können einige Argumente, die immer gegen die Anwendung parametrischer Verfahren angebracht werden, teilweise entkräftet werden.

## 2.1 EINSEITIGE HYPOTHESEN

Dieser Abschnitt widmet sich der Untersuchung von einseitigen Hypothesen. Hat man es mit einem parametrischen Problem zu tun, so gilt beispielsweise:

$$\mathbf{H} : \vartheta \leq \vartheta_0, \quad \mathbf{K} : \vartheta > \vartheta_0.$$

### 2.1.1 UNZENSIERTE DATEN

Als erstes wird eine Charakterisierung der  $\preceq_{\text{st}}$ -Ordnung<sup>1</sup> benötigt (siehe (Witting and Müller-Funk, 1995, Seite 483, (7.1.35)) oder (Shaked and Shanthikumar, 1993, Seite 4, 1.A.7)):

**2.1 Lemma** *Seien  $F_1, F_2$  zwei Verteilungsfunktionen. Dann gilt:*

$$F_1 \preceq_{\text{st}} F_2 \iff \begin{cases} \int h dP_{F_1} \geq \int h dP_{F_2} \text{ für alle isotonen,} \\ \text{beschränkten Funktionen } h : (\mathbb{R}, \mathbb{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B}). \end{cases} \quad (2.1)$$

Also gilt  $F_1 \prec_{\text{st}} F_2$  genau dann, wenn (2.1) gilt und es eine Funktion  $h$  gibt, für die die Ungleichung (2.1) strikt erfüllt ist.

Mit Hilfe dieses Lemmas kann man ein erstes Unverfälschtheitsresultat herleiten:

**2.2 Lemma** *Seien  $F_{\vartheta_0}$  eine Verteilungsfunktion und  $\varphi^*$  ein Test mit  $E_{F_{\vartheta_0}}(\varphi^*) = \alpha$ , so dass die Funktionen  $x_i \mapsto \varphi^*(x)$  bei festen  $x_j$ ,  $j \neq i$ , isoton sind ( $1 \leq i \leq n$ ). Dann ist  $\varphi^*$  auch ein zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für  $\hat{\mathbf{H}} : F \succeq_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$ ,  $\hat{\mathbf{K}} : F \prec_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$ .*

BEWEIS: Für jedes  $F \in \hat{\mathbf{H}}$  gilt  $F \succeq_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$  und daher:

$$\begin{aligned} E_F(\varphi^*) &= \int \cdots \int \varphi^*(x_1, \dots, x_n) dP_F(x_n) \cdots dP_F(x_1) \\ &\leq \int \cdots \int \varphi^*(x_1, \dots, x_n) dP_{F_{\vartheta_0}}(x_n) dP_F(x_{n-1}) \cdots dP_F(x_1) \\ &\quad \text{nach (2.1) mit } h(y) = \varphi^*(x_1, \dots, x_{n-1}, y) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Es gilt  $F_1 \preceq_{\text{st}} F_2 \iff F_1(t) \leq F_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$  und  $F_1 \prec_{\text{st}} F_2 \iff F_1 \preceq_{\text{st}} F_2$  und  $F_1 \neq F_2$  gilt.

## 2.1 Einseitige Hypothesen

---

$$\begin{aligned}
&\leq \int \cdots \int \int \int \varphi^*(x_1, \dots, x_n) \\
&\quad dP_{F_{\vartheta_0}}(x_n) dP_{F_{\vartheta_0}}(x_{n-1}) dP_F(x_{n-2}) \cdots dP_F(x_1) \\
&\quad \text{nach (2.1) mit } h(y) = \int \varphi^*(x_1, \dots, x_{n-2}, y, x_n) dP_{F_{\vartheta_0}}(x_n) \\
&\quad \vdots \\
&\leq \int \cdots \int \varphi^*(x_1, \dots, x_n) dP_{F_{\vartheta_0}}(x_n) \cdots dP_{F_{\vartheta_0}}(x_1) \\
&= E_{F_{\vartheta_0}}(\varphi^*) = \alpha.
\end{aligned}$$

Der Fall  $F \in \widehat{\mathbf{K}}$  wird analog behandelt. □

Bezüglich der Optimalitätseigenschaften gilt:

**2.3 Satz** Sei  $\mathfrak{P} = \{P_{\vartheta}^{(n)} : \vartheta \in \Theta = \mathbf{H} + \mathbf{K}\}$  eine Klasse von Verteilungen, so dass  $\mathbf{J} := \overline{\mathbf{H}} \cap \overline{\mathbf{K}} = \{\vartheta_0\}$  gilt (wobei  $\bar{\cdot}$  den Rand bzgl. der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz bezeichnet<sup>2</sup>) und sei  $\varphi^*$  ein gleichmäßig bester auf  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlicher Test für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  der Form

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^* & \text{falls } \sum_{i=1}^n V_i(x_i) = c^* \\ 0 & < \end{cases}, \quad (2.2)$$

wobei die  $V_i$  isotone Funktionen seien. Dann gilt:

(a)  $\varphi^*$  maximiert die Güte auf<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{K}} := \{ &\tilde{P} \text{ Verteilung auf } (\mathbb{R}, \mathbb{B}) : L_{P_{\vartheta_0}^{(n)}, \tilde{P}^{(n)}} \text{ ist} \\
&P_{\vartheta_0}^{(n)} + \tilde{P}^{(n)}\text{-f.s. isoton in } \sum_{i=1}^n V_i(x_i) \}
\end{aligned}$$

unter allen auf  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlichen Tests gleichmäßig.

---

<sup>2</sup>Falls mit der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz gearbeitet wird, wird immer der Raum  $\{P_{\vartheta} : \vartheta \in \Theta = \mathbf{H} + \mathbf{K}\}$  zugrundegelegt.

<sup>3</sup> $L_{P_{\vartheta_0}^{(n)}, \tilde{P}^{(n)}}$  bezeichnet den Dichtequotienten von  $\tilde{P}^{(n)}$  bzgl.  $P_{\vartheta_0}^{(n)}$  (siehe (Witting, 1985, Seite 112, (1.6.28))).

- (b) Gilt  $\mathbf{H} \cap \widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cap \widehat{\mathbf{H}} = \emptyset$ , so ist  $\varphi^*$  ein zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für die Hypothesen  $\mathbf{H} \cup \widehat{\mathbf{H}}$  gegen  $\mathbf{K} \cup \widehat{\mathbf{K}}$ , welcher die Güte auf  $\widehat{\mathbf{K}}_1 := \mathbf{K} \cup (\widehat{\mathbf{K}} \cap \widetilde{\mathbf{K}})$  unter allen zum Niveau  $\alpha$  unverfälschten Tests für  $\mathbf{H} \cup \widehat{\mathbf{H}}$  gegen  $\mathbf{K} \cup \widehat{\mathbf{K}}$  gleichmäßig maximiert.

$\varphi^*$  ist also ein gegen  $\widehat{\mathbf{K}}_1$  gleichmäßig bester zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für  $\mathbf{H} \cup \widehat{\mathbf{H}}$  gegen  $\mathbf{K} \cup \widehat{\mathbf{K}}$ .

BEWEIS:

- (a) Für  $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathbf{K}}$  betrachte man die einfachen Hypothesen  $\{P_{\vartheta_0}^{(n)}\}$ ,  $\{\widetilde{P}^{(n)}\}$ . Nach dem einfachen Neyman-Pearson Lemma ist  $\varphi^*$  ein bester Test zum Niveau  $\alpha$  für diese Hypothesen. Also maximiert  $\varphi^*$  die Güte auf  $\widetilde{\mathbf{K}}$  unter allen auf  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlichen Tests gleichmäßig.
- (b) Wegen der Form des Tests kann Lemma 2.2 angewendet werden. Ein Vergleich mit dem Test  $\varphi_\alpha \equiv \alpha$  zeigt, dass jeder gleichmäßig beste auf  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnliche Test unverfälscht für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  ist. Also ist  $\varphi^*$  ein zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für  $\mathbf{H} \cup \widehat{\mathbf{H}}$  gegen  $\mathbf{K} \cup \widehat{\mathbf{K}}$ .
- (c) Unter der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz ist die Gütefunktion eines jeden Tests stetig. Also ist jeder zum Niveau  $\alpha$  unverfälschte Test für  $\mathbf{H} \cup \widehat{\mathbf{H}}$  gegen  $\mathbf{K} \cup \widehat{\mathbf{K}}$  auf

$$\widehat{\mathbf{J}} := \overline{\mathbf{H} \cup \widehat{\mathbf{H}}} \cap \overline{\mathbf{K} \cup \widehat{\mathbf{K}}} \supseteq \{\vartheta_0\} = \mathbf{J}$$

$\alpha$ -ähnlich (siehe (Witting and Nölle, 1970, Seite 117, Satz 3.12)).

Zusammengenommen liefern (a), (b) und (c) die Behauptung.  $\square$

Eine interessante Anwendung ist die Folgende: Sei  $\mathfrak{P}$  eine *einparametrische* Klasse von Verteilungen und  $\mathbf{H} : \vartheta \leq \vartheta_0$ ,  $\mathbf{K} : \vartheta > \vartheta_0$  einseitige Hypothesen. Falls ein gleichmäßig bester  $\alpha$ -ähnlicher Test  $\varphi^*$  der Form (2.2) existiert, so ist  $\varphi^*$  bereits ein zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für die *nichtparametrischen* Hypothesen  $\mathbf{H} \cup \widehat{\mathbf{H}}$ ,  $\mathbf{K} \cup \widehat{\mathbf{K}}$  und maximiert die Gütefunktion auf der *nichtparametrischen* Alternative  $\widehat{\mathbf{K}}_1$  gleichmäßig.

Im Anschluß soll eine Anwendung angegeben werden, die viele wichtige parametrische Verteilungsklassen als Beispiele enthält.



## 2.1 Einseitige Hypothesen

---

**2.4 Korollar** Seien  $X_1, \dots, X_n$  eine Folge von i.i.d. Zufallsgrößen mit Verteilungsfunktion  $F$  und  $\{\mathbb{P}_\vartheta^{X_1} : \vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$  eine einparametrische Exponentialfamilie in  $\vartheta$  und  $V$ , wobei  $V$  isoton sei. Weiter sei

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^* & \text{falls } \sum_{i=1}^n V(x_i) = c^* \\ 0 & < \end{cases}$$

ein gleichmäßig bester auf  $\{\vartheta_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Test bzw. gleichmäßig bester Test zum Niveau  $\alpha$  für

$$\mathbf{H} : \vartheta \leq \vartheta_0 \quad \text{gegen} \quad \mathbf{K} : \vartheta > \vartheta_0, \quad \vartheta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$$

(siehe (Witting, 1985, Seite 210, Satz 2.24)). Dann ist  $\varphi^*$  auch unverfälscht zum Niveau  $\alpha$  für

$$\widehat{\mathbf{H}} : F \succeq_{\text{st}} F_{\vartheta_0} \quad \text{gegen} \quad \widehat{\mathbf{K}} : F \prec_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$$

und maximiert die Gütefunktion auf  $\widehat{\mathbf{K}} \cap \widetilde{\mathbf{K}} (\supseteq \mathbf{K})$  gleichmäßig.

BEWEIS: Da  $V$  isoton ist, besitzt  $\{\mathbb{P}_\vartheta^{X_1} : \vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$  einen isotonen Dichtequotienten in  $\text{id}_{\mathbb{R}}$ . Damit gilt nach (Witting, 1985, Seite 214, Satz 2.28 c)):

$$F_{\vartheta_1} \prec_{\text{st}} F_{\vartheta_2} \quad \forall \vartheta_2 > \vartheta_1. \quad (2.3)$$

Hieraus folgt  $\mathbf{H} \cup \widehat{\mathbf{H}} = \widehat{\mathbf{H}}$  und  $\mathbf{K} \cup \widehat{\mathbf{K}} = \widehat{\mathbf{K}}$ .

Falls nun noch gezeigt werden kann, dass

$$\overline{\mathbf{H}} \cap \overline{\mathbf{K}} = \{\vartheta_0\}$$

gilt, kann Satz 2.3 angewendet werden. Da  $\vartheta_0 \in \mathbf{H}$  ist, reicht es,  $\vartheta_0 \in \overline{\mathbf{K}}$  zu zeigen, damit  $\vartheta_0 \in \overline{\mathbf{H}} \cap \overline{\mathbf{K}}$  gilt. Nach Voraussetzung existiert ein  $\sigma$ -endliches Maß  $\mu$  mit:

$$f_\vartheta(x) := \frac{d\mathbb{P}_\vartheta^{X_1}}{d\mu}(x) = C(\vartheta) \exp(\vartheta V(x)).$$

Wegen  $\vartheta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$  existiert weiter eine Folge  $(\vartheta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbf{K}$  mit  $\vartheta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \vartheta_0$  und somit  $f_{\vartheta_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f_{\vartheta_0}$   $\mu$ -f.s.. Daher gilt nach (Witting and Nölle, 1970, Seite 54, Hilfssatz 2.13 a) und b)):

$$d(\mathbb{P}_{\vartheta_n}^{X_1}, \mathbb{P}_{\vartheta_0}^{X_1}) := \sup_{B \in \mathcal{B}} |\mathbb{P}_{\vartheta_n}^{X_1}(B) - \mathbb{P}_{\vartheta_0}^{X_1}(B)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad (2.4)$$

also  $\vartheta_0 \in \overline{\mathbf{K}}$ .

Ist nun umgekehrt  $\tilde{\vartheta} \in \overline{\mathbf{H}} \cap \overline{\mathbf{K}}$ , so existiert eine Folge  $(\vartheta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbf{H}$  mit  $d\left(\mathbb{P}_{\vartheta_n}^{X_1}, \mathbb{P}_{\tilde{\vartheta}}^{X_1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  und eine Folge  $(\hat{\vartheta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbf{K}$  mit  $d\left(\mathbb{P}_{\hat{\vartheta}_n}^{X_1}, \mathbb{P}_{\tilde{\vartheta}}^{X_1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Da  $\vartheta_n \in \mathbf{H}$  gilt, folgt nach (2.3):

$$F_{\vartheta_n}(x) \geq F_{\vartheta_0}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ also } F_{\tilde{\vartheta}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\vartheta_n}(x) \geq F_{\vartheta_0}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

falls man für jedes  $x \in \mathbb{R}$  in (2.4)  $B = (-\infty, x]$  einsetzt. Analog erhält man aus  $\hat{\vartheta}_n \in \mathbf{K}$ :

$$F_{\tilde{\vartheta}}(x) \leq F_{\vartheta_0}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ und somit } F_{\tilde{\vartheta}}(x) = F_{\vartheta_0}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

was nichts anderes als  $\tilde{\vartheta} = \vartheta_0$  bedeutet.  $\square$

Im Fall einer einparametrischen Exponentialfamilie enthält  $\widehat{\mathbf{K}} \cap \tilde{\mathbf{K}}$  einige interessante Verteilungsklassen, die nicht in  $\mathbf{K}$  enthalten sind. Insbesondere sind immer die Mischungen

$$\left\{ P_{\beta, \eta} := \sum_{i=1}^k \beta_i P_{\eta_i} : \begin{array}{l} \beta_i > 0, \quad 1 \leq i \leq k, \quad \sum_{i=1}^k \beta_i = 1 \\ \eta_i \geq \vartheta_0, \quad 1 \leq i \leq k, \quad \exists j : \eta_j > \vartheta_0 \end{array} \right\}$$

(von Verteilungen aus  $\{\mathbb{P}_{\vartheta}^{X_1} : \vartheta \geq \vartheta_0\}$ ) in  $\widehat{\mathbf{K}} \cap \tilde{\mathbf{K}}$  enthalten. Offenbar ist die Verteilungsfunktion von  $P_{\beta, \eta}$  durch  $\sum_{i=1}^k \beta_i F_{\eta_i}$  gegeben und für jeden Test  $\varphi$  gilt  $E_{\beta, \eta}(\varphi) = \sum_{i=1}^k \beta_i E_{\eta_i}(\varphi)$ . Also folgt die Behauptung aus (2.3) und da  $E_{\eta_i}(\varphi)$  für alle  $\eta_i \geq \vartheta_0$  durch  $\varphi^*$  maximiert wird.

Die wohl wichtigste Anwendung von Korollar 2.4 ist:

**2.5 Beispiel (EINSEITIGER GAUSS-TEST)** Seien  $X_1, \dots, X_n$  stu.  $\mathcal{N}(a, \sigma_0^2)$ -verteilte Zufallsgrößen,  $a \in \mathbb{R}$  beliebig,  $\sigma_0^2 > 0$  fest. In diesem Fall kann Korollar 2.4 mit  $\vartheta = a/\sigma_0^2$  und  $V = \text{id}_{\mathbb{R}}$  angewendet werden. Demnach ist der einseitige Gauß-Test

$$\varphi_G^*(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \vartheta_0 \sigma_0^2}{\sqrt{n} \sigma_0} > u_\alpha \\ 0 & \text{falls } \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \vartheta_0 \sigma_0^2}{\sqrt{n} \sigma_0} \leq u_\alpha \end{cases}$$

( $u_\alpha$  bezeichnet das  $\alpha$ -Fraktile der  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung) zum Niveau  $\alpha$  unverfälscht für die Hypothesen

$$\widehat{\mathbf{H}} : F \succeq_{\text{st}} F_{\vartheta_0} \quad \text{gegen} \quad \widehat{\mathbf{K}} : F \prec_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$$

## 2.1 Einseitige Hypothesen

---

und maximiert die Gütefunktion auf  $\widehat{\mathbf{K}} \cap \widetilde{\mathbf{K}} \supseteq \mathbf{K}$  gleichmäßig.

In  $\widehat{\mathbf{K}} \cap \widetilde{\mathbf{K}}$  sind zumindest  $\mathcal{N}(\sum_{i=1}^n \beta_i \vartheta_i, \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \sigma_0^2)$ -Verteilungen enthalten ( $\vartheta_i > \vartheta_0$ ,  $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$ ). Die Klasse der abgeschnittenen Normalverteilungen ist in  $\widehat{\mathbf{K}}$  enthalten:

$$\left\{ P_{\eta, \nu} : \frac{dP_{\eta, \nu}}{d\lambda}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0 \left(1 - \Phi\left(\frac{\nu - \eta}{\sigma_0}\right)\right)} e^{-(x-\eta)^2/2\sigma_0^2} \mathbf{1}_{(\nu, \infty)}(x), \right. \\ \left. \eta > \vartheta_0 \sigma_0^2, \nu \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \widehat{\mathbf{K}}.$$

Weiter ist die Klasse der abgeschnittenen Normalverteilungen mit variierenden Varianzen in  $\widehat{\mathbf{K}}$  enthalten:

$$\left\{ P_{\eta^2} : \frac{dP_{\eta^2}}{d\lambda}(x) := \frac{2}{\sqrt{2\pi}\eta} e^{-(x-\vartheta_0\sigma_0^2)^2/2\eta^2} \mathbf{1}_{(\vartheta_0\sigma_0^2, \infty)}(x), \eta^2 > \sigma_0^2 \right\} \subseteq \widehat{\mathbf{K}}.$$

Beide Klassen gehören allerdings nur genau dann zu  $\widehat{\mathbf{K}}$ , wenn  $n = 1$  gilt. In gleicher Art und Weise kann man Teilklassen von  $\widehat{\mathbf{H}}$  finden.  $\diamond$

Liegen keine Normalverteilungen, sondern Exponentialverteilungen vor, so gilt:

**2.6 Beispiel (EINSEITIGER EXPONENTIALTEST)** Seien  $X_1, \dots, X_n$  stu.  $Exp(\theta)$ -verteilte Zufallsgrößen,  $\theta > 0$  beliebig. In diesem Fall kann Korollar 2.4 mit  $\vartheta = -\theta$  und  $V = \text{id}_{\mathbb{R}}$  angewendet werden. Demnach ist der einseitige Exponentialtest

$$\varphi_E^*(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{i=1}^n x_i > c^* \\ 0 & \leq \end{cases}$$

( $c^*$  bezeichnet das  $\alpha$ -Fraktile der  $\Gamma_{n, -\vartheta_0}$ -Verteilung) zum Niveau  $\alpha$  unverfälscht für die Hypothesen

$$\widehat{\mathbf{H}} : F \succeq_{\text{st}} F_{\vartheta_0} \quad \text{gegen} \quad \widehat{\mathbf{K}} : F \prec_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$$

und maximiert die Gütefunktion auf  $\widehat{\mathbf{K}} \cap \widetilde{\mathbf{K}} \supseteq \mathbf{K}$  gleichmäßig.

Hier ist in  $\widehat{\mathbf{K}}$  zumindest die Klasse der verschobenen Exponentialverteilungen

$$\left\{ P_{\eta, \nu} : \frac{dP_{\eta, \nu}}{d\lambda}(x) := \eta e^{-\eta(x-\nu)} \mathbf{1}_{(\nu, \infty)}(x), \quad 0 < \eta < -\vartheta_0, \nu > 0 \right\}$$

und die Klasse der verschobenen Weibull-Verteilungen

$$\left\{ P_{\eta,\kappa,\nu} : \frac{dP_{\eta,\kappa,\nu}}{d\lambda}(x) := \eta\kappa(\eta(x-\nu))^{\kappa-1}e^{-(\eta(x-\nu))^\kappa} \mathbf{1}_{(\nu,\infty)}(x), \right. \\ \left. 0 < \kappa < 1, \quad 0 < \eta^\kappa < -\vartheta_0, \quad \nu \geq 1 \right\}$$

enthalten. Beide Klassen sind allerdings genau dann in  $\widehat{\mathbf{K}}$  enthalten, wenn  $n = 1$  gilt.  $\diamond$

Als Verallgemeinerung erhält man damit für das Proportional Hazard Model zu einem festen Baseline Hazard:

**2.7 Beispiel (EINSEITIGER PROPORTIONAL HAZARD TEST)** Seien  $X_1, \dots, X_n$  stu. Zufallsgrößen, die von dem gleichen stückweise stetigen Baseline Hazard  $\lambda_0$  generiert wurden (siehe (1.5)). In diesem Fall kann Korollar 2.4 mit  $\vartheta = -\eta$  und  $V = \Lambda_0$  angewendet werden. Demnach ist der Test

$$\varphi_{PH}^*(x) := \begin{cases} 1 & > \\ \text{falls } \sum_{i=1}^n \Lambda_0(x_i) & c^* \\ 0 & \leq \end{cases}$$

( $c^*$  bezeichnet das  $\alpha$ -Fraktile der  $\Gamma_{n,-\vartheta_0}$ -Verteilung, siehe Korollar 1.7) zum Niveau  $\alpha$  unverfälscht für die Hypothesen

$$\widehat{\mathbf{H}} : F \succeq_{\text{st}} F_{\vartheta_0} \quad \text{gegen} \quad \widehat{\mathbf{K}} : F \prec_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$$

und maximiert die Gütefunktion auf  $\widehat{\mathbf{K}} \cap \widetilde{\mathbf{K}} \supseteq \mathbf{K}$  gleichmäßig. Dieses Beispiel deckt damit insbesondere die Klasse der Weibull-Verteilungen mit festem Formparameter ab.  $\diamond$

Das letzte Beispiel beschäftigt sich mit Lognormalverteilungen:

**2.8 Beispiel (EINSEITIGER LOGNORMALTEST)** Seien  $X_1, \dots, X_n$  stu.  $\mathbf{LogN}(a, \sigma_0^2)$ -verteilte Zufallsgrößen,  $a \in \mathbb{R}$  beliebig und  $\sigma_0^2 > 0$  fest. In diesem Fall kann Korollar 2.4 mit  $\vartheta = a/\sigma_0^2$  und  $V = \ln$  angewendet werden. Demnach ist der einseitige Lognormaltest

$$\varphi_{LN}^*(x) := \begin{cases} 1 & > \\ \text{falls } \sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i) - \vartheta_0 \sigma_0^2}{\sqrt{n} \sigma_0} & u_\alpha \\ 0 & \leq \end{cases}$$

## 2.1 Einseitige Hypothesen

---

( $u_\alpha$  bezeichnet das  $\alpha$ -Fraktile der  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung) zum Niveau  $\alpha$  unverfälscht für die Hypothesen

$$\widehat{\mathbf{H}} : F \succeq_{\text{st}} F_{\vartheta_0} \quad \text{gegen} \quad \widehat{\mathbf{K}} : F \prec_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$$

und maximiert die Gütefunktion auf  $\widehat{\mathbf{K}} \cap \widetilde{\mathbf{K}} \supseteq \mathbf{K}$  gleichmäßig. ◇

### 2.1.2 TYP II-ZENSIERTE DATEN

Wie bereits auf Seite 2 erwähnt, ist es oft nicht möglich bzw. nicht gewollt, mit der Auswertung eines Experiments so lange zu warten, bis alle  $n$  Daten beobachtet wurden. In solchen Fällen kann das Experiment z.B. bereits dann abgebrochen werden, wenn man die ersten  $k$  ( $< n$ ) Daten beobachtet hat. Dabei muss  $k$  bereits vor Beginn der Studie festgelegt werden. Dieses Vorgehen wird dann auch *Typ II-Zensurierung* genannt. Falls

$$T = (T_1, \dots, T_n) : (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n) \longrightarrow (\mathbb{R}_{\leq}^n, \mathbb{B}_{\leq}^n)$$

die *Ordnungsstatistik* bezeichnet, so ergibt sich das statistische Experiment unter der Typ II-Zensurierung zu  $(\mathbb{R}_{\leq}^n, \mathbb{B}_{\leq}^n, \mathfrak{P}^T)$  mit

$$\mathfrak{P}^T := \{ (\otimes_{i=1}^n P_{\vartheta})^{(T_1, \dots, T_k)} : \vartheta \in \Theta \}. \quad (2.5)$$

Auch unter dieser Verteilungsannahme gelten entsprechende Versionen von Lemma 2.2 und Satz 2.3.

**2.9 Lemma** *Seien  $F_{\vartheta_0}$  eine Verteilungsfunktion und*

$$\varphi^* : (\mathbb{R}_{\leq}^k, \mathbb{B}_{\leq}^k) \longrightarrow ([0, 1], \mathbb{B}_{|[0,1]})$$

*ein Test mit  $E_{F_{\vartheta_0}}(\varphi^*) = \alpha$ , so dass die Funktionen  $t_i \mapsto \varphi^*(t)$  bei festen  $t_j$ ,  $j \neq i$ , isoton sind ( $1 \leq i \leq k$ ). Dann ist  $\varphi^*$  auch ein zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für  $\widehat{\mathbf{H}} : F \succeq_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$ ,  $\widehat{\mathbf{K}} : F \prec_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$ .*

BEWEIS: Für jedes  $F \in \widehat{\mathbf{H}} \cup \widehat{\mathbf{K}}$  gilt:

$$\begin{aligned} E_F(\varphi^*) &= \int \varphi^* d(\otimes_{i=1}^n P_F)^{(T_1, \dots, T_k)} \\ &= \int \varphi^* \circ (T_1, \dots, T_k) d \otimes_{i=1}^n P_F. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Außerdem ist die Funktion

$$\varphi^* \circ (T_1, \dots, T_k) : (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n) \longrightarrow ([0, 1], \mathbb{B}_{|[0,1]})$$

isoton in  $x_i$ , falls die anderen Komponenten  $x_j$ ,  $j \neq i$ , fest sind ( $1 \leq i \leq n$ ).  
Der Beweis läuft damit analog zu Lemma 2.2.  $\square$

Weiter gilt:

**2.10 Satz** Sei  $\mathfrak{P}^T = \{(\otimes_{i=1}^n P_{\vartheta})^{(T_1, \dots, T_k)} : \vartheta \in \Theta = \mathbf{H} + \mathbf{K}\}$  eine Klasse von Verteilungen, so dass  $\mathbf{J} := \overline{\mathbf{H}} \cap \overline{\mathbf{K}} = \{\vartheta_0\}$  gilt und sei

$$\varphi^* : (\mathbb{R}_{\leq}^k, \mathbb{B}_{\leq}^k) \longrightarrow ([0, 1], \mathbb{B}_{|[0,1]})$$

ein gleichmäßig bester auf  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlicher Test für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  der Form

$$\varphi^*(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^* & \text{falls } \sum_{i=1}^k V_i(t_i) = c^* \\ 0 & < \end{cases},$$

wobei die  $V_i$  isotone Funktionen seien. Dann gilt:

(a)  $\varphi^*$  maximiert die Güte auf

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}^T &:= \left\{ \tilde{P} \text{ Verteilung auf } (\mathbb{R}, \mathbb{B}) : L_{(\otimes_{i=1}^n P_{\vartheta_0})^{(T_1, \dots, T_k)}, (\otimes_{i=1}^n \tilde{P})^{(T_1, \dots, T_k)}} \right. \\ &\quad \left. \text{ist } (\otimes_{i=1}^n P_{\vartheta_0})^{(T_1, \dots, T_k)} + (\otimes_{i=1}^n \tilde{P})^{(T_1, \dots, T_k)} \text{-f.s. isoton in } \sum_{i=1}^k V_i(t_i) \right\} \end{aligned}$$

unter allen auf  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlichen Tests gleichmäßig.

(b) Gilt  $\mathbf{H} \cap \widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cap \widehat{\mathbf{H}} = \emptyset$ , so ist  $\varphi^*$  ein zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für die Hypothesen  $\mathbf{H} \cup \widehat{\mathbf{H}}$  gegen  $\mathbf{K} \cup \widehat{\mathbf{K}}$ , welcher die Güte auf  $\widehat{\mathbf{K}}_1^T := \mathbf{K} \cup (\widehat{\mathbf{K}} \cap \tilde{\mathbf{K}}^T)$  unter allen zum Niveau  $\alpha$  unverfälschten Tests für  $\mathbf{H} \cup \widehat{\mathbf{H}}$  gegen  $\mathbf{K} \cup \widehat{\mathbf{K}}$  gleichmäßig maximiert.

$\varphi^*$  ist also ein gegen  $\widehat{\mathbf{K}}_1^T$  gleichmäßig bester zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für  $\mathbf{H} \cup \widehat{\mathbf{H}}$  gegen  $\mathbf{K} \cup \widehat{\mathbf{K}}$ .

## 2.1 Einseitige Hypothesen

---

BEWEIS:

- (a) Für  $\tilde{P} \in \tilde{\mathbf{K}}^T$  betrachte die einfachen Hypothesen  $\{(\otimes_{i=1}^n P_{\vartheta_0})^{(T_1, \dots, T_k)}\}$ ,  $\{(\otimes_{i=1}^n \tilde{P})^{(T_1, \dots, T_k)}\}$ . Nach dem einfachen Neyman-Pearson Lemma ist  $\varphi^*$  ein bester Test zum Niveau  $\alpha$  für diese Hypothesen. Also maximiert  $\varphi^*$  die Güte auf  $\tilde{\mathbf{K}}^T$  unter allen auf  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlichen Tests gleichmäßig.
- (b) Wegen der Form des Tests kann Lemma 2.9 angewendet werden. Ein Vergleich mit dem Test  $\varphi_\alpha \equiv \alpha$  zeigt, dass jeder gleichmäßig beste auf  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnliche Test unverfälscht für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  ist. Also ist  $\varphi^*$  ein zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für  $\mathbf{H} \cup \widehat{\mathbf{H}}$  gegen  $\mathbf{K} \cup \widehat{\mathbf{K}}$ .
- (c) Unter der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz ist die Gütefunktion eines jeden Tests

$$\varphi : (\mathbb{R}_{\leq}^k, \mathbb{B}_{\leq}^k) \longrightarrow ([0, 1], \mathbb{B}_{|[0,1]})$$

stetig (fasse  $\varphi$  als  $\varphi \circ (T_1, \dots, T_k)$  auf). Also ist jeder zum Niveau  $\alpha$  unverfälschte Test für  $\mathbf{H} \cup \widehat{\mathbf{H}}$  gegen  $\mathbf{K} \cup \widehat{\mathbf{K}}$  auf

$$\widehat{\mathbf{J}} := \overline{\mathbf{H} \cup \widehat{\mathbf{H}}} \cap \overline{\mathbf{K} \cup \widehat{\mathbf{K}}} \supseteq \{\vartheta_0\} = \mathbf{J}$$

$\alpha$ -ähnlich (siehe (Witting and Nölle, 1970, Seite 117, Satz 3.12)).

Zusammengenommen liefern (a), (b) und (c) die Behauptung. □

Nun sollen erneut einige Beispiele angegeben werden.

**2.11 Beispiel** Seien  $X_1, \dots, X_n$  wie in Korollar 2.4,

$$\mathbf{H} : \vartheta \leq \vartheta_0, \quad \mathbf{K} : \vartheta > \vartheta_0, \quad \vartheta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$$

und

$$\varphi^*(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^* & \text{falls } \sum_{i=1}^k \widehat{V}_i(t_i) = c^* \\ 0 & < \end{cases},$$

wobei  $c^*$  so bestimmt wird, dass  $E_{\vartheta_0}(\varphi^*) = \alpha$  gilt und die  $\widehat{V}_i$  isoton sind (es muss nicht  $\widehat{V}_i = V$  gelten). Auf diesen Test kann Lemma 2.9 angewendet werden. Das eigentliche Problem besteht jetzt allerdings noch in der Bestimmung von  $c^*$ . Dafür muss das  $\alpha$ -Fraktile von  $(\otimes_{i=1}^n P_{\vartheta_0})^{\sum_{i=1}^k \widehat{V}_i \circ T_i}$  bestimmt

werden. Diese Verteilung ist jedoch nur in den seltensten Fällen bekannt. Eine naheliegende Wahl für  $\widehat{V}_i$  ist:

$$\widehat{V}_i := \begin{cases} \text{id}_{\mathbb{R}} & \text{falls } 1 \leq i \leq k-1 \\ (n-k+1) \text{id}_{\mathbb{R}} & \text{falls } i = k \end{cases}.$$

In diesem Fall ergibt sich die Prüfstatistik zu

$$\sum_{i=1}^k \widehat{V}_i(t_i) = \sum_{i=1}^k t_i + (n-k)t_k.$$

Dies ist die sogenannte „Total Time On Test“-Statistik. Sie wird sich (zumindest) in dem nächsten Beispiel als nützlich erweisen.  $\diamond$

**2.12 Beispiel** (EINSEITIGER EXPONENTIALTEST FÜR TYP II-ZENSIERTE DATEN) Liegen *stu.*  $Exp(\theta)$ -verteilte Zufallsgrößen  $X_1, \dots, X_n$  vor, so hat man  $\vartheta = -\theta$  zu wählen. In diesem Fall erfüllt der Test

$$\varphi_{E_2}^*(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} 1 & > \\ \text{falls } \sum_{i=1}^k t_i + (n-k)t_k & c^* \\ 0 & \leq \end{cases}$$

mit passend gewähltem  $c^*$  die Voraussetzungen von Lemma 2.9. In diesem Beispiel ist bekannt, dass

$$(\otimes_{i=1}^n Exp(\theta))^{\sum_{i=1}^k T_i + (n-k)T_k} \quad (2.7)$$

einer  $\Gamma_{k,\theta}$ -Verteilung genügt (siehe (Lehmann, 1986, Seite 65, Problem 14 (ii))). Mit Hilfe dieser Beziehung kann auch gezeigt werden, dass  $\varphi_{E_2}^*$  sogar die Voraussetzungen von Lemma 2.10 erfüllt.  $\varphi_{E_2}^*$  ist also ein gleichmäßig bester auf  $\{\vartheta_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Test für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  (siehe (Sinha and Kale, 1979, Seite 104f.)). Damit ist  $\varphi_{E_2}^*$  aber auch bereits ein gegen  $\widehat{\mathbf{K}}_1^T$  gleichmäßig bester zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für  $\widehat{\mathbf{H}}$  gegen  $\widehat{\mathbf{K}}$ .  $\diamond$

Dieses Resultat kann nun erneut auf den Fall einer Proportional Hazard Familie zu einem festen Baseline Hazard verallgemeinert werden. Damit ist insbesondere der Fall von Weibull-Verteilungen mit festem Formparameter abgedeckt.



## 2.1 Einseitige Hypothesen

---

**2.13 Beispiel** (EINSEITIGER PROPORTIONAL HAZARD TEST FÜR TYP II-ZENSIERTE DATEN) Sei erneut ein stückweise stetiger Baseline Hazard  $\lambda_0$  gegeben, und seien die stu. Zufallsgrößen  $X_1, \dots, X_n$  wie in (1.5) verteilt. Nach (David, 1970, Seite 9, (2.2.2)) berechnen sich die  $\mathfrak{X}^{(k)}$ -Dichten von  $\mathfrak{P}^T$  zu ( $\vartheta = -\eta$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d(\otimes_{i=1}^n P_{\vartheta})^{(T_1, \dots, T_k)}}{d\mathfrak{X}^{(k)}}(t) &= \frac{n!}{(n-k)!} (-\vartheta)^k \exp \left( \vartheta \left( \sum_{i=1}^k \Lambda_0(t_i) + (n-k)\Lambda_0(t_k) \right) \right) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^k \lambda_0(t_i) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_{\leq}^k}(t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Also ist  $\mathfrak{P}^T$  eine einparametrische Exponentialfamilie in  $\vartheta$  und  $\sum_{i=1}^k \Lambda_0(t_i) + (n-k)\Lambda_0(t_k)$  und somit der Test

$$\varphi_{PH_2}^*(t_1, \dots, t_k) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{i=1}^k \Lambda_0(t_i) + (n-k)\Lambda_0(t_k) > c^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \leq$$

wobei  $c^*$  passend gewählt ist, ein gleichmäßig bester auf  $\{\vartheta_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Test für  $\mathbf{H} : \vartheta \leq \vartheta_0$  gegen  $\mathbf{K} : \vartheta > \vartheta_0$ . Auch hier ist die Verteilung der Prüfstatistik bekannt: Da  $\Lambda_0$   $P_{\vartheta}$ -f.s. isoton ist, gilt:

$$(\Lambda_0 \circ T_1, \dots, \Lambda_0 \circ T_n) = (T_1 \circ \Lambda_0, \dots, T_n \circ \Lambda_0) \quad P_{\vartheta}^{(n)}\text{-f.s.} \quad \forall \vartheta < 0.$$

Wendet man nun noch Korollar 1.7 an, so erhält man, dass

$$(\otimes_{i=1}^n P_{\vartheta})^{\sum_{i=1}^k \Lambda_0 \circ T_i + (n-k)\Lambda_0 \circ T_k}$$

einer  $\Gamma_{k, -\vartheta}$ -Verteilung genügt (siehe (2.7)). Also ist  $\varphi_{PH_2}^*$  nach Satz 2.10 sogar ein gegen  $\widehat{\mathbf{K}}_1^T$  gleichmäßig bester zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für  $\widehat{\mathbf{H}}$  gegen  $\widehat{\mathbf{K}}$ .  $\diamond$

Bisher wurden immer *gleichmäßig beste* Tests für die angegebenen Hypothesen hergeleitet. In manchen Fällen existieren solche Tests allerdings nicht, so dass man auf *lokal beste* Tests ausweichen sollte. Ein solcher Fall liegt bei Normalverteilungen unter Typ II-Zensierung vor:

**2.14 Beispiel** (EINSEITIGER GAUSS-TEST FÜR TYP II-ZENSIERTE DATEN) Seien  $X_1, \dots, X_n$  stu.  $\mathcal{N}(a, \sigma_0^2)$ -verteilte Zufallsgrößen,  $a \in \mathbb{R}$  beliebig,

$\sigma_0^2 > 0$  fest. Hier erhält man als  $\lambda^{(k)}$ -Dichten von  $\mathfrak{P}^T$  nach (David, 1970, Seite 9, (2.2.2)):

$$\frac{d(\otimes_{i=1}^n P_a)^{(T_1, \dots, T_k)}}{d\lambda^{(k)}}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \prod_{i=1}^k \phi\left(\frac{t_i - a}{\sigma_0}\right) \left(1 - \Phi\left(\frac{t_k - a}{\sigma_0}\right)\right)^{n-k},$$

so dass sich für die  $\mathbb{L}_1$ -Ableitung dieser Verteilungsklasse nach (Witting, 1985, Seite 170, Satz 1.183) ergibt:

$$\dot{L}_a(t) = \frac{1}{\sigma_0} \left( \sum_{i=1}^k \frac{t_i - a}{\sigma_0} + (n-k) \frac{\phi\left(\frac{t_k - a}{\sigma_0}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{t_k - a}{\sigma_0}\right)} \right).$$

Ein lokal bester auf  $\{a_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Test für die Hypothesen

$$\mathbf{H} : a \leq a_0, \quad \mathbf{K} : a > a_0$$

lautet damit nach (Witting, 1985, Seite 223, Satz 2.44):

$$\varphi_{G_2}^*(t_1, \dots, t_k) := \begin{cases} 1 & > \\ \text{falls } \dot{L}_{a_0}(t) & c^* \\ 0 & \leq \end{cases},$$

wobei  $c^*$  so gewählt ist, dass das Niveau  $\alpha$  unter  $a_0$  voll ausgeschöpft wird. Die Verteilung der Prüfstatistik ist in diesem Fall nicht bekannt. Daher muss das Fraktile durch Simulation oder Ähnliches festgelegt werden. Hier kann zwar nicht mehr Satz 2.10, aber immer noch Lemma 2.9 angewendet werden. Es sei an dieser Stelle bereits angemerkt, dass die Optimalitätseigenschaften von lokal besten Tests auch noch ausgeweitet werden können (siehe Anmerkung 2.31). Da

$$\frac{\phi(x)}{1 - \Phi(x)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{\pi}x + o(|x|)$$

gilt, sieht man, dass bei diesem Test die zensierten Beobachtungen nicht so stark bewertet werden wie beim Exponentialtest für Typ II-zensierte Daten. Dies ist auch naheliegend, da die Normalverteilung stärker um den Erwartungswert konzentriert ist. Nach Lemma 2.9 ist der obige Test auch zum Niveau  $\alpha$  unverfälscht für  $\widehat{\mathbf{H}} : F \succeq_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$ ,  $\widehat{\mathbf{K}} : F \prec_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$ .  $\diamond$

Ein ähnliches Resultat erhält man für Lognormalverteilungen:

## 2.1 Einseitige Hypothesen

---

**2.15 Beispiel** (EINSEITIGER LOGNORMALTEST FÜR TYP II-ZENSIERTE DATEN) Seien  $X_1, \dots, X_n$  stu.  $\mathbf{LogN}(a, \sigma_0^2)$ -verteilte Zufallsgrößen,  $a \in \mathbb{R}$  beliebig und  $\sigma_0^2 > 0$  fest. Der Test

$$\varphi_{LN_2}^*(t_1, \dots, t_k) := \begin{cases} 1 & > \\ \text{falls } \sum_{i=1}^k \frac{\ln(t_i) - a}{\sigma_0} + (n - k) \frac{\phi\left(\frac{\ln(t_k) - a}{\sigma_0}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\ln(t_k) - a}{\sigma_0}\right)} & c^* \\ 0 & \leq \end{cases}$$

( $c^*$  wie in Beispiel 2.14) ist dann ein lokal bester auf  $\{a_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Test für die Hypothesen  $\mathbf{H} : a \leq a_0$ ,  $\mathbf{K} : a > a_0$ . Nach Lemma 2.9 ist der obige Test auch zum Niveau  $\alpha$  unverfälscht für  $\widehat{\mathbf{H}} : F \succeq_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$ ,  $\widehat{\mathbf{K}} : F \prec_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$ .  $\diamond$

### 2.1.3 TYP I-ZENSIERTE DATEN

Eine weitere Art zu zensieren ist die sogenannte *Typ I-Zensierung* (siehe Seite 2). In diesem Fall stoppt man das Experiment nach einer vor dem Beginn der Studie festgelegten Laufzeit  $C > 0$ , so dass man nur das Minimum der Realisierungen und  $C$  beobachten kann. Mit Hilfe der Abbildung

$$\begin{aligned} Z : (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n) &\longrightarrow ((-\infty, C]^n, \mathbb{B}_{|(-\infty, C]^n}^n), \\ Z(x_1, \dots, x_n) &:= (x_1 \wedge C, \dots, x_n \wedge C). \end{aligned}$$

ergibt sich das induzierte Experiment zu  $((-\infty, C]^n, \mathbb{B}_{|(-\infty, C]^n}^n, \mathfrak{P}^Z)$  mit

$$\mathfrak{P}^Z := \{(\otimes_{i=1}^n P_{\vartheta})^Z : \vartheta \in \Theta\}.$$

Im Gegensatz zu Typ II-zensierten Daten ist hier die Anzahl der beobachteten Zufallsgrößen  $M$  nicht konstant. Vielmehr genügt diese Statistik einer  $\mathcal{B}(n, P_{\vartheta}((-\infty, C]))$ -Verteilung. Da im Fall Typ I-zensierter Daten keine gleichmäßig besten Tests bekannt sind, wird auf die Herleitung einer Optimalitätsaussage verzichtet und statt dessen nur eine zu Lemma 2.2 ähnliche Unverfälschtheitsaussage angegeben:

**2.16 Lemma** Seien  $F_{\vartheta_0}$  eine Verteilungsfunktion und

$$\varphi^* : ((-\infty, C]^n, \mathbb{B}_{|(-\infty, C]^n}^n) \longrightarrow ([0, 1], \mathbb{B}_{|[0,1]})$$

ein Test mit  $E_{F_{\vartheta_0}}(\varphi^*) = \alpha$ , so dass die Funktionen  $z_i \mapsto \varphi^*(z)$  bei festen  $z_j$ ,  $j \neq i$ , isoton sind ( $1 \leq i \leq n$ ). Dann ist  $\varphi^*$  auch ein zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für die Hypothesen  $\widehat{\mathbf{H}} : F \succeq_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$ ,  $\widehat{\mathbf{K}} : F \prec_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$ .

Weiter ist die Gütefunktion eines jeden Tests  $\varphi$  stetig unter der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz und somit jeder für  $\widehat{\mathbf{H}}$  gegen  $\widehat{\mathbf{K}}$  unverfälschte Test auf dem Rand  $\widehat{\mathbf{J}} := \widehat{\mathbf{H}} \cap \widehat{\mathbf{K}}$  der Hypothesen  $\alpha$ -ähnlich.

BEWEIS: Für jedes  $F \in \widehat{\mathbf{H}} \cup \widehat{\mathbf{K}}$  gilt:

$$\begin{aligned} E_F(\varphi^*) &= \int \varphi^* d(\otimes_{i=1}^n P_F)^Z \\ &= \int \varphi^* \circ Z d \otimes_{i=1}^n P_F. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Weiter ist die Funktion

$$\varphi^* \circ Z : (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n) \longrightarrow ([0, 1], \mathbb{B}_{[0,1]})$$

isoton in  $x_i$ , wenn die anderen Komponenten  $x_j$ ,  $j \neq i$ , fixiert sind ( $1 \leq i \leq n$ ). Den Rest des Beweises führt man genauso wie in Lemma 2.2. Die Stetigkeit der Gütefunktion folgt direkt aus (2.9) und (Witting and Nölle, 1970, Seite 117, Satz 3.12).  $\square$

In (Bain, 1978, Seite 147, Theorem 4.2.1) werden für Exponentialverteilungen Tests mit der Prüfgröße

$$\frac{1}{M} \left( \sum_{i=1}^M T_i + (n - M)C \right)$$

vorgeschlagen.  $T_i$  bezeichnet dabei erneut die  $i$ -te Ordnungsstatistik. Diese Tests besitzen zwar den Vorteil, dass die Verteilung der Prüfgröße bekannt ist (siehe (Bartholomew, 1963)), jedoch konnte keine Optimalität nachgewiesen werden. Im Folgenden wird gezeigt, dass auch in diesem Kontext lokal optimale Tests existieren.

**2.17 Beispiel** (EINSEITIGER EXPONENTIALTEST FÜR TYP I-ZENSIERTE DATEN) Liegen  $\text{stu. } \text{Exp}(\theta)$ -verteilte Zufallsgrößen  $X_1, \dots, X_n$  vor, so wird  $\mathfrak{P}^Z$  durch  $\mu^{(n)}$  mit  $\mu := \lambda_{|(-\infty, C)} + \delta_C$  dominiert, wobei die  $\mu^{(n)}$ -Dichten durch

$$\frac{d(\otimes_{i=1}^n P_\theta)^Z}{d\mu^{(n)}}(z) = \theta^{M(z)} \exp \left( -\theta \sum_{i=1}^n z_i \right) \tag{2.10}$$

## 2.1 Einseitige Hypothesen

---

gegeben sind. Nach (Witting, 1985, Seite 170, Satz 1.183) berechnet sich damit die  $\mathbb{L}_1$ -Ableitung zu:

$$\dot{L}_\theta(z) := \frac{M(z)}{\theta} - \sum_{i=1}^n z_i.$$

Ein lokal bester auf  $\{\theta_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Test für die Hypothesen

$$\mathbf{H} : \theta \geq \theta_0 \quad \text{gegen} \quad \mathbf{K} : \theta < \theta_0$$

ist daher gegeben durch:

$$\varphi_{E_1}^*(z_1, \dots, z_k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \theta_0 \sum_{i=1}^n z_i - M(z) > c^* \\ 0 & \text{falls } \theta_0 \sum_{i=1}^n z_i - M(z) \leq c^* \end{cases},$$

wobei  $c^*$  das  $\alpha$ -Fraktil von  $(\otimes_{i=1}^n \mathbb{P}_{\theta_0})^{\theta_0 \sum_{i=1}^n Z_i - M \circ Z}$  bezeichnet (siehe (Witting, 1985, Seite 223, Satz 2.44)). Wie man aus (2.10) entnimmt, sind  $M \circ Z$  und  $\sum_{i=1}^n Z_i$  stu., so dass man die Verteilung der Prüfstatistik recht leicht bestimmen kann. Nach Lemma 2.16 ist der obige Test auch zum Niveau  $\alpha$  unverfälscht für  $\widehat{\mathbf{H}} : F \succeq_{\text{st}} F_{\theta_0}$ ,  $\widehat{\mathbf{K}} : F \prec_{\text{st}} F_{\theta_0}$ .  $\diamond$

Auch dieses Resultat kann erneut auf den Fall einer Proportional Hazard Familie zu einem festen Baseline Hazard verallgemeinert werden:

**2.18 Beispiel (EINSEITIGER PROPORTIONAL HAZARD TEST FÜR TYP I-ZENSIERTE DATEN)** Sei erneut ein stückweise stetiger Baseline Hazard  $\lambda_0$  gegeben, und seien die stu. Zufallsgrößen  $X_1, \dots, X_n$  wie in (1.5) verteilt. Hier wird  $\mathfrak{P}^Z$  erneut durch  $\mu^{(n)}$  mit  $\mu := \lambda_{|(-\infty, C)} + \delta_C$  dominiert, wobei sich die  $\mu^{(n)}$ -Dichten ähnlich wie in (2.10) zu

$$\frac{d(\otimes_{i=1}^n P_\eta)^Z}{d\mu^{(n)}}(z) = \eta^{M(z)} \exp\left(-\eta \sum_{i=1}^n \Lambda_0(z_i)\right)$$

berechnen. Ebenfalls nach (Witting, 1985, Seite 170, Satz 1.183) und (Witting, 1985, Seite 223, Satz 2.44) ist daher

$$\varphi_{E_1}^*(z_1, \dots, z_k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \eta_0 \sum_{i=1}^n \Lambda_0(z_i) - M(z) > c^* \\ 0 & \text{falls } \eta_0 \sum_{i=1}^n \Lambda_0(z_i) - M(z) \leq c^* \end{cases},$$

wobei  $c^*$  das  $\alpha$ -Fraktile von  $(\otimes_{i=1}^n \mathbb{P}_{\eta_0})^{\eta_0 \sum_{i=1}^n \Lambda_0 \circ Z_i - M \circ Z}$  bezeichnet, ein lokal bester auf  $\{\eta_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Test für die Hypothesen

$$\mathbf{H} : \eta \geq \eta_0 \quad \text{gegen} \quad \mathbf{K} : \eta < \eta_0.$$

Beachtet man nun noch, dass nach Korollar 1.7  $\Lambda_0 \circ Z_i$  unter  $\eta$  wie eine mit Zensierungszeitpunkt  $\Lambda_0(C)$  Typ I-zensierte  $Exp(\eta)$ -verteilte Zufallsgröße verteilt ist und das etwas Analoges für  $M$  gilt, so ist die Verteilung der Prüfstatistik dieselbe wie in Beispiel 2.17. Nach Lemma 2.16 ist der obige Test zum Niveau  $\alpha$  unverfälscht für  $\hat{\mathbf{H}} : F \succeq_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$ ,  $\hat{\mathbf{K}} : F \prec_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$ .  $\diamond$

Auch für Normalverteilungen lassen sich lokal optimale Tests herleiten:

**2.19 Beispiel (EINSEITIGER GAUSS-TEST FÜR TYP I-ZENSIERTE DATEN)**

Seien  $X_1, \dots, X_n$  stu.  $\mathcal{N}(a, \sigma_0^2)$ -verteilte Zufallsgrößen,  $a \in \mathbb{R}$  beliebig,  $\sigma_0^2 > 0$  fest. Auch hier wird  $\mathfrak{P}^Z$  durch  $\mu^{(n)}$  mit  $\mu := \lambda_{|(-\infty, C)} + \delta_C$  dominiert, wobei sich die  $\mu^{(n)}$ -Dichten zu

$$\frac{d(\otimes_{i=1}^n P_a)^Z}{d\mu^{(n)}}(z) = \prod_{z_i < C} \phi\left(\frac{z_i - a}{\sigma_0}\right) \left(1 - \Phi\left(\frac{C - a}{\sigma_0}\right)\right)^{n - M(z)}$$

berechnen. Hiermit ergibt sich die  $\mathbb{L}_1$ -Ableitung dieser Verteilungsklasse nach (Witting, 1985, Seite 170, Satz 1.183) zu:

$$\dot{L}_a(z) := \frac{1}{\sigma_0} \left( \sum_{z_i < C} \frac{z_i - a}{\sigma_0} + (n - M(z)) \frac{\phi\left(\frac{C - a}{\sigma_0}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{C - a}{\sigma_0}\right)} \right).$$

Ein lokal bester auf  $\{a_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Test für die Hypothesen

$$\mathbf{H} : a \leq a_0, \quad \mathbf{K} : a > a_0$$

lautet damit nach (Witting, 1985, Seite 223, Satz 2.44):

$$\varphi_{G_1}^*(z) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \dot{L}_{a_0}(z) > c^* \\ 0 & \text{falls } \dot{L}_{a_0}(z) \leq c^* \end{cases},$$

wobei  $c^*$  so gewählt ist, dass das Niveau  $\alpha$  unter  $a_0$  voll ausgeschöpft wird. Die Verteilung der Prüfgröße ist erneut nicht bekannt, so dass das Fraktile durch eine Simulationsstudie oder Ähnliches festgelegt werden muss. Nach Lemma 2.16 ist der obige Test zum Niveau  $\alpha$  unverfälscht für  $\hat{\mathbf{H}} : F \succeq_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$ ,  $\hat{\mathbf{K}} : F \prec_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$ .  $\diamond$

## 2.2 Zweiseitige Hypothesen

---

Auf die gleiche Art und Weise erhält man für Lognormalverteilungen:

**2.20 Beispiel** (EINSEITIGER LOGNORMALTEST FÜR TYP I-ZENSIERTE DATEN) Seien  $X_1, \dots, X_n$  stu.  $\mathbf{LogN}(a, \sigma_0^2)$ -verteilte Zufallsgrößen,  $a \in \mathbb{R}$  beliebig und  $\sigma_0^2 > 0$  fest. Der Test

$$\varphi_{LN_1}^*(z) := \begin{cases} 1 & > \\ \text{falls } \sum_{z_i < C} \frac{\ln(z_i) - a}{\sigma_0} + (n - M(z)) \frac{\phi\left(\frac{\ln(C) - a}{\sigma_0}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\ln(C) - a}{\sigma_0}\right)} & c^* \\ 0 & \leq \end{cases}$$

( $c^*$  wie in Beispiel 2.19) ist dann ein lokal bester auf  $\{a_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Test für die Hypothesen  $\mathbf{H} : a \leq a_0$ ,  $\mathbf{K} : a > a_0$ . Nach Lemma 2.16 ist der obige Test auch zum Niveau  $\alpha$  unverfälscht für  $\widehat{\mathbf{H}} : F \succeq_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$ ,  $\widehat{\mathbf{K}} : F \prec_{\text{st}} F_{\vartheta_0}$ .  $\diamond$

## 2.2 ZWEISEITIGE HYPOTHESEN

Als erstes muss nach einer geeigneten Ordnung auf der Menge der Verteilungsfunktionen gesucht werden, um entsprechende Unverfälschtheitsaussagen für den Fall zweiseitiger Hypothesen beweisen zu können:

### 2.2.1 EINE STOCHASTISCHE ORDNUNG

Gleichmäßig beste zum Niveau  $\alpha$  unverfälschte Tests für zweiseitige Hypothesen in einer einparametrischen Exponentialfamilie in  $\text{id}$  und  $V$  haben ungefähr die Form  $\mathbf{1}_{(-\infty, c_1)} \circ V + \mathbf{1}_{(c_2, \infty)} \circ V$ . Wenn man nun also nach einer Ordnung  $\preceq$  sucht, so dass diese Tests für die Hypothesen  $\mathbf{H} : F \preceq F_{\vartheta_0}$ ,  $\mathbf{K} : F \succ F_{\vartheta_0}$  zum Niveau  $\alpha$  unverfälscht sind, so muss  $F$  mehr streuen als  $F_{\vartheta_0}$ , falls  $F \succ F_{\vartheta_0}$  gilt. Ordnungen, die diese Eigenschaft besitzen, gibt es viele (siehe (Shaked and Shanthikumar, 1993, Kapitel 2)). Im folgenden seien alle Verteilungsfunktionen stetig. Dann definiert man die oben angesprochene Ordnung durch (siehe (Witting and Müller-Funk, 1995, Seite 476)):

**2.21 Definition** Seien  $F_1, F_2$  zwei Verteilungsfunktionen und  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$F_1 \succeq_c F_2 :\iff F_1(x) \geq F_2(x) \quad \forall x < c \text{ und } F_1(x) \leq F_2(x) \quad \forall x > c;$$

und  $F_1 \succ_c F_2$  genau dann, falls  $F_1 \succeq_c F_2$  und  $F_1 \neq F_2$  gilt. ■

Einige unmittelbare Folgerungen aus dieser Definition sind (siehe (Witting and Müller-Funk, 1995, Seite 492, Hilfssatz 7.23 a), c) und d)):

$$\begin{aligned}
 F_1 \succeq_c F_2 &\implies F_1(c) = F_2(c); \\
 F_1 \succeq_c F_2 &\implies \left\{ \begin{array}{l} F_1^{-1}(u) \leq F_2^{-1}(u) \quad \forall u < F_1(c) \text{ und} \\ F_1^{-1}(u) \geq F_2^{-1}(u) \quad \forall u > F_1(c); \end{array} \right. \\
 \left. \begin{array}{l} \exists v \in (0, 1) \text{ mit } F_1^{-1}(v) = F_2^{-1}(v) = c, \\ F_1^{-1}(u) \leq F_2^{-1}(u) \quad \forall u < v \text{ und} \\ F_1^{-1}(u) \geq F_2^{-1}(u) \quad \forall u > v \end{array} \right\} &\implies F_1 \succeq_c F_2.
 \end{aligned}$$

Hiermit kann man nun eine zu Lemma 2.1 ähnliche Charakterisierung der Ordnung  $\succeq_c$  angeben:

**2.22 Lemma** *Für zwei Verteilungsfunktionen  $F_1, F_2$  gilt:*

$$F_1 \succeq_c F_2 \iff \left\{ \begin{array}{l} \int h dP_{F_1} \geq \int h dP_{F_2} \text{ für alle beschränkten} \\ \text{Funktionen } h : (\mathbb{R}, \mathbb{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B}), \text{ die auf} \\ (-\infty, c) \text{ antiton und auf } (c, \infty) \text{ isoton sind.} \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Also gilt  $F_1 \succ_c F_2$  genau dann, wenn (2.11) gilt und es eine Funktion  $h$  gibt, für die die Ungleichung (2.11) strikt erfüllt ist.

BEWEIS: " $\implies$ ": Nach (Witting, 1985, Seite 215, Hilfssatz 2.29 a)) gilt für jedes  $h$  in (2.11):

$$\int h dP_{F_1} = \int h \circ F_1^{-1} d\mathbb{N}_{(0,1)}.$$

Für  $u \in (-\infty, F_1(c))$  ist aber  $F_1^{-1}(u) \leq F_2^{-1}(u) \leq c$  und somit :

$$h \circ F_1^{-1}(u) \geq h \circ F_2^{-1}(u) \quad \forall u \in (-\infty, F_1(c)).$$

Für  $u \in (F_1(c), \infty)$  folgt entsprechend  $F_1^{-1}(u) \geq F_2^{-1}(u) \geq c$  und daher:

$$h \circ F_1^{-1}(u) \geq h \circ F_2^{-1}(u) \quad \forall u \in (F_1(c), \infty).$$

Der Rest des Beweises ist nun offensichtlich.



## 2.2 Zweiseitige Hypothesen

---

" $\Leftarrow$ ": Falls  $x < c$  gilt, setze  $h_x = \mathbf{1}_{(-\infty, x]}$ . Dann gilt:

$$F_1(x) = \int h_x dP_{F_1} \geq \int h_x dP_{F_2} = F_2(x).$$

Für  $x > c$  setzt man analog  $h_x = \mathbf{1}_{(x, \infty)}$ . Dies führt dann zu:

$$1 - F_1(x) = \int h_x dP_{F_1} \geq \int h_x dP_{F_2} = 1 - F_2(x).$$

Zusammengenommen folgt die Behauptung. □

Nun soll die Ordnung  $\succeq_c$  noch zu anderen bekannten Ordnungen in Relation gesetzt werden:

- (a) Falls  $F_1 \succeq_c F_2$  und  $E_{F_1}(\text{id}) = E_{F_2}(\text{id})$  gilt, so folgt nach (Witting and Müller-Funk, 1995, Satz 493, Satz 7.24), dass  $E_{F_1}(\psi) \geq E_{F_2}(\psi)$  für alle konvexen Funktionen  $\psi$  gilt. Da aber die Erwartungswerte zweier Verteilungsfunktionen unter *konvexer Ordnung* immer übereinstimmen (siehe (Shaked and Shanthikumar, 1993, Abschnitt 2.A.)), ist die Ordnung  $\succeq_c$  in diesem Sinne allgemeiner als die konvexe Ordnung.
- (b) Eine weitere Ordnung, die die Streuung misst, ist die *Dispersive Order* (siehe (Shaked and Shanthikumar, 1993, Abschnitt 2.B.)). Gilt  $F_1 \succeq_c F_2$ , so folgt nach (Witting and Müller-Funk, 1995, Seite 492, (7.1.54)):

$$F_1^{-1}(v) - F_1^{-1}(u) \geq F_2^{-1}(v) - F_2^{-1}(u) \quad \forall 0 < u < F_1(c) < v < 1.$$

Also ist die Dispersive Order allgemeiner als die Ordnung  $\succeq_c$ .

### 2.2.2 UNZENSIERTE DATEN

Mit Hilfe der zuvor definierten Ordnung  $\succeq_c$  kann ein entsprechendes Unverfälschtheitsresultat für zweiseitige Hypothesen angegeben werden:

**2.23 Lemma** Seien  $F_{\theta_0}$  eine Verteilungsfunktion und  $\varphi^*$  ein Test der Form

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & \notin \\ 0 & \text{falls } \sum_{i=1}^n V_i(x_i) \in [c_1^*, c_2^*] \\ & \in \end{cases},$$

wobei die  $V_i$  meßbare Funktionen sind und  $E_{F_{\vartheta_0}}(\varphi^*) = \alpha$  gelte. Dann ist  $\varphi^*$  auch ein zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für die Hypothesen

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{H}} &:= \left\{ F : \exists c \in [c_1^*, c_2^*] \text{ mit } \widehat{F} \preceq_c \widehat{F}_{\vartheta_0} \right\}, \\ \widehat{\mathbf{K}} &:= \left\{ F : \exists c \in [c_1^*, c_2^*] \text{ mit } \widehat{F} \succ_c \widehat{F}_{\vartheta_0} \right\},\end{aligned}$$

wobei  $\widehat{F}_{(\vartheta_0)}$  die Verteilungsfunktion von  $(\otimes_{i=1}^n P_{F_{(\vartheta_0)}})^{\sum_{i=1}^n V_i}$  bezeichnet.

BEWEIS: Für jedes  $F \in \widehat{\mathbf{H}}$  gilt nach Lemma 2.22:

$$\begin{aligned}E_F(\varphi^*) &= \mathbb{P}_F \left( \left\{ \sum_{i=1}^n V_i \circ X_i \notin [c_1^*, c_2^*] \right\} \right) = \int \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus [c_1^*, c_2^*]} d(\otimes_{i=1}^n \mathbb{P}_F)^{\sum_{i=1}^n V_i \circ X_i} \\ &\leq \int \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus [c_1^*, c_2^*]} d(\otimes_{i=1}^n \mathbb{P}_{F_{\vartheta_0}})^{\sum_{i=1}^n V_i \circ X_i} = E_{F_{\vartheta_0}}(\varphi^*) = \alpha.\end{aligned}$$

Der Fall  $F \in \widehat{\mathbf{K}}$  wird analog behandelt. □

Nun zu den Optimalitätseigenschaften: Da gleichmäßig beste Tests für zweiseitige Hypothesen vorwiegend für einparametrische Exponentialfamilien existieren, sei im folgenden  $\{P_{\vartheta} : \vartheta \in \Theta\}$  eine einparametrische Exponentialfamilie in  $\text{id}$  und  $V$ . Dann ist  $\mathfrak{P} = \{P_{\vartheta}^{(n)} : \vartheta \in \Theta\}$  eine einparametrische Exponentialfamilie in  $\text{id}$  und  $\sum_{i=1}^n V(x_i)$ . Bekanntlich ist die Gütefunktion eines jeden Tests  $\varphi$  stetig differenzierbar. Somit gelten für jeden für

$$\mathbf{H} : \vartheta = \vartheta_0, \quad \mathbf{K} : \vartheta \neq \vartheta_0, \quad \vartheta_0 \in \overset{\circ}{\Theta},$$

zum Niveau  $\alpha$  unverfälschten Test die Beziehungen:

$$E_{\vartheta_0}(\varphi) = \alpha \quad \text{und} \quad E_{\vartheta_0}(\varphi V) = \alpha E_{\vartheta_0}(V) \quad (2.12)$$

(siehe (Witting, 1985, Seite 257, (2.4.14))). Auf der anderen Seite findet man unter allen Tests, die (2.12) erfüllen, aber auch gleichmäßig beste (siehe (Witting, 1985, Seite 260, Satz 2.70)).

**2.24 Satz** Sei  $\{P_{\vartheta} : \vartheta \in \Theta\}$  wie oben. Dann ist der Test  $\varphi^*$  mit

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{i=1}^n V(x_i) \notin [c_1^*, c_2^*] \\ 0 & \text{falls } \sum_{i=1}^n V(x_i) \in [c_1^*, c_2^*] \end{cases},$$

wobei  $c_1^*, c_2^*$  aus (2.12) bestimmt werden, nicht nur ein gleichmäßig bester zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$ , sondern er ist auch zum Niveau  $\alpha$  unverfälscht für die Hypothesen  $\hat{\mathbf{H}}$  gegen  $\hat{\mathbf{K}}$  und maximiert die Gütefunktion auf

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}} := & \left\{ \tilde{P} \text{ Verteilung auf } (\mathbb{R}, \mathbb{B}) : \exists k_1, k_2 \in \mathbb{R} \text{ mit} \right. \\ & \left. \left\{ x : \frac{d\tilde{P}^{(n)}}{d\mu^{(n)}}(x) > k_1 \frac{dP_{\vartheta_0}^{(n)}}{d\mu^{(n)}}(x) + k_2 \sum_{i=1}^n V(x_i) \frac{dP_{\vartheta_0}^{(n)}}{d\mu^{(n)}}(x) \right\} \right. \\ & \left. = \left\{ x : \sum_{i=1}^n V(x_i) \notin [c_1, c_2] \right\} \right\}^4 \end{aligned}$$

unter allen Tests, die (2.12) erfüllen, gleichmäßig.

Weiter ist  $\varphi^*$  ein unverfälschter Test für  $\hat{\mathbf{H}}$  gegen  $\mathbf{K} \cup \hat{\mathbf{K}}$ , der die Gütefunktion auf  $\hat{\mathbf{K}}_1 := \mathbf{K} \cup (\tilde{\mathbf{K}} \cap \hat{\mathbf{K}})$  unter allen zum Niveau  $\alpha$  unverfälschten Tests für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  gleichmäßig maximiert.

BEWEIS: Die Unverfälschtheit folgt direkt aus Lemma 2.23 und die Optimalität gegen  $\hat{\mathbf{K}}$  aus dem verallgemeinerten Neyman-Pearson Lemma. Die letzte Bemerkung ist eine direkte Konsequenz aus (2.12).  $\square$

Ist die Verteilung  $\mathbb{P}_{\vartheta_0}^{\sum_{i=1}^n V \circ X_i}$  symmetrisch bzgl.  $m$ , so können  $c_1^*, c_2^*$  als  $m \mp c^*$  gewählt werden, wobei  $c^*$  das  $\alpha/2$ -Fraktile von  $\mathbb{P}_{\vartheta_0}^{\sum_{i=1}^n V \circ X_i - m}$  bezeichnet. Dieses Vorgehen findet aber auch oft Anwendung, wenn die Verteilung nur annähernd symmetrisch ist. In diesem Fall kann zwar nicht Satz 2.24, aber immer noch Lemma 2.23 angewendet werden. Somit ist der Test aber zumindest unverfälscht für die *nichtparametrischen* Hypothesen  $\hat{\mathbf{H}}$ ,  $\hat{\mathbf{K}}$ .

Auch hier sind die Mischungen von Verteilungen aus  $\{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta \setminus \{\vartheta_0\}\}$  wieder in  $\tilde{\mathbf{K}}$  enthalten. Jedoch sind einparametrische Exponentialfamilien immer bzgl.  $\succeq_{\text{st}}$  und nicht bzgl.  $\succeq_c$  geordnet.

Im Anschluß werden wieder einige Beispiele betrachtet:

**2.25 Beispiel (ZWEISEITIGER GAUSS-TEST)** Seien  $X_1, \dots, X_n$  stu.  $\mathcal{N}(a, \sigma_0^2)$ -verteilte Zufallsgrößen,  $a \in \mathbb{R}$  beliebig,  $\sigma_0^2 > 0$  fest. In diesem Fall ist der

<sup>9</sup> $\mu$  sei ein  $\sigma$ -endliches Maß  $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ , das  $\{\tilde{P}, P_{\vartheta_0}\} \ll \mu$  erfüllt.

zweiseitige Gauß-Test

$$\varphi_G^*(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{i=1}^n x_i/n \notin I_n \\ 0 & \text{falls } \sum_{i=1}^n x_i/n \in I_n \end{cases}$$

( $I_n = [a_0 - u_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_0/\sqrt{n}, a_0 + u_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_0/\sqrt{n}]$ , wobei  $u_\alpha$  das  $\alpha$ -Fraktile der  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung bezeichnet) ein gleichmäßig bester zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für die Hypothesen

$$\mathbf{H} : a = a_0 \quad \text{gegen} \quad \mathbf{K} : a \neq a_0.$$

Nach Satz 2.24 ist  $\varphi_G^*$  sogar unverfälscht für die Hypothesen

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}} &= \left\{ F : \exists c \in I_n \text{ mit } \widehat{F} \preceq_c \Phi_{a_0, \sigma_0^2} \right\}, \\ \widehat{\mathbf{K}} &= \left\{ F : \exists c \in I_n \text{ mit } \widehat{F} \succ_c \Phi_{a_0, \sigma_0^2} \right\}, \end{aligned}$$

wobei  $\widehat{F}$  die Verteilungsfunktion des Mittelwertes der  $X_i$  mit Verteilungsfunktion  $F$  und  $\Phi_{a_0, \sigma_0^2}$  die Verteilungsfunktion einer  $\mathcal{N}(a_0, \sigma_0^2)$ -Verteilung bezeichnet. Außerdem maximiert  $\varphi_G^*$  die Gütefunktion auf  $\widehat{\mathbf{K}}_1$  unter allen für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  zum Niveau  $\alpha$  unverfälschten Tests gleichmäßig. Für ein Zahlenbeispiel siehe Abbildung 2.1.  $\diamond$

Als nächstes wieder zu den Exponentialverteilungen:

**2.26 Beispiel (ZWEISEITIGER EXPONENTIALTEST)** Seien  $X_1, \dots, X_n$  stu.  $Exp(\theta)$ -verteilte Zufallsgrößen,  $\theta > 0$  beliebig. Hier ist ein gleichmäßig bester zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für die Hypothesen

$$\mathbf{H} : \theta = \theta_0 \quad \text{gegen} \quad \mathbf{K} : \theta \neq \theta_0$$

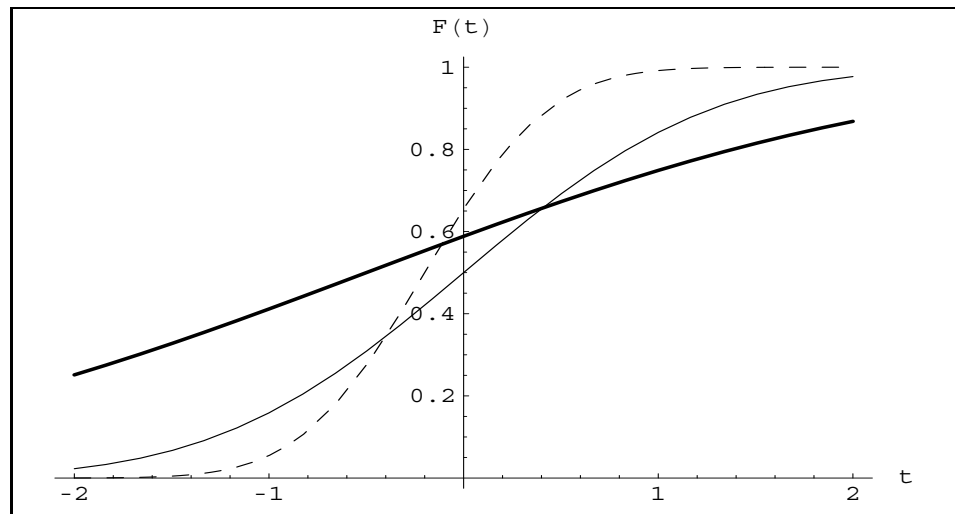
durch

$$\varphi_E^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{i=1}^n x_i \notin [c_1^*, c_2^*] \\ 0 & \text{falls } \sum_{i=1}^n x_i \in [c_1^*, c_2^*] \end{cases}$$

gegeben, wobei  $c_1^*, c_2^*$  aus den Bedingungen

$$\Gamma_{n, \theta_0}(\mathbb{R} \setminus [c_1^*, c_2^*]) = \alpha \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R} \setminus [c_1^*, c_2^*]} x d\Gamma_{n, \theta_0}(x) = \alpha \frac{n}{\theta_0}$$

## 2.2 Zweiseitige Hypothesen



Gilt in Beispiel 2.25  $n = 10$ ,  $a_0 = 0$ ,  $\sigma_0^2 = 1$  und  $\alpha = 0.05$ , so ist  $u_{\frac{\alpha}{2}} \approx 1.96$  und somit  $I_n \approx [-0.62, 0.620]$ . Hier ist die Verteilungsfunktion einer  $\mathcal{N}(0, 1)$ - (—),  $\mathcal{N}(-0.2, 0.25)$ - (---) und einer  $\mathcal{N}(-0.5, 5)$ -Verteilung (—) zu sehen. Offenbar gilt  $\mathcal{N}(-0.2, 0.25) \in \hat{\mathbf{H}}$  und  $\mathcal{N}(-0.5, 0.5) \in \hat{\mathbf{K}}$ .

ABBILDUNG 2.1: Zahlenbeispiel zu Beispiel 2.25 (Normalverteilung).

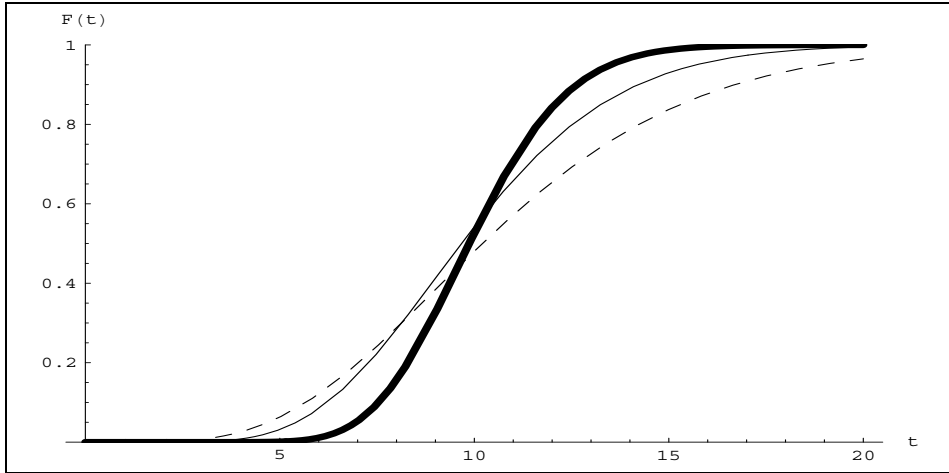
bestimmt werden. Nach Satz 2.24 ist  $\varphi_E^*$  aber auch zum Niveau  $\alpha$  unverfälscht für die Hypothesen

$$\hat{\mathbf{H}} = \left\{ F : \exists c \in [c_1^*, c_2^*] \text{ mit } \hat{F} \preceq_c F_{\Gamma_{n, \theta_0}} \right\},$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \left\{ F : \exists c \in [c_1^*, c_2^*] \text{ mit } \hat{F} \succ_c F_{\Gamma_{n, \theta_0}} \right\},$$

wobei  $\hat{F}$  die Verteilungsfunktion der  $n$ -fachen Faltung von  $F$  und  $F_{\Gamma_{n, \theta_0}}$  die Verteilungsfunktion der  $\Gamma_{n, \theta_0}$ -Verteilung bezeichnet. Außerdem maximiert  $\varphi_E^*$  die Gütefunktion auf  $\hat{\mathbf{K}}_1$  unter allen für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  zum Niveau  $\alpha$  unverfälschten Tests gleichmäßig. Für ein einfaches Zahlenbeispiel siehe Abbildung 2.2.  $\diamond$

Selbstverständlich kann man auch entsprechende Resultate für das Proportional Hazard Model zu einem festen Baseline Hazard oder für Lognormalverteilungen erzielen. Es sei aber an dieser Stelle darauf verzichtet, da die Hypothesen  $\hat{\mathbf{H}}$  und  $\hat{\mathbf{K}}$  dort noch komplizierter aussehen.



Gilt in Beispiel 2.26  $n = 10, \theta_0 = 1$  und  $\alpha = 0.05$ , so ist  $c_1^* \approx 4.98$  und  $c_2^* \approx 17.61$ . Hier ist die Verteilungsfunktion einer  $\Gamma_{10,1}$ - (—), einer  $\Gamma_{6,1.8}$ - (---) und einer  $\Gamma_{25,0.4}$ -Verteilung (—) zu sehen. Offenbar gilt  $\Gamma_{2.5,0.4} \in \widehat{\mathbf{H}}$  und  $\Gamma_{0.6,1.8} \in \widehat{\mathbf{K}}$ .

ABBILDUNG 2.2: Zahlenbeispiel zu Beispiel 2.26 (Exponentialverteilung).

### 2.2.3 TYP II-ZENSIERTE DATEN

Auch für den Fall der Typ II-Zensurierung lassen sich noch einige Aussagen machen. Dabei sei noch einmal daran erinnert, dass das statistische Modell durch (2.5) gegeben ist.

**2.27 Lemma** Seien  $F_{\vartheta_0}$  eine Verteilungsfunktion und

$$\varphi^* : (\mathbb{R}_{\leq}^k, \mathbb{B}_{\leq}^k) \longrightarrow ([0, 1], \mathbb{B}_{|[0,1]})$$

ein Test der Form

$$\varphi^*(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} 1 & \notin \\ \text{falls } \sum_{i=1}^k V_i(t_i) & [c_1^*, c_2^*] \\ 0 & \in \end{cases},$$

wobei die  $V_i$  meßbare Funktionen sind und  $E_{F_{\vartheta_0}}(\varphi^*) = \alpha$  gelte. Dann ist  $\varphi^*$  auch ein zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für die Hypothesen

$$\widehat{\mathbf{H}} := \left\{ F : \exists c \in [c_1^*, c_2^*] \text{ mit } \widehat{F} \preceq_c \widehat{F}_{\vartheta_0} \right\},$$

$$\widehat{\mathbf{K}} := \left\{ F : \exists c \in [c_1^*, c_2^*] \text{ mit } \widehat{F} \succ_c \widehat{F}_{\vartheta_0} \right\},$$

## 2.2 Zweiseitige Hypothesen

---

wobei  $\widehat{F}_{(\vartheta_0)}$  die Verteilungsfunktion von  $(\otimes_{i=1}^n P_{F(\vartheta_0)})^{\sum_{i=1}^n V_i \circ T_i}$  bezeichnet.

BEWEIS: Für jedes  $F \in \widehat{\mathbf{H}}^T$  gilt nach Lemma 2.11:

$$\begin{aligned} E_F(\varphi^*) &= P_F \left( \left\{ \sum_{i=1}^k V_i \circ T_i \notin [c_1^*, c_2^*] \right\} \right) = \int \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus [c_1^*, c_2^*]} d(\otimes_{i=1}^n P_F)^{\sum_{i=1}^k V_i \circ T_i} \\ &\leq \int \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus [c_1^*, c_2^*]} d(\otimes_{i=1}^n P_{F_{\vartheta_0}})^{\sum_{i=1}^k V_i \circ T_i} = E_{F_{\vartheta_0}}(\varphi^*) = \alpha. \end{aligned}$$

Der Fall  $F \in \widehat{\mathbf{K}}^T$  wird analog behandelt. □

Auch Lemma 2.10 kann auf den zweiseitigen Fall übertragen werden. Ist  $\mathfrak{P}^T$  eine einparametrische Exponentialfamilie in id und  $\sum_{i=1}^k V_i(t_i)$ , so gilt:

### 2.28 Satz Der Test

$$\varphi^* : (\mathbb{R}_{\leq}^k, \mathbb{B}_{\leq}^k) \longrightarrow ([0, 1], \mathbb{B}_{|[0,1]})$$

definiert durch

$$\varphi^*(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} 1 & \notin \\ \text{falls } \sum_{i=1}^k V_i(t_i) & [c_1^*, c_2^*] \\ 0 & \in \end{cases},$$

wobei  $c_1^*, c_2^*$  aus (2.12) bestimmt werden, ist nicht nur ein gleichmäßig bester zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für die Hypothesen  $\mathbf{H} : \vartheta = \vartheta_0$ ,  $\mathbf{K} : \vartheta \neq \vartheta_0$ ,  $\vartheta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$ , sondern er ist auch zum Niveau  $\alpha$  unverfälscht für die Hypothesen  $\widehat{\mathbf{H}}^T$ ,  $\widehat{\mathbf{K}}^T$  und maximiert die Gütefunktion auf

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{K}}^T &:= \left\{ \widetilde{P} \text{ Verteilung auf } (\mathbb{R}, \mathbb{B}) : \exists k_1, k_2 \in \mathbb{R} \text{ mit} \right. \\ &\left. \left\{ (t_1, \dots, t_k) : \frac{d(\otimes_{i=1}^n \widetilde{P})^{(T_1, \dots, T_k)}}{d\mu^{(k)}}(t_1, \dots, t_k) > k_1 \frac{d(\otimes_{i=1}^n P_{\vartheta_0})^{(T_1, \dots, T_k)}}{d\mu^{(k)}}(t_1, \dots, t_k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k_2 \sum_{i=1}^k V(t_i) \frac{d(\otimes_{i=1}^n P_{\vartheta_0})^{(T_1, \dots, T_k)}}{d\mu^{(k)}}(t_1, \dots, t_k) \right\} \right\} \\ &= \left\{ (t_1, \dots, t_k) : \sum_{i=1}^k V(t_i) \notin [c_1, c_2] \right\} \end{aligned}$$

unter allen Tests, die (2.12) erfüllen, gleichmäßig.

Also ist  $\varphi^*$  ein gegen  $\widehat{\mathbf{K}}_1^T := \mathbf{K} \cup (\widetilde{\mathbf{K}}^T \cap \widehat{\mathbf{K}}^T)$  gleichmäßig bester zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für  $\widehat{\mathbf{H}}^T$  gegen  $\mathbf{K} \cup \widehat{\mathbf{K}}^T$ .

BEWEIS: Nach Lemma 2.27 ist  $\varphi^*$  zum Niveau  $\alpha$  unverfälscht für die Hypothesen  $\widehat{\mathbf{H}}^T$ ,  $\mathbf{K} \cup \widehat{\mathbf{K}}^T$ . Die Optimalität gegenüber  $\widehat{\mathbf{K}}^T$  erhält man aus dem verallgemeinerten Neyman-Pearson Lemma. Die letzte Anmerkung folgt direkt aus (2.12).  $\square$

Als Beispiele erhält man nun die Exponentialverteilungen und die Proportional Hazard Familie zu einem festen Baseline Hazard.

**2.29 Beispiel** (ZWEISEITIGER EXPONENTIALTEST FÜR TYP II-ZENSIERTE DATEN) Liegen *stü.*  $Exp(\theta)$ -verteilte Zufallsgrößen  $X_1, \dots, X_n$  vor, so bildet  $\mathfrak{P}^T$  nach (2.8) eine einparametrische Exponentialfamilie in  $\theta$  und  $-\sum_{i=1}^k t_i - (n-k)t_k$ . Also ist der Test

$$\varphi_{E_2}^* : (\mathbb{R}_{\leq}^k, \mathbb{B}_{\leq}^k) \longrightarrow ([0, 1], \mathbb{B}_{[0,1]}),$$

definiert durch

$$\varphi_{E_2}^*(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{i=1}^k t_i + (n-k)t_k \notin [c_1^*, c_2^*] \\ 0 & \text{falls } \sum_{i=1}^k t_i + (n-k)t_k \in [c_1^*, c_2^*] \end{cases},$$

wobei  $c_1^*, c_2^*$  aus den Bedingungen

$$\Gamma_{k, \theta_0}(\mathbb{R} \setminus [c_1^*, c_2^*]) = \alpha \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R} \setminus [c_1^*, c_2^*]} x d\Gamma_{k, \theta_0}(x) = \alpha \frac{k}{\theta_0}$$

bestimmt werden, nicht nur ein gleichmäßig bester zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für  $\mathbf{H} : \theta = \theta_0$ ,  $\mathbf{K} : \theta \neq \theta_0$ , sondern nach Satz 2.28 auch ein zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für die Hypothesen

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}^T &= \left\{ F : \exists c \in [c_1^*, c_2^*] \text{ mit } \widehat{F} \preceq_c F_{\Gamma_{k, \theta_0}} \right\}, \\ \widehat{\mathbf{K}}^T &= \left\{ F : \exists c \in [c_1^*, c_2^*] \text{ mit } \widehat{F} \succ_c F_{\Gamma_{k, \theta_0}} \right\}, \end{aligned}$$

wobei  $\widehat{F}$  die Verteilungsfunktion von  $(\otimes_{i=1}^n P_F)^{\sum_{i=1}^k T_i + (n-k)T_k}$  bezeichnet. Weiter maximiert  $\varphi_{E_2}^*$  die Gütefunktion auf  $\widehat{\mathbf{K}}_1^T \supseteq \mathbf{K}$  unter allen für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  unverfälschten Tests gleichmäßig.  $\diamond$



## 2.3 Anmerkungen

---

**2.30 Beispiel** (ZWEISEITIGER PROPORTIONAL HAZARD TEST FÜR TYP II-ZENSIERTE DATEN) Sei erneut ein stückweise stetiger Baseline Hazard  $\lambda_0$  gegeben, und seien die stu. Zufallsgrößen  $X_1, \dots, X_n$  wie in (1.5) verteilt. Auch hier bildet  $\mathfrak{P}^T$  nach (2.8) eine einparametrische Exponentialfamilie in  $\eta$  und  $-\sum_{i=1}^k \Lambda_0(t_i) - (n-k)\Lambda_0(t_k)$ . Also ist der Test

$$\varphi_{PH_2}^* : (\mathbb{R}_{\leq}^k, \mathbb{B}_{\leq}^k) \longrightarrow ([0, 1], \mathbb{B}_{[0,1]}),$$

definiert durch

$$\varphi_{PH_2}^*(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} 1 & \notin \\ \text{falls } \sum_{i=1}^k \Lambda_0(t_i) + (n-k)\Lambda_0(t_k) & [c_1^*, c_2^*] \\ 0 & \in \end{cases},$$

wobei  $c_1^*, c_2^*$  aus den Bedingungen

$$\Gamma_{k, \eta_0}(\mathbb{R} \setminus [c_1^*, c_2^*]) = \alpha \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R} \setminus [c_1^*, c_2^*]} x d\Gamma_{k, \eta_0}(x) = \alpha \frac{k}{\eta_0}$$

bestimmt werden, nicht nur ein gleichmäßig bester zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für  $\mathbf{H} : \eta = \eta_0$ ,  $\mathbf{K} : \eta \neq \eta_0$ , sondern nach Satz 2.28 auch zum Niveau  $\alpha$  unverfälscht für die Hypothesen

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}^T &= \left\{ F : \exists c \in [c_1^*, c_2^*] \text{ mit } \widehat{F} \preceq_c F_{\Gamma_{k, \eta_0}} \right\}, \\ \widehat{\mathbf{K}}^T &= \left\{ F : \exists c \in [c_1^*, c_2^*] \text{ mit } \widehat{F} \succ_c F_{\Gamma_{k, \eta_0}} \right\}, \end{aligned}$$

wobei  $\widehat{F}$  die Verteilungsfunktion von  $(\otimes_{i=1}^n P_F)^{\sum_{i=1}^k \Lambda_0 \circ T_i + (n-k)\Lambda_0 \circ T_k}$  bezeichnet. Weiter maximiert  $\varphi_{PH_2}^*$  die Gütefunktion auf  $\widehat{\mathbf{K}}_1^T \supseteq \mathbf{K}$  unter allen für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  unverfälschten Test gleichmäßig.  $\diamond$

Da im Fall von Normalverteilungen, Lognormalverteilungen und im Fall von Typ I-zensierten Daten keine Exponentialfamilien vorliegen, sei an dieser Stelle auf die Herleitung von Tests für diese Situationen verzichtet.

## 2.3 ANMERKUNGEN

Es wurde bisher nur gezeigt, dass die Optimalitätskriterien gleichmäßig bester Tests noch verbessert werden konnten. Das gleiche gilt jedoch auch für lokal beste Tests:

**2.31 Anmerkung** Seien  $\mathfrak{P} := \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$  und  $\mathfrak{Q} := \{Q_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$  zwei Verteilungsklassen, die den Voraussetzungen von (Witting, 1985, Seite 170, Satz 1.183) genügen, wobei das dominierende Maß dasselbe sei. Ist dann die  $\mathbb{L}_1$ -Ableitung von  $\mathfrak{P}$  in  $\vartheta_0$  durch  $\dot{L}_{\vartheta_0}$  gegeben, so ist auch für jede Funktion  $h : \Theta \rightarrow \Theta$  mit  $h(\vartheta_0) = \vartheta_0$  und  $h'(\vartheta_0) = 0$  (z.B.  $h(\vartheta) = \vartheta_0 + (\vartheta - \vartheta_0)^2$ ) die Verteilungsklasse

$$\mathfrak{H} := \{P_\vartheta + Q_{h(\vartheta)} : \vartheta \in \Theta\}$$

$\mathbb{L}_1$ -differenzierbar in  $\vartheta_0$  mit Ableitung  $\dot{L}_{\vartheta_0}$ . Also ist der Test

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^* & \text{falls } \dot{L}_{\vartheta_0} = c^* \\ 0 & < \end{cases} ,$$

wobei  $E_{\vartheta_0}(\varphi^*) = \alpha$  gelte, auch ein gegenüber der obigen Verteilungsklasse  $\mathfrak{H}$  lokal bester auf  $\{\vartheta_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Test für die Hypothesen  $\mathbf{H} : \vartheta \leq \vartheta_0$ ,  $\mathbf{K} : \vartheta > \vartheta_0$ .  $\diamond$

Weiter könnte man natürlich versuchen, die Optimalitätseigenschaften von einparametrischen Hypothesen in mehrparametrischen Exponentialfamilien genauer zu untersuchen. Jedoch zeigt sich bereits beim  $t$ -Test, dass dieser die nötigen Isotonieeigenschaften für die Unverfälschtheitsaussagen nicht besitzt (siehe Abbildung 2.3).

In diesem Kapitel wurden immer nur Einstichprobenprobleme untersucht. Man kann etwas ähnliches jedoch auch für Zweistichprobenprobleme durchführen. Mit Hilfe eines bedingten verallgemeinerten Neyman-Pearson Lemmas (siehe (Janssen, 2003)) erhält man folgendes Resultat: Ist

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^* & \text{falls } V(x) = c^* \\ 0 & < \end{cases}$$

ein gegenüber  $\mathbf{K}_1$  lokal/gleichmäßig bester parametrischer Test für einseitige Hypothesen in einem Zweistichprobenproblem, so ist der Test  $\tilde{\varphi}^*(x) = \tilde{\varphi}_{T(x)}^*(x)$  mit

$$\tilde{\varphi}_t^*(x) = \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^*(t) & \text{falls } V(x) = c^*(t) \\ 0 & < \end{cases} ,$$

wobei  $\gamma^*(t), c^*(t)$  aus<sup>5</sup>

$$\frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : V(\pi(x)) > c^*(t) \right\} \right| + \frac{\gamma^*(t)}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : V(\pi(x)) = c^*(t) \right\} \right| = \alpha$$

bestimmt werden ( $T$  bezeichnet die Ordnungsstatistik), gegenüber  $\mathbf{K}_1$  lokal/gleichmäßig optimal in der Klasse der Permutationstests. Allerdings ist dieses Vorgehen nur bei unzensierten Daten möglich. Würde beispielsweise ein optimaler parametrischer Test für Typ II-zensierte Daten existieren, so wäre ein Test mit der gleichen Prüfstatistik, wobei die kritischen Werte durch die Permutationen festgelegt werden, optimal in der Klasse der Permutationstests. Dort existiert jedoch bei wahl von  $\mathbf{K}_1$  als einer Proportional Hazard Familie zu einem festen Baseline Hazard kein optimaler Test, wie später gezeigt wird.

---

<sup>5</sup> $\mathcal{S}_n$  bezeichnet sowohl die Menge der Permutationen der Zahlen  $1, \dots, n$ , als auch die Menge der Abbildungen, die die Koordinaten  $1, \dots, n$  permutieren. Aus dem Zusammenhang wird allerdings immer klar, welche Form genau benutzt wird.

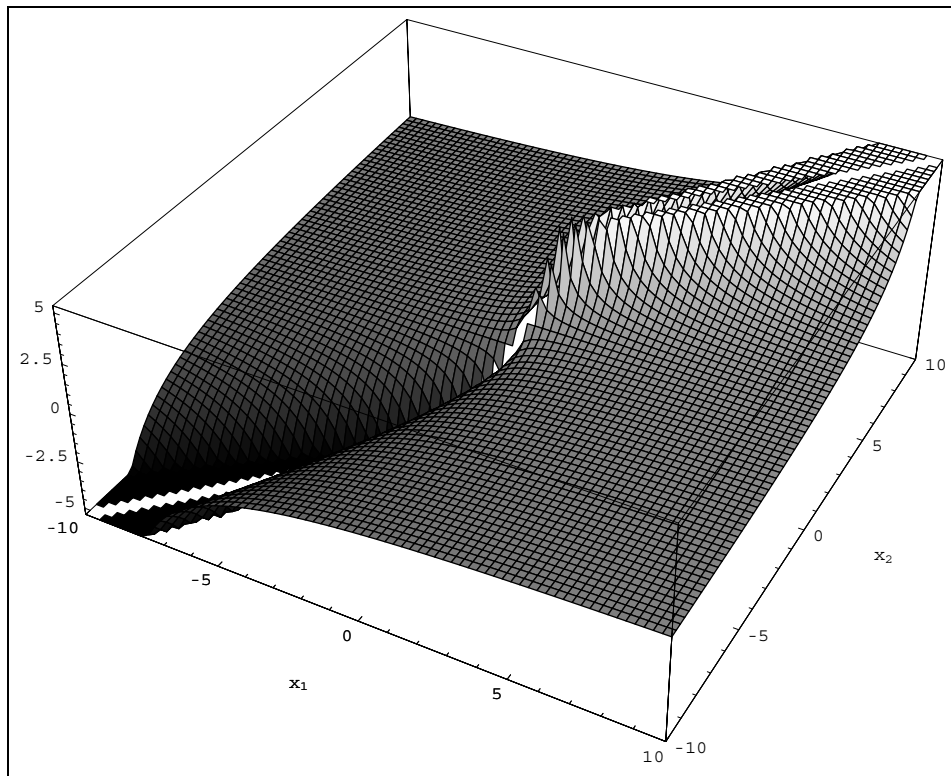


ABBILDUNG 2.3: Graph der Prüfstatistik des  $t$ -Tests im Fall  $n = 2$  und  $\alpha_0 = 0$ .

---

## Kapitel 3

### PERMUTATIONSTESTS

---

In diesem Kapitel soll es darum gehen, den nach (Fisher, 1935) und (Pitman, 1937) wohlbekannten *Permutationstest* einmal von einer anderen Seite zu beleuchten. In der Literatur wird der Permutationstest wie bei (Lehmann, 1986) oder (Witting and Nölle, 1970) als ein Zweistichprobentest hergeleitet, der gegenüber seinen Hypothesen, die sich aus Paaren von stochastisch geordneten, stetigen Verteilungen auf  $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$  zusammensetzen, unverfälscht ist und auf einer Teilklasse, die aus Paaren verschobener Normalverteilungen aus der Alternative besteht, die Güte unter allen unverfälschten Tests gleichmäßig maximiert. Eine Ausnahme bildet hier (Gebhard, 1995) oder die auf dieser Grundlage entstandenen Artikel (Gebhard and Schmitz, 1998a) und (Gebhard and Schmitz, 1998b). Dort wird nicht nur die Voraussetzung der Stetigkeit der zugrundeliegenden Verteilungen fallengelassen, sondern es wird auch gezeigt, dass der Test die Güte unter allen unverfälschten Tests sogar auf einer nichtparametrischen Teilklasse der Alternative gleichmäßig maximiert. Bei entsprechender Wahl der Prüfstatistik erweist sich der Permutationstest insbesondere gegenüber der Klasse, die aus Paaren von Weibull-Verteilungen mit festem Formparameter und variierendem Skalenparameter aus der Alternative bestehen, als optimal. Eine herausragende Rolle spielt dabei der Formparameterwert 1, da die Klasse der Weibull-Verteilungen mit dem Formparameter 1 mit der Klasse der Exponentialverteilungen, also *der* Klasse von Lebensdauerverteilungen, zusammenfällt.

Der Permutationstest besitzt also auch Optimalitätseigenschaften gegenüber Verteilungen, die in der *Überlebenszeitanalyse* und *Zuverlässigkeitstheorie* eine wichtige Rolle spielen. In diesen Disziplinen stehen dem Analy-

tiker allerdings aus Zeitmangel, Wirtschaftlichkeitsüberlegungen oder nicht vom Experiment abhängigen Umständen in den seltensten Fällen alle Daten der im Experiment beobachteten Objekte zur Verfügung. In der Regel handelt es sich bei den aus dem Experiment gewonnenen Daten um *zensierte Daten* (siehe Seite 2). Bisher wurden in der Literatur *Rangtests* als einzige nichtparametrische Testverfahren auf zensierten Daten angewendet. Da den Messdaten aber eine *metrische Skala* zugrunde liegt, ist es eigentlich angebracht, auch von dieser Skala Gebrauch zu machen und nicht die Daten mit Hilfe der Rangstatistik auf eine *ordinale Skala* zu transformieren. Da der Permutationstest eine metrische Skala voll ausnutzt, sollten dementsprechende Permutationstests für zensierte Daten hergeleitet werden. Ein erster Ansatz für Typ II-zensierte Daten findet sich in der Diplomarbeit (Völker, 2002). Dieser wird hier noch vertieft. Darüberhinaus werden auch Tests für Typ I- und zufällig-zensierte Daten hergeleitet.

### 3.1 DER PERMUTATIONSTEST FÜR UNZENSIERTE DATEN

Es sei ein Zweistichprobenproblem bestehend aus  $n$  stu. Zufallsgrößen  $X_1, \dots, X_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B})$  gegeben, wobei die erste Stichprobe aus den Zufallsgrößen  $X_1, \dots, X_{n_1}$  und die zweite aus den verbleibenden Zufallsgrößen  $X_{n_1+1}, \dots, X_n$  bestehe. Will man nun statistisch absichern, dass die erste Stichprobe „besser“ ist als die zweite, d.h. mit höherer Wahrscheinlichkeit größere Werte annimmt, so ist dies sicherlich dann der Fall, wenn

$$\mathbb{P}(X_1 > t) \geq \mathbb{P}(X_n > t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

und  $>$  für ein  $t \in \mathbb{R}$  gilt. Bezeichnet  $\prec_{\text{st}}$  die übliche *stochastische Ordnung* für Verteilungsfunktionen und  $F_i$  die Verteilungsfunktion der  $i$ -ten Stichprobe, so ist dies genau dann der Fall, wenn

$$F_1 \prec_{\text{st}} F_2$$

gilt. Somit wird man bei diesem Problem als Hypothesen

$$\mathbf{H} := \{(F_1, F_2) : F_1, F_2 \in \mathfrak{F} \text{ mit } F_1 \succeq_{\text{st}} F_2\},$$

$$\mathbf{K} := \{(F_1, F_2) : F_1, F_2 \in \mathfrak{F} \text{ mit } F_1 \prec_{\text{st}} F_2\}$$

wählen, wobei  $\mathfrak{F}$  die Menge der Verteilungsfunktionen auf  $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$  beschreibt. Interessieren nur Lebensdauerverteilungen, so kann man anstatt  $\mathfrak{F}$  die Menge

### 3.1 Der Permutationstest für unzensierte Daten

---

der Verteilungsfunktionen  $F$  mit  $F(0) = 0$ , die im folgenden kurz mit  $\mathfrak{F}_0$  bezeichnet wird, wählen.

Im Zusammenhang mit Ausfallraten ist aber auch die sogenannte *Hazard Order* zu nennen (siehe (Shaked and Shanthikumar, 1993, Seite 12)). Diese wird definiert durch:

$$\lambda_1 \preceq_{\text{hz}} \lambda_2 \iff \lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \quad \forall t > 0.$$

Zusammen mit (1.1) folgt aus dieser Beziehung insbesondere  $F_1 \preceq_{\text{st}} F_2$ , falls die Ausfallraten stückweise stetig sind. Es gilt also:

$$\widehat{\mathbf{H}} := \{(\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{L} \text{ mit } \lambda_1 \succeq_{\text{hz}} \lambda_2\} \subseteq \mathbf{H},$$

$$\widehat{\mathbf{K}} := \{(\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{L} \text{ mit } \lambda_1 \prec_{\text{hz}} \lambda_2\} \subseteq \mathbf{K},$$

wobei  $\mathcal{L}$  die Menge der stückweise stetigen Ausfallraten bezeichnet.

Da für diese Hypothesen i.a. kein gleichmäßig bester Test zum Niveau  $\alpha$  oder gleichmäßig bester unverfälschter Test zum Niveau  $\alpha$  existiert, sucht man nach einem Test, der für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  zumindest die Voraussetzung der Unverfälschtheit erfüllt und die Güte auf einer noch zu spezifizierenden Teilklasse  $\mathbf{K}_1$  von  $\mathbf{K}$  gleichmäßig maximiert. Gesucht ist also eine Lösung von:

$$\varphi^* \in \Phi_u := \left\{ \varphi : \begin{array}{l} E_{\vartheta}(\varphi) \leq \alpha \quad \forall \vartheta \in \mathbf{H} \\ E_{\vartheta}(\varphi) \geq \alpha \quad \forall \vartheta \in \mathbf{K} \end{array} \right\}, \quad (3.1)$$

$$E_{\vartheta}(\varphi^*) = \sup_{\varphi \in \Phi_u} E_{\vartheta}(\varphi) \quad \forall \vartheta \in \mathbf{K}_1.$$

Siehe auch Abbildung 3.1.

Da unter Verwendung der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz die Gütefunktion eines jeden Tests stetig ist, ist jeder für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  unverfälschte Test auf dem Rand  $\mathbf{J} := \overline{\mathbf{H}} \cap \overline{\mathbf{K}}$  der Hypothesen  $\alpha$ -ähnlich (siehe (Witting and Nölle, 1970, Seite 117, Satz 3.12)). Bei diesen Hypothesen ergibt sich als Rand gerade  $\mathbf{J} := \{(F_1, F_2) : F_1, F_2 \in \mathfrak{F} \text{ mit } F_1 = F_2\}$ . Falls es nun eine unverfälschte Lösung von

$$\varphi^* \in \Phi_\alpha := \{\varphi : E_{\vartheta}(\varphi) = \alpha \quad \forall \vartheta \in \mathbf{J}\}, \quad (3.2)$$

$$E_{\vartheta}(\varphi^*) = \sup_{\varphi \in \Phi_\alpha} E_{\vartheta}(\varphi) \quad \forall \vartheta \in \mathbf{K}_1$$

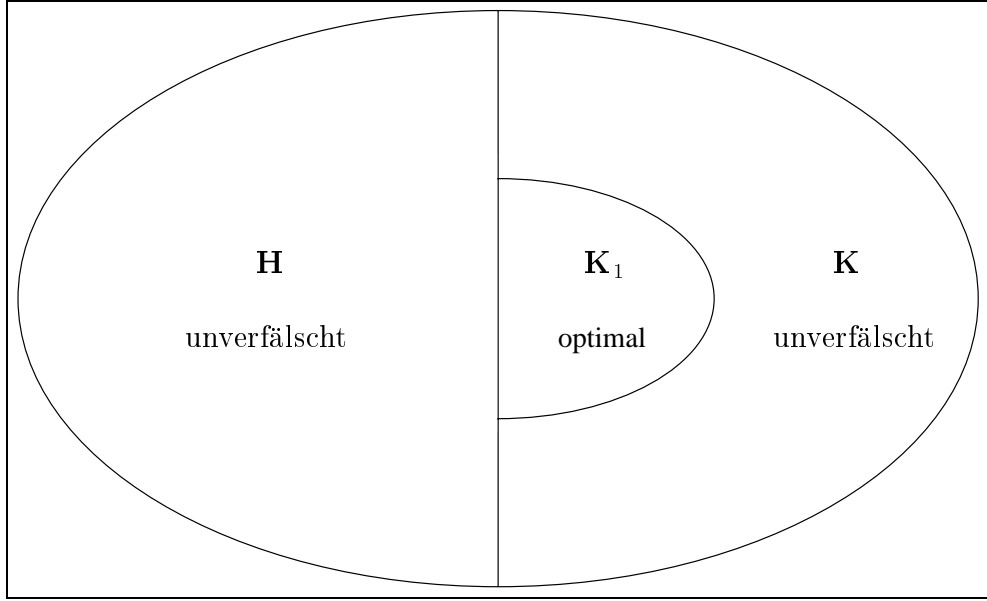


ABBILDUNG 3.1: Die Optimalitätseigenschaften des Permutationstests.

gibt, so ist diese also auch eine Lösung von (3.1).

Da für  $\mathbf{J}$  aber die *Ordnungsstatistik*  $T$  suffizient und vollständig ist (dies ist eine leichte Abwandlung von (Witting, 1985, Seite 359, Satz 3.43)), kann man das Problem (3.2) äquivalent durch

$$\varphi^* \in \Phi_{NS} := \left\{ \varphi : \int \varphi d\mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{X|T \circ X=t} = \alpha \quad \mathfrak{P}_{\mathbf{J}}^T\text{-f.s.} \right\}, \quad (3.3)$$

$$\int \varphi^* d\mathbb{P}_{\vartheta}^{X|T \circ X=t} \geq \int \varphi d\mathbb{P}_{\vartheta}^{X|T \circ X=t} \quad \mathbb{P}_{\vartheta}^{T \circ X}\text{-f.s.} \quad \forall \varphi \in \Phi_{NS} \quad \forall \vartheta \in \mathbf{K}_1$$

ersetzen (siehe (Witting, 1985, Seite 367, Hilfssatz 3.55)).

Der Permutationstest stellt sich bei einer geeigneten Wahl von  $\mathbf{K}_1$  als eine für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  unverfälschte Lösung des Problem (3.3) heraus.

Nach den vorherigen Ausführungen liegt es nahe, als  $\mathbf{K}_1$  eine *Proportional Hazard Familie zu einem festen Baseline Hazard*  $\lambda_0 \in \mathcal{L}$  zu nehmen:

$$\mathbf{K}_{\lambda_0} := \left\{ (F_1, F_2) \in \mathbf{K} : \frac{dP_{F_i}}{d\lambda}(t) = \eta_i \lambda_0(t) \exp(-\eta_i \Lambda_0(t)) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(t), \right. \\ \left. i = 1, 2, \quad \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}, \quad \eta_2 > \eta_1 > 0 \right\}$$



### 3.1 Der Permutationstest für unzensierte Daten

---

$$= \left\{ (\lambda_1, \lambda_2) \in \widehat{\mathbf{K}} : \lambda_i = \eta_i \lambda_0, \quad i = 1, 2, \quad \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}, \quad \eta_2 > \eta_1 > 0 \right\} \subseteq \mathbf{K}.$$

Auf diese Situation lässt sich (Gebhard, 1995, Seite 15, Satz 2.2) anwenden. Als Resultat erhält man (wenn auch nicht in seiner allgemeinsten Fassung):

**3.1 Satz (PERMUTATIONSTEST)** *Sei  $\lambda_0 \in \mathcal{L}$ . Dann gilt für den Test  $\varphi^*(x) := \varphi_{T(x)}^*(x)$  mit*

$$\varphi_t^*(x) := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^*(t) & \text{falls } \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(x_i) = c^*(t) \\ 0 & < \end{cases},$$

wobei  $\gamma^*(t), c^*(t)$  aus

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(\pi(x)_i) > c^*(t) \right\} \right| \\ & + \frac{\gamma^*(t)}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(\pi(x)_i) = c^*(t) \right\} \right| = \alpha \end{aligned}$$

bestimmt werden:

- (a)  $\varphi^*$  ist ein gegen  $\mathbf{K}_{\lambda_0}$  gleichmäßig bester auf  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlicher Test, d.h. eine Lösung von (3.2) mit  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{\lambda_0}$ .
- (b)  $\varphi^*$  ist unverfälscht zum Niveau  $\alpha$  für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$ , also insbesondere für  $\widehat{\mathbf{H}}$  gegen  $\widehat{\mathbf{K}}$ .
- (c)  $\varphi^*$  ist ein gegen  $\mathbf{K}_{\lambda_0}$  gleichmäßig bester zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$ , d.h. eine Lösung von (3.1) mit  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{\lambda_0}$ .

Besonders erwähnt sei der Fall  $\lambda_0(t) = t^{\kappa-1}$ , in dem sich der Permutationstest, wie bereits erwähnt, als ein gegen

$$\mathbf{K}_{\mathcal{W}_\kappa} := \{(\mathcal{W}(\kappa, \eta_1), \mathcal{W}(\kappa, \eta_2)) : \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}, \quad \eta_2 > \eta_1 > 0\}$$

optimaler Test erweist.

## 3.2 PERMUTATIONSTESTS FÜR TYP I-ZENSIERTE DATEN

### 3.2.1 MODELLBILDUNG

Wie im unzensierten Fall liege wieder ein Zweistichprobenproblem bestehend aus  $n$  stu. Zufallsgrößen  $X_1, \dots, X_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathbb{B}_+)$  vor, wobei die erste Stichprobe aus den ersten  $n_1$  und die zweite aus den letzten  $n_2 := n - n_1$  Zufallsgrößen bestehe. Wie bereits auf Seite 2 beschrieben, gibt man sich bei dieser Art der Zensierung eine Zeitspanne  $C$  vor, die das Experiment höchstens durchgeführt werden soll. Daher kann man in dieser Situation nicht die Zufallsgrößen  $X_i$  selbst, sondern nur

$$\widehat{X}_i := \begin{cases} X_i & \text{falls } X_i \leq C \\ D & \text{sonst} \end{cases} \quad (1 \leq i \leq n)$$

beobachten, wobei der Marker  $D$ , der anzeigt ob die jeweilige Zufallsgröße zensiert wurde oder nicht, als eine beliebige reelle Zahl echt größer als  $C$  gewählt werden kann. Die Verteilungen  $\mathbb{P}^{\widehat{X}_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) lassen sich dann durch

$$\mathfrak{F}_{C,D} := \left\{ F \in \mathfrak{F}_0 : F \text{ bildet eine W-Verteilung auf } ([0, C] \cup \{D\}, \mathbb{B}_{[0,C] \cup \{D\}}) \right\} \subseteq \mathfrak{F}_0$$

parametrisieren ( $F$  muss nicht stetig sein).

Der Informationsverlust, der durch die Zensierung entsteht, zeigt sich in diesem Fall unter anderem dadurch, dass nach der Zensierung nicht mehr alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus  $\mathfrak{F}_0$  unterschieden werden können. Genauer gilt für  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_0$  und  $1 \leq i \leq n$ :

$$\mathbb{P}_{F_1}^{\widehat{X}_i} = \mathbb{P}_{F_2}^{\widehat{X}_i} \iff F_1(x) = F_2(x) \quad \forall x \leq C.$$

Damit die induzierten Hypothesen schnittfrei bleiben, definiert man daher:

**3.2 Definition** Für  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_0$  gilt:

$$F_1 \preceq_{\text{st}}^C F_2 \iff F_1(t) \leq F_2(t) \quad \forall t \in [0, C]$$

und  $\prec_{\text{st}}^C$ , falls  $F_1 \preceq_{\text{st}}^C F_2$  gilt und für ein  $t \in [0, C]$   $\leq$  durch  $<$  ersetzt werden kann. ■

Damit können die Hypothesen in der Form

$$\mathfrak{P}_{\mathbf{H}} := \left\{ \mathbb{P}_{(F_1, F_2)}^{(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n)} = P_{F_1}^{(n_1)} \otimes P_{F_2}^{(n_2)} : F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_{C,D} \text{ mit } F_1 \succeq_{\text{st}}^C F_2 \right\},$$

$$\mathfrak{P}_{\mathbf{K}} := \left\{ \mathbb{P}_{(F_1, F_2)}^{(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n)} = P_{F_1}^{(n_1)} \otimes P_{F_2}^{(n_2)} : F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_{C,D} \text{ mit } F_1 \prec_{\text{st}}^C F_2 \right\}$$

oder prägnanter als

$$\mathbf{H} := \{(F_1, F_2) : F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_{C,D} \text{ mit } F_1 \succeq_{\text{st}}^C F_2\},$$

$$\mathbf{K} := \{(F_1, F_2) : F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_{C,D} \text{ mit } F_1 \prec_{\text{st}}^C F_2\}$$

formuliert werden.

### 3.2.2 UMFORMULIERUNG DES TESTPROBLEMS

Da schon bei der unzensierten Verteilungsannahme kein gleichmäßig bester Test zum Niveau  $\alpha$  oder zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test existiert, existiert dieser auch nicht für die obige Verteilungsannahme (diese Aussage wird später auch ersichtlich). Es scheint daher wieder sinnvoll, nach einem Test zu suchen, der für das Testproblem  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  unverfälscht ist und die Güte auf einer Teilklasse  $\mathbf{K}_1$  von  $\mathbf{K}$  gleichmäßig maximiert. Da die zugrundeliegenden Zufallsgrößen Überlebenszeiten sind, sollte diesem Rechnung getragen werden, in dem als  $\mathbf{K}_1$  eine Klasse von prominenten Lebensdauerverteilungen, wie z.B. die Exponentialverteilung oder die Weibull-Verteilung, ausgewählt wird. Gesucht ist also wieder eine Lösung von (3.1). Dieses Testproblem versucht man nun, wie bereits auf Seite 54 geschehen, umzuformulieren. Da erneut die Gütefunktion eines jeden Tests stetig<sup>1</sup> ist (man fasse  $\varphi$  einfach als Abbildung  $\varphi \circ Z : (\mathbb{R}_+^n, \mathbb{B}_+^n) \longrightarrow ([0, 1], \mathbb{B}_{|[0,1]})$  auf, wobei  $Z$  die Zensierungsabbildung beschreibt, und wende (Witting and Nölle, 1970, Seite 117, Satz 3.12) an), muss als nächstes der Rand<sup>1</sup>  $\mathbf{J} := \overline{\mathbf{H}} \cap \overline{\mathbf{K}}$  der Hypothesen bestimmt werden. Hier gilt:

**3.3 Lemma** *Für den Rand  $\mathbf{J} = \overline{\mathbf{H}} \cap \overline{\mathbf{K}}$  der beiden Hypothesen gilt:*

$$\mathfrak{P}_{\mathbf{J}} = \left\{ P_F^{(n)} : F \in \mathfrak{F}_{C,D} \right\} \text{ oder kurz}$$

$$\mathbf{J} = \{(F_1, F_2) : F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_{C,D} \text{ mit } F_1 = F_2\}.$$

---

<sup>1</sup>bzgl. der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz

BEWEIS: Beachtet man, dass mit  $F \in \mathfrak{F}_{C,D}$  auch  $F^2 \in \mathfrak{F}_{C,D}$  gilt und der Grenzwert<sup>1</sup> von Elementen aus  $\mathfrak{F}_{C,D}$  wieder in  $\mathfrak{F}_{C,D}$  enthalten ist, so verläuft der Beweis für nicht Dirac-Maße völlig analog zu (Witting and Nölle, 1970, Seite 118, Beispiel 3.11). Für ein Dirac-Maß  $\delta_a$  im Punkt  $a$  ersetze man  $(1 - \Delta)F + \Delta F^2$  durch  $(1 - \Delta)\delta_a + \Delta\delta_b$  für ein  $b > a$ .  $\square$

Um zu dem bedingten Testproblem übergehen zu können, muss eine für  $\mathfrak{P}_{\mathbf{J}}$  suffiziente und vollständige Statistik gefunden werden. Dabei kann man, wie im unzensierten Fall, die *Ordnungsstatistik* wählen:

**3.4 Lemma** *Die Ordnungsstatistik*

$$T = (T_1, \dots, T_n) : (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n) \longrightarrow (\mathbb{R}_{\leq}^n, \mathbb{B}_{\leq}^n),$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (t_1, \dots, t_n) = t \text{ mit } t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$$

$$\text{und } \{x_1, \dots, x_n\} = \{t_1, \dots, t_n\}$$

ist suffizient und vollständig für  $\mathfrak{P}_{\mathbf{J}}$ .

BEWEIS: (i) *Suffizienz*

Bekanntlich ist  $T$  suffizient für  $\{P_F^{(n)} : F \in \mathfrak{F}\}$  (siehe (Witting, 1985, Seite 336, Beispiel 3.7a)). Also ist  $T$  auch suffizient für die Teilklasse  $\{P_F^{(n)} : F \in \mathfrak{F}_{C,D}\} = \mathfrak{P}_{\mathbf{J}}$ .

(ii) *Vollständigkeit*

Die Vollständigkeit von  $T$  für  $\mathfrak{P}_{\mathbf{J}}$  ergibt sich ebenfalls mit Hilfe eines bekannten Resultats: Sei  $h : (\mathbb{R}_{\leq}^n, \mathbb{B}_{\leq}^n) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B})$  mit  $E_F(h \circ T) = 0 \quad \forall F \in \mathfrak{F}_{C,D}$  gegeben. Für  $F_0 \in \mathfrak{F}_{C,D}$  setze  $\mu := P_{F_0}$ . Nach (Witting, 1985, Seite 358, Satz 3.42) ist  $T$  vollständig für  $\mathfrak{P}_{\mu}^{(n)} := \{P_F^{(n)} : F \in \mathfrak{F}, P_F \ll \mu\}$ . Aus  $\mu \in \mathfrak{F}_{C,D}$  folgt weiter  $\mathfrak{P}_{\mu}^{(n)} \subseteq \{P_F^{(n)} : F \in \mathfrak{F}_{C,D}\} = \mathfrak{P}_{\mathbf{J}}$  und somit insbesondere  $E_F(h \circ T) = 0 \quad \forall F \in \mathfrak{F}$  mit  $P_F \ll \mu$ . Also gilt für  $N := \{t : h(t) = 0\}$ :  $\mathfrak{P}_{\mu}^{(n)}(T \in N) = 0$ . Nun ist aber  $\mathfrak{P}_{\mu}^{(n)}$  zu  $\mu^{(n)}$  äquivalent, was  $P_{F_0}^{(n)}(T \in N) = \mu^{(n)}(T \in N) = 0$  nach sich zieht. Da  $F_0 \in \mathfrak{F}_{C,D}$  beliebig gewählt worden ist, gilt also  $\mathfrak{P}_{\mathbf{J}}^T(N) = 0$  oder anders formuliert  $h \equiv 0 \quad \mathfrak{P}_{\mathbf{J}}^T$ -f.s.. Damit ist  $T$  auch vollständig für  $\mathfrak{P}_{\mathbf{J}}$ .  $\square$

Somit ist eine Umformulierung des Testproblems möglich, d.h. jede unverfälschte Lösung von (3.3) ist auch eine Lösung von (3.1) (genau genommen muss in (3.3) natürlich noch  $X$  durch  $\widehat{X}$  ersetzt werden).

3.2.3 DIE SUCHE NACH OPTIMALEN TESTS

GLEICHMÄSSIG BESTE TESTS

Nach den Bemerkungen im vorherigen Abschnitt sollte man nun nach einer Lösung  $\varphi^*$  von (3.3) (mit  $\hat{X}$  anstelle von  $X$ ) suchen. Dazu muss zunächst die bedingte Verteilung  $\mathbb{P}_\vartheta^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t}$  für  $\vartheta \in \mathbf{H} + \mathbf{K}$  bestimmt werden. Da aber  $\mathbb{P}_\vartheta^{\hat{X}^i} \forall \vartheta \in \mathbf{H} + \mathbf{K} \ (1 \leq i \leq n)$ , eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$  bildet, kann man die Ergebnisse aus (Gebhard, 1995, Seite 9ff., (2.6) – (2.8)) uneingeschränkt übernehmen:

**3.5 Lemma** *Für alle  $\vartheta \in \mathbf{H} + \mathbf{K}$  und  $\hat{x}$  mit  $T(\hat{x}) = t$  gilt:*

$$\mathbb{P}_\vartheta^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t}(\{\hat{x}\}) = \frac{f_\vartheta(\hat{x})}{\sum_{\pi \in \Psi_t} f_\vartheta(\pi(t))} = \frac{f_\vartheta(\hat{x})}{f_\vartheta^T(t)}, \quad (3.4)$$

wobei  $f_\vartheta$  eine  $\mu^{(n)}$ -Dichte von  $\mathbb{P}_\vartheta^{\hat{X}}$  bezeichnet, und  $\mu$  ein beliebiges  $\sigma$ -endliches Maß mit  $\mathbb{P}_\vartheta^{\hat{X}^1}, \mathbb{P}_\vartheta^{\hat{X}^n} \ll \mu$  sei. Weiter gilt  $\Psi_t = \mathcal{S}_n / \{\pi \in \mathcal{S}_n : \pi(t) = t\}$ .

Für  $\vartheta \in \mathbf{J}$  erhält man insbesondere:

$$\mathbb{P}_\vartheta^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t}(\{\hat{x}\}) = \frac{1}{|\Psi_t|}. \quad (3.5)$$

$\mathbb{P}_\vartheta^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t}$  bildet somit für alle  $\vartheta \in \mathbf{H} + \mathbf{K}$  eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den endlich vielen Punkten  $\{\hat{x} : T(\hat{x}) = t\} = \{\pi(t) : \pi \in \mathcal{S}_n\}$ , wobei die Verteilung auf dem Rand eine Laplace-Verteilung auf eben diesen Punkten ist.

Wählt man auch in diesem Fall wieder  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{\lambda_0}$  (genauer die durch die Zensierung aus  $\mathbf{K}_{\lambda_0}$  induzierte Verteilungsklasse), so ist  $\mu := \nu + \delta_D$ ,  $\frac{d\nu}{d\lambda|_{[0,C]}}(t) := \lambda(t)$ , ein  $\sigma$ -endliches Maß mit  $\mathbb{P}_\eta^{\hat{X}^1}, \mathbb{P}_\eta^{\hat{X}^n} \ll \mu$  ( $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ ). Die  $\mu^{(n)}$ -Dichte von  $\mathbb{P}_\eta^{\hat{X}}$  ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned} f_\eta(\hat{x}) := & \prod_{i=1}^{n_1} [\eta_1 \exp(-\eta_1 \Lambda_0(\hat{x}_i)) \mathbf{1}_{[0,C]}(\hat{x}_i) + \exp(-\eta_1 \Lambda_0(C)) \mathbf{1}_{\{D\}}(\hat{x}_i)] \\ & \times \prod_{i=n_1+1}^n [\eta_2 \exp(-\eta_2 \Lambda_0(\hat{x}_i)) \mathbf{1}_{[0,C]}(\hat{x}_i) + \exp(-\eta_2 \Lambda_0(C)) \mathbf{1}_{\{D\}}(\hat{x}_i)]. \end{aligned}$$

### 3 Permutationstests

---

Nach dem Neyman-Kriterium ist  $\Lambda_0$  eine suffiziente Abbildung für  $\left\{ \mathbb{P}_{(\eta_1, \eta_2)}^{\widehat{X}} : \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}_+ \right\}$ . Da aber  $\Lambda_0 \circ \widehat{X}_j$  nach Korollar 1.7 wie  $\widehat{Y}_j$  mit  $Y_j \sim \text{Exp}(\eta_i)$  und Zensierungszeitpunkt  $\Lambda_0(C)$  verteilt ist (es gilt  $i = 1$  für  $1 \leq j \leq n_1$  und  $i = 2$  für  $n_1 + 1 \leq j \leq n$ ), kann man sich für die Herleitung von optimalen Tests auf den Fall  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{Exp}$  mit

$$\mathbf{K}_{Exp} := \{(F_1, F_2) : F_i \sim \text{Exp}(\theta_i), i = 1, 2, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, 0 < \theta_1 < \theta_2\},$$

im folgenden kurz

$$\theta := \{(\theta_1, \theta_2) : \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \theta_1 < \theta_2\},$$

beschränken.

In diesem Spezialfall vereinfacht sich die obige Dichte zu

$$\begin{aligned} f_\theta(\widehat{x}) &:= \theta_1^{M_1(\widehat{x})} \exp \left[ -\theta_1 \left( \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_1 \\ \widehat{x}_i \leq C}} \widehat{x}_i + (n_1 - M_1(\widehat{x}))C \right) \right] \\ &\times \theta_2^{M_2(\widehat{x})} \exp \left[ -\theta_2 \left( \sum_{\substack{n_1+1 \leq i \leq n \\ \widehat{x}_i \leq C}} \widehat{x}_i + (n_2 - M_2(\widehat{x}))C \right) \right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

falls

$$M_1(\widehat{x}) := |\{1 \leq i \leq n_1 : \widehat{x}_i \leq C\}|,$$

$$M_2(\widehat{x}) := |\{n_1 + 1 \leq i \leq n : \widehat{x}_i \leq C\}|$$

die Anzahl der nicht-zensierten Beobachtungen der ersten bzw. zweiten Stichprobe bezeichnet. Weiter gilt für  $\widehat{x}$  mit  $T(\widehat{x}) = t$  nach (3.4):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta^{\widehat{X}|T \circ \widehat{X}=t}(\{\widehat{x}\}) &= \theta_1^{M_1(\widehat{x})} \theta_2^{M_2(\widehat{x})} \exp \left[ -\theta_1 \left( \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_1 \\ \widehat{x}_i \leq C}} \widehat{x}_i + (n_1 - M_1(\widehat{x}))C \right) \right] \\ &\times \exp \left[ -\theta_2 \left( \sum_{\substack{n_1+1 \leq i \leq n \\ \widehat{x}_i \leq C}} \widehat{x}_i + (n_2 - M_2(\widehat{x}))C \right) \right] \frac{1}{\sum_{\pi \in \Psi_t} f_\theta(\pi(t))} \\ &= \left( \frac{\theta_1}{\theta_2} \right)^{M_1(\widehat{x})} \exp \left[ (\theta_2 - \theta_1) \left( \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_1 \\ \widehat{x}_i \leq C}} \widehat{x}_i + (n_1 - M_1(\widehat{x}))C \right) \right] \end{aligned}$$

### 3.2 Permutationstests für Typ I-zensierte Daten

---

$$\times \theta_2^{M_1(\hat{x})+M_2(\hat{x})} \exp \left[ -\theta_2 \left( \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \hat{x}_i \leq C}} \hat{x}_i + (n - M_1(\hat{x}) - M_2(\hat{x}))C \right) \right]$$

$$\times \frac{1}{\sum_{\pi \in \Psi_t} f_\theta(\pi(t))},$$

wobei die Ausdrücke in den letzten beiden Zeilen auf der Menge  $\{\hat{x} : T(\hat{x}) = t\}$  konstant sind. Daher ist

$$U(\hat{x}, \theta) := \left( \frac{\theta_1}{\theta_2} \right)^{M_1(\hat{x})} \exp \left[ (\theta_2 - \theta_1) \left( \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_1 \\ \hat{x}_i \leq C}} \hat{x}_i + (n_1 - M_1(\hat{x}))C \right) \right]$$

der bei der Bestimmung eines gegen  $\mathbf{K}_{Exp}$  besten Tests entscheidende Ausdruck. Da stets  $\theta_2 > \theta_1$  und damit  $\theta_1/\theta_2 < 1$ ,  $\theta_2 - \theta_1 > 0$  vorausgesetzt wird, hängt  $U$  antiton von  $M_1$  und isoton von

$$V(\hat{x}) := \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_1 \\ \hat{x}_i \leq C}} \hat{x}_i + (n_1 - M_1(\hat{x}))C$$

ab. Wie in den folgenden Beispielen gezeigt werden soll, liegt es aber an den beobachteten Daten  $\hat{x}$  und dem Parameter  $\theta$ , ob die Statistik  $M_1$  oder die Statistik  $V$  einen größeren Anteil an dem Wert der Funktion  $U$  hat.

**3.6 Beispiel** In diesem Beispiel sei die Größe der beiden Stichproben jeweils 2 ( $n_1 = n_2 = 2$ ). Als Zeitlimit und Niveau wird  $C = 11$  und  $\alpha = 0.5$  gewählt. Für den Parameterwert  $\theta = (10^{-5}, 2 \cdot 10^{-5})$  und die möglichen Beobachtungen  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_4) \in (0.75, 1.25) \times (2.75, 3.25) \times (9.75, 10.25) \times \{D\}$  erhält man dann als Werte der Statistiken  $M_1, V$  und  $U$  für die 6 wesentlich verschiedenen Anordnungen/Permutationen von  $\hat{x}$ :

Permutation $\pi$	$M_1(\pi(\hat{x}))$	$V(\pi(\hat{x})) \in$	$U(\pi(\hat{x}), \theta) \in$
(1, 2, 3, 4)	2	(3.5, 4.5)	(0.25000875, 0.25001125)
(1, 3, 2, 4)	2	(10.5, 11.5)	(0.250026251, 0.250028751)
(1, 4, 3, 2)	1	(11.75, 12.25)	(0.500058753, 0.500061253)
(2, 3, 1, 4)	2	(12.5, 13.5)	(0.250031252, 0.250033752)
(2, 4, 1, 3)	1	(13.75, 14.25)	(0.500068754, 0.500071255)
(3, 4, 1, 2)	1	(20.75, 21.25)	(0.50010376, 0.500106261)

TABELLE 3.1: Werte der einzelnen Permutationen.

### 3 Permutationstests

---

Nach dem einfachen Neyman-Pearson Lemma und (3.4) sowie (3.5) muss eine Lösung von (3.3) mit  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{Exp}$  (falls sie existiert) sich in diesem Fall bei den drei wesentlichen Permutationen  $\pi$  mit den größten Werten von  $U(\pi(\hat{x}), \theta)$  für  $\mathbf{K}$  und sonst für  $\mathbf{H}$  entscheiden. Der kritische Bereich des optimalen Tests lautet also:

$$K_1 := \{(1, 4, 3, 2), (2, 4, 1, 3), (3, 4, 1, 2)\}.$$

Damit entscheidet sich der optimale Test genau dann für  $\mathbf{K}$ , wenn  $M_1$  klein ist. ◇

**3.7 Beispiel** Ändert man in Beispiel 3.6 nur den Parameterwert  $\theta$  zu  $\theta = (10, 12)$ , so berechnet sich analog die folgende Tabelle:

Permutation $\pi$	$M_1(\pi(\hat{x}))$	$V(\pi(\hat{x})) \in$	$U(\pi(\hat{x}), \theta) \in$
(1, 2, 3, 4)	2	(3.5, 4.5)	(762, 5627)
(1, 3, 2, 4)	2	(10.5, 11.5)	(915844260, 6767224615)
(1, 4, 3, 2)	1	(11.75, 12.25)	( $1.3389 \cdot 10^{10}$ , $3.6394 \cdot 10^{10}$ )
(2, 3, 1, 4)	2	(12.5, 13.5)	( $5.0003 \cdot 10^{10}$ , $3.6948 \cdot 10^{11}$ )
(2, 4, 1, 3)	1	(13.75, 14.25)	( $7.3100 \cdot 10^{11}$ , $1.9871 \cdot 10^{12}$ )
(3, 4, 1, 2)	1	(20.75, 21.25)	( $8.7910 \cdot 10^{17}$ , $2.3896 \cdot 10^{18}$ )

TABELLE 3.2: Werte der einzelnen Permutationen.

Ebenfalls nach dem einfachen Neyman-Pearson Lemma und (3.4) sowie (3.5) ergibt sich der kritische Bereich einer Lösung von (3.3) mit  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{Exp}$  (falls sie existiert) zu:

$$K_2 := \{(2, 3, 1, 4), (2, 4, 1, 3), (3, 4, 1, 2)\}.$$

Hier entscheidet sich der optimale Test also für große Werte von  $V$  für  $\mathbf{K}$  und sonst für  $\mathbf{H}$ . ◇

Offenbar stimmen die kritischen Bereiche  $K_1$  und  $K_2$  aus den obigen Beispielen nicht überein. Demnach kann keine Lösung von (3.3) mit  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{Exp}$  existieren, da für die in den Beispielen ausgewählten  $\theta$

$$P_\theta^T ((0.75, 1.25) \times (2.75, 3.25) \times (9.75, 10.25) \times \{D\}) > 0$$

gilt. Durch analoges Vorgehen kann man dann folgendes zeigen:



**3.8 Satz** *Zu vorgegebenen Stichprobenumfängen  $n_1, n_2$ , Niveau  $\alpha$  und Zensierungszeitpunkt  $C$  existiert i.a. kein gegen  $\mathbf{K}_{Exp}$  gleichmäßig bester auf  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlicher Test, d.h. eine Lösung von (3.3) mit  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{Exp}$ .*

Die Aussage kann noch in den folgenden Richtungen erweitert werden:

- (a) Es kann i.a. auch keinen gegen  $\mathbf{K}_{Exp}$  gleichmäßig besten unverfälschten Test für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$ , d.h. eine Lösung von (3.1) mit  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{Exp}$  geben, da die Tests, die sich bei kleinen Werten von  $M_1$  bzw. großen Werten von  $V$  für  $\mathbf{K}$  entscheiden, auch für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  unverfälscht sind (siehe Seite 72).
- (b) Nach den vorherigen Überlegungen kann es i.a. auch keinen gegen  $\mathbf{K}_{\lambda_0}$  gleichmäßig besten auf  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlichen oder für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  unverfälschten Test geben. Von besonderem Interesse ist dabei natürlich wieder der Fall  $\mathbf{K}_{\lambda_0} = \mathbf{K}_{\mathcal{W}_k}$ .
- (c) Aus der Gestalt von  $U$  kann man schließen, dass analoge Aussagen bereits gelten, wenn man anstatt  $\mathbf{K}_{\lambda_0}$  zwei unterschiedliche Punkte aus  $\mathbf{K}_{\lambda_0}$  als  $\mathbf{K}_1$  wählt.
- (d) Wählt man als  $\mathbf{K}_1$  jedoch nur einen Punkt  $\eta$  aus  $\mathbf{K}_{\lambda_0}$ , so existiert eine Lösung von (3.3) und (3.1). Der optimale Test hat dabei die Prüfgröße  $U(\cdot, \eta)$ .

Definiert man allerdings  $\mathbf{K}_1$  durch

$$\mathbf{K}_{Exp,C} := \{(F_1, F_2) : F_i \sim Exp(\theta_i, Z), i = 1, 2, \\ \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \theta_1 < \theta_2, 0 < Z \leq C\},$$

wobei  $Exp(\beta, Z)$  die abgeschnittene Exponentialverteilung mit der  $\mathfrak{L}$ -Dichte

$$f_{\beta,Z}(x) := \frac{\beta}{1 - e^{-\beta Z}} \exp(-\beta x) \mathbf{1}_{(0,Z)}(x)$$

bezeichnet, so existiert eine Lösung von (3.3) bzw. (3.1). Die Optimalität von  $\varphi^*(\hat{x}) := \varphi_{T(\hat{x})}^*(\hat{x})$  mit<sup>2</sup>

$$\varphi_t^*(\hat{x}) := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^*(t) & \text{falls } \sum_{i=1}^{n_1} \hat{x}_i = c^*(t) \\ 0 & < \end{cases},$$

---

<sup>2</sup>An dieser Stelle sei einmalig darauf hingewiesen, dass die Meßbarkeit aller in diesem Text hergeleiteten „bedingten“ Tests aus (Witting, 1985, Seite 376, Hilfssatz 3.61) folgt.

wobei  $\gamma^*(t), c^*(t)$  aus

$$\frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \sum_{i=1}^{n_1} \pi(\hat{x})_i > c^*(t) \right\} \right| + \frac{\gamma^*(t)}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \sum_{i=1}^{n_1} \pi(\hat{x})_i = c^*(t) \right\} \right| = \alpha$$

bestimmt werden, beweist man auf dem üblichen Weg. Dabei sei angemerkt, dass hier die einzige Stelle ist, bei der der Wert des Markers  $D$  in eine Prüfstatistik eingesetzt wird. Der Test besitzt allerdings für jedes  $D$  die gleichen Optimalitätseigenschaften, da der Marker  $D$  auf  $\mathbf{K}_{Exp,C}$  nicht realisiert wird.

### LOKAL BESTE TESTS

Da man *keine gleichmäßig* besten Tests findet, kann man nun versuchen *lokal* beste Tests zu finden.

Als erstes kann man versuchen, den nach dem einfachen Neyman-Pearson Lemma sowie (3.4) und (3.5) besten Test zum Niveau  $\alpha$  für  $\left\{ \mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t} \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{\theta}^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t} \right\}$ ,  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ ,  $\theta_1 < \theta_2$  (d.h. Exponentialverteilungen)

$$\varphi_{t,\theta}^*(\hat{x}) := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^*(t, \theta) & \text{falls } U(\hat{x}, \theta) = c^*(t, \theta) \\ 0 & < \end{cases} ,$$

wobei  $\gamma^*(t, \theta), c^*(t, \theta)$  aus

$$\frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : U(\pi(\hat{x}), \theta) > c^*(t, \theta) \right\} \right| + \frac{\gamma^*(t, \theta)}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : U(\pi(\hat{x}), \theta) = c^*(t, \theta) \right\} \right| = \alpha$$

bestimmt werden, bei festem  $\theta_2$  unabhängig von  $\theta_1$  zu machen (die umgekehrte Situation lässt sich genauso behandeln). Dies gelingt auch, da der Stichprobenraum endlich und die Abbildung

$$\begin{aligned} \theta_1 \mapsto p_{(\theta_1, \theta_2)}(\hat{x}) &:= \mathbb{P}_{(\theta_1, \theta_2)}^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t}(\{\hat{x}\}) \\ &= \frac{f_{\theta}(\hat{x})}{f_{\theta}^T(t)} \end{aligned}$$

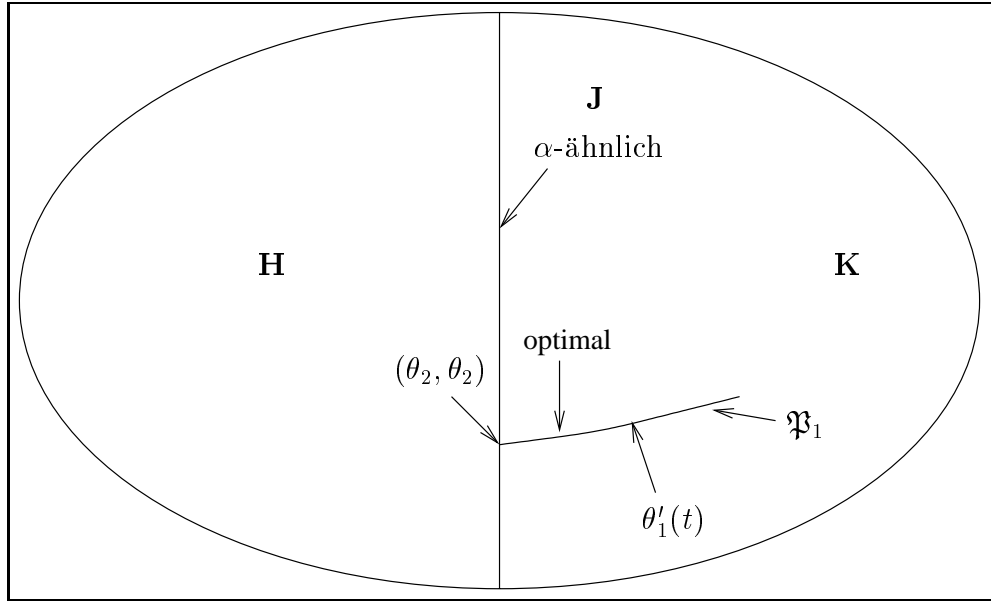


ABBILDUNG 3.2: Die Optimalitätseigenschaften lokal gleichmäßig bester Tests.

bei festem  $\theta_2$  und  $\hat{x}$  nach (3.6) in eine Potenzreihe um  $\theta_2$  ( $\theta_1 = \theta_2$  entspricht  $\theta \in \mathbf{J}$ ) entwickelbar ist. (Witting, 1985, Seite 225, Satz 2.46) liefert nun den

**3.9 Satz** Für jedes  $t \in T(([0, C] \cup D)^{(n)})$  existiert ein  $0 < \theta'_1(t) < \theta_2$  d.d.  $\varphi_{t, \theta}^*$  für  $\theta'_1(t) < \theta_1 < \theta_2$  unabhängig von  $\theta_1$  ist. Somit ist  $\varphi_t^* := \varphi_{t, ((\theta'_1(t) + \theta_2)/2, \theta_2)}^*$  ein gleichmäßig bester  $\alpha$ -ähnlicher Test für  $\left\{ \mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t} \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{(\theta_1, \theta_2)}^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t} : \theta_1 \in \mathbb{R}, \theta'_1(t) < \theta_1 < \theta_2 \right\}$  ( $\theta_2$  fest).

Also ist  $\varphi_t^*$  ein lokal gleichmäßig bester  $\alpha$ -ähnlicher Test für  $\left\{ \mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t} \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{(\theta_1, \theta_2)}^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t} : \theta_1 \in \mathbb{R}, 0 < \theta_1 < \theta_2 \right\}$  ( $\theta_2$  fest).

Dieses Optimalitätskriterium wird in Abbildung 3.2 verdeutlicht.

Das Problem bei dieser Art der Optimalität liegt nun darin, dass  $\theta'_1(t)$  noch entscheidend von  $t$  abhängt und daher  $\sup \{ \theta'_1(t) : t \in T(\mathbb{R}^n) \} = \theta_2$  gilt, so dass man beim unbedingten Testproblem keine Optimalität mehr erhält (siehe Anmerkung (c) auf Seite 63).

Da die einparametrische Verteilungsklasse

$$\left\{ \mathbb{P}_{(\theta_1, \theta_2)}^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t} : \theta_1 \in \mathbb{R}_+ \right\} \quad (\theta_2 \text{ fest})$$

$\mathbb{L}_1(\theta_2)$ -differenzierbar ist (dies ist mit Blick auf (Witting, 1985, Seite 170, Satz 1.183) offensichtlich), besteht eine weitere Möglichkeit nach einem lokal optimalen Test zu suchen darin, dass dieser auf  $\left\{ \mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t} \right\}$   $\alpha$ -ähnlich ist und die Ableitung der Gütefunktion unter allen  $\alpha$ -ähnlichen Tests in dem Punkt  $(\theta_2, \theta_2)$  aus dem Rand maximiert. Ein solcher Test existiert in diesem Fall nach (Witting, 1985, Seite 170, Satz 1.183) und (Witting, 1985, Seite 223, Satz 2.44), da offenbar alle Forderungen an  $\theta_1 \mapsto p_{(\theta_1, \theta_2)}(\hat{x})$  erfüllt sind. Als Prüfgröße des Tests ergibt sich dabei die  $\mathbb{L}_1(\theta_2)$ -Ableitung:

$$\begin{aligned} \dot{L}_{\theta_2, t}(\hat{x}) &= \frac{d}{d\theta_1} p_{(\theta_1, \theta_2)}(\hat{x}) \Big|_{\theta_1 = \theta_2} \\ &= |\Psi_t| \frac{d}{d\theta_1} \frac{f_{(\theta_1, \theta_2)}(\hat{x})}{f_{(\theta_1, \theta_2)}^T(t)} \Big|_{\theta_1 = \theta_2} \\ &= |\Psi_t| \left[ \left( M_1(\hat{x})/\theta_2 - \left( \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_1 \\ \hat{x}_i \leq C}} \hat{x}_i + (n_1 - M_1(\hat{x}))C \right) \right) |\Psi_t| \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\pi \in \Psi_t} \left( M_1(\pi(\hat{x}))/\theta_2 - \left( \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_1 \\ \pi(\hat{x})_i \leq C}} \pi(\hat{x})_i + (n_1 - M_1(\pi(\hat{x})))C \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt damit:

**3.10 Satz** Für jedes  $t \in T([0, C] \cup D)^{(n)}$  ist der Test  $\tilde{\varphi}_t^*$  mit

$$\tilde{\varphi}_t^*(\hat{x}) := \begin{cases} 1 & > \\ \tilde{\gamma}^*(t) \text{ falls } \theta_2 V(\hat{x}) - M_1(\hat{x}) = \tilde{c}^*(t), & = \\ 0 & < \end{cases}$$

wobei  $\tilde{\gamma}^*(t), \tilde{c}^*(t)$  aus

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \theta_2 V(\pi(\hat{x})) - M_1(\pi(\hat{x})) > \tilde{c}^*(t) \right\} \right| \\ &\quad + \frac{\tilde{\gamma}^*(t)}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \theta_2 V(\pi(\hat{x})) - M_1(\pi(\hat{x})) = \tilde{c}^*(t) \right\} \right| = \alpha \end{aligned}$$

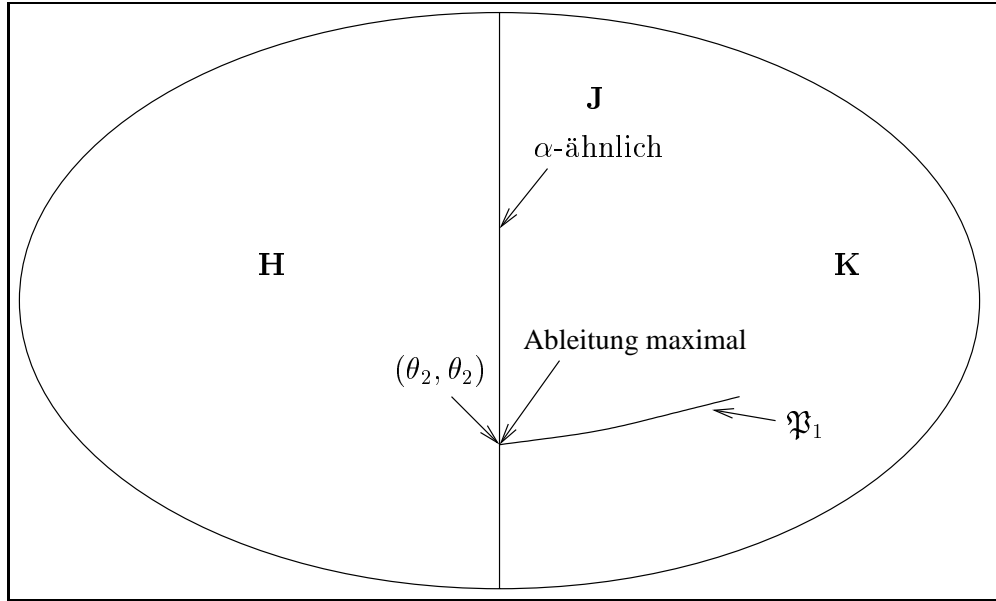


ABBILDUNG 3.3: Die Optimalitätseigenschaften lokaler bester Tests.

bestimmt werden, ein lokal bester  $\alpha$ -ähnlicher Test für  $\left\{ \mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t} \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{(\theta_1, \theta_2)}^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t} : \theta_1 \in \mathbb{R}, 0 < \theta_1 < \theta_2 \right\}$  ( $\theta_2$  fest).

Dieses Optimalitätskriterium wird in Abbildung 3.3 verdeutlicht.

Dass beim Übergang von  $\varphi_t^*$  zu  $\tilde{\varphi}_t^*$  „nicht viel“ Güte verloren geht, zeigt das folgende Lemma, welches eine direkte Folgerung aus (Witting, 1985, Seite 225, Satz 2.46) ist:

**3.11 Lemma** Für jedes  $t \in T(\left([0, C] \cup \{D\}\right)^{(n)})$  gilt:

$$\tilde{\varphi}_t^*(\hat{x}) = 1 \implies \varphi_t^*(\hat{x}) = 1 \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi}_t^*(\hat{x}) = 0 \implies \varphi_t^*(\hat{x}) = 0,$$

d.h. der Annahme-/Ablehnungsbereich von  $\tilde{\varphi}_t^*$  ist in dem Annahme-/Ablehnungsbereich von  $\varphi_t^*$  enthalten.  $\tilde{\varphi}_t^*$  unterscheidet sich von  $\varphi_t^*$  also nur durch einen größeren Randomisierungsbereich.

Anmerkungen zu Satz 3.9, Satz 3.10 sowie Lemma 3.11:

- (a) Sucht man nicht gegenüber  $\left\{ \mathbb{P}_{(\theta_1, \theta_2)}^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t} : \theta_1 \in \mathbb{R}, 0 < \theta_1 < \theta_2 \right\}$  ( $\theta_2$  fest) sondern gegenüber  $\left\{ \mathbb{P}_{(\eta_1, \eta_2)}^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t} : \theta_1 \in \mathbb{R}, 0 < \eta_1 < \eta_2 \right\}$  ( $\eta_2$  fest),

siehe Definition von  $\mathbf{K}_{\lambda_0}$ ) optimale Tests, so hat man in den Prüfstatistiken nur  $\hat{x}_i$  durch  $\Lambda_0(\hat{x}_i)$  und  $C$  durch  $\Lambda_0(C)$  zu ersetzen (zusätzlich ist selbstverständlich noch  $\theta_i$  durch  $\eta_i$  zu substituieren). Von besonderem Interesse ist dabei wieder der Fall  $\mathbf{K}_{\mathcal{W}_k}$ , in dem  $\Lambda_0(t) := t^k$  gewählt werden kann.

- (b) Da  $T$  eine für  $\mathbf{J}$  suffiziente und vollständige Statistik ist, stimmen die beiden Mengen von Tests  $\Phi_\alpha$  und  $\Phi_{NS}$  überein, d.h. ein Test ist genau dann auf dem Rand  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlich, wenn er ein Test mit Neyman-Struktur bzgl.  $T$  ist. Daher ist es an dieser Stelle legitim, mit den bedingten Verteilungen zu argumentieren.
- (c) Da man  $\theta'_1(t)$  i.a. nicht angeben kann, ist der Test  $\varphi_t^*$  oft nicht anwendbar. Daher wird man häufig auf den Test  $\tilde{\varphi}_t^*$  ausweichen.
- (d)  $\tilde{\varphi}_t^*$  ist auch ein für  $\left\{ \mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t} \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{(\Delta, \theta_2)}^{\hat{X}|T \circ \hat{X}=t} : \Delta \in (-1, 0) \right\}$  ( $\mathbb{P}_{\Delta}^{X_1}$  besitzt die Ausfallrate  $f(\Delta)\theta_2 + g(\Delta)\lambda_3$ ) lokal bester  $\alpha$ -ähnlicher Test. Dabei sind  $\lambda_3 \in \mathcal{L}$  und  $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend und differenzierbar mit  $f(0) = 1$  und  $g(0) = g'(0) = 0$  frei wählbar (siehe Anmerkung 2.31).

Satz 3.10 kann noch dahingehend verallgemeinert werden, dass der Test  $\tilde{\varphi}^*(\hat{x}) := \tilde{\varphi}_{T(\hat{x})}^*(\hat{x})$  auch für das unbedingte Testproblem  $\left\{ \mathbb{P}_{(\theta_2, \theta_2)}^{\hat{X}} \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{(\theta_1, \theta_2)}^{\hat{X}} : \theta_1 \in \mathbb{R}, 0 < \theta_1 < \theta_2 \right\}$  ( $\theta_2$  fest) ein lokal bester  $\alpha$ -ähnlicher Test ist. Dazu muss allerdings erst noch ein zu (Witting, 1985, Seite 367, Hilfsatz 3.55) analoges Resultat hergeleitet werden:

**3.12 Lemma** *Sei  $T$  eine für  $\mathfrak{P}_{\mathbf{J}}$  suffiziente und vollständige Statistik und  $\mathfrak{P}_1 = \{P_\Delta : \Delta \geq 0\}$  eine  $\mathbb{L}_1(0)$  differenzierbare Verteilungsklasse mit Ableitung  $\dot{L}$ . Dann besitzen die beiden Testprobleme*

$$\varphi^* \in \Phi_\alpha := \{ \varphi : E_\vartheta(\varphi) = \alpha \quad \forall \vartheta \in \mathbf{J} \},$$

$$\left. \frac{d}{d\Delta} E_\Delta(\varphi^*) \right|_{\Delta=0} = \sup_{\varphi \in \Phi_\alpha} \left. \frac{d}{d\Delta} E_\Delta(\varphi) \right|_{\Delta=0} \quad (3.7)$$

und

$$\begin{aligned} \varphi^* \in \Phi_{NS} &:= \left\{ \varphi : \int \varphi d\mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{X|T \circ X=t} = \alpha \quad \mathfrak{P}_{\mathbf{J}}^T\text{-f.s.} \right\}, \\ \int \varphi^* \dot{L} d\mathbb{P}_0^{X|T \circ X=t} &\geq \int \varphi \dot{L} d\mathbb{P}_0^{X|T \circ X=t} \quad \mathbb{P}_0^{T \circ X}\text{-f.s.} \quad \forall \varphi \in \Phi_{NS} \end{aligned} \quad (3.8)$$

dieselben Lösungen.

BEWEIS: Wie bereits erwähnt, stimmen die beiden Mengen  $\Phi_\alpha$  und  $\Phi_{NS}$  überein. Nach (Witting, 1985, Seite 164, Satz 1.179) gilt weiter:

$$\left. \frac{d}{d\Delta} E_\Delta(\varphi) \right|_{\Delta=0} = E_0(\varphi \dot{L}).$$

Ist nun  $\varphi^*$  eine Lösung von (3.8), so erhält man durch Integration bzgl.  $\mathbb{P}_0^{T \circ X}$ , dass  $\varphi^*$  auch eine Lösung von (3.7) ist.

Sei umgekehrt  $\varphi^*$  eine Lösung von (3.7). Angenommen  $\varphi^*$  ist keine Lösung von (3.8), dann existiert ein Test  $\varphi \in \Phi_{NS}$  mit  $\mathbb{P}_0^{T \circ X}(A) > 0$ , wobei

$$A := \left\{ t : \int \varphi \dot{L} d\mathbb{P}_0^{X|T \circ X=t} > \int \varphi^* \dot{L} d\mathbb{P}_0^{X|T \circ X=t} \right\}$$

gilt. Definiert man nun  $\tilde{\varphi}$  durch  $\tilde{\varphi} := \varphi^* \mathbf{1}_{A^c} + \varphi \mathbf{1}_A$ , so gilt offenbar (nach Integration bzgl.  $\mathbb{P}_0^{T \circ X}$ )  $\tilde{\varphi} \in \Phi_\alpha$  und  $E_0(\tilde{\varphi} \dot{L}) > E_0(\varphi^* \dot{L})$ . Dies liefert nach den einführenden Bemerkungen den gewünschten Widerspruch.  $\square$

Nun zu dem bereits angesprochenen Satz:

**3.13 Satz**  $\tilde{\varphi}^*$  ist ein gegen  $\mathfrak{P}_1 = \left\{ \mathbb{P}_{(\theta_1, \theta_2)}^{\hat{X}} : \theta_1 \in \mathbb{R}, 0 < \theta_1 < \theta_2 \right\}$  ( $\theta_2$  fest) lokal bester  $\alpha$ -ähnlicher Test, d.h. eine Lösung von (3.7) mit  $\mathfrak{P}_1 = \left\{ \mathbb{P}_{(\theta_1, \theta_2)}^{\hat{X}} : \theta_1 \in \mathbb{R}, 0 < \theta_1 < \theta_2 \right\}$  ( $\theta_2$  fest).

BEWEIS: Offensichtlich gilt  $\tilde{\varphi}^* \in \Phi_{NS}$ . Da sich die  $\mathbb{L}_1(\theta_2)$ -Ableitung von  $\mathfrak{P}_1$  nach (Witting, 1985, Seite 170, Satz 1.183) zu

$$\dot{L}(\hat{x}) = M_1(\hat{x})/\theta_2 - V(\hat{x})$$

berechnet, erfüllt  $\varphi^*$  nach dem einfachen Neyman-Pearson Lemma (beachte  $P_0 \in \mathbf{J}$ ) für jedes  $t$  die Optimalitätsforderung in (3.8). Die Behauptung folgt nun mit Lemma 3.12.  $\square$

Wie man unmittelbar einsieht, gelten die Anmerkungen (a) und (d) von Seite 68 auch für das unbedingte Testproblem.

Für den Test  $\varphi^*(\hat{x}) := \varphi_{T(\hat{x})}^*(\hat{x})$  aus Satz 3.9 kann keine zu Satz 3.13 analoge Aussage gemacht werden, da in (Witting, 1985, Seite 225, Satz 2.46) entscheidend von der Endlichkeit des zugrundeliegenden Stichprobenraums Gebrauch gemacht wird.

Das Problem bei den in den Sätzen 3.9, 3.10 und 3.13 hergeleiteten Tests besteht nun darin, dass die Optimalitätsaussagen noch von dem genauen Fußpunkt aus dem Rand abhängen. Besser wäre es, wenn die Tests für eine (parametrische) Teilklasse des Randes, in diesem Fall  $\{\theta = (\theta_2, \theta_2) : \theta_2 \in \mathbb{R}\}$ , identisch wären. Dies kann man z.B. wie beim Übergang vom Gaußtest zum  $t$ -Test mit Hilfe der *Plug-In Methode* erreichen. Allerdings gehen in diesem Fall die Optimalitätseigenschaften verloren. Um die Plug-In Methode anwenden zu können, muss nun als erstes ein Schätzer für  $\theta_2$  bestimmt werden. Hier bietet sich der Maximum-Likelihood-Schätzer an. Nach (3.6) lautet die Likelihood-Gleichung

$$\frac{d}{d\theta_2} \ln(f_{(\theta_1, \theta_2)})(\hat{x}) = M_2(\hat{x})/\theta_2 - \left( \sum_{\substack{n_1+1 \leq i \leq n \\ \hat{x}_i \leq C}} \hat{x}_i + (n_2 - M_2(\hat{x}))C \right) = 0$$

und somit der Maximum-Likelihood-Schätzer:

$$\hat{\theta}_2(\hat{x}) := \frac{M_2(\hat{x})}{\sum_{\substack{n_1+1 \leq i \leq n \\ \hat{x}_i \leq C}} \hat{x}_i + (n_2 - M_2(\hat{x}))C}.$$

In dem Test  $\tilde{\varphi}^*$  ist nun nur noch  $\theta_2$  durch  $\hat{\theta}_2$  zu ersetzen:

**3.14 Satz** (PERMUTATIONSTEST FÜR TYP I-ZENSIERTE DATEN) *Der Test  $\tilde{\varphi}(\hat{x}) := \tilde{\varphi}_{T(\hat{x})}(\hat{x})$  mit*

$$\tilde{\varphi}_t(\hat{x}) := \begin{cases} 1 & > \\ \tilde{\gamma}(t) \text{ falls } \hat{\theta}_2(\hat{x})V(\hat{x}) - M_1(\hat{x}) = \tilde{c}(t) & = \\ 0 & < \end{cases}$$



wobei  $\tilde{\gamma}(t), \tilde{c}(t)$  aus

$$\frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \hat{\theta}_2(\hat{x})V(\pi(\hat{x})) - M_1(\pi(\hat{x})) > \tilde{c}(t) \right\} \right| + \frac{\tilde{\gamma}(t)}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \hat{\theta}_2(\hat{x})V(\pi(\hat{x})) - M_1(\pi(\hat{x})) = \tilde{c}(t) \right\} \right| = \alpha$$

bestimmt werden, scheint für das Testen von  $\left\{ \mathbb{P}_{(\theta_2, \theta_2)}^{\hat{X}} : \theta_2 \in \mathbb{R} \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{(\theta_1, \theta_2)}^{\hat{X}} : \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, 0 < \theta_1 < \theta_2 \right\}$  ein „guter“ Test zu sein und hält das Niveau  $\alpha$  auf ganz  $\mathbf{J}$  genau ein.

Geht man davon aus, dass nicht Exponentialverteilungen sondern eine Proportional Hazard Familie zu einem festen Baseline Hazard  $\lambda_0$  vorliegt, so ist in der Prüfstatistik des obigen Tests  $\hat{x}_i$  durch  $\Lambda_0(\hat{x}_i)$  und  $C$  durch  $\Lambda_0(C)$  zu ersetzen.

### 3.2.4 UNVERFÄLSCHTE TESTS

In diesem abschließenden Abschnitt zu Typ I-zensierten Daten soll noch gezeigt werden, dass alle vorgeschlagenen Tests für die Hypothesen  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  zum Niveau  $\alpha$  unverfälscht sind. Wesentliches Hilfsmittel dabei ist (Witting and Nölle, 1970, Seite 118f., Satz 3.13). Dies wird zunächst noch einmal für diese Belange neu formuliert:

**3.15 Satz** Sei  $\varphi : \left( ([0, C] \cup \{D\})^{(n)}, \mathbb{B}_{[0, C] \cup \{D\}}^n \right) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B})$  ein Test mit der Eigenschaft:

$$\begin{aligned} &\text{für alle } \hat{x}, \hat{x}' \in ([0, C] \cup \{D\})^{(n)} \text{ mit} \\ &\hat{x}'_i = \hat{x}_i + \delta, \delta > 0 \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n_1\}, \hat{x}'_j = \hat{x}_j \text{ für alle } j \neq i \quad (3.9) \\ &\text{gilt } \varphi(\hat{x}) \leq \varphi(\hat{x}') \end{aligned}$$

und  $E_{\vartheta}(\varphi) = \alpha \quad \forall \vartheta \in \mathbf{J}$ . Dann ist  $\varphi$  ein für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test und somit insbesondere ein Test zum Niveau  $\alpha$ .

Da alle oben angegebenen Tests auf dem Rand  $\mathbf{J}$  der Hypothesen  $\alpha$ -ähnlich sind, ist jeweils nur noch die Isotonieforderung (3.9) zu zeigen. Es sei erwähnt, dass alle oben angeführten Tests diese Eigenschaft besitzen und somit unverfälscht sind. Wie diese Forderung nachzuweisen ist, soll beispielhaft an drei Tests vorgeführt werden. Man definiere  $\varphi^1(\hat{x}) := \varphi_{T(\hat{x})}^1(\hat{x})$

und  $\varphi^2(\hat{x}) := \varphi_{T(\hat{x})}^2(\hat{x})$  durch

$$\varphi_t^1(\hat{x}) := \begin{cases} 1 & < \\ \gamma_1(t) & \text{falls } M_1(\hat{x}) = c_1(t) \\ 0 & > \end{cases}$$

bzw.

$$\varphi_t^2(\hat{x}) := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma_2(t) & \text{falls } V(\hat{x}) = c_2(t) \\ 0 & < \end{cases},$$

wobei  $\gamma_1(t), c_1(t)$  bzw.  $\gamma_2(t), c_2(t)$  aus

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : M_1(\pi(\hat{x})) < c_1(t) \right\} \right| \\ & + \frac{\gamma_1(t)}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : M_1(\pi(\hat{x})) = c_1(t) \right\} \right| = \alpha \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : V(\pi(\hat{x})) > c_2(t) \right\} \right| \\ & + \frac{\gamma_2(t)}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : V(\pi(\hat{x})) = c_2(t) \right\} \right| = \alpha \end{aligned}$$

bestimmt werden. Die  $p$ -Werte der beiden Tests bestimmen sich zu:

$$p_1(\hat{x}) = \frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : M_1(\pi(\hat{x})) \leq M_1(\hat{x}) \right\} \right|$$

$$\text{und } p_2(\hat{x}) = \frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : V(\pi(\hat{x})) \geq V(\hat{x}) \right\} \right|.$$

Seien nun Vektoren  $\hat{x}, \hat{x}'$  wie in (3.9) gegeben.  $M_1$  nimmt beim Übergang von  $\hat{x}$  zu  $\hat{x}'$  am meisten ab. Ebenso nimmt  $V$  beim Übergang von  $\hat{x}$  zu  $\hat{x}'$  um  $\delta$  oder  $C - \hat{x}_i$  zu (jenachdem, ob  $\hat{x}'_i \neq D$  oder  $= D$  gilt). Bei allen anderen Permutationen nimmt  $V$  jedoch um höchstens diesen Betrag zu. Somit gilt:

$$p_1(\hat{x}) \geq p_1(\hat{x}') \quad \text{und} \quad p_2(\hat{x}) \geq p_2(\hat{x}').$$

Aus dieser Beziehung ergibt sich sofort die Isotonieforderung (3.9).

### 3.3 Permutationstests für Typ II-zensierte Daten

---

Der dritte Test ist der lokal gleichmäßig beste Test  $\varphi^*$  mit der Prüfgröße  $U(\cdot, \theta)$ . Hier ist der  $p$ -Wert durch

$$p_{\theta}^*(\hat{x}) = \frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : U(\pi(\hat{x}), \theta) \geq U(\hat{x}, \theta) \right\} \right|$$

gegeben. Seien nun  $\hat{x}, \hat{x}'$  zwei Vektoren wie in (3.9). Dann ergibt sich  $p_{\theta}^*(\hat{x}) \geq p_{\theta}^*(\hat{x}')$  und damit die Isotonieforderung (3.9) aus der Tatsache, dass für jedes  $\pi \in \mathcal{S}_n$  aus  $U(\hat{x}, \theta) \geq U(\pi(\hat{x}), \theta)$  bereits  $U(\hat{x}', \theta) \geq U(\pi(\hat{x}'), \theta)$  folgt. Dies wiederum erhält man aus

$$\begin{aligned} U(\hat{x}, \theta) \geq U(\pi(\hat{x}), \theta) &\iff \\ \exp[(\theta_2 - \theta_1)(V(\hat{x}) - V(\pi(\hat{x}))) &\geq \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{M_1(\pi(\hat{x})) - M_1(\hat{x})} \end{aligned}$$

und der Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \exp[(\theta_2 - \theta_1)(V(\hat{x}') - V(\pi(\hat{x}')))] & \\ \geq \exp[(\theta_2 - \theta_1)(V(\hat{x}) - V(\pi(\hat{x}))) & \\ \geq \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{M_1(\pi(\hat{x})) - M_1(\hat{x})} &\geq \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{M_1(\pi(\hat{x}')) - M_1(\hat{x}')} \end{aligned}$$

## 3.3 PERMUTATIONSTESTS FÜR TYP II-ZENSIERTE DATEN

### 3.3.1 MODELLBILDUNG

Wie in den vorherigen Abschnitten liege wieder ein Zweistichprobenproblem bestehend aus  $n$  stu. Zufallsgrößen  $X_1, \dots, X_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathbb{B}_+)$  vor, wobei die erste Stichprobe aus den ersten  $n_1$  und die zweite aus den letzten  $n_2 := n - n_1$  Zufallsgrößen bestehe. Bei dieser Art der Zensierung gibt man sich, wie bereits auf Seite 2 beschrieben, eine Anzahl  $h (< n)$  von Daten vor, die man beobachten möchte. Versucht man die induzierten Zufallsgrößen analog zu Typ I-zensierten Daten mit Hilfe von Markern zu beschreiben, so stößt man auf größere Probleme, da die induzierten Zufallsgrößen  $\hat{X}$  i.a. nicht mehr stochastisch unabhängig sind. Dieses Problem kann man umgehen, in

dem man anstatt mit Markern mit der *Ordnungsstatistik*  $V = (V_1, \dots, V_n)$  und der *Antirangstatistik*  $A = (A_1, \dots, A_n) : (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n) \rightarrow (\mathcal{S}_n, \text{Pow}(\mathcal{S}_n))$  arbeitet,<sup>3</sup> wobei  $A_i$  durch

$$A_i(x) := \sum_{j=1}^n j \mathbf{1}_{\{0\}}(x_j - V_i(x))$$

definiert ist.  $A \circ X$  gibt somit die Indizes der Zufallsgrößen in der Reihenfolge an, in der sie beobachtet wurden. Durch die Zensierung kann man aber nicht alle, sondern jeweils nur die ersten  $h$  Komponenten der Ordnungs- und der Antirangstatistik beobachten.

Da bei dieser Art der Zensierung verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen auch durch die induzierten Zufallsgrößen unterschieden werden können, ergeben sich mit den Abkürzungen

$$V^h := (V_1 \circ X, \dots, V_h \circ X),$$

$$A^h := (A_1 \circ X, \dots, A_h \circ X)$$

die Hypothesen ähnlich wie im unzensierten Fall zu:

$$\mathfrak{H} := \left\{ \left( \mathbb{P}_{F_1}^{(n_1)} \otimes \mathbb{P}_{F_2}^{(n_2)} \right)^{(V^h, A^h)} : F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_0^c \text{ mit } F_1 \succeq_{\text{st}} F_2 \right\},$$

$$\mathfrak{K} := \left\{ \left( \mathbb{P}_{F_1}^{(n_1)} \otimes \mathbb{P}_{F_2}^{(n_2)} \right)^{(V^h, A^h)} : F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_0^c \text{ mit } F_1 \prec_{\text{st}} F_2 \right\}$$

oder prägnanter als

$$\mathbf{H} := \{(F_1, F_2) : F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_0^c \text{ mit } F_1 \succeq_{\text{st}} F_2\},$$

$$\mathbf{K} := \{(F_1, F_2) : F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_0^c \text{ mit } F_1 \prec_{\text{st}} F_2\},$$

falls  $\mathfrak{F}_0^c$  die Menge der stetigen Verteilungsfunktionen zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf  $([0, \infty), \mathbb{B}_{|[0, \infty)})$  bezeichnet.

---

<sup>3</sup>Genauer sollte die Ordnungs- und die Antirangstatistik eigentlich nur auf  $(\mathbb{R}_{\neq}^n, \mathbb{B}_{\neq}^n)$  definiert werden, um Bindungen aus dem Wege zu gehen. Da später nur stetige Verteilungen betrachtet werden, stellt dies allerdings keine Einschränkung dar.

3.3.2 UMFORMULIERUNG DES TESTPROBLEMS

Wie bei Typ I- oder unzensierten Daten existiert auch bei der obigen Verteilungsannahme kein gleichmäßig bester Test zum Niveau  $\alpha$  oder zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test (die Aussage wird später auch bewiesen). Es scheint daher wieder sinnvoll, nach einem Test zu suchen, der für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  unverfälscht ist und die Güte auf einer Teilklasse  $\mathbf{K}_1$  von  $\mathbf{K}$  gleichmäßig maximiert. Dabei sollte als  $\mathbf{K}_1$  den Modellvorstellungen entsprechend eine Klasse von Lebensdauerverteilungen gewählt werden. Gesucht ist also wieder eine Lösung von (3.1). Da erneut die Gütefunktion eines jeden Tests stetig<sup>4</sup> ist (man fasse  $\varphi$  einfach als eine Abbildung  $\varphi \circ (V^h, A^h) : (\mathbb{R}_+^n, \mathbb{B}_+^n) \rightarrow ([0, 1], \mathbb{B}_{[0,1]})$  auf und wende (Witting and Nölle, 1970, Seite 117, Satz 3.12) an), versucht man das Testproblem (wie bereits auf Seite 54 geschehen) umzuformulieren. Dazu muss als erstes der Rand<sup>4</sup>  $\mathbf{J} := \overline{\mathbf{H}} \cap \overline{\mathbf{K}}$  der Hypothesen bestimmt werden. Hier gilt:

**3.16 Lemma** *Für den Rand  $\mathbf{J} = \overline{\mathbf{H}} \cap \overline{\mathbf{K}}$  der beiden Hypothesen gilt:*

$$\mathfrak{P}_{\mathbf{J}} = \left\{ \left( \mathbb{P}_{F_1}^{(n)} \right)^{(V^h, A^h)} : F \in \mathfrak{F}_0^c \right\} \text{ oder kurz}$$

$$\mathbf{J} = \{(F_1, F_2) : F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_0^c \text{ mit } F_1 = F_2\}.$$

BEWEIS: Dies beweist man wie in (Witting and Nölle, 1970, Seite 118, Beispiel 3.11).  $\square$

Als nächstes muss versucht werden, eine für  $\mathfrak{P}_{\mathbf{J}}$  suffiziente und vollständige Statistik zu finden. Ähnlich wie im unzensierten Fall kann der *beobachtbare Teil der Ordnungsstatistik* als eine solche Statistik gewählt werden. Mit der Definition

$$\mathcal{S}_{n|h} := \{(a_1, \dots, a_h) : a_1, \dots, a_h \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } a_i \neq a_j \quad \forall i \neq j\}$$

gilt nämlich:

**3.17 Lemma** *Die Statistik*

$$T : (\mathbb{R}_{<}^n \times \mathcal{S}_{n|h}, \mathbb{B}_{<}^n \otimes \text{Pow}(\mathcal{S}_{n|h})) \longrightarrow (\mathbb{R}_{<}^n, \mathbb{B}_{<}^n),$$

$$(v, a) = (v_1, \dots, v_h, a_1, \dots, a_h) \mapsto (v_1, \dots, v_h) = v = t$$

---

<sup>4</sup>bzgl. der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz

ist *suffizient und vollständig* für  $\mathfrak{P}_{\mathbf{J}}$ .

BEWEIS: (i) *Suffizienz*

Man betrachte die Gruppe  $\mathcal{Q}$  mit

$$\mathcal{Q} := \{q_{\pi} : q_{\pi}(v, a) := (v, \pi(a_1), \dots, \pi(a_h)), \pi \in \mathcal{S}_n\}.$$

Die oben definierte Statistik  $T$  ist eine Maximalinvariante bzgl.  $\mathcal{Q}$ . Die Invarianzbehauptung ist klar. Seien also  $(v, a), (v', a') \in \mathbb{R}_{<}^h \times \mathcal{S}_{n|h}$  mit  $T(v, a) = T(v', a')$  gegeben. Nach Definition von  $T$  folgt dann  $v = v'$ . Die Existenz einer Permutation  $\pi \in \mathcal{S}_n$  mit  $\pi(a_i) = a'_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) ist offensichtlich. Also gilt  $q_{\pi}(v, a) = (v', a')$ . Weiter ist jedes Maß aus  $\mathfrak{P}_{\mathbf{J}}$  invariant gegenüber  $\mathcal{Q}$ , da

$$q_{\pi}(V^h, A^h) = (V^h(\pi(X_1, \dots, X_n)), A^h(\pi(X_1, \dots, X_n)))$$

gilt und Produktmaße invariant gegenüber Permutationen der Koordinaten sind. Weiter haben die  $\mathcal{Q}$ -invarianten Mengen die Gestalt

$$B \times \mathcal{S}_{n|h}, \quad B \in \mathbb{B}_{<}^h,$$

so dass  $T$  die  $\sigma$ -Algebra der  $\mathcal{Q}$ -invarianten Mengen induziert. Nach (Witting and Nölle, 1970, Seite 108, Hilfssatz 3.8) ist  $T$  damit *suffizient* für  $\mathfrak{P}_{\mathbf{J}}$ .

(ii) *Vollständigkeit*

Sei  $f : (\mathbb{R}_{<}^h, \mathbb{B}_{<}^h) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B})$  mit  $E_{\vartheta}(f \circ T) = 0 \quad \forall \vartheta \in \mathbf{J}$  gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= E_{\vartheta}(f \circ T) = \int f \circ T \, d\mathbb{P}_{\vartheta}^{(V^h, A^h)} \\ &= \int f \circ T \circ (V^h, A^h) \, d\mathbb{P}_{\vartheta} \\ &= \int f \circ V^h \, d\mathbb{P}_{\vartheta} \\ &= \int f \circ \text{pr}_{1,h} \circ V \, d\mathbb{P}_{\vartheta}^{(X_1, \dots, X_n)} \quad \forall \vartheta \in \mathbf{J}. \end{aligned}$$

Da aber  $V$  für  $\left\{P_F^{(n)} : F \in \mathfrak{F}_0^c\right\}$  vollständig ist, folgt  $f \circ \text{pr}_{1,h} = 0$   $\left\{P_F^{(n)} : F \in \mathfrak{F}_0^c\right\}^V$ -f.s., d.h.  $f = 0$   $\mathfrak{P}_{\mathbf{J}}^T$ -f.s. □

Somit ist eine Umformulierung des Testproblems möglich, d.h. jede unverfälschte Lösung von (3.3) ist auch eine Lösung von (3.1) (genau genommen muss in (3.3) natürlich noch  $X$  durch  $(V^h, A^h)$  ersetzt werden).

3.3.3 DIE SUCHE NACH OPTIMALEN TESTS

GLEICHMÄSSIG BESTE TESTS

Nach den Bemerkungen im vorherigen Unterabschnitt sollte man nach einer Lösung  $\varphi^*$  von (3.3) (mit  $(V^h, A^h)$  anstelle von  $X$ ) suchen. Dazu muss zunächst die bedingte Verteilung  $\mathbb{P}_\vartheta^{(V^h, A^h)|T^\circ(V^h, A^h)=t}$  für  $\vartheta \in \mathbf{H} + \mathbf{K}$  bestimmt werden. Hierfür müssen noch einige Bezeichnungen eingeführt werden: Für  $\vartheta \in \mathbf{H} + \mathbf{K}$  sei  $f_\vartheta$  eine  $\mu^{(n)}$ -Dichte von  $\mathbb{P}_\vartheta^X$ ,  $\mu$  sei ein beliebiges  $\sigma$ -endliches Maß mit  $\mathbb{P}_\vartheta^{X_1}, \mathbb{P}_\vartheta^{X_n} \ll \mu$ . Weiter sei

$$g_\vartheta(t, \pi) := \int_{\{t_h < x_{h+1} < \dots < x_n\}} f_\vartheta(\pi^{-1}(t, x)) d\mu^{(n-h)}(x).$$

Die bedingte Verteilung erhält man als  $\mathbb{B}_<^h$ -meßbare Lösung von:

$$\int_C \mathbb{P}_\vartheta^{(V^h, A^h)|T^\circ(V^h, A^h)=t}(B) d\mathbb{P}_\vartheta^{T^\circ(V^h, A^h)} = \mathbb{P}_\vartheta^{(V^h, A^h)}(B \cap T^{-1}(C)) \quad \forall C \in \mathbb{B}_<^h \quad \forall B \in \mathbb{B}_+^n \otimes \text{Pow}(\mathcal{S}_{n|h}). \quad (3.10)$$

Mit Hilfe der Transformationsformel und der Tatsache, dass Produktmaße invariant gegenüber Permutationen der Koordinaten sind, kann man die rechte Seite von (3.10) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_\vartheta^{(V^h, A^h)}(B \cap T^{-1}(C)) \\ &= \int_{T^{-1}(C)} \mathbf{1}_B d\mathbb{P}_\vartheta^{(V^h, A^h)} = \int_{V^{h-1}(C)} \mathbf{1}_B(V^h, A^h) d\mathbb{P}_\vartheta^X \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \int_{\pi((C \times [0, \infty)^{n-h}) \cap \mathbb{R}_<^h)} \mathbf{1}_B(V^h, A^h) f_\vartheta d\mu^{(n)} \\ &= \int_C \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \mathbf{1}_{\text{pr}_{1,h}(B)}(t) \mathbf{1}_{\text{pr}_{h+1,n}(B)}((\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(h))) g_\vartheta(t, \pi) d\mu^{(h)}(t). \end{aligned}$$

Setzt man nun für  $B \in \mathbb{B}_+^h \times \mathcal{S}_{n|h}$  ein, so erhält man

$$f_\vartheta^T(t) := \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} g_\vartheta(t, \pi)$$

als mögliche Wahl einer  $\mu^{(h)}$ -Dichte von  $\mathbb{P}_\vartheta^{T^\circ(V^h, A^h)}$ . Dies kann man nun in die linke Seite von (3.10) einsetzen:

$$\int_C \mathbb{P}_\vartheta^{(V^h, A^h)|T^\circ(V^h, A^h)=t}(B) d\mathbb{P}_\vartheta^{T^\circ(V^h, A^h)} = \int_C \mathbb{P}_\vartheta^{(V^h, A^h)|T^\circ(V^h, A^h)=t}(B) f_\vartheta^T d\mu^{(h)}.$$

Zusammengefasst kann man (3.10) damit auch als

$$\begin{aligned} \int_C \mathbb{P}_\vartheta^{(V^h, A^h) | T \circ (V^h, A^h) = t}(B) f_\vartheta^T d\mu^{(h)} \\ = \int_C \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \mathbf{1}_B(t, (\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(h))) g_\vartheta(t, \pi) d\mu^{(h)}(t) \end{aligned} \quad \forall C \in \mathbb{B}_<^h$$

schreiben. Für  $f_\vartheta^T(t) > 0$  erhält man daher die Beziehung:

$$\mathbb{P}_\vartheta^{(V^h, A^h) | T \circ (V^h, A^h) = t}(B) = \frac{\sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \mathbf{1}_B(t, (\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(h))) g_\vartheta(t, \pi)}{f_\vartheta^T(t)}.$$

Da die Meßbarkeitsbeziehung hier offensichtlich erfüllt ist und die Menge  $\{t : f_\vartheta^T(t) = 0\}$  eine  $\mathbb{P}_\vartheta^{T \circ (V^h, A^h)}$  Nullmenge ist, erhält man aus den obigen Rechnungen folgendes Lemma:

**3.18 Lemma** Für alle  $\vartheta \in \mathbf{H} + \mathbf{K}$  und  $(t, a) \in \mathbb{R}_<^h \times \mathcal{S}_{n|h}$  gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\vartheta^{(V^h, A^h) | T \circ (V^h, A^h) = t}(\{(t, a)\}) &= \frac{\sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_n \\ (\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(h)) = a}} g_\vartheta(t, \pi)}{\sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} g_\vartheta(t, \pi)} \\ &= \frac{\sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_n \\ (\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(h)) = a}} g_\vartheta(t, \pi)}{f_\vartheta^T(t)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Für  $\vartheta \in \mathbf{J}$  erhält man insbesondere:

$$\mathbb{P}_\vartheta^{(V^h, A^h) | T \circ (V^h, A^h) = t}(\{(t, a)\}) = \frac{(n-h)!}{n!}. \quad (3.12)$$

$\mathbb{P}_\vartheta^{(V^h, A^h) | T \circ (V^h, A^h) = t}$  bildet somit für alle  $\vartheta \in \mathbf{H} + \mathbf{K}$  eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den endlich vielen Punkten  $\{(v, a) : T(v, a) = t\} = \{(t, a) : a \in \mathcal{S}_{n|h}\}$ , wobei die Verteilung auf dem Rand eine Laplace-Verteilung auf eben diesen Punkten ist.

Wählt man wieder  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{\lambda_0}$ , so ist  $\mu$  mit  $\frac{d\mu}{d\lambda_{|[0, \infty)}} = \lambda_0(t)$  ein  $\mathbb{P}_\eta^{X_1}, \mathbb{P}_\eta^{X_n}$  dominierendes,  $\sigma$ -endliches Maß. Als  $\mu^{(n)}$ -Dichte  $f_\eta$  kann hier

$$f_\eta(x) := \eta_1^{n_1} \eta_2^{n_2} \exp\left(-\eta_1 \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(x_i) - \eta_2 \sum_{i=n_1+1}^n \Lambda_0(x_i)\right)$$



### 3.3 Permutationstests für Typ II-zensierte Daten

---

gewählt werden. Damit berechnet sich  $g_{\vartheta}$  mit Hilfe von Korollar 1.7 und einer einfachen, aber langen Rechnung zu:

$$\begin{aligned}
& g_{\vartheta}(t, \pi) \\
& := \eta_1^{n_1} \eta_2^{n_2} \exp\left(-\eta_1 \sum_{\substack{1 \leq i \leq h \\ \pi^{-1}(i) \leq n_1}} \Lambda_0(t_i) - \eta_2 \sum_{\substack{1 \leq i \leq h \\ \pi^{-1}(i) \geq n_1+1}} \Lambda_0(t_i)\right) \\
& \quad \times \int_{\{t_h < x_{h+1} < \dots < x_n\}} \prod_{h+1 \leq i \leq n} \lambda_0(x_i) \\
& \quad \times \exp\left(-\eta_1 \sum_{\substack{h+1 \leq i \leq n \\ \pi^{-1}(i) \leq n_1}} \Lambda_0(x_i) - \eta_2 \sum_{\substack{h+1 \leq i \leq n \\ \pi^{-1}(i) \geq n_1+1}} \Lambda_0(x_i)\right) d\mathcal{X}^{(n-h)}(x_{h+1}, \dots, x_n) \\
& = \eta_1^{n_1} \eta_2^{n_2} \exp\left(-\eta_1 \sum_{\substack{1 \leq i \leq h \\ \pi^{-1}(i) \leq n_1}} \Lambda_0(t_i) - \eta_2 \sum_{\substack{1 \leq i \leq h \\ \pi^{-1}(i) \geq n_1+1}} \Lambda_0(t_i)\right) \\
& \quad \times \int_{\{\Lambda_0(t_h) < x_{h+1} < \dots < x_n\}} \exp\left(-\eta_1 \sum_{\substack{h+1 \leq i \leq n \\ \pi^{-1}(i) \leq n_1}} x_i - \eta_2 \sum_{\substack{h+1 \leq i \leq n \\ \pi^{-1}(i) \geq n_1+1}} x_i\right) d\mathcal{X}^{(n-h)}(x) \\
& = \eta_1^{n_1} \eta_2^{n_2} \prod_{i=h+1}^n \frac{1}{\eta_1 \sum_{j=i}^n \mathbf{1}_{\{1, \dots, n_1\}}(\pi^{-1}(j)) + \eta_2 \sum_{j=i}^n \mathbf{1}_{\{n_1+1, \dots, n\}}(\pi^{-1}(j))} \\
& \quad \times \exp\left[-\eta_1 \left( \sum_{\substack{1 \leq i \leq h \\ \pi^{-1}(i) \leq n_1}} \Lambda_0(t_i) + (n_1 - M_1(\pi)) \Lambda_0(t_h) \right) \right. \\
& \quad \left. - \eta_2 \left( \sum_{\substack{1 \leq i \leq h \\ \pi^{-1}(i) \geq n_1+1}} \Lambda_0(t_i) + (n_2 - M_2(\pi)) \Lambda_0(t_h) \right) \right],
\end{aligned}$$

falls

$$M_1(\pi) := |\{1 \leq i \leq h : \pi^{-1}(i) \leq n_1\}|,$$

$$M_2(\pi) := |\{1 \leq i \leq h : \pi^{-1}(i) \geq n_1 + 1\}|$$

wieder die Anzahl der beobachteten Zufallsgrößen aus der ersten bzw. zweiten Stichprobe bezeichnet. Dabei gilt natürlich  $M_1(\pi) + M_2(\pi) = h$ . Somit

berechnet sich die bedingte Verteilung in diesem Spezialfall zu:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_\eta^{(V^h, A^h) | T \circ (V^h, A^h) = t}(\{(t, a)\}) \\ &= \eta_1^{n_1} \eta_2^{n_2} \exp \left[ -\eta_1 \left( \sum_{\substack{1 \leq i \leq h \\ a_i \leq n_1}} \Lambda_0(t_i) + (n_1 - M_1(a)) \Lambda_0(t_h) \right) \right. \\ & \quad \left. - \eta_2 \left( \sum_{\substack{1 \leq i \leq h \\ a_i \geq n_1+1}} \Lambda_0(t_i) + (n_2 - M_2(a)) \Lambda_0(t_h) \right) \right] \frac{D(a, \eta)}{\sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} g_\eta(t, \pi)}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

falls  $M_i(a) = M_i(\pi)$  für ein  $\pi \in \mathcal{S}_n$  mit  $(\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(h)) = a$  bezeichnet ( $i = 1, 2$ ) und

$$D(a, \eta) := \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_n \\ (\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(h)) = a}} \frac{1}{\eta_1 \sum_{j=i}^n \mathbf{1}_{\{1, \dots, n_1\}}(\pi^{-1}(j)) + \eta_2 \sum_{j=i}^n \mathbf{1}_{\{n_1+1, \dots, n\}}(\pi^{-1}(j))}$$

gilt. Wegen  $\mathbf{1}_{\{n_1+1, \dots, n\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{1, \dots, n_1\}}$  hängt  $D$  offenbar nur über  $M_1$  von den Daten ab. Der bei der Bestimmung eines gegen  $\mathbf{K}_{\lambda_0}$  besten Tests entscheidende Ausdruck ist daher:

$$U(t, a, \eta) := \exp \left( (\eta_2 - \eta_1) \left( \sum_{\substack{1 \leq i \leq h \\ a_i \leq n_1}} \Lambda_0(t_i) + (n_1 - M_1(a)) \Lambda_0(t_h) \right) \right) D(a, \eta).$$

Auch hier faktorisiert der Zähler der Zähldichte erneut in einen Anteil, der nur über  $M_1$  und einen Anteil, der nur über

$$W(t, a) := \sum_{\substack{1 \leq i \leq h \\ a_i \leq n_1}} \Lambda_0(t_i) + (n_1 - M_1(a)) \Lambda_0(t_h)$$

von den Daten abhängt. Deshalb kann man Beispiele angeben, in denen bei verschiedenen Parameterwerten, aber identischen Beobachtungen, die optimalen Test verschieden sind:

**3.19 Beispiel** Sei in diesem Beispiel die Stichprobengröße jeweils 2 ( $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 2$ ) und die Beobachtungsanzahl  $h$  gleich 3. Außerdem sei  $\lambda_0 \equiv 1$ , und als Niveau wähle man  $\alpha = 0.5$ . Für die Beobachtungsdaten  $t = (t_1, t_2, t_3) \in (0.75, 1.25) \times (2.75, 3.25) \times (9.75, 10.25)$  erhält man dann bei den Parameterwerten  $\eta_1 = 10^{-6}$ ,  $\eta_2 = 10^{-5}$  die folgenden Werte der Statistiken  $M_1$ ,  $W$  und  $U$  für die wesentlich verschiedenen Antirangtupel:

### 3.3 Permutationstests für Typ II-zensierte Daten

Antirangtupel $a$	$M_1(a)$	$W(t, a) \in$	$U(t, a, \eta) \in$
(3, 4, 1)	1	(19.5, 20.5)	(1000175.515, 1000184.517)
(3, 1, 4)	1	(12.5, 13.5)	(1000112.506, 1000121.507)
(1, 3, 4)	1	(10.5, 11.5)	(1000094.504, 1000103.505)
(3, 1, 2)	2	(12.5, 13.5)	(100011.251, 100012.151)
(1, 3, 2)	2	(10.5, 11.5)	(100009.451, 100010.351)
(1, 2, 3)	2	(3.5, 4.5)	(100003.15, 100004.050)

TABELLE 3.3: Werte der einzelnen Permutationen.

Nach dem einfachen Neyman-Pearson Lemma und (3.11) sowie (3.12) muss eine Lösung von (3.3) mit  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{Exp}$  (falls sie existiert) sich in diesem Fall bei den drei wesentlichen Antirangtupeln  $a$  mit den größten Werten von  $U(t, a, \eta)$  für  $\mathbf{K}$ , und sonst für  $\mathbf{H}$  entscheiden. Der kritische Bereich des optimalen Tests lautet also:

$$K_1 := \{(3, 4, 1), (3, 1, 4), (1, 3, 4)\}.$$

Damit entscheidet sich der optimale Test genau dann für  $\mathbf{K}$ , wenn  $M_1$  klein ist. ◇

**3.20 Beispiel** Ändert man in Beispiel 3.19 die Parameterwerte zu  $\eta_1 = 3$ ,  $\eta_2 = 5$ , so erhält man analog:

Antirangtupel $a$	$M_1(a)$	$W(t, a) \in$	$U(t, a, \eta) \in$
(3, 4, 1)	1	(19.5, 20.5)	$(2.886 \cdot 10^{16}, 2.133 \cdot 10^{17})$
(3, 1, 4)	1	(12.5, 13.5)	$(2.400 \cdot 10^{10}, 1.773 \cdot 10^{11})$
(1, 3, 4)	1	(10.5, 11.5)	(439605244.8, 3248267815)
(3, 1, 2)	2	(12.5, 13.5)	$(1.440 \cdot 10^{10}, 1.064 \cdot 10^{11})$
(1, 3, 2)	2	(10.5, 11.5)	(263763146, 1948960689)
(1, 2, 3)	2	(3.5, 4.5)	(219.3, 1620.6)

TABELLE 3.4: Werte der einzelnen Permutationen.

Ebenfalls nach dem einfachen Neyman-Pearson Lemma und (3.11) sowie (3.12) ergibt sich der kritische Bereich einer Lösung von (3.3) mit  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{Exp}$  (falls sie existiert) zu:

$$K_2 := \{(3, 4, 1), (3, 1, 4), (3, 1, 2)\}.$$

Damit entscheidet sich der optimale Test genau dann für  $\mathbf{K}$ , wenn  $W$  groß ist.  $\diamond$

Da die beiden kritischen Bereiche  $K_1$  und  $K_2$  nicht übereinstimmen, kann es eine Lösung von (3.3) mit  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{Exp}$  nicht geben. Daher gilt auch hier:

**3.21 Satz** *Zu vorgegebenen Stichprobenumfängen  $n_1, n_2$ , Niveau  $\alpha$  und Beobachtungsanzahl  $h$  existiert i.a. kein gegen  $\mathbf{K}_{Exp}$  gleichmäßig bester auf  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlicher Test, d.h. eine Lösung von (3.3) mit  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{Exp}$ .*

Diese Aussage kann noch in den folgenden Richtungen erweitert werden:

- (a) Nach den vorherigen Überlegungen kann es i.a. auch keinen gegen  $\mathbf{K}_{\lambda_0}$  gleichmäßig besten auf  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlichen Test geben. Von besonderem Interesse ist dabei natürlich wieder der Fall  $\mathbf{K}_{\lambda_0} = \mathbf{K}_{\mathcal{W}_k}$ .
- (b) Aus der Gestalt der Dichte kann man schließen, dass analoge Aussagen schon gelten, wenn man anstatt  $\mathbf{K}_{\lambda_0}$  zwei unterschiedliche Punkte aus  $\mathbf{K}_{\lambda_0}$  als  $\mathbf{K}_1$  wählt.
- (c) Wählt man als  $\mathbf{K}_1$  jedoch nur einen Punkt  $\eta$  aus  $\mathbf{K}_{\lambda_0}$ , so existiert eine Lösung von (3.3) und (3.1). Der optimale Test hat dabei die Prüfgröße  $U(t, a, \eta)$ .

#### LOKAL BESTE TESTS

Da man wieder *keine gleichmäßig* besten Tests findet, kann man nun erneut versuchen, *lokal* beste Tests zu finden.

Als erstes versucht man wieder, den nach dem einfachen Neyman-Pearson Lemma sowie (3.11) und (3.12) besten Test zum Niveau  $\alpha$  für  $\left\{ \mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{(V^h, A^h)} |_{T \circ (V^h, A^h) = t} \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{\eta}^{(V^h, A^h)} |_{T \circ (V^h, A^h) = t} \right\}$ ,  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ ,  $\eta_1 < \eta_2$ ,

$$\varphi_{t,\eta}^*(t, a) := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^*(t, \eta) & \text{falls } U(t, a, \eta) = c^*(t, \eta) \\ 0 & < \end{cases} ,$$

wobei  $\gamma^*(t, \eta), c^*(t, \eta)$  aus

$$\frac{1}{n!} \left| \left\{ a' \in \mathcal{S}_{n|h} : U(t, a', \eta) > c^*(t, \eta) \right\} \right| + \frac{\gamma^*(t, \eta)}{n!} \left| \left\{ a' \in \mathcal{S}_{n|h} : U(t, a', \eta) = c^*(t, \eta) \right\} \right| = \alpha$$

bestimmt werden, bei festem  $\eta_2$  unabhängig von  $\eta_1$  zu machen. Dies gelingt auch hier, da

$$\begin{aligned} \eta_1 \mapsto p_{(\eta_1, \eta_2)}(t, a) &:= \mathbb{P}_{\eta}^{(V^h, A^h) | T \circ (V^h, A^h) = t}(\{(t, a)\}) \\ &= \frac{\sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_n \\ (\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(h)) = a}} g_{\eta}(t, \pi)}{\sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} g_{\eta}(t, \pi)} \end{aligned}$$

bei festem  $\eta_2, \lambda_0, t$  und  $a$  nach (3.13) in eine Potenzreihe um  $\eta_2$  ( $\eta_1 = \eta_2$  entspricht  $\vartheta = (\eta_2, \eta_2) \in \mathbf{J}$ ) entwickelbar ist. Nach (Witting, 1985, Seite 225, Satz 2.46) gilt nun:

**3.22 Satz** Für jedes  $t \in T(\mathbb{R}_{<}^h \times \mathcal{S}_{n|h})$  existiert ein  $0 < \eta'_1(t) < \eta_2$  d.d.  $\varphi_{t, \eta}^*$  für  $\eta'_1(t) < \eta_1 < \eta_2$  unabhängig von  $\eta_1$  ist. Somit ist  $\varphi_t^* := \varphi_{t, ((\eta'_1(t) + \eta_2)/2, \eta_2)}$  ein gleichmäßig bester  $\alpha$ -ähnlicher Test für  $\left\{ \mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{(V^h, A^h) | T \circ (V^h, A^h) = t} \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{(\eta_1, \eta_2)}^{(V^h, A^h) | T \circ (V^h, A^h) = t} : \eta_1 \in \mathbb{R}, \eta'_1(t) < \eta_1 < \eta_2 \right\}$  ( $\eta_2 > 0, \lambda_0 \in \mathfrak{L}$  fest). Also ist  $\varphi_t^*$  ein lokal gleichmäßig bester  $\alpha$ -ähnlicher Test für  $\left\{ \mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{(V^h, A^h) | T \circ (V^h, A^h) = t} \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{(\eta_1, \eta_2)}^{(V^h, A^h) | T \circ (V^h, A^h) = t} : \eta_1 \in \mathbb{R}, 0 < \eta_1 < \eta_2 \right\}$  ( $\eta_2 > 0, \lambda_0 \in \mathfrak{L}$  fest).

Das Problem bei dieser Art der Optimalität besteht erneut darin, dass  $\eta'_1(t)$  noch entscheidend von  $t$  abhängt und somit  $\sup \{ \eta'_1(t) : t \in T(\mathbb{R}_{<}^h) \} = \eta_2$  gilt, so dass man beim unbedingten Testproblem keine Optimalität mehr erhält (siehe Anmerkung (b) auf Seite 82).

Da auch hier die einparametrische Verteilungsklasse

$$\left\{ \mathbb{P}_{(\eta_1, \eta_2)}^{(V^h, A^h) | T \circ (V^h, A^h) = t} : \eta_1 > 0 \right\}$$

( $\eta_2 > 0, \lambda_0 \in \mathfrak{L}$  fest)  $\mathbb{L}_1(\eta_2)$ -differenzierbar ist (siehe (Witting, 1985, Seite 170, Satz 1.183)), kann man wieder nach einem lokal besten Test suchen. Da erneut alle in (Witting, 1985, Seite 170, Satz 1.183) und (Witting, 1985,

Seite 223, Satz 2.44) an  $\eta_1 \mapsto p_{(\eta_1, \eta_2)}(t, a)$  gestellten Forderungen erfüllt sind, existiert auch in diesem Fall solch ein Test. Als Prüfgröße erhält man dabei erneut die  $\mathbb{L}_1(\eta_2)$ -Ableitung. Um diese zu berechnen, soll nun als erstes die Ableitung von  $g_\eta$  bestimmt werden:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{dg_{(\eta_1, \eta_2)}}{d\eta_1}(t, \pi) \right|_{\eta_1 = \eta_2} \\ &= \eta_2^n \exp\left(-\eta_2 \left(\sum_{i=1}^h \Lambda_0(t_i) + (n-h)\Lambda_0(t_h)\right)\right) \prod_{i=h+1}^n \frac{1}{(n-i+1)\eta_2} \\ & \quad \times \left[ -\left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq h \\ \pi^{-1}(i) \leq n_1}} \Lambda_0(t_i) + (n_1 - M_1(\pi))\Lambda_0(t_h)\right) + \frac{n_1}{\eta_2} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=h+1}^n \frac{\sum_{j=k}^n \mathbf{1}_{\{1, \dots, n_1\}}(\pi^{-1}(j))}{(n-k+1)\eta_2} \right]. \end{aligned}$$

Damit berechnet sich die  $\mathbb{L}_1(\eta_2)$ -Ableitung zu:

$$\begin{aligned} \dot{L}_{\eta_2, t}(a) &= \frac{\left. \frac{d}{d\eta_1} p_{(\eta_1, \eta_2)}(t, a) \right|_{\eta_1 = \eta_2}}{p_{(\eta_2, \eta_2)}(t, a)} \\ &= \frac{n!}{(n-h)!} \frac{d}{d\eta_1} \frac{\sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_n \\ (\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(h))=a}} g_{(\eta_1, \eta_2)}(t, \pi)}{\sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} g_{(\eta_1, \eta_2)}(t, \pi)} \Big|_{\eta_1 = \eta_2} \\ &= \frac{n!}{(n-h)!} \left[ \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_n \\ (\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(h))=a}} \left. \frac{dg_{(\eta_1, \eta_2)}}{d\eta_1}(t, \pi) \right|_{\eta_1 = \eta_2} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} g_{(\eta_2, \eta_2)}(t, \pi) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_n \\ (\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(h))=a}} g_{(\eta_2, \eta_2)}(t, \pi) \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \left. \frac{dg_{(\eta_1, \eta_2)}}{d\eta_1}(t, \pi) \right|_{\eta_1 = \eta_2} \right] \\ & \quad \times \frac{1}{\left(\sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} g_{(\eta_2, \eta_2)}(t, \pi)\right)^2} \\ &= \frac{1}{(n-h)!} \left\{ n! \left[ -\left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq h \\ a_i \leq n_1}} \Lambda_0(t_i) + (n - M_1(a))\Lambda_0(t_h)\right) + \frac{n_1}{\eta_2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_n \\ (\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(h))=a}} \sum_{k=h+1}^n \frac{\sum_{j=k}^n \mathbf{1}_{\{1, \dots, n_1\}}(\pi^{-1}(j))}{(n-k+1)\eta_2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$- \frac{n!}{(n-h)!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \left( - \sum_{\substack{1 \leq i \leq h \\ \pi^{-1}(i) \leq n_1}} \Lambda_0(t_i) + (n - M_1(\pi)) \Lambda_0(t_h) + \frac{n_1}{\eta_2} - \sum_{k=h+1}^n \frac{\sum_{j=k}^n \mathbf{1}_{\{1, \dots, n_1\}}(\pi^{-1}(j))}{(n-k+1)\eta_2} \right) \Bigg\}.$$

Der in eckigen Klammern stehende Ausdruck ist der entscheidende. Daher definiert man:

$$K(a) := \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_n \\ (\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(h))=a}} \sum_{k=h+1}^n \frac{\sum_{j=k}^n \mathbf{1}_{\{1, \dots, n_1\}}(\pi^{-1}(j))}{(n-k+1)}.$$

Zusammengefasst gilt damit:

**3.23 Satz** Für jedes  $t \in T(\mathbb{R}_{<}^h \times \mathcal{S}_{n|h})$  ist der Test  $\tilde{\varphi}_t^*$  mit

$$\tilde{\varphi}_t^*((v, a)) := \begin{cases} 1 & > \\ \tilde{\gamma}^*(t) & \text{falls } \eta_2 W(v, a) + K(a) = \tilde{c}^*(t) \\ 0 & < \end{cases},$$

wobei  $\tilde{\gamma}^*(t), \tilde{c}^*(t)$  aus

$$\frac{1}{n!} \left| \left\{ a' \in \mathcal{S}_{n|h} : \eta_2 W(t, a') + K(a') > \tilde{c}^*(t) \right\} \right| + \frac{\tilde{\gamma}^*(t)}{n!} \left| \left\{ a' \in \mathcal{S}_{n|h} : \eta_2 W(t, a') + K(a') = \tilde{c}^*(t) \right\} \right| = \alpha$$

bestimmt werden, ein lokal bester  $\alpha$ -ähnlicher Test für  $\left\{ \mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{(V^h, A^h)} | T \circ (V^h, A^h) = t \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{\eta}^{(V^h, A^h)} | T \circ (V^h, A^h) = t : \eta_1 \in \mathbb{R}, 0 < \eta_1 < \eta_2 \right\}$  ( $\eta_2 > 0, \lambda_0 \in \mathfrak{L}$  fest).

Dass beim Übergang von  $\varphi_t^*$  zu  $\tilde{\varphi}_t^*$  „nicht viel“ Güte verloren geht, zeigt das folgende Lemma, welches eine direkte Folgerung aus (Witting, 1985, Seite 225, Satz 2.46) ist:

**3.24 Lemma** Für jedes  $t \in T(\mathbb{R}^h \times \mathcal{S}_{n|h})$  gilt:

$$\tilde{\varphi}_t^*(v, a) = 1 \implies \varphi_t^*(v, a) = 1 \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi}_t^*(v, a) = 0 \implies \varphi_t^*(v, a) = 0,$$

d.h. der Annahme-/Ablehnungsbereich von  $\tilde{\varphi}_t^*$  ist in dem Annahme-/Ablehnungsbereich von  $\varphi_t^*$  enthalten.  $\tilde{\varphi}_t^*$  unterscheidet sich von  $\varphi_t^*$  also nur durch einen größeren Randomisierungsbereich.

Anmerkungen zu Satz 3.22, Satz 3.23 sowie Lemma 3.24:

- (a) Von besonderem Interesse ist wieder der Fall  $\mathbf{K}_{\mathcal{W}_k}$ . Hier kann man  $\Lambda_0(t) := t^k$  wählen.
- (b) Da  $T$  eine für  $\mathbf{J}$  suffiziente und vollständige Statistik ist, stimmen die beiden Mengen von Tests  $\Phi_\alpha$  und  $\Phi_{NS}$  überein, d.h. ein Test ist genau dann auf dem Rand  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlich, wenn er ein Test mit Neyman-Struktur bzgl.  $T$  ist. Daher ist es an dieser Stelle legitim, mit den bedingten Verteilungen zu argumentieren.
- (c) Da man  $\eta'_1(t)$  i.a. nicht angeben kann, ist der Test  $\varphi_t^*$  oft nicht anwendbar. Daher wird man häufig auf den Test  $\tilde{\varphi}_t^*$  ausweichen.

Will man nun wie im Fall Typ I-zensierter oder (wie später gezeigt wird) zufällig-zensierter Daten zeigen, dass der Test  $\tilde{\varphi}^*(v, a) := \tilde{\varphi}_{T(v,a)}^*(v, a)$  auch das entsprechende unbedingte Testproblem löst, so steht man vor dem Problem die gemeinsame Dichte der ersten  $h$  Komponenten der Ordnungsstatistik im Zweistichprobenproblem berechnen zu müssen. Dies ist zwar prinzipiell möglich, soll hier jedoch aus Platzgründen nicht durchgeführt werden. Es ist aber zu erwarten, dass der Test auch das unbedingte Testproblem löst. Aus dem gleichen Grund kann auch der Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\eta_2$  nicht bestimmt werden. Da man aber, um den Test  $\tilde{\varphi}^*$  von dem genauen Fußpunkt  $(\eta_2, \eta_2)$  aus dem Rand unabhängig zu machen, erneut die *Plug-In Methode* anwenden will, benötigt man eine Schätzung für den Parameter  $\eta_2$ . Nach den Erfahrungen aus den anderen Abschnitten bietet sich

$$\hat{\eta}_2(v, a) := \frac{M_2(a)}{\sum_{\substack{1 \leq i \leq h \\ a_i \geq n_1+1}} \Lambda_0(v_i) + (n_2 - M_2(a))\Lambda_0(v_h)}$$

als Schätzer für  $\eta_2$  an. Damit erhält man:

**3.25 Satz** (PERMUTATIONSTEST FÜR TYP II-ZENSIERTE DATEN) *Der Test  $\tilde{\varphi}(v, a) := \tilde{\varphi}_{T(v,a)}(v, a)$  mit*

$$\tilde{\varphi}_t(v, a) := \begin{cases} 1 & > \\ \tilde{\gamma}(t) & \text{falls } \hat{\eta}_2(v, a)W(v, a) + K(a) = \tilde{c}(t) \\ 0 & < \end{cases} ,$$



wobei  $\tilde{\gamma}(t), \tilde{c}(t)$  aus

$$\frac{1}{n!} \left| \left\{ a' \in \mathcal{S}_{n|h} : \hat{\eta}_2(t, a)W(t, a') + K(a') > \tilde{c}(t) \right\} \right| + \frac{\tilde{\gamma}(t)}{n!} \left| \left\{ a' \in \mathcal{S}_{n|h} : \hat{\eta}_2(t, a)W(t, a') + K(a') = \tilde{c}(t) \right\} \right| = \alpha$$

bestimmt werden, scheint für das Testen von  $\left\{ \mathbb{P}_{(\eta_2, \eta_2)}^{(V^h, A^h)} : \eta_2 \in \mathbb{R} \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{(\eta_1, \eta_2)}^{(V^h, A^h)} : \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}, 0 < \eta_1 < \eta_2 \right\}$  ( $\lambda_0 \in \mathfrak{L}$  fest) ein „guter“ Test zu sein und hält auf ganz  $\mathbf{J}$  das Niveau  $\alpha$  genau ein.

### 3.3.4 UNVERFÄLSCHTE TESTS

In diesem Abschnitt soll nach gegenüber den Hypothesen  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{K}$  unverfälschten Tests gesucht werden. Das einzige bekannte Hilfsmittel dabei ist (Witting and Nölle, 1970, Seite 118f., Satz 3.13). Dieses soll zunächst noch einmal für diese Belange neu formuliert werden:

**3.26 Satz** Sei  $\varphi : (\mathbb{R}_{<}^h \times \mathcal{S}_{n|h}, \mathbb{B}_{<}^h \otimes \text{Pow}(\mathcal{S}_{n|h})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B})$  ein Test mit der Eigenschaft:

$$\begin{aligned} &\text{für alle } x, x' \in \mathbb{R}^n \text{ mit} \\ &x'_i = x_i + \delta, \delta > 0 \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n_1\}, x'_j = x_j \text{ für alle } j \neq i \quad (3.14) \\ &\text{gilt } \varphi(V^h(x), A^h(x)) \leq \varphi(V^h(x'), A^h(x')) \end{aligned}$$

und  $E_{\vartheta}(\varphi) = \alpha \quad \forall \vartheta \in \mathbf{J}$ . Dann ist  $\varphi$  ein für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test und somit insbesondere ein Test zum Niveau  $\alpha$ .

Da alle oben angegebenen Tests auf dem Rand der Hypothesen  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlich sind, ist jeweils nur noch die Isotonieforderung (3.14) zu zeigen. Diese Forderung ist allerdings nicht so leicht nachzuweisen wie bei den anderen Zensierungsarten. Einfach ist es noch bei  $\varphi^1(v, a) := \varphi_{T(v, a)}^1(v, a)$  mit

$$\varphi_t^1(v, a) := \begin{cases} 1 & < \\ \gamma_1(t) & \text{falls } M_1(a) = c_1(t) \\ 0 & > \end{cases},$$

wobei  $\gamma_1(t), c_1(t)$  aus

$$\frac{1}{n!} \left| \left\{ \hat{a} \in \mathcal{S}_{n|h} : M_1(\hat{a}) < c_1(t) \right\} \right| + \frac{\gamma_1(t)}{n!} \left| \left\{ \hat{a} \in \mathcal{S}_{n|h} : M_1(\hat{a}) = c_1(t) \right\} \right| = \alpha$$

bestimmt werden. Hier kann man wieder zeigen, dass  $M_1$  beim Übergang von  $(v, a)$  zu  $(v', a')$  (siehe (3.14)) am meisten wächst. Daher nimmt auch hier der  $p$ -Wert

$$p_1(v, a) = \frac{1}{n!} \left| \left\{ \hat{a} \in \mathcal{S}_{n|h} : M_1(\hat{a}) \leq M_1(a) \right\} \right|$$

des Tests ab, womit man unmittelbar die Isotonieforderung (3.14) nachweist. Da allerdings  $W$  beim Übergang von  $(v, a)$  zu  $(v', a')$  nicht am meisten wächst kann man auf diesem Wege nicht die Unverfälschtheit von  $\varphi^2(v, a) := \varphi_{T(v,a)}^2(v, a)$  mit

$$\varphi_t^2(v, a) := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma_2(t) & \text{falls } W(v, a) = c_2(t) \\ 0 & < \end{cases} ,$$

wobei  $\gamma_2(t), c_2(t)$  aus

$$\frac{1}{n!} \left| \left\{ \hat{a} \in \mathcal{S}_{n|h} : W(t, \hat{a}) > c_2(t) \right\} \right| + \frac{\gamma_2(t)}{n!} \left| \left\{ \hat{a} \in \mathcal{S}_{n|h} : W(t, \hat{a}) = c_2(t) \right\} \right| = \alpha$$

bestimmt werden, zeigen. Gleiches gilt damit auch für die lokal gleichmäßig besten Tests  $\varphi^*(v, a) := \varphi_{T(v,a)}^*(v, a)$ , die lokal besten Tests  $\tilde{\varphi}^*$  und den Test  $\tilde{\varphi}$ .

Setzt man bei exponentialverteilten Daten (genauer  $\lambda_0 \equiv 1$ )  $n_1 = 3, n_2 = 3, n = 4$  und  $\alpha = 0.5$

$$x = (20, 21, 22, 1, 101, 102) \text{ bzw. } x' = (20, 21, 100, 1, 101, 102)$$

in den Test ein, so sieht man, dass der Test  $\varphi^2$  die Isotonieforderung (3.14) nicht erfüllt, da

$$\varphi^2(V^h(x), A^h(x)) = 1 \text{ und } \varphi^2(V^h(x'), A^h(x')) = 0$$

gilt. Ändert man die Komponenten leicht ab, so erfüllt der Test  $\varphi^2$  die Isotonieforderung (3.14) sogar nicht auf einer Menge positiven Maßes. Ähnliches ist damit auch von den restlichen angesprochenen Tests zu erwarten, so dass man die Unverfälschtheit dieser Tests nicht auf diesem Wege zeigen kann. Es besteht jedoch die Hoffnung, die Unverfälschtheit anders zeigen zu können, da nicht jeder unverfälschte Test auch die Isotonieforderung (3.14) erfüllen muss.

### 3.4 PERMUTATIONSTESTS FÜR ZUFÄLLIG-ZENSIERTE DATEN

#### 3.4.1 MODELLBILDUNG

Wie vorher auch, seien  $n$  stu. Zufallsgrößen

$$X_1, \dots, X_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathbb{B}_+),$$

genannt *Überlebenszeiten*, gegeben, wobei die erste Stichprobe aus den ersten  $n_1$  und die zweite aus den letzten  $n_2 := n - n_1$  Zufallsgrößen bestehe. Nun soll die am häufigsten anzutreffende Art der Zensierung, die *zufällige Zensierung* (siehe Seite 3), behandelt werden. In diesem Fall sind neben den  $n$  Überlebenszeiten  $X_1, \dots, X_n$  noch  $n$  stu. *Zensierungszeiten*

$$Y_1, \dots, Y_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}_+, \overline{\mathbb{B}}_+),$$

die ebenfalls von den Überlebenszeiten stu. sind, gegeben. Diese modellieren den Zeitpunkt der Zensierung. Da sie auch den Wert  $+\infty$  annehmen können, kann es auch unzensierte Daten geben. In diesem Modell kann man nur  $(Z, \Delta) = (Z_1, \dots, Z_n, \Delta_1, \dots, \Delta_n)$  mit

$$Z_j := X_j \wedge Y_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

und

$$\Delta_j := \begin{cases} 1 & \text{falls } X_j \leq Y_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1 \leq j \leq n)$$

beobachten.

Bezeichnet  $F_i$  die Verteilungsfunktion der  $i$ -ten Stichprobe und  $G$  die Subverteilungsfunktion<sup>5</sup> der Zensierungsverteilung, so existiert also ein  $1 < n_1 < n$  mit  $\mathbb{P}^{X_j} \sim F_1$  ( $1 \leq j \leq n_1$ ) und  $\mathbb{P}^{X_j} \sim F_2$  ( $n_1 + 1 \leq j \leq n$ ) sowie  $\mathbb{P}^{Y_j} \sim G$  ( $1 \leq j \leq n$ ). Damit man Bindungen nicht weiter behandeln muss, seien sowohl die  $F_i$  als auch  $G$  als stetig vorausgesetzt.<sup>6</sup> Je nach Stichprobe besitzt  $\mathbb{P}^{Z_j}$  die Subverteilungsfunktion  $H_i := 1 - (1 - F_i)(1 - G) = F_i + G - F_i G$ . Diese ist damit auch stetig. Aus diesem Grund müssen Bindungen nicht weiter beachtet werden. Wie man andernfalls mit Bindungen umzugehen hat, sieht man in (Gebhard, 1995).

Die  $H_i$  beschreiben zwar die Verteilung von  $Z_j$ , jedoch nicht die Verteilung von  $(Z_j, \Delta_j)$ , da  $Z_j$  und  $\Delta_j$  nicht stu. sein müssen. Die Verteilung von  $(Z_j, \Delta_j)$  lässt sich durch die beiden Subverteilungsfunktionen

$$\begin{aligned} H_i^u(t) &:= \mathbb{P}_{(F_1, F_2, G)}(Z_j \leq t, \Delta_j = 1) = \int_{[0, t]} (1 - G(x)) dP_{F_i}(x), \\ H_i^z(t) &:= \mathbb{P}_{(F_1, F_2, G)}(Z_j \leq t, \Delta_j = 0) = \int_{[0, t]} (1 - F_i(x)) dP_G(x) \end{aligned} \quad (3.15)$$

charakterisieren. Dabei gilt offenbar  $H_i = H_i^u + H_i^z$ ,  $\mathbb{P}(\Delta_j = 1) = \lim_{t \rightarrow \infty} H_i^u(t)$  und

$$\mathbb{P}_{(F_1, F_2, G)}^{(Z_j, \Delta_j)}(C) = \int \mathbf{1}_C(t, 1) dP_{H_i^u}(t) + \int \mathbf{1}_C(t, 0) dP_{H_i^z}(t)$$

für beliebiges  $C \in \mathbb{B}_+ \otimes \text{Pow}(\{0, 1\})$ . Gilt  $H_i^u, H_i^z \ll \mu$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\mu$   $\sigma$ -endlich, und bezeichnet  $f_i^u, f_i^z$  die  $\mu$ -Dichte von  $H_i^u, H_i^z$ , so gilt also weiter:<sup>7</sup>

$$\mathbb{P}_{(F_1, F_2, G)}^{(Z_j, \Delta_j)}(C) = \int_C \delta f_i^u(t) + (1 - \delta) f_i^z(t) d\mu \otimes \#(t, \delta), \quad (3.16)$$

d.h.  $\mathbb{P}_{(F_1, F_2, G)}^{(Z_j, \Delta_j)}$  besitzt die  $\mu \otimes \#$ -Dichte  $f_i(t, \delta) = \delta f_i^u(t) + (1 - \delta) f_i^z(t)$ . Aus den Grundannahmen erhält man dann weiter:

$$\frac{d\mathbb{P}_{(F_1, F_2, G)}^{(Z, \Delta)}}{d\mu^{(n)} \otimes \#^{(n)}}(t, \delta) = \prod_{j=1}^{n_1} f_1(t_j, \delta_j) \prod_{j=n_1+1}^n f_2(t_j, \delta_j). \quad (3.17)$$

<sup>5</sup>D.h. eine Funktion, die bis auf  $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = 1$  alle Eigenschaften einer Verteilungsfunktion besitzt. Es muss allerdings immer noch  $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) \leq 1$  gelten.

<sup>6</sup>In diesem Abschnitt werden Stichproben durch  $i$  und Zufallsgrößen durch  $j$  indiziert. Treten  $i$  und  $j$  gemeinsam auf, so gelte im Fall  $1 \leq j \leq n_1$   $i = 1$  und ansonsten  $i = 2$ .

<sup>7</sup>Im folgenden bezeichnet  $\#$  das Zählmaß auf  $\{0, 1\}$ .

Wie bei der Typ I-Zensierung fallen beim Übergang von  $(X_j, Y_j)$  zu  $(Z_j, \Delta_j)$  mehrere Verteilungen zusammen. Da die Verteilung  $\mathbb{P}_{(F_1, F_2, G)}^{(Z_j, \Delta_j)}$  durch  $H_i^u, H_i^z$  eindeutig bestimmt ist, heißen zwei Paare von Subverteilungsfunktionen  $(F, G), (F', G')$  nicht unterscheidbar, falls  $(H^u, H^z) = (H'^u, H'^z)$  gilt.

Andererseits kann man aus  $H_i^u$  und  $H_i^z$  sowohl  $F_i$  als auch  $G$  teilweise wieder zurückgewinnen. Es gilt die sogenannte *Peterson-Darstellung* (siehe (Miller, 1981, Seite 61)):

$$\begin{aligned} F_i(t) &= 1 - \exp\left(-\int_{[0,t]} \frac{1}{1-H_i} dP_{H_i^u}\right) \\ G(t) &= 1 - \exp\left(-\int_{[0,t]} \frac{1}{1-H_i} dP_{H_i^z}\right) \end{aligned} \quad \forall t \leq \tau_{H_i},$$

wobei  $\tau_{H_i} := \inf\{t : H_i(t) = 1\}$  ( $\inf \emptyset := \infty$ ) bezeichnet. Durch diese Darstellung ist es auch möglich, für jede Verteilung auf  $(\mathbb{R}_+ \times \{0, 1\}, \mathbb{B}_+ \otimes \text{Pow}(\{0, 1\}))$   $F_i$  und  $G$  zu finden, so dass  $\mathbb{P}_{(F_1, F_2, G)}^{(Z_j, \Delta_j)}$  die vorgegebene Verteilung besitzt. Man muss die oben erhaltenen  $F_i$  und  $G$  nur auf  $[\tau_{H_i}, \infty)$  stetig fortsetzen.

Bezeichnet

$$\mathfrak{F}_{0,s}^c := \{F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1] : F \text{ ist stetig, isoton, } F(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \leq 1\}$$

die Menge der stetigen Subverteilungsfunktionen und

$$\mathfrak{F}_0^c := \{F \in \mathfrak{F}_{0,s}^c : \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1\}$$

die Menge der stetigen Verteilungsfunktionen, so ist es möglich, mit der folgenden Definition Hypothesen anzugeben, die beim Übergang von  $(X_j, Y_j)$  zu  $(Z_j, \Delta_j)$  schnittfrei bleiben:

**3.27 Definition** Für  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_0^c$  und  $G \in \mathfrak{F}_{0,s}^c$  gilt:

$$F_1 \succeq_{\text{st}}^G F_2 \quad :\iff \quad F_1(t) \geq F_2(t) \quad \forall t < \tau_{H_1} \vee \tau_{H_2} \quad \text{und} \quad F_i(\tau_{H_i}) > 0, \quad (i = 1, 2),$$

und  $\succ_{\text{st}}^G$ , falls  $F_1 \succeq_{\text{st}}^G F_2$  gilt und für ein  $t_0 < \tau_{H_1} \vee \tau_{H_2}$   $\geq$  durch  $>$  ersetzt werden kann. ■

Dies macht Sinn, da zwei Paare von Subverteilungsfunktionen  $(F, G)$  und  $(F', G')$  genau dann nicht unterscheidbar sind, wenn  $F(t) = F'(t)$  und  $G(t) = G'(t) \quad \forall t < \tau_H = \tau_{H'}$  gilt. Die Hypothesen lauten nun:

$$\mathfrak{P}_{\mathbf{H}} := \left\{ \left( \mathbb{P}_{F_1}^{(n_1)} \otimes \mathbb{P}_{F_2}^{(n_2)} \otimes \mathbb{P}_G^{(n)} \right)^{(Z, \Delta)} : F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_0^c, G \in \mathfrak{F}_{0,s}^c \text{ mit } F_1 \succeq_{\text{st}}^G F_2 \right\},$$

$$\mathfrak{P}_{\mathbf{K}} := \left\{ \left( \mathbb{P}_{F_1}^{(n_1)} \otimes \mathbb{P}_{F_2}^{(n_2)} \otimes \mathbb{P}_G^{(n)} \right)^{(Z, \Delta)} : F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_0^c, G \in \mathfrak{F}_{0,s}^c \text{ mit } F_1 \prec_{\text{st}}^G F_2 \right\}$$

oder kurz:

$$\mathbf{H} := \{ (F_1, F_2, G) : F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_0^c, G \in \mathfrak{F}_{0,s}^c \text{ mit } F_1 \succeq_{\text{st}}^G F_2 \},$$

$$\mathbf{K} := \{ (F_1, F_2, G) : F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_0^c, G \in \mathfrak{F}_{0,s}^c \text{ mit } F_1 \prec_{\text{st}}^G F_2 \}.$$

### 3.4.2 UMFORMULIERUNG DES TESTPROBLEMS

Da auch im Fall zufällig-zensierter Daten kein gleichmäßig bester Test zum Niveau  $\alpha$  oder zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test existieren wird (diese Aussage wird später auch bewiesen), scheint es wieder sinnvoll zu sein, nach einem Test zu suchen, der für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  unverfälscht ist und die Güte auf einer Teilklasse  $\mathbf{K}_1$  von  $\mathbf{K}$  gleichmäßig maximiert. Die Teilklasse  $\mathbf{K}_1$  sollte dabei natürlich den Modellvorstellungen entsprechend gewählt werden. Gesucht ist also wieder eine Lösung von (3.1). Da erneut die Gütefunktion eines jeden Tests stetig<sup>8</sup> ist (man fasse  $\varphi$  einfach als eine Abbildung  $\varphi \circ (Z, \Delta) : (\mathbb{R}_+^{2n}, \mathbb{B}_+^{2n}) \rightarrow ([0, 1], \mathbb{B}_{[0,1]})$  auf und wende (Witting and Nölle, 1970, Seite 117, Satz 3.12) an), versucht man nun, das Testproblem wie auf Seite 54 geschehen umzuformulieren. Dazu muss als erstes der Rand<sup>8</sup>  $\mathbf{J} := \overline{\mathbf{H}} \cap \overline{\mathbf{K}}$  der Hypothesen bestimmt werden.

**3.28 Lemma** *Für den Rand  $\mathbf{J} = \overline{\mathbf{H}} \cap \overline{\mathbf{K}}$  der beiden Hypothesen gilt:*

$$\mathfrak{P}_{\mathbf{J}} = \left\{ \left( \mathbb{P}_F^{(n)} \otimes \mathbb{P}_G^{(n)} \right)^{(Z, \Delta)} : F \in \mathfrak{F}_0^c, G \in \mathfrak{F}_{0,s}^c \text{ mit } F(\tau_H) > 0 \right\} \text{ oder kurz}$$

$$\mathbf{J} = \{ (F, G) : F \in \mathfrak{F}_0^c, G \in \mathfrak{F}_{0,s}^c \text{ mit } F(\tau_H) > 0 \}.$$

---

<sup>8</sup>bzgl. der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz

BEWEIS: Dies beweist man wie in (Witting and Nölle, 1970, Seite 118, Beispiel 3.11).  $\square$

Als suffiziente und vollständige Statistik erhält man die *Ordnungsstatistik* zusammen mit dem *zeitlich geordneten Indikatorvektor*:

**3.29 Lemma** *Die Statistik*

$$T : (\mathbb{R}_+^n \times \{0, 1\}^n, \mathbb{B}_+^n \otimes \text{Pow}(\{0, 1\}^n)) \longrightarrow (\mathbb{R}_<^n \times \{0, 1\}^n, \mathbb{B}_<^n \otimes \text{Pow}(\{0, 1\}^n)),$$

$$(z, \delta) = (z_1, \dots, z_n, \delta_1, \dots, \delta_n) \mapsto (t_1^1, \dots, t_n^1, t_1^2, \dots, t_n^2) = t$$

$$\text{mit } t_1^1 < \dots < t_n^1 \text{ und } (t_i^1, t_i^2) = (z_j, \delta_j) \quad \exists j \quad (1 \leq i \leq n),$$

ist *suffizient und vollständig* für  $\mathfrak{P}_{\mathbf{J}}$ .

BEWEIS: (i) *Suffizienz*

Man betrachte die Gruppe

$$\mathcal{Q} := \{q_\pi : q_\pi(z, \delta) := q(\pi(z), \pi(\delta)), \pi \in \mathcal{S}_n\}.$$

$T$  ist offenbar invariant unter  $\mathcal{Q}$ . Sind nun zwei Punkte  $(z, \delta), (z', \delta')$  mit  $T(z, \delta) = T(z', \delta')$  gegeben, so folgt  $t_i^j = t_i'^j$  ( $1 \leq i \leq n, j = 1, 2$ ). Also existiert eine Permutation  $\pi$  mit  $(z, \delta) = (\pi(z'), \pi(\delta')) = q_\pi(z', \delta')$ , d.h.  $T$  ist auch maximalinvariant gegenüber  $\mathcal{Q}$ . Ferner ist jedes Maß aus  $\mathfrak{P}_{\mathbf{J}}$  invariant gegenüber  $\mathcal{Q}$ , da

$$\begin{aligned} q_\pi(Z, \Delta) &= (\pi(Z), \pi(\Delta)) \\ &= (\pi((X_1 \wedge Y_1, \dots, X_n \wedge Y_n)), \pi((\mathbf{1}_{\{X_1 \leq Y_1\}}, \dots, \mathbf{1}_{\{X_n \leq Y_n\}}))) \\ &= (X_{\pi(1)} \wedge Y_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)} \wedge Y_{\pi(n)}, \mathbf{1}_{\{X_{\pi(1)} \leq Y_{\pi(1)}\}}, \dots, \mathbf{1}_{\{X_{\pi(n)} \leq Y_{\pi(n)}\}}) \end{aligned}$$

gilt und Produktmaße invariant gegenüber Permutationen der Koordinaten sind. Da  $T$  auch die  $\sigma$ -Algebra der gegenüber  $\mathcal{Q}$ -invarianten Mengen induziert, folgt die Behauptung mit (Witting and Nölle, 1970, Seite 108f., Hilfssatz 3.8).

(ii) *Vollständigkeit*

Sei  $h : (\mathbb{R}_<^n \times \{0, 1\}^n, \mathbb{B}_<^n \otimes \text{Pow}(\{0, 1\}^n)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B})$  mit  $E_\vartheta(h \circ T) = 0 \quad \forall \vartheta \in \mathbf{J}$  gegeben. Zu zeigen ist nun  $P_\vartheta(\{h \circ T = 0\}) = 1 \quad \forall \vartheta \in \mathbf{J}$ . Nach den obigen Bemerkungen sowie (3.16) und (3.17) reicht es aus,  $\mu^{(n)} \otimes \#^{(n)}(\{h \circ T =$

$0\}) = 1$  für alle stetigen Wahrscheinlichkeitsmaße  $\mu$  auf  $(\mathbb{R}_+, \mathbb{B}_+)$  zu zeigen. Sei also  $\mu$  ein beliebiges stetiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}_+, \mathbb{B}_+)$ . Nach den Vorbereitungen und (3.17) findet man wie in (Witting, 1985, Seite 358f., Satz 3.42) Punkte  $\theta$  mit  $\mathbb{P}_\theta^{(Z, \Delta)} \in \mathfrak{P}_{\mathbf{J}}$  und

$$\frac{d\mathbb{P}_\theta^{(Z_j, \Delta_j)}}{d\mu \otimes \#}(z_j, \delta_j) = C(\theta) \exp(\theta_1 z_j(-1 + 2\delta_j) + \cdots + \theta_n (z_j(-1 + 2\delta_j))^n) g(z_j, \delta_j)$$

( $1 \leq j \leq n$ ), wobei  $g(z, \delta) > 0 \quad \forall (z, \delta) \in \mathbb{R}_+ \times \{0, 1\}$  gilt und  $\theta \in [-1, 1]^n$  frei gewählt werden kann. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{P}_\theta^{(Z, \Delta)}}{d\mu^{(n)} \otimes \#^{(n)}}(z, \delta) &= C(\theta)^n \exp\left(\theta_1 \sum_{j=1}^n z_j(-1 + 2\delta_j) + \cdots \right. \\ &\quad \left. \cdots + \theta_n \sum_{j=1}^n (z_j(-1 + 2\delta_j))^n\right) \prod_{j=1}^n g(z_j, \delta_j). \end{aligned}$$

Nach (Witting, 1985, Seite 356, Satz 3.39) ist nun die Abbildung

$$(z, \delta) \mapsto \left( \sum_{j=1}^n z_j(-1 + 2\delta_j), \dots, \sum_{j=1}^n (z_j(-1 + 2\delta_j))^n \right)$$

vollständig für  $\left\{ \mathbb{P}_\theta^{(Z, \Delta)} : \theta \in [-1, 1]^n \right\}$ , was aber nach (Witting, 1985, Seite 338f., Beispiel 3.12) äquivalent zur Vollständigkeit von

$$(z, \delta) \mapsto W((z_1(-1 + 2\delta_1), \dots, z_n(-1 + 2\delta_n)))$$

für  $\left\{ \mathbb{P}_\theta^{(Z, \Delta)} : \theta \in [-1, 1]^n \right\}$  ist, wobei  $W$  die Ordnungsstatistik bezeichnet. Dies wiederum ist offenbar wegen der  $\mu$ -f.s. Positivität der  $Z_j$  gleichbedeutend mit der Vollständigkeit von  $T$  für  $\left\{ \mathbb{P}_\theta^{(Z, \Delta)} : \theta \in [-1, 1]^n \right\}$ . Da aber  $P_\theta \in \mathfrak{P}_{\mathbf{J}}$  gewählt wurde, folgt damit  $\left\{ \mathbb{P}_\theta^{(Z, \Delta)} : \theta \in [-1, 1]^n \right\} (\{h \circ T = 0\}) = 1$  und somit wegen der Gestalt der Dichten auch  $\mu^{(n)} \otimes \#^{(n)}(\{h \circ T = 0\}) = 1$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

Somit ist eine Umformulierung des Testproblems möglich, d.h. jede unverfälschte Lösung von (3.3) ist eine Lösung von (3.1) (dabei muss eigentlich noch  $X$  durch  $(Z, \Delta)$  ersetzt werden).



### 3.4 Permutationstests für zufällig-zensierte Daten

#### 3.4.3 DIE SUCHE NACH OPTIMALEN TESTS

##### GLEICHMÄSSIG BESTE TESTS

Nach den Bemerkungen im vorherigen Unterabschnitt sollte man nun nach einer Lösung  $\varphi^*$  von (3.3) suchen. Dazu ist zunächst die bedingte Verteilung  $\mathbb{P}_\vartheta^{(Z,\Delta)|T^\circ(Z,\Delta)=t}$  für  $\vartheta \in \mathbf{H} + \mathbf{K}$  zu bestimmen. Diese ergibt sich als  $\mathbb{B}_<^n \otimes \text{Pow}(\{0, 1\}^n)$ -meßbare Lösung von:

$$\int_C \mathbb{P}_\vartheta^{(Z,\Delta)|T^\circ(Z,\Delta)=t}(B) d\mathbb{P}_\vartheta^{T^\circ(Z,\Delta)}(t) = \mathbb{P}_\vartheta^{(Z,\Delta)}(B \cap T^{-1}(C))$$

$$\forall C \in \mathbb{B}_<^n \otimes \text{Pow}(\{0, 1\}^n) \quad \forall B \in \mathbb{B}_+^n \otimes \text{Pow}(\{0, 1\}^n). \quad (3.18)$$

Sei nun  $\mu$  ein  $\sigma$ -endliches Maß wie in (3.16), (3.17) und  $f_\vartheta$  eine  $\mu^{(n)} \otimes \#^{(n)}$ -Dichte von  $\mathbb{P}_\vartheta^{(Z,\Delta)}$ . Nutzt man die Transformationsformel und die Eigenschaft aus, dass Produktmaße invariant gegenüber Permutation der Koordinaten sind, so gilt für die rechte Seite von (3.18):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\vartheta^{(Z,\Delta)}(B \cap T^{-1}(C)) &= \int_{T^{-1}(C)} \mathbf{1}_B d\mathbb{P}_\vartheta^{(Z,\Delta)} \\ &= \int_{\sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \pi(C_1) \times \pi(C_2)} \mathbf{1}_B(t) f_\vartheta(t) d\mu^{(n)} \otimes \#^{(n)}(t) \\ &\quad C_1 \text{ bezeichnet die ersten und } C_2 \text{ die letzten } n \\ &\quad \text{Komponenten von } C \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \int_{\pi(C_1) \times \pi(C_2)} \mathbf{1}_B(t) f_\vartheta(t) d\mu^{(n)} \otimes \#^{(n)}(t) \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \int_{C_1 \times C_2} \mathbf{1}_B(\pi^{-1}(t^1), \pi^{-1}(t^2)) f_\vartheta(\pi^{-1}(t^1), \pi^{-1}(t^2)) \\ &\quad d\mu^{(n)} \otimes \#^{(n)}(t^1, t^2) \\ &= \int_C \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \mathbf{1}_B(\pi(t^1), \pi(t^2)) f_\vartheta(\pi(t^1), \pi(t^2)) d\mu^{(n)} \otimes \#^{(n)}(t^1, t^2). \end{aligned}$$

Setzt man nun für  $B \in \mathbb{B}_+^n \otimes \text{Pow}(\{0, 1\}^n)$  ein, so erhält man

$$f_\vartheta^T(t^1, t^2) := \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} f_\vartheta(\pi(t^1), \pi(t^2))$$

als  $\mu^{(n)} \otimes \#^{(n)}$ -Dichte von  $\mathbb{P}_{\vartheta}^{T^{\circ}(Z, \Delta)}$ . Demnach ergibt sich für die linke Seite von (3.18):

$$\begin{aligned} \int_C \mathbb{P}_{\vartheta}^{(Z, \Delta) | T^{\circ}(Z, \Delta) = t}(B) d\mathbb{P}_{\vartheta}^{T^{\circ}(Z, \Delta)}(t) \\ = \int_C \mathbb{P}_{\vartheta}^{(Z, \Delta) | T^{\circ}(Z, \Delta) = t}(B) f_{\vartheta}^T(t^1, t^2) d\mu^{(n)} \otimes \#^{(n)}(t^1, t^2), \end{aligned}$$

so dass man erhält:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbb{P}_{\vartheta}^{(Z, \Delta) | T^{\circ}(Z, \Delta) = t}(B) f_{\vartheta}^T(t^1, t^2) d\mu^{(n)} \otimes \#^{(n)}(t^1, t^2) \\ = \int_C \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \mathbf{1}_B(\pi(t^1), \pi(t^2)) f_{\vartheta}(\pi(t^1), \pi(t^2)) d\mu^{(n)} \otimes \#^{(n)}(t^1, t^2) \\ \forall C \in \mathbb{B}_{<}^n \otimes \text{Pow}(\{0, 1\}^n). \end{aligned}$$

Für  $f_{\vartheta}^T(t^1, t^2) > 0$  folgt daher die Beziehung:

$$\mathbb{P}_{\vartheta}^{(Z, \Delta) | T^{\circ}(Z, \Delta) = t}(B) = \frac{\sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \mathbf{1}_B(\pi(t^1), \pi(t^2)) f_{\vartheta}(\pi(t^1), \pi(t^2))}{f_{\vartheta}^T(t^1, t^2)}.$$

Da die Meßbarkeitsbeziehung offensichtlich erfüllt ist und die Menge  $\{t : f_{\vartheta}^T(t) = 0\}$  eine  $\mathbb{P}_{\vartheta}^{T^{\circ}(Z, \Delta)}$  Nullmenge ist, können die bisherigen Ergebnisse zu einem Lemma zusammengefasst werden:

**3.30 Lemma** Für  $\vartheta \in \mathbf{H} + \mathbf{K}$  und  $(z, \delta)$  mit  $T(z, \delta) = (t^1, t^2)$  gilt:

$$\mathbb{P}_{\vartheta}^{(Z, \Delta) | T^{\circ}(Z, \Delta) = t}(\{(z, \delta)\}) = \frac{f_{\vartheta}(z, \delta)}{\sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} f_{\vartheta}(\pi(t^1), \pi(t^2))} = \frac{f_{\vartheta}(z, \delta)}{f_{\vartheta}^T(t^1, t^2)}. \quad (3.19)$$

Für  $\vartheta \in \mathbf{J}$  erhält man insbesondere:

$$\mathbb{P}_{\vartheta}^{(Z, \Delta) | T^{\circ}(Z, \Delta) = t}(\{(z, \delta)\}) = \frac{1}{n!}. \quad (3.20)$$

$\mathbb{P}_{\vartheta}^{(Z, \Delta) | T^{\circ}(Z, \Delta) = t}$  ist also eine diskrete W-Verteilung auf  $\{(\pi(t^1), \pi(t^2)) : \pi \in \mathcal{S}_n\} = \{(z, \delta) : T(z, \delta) = t\}$ , wobei die Verteilung auf dem Rand eine Laplace-Verteilung auf eben diesen Punkten ist.

Will man nun  $\left\{ \mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{(Z, \Delta) | T^{\circ}(Z, \Delta) = t} \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{\vartheta}^{(Z, \Delta) | T^{\circ}(Z, \Delta) = t} \right\}$  ( $\vartheta \in \mathbf{K}$ ) mit Hilfe des einfachen Neyman-Pearson Lemmas testen, so ergibt sich die darin auftretende Prüfgröße nach (3.19) und (3.20) zu

$$n! \frac{f_{\vartheta}(z, \delta)}{f_{\vartheta}^T(t^1, t^2)}. \quad (3.21)$$

### 3.4 Permutationstests für zufällig-zensierte Daten

---

Da  $f_{\vartheta}^T(t^1, t^2)$  auf der Menge  $\{(z, \delta) : T(z, \delta) = t\}$  konstant ist, ist  $f_{\vartheta}(z, \delta)$  eine zu (3.21) äquivalente Prüfgröße.

Sucht man nun nach einer Teilklasse  $\mathbf{K}_1$  von  $\mathbf{K}$ , gegen die der Test optimal ist, so liegt es nahe, diese wie bei  $\mathbf{K}_{\lambda_0}$  durch *Ausfallraten* zu definieren. Besitzt die  $i$ -te Stichprobe die Ausfallrate  $\lambda_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ), und  $G$  die Ausfallrate  $\lambda_3(t)$  ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathfrak{L}$ ), so gilt für  $\vartheta = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  nach (3.15), (3.16) und (3.17):

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\vartheta}^{(Z, \Delta)}}{d\mathfrak{M}^{(n)} \otimes \#^{(n)}}(z, \delta) &= \prod_{i=1}^{n_1} \left( \lambda_1(z_i) \exp(-\Lambda_1(z_i) - \Lambda_3(z_i)) \right)^{\delta_i} \\ &\quad \left( \lambda_3(z_i) \exp(-\Lambda_3(z_i) - \Lambda_1(z_i)) \right)^{1-\delta_i} \\ &\quad \times \prod_{i=n_1+1}^n \left( \lambda_2(z_i) \exp(-\Lambda_2(z_i) - \Lambda_3(z_i)) \right)^{\delta_i} \\ &\quad \left( \lambda_3(z_i) \exp(-\Lambda_3(z_i) - \Lambda_2(z_i)) \right)^{1-\delta_i} \\ &= \prod_{\substack{1 \leq i \leq n_1 \\ \delta_i = 1}} \lambda_1(z_i) \prod_{\substack{n_1+1 \leq i \leq n \\ \delta_i = 1}} \lambda_2(z_i) \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \delta_i = 0}} \lambda_3(z_i) \\ &\quad \times \exp \left( - \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_1(z_i) - \sum_{i=n_1+1}^n \Lambda_2(z_i) - \sum_{i=1}^n \Lambda_3(z_i) \right), \end{aligned}$$

wobei  $\Lambda_i$  die entsprechende kumulative Ausfallrate bezeichnet ( $i = 1, 2, 3$ ). Speziell für  $\lambda_1(t) = \eta_1 \lambda_0(t)$ ,  $\lambda_2(t) = \eta_2 \lambda_0(t)$  ( $\lambda_0 \in \mathfrak{L}$ ) vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\eta_1}{\eta_2} \right)^{M_1(\delta)} \exp \left( (\eta_2 - \eta_1) \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(z_i) \right) \\ &\times \eta_2^{M_1(\delta) + M_2(\delta)} \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \delta_i = 1}} \lambda_0(z_i) \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \delta_i = 0}} \lambda_3(z_i) \exp \left( -\eta_2 \sum_{i=1}^n \Lambda_0(z_i) - \sum_{i=1}^n \Lambda_3(z_i) \right), \end{aligned} \tag{3.22}$$

wobei

$$M_1(\delta) := |\{\delta_i : 1 \leq i \leq n_1 \text{ und } \delta_i = 1\}|,$$

$$M_2(\delta) := |\{\delta_i : n_1 + 1 \leq i \leq n \text{ und } \delta_i = 1\}|$$

wieder die Anzahl der nicht zensierten Beobachtungen der ersten bzw. zweiten Stichprobe bezeichnet.

Eine naheliegende Wahl für  $\mathbf{K}_1$  ist die Klasse der vergleichbaren Exponentialverteilungen, d.h.:

$$\mathbf{K}_{Exp} := \{(F_1, F_2, \lambda_3) : F_1 \sim Exp(\theta_i), \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, 0 < \theta_1 < \theta_2, \lambda_3 \in \mathfrak{L}\}.$$

Da die zweite Zeile in (3.22) auf der Menge  $\{(\pi(t^1), \pi(t^2)) : \pi \in \mathfrak{S}_n\} = \{(z, \delta) : T(z, \delta) = t\}$  konstant ist, ist

$$U(z, \delta, \lambda_0, \eta) := \left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^{M_1(\delta)} \exp\left((\eta_2 - \eta_1) \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(z_i)\right)$$

eine zu (3.21) äquivalente Prüfgröße. Diese ist offenbar *unabhängig von der Zensierungsverteilung  $G$  bzw.  $\lambda_3$* . Daher kann man  $\mathbf{K}_{Exp}$  auch kurz mit

$$\mathbf{K}_{Exp} := \{(\theta_1, \theta_2) : \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, 0 < \theta_1 < \theta_2\}$$

bezeichnen. Wie im Fall Typ I- und Typ II-zensierter Daten kann jedoch auch hier gezeigt werden, dass gegen diese Klasse kein gleichmäßig bester auf  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlicher Test, d.h. eine Lösung von (3.3), existiert. Diese Aussage ergibt sich unmittelbar aus den folgenden beiden Beispielen:

**3.31 Beispiel** Bei einer jeweiligen Stichprobengröße von zwei ( $n_1 = n_2 = 2$ ), Niveau  $\alpha = 0.5$  und Wahl von  $\lambda_0, \theta$  als  $\lambda_0 \equiv 1, \theta = (2 \cdot 10^{-10}, 2 \cdot 10^{-5})$ , erhält man bei den Beobachtungen  $(z, \delta) \in (0.75, 1.25) \times (2.75, 3.25) \times (4.75, 5.25) \times (9.75, 10.25) \times \{1\} \times \{0\} \times \{1\} \times \{1\}$  als Wert der Statistiken  $M_1, U$  und

$$V(z) := \sum_{i=1}^{n_1} z_i$$

für die 6 wesentlich verschiedenen Anordnungen/Permutationen von  $(z, \delta)$  die folgenden Werte:

### 3.4 Permutationstests für zufällig-zensierte Daten

Permutation $\pi$	$M_1(\pi(\delta))$	$V(\pi(z)) \in$	$U(\pi(z), \pi(\delta), \lambda_0, \theta) \in$
(1, 2, 3, 4)	1	(3.5, 4.5)	$(1.00007 \cdot 10^{-5}, 1.00009 \cdot 10^{-5})$
(1, 3, 2, 4)	2	(5.5, 6.5)	$(1.00011 \cdot 10^{-10}, 1.00013 \cdot 10^{-10})$
(1, 4, 3, 2)	2	(10.5, 11.5)	$(1.00021 \cdot 10^{-10}, 1.00023 \cdot 10^{-10})$
(2, 3, 1, 4)	1	(7.5, 8.5)	$(1.00015 \cdot 10^{-5}, 1.00017 \cdot 10^{-5})$
(2, 4, 1, 3)	1	(12.5, 13.5)	$(1.00025 \cdot 10^{-5}, 1.00027 \cdot 10^{-5})$
(3, 4, 1, 2)	2	(14.5, 15.5)	$(1.00029 \cdot 10^{-10}, 1.00031 \cdot 10^{-10})$

TABELLE 3.5: Werte der einzelnen Permutationen.

Nach dem einfachen Neyman-Pearson Lemma, (3.19) und (3.20) muss eine Lösung von (3.3) mit  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{Exp}$  (falls sie existiert) sich in diesem Fall bei den drei wesentlichen Permutationen  $\pi$  mit dem größten Wert von  $U(\pi(z), \pi(\delta), \lambda_0, \theta)$  für  $\mathbf{K}$  und sonst für  $\mathbf{H}$  entscheiden. Der kritische Bereich des optimalen Tests lautet also:

$$K_1 := \{(1, 2, 3, 4), (2, 3, 1, 4), (2, 4, 1, 3)\}.$$

Damit entscheidet sich der optimale Test genau dann für  $\mathbf{K}$ , wenn  $M_1$  klein ist. ◇

**3.32 Beispiel** Ändert man in Beispiel 3.31 nur  $\theta$  zu  $\theta = (9.6, 12)$ , so erhält man analog die folgenden Werte:

Permutation $\pi$	$M_1(\pi(\delta))$	$V(\pi(z)) \in$	$U(\pi(z), \pi(\delta), \lambda_0, \theta) \in$
(1, 2, 3, 4)	1	(3.5, 4.5)	(3558, 39217)
(1, 3, 2, 4)	2	(5.5, 6.5)	(345833, 3812184)
(1, 4, 3, 2)	2	(10.5, 11.5)	$(5.6286 \cdot 10^{10}, 6.2045 \cdot 10^{11})$
(2, 3, 1, 4)	1	(7.5, 8.5)	(52527975, 579025137)
(2, 4, 1, 3)	1	(12.5, 13.5)	$(8.5492 \cdot 10^{12}, 9.4239 \cdot 10^{13})$
(3, 4, 1, 2)	2	(14.5, 15.5)	$(8.3105 \cdot 10^{14}, 9.1608 \cdot 10^{15})$

TABELLE 3.6: Werte der einzelnen Permutationen.

Ebenfalls nach dem einfachen Neyman-Pearson Lemma sowie (3.19) und (3.20) ergibt sich der kritische Bereich einer Lösung von (3.3) mit  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{Exp}$

(falls sie existiert) zu:

$$K_2 := \{(1, 4, 3, 2), (2, 4, 1, 3), (3, 4, 1, 2)\}.$$

Hier entscheidet sich der optimale Test also für große Werte von  $V$  für  $\mathbf{K}$  und sonst für  $\mathbf{H}$ .  $\diamond$

Durch analoges Vorgehen kann man damit zeigen:

**3.33 Satz** *Zu vorgegebenen Stichprobenumfängen  $n_1, n_2$  und Niveau  $\alpha$  existiert i.a. kein gegen  $\mathbf{K}_{Exp}$  gleichmäßig bester auf  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlicher Test, d.h. eine Lösung von (3.3) mit  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{Exp}$ .*

Die Aussage kann noch in den folgenden Richtungen erweitert werden:

- (a) Es kann i.a. auch keinen gegen  $\mathbf{K}_{Exp}$  gleichmäßig besten unverfälschten Test für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$ , d.h. eine Lösung von (3.1) geben, da die Tests, die sich bei kleinen Werten von  $M_1$  bzw. großen Werten von  $V$  für  $\mathbf{K}$  entscheiden, auch für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  unverfälscht sind (siehe Seite 107).
- (b) Nach den vorherigen Überlegungen kann es i.a. auch keinen gegen  $\mathbf{K}_{\lambda_0}$  gleichmäßig besten auf  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlichen oder für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  unverfälschten Test geben. Von besonderem Interesse ist dabei natürlich wieder der Fall  $\mathbf{K}_{\lambda_0} = \mathbf{K}_{\mathcal{W}_\kappa}$ .
- (c) Wegen der Gestalt von  $U$  gelten analoge Aussagen schon, wenn man anstatt  $\mathbf{K}_{\lambda_0}$  zwei unterschiedliche Punkte aus  $\mathbf{K}_{\lambda_0}$  als  $\mathbf{K}_1$  wählt.
- (d) Wählt man als  $\mathbf{K}_1$  jedoch nur einen Punkt  $\eta$  aus  $\mathbf{K}_{\lambda_0}$ , so existiert eine Lösung von (3.3) und (3.1). Der optimale Test hat dabei die Prüfgröße  $U(z, \delta, \lambda_0, \eta)$ .

#### LOKAL BESTE TESTS

Da man wieder *keine gleichmäßig* besten Tests findet, kann man nun erneut versuchen, *lokal* beste Tests zu finden.

Als erstes versucht man wieder, den nach dem einfachen Neyman-Pearson Lemma sowie (3.19) und (3.20) besten Test zum Niveau  $\alpha$  für  $\left\{ \mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{(Z, \Delta)} \mid T \circ (Z, \Delta) = t \right\}$

### 3.4 Permutationstests für zufällig-zensierte Daten

---

gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{\vartheta}^{(Z, \Delta) | T^{\circ}(Z, \Delta) = t} \right\}$ ,  $\vartheta = (\eta_1 \lambda_0, \eta_2 \lambda_0, \lambda_3)$ ,  $\eta_1 < \eta_2$ ,

$$\varphi_{t, \vartheta}^*(z, \delta) := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^*(t, \eta) & \text{falls } U(z, \delta, \lambda_0, \eta) = c^*(t, \eta) \\ 0 & < \end{cases},$$

wobei  $\gamma^*(t, \eta), c^*(t, \eta)$  aus

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : U(\pi(t^1), \pi(t^2), \lambda_0, \eta) > c^*(t, \eta) \right\} \right| \\ & + \frac{\gamma^*(t, \eta)}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : U(\pi(t^1), \pi(t^2), \lambda_0, \eta) = c^*(t, \eta) \right\} \right| = \alpha \end{aligned}$$

bestimmt werden, bei festem  $\eta_2$  unabhängig von  $\eta_1$  zu machen. Dies gelingt auch, da

$$\begin{aligned} \eta_1 \mapsto p_{\vartheta}(z, \delta) &:= \mathbb{P}_{\vartheta}^{(Z, \Delta) | T^{\circ}(Z, \Delta) = t}(\{(z, \delta)\}) \text{ mit } \vartheta = (\eta_1 \lambda_0, \eta_2 \lambda_0, \lambda_3) \\ &= \frac{f_{\vartheta}(z, \delta)}{f_{\vartheta}^T(t^1, t^2)} \end{aligned}$$

bei festem  $\eta_2, \lambda_0, \lambda_3, z$  und  $\delta$  nach (3.22) in eine Potenzreihe um  $\eta_2$  ( $\eta_1 = \eta_2$  entspricht  $\vartheta \in \mathbf{J}$ ) entwickelbar ist. Nach (Witting, 1985, Seite 225, Satz 2.46) gilt nun:

**3.34 Satz** *Für jedes  $t \in T(\mathbb{R}^n \times \{0, 1\}^n)$  existiert ein  $0 < \eta_1'(t) < \eta_2$  d.d.  $\varphi_{t, \eta}^*$  für  $\eta_1'(t) < \eta_1 < \eta_2$  unabhängig von  $\eta_1$  ist. Somit ist  $\varphi_t^* := \varphi_{t, ((\eta_1'(t) + \eta_2)/2, \eta_2)}$  ein gleichmäßig bester  $\alpha$ -ähnlicher Test für  $\left\{ \mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{(Z, \Delta) | T^{\circ}(Z, \Delta) = t} \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{\vartheta}^{(Z, \Delta) | T^{\circ}(Z, \Delta) = t} : \vartheta = (\eta_1 \lambda_0, \eta_2 \lambda_0, \lambda_3), \eta_1 \in \mathbb{R}, \eta_1'(t) < \eta_1 < \eta_2 \right\}$  ( $\eta_2 > 0, \lambda_0, \lambda_3 \in \mathfrak{L}$  fest).*

*Also ist  $\varphi_t^*$  ein lokal gleichmäßig bester  $\alpha$ -ähnlicher Test für  $\left\{ \mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{(Z, \Delta) | T^{\circ}(Z, \Delta) = t} \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{\vartheta}^{(Z, \Delta) | T^{\circ}(Z, \Delta) = t} : \vartheta = (\eta_1 \lambda_0, \eta_2 \lambda_0, \lambda_3), \eta_1 \in \mathbb{R}, 0 < \eta_1 < \eta_2 \right\}$  ( $\eta_2 > 0, \lambda_0, \lambda_3 \in \mathfrak{L}$  fest).*

Das Problem bei dieser Art der Optimalität liegt nun darin, dass  $\eta_1'(t)$  noch entscheidend von  $t$  abhängt und somit  $\sup \{ \eta_1'(t) : t \in T(\mathbb{R}^n \times \{0, 1\}^n) \} = \eta_2$  gilt, so dass man beim unbedingten Testproblem keine Optimalität mehr erhält (siehe Anmerkung (c) auf Seite 100).

Da auch hier die einparametrische Verteilungsklasse

$$\left\{ \mathbb{P}_{\vartheta}^{(Z, \Delta) | T^{\circ}(Z, \Delta) = t} : \vartheta = (\eta_1 \lambda_0, \eta_2 \lambda_0, \lambda_3), \eta_1 \in \mathbb{R}, \eta_1 > 0 \right\}$$

( $\eta_2 > 0$ ,  $\lambda_0, \lambda_3 \in \mathfrak{L}$  fest)  $\mathbb{L}_1(\eta_2)$ -differenzierbar ist (siehe (Witting, 1985, Seite 1.70, Satz 1.183)), kann man nach einem lokal besten Test suchen. Auch hier sind alle in (Witting, 1985, Seite 1.70, Satz 1.183) und (Witting, 1985, Seite 223, Satz 2.44) an  $\eta_1 \mapsto p_{\vartheta}(z, \delta)$  gestellten Forderungen erfüllt. Als Prüfgröße erhält man dabei die  $\mathbb{L}_1(\eta_2)$ -Ableitung:

$$\begin{aligned} \dot{L}_{\eta_2, t}(z, \delta) &= \frac{\frac{d}{d\eta_1} p_{(\eta_1, \eta_2)}(z, \delta) \Big|_{\eta_1 = \eta_2}}{p_{(\eta_2, \eta_2)}(z, \delta)} \\ &= n! \frac{\frac{d}{d\eta_1} \frac{f_{(\eta_1 \lambda, \eta_2 \lambda, \lambda_3)}(z, \delta)}{f_{(\eta_1 \lambda, \eta_2 \lambda, \lambda_3)}^T(t^1, t^2)} \Big|_{\eta_1 = \eta_2}}{p_{(\eta_2, \eta_2)}(z, \delta)} \\ &= n! \left[ \left( M_1(\delta) / \eta_2 - \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(z_i) \right) n! \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \left( M_1(\pi(\delta)) / \eta_2 - \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(\pi(z_i)) \right) \right]. \end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt somit:

**3.35 Satz** Für jedes  $t \in T(\mathbb{R}^n \times \{0, 1\}^n)$  ist der Test  $\tilde{\varphi}_t^*$  mit

$$\tilde{\varphi}_t^*((z, \delta)) := \begin{cases} 1 & > \\ \tilde{\gamma}^*(t) & \text{falls } \eta_2 \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(z_i) - M_1(\delta) = \tilde{c}^*(t) \\ 0 & < \end{cases},$$

wobei  $\tilde{\gamma}^*(t), \tilde{c}^*(t)$  aus

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \eta_2 \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(\pi(z)_i) - M_1(\pi(\delta)) > \tilde{c}^*(t) \right\} \right| \\ &+ \frac{\tilde{\gamma}^*(t)}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \eta_2 \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(\pi(z)_i) - M_1(\pi(\delta)) = \tilde{c}^*(t) \right\} \right| = \alpha \end{aligned}$$

bestimmt werden, ein lokal bester  $\alpha$ -ähnlicher Test für  $\left\{ \mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{(Z, \Delta) | T^{\circ}(Z, \Delta) = t} \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{\vartheta}^{(Z, \Delta) | T^{\circ}(Z, \Delta) = t} : \vartheta = (\eta_1 \lambda_0, \eta_2 \lambda_0, \lambda_3), \eta_1 \in \mathbb{R}, 0 < \eta_1 < \eta_2 \right\}$  ( $\eta_2 > 0$ ,  $\lambda_0, \lambda_3 \in \mathfrak{L}$  fest).



Dass beim Übergang von  $\varphi_t^*$  zu  $\tilde{\varphi}_t^*$  „nicht viel“ Güte verloren geht, zeigt das folgenden Lemma, welches eine direkte Folgerung aus (Witting, 1985, Seite 225, Satz 2.46) ist:

**3.36 Lemma** Für jedes  $t \in T(\mathbb{R}^n \times \{0, 1\}^n)$  gilt:

$$\tilde{\varphi}_t^*(z, \delta) = 1 \implies \varphi_t^*(z, \delta) = 1 \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi}_t^*(z, \delta) = 0 \implies \varphi_t^*(z, \delta) = 0,$$

d.h. der Annahme-/Ablehnungsbereich von  $\tilde{\varphi}_t^*$  ist in dem Annahme-/Ablehnungsbereich von  $\varphi_t^*$  enthalten.  $\tilde{\varphi}_t^*$  unterscheidet sich von  $\varphi_t^*$  also nur durch einen größeren Randomisierungsbereich.

Anmerkungen zu Satz 3.34 und 3.35 sowie Lemma 3.36:

- (a) Von besonderem Interesse ist wieder der Fall  $\mathbf{K}_{\mathcal{W}_k}$ , in dem man  $\Lambda_0(t) := t^k$  wählen kann.
- (b) Da  $T$  eine für  $\mathbf{J}$  suffiziente und vollständige Statistik ist, stimmen die beiden Mengen von Tests  $\Phi_\alpha$  und  $\Phi_{NS}$  überein, d.h. ein Test ist genau dann auf dem Rand  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlich, wenn er ein Test mit Neyman-Struktur bzgl.  $T$  ist. Daher ist es an dieser Stelle legitim, mit den bedingten Verteilungen zu argumentieren.
- (c) Da man  $\eta'_1(t)$  i.a. nicht angeben kann, ist der Test  $\varphi_t^*$  oft nicht anwendbar. Daher wird man häufig auf den Test  $\tilde{\varphi}_t^*$  ausweichen.
- (d)  $\tilde{\varphi}_t^*$  ist auch ein für  $\left\{ \mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{(Z, \Delta) | T \circ (Z, \Delta) = t} \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{(\rho, \eta_2 \lambda_0, \lambda_3)}^{(Z, \Delta) | T \circ (Z, \Delta) = t} : \rho \in (-1, 0) \right\}$  ( $\mathbb{P}_\rho^{X_1}$  besitzt die Ausfallrate  $f(\rho)\eta_2\lambda_0 + g(\rho)\lambda_4$ ) lokal bester  $\alpha$ -ähnlicher Test. Dabei sind  $\lambda_4 \in \mathfrak{L}$  und  $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend und differenzierbar mit  $f(0) = 1$  und  $g(0) = g'(0) = 0$  beliebig (siehe Anmerkung 2.31).

Satz 3.35 kann noch auf das unbedingte Testproblem verallgemeinert werden:

**3.37 Satz**  $\tilde{\varphi}^*(z, \delta) := \tilde{\varphi}_{T(z, \delta)}^*(z, \delta)$  ist ein gegen  $\mathfrak{B}_1 := \left\{ \mathbb{P}_\vartheta^{(Z, \Delta)} : \vartheta = (\eta_1 \lambda_0, \eta_2 \lambda_0, \lambda_3), \eta_1 \in \mathbb{R}, 0 < \eta_1 < \eta_2 \right\}$  ( $\eta_2 > 0, \lambda_0, \lambda_3 \in \mathfrak{L}$  fest) lokal bester  $\alpha$ -ähnlicher Test, d.h. eine Lösung von (3.7) mit  $\mathfrak{B}_1 := \left\{ \mathbb{P}_\vartheta^{(Z, \Delta)} : \vartheta = (\eta_1 \lambda_0, \eta_2 \lambda_0, \lambda_3), \eta_1 \in \mathbb{R}, 0 < \eta_1 < \eta_2 \right\}$  ( $\eta_2 > 0, \lambda_0, \lambda_3 \in \mathfrak{L}$  fest).

BEWEIS: Offensichtlich gilt  $\tilde{\varphi}^* \in \Phi_{NS}$ . Da sich die  $\mathbb{L}_1(\eta_2)$ -Ableitung von  $\mathfrak{P}_1$  nach (Witting, 1985, Seite 170, Satz 1.183) zu

$$\dot{L}(z, \delta) = M_1(\delta)/\eta_2 - \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(z_i)$$

berechnet, erfüllt  $\varphi^*$  nach dem einfachen Neyman-Pearson Lemma (beachte  $P_0 \in \mathbf{J}$ ) für jedes  $t$  die Optimalitätsforderung in (3.8). Die Behauptung folgt nun mit Lemma 3.12.  $\square$

Anmerkung (d) gilt auch für das unbedingte Testproblem.

Für den Test  $\varphi^*(z, \delta) := \varphi_{T(z, \delta)}^*(z, \delta)$  aus Satz 3.34 kann keine zu Satz 3.37 analoge Aussage gemacht werden, da in (Witting, 1985, Seite 225, Satz 2.44) entscheidend von der Endlichkeit des zugrundeliegenden Stichprobenraums Gebrauch gemacht wird.

Das Problem bei den in den Sätzen 3.34, 3.35 und 3.37 hergeleiteten Tests besteht nun darin, dass die Optimalitätsaussagen noch von dem genauen Fußpunkt aus dem Rand abhängen. Besser wäre es, wenn die Tests für eine (parametrische) Teilklasse des Randes, in diesem Fall  $\{\eta = (\eta_2, \eta_2) : \eta_2 \in \mathbb{R}\}$ , identisch wären. Dies soll nun wieder mit Hilfe der *Plug-In Methode* erreicht werden. Allerdings gehen in diesem Fall die Optimalitätseigenschaften verloren. Zunächst wird wieder der Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\eta_2$  bestimmt. Nach der Likelihood-Gleichung

$$\frac{d}{d\eta_2} \ln(f_{(\eta_1, \eta_2)})(z, \delta) = M_2(\delta)/\eta_2 - \sum_{i=n_1+1}^n \Lambda_0(z_i) = 0$$

(siehe (3.22)) ergibt sich der Maximum-Likelihood-Schätzer zu:

$$\hat{\eta}_2(z, \delta) := \frac{M_2(\delta)}{\sum_{i=n_1+1}^n \Lambda_0(z_i)}.$$

Jetzt ist beim Test  $\tilde{\varphi}^*$  nur noch  $\eta_2$  durch  $\hat{\eta}_2$  zu ersetzen:

**3.38 Satz** (PERMUTATIONSTEST FÜR ZUFÄLLIG-ZENSIERTE DATEN) *Der Test  $\tilde{\varphi}(z, \delta) := \tilde{\varphi}_{T(z, \delta)}(z, \delta)$  mit*

$$\tilde{\varphi}_t(z, \delta) := \begin{cases} 1 & > \\ \tilde{\gamma}(t) & \text{falls } \hat{\eta}_2(z, \delta) \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(z_i) - M_1(\delta) = \tilde{c}(t) \\ 0 & < \end{cases},$$

wobei  $\tilde{\gamma}(t), \tilde{c}(t)$  aus

$$\frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \hat{\eta}_2(z, \delta) \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(\pi(z)_i) - M_1(\pi(\delta)) > \tilde{c}(t) \right\} \right| + \frac{\tilde{\gamma}(t)}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \hat{\eta}_2(z, \delta) \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(\pi(z)_i) - M_1(\pi(\delta)) = \tilde{c}(t) \right\} \right| = \alpha$$

bestimmt werden, scheint für das Testen von  $\left\{ \mathbb{P}_{\vartheta}^{(Z, \Delta)} : \vartheta = (\eta_2 \lambda_0, \eta_2 \lambda_0, \lambda_3), \eta_2 \in \mathbb{R} \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{\vartheta}^{(Z, \Delta)} : \vartheta = (\eta_1 \lambda_0, \eta_2 \lambda_0, \lambda_3), \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}, 0 < \eta_1 < \eta_2 \right\}$  ( $\lambda_0, \lambda_3 \in \mathfrak{L}$  fest) ein „guter“ Test zu sein und hält das Niveau  $\alpha$  auf ganz  $\mathbf{J}$  genau ein.

#### 3.4.4 UNVERFÄLSCHTE TESTS

Im folgenden wird es darum gehen, ein zu (Witting and Nölle, 1970, Seite 118f., Satz 3.13) analoges Resultat herzuleiten und es auf einige Tests anzuwenden. Eine ähnliche Aussage findet sich bereits in (Moser, 1992, Seite 33, Satz 2.7).

Als erstes muss man nach einer geeigneten Ordnung  $\preceq$  auf  $\mathbb{R}_+^n \times \{0, 1\}^n$  suchen, die die Hypothesen separiert. In (Moser, 1992, Seite 30) wird die Ordnung

$$(z, \delta) \preceq (z', \delta') : \iff \begin{cases} z_i \leq z'_i, & \delta_i \geq \delta'_i & \text{für } 1 \leq i \leq n_1 \text{ und} \\ z_i \geq z'_i, & \delta_i \leq \delta'_i & \text{für } n_1 + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

vorgeschlagen, da man bei  $F'_1 \prec_{\text{st}}^G F_1$  erwartet, dass die Werte  $z_i$  der ersten Stichprobe unter  $F$  kleiner sind als die Werte  $z'_i$  der ersten Stichprobe unter  $F'_1$  und gleichzeitig unter  $F'_1$  die Wahrscheinlichkeit für eine Zensierung wächst, d.h.  $\delta'_i \leq \delta_i$  gilt. Findet man nun Tests, die diese Ordnung respektierten, so gilt:

**3.39 Satz** Sei  $\varphi : (\mathbb{R}_+^n \times \{0, 1\}^n, \mathbb{B}_+^n \times \text{Pow}(\{0, 1\}^n)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B})$  ein Test mit der Eigenschaft:

$$\forall (z, \delta), (z', \delta') \in \mathbb{R}_+^n \times \{0, 1\}^n \text{ mit } z'_i \geq z_i, \delta'_i \leq \delta_i \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n_1\}, z'_j = z_j, \delta'_j = \delta_j \quad \forall j \neq i \text{ gilt } \varphi(z, \delta) \leq \varphi(z', \delta'), \quad (3.23)$$

so folgt für  $F_1, F'_1, F_2 \in \mathfrak{F}_0^c$ ,  $G \in \mathfrak{F}_{0,s}^c$ :

$$F'_1 \preceq_{\text{st}}^G F_1 \implies E_{(F_1, F_2, G)}(\varphi) \leq E_{(F'_1, F_2, G)}(\varphi).$$

BEWEIS: Seien  $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$  unter  $Q$  stu.  $\mathfrak{R}(0, 1)$ -verteilte Zufallsgrößen und  $F_1'^{-1}, F_1^{-1}, F_2^{-1}, G^{-1}$  die Pseudo-Inversen von  $F_1', F_1, F_2, G$ , dann gilt unter  $(F_1, F_2, G)$  bzw.  $Q$ :

$$\begin{aligned} (Z, \Delta) \sim & ( F_1^{-1} \circ U_1 \wedge G^{-1} \circ V_1, \dots, F_1^{-1} \circ U_{n_1} \wedge G^{-1} \circ V_{n_1}, \\ & F_2^{-1} \circ U_{n_1+1} \wedge G^{-1} \circ V_{n_1+1}, \dots, F_2^{-1} \circ U_n \wedge G^{-1} \circ V_n, \\ & \mathbf{1}_{\{F_1^{-1} \circ U_1 \leq G^{-1} \circ V_1\}}, \dots, \mathbf{1}_{\{F_1^{-1} \circ U_{n_1} \leq G^{-1} \circ V_{n_1}\}}, \\ & \mathbf{1}_{\{F_2^{-1} \circ U_{n_1+1} \leq G^{-1} \circ V_{n_1+1}\}}, \dots, \mathbf{1}_{\{F_2^{-1} \circ U_n \leq G^{-1} \circ V_n\}} ) := (\tilde{Z}, \tilde{\Delta}), \end{aligned}$$

und man erhält eine entsprechende Aussage für  $(F'_1, F_2, G)$ . Da aber  $F'_1 \preceq_{\text{st}}^G F_1$  gilt, folgt  $F_1'^{-1} \geq F_1^{-1}$ , und man erhält induktiv mit der Voraussetzung:

$$\begin{aligned} E_{(F_1, F_2, G)}(\varphi) &= \int \varphi d\mathbb{P}_{(F_1, F_2, G)}^{(Z, \Delta)} = \int \varphi dQ^{(\tilde{Z}, \tilde{\Delta})} \\ &\leq \int \varphi dQ^{(\tilde{Z}', \tilde{\Delta}')} = E_{(F'_1, F_2, G)}(\varphi). \end{aligned}$$

□

Angewendet wird dieser Satz wie folgt:

**3.40 Korollar** *Sei  $\varphi$  ein Test, der die Isotonieforderung (3.23) erfüllt. Ist  $\varphi$  zusätzlich auf  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlich, so ist  $\varphi$  unverfälscht zum Niveau  $\alpha$  für  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$  und somit insbesondere ein Test zum Niveau  $\alpha$ .*

BEWEIS: Die Aussage ergibt sich durch Vergleichen von Verteilungstupeln mit entsprechenden Verteilungstupeln aus dem Rand. □

Nun soll dieses Korollar noch auf mehrere Tests angewendet werden. Wie bereits angekündigt, sind die Tests  $\varphi^1(z, \delta) := \varphi_{T(z, \delta)}^1(z, \delta)$  und  $\varphi^2(z, \delta) := \varphi_{T(z, \delta)}^2(z, \delta)$  mit

$$\varphi_t^1((z, \delta)) := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma_1(t) & \text{falls } \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(z_i) = c_1(t) \\ 0 & < \end{cases}$$

bzw.

$$\varphi_t^2((z, \delta)) := \begin{cases} 1 & < \\ \gamma_2(t) & \text{falls } M_1(\delta) = c_2(t) \\ 0 & > \end{cases},$$

wobei  $\gamma_1(t), c_1(t)$  bzw.  $\gamma_2(t), c_2(t)$  aus

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(\pi(z)_i) > c_1(t) \right\} \right| \\ & + \frac{\gamma_1(t)}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(\pi(z)_i) = c_1(t) \right\} \right| = \alpha \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : M_1(\pi(\delta)) < c_2(t) \right\} \right| \\ & + \frac{\gamma_2(t)}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : M_1(\pi(\delta)) = c_2(t) \right\} \right| = \alpha \end{aligned}$$

bestimmt werden, unverfälscht. Dies zeigt man dadurch, dass der  $p$ -Wert der beiden Tests

$$p_1(z, \delta) = \frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : M_1(\pi(\delta)) \leq M_1(\delta) \right\} \right|$$

$$\text{und } p_2(z, \delta) = \frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(\pi(z)_i) \geq \sum_{i=1}^{n_1} \Lambda_0(z) \right\} \right|$$

in der oben angegebenen Ordnung fällt, was wiederum daran liegt, dass beim Übergang von  $(z, \delta)$  zu  $(z', \delta')$  die jeweiligen Prüfgrößen am beobachteten Tupel am meisten wachsen. Die Unverfälschtheit des lokal gleichmäßig besten Tests  $\varphi^*$  zeigt man wieder mit dem gleichen Trick wie auf Seite 73. Es sei darauf hingewiesen, dass alle oben angegebenen Tests die Isotonieforderung (3.23) erfüllen. Da sie per Definition auf dem Rand  $\mathbf{J}$   $\alpha$ -ähnlich sind, sind sie somit nach Korollar 3.40 unverfälscht zum Niveau  $\alpha$ .

### 3.5 TESTS MIT DER ANZAHL DER REALISIERUNGEN ALS PRÜFGRÖSSE

Wie man in den Abschnitten über Typ I- und zufällig-zensierten Daten gesehen hat, spielen die Statistiken  $M_1$  und  $M_2$  eine wichtige Rolle bei der Suche

nach optimalen Tests. Hier soll gezeigt werden, dass sich auch Tests mit diesen Prüfgrößen rechtfertigen lassen.

Als erstes soll ein Test für ein Einstichprobenproblem hergeleitet werden. Seien also  $X_1, \dots, X_n$  stu. Zufallsgrößen, die einer Typ I-Zensierung mit Zensierungszeitpunkt  $C$  unterworfen sind, so dass man nur

$$\widehat{X}_i := \begin{cases} X_i & \text{falls } X_i \leq C \\ D & \text{sonst} \end{cases} \quad (1 \leq i \leq n)$$

beobachten kann ( $D > C$ ). Anders als bisher immer angenommen, dürfen sich die Verteilungen der  $X_i$  hier unterscheiden. Bezeichne  $F_i$  die Verteilungsfunktion von  $X_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), so wird nur vorausgesetzt, dass  $F_i$  stetig ist und  $F_i(0) = 0$  sowie  $0 < F_i(C) < 1$  genügt. Die Hypothesen lauten dann ( $p_0 \in (0, 1)$ ):

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{\mathbf{H}} &:= \left\{ \otimes_{i=1}^n \mathbb{P}_{F_i}^{X_i} : F_i(C) \geq p_0 \right\}, \\ \mathfrak{P}_{\mathbf{K}} &:= \left\{ \otimes_{i=1}^n \mathbb{P}_{F_i}^{X_i} : F_i(C) \leq p_0 \text{ und } F_i(C) < p_0 \text{ für ein } j \right\} \end{aligned}$$

oder kurz

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &: F_i(C) \geq p_0 \quad (1 \leq i \leq n), \\ \mathbf{K} &: F_i(C) \leq p_0 \quad (1 \leq i \leq n) \text{ und } F_i(C) < p_0 \text{ für ein } j. \end{aligned}$$

Definiert man die Gruppe  $\mathcal{G}$  durch

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &:= \{g : g : (0, C) \cup \{D\} \longrightarrow (0, C) \cup \{D\} \text{ stetig,} \\ &\quad \text{streng monoton wachsend und bijektiv auf } (0, C) \text{ mit } g(D) = D\}, \end{aligned}$$

so kann man eine Gruppe  $\mathcal{Q}$  von Transformationen auf dem Stichprobenraum angeben:

$$\mathcal{Q} := \{\widehat{g} : \widehat{g}(\widehat{x}) = (g_1(\widehat{x}_{\pi(1)}), \dots, g_n(\widehat{x}_{\pi(n)})) \text{ mit } g_1, \dots, g_n \in \mathcal{G}, \pi \in \mathcal{S}_n\}.$$

Da

$$\mathbb{P}_{(F_1, \dots, F_n)}^{g_i \circ \widehat{X}_i}((0, C)) = \mathbb{P}_{(F_1, \dots, F_n)}^{\widehat{X}_i}((0, C)) = F_i(C) \quad (1 \leq i \leq n)$$

gilt und die hier angegebenen Hypothesen invariant gegenüber Permutationen der Koordinaten sind, sind sie auch invariant gegenüber  $\mathcal{Q}$ . Weiter ist

$$M(\widehat{x}) := |\{\widehat{x}_i : \widehat{x}_i \leq C\}|$$

### 3.5 Tests mit der Anzahl der Realisierungen als Prüfgröße

---

eine gegenüber  $\mathcal{Q}$  maximalinvariante Statistik. Die Invarianzbehauptung ist offensichtlich. Gilt weiter  $M(\hat{x}) = M(\hat{x}')$ , so transformiere  $\hat{x}'$  als erstes mit einer Permutation der Koordinaten auf  $\hat{x}''$ , wobei die zensierten Koordinaten bei  $\hat{x}$  und  $\hat{x}''$  dieselben seien. Anschließend konstruiere die Funktionen  $g_i$  so, dass sie auf  $(0, \hat{x}_i'')$  und  $(\hat{x}_i'', C)$  affin linear sind und den Bedingungen  $\lim_{x \rightarrow 0} g_i(x) = 0, \lim_{x \rightarrow C} g_i(x) = C$  und  $g(\hat{x}_i'') = \hat{x}_i$  genügen ( $1 \leq i \leq n$ ). Somit gilt also  $\hat{g}(\hat{x}') = \hat{x}$ .

Für das induzierte Testproblem gilt aber:  $\mathbb{P}_{(F_1, \dots, F_n)}^{M \circ \hat{X}} = \star_{i=1}^n \mathcal{B}(1, p_i)$  mit  $p_i := F_i(C)$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Dies ist die gleiche induzierte Verteilung wie beim Zeichentest (siehe (Alsmeyer, 2002, Abschnitt 34)). Allerdings lauten die Hypothesen leicht anders:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^M &: p_i \geq p_0 \quad (1 \leq i \leq n), \\ \mathbf{K}^M &: p_i \leq p_0 \quad (1 \leq i \leq n) \text{ und } p_j < p_0 \text{ für ein } j. \end{aligned}$$

Testet man  $(p_0, \dots, p_0)$  gegen  $(p_1, \dots, p_n)$ , so lautet nach dem einfachen Neyman-Pearson Lemma die Prüfgröße des besten Tests zum Niveau  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}_{(p_1, \dots, p_n)}^{M \circ \hat{X}}(k)}{\mathbb{P}_{(p_0, \dots, p_0)}^{M \circ \hat{X}}(k)} &= \frac{\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}: |I|=k} \prod_{i \in I} p_i \prod_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus I} (1 - p_i)}{\binom{n}{k} p_0^k (1 - p_0)^{n-k}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n (1 - p_i) \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}: |I|=k} \prod_{i \in I} \frac{p_i}{1 - p_i}}{\binom{n}{k} p_0^k (1 - p_0)^{n-k}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Wie im Beweis zur Optimalität des Zeichentests zeigt man, dass

$$\begin{aligned} \left( \binom{n}{k+1} \right)^{-1} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}: |I|=k+1} \prod_{i \in I} \frac{p_i}{1 - p_i} \\ \geq \left( \min_{1 \leq i \leq n} \frac{p_i}{1 - p_i} \right) \left( \binom{n}{k} \right)^{-1} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}: |I|=k} \prod_{i \in I} \frac{p_i}{1 - p_i} \end{aligned} \quad (3.25)$$

und

$$\begin{aligned} \left( \binom{n}{k+1} \right)^{-1} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}: |I|=k+1} \prod_{i \in I} \frac{p_i}{1 - p_i} \\ \leq \left( \max_{1 \leq i \leq n} \frac{p_i}{1 - p_i} \right) \left( \binom{n}{k} \right)^{-1} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}: |I|=k} \prod_{i \in I} \frac{p_i}{1 - p_i} \end{aligned} \quad (3.26)$$

gilt. Also ist (3.24) für  $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbf{K}^M$  nach (3.25) streng antiton in  $k$  und für  $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbf{H}^M \setminus \{(p_0, \dots, p_0)\}$  nach (3.26) streng isoton in  $k$ . Ein gleichmäßig bester Test zum Niveau  $\alpha$  für  $(p_0, \dots, p_0)$  gegen  $\mathbf{K}^M$  lautet daher:

$$\varphi^*(k) := \begin{cases} 1 & < \\ \gamma^* & \text{falls } k = c^* \\ 0 & > \end{cases},$$

wobei  $\gamma^*, c^*$  so bestimmt werden, dass der Test das Niveau  $\alpha$  unter einer  $\mathcal{B}(n, p_0)$ -Verteilung voll ausschöpft. Das dieser Test auch ein Test zum Niveau  $\alpha$  ist, sieht man ein, in dem man zeigt, dass  $1 - \varphi^*$  ein gleichmäßig bester Test zum Niveau  $1 - \alpha$  für die Hypothesen  $(p_0, \dots, p_0)$  gegen  $\mathbf{H}^M \setminus \{(p_0, \dots, p_0)\}$  ist. Es gilt also:

**3.41 Satz** (TYP I-ZENSIERTE DATEN, EINSTICHPROBENFALL) *Der Test  $\varphi^*(\hat{x}) := \varphi^*(M(\hat{x}))$  ist ein gleichmäßig bester  $\mathcal{Q}$ -invarianter Test zum Niveau  $\alpha$  für die Hypothesen  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$ .*

Auch im entsprechenden Zweistichprobenproblem kann man einen optimalen Test herleiten. Liege also das gleiche Modell wie in Abschnitt 3.3 vor. Definiert man die Gruppe  $\tilde{\mathcal{Q}}$  durch

$$\tilde{\mathcal{Q}} := \left\{ \hat{g} : \hat{g}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = (g_1(\hat{x}_{\pi_1(1)}), \dots, g_{n_1}(\hat{x}_{\pi_1(n_1)}), g_{n_1+1}(\hat{x}_{n_1+\pi_2(1)}), \dots, g_n(\hat{x}_{n_1+\pi_2(n_2)}) \right\} \text{ mit } g_1, \dots, g_n \in \mathcal{G}, \pi_1 \in \mathcal{S}_{n_1}, \pi_2 \in \mathcal{S}_{n_2},$$

so sind die Hypothesen

$$\mathfrak{P}_{\mathbf{H}} := \left\{ \otimes_{i=1}^n \mathbb{P}_{F_i}^{X_i} : \min_{1 \leq i \leq n_1} F_i(C) \geq \max_{n_1+1 \leq i \leq n} F_i(C) \right\},$$

$$\mathfrak{P}_{\mathbf{K}} := \left\{ \otimes_{i=1}^n \mathbb{P}_{F_i}^{X_i} : \max_{1 \leq i \leq n_1} F_i(C) < \min_{n_1+1 \leq i \leq n} F_i(C) \right\}$$

oder kurz

$$\mathbf{H} : \min_{1 \leq i \leq n_1} F_i(C) \geq \max_{n_1+1 \leq i \leq n} F_i(C), \quad \mathbf{K} : \max_{1 \leq i \leq n_1} F_i(C) < \min_{n_1+1 \leq i \leq n} F_i(C)$$

invariant gegenüber  $\tilde{\mathcal{Q}}$ . Diese Behauptung sowie die Maximalinvarianz von  $(M_1, M_2)$  gegenüber  $\tilde{\mathcal{Q}}$  zeigt man wie im Einstichprobenproblem.



### 3.5 Tests mit der Anzahl der Realisierungen als Prüfgröße

---

Weiter sind  $M_1, M_2$  unter jedem Parameter  $\vartheta = (F_1, \dots, F_n)$  stu. und es gilt  $\mathbb{P}_{\vartheta}^{M_1 \circ \widehat{X}} = \star_{i=1}^{n_1} \mathcal{B}(1, p_i), \mathbb{P}_{\vartheta}^{M_2 \circ \widehat{X}} = \star_{i=n_1+1}^n \mathcal{B}(1, p_i)$  mit  $p_i = F_i(C)$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Die Hypothesen des induzierten Testproblems lauten daher:

$$\mathbf{H}^{(M_1, M_2)} : \min_{1 \leq i \leq n_1} p_i \geq \max_{n_1+1 \leq i \leq n} p_i, \quad \mathbf{K}^{(M_1, M_2)} : \max_{1 \leq i \leq n_1} p_i < \min_{n_1+1 \leq i \leq n} p_i.$$

Da nach

$$E_{(p_1, \dots, p_n)}(\varphi) = \sum_{\substack{I_1 \subseteq \{1, \dots, n_1\} : |I_1|=m_1, \\ I_2 \subseteq \{n_1+1, \dots, n\} : |I_2|=m_2}} \varphi(m_1, m_2) \prod_{i \in I_1 \cup I_2} p_i \prod_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus (I_1 \cup I_2)} (1 - p_i)$$

die Gütefunktion eines jeden Tests

$$\varphi : (\{0, \dots, n_1\} \times \{0, \dots, n_2\}, \text{Pow}(\{0, \dots, n_1\} \times \{0, \dots, n_2\})) \longrightarrow ([0, 1], \mathbb{B}_{[0,1]})$$

stetig in Abhängigkeit von  $(p_1, \dots, p_n)$  ist, ist jeder für  $\mathbf{H}^{(M_1, M_2)}$  gegen  $\mathbf{K}^{(M_1, M_2)}$  zum Niveau  $\alpha$  unverfälschte Test auf dem Rand  $\mathbf{J}^{(M_1, M_2)} := \overline{\mathbf{H}^{(M_1, M_2)}} \cap \overline{\mathbf{K}^{(M_1, M_2)}} = \{(p, \dots, p) : p \in (0, 1)\}$  der Hypothesen  $\alpha$ -ähnlich. Somit sollte man nach einem gleichmäßig besten auf  $\mathbf{J}^{(M_1, M_2)}$   $\alpha$ -ähnlichen Test suchen, der für  $\mathbf{H}^{(M_1, M_2)}$  gegen  $\mathbf{K}^{(M_1, M_2)}$  unverfälscht ist. Nun genügt  $M_i$  für  $\vartheta = (p, \dots, p)$  einer  $\mathcal{B}(n_i, p)$ -Verteilung ( $i = 1, 2$ ) und somit ist  $M := M_1 + M_2$  eine für  $\mathbf{J}^{(M_1, M_2)}$  suffiziente und vollständige Statistik. Also kann man das Testproblem durch das an  $M$  bedingte Testproblem ersetzen. Für  $m_1 \in \{0, \dots, n_1\}, m_2 \in \{0, \dots, n_2\}$  mit  $m_2 = m - m_1$  gilt aber:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{(p_1, \dots, p_n)}(M_1 = m_1, M_2 = m_2 | M = m) \\ &= \frac{\sum_{\substack{I_1 \subseteq \{1, \dots, n_1\} \\ |I_1|=m_1}} \prod_{i \in I_1} p_i \prod_{i \in \{1, \dots, n_1\} \setminus I_1} (1 - p_i) \sum_{\substack{I_2 \subseteq \{n_1+1, \dots, n\} \\ |I_2|=m-m_1}} \prod_{i \in I_2} p_i \prod_{i \in \{n_1+1, \dots, n\} \setminus I_2} (1 - p_i)}{\sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=m}} \prod_{i \in I} p_i \prod_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus I} (1 - p_i)} \\ &= \frac{\sum_{I_1 \subseteq \{1, \dots, n_1\} : |I_1|=m_1} \prod_{i \in I_1} \frac{p_i}{1-p_i} \sum_{I_2 \subseteq \{n_1+1, \dots, n\} : |I_2|=m-m_1} \prod_{i \in I_2} \frac{p_i}{1-p_i}}{\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\} : |I|=m} \prod_{i \in I} \frac{p_i}{1-p_i}}, \end{aligned}$$

wobei sich die bedingte Verteilung auf dem Rand zu einer  $\mathfrak{H}(n, n_1, m)$ -(Hypergeometrische) Verteilung vereinfacht. Nach dem einfachen Neyman-Pearson Lemma lautet damit die Prüfgröße des besten Tests zum Niveau  $\alpha$  für die

### 3 Permutationstests

---

Hypothesen  $\left\{ \mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{(M_1, M_2) \circ \widehat{X}} | M \circ \widehat{X} = m \right\}$  gegen  $\left\{ \mathbb{P}_{(p_1, \dots, p_n)}^{(M_1, M_2) \circ \widehat{X}} | M \circ \widehat{X} = m \right\}$ :

$$\frac{\sum_{I_1 \subseteq \{1, \dots, n_1\} : |I_1| = m_1} \prod_{i \in I_1} \frac{p_i}{1-p_i} \sum_{I_2 \subseteq \{n_1+1, \dots, n\} : |I_2| = m-m_1} \prod_{i \in I_2} \frac{p_i}{1-p_i}}{\binom{n_1}{m_1} \binom{n_2}{m-m_1}} \times \frac{\binom{n}{m}}{\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\} : |I| = m} \prod_{i \in I} \frac{p_i}{1-p_i}}. \quad (3.27)$$

Nach (3.25) und (3.26) gilt weiter:

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{I_1 \subseteq \{1, \dots, n_1\} : |I_1| = m_1+1} \prod_{i \in I_1} \frac{p_i}{1-p_i} \sum_{I_2 \subseteq \{n_1+1, \dots, n\} : |I_2| = m-m_1-1} \prod_{i \in I_2} \frac{p_i}{1-p_i}}{\binom{n_1+1}{m_1+1} \binom{n_2}{m-m_1-1}} \\ & \geq \frac{\sum_{I_1 \subseteq \{1, \dots, n_1\} : |I_1| = m_1} \prod_{i \in I_1} \frac{p_i}{1-p_i} \sum_{I_2 \subseteq \{n_1+1, \dots, n\} : |I_2| = m-m_1} \prod_{i \in I_2} \frac{p_i}{1-p_i}}{\binom{n_1}{m_1} \binom{n_2}{m-m_1}} \\ & \quad \times \min_{1 \leq i \leq n_1} \frac{p_i}{1-p_i} \left( \max_{n_1+1 \leq i \leq n} \frac{p_i}{1-p_i} \right)^{-1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{I_1 \subseteq \{1, \dots, n_1\} : |I_1| = m_1+1} \prod_{i \in I_1} \frac{p_i}{1-p_i} \sum_{I_2 \subseteq \{n_1+1, \dots, n\} : |I_2| = m-m_1-1} \prod_{i \in I_2} \frac{p_i}{1-p_i}}{\binom{n_1+1}{m_1+1} \binom{n_2}{m-m_1-1}} \\ & \leq \frac{\sum_{I_1 \subseteq \{1, \dots, n_1\} : |I_1| = m_1} \prod_{i \in I_1} \frac{p_i}{1-p_i} \sum_{I_2 \subseteq \{n_1+1, \dots, n\} : |I_2| = m-m_1} \prod_{i \in I_2} \frac{p_i}{1-p_i}}{\binom{n_1}{m_1} \binom{n_2}{m-m_1}} \\ & \quad \times \max_{1 \leq i \leq n_1} \frac{p_i}{1-p_i} \left( \min_{n_1+1 \leq i \leq n} \frac{p_i}{1-p_i} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Also ist (3.27) für  $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbf{K}^{(M_1, M_2)}$  streng antiton in  $m_1$  und für  $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbf{H}^{(M_1, M_2)} \setminus \mathbf{J}^{(M_1, M_2)}$  streng isoton in  $m_1$ . Der Test

$$\varphi_m^*(m_1, m - m_1) := \begin{cases} 1 & < \\ \gamma^*(m) & \text{falls } m_1 = c^*(m) \\ 0 & > \end{cases},$$

wobei  $\gamma^*(m), c^*(m)$  so bestimmt werden, dass der Test  $\varphi_m^*$  das Niveau  $\alpha$  unter einer  $\mathfrak{H}(n, n_1, m)$ -Verteilung voll ausschöpft, löst somit das bedingte, induzierte Testproblem. Da der zusammengesetzte Test  $\varphi^*(m_1, m_2) := \varphi_{m_1+m_2}^*(m_1, m_2)$  meßbar ist und  $\mathbf{J}^{(M_1, M_2)}$  und  $\mathbf{K}^{(M_1, M_2)}$  äquivalente Verteilungsklassen sind, ist  $\varphi^*$  nach (Witting and Nölle, 1970, Seite 183, A 5.10) ein gleichmäßig bester auf  $\mathbf{J}^{(M_1, M_2)}$   $\alpha$ -ähnlicher Test für  $\mathbf{H}^{(M_1, M_2)}$  gegen  $\mathbf{K}^{(M_1, M_2)}$ .

Auch hier zeigt man die Unverfälschtheit von  $\varphi^*$ , in dem man zeigt, dass  $1 - \varphi^*$  ein gleichmäßig bester Test zum Niveau  $1 - \alpha$  für  $\mathbf{J}^{(M_1, M_2)}$  gegen  $\mathbf{H}^{(M_1, M_2)} \setminus \mathbf{J}^{(M_1, M_2)}$  ist. Es gilt also:

**3.42 Satz** (TYP I-ZENSIERTE DATEN, ZWEISTICHPROBENFALL) *Der Test  $\varphi^*(\hat{x}) := \varphi_{M_1(\hat{x})+M_2(\hat{x})}^*(M_1(\hat{x}))$  ist ein gleichmäßig bester  $\tilde{\mathcal{Q}}$ -invarianter zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für die Hypothesen  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$ .*

Auch im Falle zufällig-zensierte Daten lässt sich der obige Test rechtfertigen. Hier betrachtet man die Gruppe  $\mathcal{G}'$  mit

$$\mathcal{G}' := \{g : g : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty) \text{ stetig,} \\ \text{streng monoton wachsend und bijektiv}\},$$

und weiter die Gruppe  $\mathcal{Q}'$  mit

$$\mathcal{Q}' := \{\hat{g} : \hat{g}(z, \delta) = (g_1(z_{\pi_1(1)}), \dots, g_{n_1}(z_{\pi_1(n_1)}), \\ g_{n_1+1}(z_{n_1+\pi_2(1)}), \dots, g_n(z_{n_1+\pi_2(n_2)}), \delta_1, \dots, \delta_n) \\ \text{mit } g_1, \dots, g_n \in \mathcal{G}', \pi_1 \in \mathcal{S}_{n_1}, \pi_2 \in \mathcal{S}_{n_2}\},$$

sowie die Hypothesen

$$\mathfrak{P}_{\mathbf{H}} := \left\{ \otimes_{i=1}^{n_1} \mathbb{P}_{F_i}^{X_i} \otimes_{i=1}^{n_2} \mathbb{P}_G^{Y_i} : \max_{1 \leq i \leq n_1} \int F_i dP_{G_i} \geq \min_{n_1+1 \leq i \leq n} \int F_i dP_{G_i} \right\}, \\ \mathfrak{P}_{\mathbf{K}} := \left\{ \otimes_{i=1}^{n_1} \mathbb{P}_{F_i}^{X_i} \otimes_{i=1}^{n_2} \mathbb{P}_G^{Y_i} : \min_{i \leq i \leq n_1} \int F_i dP_{G_i} < \max_{n_1+1 \leq i \leq n} \int F_i dP_{G_i} \right\}$$

oder kurz

$$\mathbf{H} : \max_{1 \leq i \leq n_1} \int F_i dP_{G_i} \geq \min_{n_1+1 \leq i \leq n} \int F_i dP_{G_i}, \\ \mathbf{K} : \min_{i \leq i \leq n_1} \int F_i dP_{G_i} < \max_{n_1+1 \leq i \leq n} \int F_i dP_{G_i},$$

wobei  $F_i$  die Verteilungsfunktion der  $i$ -ten Überlebenszeit und  $G_i$  die Verteilungsfunktion der  $i$ -ten Zensierungszeit bezeichnet ( $1 \leq i \leq n$ ).  $\int F_i dP_{G_i}$  gibt dabei die Wahrscheinlichkeit für eine Realisierung der  $i$ -ten Überlebenszeit an ( $1 \leq i \leq n$ ). Auch hier sind die Hypothesen invariant gegenüber Permutationen in den ersten  $n_1$  und letzten  $n_2$  Komponenten. Weiter gilt  $g_i \circ Z_i = g_i \circ X_i \wedge g_i \circ Y_i$  und somit:

$$\mathbb{P}_{(F_1, \dots, F_n, G_1, \dots, G_n)}^{(g_i, \text{id}) \circ (Z_i, \Delta_i)} = \mathbb{P}_{\vartheta'}^{(Z_i, \Delta_i)}$$

mit  $\vartheta' = (F_1, \dots, F_{i-1}, F_i \circ g_i^{-1}, F_{i+1}, \dots, F_n, G_1, \dots, G_{i-1}, G_i \circ g_i^{-1}, G_{i+1}, \dots, F_n)$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Da

$$\int F_i \circ g_i^{-1} dP_{G_i \circ g_i^{-1}} = \int F_i dP_{G_i}$$

gilt ( $1 \leq i \leq n$ ), sind die Hypothesen invariant gegenüber  $\mathcal{Q}'$ . Man weist ohne große Mühe nach, dass  $(M_1, M_2)$  eine gegenüber  $\mathcal{Q}'$  maximalinvariante Statistik ist. Dabei sind erneut  $M_1, M_2$  unter jedem Parameter  $\vartheta = (F_1, \dots, F_n, G_1, \dots, G_n)$  stu. und es gilt  $\mathbb{P}_{\vartheta}^{M_1 \circ (Z, \Delta)} = \star_{i=1}^{n_1} \mathcal{B}(1, p_i), \mathbb{P}_{\vartheta}^{M_2 \circ (Z, \Delta)} = \star_{i=n_1+1}^n \mathcal{B}(1, p_i)$  mit  $p_i = \int F_i dP_{G_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Die induzierten Hypothesen lauten damit genau so wie im Fall Typ I-zensierter Daten und man erhält:

**3.43 Satz** (ZUFÄLLIG-ZENSIERTE DATEN, ZWEISTICHPROBENFALL) *Der Test  $\varphi^*(z, \delta) := \varphi_{M_1(z, \delta) + M_2(z, \delta)}^*(M_1(z, \delta))$  ist ein gleichmäßig bester  $\mathcal{Q}'$ -invarianter zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Test für die Hypothesen  $\mathbf{H}$  gegen  $\mathbf{K}$ .*

Dabei stimmen die in den Sätzen 3.42 und 3.43 angegebenen Tests  $\varphi^*$  mit den auf Seite 72 und Seite 107 definierten Tests  $\varphi^1$  bzw.  $\varphi^2$  überein.

Die obigen Tests lassen sich auch rechtfertigen, wenn man es nicht mit zensierten Daten zu tun hat. Den Test aus Satz 3.41 kann man als einen Test auf die Lage eines Fraktils ansehen und als optimal kennzeichnen, falls man  $\mathcal{G}$  durch

$$\widehat{\mathcal{G}} := \{g : g : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty) \text{ stetig,} \\ \text{streng monoton wachsend und bijektiv mit } g(C) = C\},$$

ersetzt. Ebenso kann man den Test aus Satz 3.42 als einen optimalen Test kennzeichnen, der überprüft, ob die Verteilungen der zwei Stichproben an der Stelle  $C$  geordnet sind.

### 3.6 ANMERKUNGEN

Die Idee, die kritischen Werte bedingt unter einer für den Rand suffizienten und vollständigen Statistik festzulegen, wurde im Zusammenhang mit Rangtests für zufällig-zensierte Daten in (Janssen, 1991), (Neuhaus, 1993) und (Janssen and Mayer, 2001) aufgegriffen.

Hier wurde ausschließlich die einseitige Fragestellung behandelt. Interessiert jedoch nicht die Frage, ob eine Stichprobe besser ist als die andere,

sondern ob Unterschiede zwischen den Stichproben bestehen, so liegt eine zweiseitige Fragestellung vor. Die Hypothesen lauten in diesem Fall

$$\mathbf{H} : F_1 = F_2, \quad \mathbf{K} : F_1 \neq F_2.$$

Auch für diesen Fall lassen sich Permutationstests herleiten, die für eine entsprechende parametrische Teilklasse von  $\mathbf{K}$  unter gewissen Nebenbedingungen optimal bzw. „gut“ sind. Das Problem bei dieser Fragestellung besteht allerdings darin, dass man keine Ordnung findet, so dass die Werte der entsprechenden Tests in dieser Ordnung wachsen und damit die Tests für die entsprechend definierten Hypothesen unverfälscht sind. Aus diesem Grund wurde hier auf die Herleitung solcher Tests verzichtet.

Desweiteren wurden an dieser Stelle auch nur Tests für die Situation einer sogenannten Rechts-Zensierung, wie sie in klinischen Studien häufig auftritt, hergeleitet. In gleicher Art und Weise sollte man allerdings auch Tests für links-zensierte Daten oder sogar für links- und rechts-zensierte Daten angeben können. Eine Links-Zensierung liegt z.B. dann vor, wenn man eine Untersuchung darüber durchführen will, in welchem Alter Kinder laufen lernen und zu Beginn der Studie einige Kinder bereits laufen können. Diese Daten sind sogar links- und rechts-zensiert, falls auch nach der Studie manche Kinder noch immer nicht laufen können.

Sucht man nicht nach einem gegenüber einer Proportional Hazard Familie zu einem festen Baseline Hazard optimalen Permutationstests, sondern z.B. nach einem gegenüber der Familie der Lognormalverteilungen optimalen Permutationstest, so hat man die entsprechenden Dichten einzusetzen und dann eventuell noch die freien Parameter zu schätzen.



---

## Kapitel 4

### SIMULATIONSSTUDIEN

---

Da man die in Kapitel 3 hergeleiteten Permutationstests nicht als in einer geeigneten Weise optimal kennzeichnen konnte, wurde im Anschluß eine Simulationsstudie durchgeführt, um die Ergebnisse mit den entsprechenden, bereits in der Literatur vorgeschlagenen Rangtests zu vergleichen.

Wenn man sich die Permutationstests für die verschiedenen Zensierungsarten noch einmal genau ansieht, so haben die bedingten Tests alle die Gestalt

$$\varphi_i^*(w) := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^*(t) & \text{falls } \sum_{i=1}^{n_1} w_i = c^*(t) \\ 0 & < \end{cases} ,$$

wobei  $\gamma^*(t), c^*(t)$  aus

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \sum_{i=1}^{n_1} w_i > c^*(t) \right\} \right| \\ & + \frac{\gamma^*(t)}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \sum_{i=1}^{n_1} w_i = c^*(t) \right\} \right| = \alpha \end{aligned}$$

bestimmt werden. Im Fall von Typ I-zensierten Daten hat man beispielsweise die  $w_i$  als

$$w_i := \hat{\eta}_2(\hat{x}) \left( \mathbf{1}_{[0,C]}(\hat{x}_i) \Lambda_0(\hat{x}_i) + \mathbf{1}_{\{D\}}(\hat{x}_i) \Lambda_0(C) \right) - \mathbf{1}_{[0,C]}(\hat{x}_i)$$

zu wählen. Weiter ist zu beachten, dass die bedingte Verteilung  $\mathbb{P}_{\mathbf{J}}^{W \circ \hat{X} | T \circ \hat{X} = t}$  eine Laplace-Verteilung auf  $\{\pi(w) : \pi \in \mathcal{S}_n\}$  ist, so dass der  $p$ -Wert der jeweiligen Tests durch die Anzahl der Permutationen mit einem größeren oder

gleichen Wert der Prüfstatistik  $\sum_{i=1}^{n_1} w_i$  gegeben ist. Da man aus dem  $p$ -Wert eines Tests auch seinen eigentlichen Wert ausrechnen kann, gilt es also im folgenden, den  $p$ -Wert möglichst effizient zu berechnen. Aus der Arbeit (Gebhard, 1995) geht deutlich hervor, dass man im unzensierten Fall den Algorithmus von PAGANO und TRITCHLER (siehe (Pagano and Tritchler, 1983)) benutzen sollte. Vollzieht man den Beweis des Algorithmus noch einmal nach, so sieht man ein, dass dieser auch im Fall zensierter Daten angewendet werden kann, da er nur die oben angesprochenen Eigenschaften benutzt. Von Herrn DR. GEBHARD lag bereits ein C++-Programm vor. Jedoch wurde dieses aus Effizienzgründen noch den Simulationsbedingungen angepasst. Anschließend wurde ein Zufallszahlengenerator erstellt, mit dessen Hilfe später exponentialverteilte Zufallsgrößen simuliert wurden. Damit konnte gewährleistet werden, dass alle untersuchten Tests auf das gleiche Datenmaterial angewendet werden konnten.

Da sich die Vorteile der Permutationstests gegenüber Rangtests besonders bei kleinen Stichproben bemerkbar machen sollten, wurde die Stichprobengröße auf jeweils 12 ( $n_1 = n_2 = 12$ ) festgesetzt. Weiter wurde der Parameter  $\theta_2$  (der Exponentialverteilungen) der zweiten Stichprobe auf 1 festgesetzt und der Parameter  $\theta_1$  (der Exponentialverteilungen) der ersten Stichprobe so variiert, dass der Quotient  $\theta_2/\theta_1$  in einem Abstand von 0.1 die Werte 1 bis 3 durchläuft. Zu jedem dieser Quotienten wurden dann 1000 Datensätze erzeugt. Dabei wurden die Exponentialverteilungen ausgesucht, da sie oft benutzt werden, einfach zu generieren sind und sich andere Situationen häufig auf den Fall von Exponentialverteilungen zurückführen lassen.

### 4.1 UNZENSIERTE DATEN

Auch in (Gebhard, 1995) wurden solche Simulationsstudien durchgeführt. Dabei wurde dort im Fall unzensierter Daten der Permutationstest mit einem optimalen parametrischen Test (siehe (Witting, 1985, Seite 391, Beispiel 3.71)) und dem Wilcoxon-Rangtest verglichen. Es zeigte sich bei einem Stichprobenumfang von jeweils 40, dass die Güte des Permutationstests von der des optimalen parametrischen Tests kaum abweicht, wohingegen die Güte des Wilcoxon-Rangtests deutlich abfällt. Dazu ist allerdings zu sagen, dass der Wilcoxon-Rangtest im Gegensatz zum Permutationstest und dem optimalen parametrischen Test keinerlei Optimalitätseigenschaften gegenüber



Exponentialverteilungen besitzt. Ein gegenüber Exponentialverteilungen lokal optimaler Rangtest ist der Log-Rangtest, so dass als erstes im Fall unzensierter Daten die Güte des Permutationstests mit der des optimalen parametrischen Tests, des Log-Rangtests und des Wilcoxon-Rangtests verglichen werden soll. Da man die Güte des optimalen parametrischen Tests mit Hilfe der  $F$ -Verteilung genau ermitteln kann, wurde dies hier getan. Bei allen anderen Tests wurde als Schätzer der Gütefunktion an der Stelle  $(\theta_1, \theta_2)$  die Anzahl der Datensätze, deren  $p$ -Werte kleiner als das entsprechende Niveau  $\alpha$  war, geteilt durch 1000 verwendet.

Wie man in Abbildung 4.1 deutlich sieht, fällt auch hier die empirische Gütefunktion des Wilcoxon-Rangtests gegenüber der des Permutationstests insbesondere bei kleinen Niveaus deutlich ab. Allerdings kann man die empirische Gütefunktion des Log-Rangtests kaum von der des Permutationstests unterscheiden. Dass sich die (empirische) Gütefunktion des Permutationstests von der des optimalen parametrischen Tests bei kleinen Niveaus so deutlich unterscheidet, hängt wohl mit der kleinen Stichprobengröße (hier 24 bei (Gebhard, 1995) jedoch 80) zusammen.

Zusammenfassend kann man sagen, dass sich die empirische Gütefunktion des Log-Rangtests, der in diesem Fall ein lokal bester Rangtest ist, kaum von der des Permutationstests unterscheidet, der in diesem Fall das bestmögliche nichtparametrische Verfahren ist. Auch besteht bei größeren Niveaus oder Stichprobenumfängen kaum ein Unterschied zwischen dem optimalen parametrischen Test, dem Permutationstest und dem lokal optimalen Rangtest. Aus diesem Grund kann man Anwendern also mit gutem Gewissen die Anwendung von lokal besten Rangtests empfehlen.

## 4.2 TYP I-ZENSIERTE DATEN

Nun zu Typ I-zensierten Daten. Hier werden die empirischen Gütefunktionen des Permutationstests für unzensierte Daten, des Permutationstests für Typ I-zensierte Daten und des Log-Rangtests für Typ I-zensierte Daten (siehe (Chatterjee and Sen, 1973) oder (Basu et al., 1983)) miteinander verglichen. Dabei wird die empirische Gütefunktion wie im unzensierten Fall bestimmt.

Bei dem ersten Vergleich soll für den Zensierungszeitpunkt  $C = 2.772$  gelten. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Daten zensiert sind, in der zweiten Stichprobe durchgehend 6.25% und in der ersten Stichprobe je nach Quotient  $\theta_2/\theta_1$  zwischen 6.25% und 40%, wobei sie bei dem Quotienten

## 4 Simulationsstudien

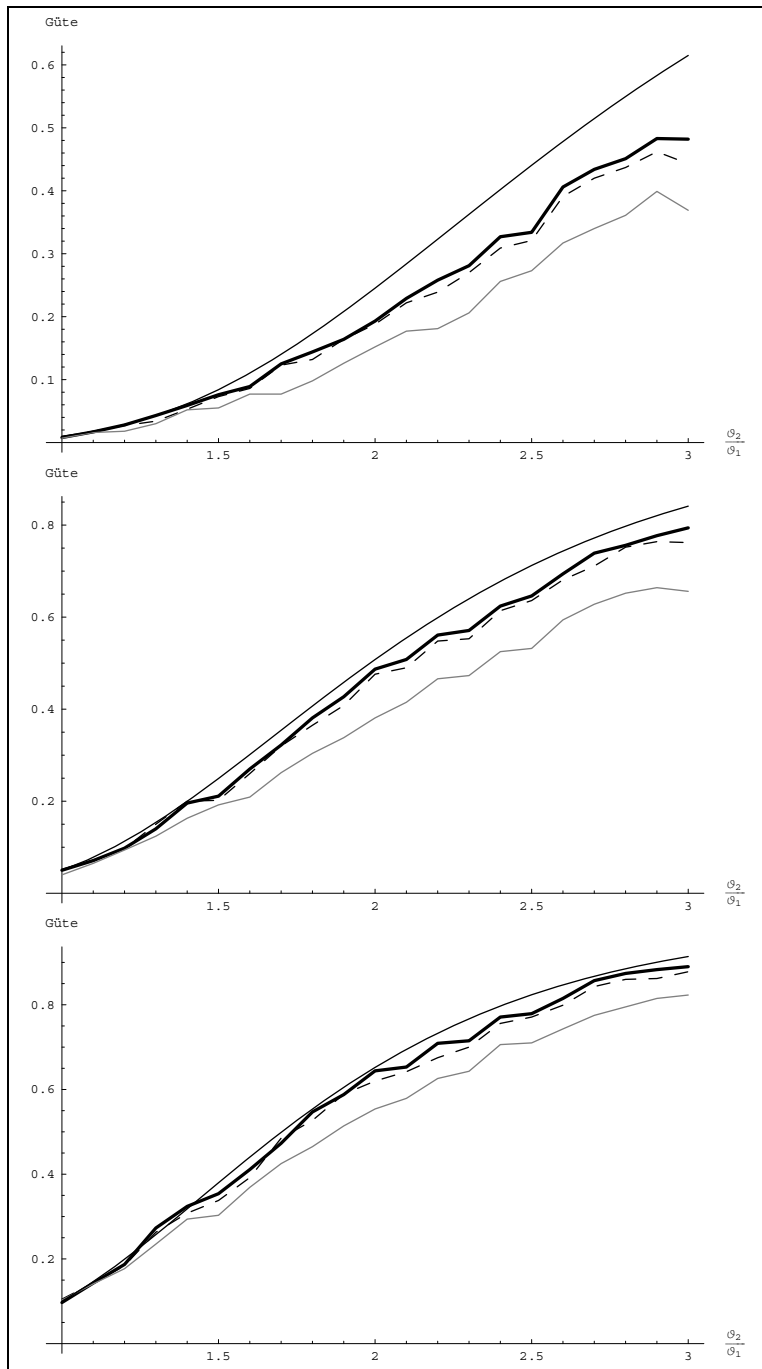


ABBILDUNG 4.1: Die (empirische) Gütefunktion des Permutationstests (—), des Log-Rangtests (---), des optimalen parametrischen Tests (· · ·) und des Wicoxon-Rangtests (grau) zu den Niveaus  $\alpha = 0.01$ ,  $\alpha = 0.05$  und  $\alpha = 0.1$  (von oben nach unten).

$\theta_2/\theta_1 = 2$  genau 25% beträgt. Wie man Abbildung 4.2 entnimmt, besteht zwischen den empirischen Gütefunktionen dieser drei Tests zu den verschiedenen Niveaus kaum ein Unterschied. Zum einen scheint der Zensierungsanteil noch nicht groß genug zu sein um einen Güteabfall zu erzwingen, und zum anderen kann man nach den Erfahrungen bei unzensierten Daten nicht erwarten, dass zwischen dem Permutationstest für Typ I-zensierte Daten und dem Log-Rangtest für Typ I-zensierte Daten ein großer Güteunterschied besteht.

Ein etwas anderes Bild zeigt sich, wenn man für den Zensierungszeitpunkt  $C = 1.386$  wählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Daten zensiert sind, beträgt in der ersten Stichprobe zwischen 25% und 63% und in der zweiten Stichprobe konstant 25%. Hier macht sich der deutlich größere Anteil an zensierten Daten bemerkbar, so dass die Gütefunktion der Tests für Typ I-zensierte Daten im Vergleich zu dem Permutationstests für unzensierte Daten doch deutlich abfällt (siehe Abbildung 4.3).

### 4.3 FAZIT

Zusammenfassend kann man sagen, dass bei nicht allzu kleinen Niveaus und Stichprobenumfängen kaum ein Güteunterschied zwischen dem optimalen parametrischen Test, dem Permutationstest und dem lokal optimalen Rangtest besteht. Da Rangtests aber vielfach breiteren Optimalitätskriterien genügen, sollte man möglichst auf diese zurückgreifen. Außerdem machen sich die Zensierungen erst bemerkbar, falls sie in großer Zahl auftreten. Dies ist jedoch leider häufig der Fall. Will man beispielsweise eine Aussage über die Haltbarkeit von Prothesen treffen, so ist zu berücksichtigen, dass diese möglichst ein Leben lang halten sollten. Diese Daten sind daher häufig durch das Versuchsende oder den Tod des einzelnen Patienten zensiert.

## 4 Simulationsstudien

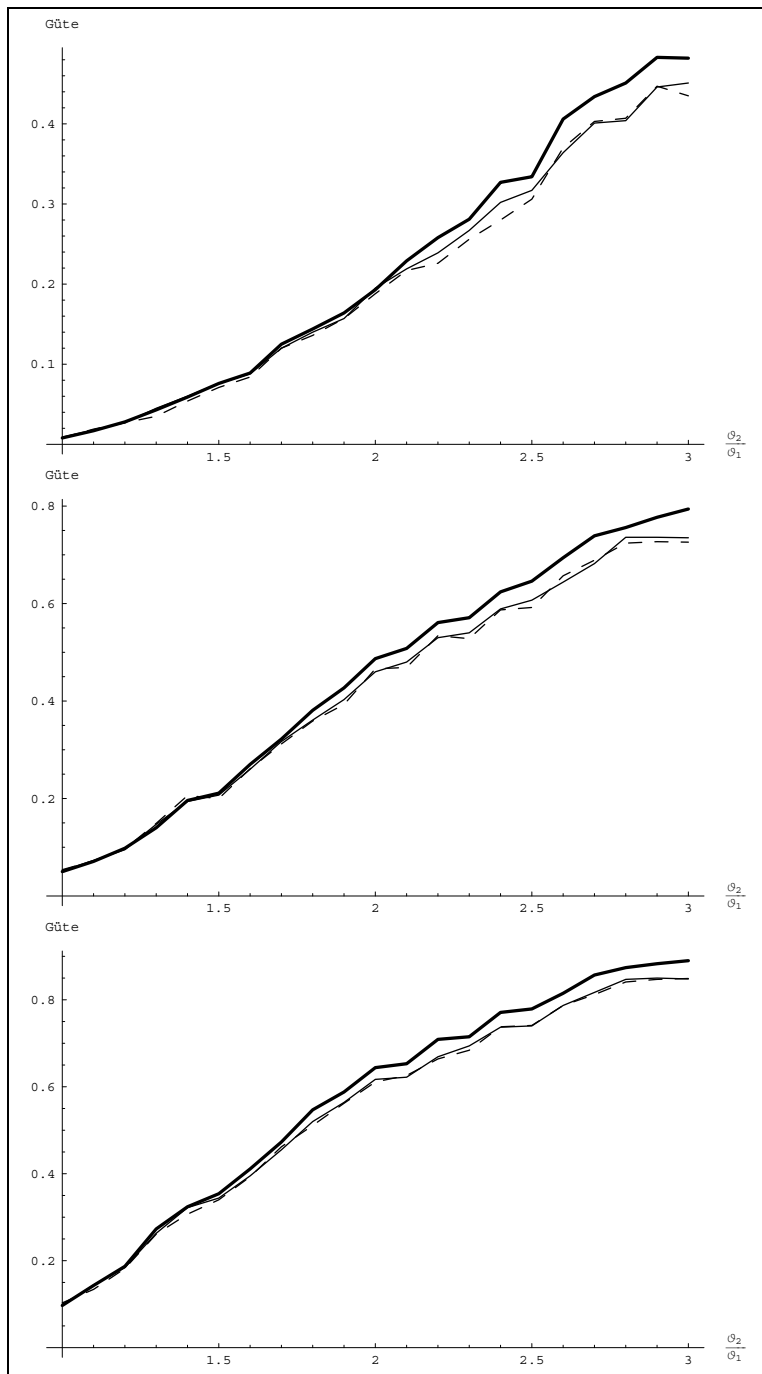


ABBILDUNG 4.2: Die empirische Gütefunktion des Permutationstests für unzensurierte Daten (—), des Permutationstests für Typ I-zensurierte Daten mit Zensierungszeitpunkt 2.772 (---) und des Log-Rangtests für Typ I-zensurierte Daten mit Zensierungszeitpunkt 2.772 (- - -) zu den Niveaus  $\alpha = 0.01$ ,  $\alpha = 0.05$  und  $\alpha = 0.1$  (von oben nach unten).

## 4.3 Fazit

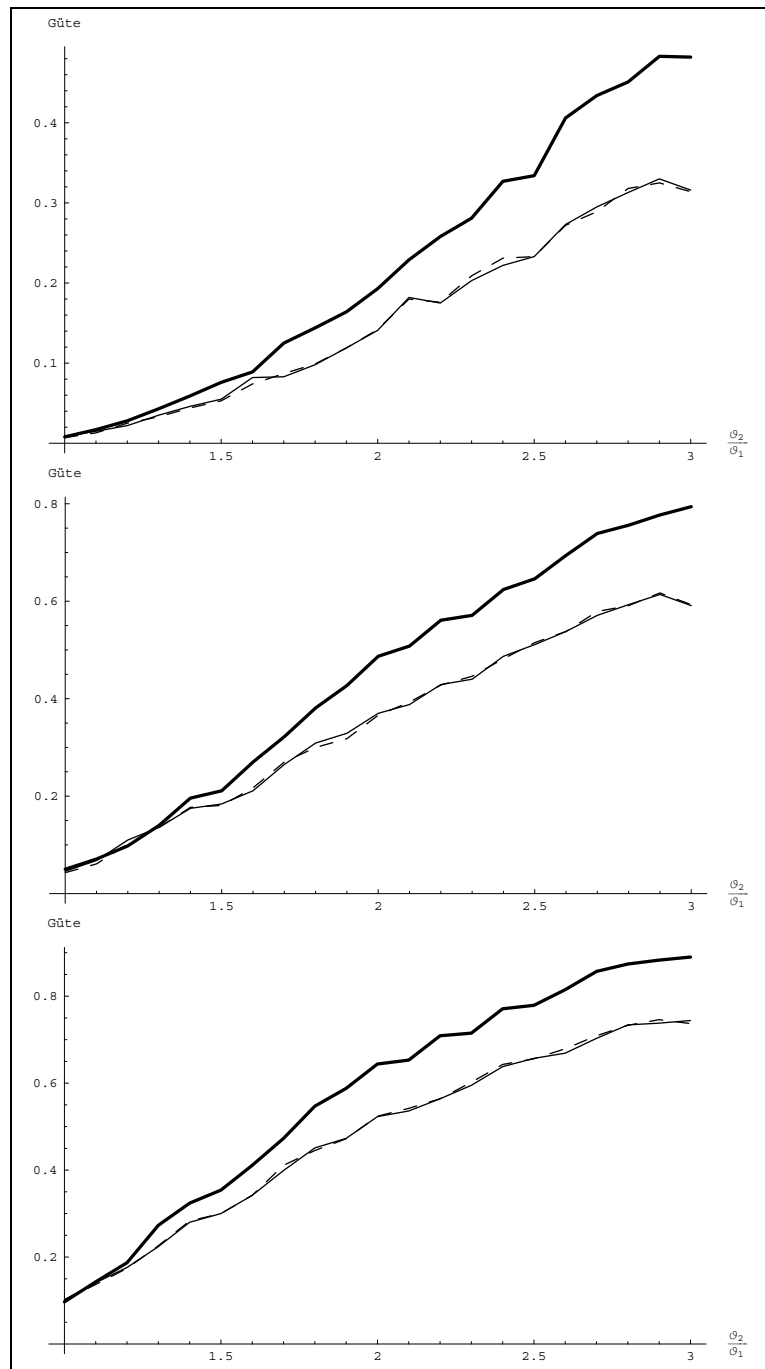


ABBILDUNG 4.3: Die empirische Gütefunktion des Permutationstests für unzensierte Daten (—), des Permutationstests für Typ I-zensierte Daten mit Zensierungszeitpunkt 1.386 (— —) und des Log-Rangtests für Typ I-zensierte Daten mit Zensierungszeitpunkt 1.386 (- - -) zu den Niveaus  $\alpha = 0.01$ ,  $\alpha = 0.05$  und  $\alpha = 0.1$  (von oben nach unten).

---

---

## Kapitel 5

### ACCELERATED LIFE TESTING

---

In den Bereichen der *Zuverlässigkeitstheorie* und *Überlebenszeitanalyse* hat man häufig das Problem, dass man statistische Aussagen über Komponenten, Medikamente usw. treffen will, deren Lebensdauer relativ lang ist. Um aber dennoch zügig zu statistischen Aussagen zu gelangen, bedient man sich in diesen Bereichen der sogenannten *geplanten Zensierung* (siehe Seite 2).

Eine andere Möglichkeit, schneller zu statistischen Aussagen zu gelangen, ist dadurch gegeben, dass man das Experiment anstatt unter „normalen Versuchsbedingungen“ unter „verschlechterten Versuchsbedingungen“ durchführt. Will man z.B. Aussagen über die Lebensdauern von Stromkabelisolierungen treffen, so sorgt eine erhöhte Stromspannung sicherlich dafür, dass die Isolierungen früher defekt sind. Dieses Vorgehen wird in der Statistik als *Accelerated Life Testing* bezeichnet. In der Literatur nimmt man an, dass man eine oder verschiedene *Co-Variable(n)* hat, die auch *Stress* oder *Stressfaktor(en)* genannt werden, die für die Verschlechterung der Versuchsbedingungen sorgen. Dabei geht man weiter davon aus, dass man diese Verschlechterung durch einen funktionalen Zusammenhang spezifizieren kann. Da man häufig nur mit parametrischen Modellen arbeitet, bedeutet dies nichts anderes als eine Veränderung des entsprechenden Parameters. Oft kann man dann von der Art der Stressfaktoren her den *funktionalen Zusammenhang* bis auf wenige weitere Parameter festlegen. Diese wiederum werden dann entsprechend *geschätzt* (siehe u.a. (Kalbfleisch and Prentice, 1980), (Mann et al., 1974), (Lawless, 2003) oder (Kvam and Samaniego, 1993) für parametrische und (Barlow and Scheuer, 1971) oder (Shaked et al., 1979) für nichtparametrische Verfahren). In diesem Kapitel sollen die Para-

meter allerdings nicht geschätzt werden, sondern es sollen *Tests* für Hypothesen über diese Parameter vorgeschlagen werden. Dabei kann man getrost auf *Rangtests* zurückgreifen, da diese häufig breiteren Optimalitätskriterien genügen und sich herausgestellt hat, dass Verfahren für Exponentialverteilungen häufig sensibel auf Abweichungen von dieser Verteilungsannahme reagieren (siehe (Zelen and Dannemiller, 1961)). Man beachte aber auch die Simulationsstudien.

Zunächst sollen allerdings noch einige nützliche Lemmata hergeleitet werden, um die entsprechenden nichtparametrischen Hypothesen handhaben zu können.

### 5.1 KUMULATIVE AUSFALLRATEN UND NICHTPARAMETRISCHE HYPOTHESEN

In der Zuverlässigkeitstheorie und Überlebenszeitanalyse werden Hypothesen häufig durch Ausfallraten definiert. Das wohl bekannteste Modell ist das sogenannte *Proportional Hazard Model*, das auf den wegweisenden Artikel (Cox, 1972) zurückgeht. In einem der einfachsten Fälle, dem Zweistichprobenproblem, ergeben sich die Hypothesen zu

$$\mathbf{H} : \Lambda_1 = \Lambda_2, \quad \mathbf{K} : \Lambda_1 = \vartheta \Lambda_2, \quad \vartheta \in (0, 1),$$

wobei  $\Lambda_i$  die kumulative Ausfallrate der  $i$ -ten Stichprobe bezeichnet ( $i = 1, 2$ ). Dabei darf der sogenannte *Baseline Hazard*  $\Lambda_2$  eine beliebige stetige kumulative Ausfallrate sein. Daher sei von nun an vorausgesetzt, dass alle auftretenden Verteilungsfunktionen stetig sind und der Bedingung  $F(0) = 0$  genügen. Für diese Hypothesen erweist sich der *Log-Rang-* oder *Savage-Score-Test* als ein lokal gleichmäßig bester Rangtest (siehe z.B. (Hájek et al., 1999, Seite 105f.)).

Es stellt sich nun die Frage, wie die Verteilung von  $\vartheta \Lambda$  aussieht, falls  $F$  die kumulative Ausfallrate  $\Lambda$  besitzt. Eine Antwort darauf gibt das folgende Lemma:

**5.1 Lemma** *Ist  $\bar{F}$  die zur kumulativen Ausfallrate  $\Lambda$  gehörige Überlebensfunktion, so ist die kumulative Ausfallrate der Überlebensfunktion  $(\bar{F})^\vartheta$  gerade  $\vartheta \Lambda$ .*



## 5.1 Kumulative Ausfallraten und nichtparametrische Hypothesen

---

Ist  $F$  desweiteren absolut stetig mit  $F(t) < 1 \quad \forall t > 0$ , so gilt eine entsprechende Beziehung für die Ausfallraten.

BEWEIS: Bezeichnet  $\bar{F}_\vartheta$  die Überlebensfunktion zur kumulativen Ausfallrate  $\vartheta\Lambda$ , so gilt nach (1.2) bzw. nach Definition für alle  $t > 0$ :

$$\bar{F}_\vartheta(t) = \exp(-\vartheta\Lambda(t)) = (\exp(-\Lambda(t)))^\vartheta = (\bar{F}(t))^\vartheta.$$

Bezeichnet nun  $\lambda_\vartheta$  die Ausfallrate von  $(\bar{F})^\vartheta$ , so folgt die Aussage über die Ausfallraten aus

$$\int_{(0,t)} \lambda_\vartheta(s) d\lambda(s) = \vartheta\Lambda(t) = \int_{(0,t)} \vartheta\lambda(s) d\lambda(s)$$

für alle  $t > 0$ . □

Aus diesem Grund kann man die Hypothesen auch durch die Überlebensfunktionen darstellen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_H &:= \left\{ \otimes_{i=1}^n \mathbb{P}_{\bar{F}}^{X_i} : F \in \mathfrak{F}_u \right\}, \\ \mathfrak{P}_K &:= \left\{ \otimes_{i=1}^{n_1} \mathbb{P}_{\bar{F}^\vartheta}^{X_i} \otimes_{i=n_1+1}^n \mathbb{P}_{\bar{F}}^{X_i} : \bar{F} \in \mathfrak{F}_u, \vartheta \in (0, 1) \right\}, \end{aligned}$$

wobei  $\mathfrak{F}_u$  die Menge aller stetigen Überlebensfunktionen  $\bar{F}$  mit  $\bar{F}(0) = 1$  bezeichnet.

Der Grund, warum der Log-Rangtest nun unabhängig von der zugrundeliegenden Überlebensfunktion  $\bar{F}$  lokal optimal ist, besteht darin, dass die Verteilung der Rangstatistik nicht mehr von der Überlebensfunktion  $\bar{F}$ , sondern nur noch von dem Proportionalitätsparameter  $\vartheta$  abhängt. Da dies in dem Artikel (Lehmann, 1953) erstmals festgehalten wurde, wird diese Alternative auch als *Lehmann-Alternative* bezeichnet. Später werden allerdings allgemeinere Hypothesen betrachtet, so dass ein etwas anderes Lemma angegeben wird:

**5.2 Lemma** *Seien  $X_1, \dots, X_n$  stu. Zufallsgrößen mit den kumulativen Ausfallraten  $\vartheta_i\Lambda_0$  ( $1 \leq i \leq n$ ), wobei  $\Lambda_0$  eine beliebige kumulative Ausfallrate ist. Dann gilt:*

$$\mathbb{P}^{R \circ (X_1, \dots, X_n)} = \left( \otimes_{i=1}^n \text{Exp}(\vartheta_i) \right)^R,$$

wobei  $R$  die Rangstatistik bezeichnet.

*Insbesondere ist die Verteilung der Rangstatistik unabhängig von  $\Lambda_0$ .*

BEWEIS: Nach Lemma 1.6 besitzt der Zufallsvektor

$$(\vartheta_1 \Lambda_0 \circ X_1, \dots, \vartheta_n \Lambda_0 \circ X_n)$$

eine  $\otimes_{i=1}^n \text{Exp}(1)$ -Verteilung. Da weiter

$$(\Lambda_0 \circ X_1, \dots, \Lambda_0 \circ X_n) = ((\vartheta_1 \Lambda_0 \circ X_1)/\vartheta_1, \dots, (\vartheta_n \Lambda_0 \circ X_n)/\vartheta_n) \quad (5.1)$$

gilt, folgt mit den Transformationseigenschaften von Exponentialverteilungen, dass der Zufallsvektor in (5.1) einer  $\otimes_{i=1}^n \text{Exp}(\vartheta_i)$ -Verteilung genügt. Da  $\Lambda_0$  nun jeweils eine  $\mathbb{P}^{X_i}$ -f.s. streng monoton wachsende Abbildung ist ( $1 \leq i \leq n$ ), folgt die Behauptung, da die Rangstatistik invariant gegenüber der Abbildung (5.1) ist.  $\square$

Um nun lokal optimale Rangtests herzuleiten, braucht man nur noch die Verteilung der Rangstatistik unter den entsprechenden Exponentialverteilungen zu berechnen. Hierzu hat man im wesentlichen zwei Möglichkeiten. Die erste besteht wie üblich in der Anwendung der *Hoeffding-Formel* (siehe (Hoeffding, 1951) oder (Witting and Nölle, 1970, Seite 126, (3.50))):

**5.3 Lemma** *Seien  $X_1, \dots, X_n$  stu.  $\text{Exp}(\vartheta_i)$ -verteilte Zufallsgrößen ( $1 \leq i \leq n$ ). Dann gilt:*

$$\mathbb{P}(R = r) = \frac{1}{n!} E \left( \frac{f_\vartheta(Z_{\{r\}})}{f_1(Z_{\{r\}})} \right),$$

wobei  $f_\rho(t) = \prod_{i=1}^n \rho_i \exp(-\sum_{i=1}^n \rho_i t_i) \mathbf{1}_{[0, \infty)^{(n)}(t)}$  gilt,  $Z_1, \dots, Z_n$  stu.  $\text{Exp}(1)$ -verteilte Zufallsgrößen sind und<sup>1</sup>  $Z_{\{r\}} = (Z_{r_1\uparrow}, \dots, Z_{r_n\uparrow})$  bezeichnet.

Beachtet man, dass  $nZ_{1\uparrow}, (n-1)(Z_{2\uparrow} - Z_{1\uparrow}), \dots, Z_{n\uparrow} - Z_{n-1\uparrow}$  eine Folge von stu.  $\text{Exp}(1)$ -verteilten Zufallsgrößen ist (siehe (David, 1970, Seite 17)), so kann man den Erwartungswert auch konkret ausrechnen. Da sich dieser allerdings über eine andere Möglichkeit einfacher ausrechnen lässt, soll an dieser Stelle darauf verzichtet werden.

Die andere Möglichkeit die Verteilung der Rangstatistik zu bestimmen besteht im wesentlichen in dem folgenden Lemma. Eine etwas andere Variante findet sich in (Savage, 1956).

---

<sup>1</sup>Wird im folgenden an einen Index  $i$  ein  $\uparrow$  angehängen, so ist damit immer der zur  $i$ -t kleinsten Beobachtung gehörende Index gemeint. Beispielsweise bezeichnet  $X_{i\uparrow}$  die  $i$ -te Komponente der Ordnungsstatistik  $X_\uparrow$ .

**5.4 Lemma** Seien  $X_1, \dots, X_n$  stu.  $\text{Exp}(\vartheta_i)$ -verteilte Zufallsgrößen ( $1 \leq i \leq n$ ). Dann gilt:

$$\mathbb{P}(X_1 < X_2 < \dots < X_n) = \frac{\prod_{i=1}^n \vartheta_i}{\prod_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \vartheta_{n-k}}.$$

BEWEIS: Man zeigt iterativ, dass

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_1 < X_2 < \dots < X_n) \\ &= \prod_{i=1}^n \vartheta_i \int_{(0, \infty)} \dots \int_{(t_{n-1}, \infty)} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \vartheta_i t_i\right) d\lambda(t_n) \dots d\lambda(t_1) \\ &= \prod_{i=1}^n \vartheta_i \int_{(0, \infty)} \dots \int_{(t_{n-2}, \infty)} \frac{1}{\vartheta_n} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n-2} \vartheta_i t_i - (\vartheta_{n-1} + \vartheta_n)t_{n-1}\right) \\ & \quad d\lambda(t_{n-1}) \dots d\lambda(t_1) \\ &= \prod_{i=1}^n \vartheta_i \int_{(0, \infty)} \dots \int_{(t_{n-3}, \infty)} \frac{1}{\vartheta_n} \frac{1}{\vartheta_{n-1} + \vartheta_n} \\ & \quad \exp\left(-\sum_{i=1}^{n-3} \vartheta_i t_i - (\vartheta_{n-2} + \vartheta_{n-1} + \vartheta_n)t_{n-2}\right) d\lambda(t_{n-2}) \dots d\lambda(t_1) \\ &= \dots = \frac{\prod_{i=1}^n \vartheta_i}{\prod_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \vartheta_{n-k}} \end{aligned}$$

und somit die Behauptung gilt.  $\square$

Die Verteilung der Rangstatistik erhält man nun als Korollar:

**5.5 Korollar** Seien  $X_1, \dots, X_n$  stu.  $\text{Exp}(\vartheta_i)$ -verteilte Zufallsgrößen ( $1 \leq i \leq n$ ). Dann gilt:

$$\mathbb{P}(A = a) = \frac{\prod_{i=1}^n \vartheta_{a_i}}{\prod_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \vartheta_{a_n-k}} = \prod_{i=1}^n \frac{\vartheta_{i \uparrow}}{\sum_{j \in \mathcal{R}_i} \vartheta_j},$$

wobei  $A$  die Antirangstatistik und  $\mathcal{R}_i := \{a_j : j \geq i\}$  die Menge der Indizes aller Zufallsgrößen  $X_i$  bezeichnet, die unmittelbar vor  $x_{i \uparrow}$  noch unter Beobachtung stehen (die sogenannte Risk Set) ( $1 \leq i \leq n$ ).

BEWEIS: Es reicht offenbar der Hinweis, dass

$$\mathbb{P}(A = a) = \mathbb{P}(X_{a_1} < X_{a_2} < \dots < X_{a_n}).$$

gilt.  $\square$

## 5.2 ACCELERATED LIFE TESTS

Von nun an bezeichne  $s_i$  bzw.  $\mathbf{s}_i = (s_{i;1}, \dots, s_{i;m_1})$  die *Stressfaktor(en)*, unter denen die Zufallsgrößen  $X_i$  beobachtet wurden ( $1 \leq i \leq n$ ). Wie beispielsweise in (Cox, 1972, Abschnitt 11) beschrieben, gibt es nun im wesentlichen zwei Möglichkeiten, wie sich die Stressfaktoren auf die Verteilung von  $X_i$  auswirken. Die erste besteht darin, dass sich der Stress multiplikativ auf die Zufallsgrößen bzw. die Lebenszeit selbst auswirkt. Bezeichnet  $F$  die Verteilungsfunktion von  $X$  unter dem Stress 1, so besitzt  $X$  unter dem Stress  $s$  die Überlebensfunktion

$$\bar{F}_s(t) = \bar{F}(g(s)t), \quad (5.2)$$

wobei  $g$  den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Stress und der Verteilung beschreibt. Dabei gilt offenbar  $g(1) = 1$  und  $g(s) > 0 \quad \forall s$ . Schreibt man nun (5.2) auf die kumulativen Ausfallraten um, so ergibt sich:

$$\Lambda_s(t) = \Lambda(g(s)t), \quad (5.3)$$

wobei natürlich  $\Lambda_{(s)}$  die zu  $F_{(s)}$  gehörige kumulative Ausfallrate bezeichnet. Dieses Modell wird dann als *Accelerated Failure Time Model* (AFT-Modell) bezeichnet.

Im *Proportional Hazard Model* (PH-Modell) geht man aber davon aus, dass sich der Stress multiplikativ auf die kumulative Ausfallrate auswirkt, d.h.

$$\Lambda_s(t) = g(s)\Lambda(t), \quad (5.4)$$

bzw. für die Überlebensfunktionen

$$\bar{F}_s(t) = (\bar{F}(t))^{g(s)} \quad (5.5)$$

gilt.

Besitzt  $X$  eine Weibull-Verteilung,<sup>2</sup> so gilt  $\Lambda(t) = (\eta t)^\kappa$ , und es besteht zwischen (5.3) und (5.4) bzw. (5.2) und (5.5) bis auf Umnormierung kein Unterschied. Allerdings sind nach (Kalbfleisch and Prentice, 1980, Seite 34f.) die Weibull-Verteilungen auch die einzigen Verteilungen, bei denen zwischen den beiden Modellen kein Unterschied besteht. Den Unterschied erkennt man auch in den Abbildungen 5.1 und 5.2. Weiter kann man nach (Solomon, 1984) bei Vorliegen eines der beiden obigen Modelle das jeweils andere Modell als Approximation erster Ordnung betrachten.

<sup>2</sup>Dies wird bei den parametrischen Verfahren eigentlich fast immer angenommen.

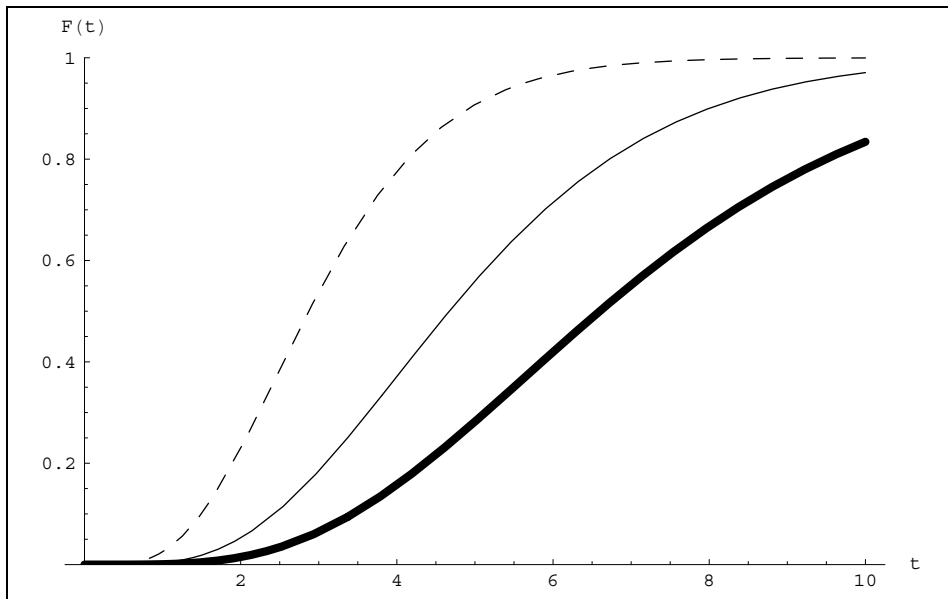


ABBILDUNG 5.1: Graph der Verteilungsfunktion einer  $\Gamma_{5,1}$ -Verteilung (—) und der transformierten Verteilungsfunktionen im AFT-Model mit  $g(s) = s^{1.2}$  im Fall  $s = 1.5$  (---) und  $s = 0.75$  (—).

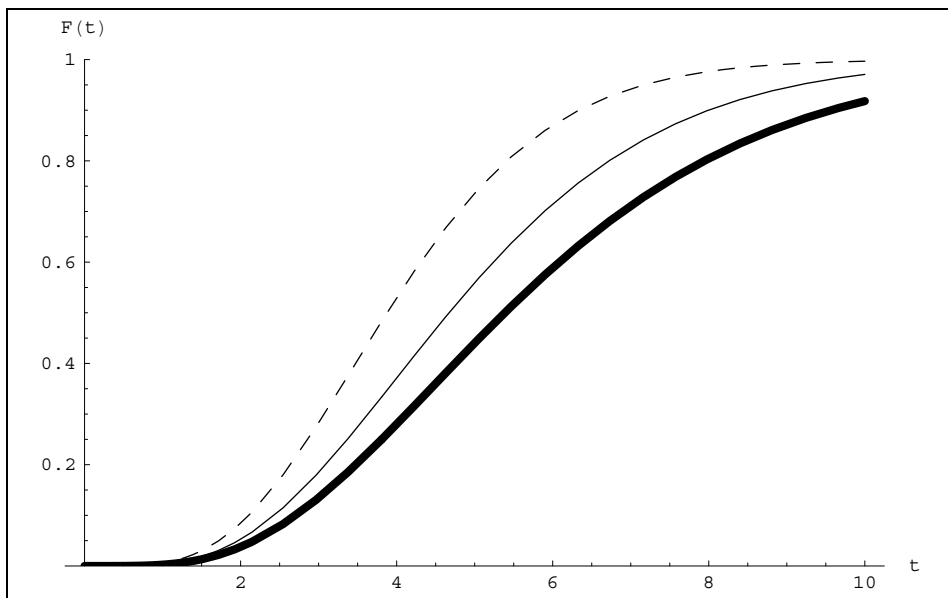


ABBILDUNG 5.2: Graph der Verteilungsfunktion einer  $\Gamma_{5,1}$ -Verteilung (—) und der transformierten Verteilungsfunktionen im PH-Model mit  $g(s) = s^{1.2}$  im Fall  $s = 1.5$  (---) und  $s = 0.75$  (—).

Im folgenden werden lokal optimale Rangtests für beide Modelle hergeleitet, allerdings muss man im AFT-Model die zugrundegelegte Verteilungsklasse noch genauer spezifizieren.

Nun muss noch die Funktion  $g$ , die den Zusammenhang zwischen dem Stress und der Verteilung herstellt, spezifiziert werden. Oft wird bei Vorliegen eines einzelnen Stressfaktors für die Funktion  $g$  eine der folgenden Beziehungen unterstellt:

$$\begin{aligned} g_p(s, \beta) &= s^\beta && (\text{Power Rule Model}), \\ g_A(s, \beta) &= \exp(-\beta/s) && (\text{Arrhenius Model}), \\ g_E(s, \beta) &= s \exp(-\beta/s) && (\text{Eyring Model}). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Anwendungen für die verschiedenen Modelle sowie Interpretationen und andere Modelle finden sich z.B. in (Nelson, 1990).

Will man nun Aussagen über die Qualität eines Produktes treffen, so spiegelt sich die Güte sicherlich in der Widerstandsfähigkeit gegenüber den Stressfaktor(en), d.h. also in verschiedenen Werten von  $\beta$  wieder. Daher sollen nun optimale Tests für Hypothesen über diesen Parameter  $\beta$  hergeleitet werden. In dem Artikel (Schmoyer, 1986) wurden auch Tests für diese Hypothesen vorgeschlagen. Allerdings wurde dort immer das AFT-Model unterstellt. Da die Tests Kolmogorov-Smirnov Gestalt haben, konnte aber keinerlei Optimalität nachgewiesen werden. Auch in (Lawless, 2003) oder (Kalbfleisch and Prentice, 1980) finden sich Tests für die obige Fragestellung. Diese beruhen jedoch allein auf asymptotischen Aussagen. Desweiteren werden auch in (Prentice, 1978) Rangtests vorgeschlagen. Dort wird aber nur eine lineare Regression im Lokationsparameter unterstellt, so dass man die beobachteten Daten erst noch mit Hilfe der Logarithmusfunktion auf die entsprechende Gestalt bringen muss.

Es soll nun mit der Herleitung von Tests für den einfachsten Fall begonnen werden:

### 5.2.1 TESTS BEI EINEM STRESSFAKTOR

In diesem Abschnitt sei unterstellt, dass die Funktion  $g(s, \beta)$  für alle  $s$  eine partielle Ableitung nach  $\beta$  besitzt.

Getestet werden die Hypothesen

$$\mathbf{H} : \beta \geq \beta_0, \qquad \mathbf{K} : \beta < \beta_0.$$

Tests für die entsprechenden zweiseitigen Hypothesen kann man allerdings auch gewinnen. Das erste Resultat lautet:

**5.6 Satz** (PH-MODEL, UNZENSIERTE DATEN) *Besitzt  $X_i$  die kumulative Ausfallrate  $g(s_i, \beta)\Lambda_0$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $\Lambda_0$  beliebig aber fest), so ist der Test  $\varphi_{PH}^*$  mit*

$$\varphi_{PH}^*(a) := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^* & \text{falls } \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=0}^{i-1} \frac{\partial g}{\partial \beta}(s_{a_{n-k}}, \beta_0)}{\sum_{k=0}^{i-1} g(s_{a_{n-k}}, \beta_0)} = c^* \\ 0 & < \end{cases},$$

wobei  $\gamma^*$  und  $c^*$  gerade so bestimmt werden, dass unter der Verteilung

$$\mathbb{P}(A = a) = \prod_{i=1}^n \frac{g(s_{a_i}, \beta_0)}{\sum_{k=0}^{i-1} g(s_{a_{n-k}}, \beta_0)} = \prod_{i=1}^n \frac{g(s_{i\uparrow}, \beta_0)}{\sum_{j \in \mathcal{R}_i} g(s_j, \beta_0)}$$

das Niveau  $\alpha$  voll ausgeschöpft wird, ein lokal gleichmäßig bester auf  $\{\beta_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Rangtest für die Hypothesen  $\mathbf{H} : \beta \geq \beta_0$ ,  $\mathbf{K} : \beta < \beta_0$ .

BEWEIS: Nach Lemma 5.2 ist die Verteilung der Rangstatistik unabhängig von  $\Lambda_0$  und hängt somit nur noch von  $\beta$  ab. Die Zähldichte dieser Verteilung ergibt sich aber nach Korollar 5.5 zu:

$$\mathbb{P}_\beta(A = a) = \prod_{i=1}^n \frac{g(s_{a_i}, \beta)}{\sum_{k=0}^{i-1} g(s_{a_{n-k}}, \beta)}. \quad (5.7)$$

Testet man nun  $\{\beta_0\}$  gegen  $\{\beta\}$ , so kann man nach dem einfachen Neyman-Pearson Lemma

$$\ln(\mathbb{P}_\beta(A = a)) - \ln(\mathbb{P}_{\beta_0}(A = a)) \quad (5.8)$$

als Prüfstatistik des besten Tests zum Niveau  $\alpha$  für diese Hypothesen wählen. Nun ist aber  $\ln(\mathbb{P}_\beta(A = a))$  nach (5.7) für jedes  $a \in \mathcal{S}_n$  in  $\beta_0$  differenzierbar mit Ableitung

$$\dot{L}_{\beta_0}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial g}{\partial \beta}(s_i, \beta_0)}{g(s_i, \beta_0)} - \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=0}^{i-1} \frac{\partial g}{\partial \beta}(s_{a_{n-k}}, \beta_0)}{\sum_{k=0}^{i-1} g(s_{a_{n-k}}, \beta_0)}.$$

Also existiert für jedes  $a \in \mathcal{S}_n$  ein  $R_a(\beta)$  mit  $\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \left| \frac{R_a(\beta)}{\beta - \beta_0} \right| = 0$  und

$$\ln(\mathbb{P}_\beta(A = a)) = \ln(\mathbb{P}_{\beta_0}(A = a)) + \dot{L}_{\beta_0}(a)(\beta - \beta_0) + R_a(\beta).$$

Demnach findet zu  $a, a' \in \mathcal{S}_n$  ein  $\beta(a, a') < \beta_0$  mit  $|R_a(\beta)| \leq |\dot{L}_{\beta_0}(a) - \dot{L}_{\beta_0}(a')|(\beta_0 - \beta)/4$  und  $|R_{a'}(\beta)| \leq |\dot{L}_{\beta_0}(a) - \dot{L}_{\beta_0}(a')|(\beta_0 - \beta)/4$  für alle  $\beta(a, a') < \beta < \beta_0$ . Gilt nun  $\dot{L}_{\beta_0}(a) > \dot{L}_{\beta_0}(a')$ , so erhält man für  $\beta(a, a') < \beta < \beta_0$ :

$$\begin{aligned} \ln(\mathbb{P}_\beta(A = a')) - \ln(\mathbb{P}_{\beta_0}(A = a')) &= \dot{L}_{\beta_0}(a')(\beta - \beta_0) + R_{a'}(\beta) \\ &\geq (3\dot{L}_{\beta_0}(a')/4 + \dot{L}_{\beta_0}(a)/4)(\beta - \beta_0) \\ &> (3\dot{L}_{\beta_0}(a)/4 + \dot{L}_{\beta_0}(a')/4)(\beta - \beta_0) \\ &\geq \dot{L}_{\beta_0}(a)(\beta - \beta_0) + R_a(\beta) \\ &= \ln(\mathbb{P}_\beta(A = a)) - \ln(\mathbb{P}_{\beta_0}(A = a)). \end{aligned}$$

Setzt man nun  $\beta' := \max_{a, a' \in \mathcal{S}_n} \{\beta(a, a')\} < \beta_0$ , so ist (5.8) für  $\beta' < \beta < \beta_0$  streng istoton in  $\dot{L}_{\beta_0}(a)$ . Zusammen mit der Gestalt des Tests  $\varphi_{PH}^*$  liefert dies die Behauptung.  $\square$

Offenbar kann man als Prüfstatistik aber auch

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sum_{j \in \mathcal{R}_i} \frac{\partial g}{\partial \beta}(s_j, \beta_0)}{\sum_{j \in \mathcal{R}_i} g(s_j, \beta_0)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial \beta}(s_{i\uparrow}, \beta_0) \left( \sum_{k=i}^n \frac{1}{\sum_{j \in \mathcal{R}_k} g(s_j, \beta_0)} \right)$$

wählen. Durch einfaches Einsetzen der entsprechenden Funktion  $g$  kann man nun für die in (5.6) angesprochenen Modelle optimale Tests angeben. Dabei erhält man als Ableitung gerade  $\frac{\partial g}{\partial \beta}(s, \beta) = \ln(s)s^\beta$  im Power Rule Model,  $\frac{\partial g}{\partial \beta}(s, \beta) = \frac{-1}{s} \exp(-\beta/s)$  im Arrhenius Model und  $\frac{\partial g}{\partial \beta}(s, \beta) = -\exp(-\beta/s)$  im Eyring Model.

Auf den ersten Blick sieht es nun so aus, als ob der Test  $\varphi_{PH}^*$  aus Satz 5.6 schwer auszuwerten wäre. Ordnet man allerdings die Zufallsgrößen  $X_i$  bzgl. der Werte  $s_i$  an, so dass die ersten  $n_1$  Zufallsgrößen unter dem kleinsten Stress beobachtet wurden, die nächsten  $n_2$  Zufallsgrößen unter dem nächstgrößeren Stress, usw., so ist sowohl die Prüfstatistik als auch die Verteilung, unter der das Niveau ausgeschöpft werden muss, invariant gegenüber Permutationen in den Komponenten  $1, \dots, n_1, n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$  usw., so dass man nicht alle Antirangtupel auswerten muss. Anschließend berechne man die Wahrscheinlichkeiten der Reihe nach, angefangen mit den größten Werten der Prüfstatistik. Diese haben unter der Verteilung, unter der das Niveau ausgeschöpft werden muss, eine relativ große Wahrscheinlichkeit, so dass man nicht allzuvielen verschiedenen Antirangtupel betrachten muss. Oft liegt unter dem Parameter  $\beta_0$  aber auch eine i.i.d. Situation vor, so dass die Verteilung, unter der das Niveau  $\alpha$  ausgeschöpft werden muss, eine Laplace-Verteilung



ist. In diesem Fall kann man dann auch den Algorithmus von PAGANO und TRITCHLER (siehe (Pagano and Tritchler, 1983)) verwenden, um den  $p$ -Wert zu bestimmen.

In anderen Artikeln wie z.B. (Schmoyer, 1986) oder (Sethuraman and Singpurwalla, 1982) sieht man im AFT-Model häufig ein anderes Herangehen an dieses Problem: Dort werden die Zufallsgrößen  $X_i$  erst mit ihrem Stress multipliziert:

$$Y_i := g(s_i, \beta_0)X_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Im AFT-Model besitzen die  $Y_i$  unter  $\beta_0$  dieselbe Verteilung. Bezeichnet nun  $R'$  die Rangstatistik von  $Y$ , so kann man auch hier lokal optimale Tests herleiten, wobei man allerdings die Menge der zugelassenen Verteilungen noch verkleinern muss:

**5.7 Satz** (AFT-MODEL, UNZENSIERTE DATEN) *Gilt  $X_i \sim \mathcal{W}(\kappa, g(s_i, \beta)\eta)$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $\eta, \kappa > 0$  beliebig aber fest), so ist der Test  $\varphi_{AFT}^*$  mit*

$$\varphi_{AFT}^*(r') := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^* & \text{falls } \sum_{i=1}^n c_i l_{r'_i} = \sum_{i=1}^n c_{a'_i} l_i = c^* \\ 0 & < \end{cases},$$

wobei  $\gamma^*, c^*$  aus

$$\frac{1}{n!} \left| \left\{ \tilde{r} \in \mathcal{S}_n : \sum_{i=1}^n c_i l_{\tilde{r}_i} > c^* \right\} \right| + \frac{\gamma^*}{n!} \left| \left\{ \tilde{r} \in \mathcal{S}_n : \sum_{i=1}^n c_i l_{\tilde{r}_i} = c^* \right\} \right| = \alpha$$

bestimmt werden,  $l_i := \sum_{j=1}^i \frac{1}{n-j+1}$  die bekannten Log-Rank-Scores bezeichnet und  $c_i = \frac{\partial g(s_i, \beta_0)}{g(s_i, \beta_0)}$  gilt, ein lokal gleichmäßig bester auf  $\{\beta_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Rangtest für die Hypothesen  $\mathbf{H} : \beta \geq \beta_0$ ,  $\mathbf{K} : \beta < \beta_0$ . Gilt allgemeiner  $X_i \sim F(g(s_i, \beta) \cdot)$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $F$  beliebig), so hält der Test  $\varphi_{AFT}^*$  unter dem Parameter  $\beta_0$  das Niveau  $\alpha$  genau ein.

BEWEIS: Auch hier ist die Verteilung der Rangstatistik nach Lemma 5.2 unabhängig von  $\eta$  und hängt somit nur noch von  $\beta$  und  $\kappa$  ab. Die Zähldichte dieser Verteilung ergibt sich aber nach Korollar 5.5 zu:

$$\mathbb{P}_{\beta; \kappa}(A = a) = \prod_{i=1}^n \frac{\left( \frac{g(s_{a_i}, \beta)}{g(s_{a_i}, \beta_0)} \right)^\kappa}{\sum_{j \in \mathcal{B}_i} \left( \frac{g(s_j, \beta)}{g(s_j, \beta_0)} \right)^\kappa}.$$

Hier erhält man als Ableitung von  $\ln(\mathbb{P}_{\beta;\kappa}(A = a))$  an der Stelle  $\beta_0$ :

$$\dot{L}_{\beta_0;\kappa}(a) = \kappa \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial g}{\partial \beta}(s_i, \beta_0)}{g(s_i, \beta_0)} - \sum_{i=1}^n \frac{\kappa}{|\mathcal{R}_i|} \sum_{j \in \mathcal{R}_i} \frac{\frac{\partial g}{\partial \beta}(s_j, \beta_0)}{g(s_j, \beta_0)}.$$

Schreibt man diese Beziehung auf die Rangstatistik um und fasst die dabei entstehenden Terme entsprechend zusammen, so erhält man bis auf einen konstanten Faktor die negative Prüfstatistik. Der Rest des Beweises zu Optimalität wird dann genau so wie in Satz 5.6 geführt. Da  $Y_1, \dots, Y_n$  bei jedem  $F$  unter  $\beta_0$  stu. und identisch verteilt sind, besitzt  $R'$  eine Laplace-Verteilung auf  $\mathcal{S}_n$ . Also schöpft  $\varphi_{AFT}^*$  für jedes  $F$  das Niveau  $\alpha$  unter  $\beta_0$  voll aus.  $\square$

Um nun für die in (5.6) angegebenen Modelle optimale Tests anzugeben, muss man nur noch die entsprechenden Stressfunktionen einsetzen. Dabei erhält man für die  $c_i$  gerade  $\ln(s_i)$  im Power Rule Model und  $\frac{-1}{s_i}$  sowohl im Arrhenius als auch im Eyring Model.

Auch in dieser Situation lässt sich zur Auswertung des Tests noch einiges sagen: Da die Prüfstatistik die Form einer *einfachen linearen Rangstatistik* hat, lassen sich bei kleinem Stichprobenumfang die üblichen Berechnungsmethoden einsetzen. Andererseits kann man aber auch bei großem Stichprobenumfang die Verteilungskonvergenz der Prüfstatistik (man lasse alle  $n_k$  gleichzeitig gegen  $\infty$  laufen) ausnutzen und so das nötige Fraktile durch das entsprechende Fraktile der Normalverteilung ersetzen (siehe (Hájek et al., 1999, Seite 191, Theorem 1)). Es sei dabei noch angemerkt, dass die Prüfstatistik dann immer noch die des optimalen Rangtests ist. Desweiteren sollte sich auf diese Art auch zeigen lassen, dass der obige Test asymptotisch noch weiterreichende Optimalitätseigenschaften besitzt. Aus dem Artikel (Kellerer and Chmelevsky, 1983) geht allerdings hervor, dass man bei stark abweichenden Stichprobengrößen vorsichtig sein muss, da dann die nominalen und asymptotischen  $p$ -Werte „stark“ abweichen können. Dieser Effekt vermindert sich allerdings bei in etwa gleich großen Stichproben. (Louis, 1981) konnte mit Hilfe von Zählprozessen sogar Tests angeben, die unabhängig von der zugrundeliegenden Verteilung asymptotischen Optimalitätskriterien genügen. Diese konnten dann anschließend durch (Ritov, 1990), (Tsiatis, 1990), (Ying, 1993) und (Jin et al., 2003) noch verbessert werden. Auch in (Prentice, 1978) finden sich asymptotische Überlegungen. Es wird sich allerdings zeigen, dass das in der vorliegenden Arbeit gewählte Vorgehen Vorteile beim sogenannten Step-Stress AFT-Model besitzt.

TYP II-ZENSIERTE DATEN

Will man optimale Tests für Typ II-zensierte Daten herleiten, so hat man das Problem, dass nur die  $h$  kleinsten Werte der  $X_i$  beobachtet werden können. Es kann aber sein, dass dies nicht die  $h$  kleinsten Werte der  $Y_i$  sind. Dieses Problem tritt bei dem Test aus Satz 5.6 nicht auf. Es bietet sich vielmehr die Statistik  $T$  mit

$$T((a_1, \dots, a_h)) := \sum_{i=1}^h \frac{\sum_{j \in \mathcal{R}_i} \frac{\partial g}{\partial \beta}(s_j, \beta_0)}{\sum_{j \in \mathcal{R}_i} g(s_j, \beta_0)} + \frac{1}{(n-h)!} \sum_{\substack{I_1 \subseteq \dots \subseteq I_{n-h} = \mathcal{R}_{h+1} \\ |I_{i+1}| = |I_i| + 1}} \sum_{k=1}^{n-h} \frac{\sum_{j \in I_k} \frac{\partial g}{\partial \beta}(s_j, \beta_0)}{\sum_{j \in I_k} g(s_j, \beta_0)}$$

als Prüfstatistik an. Mit dieser gilt dann:

**5.8 Satz** (PH-MODEL, TYP II-ZENSIERTE DATEN) *Besitzt  $X_i$  die kumulative Ausfallrate  $g(s_i, \beta)\Lambda_0$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $\Lambda_0$  beliebig aber fest), so ist der Test  $\varphi_{PHII}^*$  mit*

$$\varphi_{PHII}^*((a_1, \dots, a_h)) := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^* & \text{falls } T((a_1, \dots, a_h)) = c^* \\ 0 & < \end{cases},$$

wobei  $\gamma^*$  und  $c^*$  gerade so bestimmt werden, dass unter der Verteilung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((A_1, \dots, A_h) = (a_1, \dots, a_h)) \\ = \frac{\prod_{i=1}^n g(s_i, \beta_0)}{\prod_{i=1}^h \sum_{j \in \mathcal{R}_i} g(s_j, \beta_0)} \sum_{\substack{I_1 \subseteq \dots \subseteq I_{n-h} = \mathcal{R}_{h+1} \\ |I_{i+1}| = |I_i| + 1}} \prod_{k=1}^{n-h} \frac{1}{\sum_{j \in I_k} g(s_j, \beta_0)} \end{aligned}$$

das Niveau  $\alpha$  voll ausgeschöpft wird, ein lokal gleichmäßig bester auf  $\{\beta_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Rangtest für die Hypothesen  $\mathbf{H} : \beta \geq \beta_0$ ,  $\mathbf{K} : \beta < \beta_0$ .

BEWEIS: Da die Verteilung von  $A$  unabhängig von  $\Lambda_0$  ist, gilt das Gleiche auch für die Verteilung von  $(A_1, \dots, A_h)$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}_\beta((A_1, \dots, A_h) = (a_1, \dots, a_h)) \\
 &= \sum_{\substack{\tilde{a} \in \mathcal{S}_n \\ (a_1, \dots, a_h) = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_h)}} \mathbb{P}_\beta(A = \tilde{a}) \\
 &= \frac{\prod_{i=1}^n g(s_i, \beta)}{\prod_{i=1}^h \sum_{j \in \mathcal{R}_i} g(s_j, \beta)} \sum_{\substack{I_1 \subseteq \dots \subseteq I_{n-h} = \mathcal{R}_{h+1} \\ |I_{i+1}| = |I_i| + 1}} \prod_{k=1}^{n-h} \frac{1}{\sum_{j \in I_k} g(s_j, \beta)},
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

so dass man den Rest der Behauptung wie im Beweis von Satz 5.6 zeigt.  $\square$

Hiernach sollte auch klar sein, wie man den Test aus Satz 5.7 für Typ II-zensierte Daten abzuändern hat. Offenbar bietet sich dazu die Teststatistik

$$T'((a'_1, \dots, a'_h)) := \sum_{i=1}^h c_{a'_i} \ell_i + \frac{1}{n-h} \sum_{j \in \mathcal{R}_{h+1}} c_j \sum_{j \in \mathcal{R}_{h+1}} \ell_j$$

als Prüfstatistik an. Da wie erwähnt die  $h$  kleinsten Zufallsgrößen der  $X_i$  nicht mit den  $h$  kleinsten Zufallsgrößen der  $Y_i$  übereinstimmen müssen, werden die Optimalitätskriterien für die  $Y_i$  angegeben.

**5.9 Satz** (AFT-MODEL, TYP II-ZENSIERTE DATEN) *Gilt  $Y_i \sim \mathcal{W}\left(\kappa, \frac{g(s_i, \beta)\eta}{g(s_i, \beta_0)}\right)$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $\eta, \kappa > 0$  beliebig aber fest), so ist der Test  $\varphi_{AFT_{II}}^*$  mit*

$$\varphi_{AFT_{II}}^*((a'_1, \dots, a'_h)) := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^* & \text{falls } T'((a'_1, \dots, a'_h)) = c^* \\ 0 & < \end{cases},$$

wobei  $\gamma^*, c^*$  aus

$$\begin{aligned}
 & \frac{(n-h)!}{n!} \left| \left\{ \tilde{a} \in \mathcal{S}_{n|h} : T'((\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_h)) > c^* \right\} \right| \\
 & + \gamma^* \frac{(n-h)!}{n!} \left| \left\{ \tilde{a} \in \mathcal{S}_{n|h} : T'((\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_h)) = c^* \right\} \right| = \alpha
 \end{aligned}$$

bestimmt werden, ein lokal gleichmäßig bester auf  $\{\beta_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Rangtest für die Hypothesen  $\mathbf{H} : \beta \geq \beta_0$ ,  $\mathbf{K} : \beta < \beta_0$ . Gilt allgemeiner  $Y_i \sim F(g(s_i, \beta) \cdot / g(s_i, \beta_0))$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $F$  beliebig), so hält der Test  $\varphi_{AFT_{II}}^*$  unter dem Parameter  $\beta_0$  das Niveau  $\alpha$  genau ein.

BEWEIS: Es ist eigentlich nur anzumerken, dass die Antirangstatistik  $A'$  von  $Y$  unter dem Parameter  $\beta_0$  unabhängig von  $F$  eine Laplace-Verteilung auf der Menge  $\mathcal{S}_n$  besitzt, so dass  $(A'_1, \dots, A'_h)$  eine Laplace-Verteilung auf der Menge  $\mathcal{S}_{n|h}$  besitzt. Die Optimalitätseigenschaften folgen aus der Beziehung (5.9), falls man dort  $A$  durch  $A'$  und  $g(s_i, \beta)$  durch  $(g(s_i, \beta)/g(s_i, \beta_0))^k$  ersetzt.  $\square$

### TYP I-ZENSIERTE DATEN

Als Zensierungszeitpunkt sei von nun an immer  $C$  angenommen. Zunächst sollte man sich an die Herleitung des Log-Rangtests für Typ I-zensierte Daten erinnern. Dort stellte man zuerst fest, dass die Statistik

$$M(x_1, \dots, x_n) := |\{1 \leq i \leq n : x_i \leq C\}|$$

eine für den Rand der Hypothesen suffiziente und vollständige Statistik ist.  $M$  gibt dabei gerade die Anzahl der realisierten Zufallsgrößen an. Anschließend legte man den an  $M$  bedingten Test so fest, dass er sich auf der Menge  $\{M = m\}$  genau so entscheidet wie der entsprechende Test für Typ II-zensierte Daten mit Beobachtungsanzahl  $m$ . Geht man so bei dem Test aus Satz 5.9 vor, so erhält man:

**5.10 Satz** (AFT-MODEL, TYP I-ZENSIERTE DATEN) *Gilt  $Y_i \sim F\left(\frac{g(s_i, \beta)}{g(s_i, \beta_0)}\right)$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $F$  beliebig aber fest), so hält der Test  $\varphi_{AFT_I}^* := \varphi_{M'}^*((a'_1, \dots, a'_{m'})$ ) mit*

$$\varphi_{m'}^*((a'_1, \dots, a'_{m'})) := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^*(m') & \text{falls } T'((a'_1, \dots, a'_{m'})) = c^*(m') \\ 0 & < \end{cases},$$

wobei  $\gamma^*(m'), c^*(m')$  aus

$$\begin{aligned} & \frac{(n - m')!}{n!} \left| \left\{ \tilde{a} \in \mathcal{S}_{n|m'} : T'((\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{m'})) > c^*(m') \right\} \right| \\ & + \gamma^*(m') \frac{(n - m')!}{n!} \left| \left\{ \tilde{a} \in \mathcal{S}_{n|m'} : T'((\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{m'})) = c^*(m') \right\} \right| = \alpha \end{aligned}$$

bestimmt werden, das Niveau  $\alpha$  unter  $\beta_0$  genau ein und scheint beim Vorliegen von Weibull-Verteilungen ein guter Test für die Hypothesen  $\mathbf{H} : \beta \geq \beta_0$ ,  $\mathbf{K} : \beta < \beta_0$  zu sein.

BEWEIS: Es ist eigentlich nur anzumerken, dass der Vektor  $(A'_1, \dots, A'_{M'})$  bedingt unter  $M' = m'$  ( $m' \in M'(\mathbb{R}^n)$ ) auf dem Rand  $\{\beta_0\}$  unabhängig von  $F$  eine Laplace-Verteilung auf der Menge  $\mathcal{S}_{n|m'}$  besitzt (siehe (Alsmeyer, 2002, Seite 246, Lemma 33.7)).  $\square$

Mehr Probleme hat man hier bei dem Test aus Satz 5.7. Hier hängt die bedingte Verteilung noch von  $\Lambda_0$  ab:

**5.11 Satz** (PH-MODEL, TYP I-ZENSIERTE DATEN) *Besitzt  $X_i$  die kumulative Ausfallrate  $g(s_i, \beta)\Lambda_0$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $\Lambda_0$  fest), so hält der Test  $\varphi_{PH_I}^* := \varphi_M^*((a_1, \dots, a_M))$  mit*

$$\varphi_m^*((a_1, \dots, a_m)) := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^*(m) & \text{falls } T((a_1, \dots, a_m)) = c^*(m) \\ 0 & < \end{cases},$$

wobei  $\gamma^*(m)$  und  $c^*(m)$  gerade so bestimmt werden, dass unter der Verteilung (5.10) das Niveau  $\alpha$  voll ausgeschöpft wird, das Niveau  $\alpha$  unter  $\beta_0$  genau ein und scheint ein guter Test für die Hypothesen  $\mathbf{H} : \beta \geq \beta_0$ ,  $\mathbf{K} : \beta < \beta_0$  zu sein.

BEWEIS: Es gilt für  $m \in M(\mathbb{R}^n)$  ähnlich wie in Korollar 5.5:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\beta_0, \Lambda_0}^{A|M=m}((a_1, \dots, a_m)) & \quad (5.10) \\ &= \mathbb{P}_{\beta_0, \Lambda_0}(X_{a_1} < \dots < X_{a_m} < C, X_j > C \quad \forall j \in \mathcal{R}_{m+1}) / \mathbb{P}_{\beta_0, \Lambda_0}(M = m) \\ &= \mathbb{P}_{\beta_0, \Lambda_0}(\Lambda_0(X_{a_1}) < \dots < \Lambda_0(X_{a_m}) < \Lambda_0(C)) e^{-\sum_{j \in \mathcal{R}_{m+1}} g(s_j, \beta_0)\Lambda_0(C)} \\ & \quad / \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=m}} (1 - e^{-\sum_{j \in I} g(s_j, \beta_0)\Lambda_0(C)}) e^{-\sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus I} g(s_j, \beta_0)\Lambda_0(C)}. \end{aligned}$$

Nun muss man noch die nicht ausgerechnete Wahrscheinlichkeit bestimmen. Nach Lemma 1.6 reicht es, dieses für Exponentialverteilungen zu tun. Da der Test aber durch die obige Festlegung ein Test mit Neyman-Struktur bzgl.  $M$  ist, hält er das Niveau  $\alpha$  unter  $\beta_0$  genau ein.  $\square$

#### ANMERKUNGEN

Selbstverständlich kann man aus diesen Tests auch die entsprechenden Log-Rangtests herleiten. Setzt man den Stressfaktor  $s_i$  auf 0, falls die  $i$ -te Zufallsgröße aus der ersten Stichprobe stammt, bzw. auf 1, falls die  $i$ -te Zufallsgröße

aus der zweiten Stichprobe stammt, und nimmt man als Funktion  $g$  gerade  $g(s, \beta) = 1 + \mathbf{1}_{\{0\}}(s)\beta$ , so erhält man in Satz 5.6 und Satz 5.7 den Log-Rangtest, in Satz 5.8 und Satz 5.9 den Log-Rangtest für Typ II-zensierte Daten<sup>3</sup> und in Satz 5.10 den Log-Rangtest für Typ I-zensierte Daten, falls man für die Hypothesen  $\beta_0 = 0$  wählt.

In (Prentice, 1978) konnte mit Hilfe einer anders definierten Rangstatistik auch noch die lokale Optimalität bei Typ I-zensierten Daten nachgewiesen werden. Dies ist in diesem Modell sicherlich auch möglich. Es soll jedoch an dieser Stelle darauf verzichtet werden.

Da der Log-Rangtest der wichtigste Rangtest ist wenn es um Lebensdauerdaten geht, wurde hier als erstes nur auf diesen eingegangen. Es zeigt sich aber, dass man noch allgemeiner vorgehen kann: Ist  $g$  sogar für jedes  $s_i$  absolut stetig in  $\beta$  und bezeichnet  $f_0$  eine  $\mathbb{M}$ -Dichte zu einer Verteilung auf  $(\mathbb{R}_+, \mathbb{B}_+)$ , die den üblichen Regularitätsvoraussetzungen, d.h.  $f_0 > 0$   $\mathbb{M}$ -f.s.,  $f_0$  ist absolut stetig mit Ableitung  $f'_0$  und  $\int |xf'_0(x)| d\mathbb{M}(x) < \infty$  genügt, und zusätzlich  $f_0 \circ g(s_i, \beta)$  absolut stetig in  $\beta$  ist ( $1 \leq i \leq n$ ), so kann man auch lokal gleichmäßig beste Rangtests für das AFT-Modell herleiten. Nach der Hoeffding-Formel gilt nämlich:

$$\mathbb{P}_\beta(R' = r') = \frac{1}{n!} E \left( \prod_{i=1}^n \frac{g(s_i, \beta) f_0(g(s_i, \beta) Z_{r'_i \uparrow} / g(s_i, \beta_0))}{g(s_i, \beta_0) f_0(Z_{r'_i \uparrow})} \right),$$

wobei  $Z_1, \dots, Z_n$  stu. und nach  $f_0$ -verteilte Zufallsgrößen sind. Wie in (Hájek et al., 1999, Seite 71, Theorem 1) und (Hájek et al., 1999, Seite 74, Lemma 2) zeigt man, dass man Differentiation nach  $\beta$  und Erwartungswertbildung vertauschen darf. Als Ableitung von  $\mathbb{P}_\beta(R = r)$  an der Stelle  $\beta_0$  erhält man:

$$\dot{L}_{\beta_0}(r') = \sum_{i=1}^n E \left( \frac{\frac{\partial g}{\partial \beta}(s_i, \beta_0)}{g(s_i, \beta_0)} \left( 1 + Z_{r'_i \uparrow} \frac{f'_0(Z_{r'_i \uparrow})}{f_0(Z_{r'_i \uparrow})} \right) \right).$$

Definiert man wie üblich die Scores  $d_i$  durch

$$d_i := E \left( Z_{i \uparrow} \frac{f'_0(Z_{i \uparrow})}{f_0(Z_{i \uparrow})} \right)$$

und geht weiter wie in Satz 5.6 vor, so zeigt man: Der Test  $\varphi^*$  mit

$$\varphi^*(r') := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^* & \text{falls } \sum_{i=1}^n c_i d_{r'_i} = \sum_{i=1}^n c_{a'_i} d_i = c^* \\ 0 & < \end{cases},$$

<sup>3</sup>Siehe z.B. (Hájek et al., 1999, Seite 136ff., Abschnitt 4.9).

wobei  $\gamma^*, c^*$  aus

$$\frac{1}{n!} \left| \left\{ \tilde{r} \in \mathcal{S}_n : \sum_{i=1}^n c_i d_{\tilde{r}_i} > c^* \right\} \right| + \frac{\gamma^*}{n!} \left| \left\{ \tilde{r} \in \mathcal{S}_n : \sum_{i=1}^n c_i d_{\tilde{r}_i} = c^* \right\} \right| = \alpha$$

bestimmt werden, ist ein gegen die aus  $f_0$  generierte Skalenfamilie lokal gleichmäßig bester auf  $\{\beta_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Rangtest für die Hypothesen  $\mathbf{H} : \beta \geq \beta_0$ ,  $\mathbf{K} : \beta < \beta_0$ . Gilt allgemeiner  $X_i \sim F(g(s_i, \beta) \cdot)$  ( $F$  beliebig), so hält der Test  $\varphi^*$  unter dem Parameter  $\beta_0$  das Niveau  $\alpha$  genau ein. Mit der Beziehung (5.9) kann man dann auch optimale Rangtests für Typ II-zensierte Daten herleiten. Tauscht man in Satz 5.9 die Scores  $\ell_i$  durch  $d_i$  aus, so ist der so entstandene Test gerade optimal.<sup>4</sup> Bei Vorliegen von Typ I-zensierten Daten sollte man dann den Test aus Satz 5.10 entsprechend abändern.<sup>5</sup>

Da bei der Untersuchung von Lebensdauerdaten neben den Weibull-Verteilungen die Lognormal-, die Loglogistische- und die Exrem-Value-Verteilungen eine wichtige Rolle inne haben, sollte man auch nach gegenüber diesen Verteilungsklassen optimalen Tests suchen. Nach den obigen Ausführungen muss man dazu aber nur noch die entsprechenden Scores  $d_i$  berechnen. Im Fall der Lognormalverteilung sind die Scores gerade durch die Erwartungswerte der einzelnen Ordnungsstatistiken von  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilten Zufallsgrößen, d.h. also genauso wie beim Fisher-Yates Test, gegeben. Im Fall der Loglogistischenverteilung erhält man die gleichen Scores wie beim Wilcoxon-Rangtest und im Fall von Extreme-Value-Verteilungen die gleichen Scores wie beim Log-Rangtest. Aber auch andere Scores lassen sich einfach bestimmen, falls man die Verteilungsfunktion der jeweiligen Verteilung und somit auch die  $\mathfrak{L}$ -Dichte der  $Z_{i\uparrow}$  konkret angeben kann.

Eine weitere Anwendung der oben vorgeschlagenen Tests besteht darin, dass man aus ihnen auch Konfidenzbereiche für den Parameter  $\beta$  konstruieren kann. In der Literatur (u.a. (Lawless, 2003), (Mann et al., 1974) und (Kalbfleisch and Prentice, 1980)) werden diese häufig so bestimmt, dass man einen Schätzer für  $\beta$  nimmt von dem man weiß, dass er asymptotisch normalverteilt ist und dann den entsprechenden Konfidenzbereich für Normalverteilungen konstruiert. Da aber bekanntlich ein enger Zusammenhang zwischen optimalen Tests und Konfidenzbereichen besteht (siehe (Witting, 1985, Seite 293,

<sup>4</sup>Siehe (Gehan, 1965) und (Efron, 1967) für den Wilcoxon-Rangtest für Typ II-zensierte Daten oder allgemeiner für Skalen- oder Lokationsfamilien (Johnson and Mehrotra, 1972) und (Rao et al., 1960).

<sup>5</sup>Siehe auch (Peto and Peto, 1972).



Satz 2.103)), liegt es nahe, die Konfidenzbereiche zu den hier angegebenen Tests zu benutzen.

### 5.2.2 TESTS BEI MEHREREN STRESSFAKTOREN

Da die vorgeschlagenen Tests im PH-Model bereits bei einem Stressfaktor kompliziert aussehen, sollen im folgenden nur noch Tests für das AFT-Model angegeben werden.

Beim Vorliegen nur eines Stressfaktors war es natürlich, dass die Funktion  $g$ , die den Zusammenhang zwischen dem Stress und der Verteilung charakterisiert, nur von einem Parameter abhing. Gibt es allerdings mehrere Stressfaktoren, so muss man eventuell noch die Abhängigkeiten untereinander berücksichtigen. Daher wird in diesem Abschnitt angenommen, dass die Funktion  $g$  die Gestalt  $g(\mathbf{s}, \boldsymbol{\beta})$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_{m_1})$ ,  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_{m_2})$  hat. Desweiteren sei  $g$  für alle  $\mathbf{s}$  stetig partiell nach  $\beta_i$  differenzierbar ( $1 \leq i \leq m_2$ ).

Im Anschluß sollen nun Tests für Hypothesen der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{H} : \beta_i &\geq \beta_{i;0} \quad (1 \leq i \leq m_2), \\ \mathbf{K} : \beta_i &\leq \beta_{i;0} \quad (1 \leq i \leq m_2), \quad \beta_j < \beta_{j;0} \text{ für ein } j \end{aligned} \quad (5.11)$$

hergeleitet werden. Zweiseitige Fragestellungen kann man allerdings analog behandeln. Nun muss man sich natürlich als erstes Fragen, welchen Optimalitätskriterien diese Tests genügen sollen. Da man im eindimensionalen Fall lokal gleichmäßig beste Rangtests gefunden hat, sollte auch im mehrdimensionalen Fall nach lokal gleichmäßig besten Rangtests gesucht werden. Dabei heißt ein Test  $\varphi$  ein lokal gleichmäßig bester auf  $\{\boldsymbol{\beta}_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Rangtest, falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass  $\varphi$  für alle  $\boldsymbol{\beta}$  mit  $\beta_{j;0} - \varepsilon < \beta_j < \beta_{j;0}$  ( $1 \leq j \leq m_2$ ) ein bester  $\alpha$ -ähnlicher Rangtest für die Hypothesen  $\{\boldsymbol{\beta}_0\}$  gegen  $\{\boldsymbol{\beta}\}$  ist.

Ähnlich wie im vorherigen, gelte in diesem Abschnitt immer

$$X_i \sim F(g(\mathbf{s}_i, \boldsymbol{\beta}) \cdot) \quad (1 \leq i \leq n), \quad (5.12)$$

wobei  $F$  gegebenenfalls noch genauer spezifiziert wird. Die  $X_i$  stellen nun die unter dem wahren Parameter  $\boldsymbol{\beta}$  und den Stressfaktoren  $\mathbf{s}_i$  beobachteten Zufallsgrößen dar. Aus diesen werden dann wie üblich die Zufallsgrößen

$$Y_i := g(\mathbf{s}_i, \boldsymbol{\beta}_0) X_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

generiert, so dass die  $Y_i$  unter dem wahren Parameter  $\boldsymbol{\beta}$  und den Stressfaktoren  $\mathbf{s}_i$  die Verteilungsfunktion  $F(g(\mathbf{s}_i, \boldsymbol{\beta}) \cdot /g(\mathbf{s}_i, \boldsymbol{\beta}_0))$  besitzen. Die Rang- und Antirangstatistik der  $Y_i$  werden wieder mit  $R'$  und  $A'$  bezeichnet.

Nach diesen Vorbemerkungen nun direkt zum ersten Resultat:

**5.12 Satz** (AFT-MODEL, UNZENSIERTE DATEN) *Gilt in (5.12)  $F \sim \mathcal{W}(\kappa, \eta)$ , ( $\eta, \kappa > 0$  beliebig aber fest), so ist der Test  $\varphi^*$  mit*

$$\varphi^*(r') := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^* & \text{falls } \sum_{i=1}^n e_i l_{r'_i} = \sum_{i=1}^n e_{a'_i} l_i = c^* \\ 0 & < \end{cases} ,$$

wobei  $\gamma^*, c^*$  aus

$$\frac{1}{n!} \left| \left\{ \tilde{r} \in \mathcal{S}_n : \sum_{i=1}^n e_i l_{\tilde{r}_i} > c^* \right\} \right| + \frac{\gamma^*}{n!} \left| \left\{ \tilde{r} \in \mathcal{S}_n : \sum_{i=1}^n e_i l_{\tilde{r}_i} = c^* \right\} \right| = \alpha$$

bestimmt werden und  $e_i = \sum_{i=1}^{m_2} \frac{\frac{\partial g}{\partial \beta_i}(\mathbf{s}_i, \boldsymbol{\beta}_0)}{g(\mathbf{s}_i, \boldsymbol{\beta}_0)}$  gilt, ein lokal gleichmäßig bester auf  $\{\boldsymbol{\beta}_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Rangtest für die Hypothesen in (5.11). Ist allgemeiner  $F$  in (5.12) beliebig, so hält der Test  $\varphi^*$  unter dem Parameter  $\boldsymbol{\beta}_0$  das Niveau  $\alpha$  genau ein.

BEWEIS: Auch hier ist die Verteilung der Rangstatistik nach Lemma 5.2 unabhängig von  $\eta$  und hängt somit nur noch von  $\beta$  und  $\kappa$  ab. Die Zähldichte dieser Verteilung ergibt sich aber nach Korollar 5.5 zu:

$$\mathbb{P}_{\beta; \kappa}(A = a) = \prod_{i=1}^n \frac{\left( \frac{g(\mathbf{s}_{a_i}, \boldsymbol{\beta})}{g(\mathbf{s}_{a_i}, \boldsymbol{\beta}_0)} \right)^\kappa}{\sum_{j \in \mathcal{A}_i} \left( \frac{g(\mathbf{s}_j, \boldsymbol{\beta})}{g(\mathbf{s}_j, \boldsymbol{\beta}_0)} \right)^\kappa}.$$

Hier ist der Ausdruck  $\ln(\mathbb{P}_{\beta; \kappa}(A = a))$  für jedes  $a \in \mathcal{S}_n$  stetig partiell nach  $\beta_i$  differenzierbar ( $1 \leq i \leq m_2$ ), wobei die Ableitung an der Stelle  $\boldsymbol{\beta}_0$  durch

$$\dot{L}_{\beta_0; \kappa}^i(a) = \kappa \sum_{j=1}^n \frac{\frac{\partial g}{\partial \beta_i}(\mathbf{s}_j, \boldsymbol{\beta}_0)}{g(\mathbf{s}_j, \boldsymbol{\beta}_0)} - \sum_{j=1}^n \frac{\kappa}{|\mathcal{R}_j|} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \frac{\frac{\partial g}{\partial \beta_i}(\mathbf{s}_k, \boldsymbol{\beta}_0)}{g(\mathbf{s}_k, \boldsymbol{\beta}_0)}$$

gegeben ist. Also existiert für jedes  $a \in \mathcal{S}_n$  ein  $R_a(\boldsymbol{\beta})$  mit  $\lim_{\boldsymbol{\beta} \rightarrow \boldsymbol{\beta}_0} \left| \frac{R_a(\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0\|} \right| = 0$  und

$$\ln(\mathbb{P}_{\beta; \kappa}(A = a)) = \ln(\mathbb{P}_{\beta_0; \kappa}(A = a)) + \sum_{i=1}^{m_2} \dot{L}_{\beta_0; \kappa}^i(a)(\beta_i - \beta_{i;0}) + R_a(\boldsymbol{\beta}).$$

Geht man wie Satz 5.6 vor, so findet man ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $\mathbb{P}_{\beta;\kappa}(A = a)/\mathbb{P}_{\beta_0;\kappa}(A = a)$  für alle  $\beta$  mit  $\beta_{i;0} - \varepsilon < \beta_i < \beta_{i;0}$  ( $1 \leq i \leq m_2$ ) streng isoton in  $\sum_{i=1}^{m_2} \dot{L}_{\beta_0;\kappa}^i(a)(\beta_i - \beta_{i;0})$  ist. Definiert man weiter

$$\dot{L}_{\beta_0;\kappa}(a) := \sum_{i=1}^{m_2} \dot{L}_{\beta_0;\kappa}^i(a),$$

so findet man zu  $a, a' \in \mathcal{S}_n$  ein  $\varepsilon'(a, a')$ , so dass aus  $\dot{L}_{\beta_0;\kappa}(a) > \dot{L}_{\beta_0;\kappa}(a')$  bereits  $\sum_{i=1}^{m_2} \dot{L}_{\beta_0;\kappa}^i(a)(\beta_i - \beta_{i;0}) < \sum_{i=1}^{m_2} \dot{L}_{\beta_0;\kappa}^i(a')(\beta_i - \beta_{i;0})$  für alle  $\beta$  mit  $\beta_{i;0} - \varepsilon'(a, a') < \beta_i < \beta_{i;0}$  ( $1 \leq i \leq m_2$ ) folgt. Setzt man nun noch  $\hat{\varepsilon} := \min\{\min_{a, a' \in \mathcal{S}_n} \{\varepsilon(a, a')\}, \varepsilon\}$ , so ist der Test mit der Prüfgröße  $\dot{L}_{\beta_0;\kappa}$  für alle  $\beta$  mit  $\beta_{i;0} - \hat{\varepsilon} < \beta_i < \beta_{i;0}$  ( $1 \leq i \leq m_2$ ) ein bester Test zum Niveau  $\alpha$  für die Hypothesen  $\{\beta_0\}$  gegen  $\{\beta\}$ . Da  $Y_1, \dots, Y_n$  bei jedem  $F$  unter  $\beta_0$  stu. und identisch verteilt sind, besitzt  $R'$  eine Laplace-Verteilung auf der Menge  $\mathcal{S}_n$ . Also schöpft  $\varphi^*$  für jedes  $F$  das Niveau  $\alpha$  unter  $\beta_0$  voll aus.  $\square$

Dieses Resultat kann man erneut auf den Fall Typ II-zensierter Daten ausweiten. Hier hat man natürlich wieder das gleiche Problem wie im vorherigen Abschnitt: Man kann nur die  $h$  kleinsten Werte der  $X_i$  beobachten, wobei dies nicht die  $h$  kleinsten Werte der  $Y_i$  sein müssen. Der folgende Satz ist daher in dem Kontext formuliert, dass man die  $h$  kleinsten Werte der  $Y_i$  beobachten kann. Hier bietet sich nun die Statistik

$$T'((a'_1, \dots, a'_h)) := \sum_{i=1}^h e_{a'_i} \ell_i + \frac{1}{n-h} \sum_{j \in \mathcal{R}_{h+1}} e_j \sum_{j \in \mathcal{R}_{h+1}} \ell_j$$

als Prüfstatistik an. Mit dieser gilt dann:

**5.13 Satz (AFT-MODEL, TYP II-ZENSIERTE DATEN)** *Gilt in (5.12)  $F \sim \mathcal{W}(\kappa, \eta)$  ( $\eta, \kappa > 0$  beliebig aber fest), so ist der Test  $\varphi_{II}^*$  mit*

$$\varphi_{II}^*((a'_1, \dots, a'_h)) := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^* & \text{falls } T'((a'_1, \dots, a'_h)) = c^* \\ 0 & < \end{cases},$$

wobei  $\gamma^*, c^*$  aus

$$\begin{aligned} & \frac{(n-h)!}{n!} \left| \left\{ \tilde{a} \in \mathcal{S}_{n|h} : T'((\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_h)) > c^* \right\} \right| \\ & + \gamma^* \frac{(n-h)!}{n!} \left| \left\{ \tilde{a} \in \mathcal{S}_{n|h} : T'((\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_h)) = c^* \right\} \right| = \alpha \end{aligned}$$

bestimmt werden, ein lokal gleichmäßig bester auf  $\{\beta_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Rangtest für die Hypothesen in (5.11). Ist in (5.12)  $F$  beliebig, so hält der Test  $\varphi_{II}^*$  das Niveau  $\alpha$  unter  $\beta_0$  genau ein.

BEWEIS: Es ist eigentlich nur anzumerken, dass die Antirangstatistik  $A'$  von  $Y$  unter dem Parameter  $\beta_0$  unabhängig von  $F$  eine Laplace-Verteilung auf der Menge  $\mathcal{S}_n$  und somit  $(A'_1, \dots, A'_h)$  eine Laplace-Verteilung auf der Menge  $\mathcal{S}_{n|h}$  besitzt. Die Optimalitätseigenschaften folgen dann wie in Satz 5.12 mit Hilfe von einer leichten Abwandlung von (5.9).  $\square$

Wie der obige Test nun für Typ I-zensierte Daten abzuwandeln ist, sollte auch klar sein:

**5.14 Satz** (AFT-MODEL, TYP I-ZENSIERTE DATEN) Für beliebiges  $F$  in (5.12) hält der Test  $\varphi_I^* := \varphi_{M'}^*((a'_1, \dots, a'_{m'}))$  mit

$$\varphi_{m'}^*((a'_1, \dots, a'_{m'})) := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^*(m') \text{ falls } T'((a'_1, \dots, a'_{m'})) = c^*(m') & = \\ 0 & < \end{cases} ,$$

wobei  $\gamma^*(m'), c^*(m')$  aus

$$\begin{aligned} & \frac{(n - m')!}{n!} \left| \left\{ \tilde{a} \in \mathcal{S}_{n|m'} : T'((\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{m'})) > c^*(m') \right\} \right| \\ & + \gamma^*(m') \frac{(n - m')!}{n!} \left| \left\{ \tilde{a} \in \mathcal{S}_{n|m'} : T'((\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{m'})) = c^*(m') \right\} \right| = \alpha \end{aligned}$$

bestimmt werden, das Niveau  $\alpha$  unter  $\beta_0$  genau ein, und scheint beim Vorliegen von Weibull-Verteilungen ein guter Test für die Hypothesen in (5.11) zu sein.

BEWEIS: Die Aussage ist eine direkte Konsequenz aus (Alsmeyer, 2002, Seite 246, Lemma 33.7).  $\square$

Die Bemerkungen zum Auswerten der Tests aus dem vorherigen Abschnitt gelten ebenso wie die Bemerkungen zur Bestimmung von Konfidenzbereichen für den Parameter  $\beta$  ganz analog für die in diesem Abschnitt angegebenen Tests. Auch in diesem Fall kann man gegenüber der Klasse der Lognormalverteilungen der Loglogistischenverteilungen und der Extreme-Value-Verteilungen optimale Tests herleiten.

Eine praktische Anwendung der obigen Tests besteht im Folgenden: Liegt ein  $k$ -Stichprobenproblem vor und will man testen, ob sich die Verteilungen der einzelnen Stichproben unterscheiden, so setze man den Stressfaktor  $\mathbf{s}$  der Zufallsgrößen der  $i$ -ten Stichprobe in der  $i$ -ten Komponente auf 1 und ansonsten auf 0 und wähle weiter  $g$  als  $g(\mathbf{s}, \boldsymbol{\beta}) = 1 + \sum_{i=1}^k \mathbf{1}_{\{1\}}(s_i)\beta_i$  und die zweiseitigen Hypothesen  $\mathbf{H} : \boldsymbol{\beta}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{K} : \boldsymbol{\beta}_0 \neq \mathbf{0}$ . Setzt man  $g(\mathbf{s}, \boldsymbol{\beta}) = 1 + \sum_{i=2}^k \mathbf{1}_{\{1\}}(s_i)\beta_i$  und in (5.11)  $\boldsymbol{\beta}_0 = \mathbf{0}$ , so hat man einen Test hergeleitet, der überprüft, ob die Stichprobe zum Stressfaktor  $s_1$  besser als alle anderen Stichproben ist.

### 5.3 STEP-STRESS ACCELERATED LIFE TESTS

Während im vorherigen Abschnitt immer angenommen wurde, dass der Stressfaktor  $s$  sich für verschiedene Versuchsobjekte unterscheiden konnte, so musste er für ein Versuchsobjekt im Zeitablauf jedoch immer konstant sein. Dies wird im *Step-Stress Accelerated Failure Time Model* (SSAFT-Modell) nicht mehr vorausgesetzt. Vielmehr gibt man sich hier bereits vor dem Experiment zu jedem Versuchsobjekt Zeitpunkte  $C_i$  und Stressfaktoren  $s_i$  vor, so dass sich zum Zeitpunkt  $C_i$  der Stressfaktor von  $s_i$  zu  $s_{i+1}$  ändert. Der Stressfaktor ist also immer nur in den Zeitabschnitten  $[C_i, C_{i+1})$  konstant. Auch in diesem Modell werden häufig nur Schätzer für die entsprechenden Größen wie z.B. die Verteilungsfunktion unter normalen Versuchsbedingungen angegeben (siehe (Nelson, 1980) für parametrische und (Shaked and Singpurwalla, 1983) oder (McNichols and Padgett, 1988) für nichtparametrische Verfahren). In diesem Abschnitt werden jedoch erneut Tests für Hypothesen wie im vorherigen Abschnitt hergeleitet. Im folgenden seien  $C_1, \dots, C_k$  die nach der Größe geordneten Zeitpunkte, an denen bei irgendeinem Versuchsobjekt ein Stressfaktor geändert wird. Bezeichne nun  $\mathbf{s}_i := (s_{i,1}, \dots, s_{i,k+1})$  den zum  $i$ -ten Versuchsobjekt gehörigen Vektor von Stressfaktoren. Dabei wird das  $i$ -te Versuchsobjekt zunächst unter dem Stress  $s_{i,1}$  beobachtet. Zum Zeitpunkt  $C_1$  wird dann der Stressfaktor auf  $s_{i,2}$ , zum Zeitpunkt  $C_2$  auf  $s_{i,3}$ , usw. abgeändert, bis er dann zum Zeitpunkt  $C_k$  auf  $s_{i,k+1}$  gesetzt wird und sich danach nicht mehr ändert. In diesem Zusammenhang wird der Vektor  $(s_{i,1}, C_1, s_{i,2}, C_2, \dots, s_{i,k}, C_k, s_{i,k+1})$  auch *Stress Pattern* genannt und durch  $\mathbf{s}_i \diamond \mathbf{C}$  abgekürzt.

Bezeichnet nun erneut  $g$  die Funktion, die den Zusammenhang zwischen dem Stressfaktor und der Verteilung der Zufallsgrößen herstellt und weiterhin

bis auf einen Parameter  $\beta$  spezifiziert ist, so wird in (Shaked and Singpurwalla, 1983) folgendes Modell für die Verteilung der Zufallsgrößen unter dem jeweiligen Stress Pattern  $\mathbf{s}_i \diamond \mathbf{C}$  vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} F_{i;\beta}(t) &= F_0 \left( \sum_{j=1}^l g(s_{i;j}, \beta)(C_j - C_{j-1}) + g(s_{i;l+1}, \beta)(t - C_l) \right) \\ &= F_0 \left( \int_{[0,t]} g(\mathbf{s}_i(y), \beta) d\lambda(y) \right) \text{ für } t \in [C_l, C_{l+1}), \end{aligned} \quad (5.13)$$

wobei von nun an immer  $C_0 = 0$ ,  $C_{k+1} = \infty$  und

$$g(\mathbf{s}_i(y), \beta) := \sum_{j=1}^{k+1} g(s_{i;j}, \beta) \mathbf{1}_{[C_{j-1}, C_j)}(y)$$

gilt.  $g(\mathbf{s}_i(y), \beta)$  gibt also den Stress zum Zeitpunkt  $y$  wieder. Dabei stellt die Verteilungsfunktion  $F_0$  gerade die Verteilung der Zufallsgrößen unter normalem Stress dar. Die obige Gleichung lässt sich auch durch das sogenannte General Shock Model oder aber durch Damage Accumulation motivieren (siehe (Shaked and Singpurwalla, 1983)). Dieses Modell kann aber auch als eine Verallgemeinerung des im vorherigen Abschnitts behandelten AFT-Modell angesehen werden. Ferner stimmt es unter naheliegenden Voraussetzungen mit dem in (Nelson, 1980) angegebenen Modell überein.

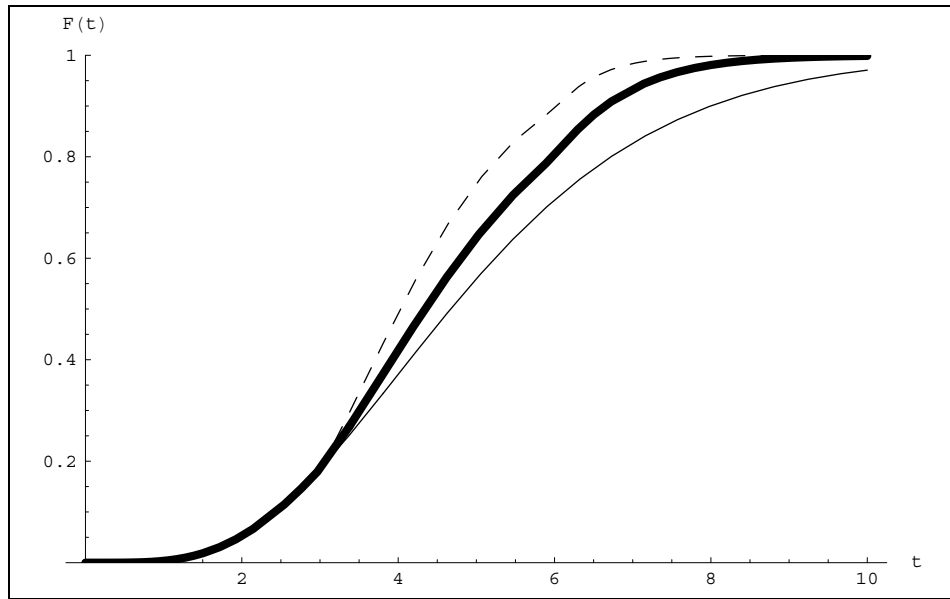
Wie im vorherigen Abschnitt auch, kann man erneut nur die Zufallsgrößen  $X_i$ , die unter dem Parameter  $\beta$  wie in (5.13) angegeben verteilt sind, beobachten. Damit auf dem Rand der Hypothesen

$$\mathbf{H} : \beta \geq \beta_0, \quad \mathbf{K} : \beta < \beta_0$$

wieder eine i.i.d. Situation vorliegt, werden die Zufallsgrößen  $X_i$  auf Zufallsgrößen  $Y_i$  transformiert. Dabei gilt  $Y_i := h_i \circ X_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) mit

$$h_i(t) := \sum_{j=1}^l g(s_{i;j}, \beta_0)(C_j - C_{j-1}) + g(s_{i;l+1}, \beta_0)(t - C_l) \text{ für } t \in [C_l, C_{l+1}).$$

Um nun erneut die Hoeffding Formel anwenden zu können, muss zuerst die Verteilung von  $Y_i$  unter dem Parameter  $\beta$  bestimmt werden:



ABILDUNG 5.3: Graph der Verteilungsfunktion einer  $\Gamma_{5,1}$ -Verteilung (—) und der transformierten Verteilungsfunktionen mit  $g(s) = s^{1.2}$  und den Stress Pattern  $(1, 3, 1.5, 6, 2.5)$  (---) und  $(1, 3, 1.2, 6, 1.75)$  (—).

**5.15 Lemma** *Unter dem Parameter  $\beta$  besitzt  $Y_i$  die Verteilungsfunktion*

$$G_{i;\beta}(t) := F_0 \left( \sum_{j=1}^l g(s_{i;j}, \beta)(C_j - C_{j-1}) + \frac{g(s_{i;l+1}, \beta)}{g(s_{i;l+1}, \beta_0)}(t - h_i(C_l)) \right) \\ \text{für } t \in [h_i(C_l), h_i(C_{l+1})) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Ist  $F_0$  in (5.13) desweiteren absolut stetig mit  $\lambda$ -Dichte  $f_0$ , so besitzt  $Y_i$  unter dem Parameter  $\beta$  die  $\lambda$ -Dichte

$$g_{i;\beta}(t) := \frac{g(s_{i;l+1}, \beta)}{g(s_{i;l+1}, \beta_0)} f_0 \left( \sum_{j=1}^l g(s_{i;j}, \beta)(C_j - C_{j-1}) + \frac{g(s_{i;l+1}, \beta)}{g(s_{i;l+1}, \beta_0)}(t - h_i(C_l)) \right) \\ \text{für } t \in [h_i(C_l), h_i(C_{l+1})) \quad (1 \leq i \leq n).$$

BEWEIS: Offenbar ist die Abbildung  $h_i$  eine Bijektion von  $[0, \infty)$  nach  $[0, \infty)$ . Durch eine einfache Manipulation kann man zeigen, dass die Umkehrfunktion  $h_i^{-1}$  durch

$$h_i^{-1}(t) := \frac{t - \sum_{j=1}^l g(s_{i;j}, \beta_0)(C_j - C_{j-1})}{g(s_{i;l+1}, \beta_0)} + C_l, \text{ für } t \in [h_i(C_l), h_i(C_{l+1})),$$

gegeben ist. Gilt nun  $t \in [h_i(C_l), h_i(C_{l+1}))$ , so erhält man  $h_i^{-1}(t) \in [C_l, C_{l+1})$  und damit auch

$$H_{i;\beta}(t) = \mathbb{P}(Y_i \leq t) = \mathbb{P}(x_i \leq h_i^{-1}(t)) = F_{i;\beta}(h_i^{-1}(t)) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Durch einfaches Einsetzen in (5.13) erhält man dann die Beziehung für die Verteilungsfunktion. Differenziert man diese, so ergibt sich die behauptete Beziehung für die Dichte.  $\square$

Bezeichne nun erneut  $R'$  die Rangstatistik und  $A'$  die Antirangstatistik von  $Y$ . Setzt man nun voraus, dass  $f_0, g(s_{i;j}, \cdot)$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k+1$ ) und auch  $\beta \mapsto g_{i;\beta}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) absolut stetig sind und  $\int |f'_0(x)| d\lambda(x), \int |x f'_0(x)| d\lambda(x) < \infty$  gilt, so lautet das erste Resultat:

**5.16 Satz** (SSAFT-MODEL, UNZENSIERTE DATEN) *Erfüllen  $f_0$  und  $g$  die obigen Voraussetzungen, so ist der Test  $\varphi^*$  mit*

$$\varphi^*(r') := \begin{cases} 1 & < \\ \gamma^* & \text{falls } \dot{L}_{\beta_0}(r', f) = c^* \\ 0 & > \end{cases},$$

wobei  $\gamma^*, c^*$  aus

$$\frac{1}{n!} \left| \left\{ \tilde{r} \in \mathcal{S}_n : \dot{L}_{\beta_0}(\tilde{r}, f) < c^* \right\} \right| + \frac{\gamma^*}{n!} \left| \left\{ \tilde{r} \in \mathcal{S}_n : \dot{L}_{\beta_0}(\tilde{r}, f) = c^* \right\} \right| = \alpha$$

bestimmt werden und  $\dot{L}_{\beta_0}$  durch (5.14) gegeben ist, ein lokal gleichmäßig bester auf  $\{\beta_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Rangtest für die Hypothesen  $\mathbf{H} : \beta \geq \beta_0$ ,  $\mathbf{K} : \beta < \beta_0$ . Ist allgemeiner  $F$  in (5.13) beliebig, so hält der Test  $\varphi^*$  unter dem Parameter  $\beta_0$  das Niveau  $\alpha$  genau ein.

BEWEIS: Nach der Hoeffding-Formel gilt:

$$\mathbb{P}_\beta(R' = r') = \frac{1}{n!} E \left( \prod_{i=1}^n \frac{g_{i;\beta}(Z_{r'_i \uparrow})}{f_0(Z_{r'_i \uparrow})} \right),$$

wobei  $Z_1, \dots, Z_n$  stu. und nach  $f_0$ -verteilte Zufallsgrößen sind. Wie in (Hájek et al., 1999, Seite 71, Theorem 1) und (Hájek et al., 1999, Seite 74, Lemma 2) zeigt man, dass man Differentiation nach  $\beta$  und Erwartungwertbildung vertauschen darf. Dabei erhält man als Ableitung von  $g_{i;\beta}$  nach  $\beta$  an



der Stelle  $\beta_0$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \beta} g_{i;\beta}(t) \right|_{\beta=\beta_0} &= \frac{\frac{\partial g}{\partial \beta}(s_{i;l+1}, \beta_0)}{g(s_{i;l+1}, \beta_0)} f_0(t) \\ &+ \left( \sum_{j=1}^l \frac{\partial g}{\partial \beta}(s_{i;j}, \beta_0)(C_j - C_{j-1}) + \frac{\frac{\partial g}{\partial \beta}(s_{i;l+1}, \beta_0)}{g(s_{i;l+1}, \beta_0)}(t - h_i(C_l)) \right) f_0'(t) \end{aligned}$$

für  $t \in [h_i(C_l), h_i(C_{l+1}))$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

Definiert man nun  $\psi_i$  durch

$$\begin{aligned} \psi_i(t, f_0) &= \sum_{j=1}^l \frac{\partial g}{\partial \beta}(s_{i;j}, \beta_0)(C_l - C_{l-1}) \frac{f_0'(t)}{f_0(t)} \\ &+ \frac{\frac{\partial g}{\partial \beta}(s_{i;l+1}, \beta_0)}{g(s_{i;l+1}, \beta_0)} (1 + (t - h_i(C_l))) \frac{f_0'(t)}{f_0(t)} \end{aligned}$$

für  $t \in [h_i(C_l), h_i(C_{l+1}))$  ( $1 \leq i \leq n$ ),

so ergibt sich die Ableitung von  $\mathbb{P}_\beta(R' = r')/\mathbb{P}_{\beta_0}(R' = r')$  an der Stelle  $\beta_0$  zu:

$$\dot{L}_{\beta_0}(r', f) = \sum_{i=1}^n E(\psi_i(Z_{r'_i \uparrow}, f_0)). \quad (5.14)$$

Damit beweist man die Optimalitätsaussage auf dem üblichen Weg. Der Zusatz folgt, da  $Y_1, \dots, Y_n$  bei beliebigem  $F$  unter  $\beta_0$  stu. und identisch verteilt sind.  $\square$

Offenbar hat die Score-Erzeugende Funktion  $\psi_i$  nicht mehr ein so einfache Gestalt wie in Satz 5.7. Da man aber beispielsweise bei Weibull-Verteilungen die  $\mathfrak{L}$ -Dichte und Verteilungsfunktion einfach angeben kann, kennt man auch die  $\mathfrak{L}$ -Dichte der entsprechenden Ordnungsstatistiken. Man kann die Werte in (5.14) also numerisch bestimmen. Von der Struktur her besitzt die Score-Erzeugende Funktion zwei Anteile. In der ersten Zeile einen Lokations- und in der zweiten Zeile einen Skalenanteil. Wie man weiter feststellt, hängt die Score-Erzeugende Funktion noch entscheidend von der Dichte  $f_0$  ab. Will man nun beispielsweise einen Test angeben, der bei Vorliegen von Weibull-Verteilungen besonders gut ist, so muss man dazu erst noch die entsprechenden Lokations- und Skalenparameter unter dem Parameter  $\beta_0$  schätzen. Dazu kann man allerdings nicht die Rangstatistik  $R'$  benutzen, da diese ja gerade

einer Laplace-Verteilung auf der Menge  $\mathcal{S}_n$  genügt. Benutzt man jedoch die Daten  $Y_i$  selbst, so ist es möglich, Schätzer für die entsprechenden Größen anzugeben. Der Maximum-Likelihood Schätzer  $(\hat{\kappa}, \hat{\eta})$  bestimmt sich aus den Gleichungen (siehe (Cohen, 1965)):

$$\hat{\eta}^{\hat{\kappa}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n y_i^{\hat{\kappa}}}, \quad \frac{\sum_{i=1}^n \ln(y_i) y_i^{\hat{\kappa}}}{\sum_{i=1}^n y_i^{\hat{\kappa}}} - \frac{1}{\hat{\kappa}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(y_i) = 0.$$

Da Weibull-Verteilungen die Voraussetzungen von Satz 5.16 nur dann erfüllen, falls der Formparameter  $\kappa$  echt größer als 1 ist, muss man die obigen Schätzer noch leicht abändern. Verfolgt man allerdings den Ansatz von (Janssen and Mason, 1990), so muss nur  $\kappa > 0.5$  vorausgesetzt werden. Allerdings ändert sich bei diesem Ansatz die Score-Erzeugende Funktion. Will man nun den Test aus Satz 5.16 anwenden, so sollte man als  $f_0$  die Dichte unter den geschätzten Parametern verwenden.

Eine andere Möglichkeit, Tests für die entsprechenden Hypothesen anzugeben, besteht wie im Artikel (Schmoyer, 1986) darin, das Problem als ein  $k$ -Stichprobenproblem aufzufassen, wobei  $k$  gerade die Anzahl der verschiedenen Stress Pattern angibt. Bezeichnet  $d_i^r$  die Anzahl der Beobachtungen  $y_j$  der  $i$ -ten Gruppe von Stress Pattern, deren Rang kleiner als  $r$  ist und  $n_i$  die Gesamtzahl der Beobachtungen zum  $i$ -ten Stress Pattern, so lautet die Prüfgröße dieses Tests:

$$\max_{1 \leq r \leq n} \sum_{i=1}^k n_i \left( \frac{d_i^r}{n_i} - \frac{r}{n} \right)^2.$$

Selbstverständlich kann man den Test aus Satz 5.16 auch für den Fall Typ II-zensierter Daten abändern. Kann man nur die  $h$  kleinsten Werte von  $Y_1, \dots, Y_n$  beobachten, so bietet sich die folgende Statistik als Teststatistik an:

$$T((a'_1, \dots, a'_h)) := \sum_{i=1}^h E(\psi_{a'_i}(Z_{i\uparrow}, f_0)) + \frac{1}{n-h} \sum_{j,k \in \mathcal{Z}_{h+1}} E(\psi_j(Z_{k\uparrow}, f_0)).$$

Mit dieser gilt dann:

**5.17 Satz** (SSAFT-MODEL, TYP II-ZENSIERTE DATEN) *Erfüllen  $f_0$  und  $g$  die obigen Voraussetzungen und ist  $Y_i$  nach  $g_{i,\beta}$  verteilt ( $1 \leq i \leq n$ ), so ist*

der Test  $\varphi_{II}^*$  mit

$$\varphi^*((a_1, \dots, a_h)) := \begin{cases} 1 & < \\ \gamma^* & \text{falls } T((a'_1, \dots, a'_h)) = c^* \\ 0 & > \end{cases},$$

wobei  $\gamma^*, c^*$  aus

$$\frac{1}{n!} \left| \left\{ \tilde{a} \in \mathcal{S}_{n|h} : T((\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_h)) < c^* \right\} \right| + \frac{\gamma^*}{n!} \left| \left\{ \tilde{a} \in \mathcal{S}_{n|h} : T((\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_h)) = c^* \right\} \right| = \alpha$$

bestimmt werden, ein lokal gleichmäßig bester auf  $\{\beta_0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Rangtest für die Hypothesen  $\mathbf{H} : \beta \geq \beta_0$ ,  $\mathbf{K} : \beta < \beta_0$ . Ist allgemeiner  $F$  in (5.13) beliebig, so hält der Test  $\varphi_{II}^*$  unter dem Parameter  $\beta_0$  das Niveau  $\alpha$  genau ein.

BEWEIS: Die Optimalitätseigenschaften folgen mit Hilfe von (5.9) genau so wie in Satz 5.16. Da  $Y_1, \dots, Y_n$  bei beliebigem  $F$  unter  $\beta_0$  stu. und identisch verteilt sind, gilt auch der Zusatz.  $\square$

Sucht man auch hier wieder nach einem Test, der gegenüber Weibull-Verteilungen gut ist, so sollte man zuerst die Parameter der Verteilung schätzen und dann die Prüst Statistik mit Hilfe dieser Parameter bestimmen. Im Fall Typ II-zensierter Daten lauten die Likelihood-Gleichungen (siehe (Cohen, 1965)):

$$\hat{\eta}^{\hat{\kappa}} = \frac{h}{\sum_{i=1}^h y_{i\uparrow}^{\hat{\kappa}} + (n-h)y_{h\uparrow}},$$

$$\frac{\sum_{i=1}^h \ln(y_{i\uparrow}) y_{i\uparrow}^{\hat{\kappa}} + (n-h) \ln(y_{h\uparrow}) y_{h\uparrow}^{\hat{\kappa}}}{\sum_{i=1}^h y_{i\uparrow}^{\hat{\kappa}} + (n-h)y_{h\uparrow}} - \frac{1}{\hat{\kappa}} - \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h \ln(y_{i\uparrow}) = 0.$$

Nun ist es auch nicht mehr überraschend, dass man den Test aus Satz 5.16 auch für Typ I-zensierte Daten abwandeln kann. Ist das Untersuchungsende durch  $C$  gegeben, so gilt:

**5.18 Satz** (SSAFT-MODEL, TYP I-ZENSIERTE DATEN) *Erfüllen  $f_0$  und  $g$  die obigen Voraussetzungen und ist  $Y_i$  nach  $g_{i,\beta}$  verteilt ( $1 \leq i \leq n$ ), so hält*

der Test  $\varphi_I^* := \varphi_{M'}^*((a'_1, \dots, a'_{M'}))$  mit

$$\varphi_{m'}^*((a'_1, \dots, a'_{m'})) := \begin{cases} 1 & < \\ \gamma^*(m') & \text{falls } T((a'_1, \dots, a'_{m'})) = c^*(m') \\ 0 & > \end{cases},$$

wobei  $\gamma^*(m'), c^*(m')$  aus

$$\begin{aligned} & \frac{(n - m')!}{n!} \left| \left\{ \tilde{a} \in \mathcal{S}_{n|m'} : T((\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{m'})) < c^*(m') \right\} \right| \\ & + \gamma^*(m') \frac{(n - m')!}{n!} \left| \left\{ \tilde{a} \in \mathcal{S}_{n|m'} : T((\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{m'})) = c^*(m') \right\} \right| = \alpha \end{aligned}$$

bestimmt werden, das Niveau  $\alpha$  bei beliebigem  $F$  in (5.13) unter  $\beta_0$  genau ein und scheint ein guter Test für die Hypothesen  $\mathbf{H} : \beta \geq \beta_0, \mathbf{K} : \beta < \beta_0$  zu sein.

BEWEIS: Es ist eigentlich nur anzumerken, dass der Vektor  $(A'_1, \dots, A'_{M'})$  bedingt unter  $M' = m'$  ( $m' \in M'(\mathbb{R}^n)$ ) auf dem Rand  $\{\beta_0\}$  unabhängig von  $F$  eine Laplace-Verteilung auf der Menge  $\mathcal{S}_{n|m'}$  besitzt (siehe (Alsmeyer, 2002, Seite 246, Lemma 33.7)).  $\square$

Auch hier sollen noch die Likelihood-Geichungen Typ I-zensierter Weibull-Verteilungen angegeben werden (siehe (Cohen, 1965)):

$$\hat{\eta}^{\hat{\kappa}} = \frac{M(y)}{\sum_{i=1}^{M(y)} y_{i\uparrow}^{\hat{\kappa}} + (n - M(y))C},$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{M(y)} \ln(y_{i\uparrow}) y_{i\uparrow}^{\hat{\kappa}} + (n - M(y)) \ln(C) C^{\hat{\kappa}}}{\sum_{i=1}^{M(y)} y_{i\uparrow}^{\hat{\kappa}} + (n - M(y))C} - \frac{1}{\hat{\kappa}} - \frac{1}{M(y)} \sum_{i=1}^{M(y)} \ln(y_{i\uparrow}) = 0.$$

wobei auch hier  $M$  die Anzahl der nicht zensierten Beobachtungen angibt. Wie man genau vorzugehen hat, sollte auch klar sein.

## 5.4 ANMERKUNGEN

In diesem Kapitel wurden bisher immer nur Tests für Typ I- oder Typ II-zensierte Daten vorgeschlagen. Dies liegt daran, dass man bei endlichem Stichprobenumfang im Fall zufällig-zensierter Daten keine befriedigenden Resultate erzielen kann. Es sollte allerdings möglich sein, zufriedenstellende

## 5.4 Anmerkungen

---

asymptotische Aussagen zu gewinnen. Dabei kann man versuchen, dies wie im Fall (Janssen, 1991) mit Hilfe der klassischen Theorie oder wie im Fall (Gill, 1983) und (Fleming and Harrington, 1991) oder (Andersen et al., 1992) mit Hilfe von Zählprozessen und Integralen bzgl. diesen zu erreichen.

Auch im AFT-Model kann man optimale Permutationstests herleiten. Man kann auf dem üblichen Weg zeigen, dass der folgende Test ein gegen  $\mathbf{K}_{\mathcal{W}_\kappa}$  lokal optimaler Permutationstest ist:  $\tilde{\varphi}^*(y) = \tilde{\varphi}_{T(y)}^*(y)$  mit

$$\tilde{\varphi}_t^*(y) = \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^*(t) & \text{falls } \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial}{\partial \beta} g(s_i, \beta_0)}{g(s_i, \beta_0)} y_i^\kappa = c^*(t) \\ 0 & < \end{cases} ,$$

wobei  $\gamma^*(t), c^*(t)$  aus

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial}{\partial \beta} g(s_i, \beta_0)}{g(s_i, \beta_0)} y_{\pi(i)}^\kappa > c^*(t) \right\} \right| \\ & + \frac{\gamma^*(t)}{n!} \left| \left\{ \pi \in \mathcal{S}_n : \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial}{\partial \beta} g(s_i, \beta_0)}{g(s_i, \beta_0)} y_{\pi(i)}^\kappa = c^*(t) \right\} \right| = \alpha \end{aligned}$$

bestimmt werden ( $T$  bezeichnet die Ordnungsstatistik von  $Y$ ).

Zuletzt soll noch ein Datensatz ausgewertet werden. Dieser findet sich auch in (Nelson, 1972) und (Lawless, 2003, Seite 3). Hierbei handelt es sich um die Lebensdauern von Stromkabelisierungen, die unter verschiedenen Stromspannungen ermittelt wurden (siehe Tabelle 5.1). Graphische Methoden legen nahe, dass die Daten einer Weibull-Verteilung genügen, wobei als Stressrelation das Inverse Power Law unterstellt wurde. Wertet man die Daten mit dem Test aus Satz 5.7 aus, so erhält man als Werte der asymptotischen Prüfstatistik

$$T(r') := \frac{\sum_{i=1}^n c_i \ell_{r'_i} - n \bar{c} \bar{\ell}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (c_i - \bar{c})^2 \sum_{i=1}^n (\ell_i - \bar{\ell})^2}},$$

wobei  $\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i$  und  $\bar{\ell} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ell_i$  gilt, in Abhängigkeit von  $\beta$  den Graphen in Abbildung 5.4. Damit ergeben sich im einseitigen Fall die folgenden

## 5 Accelerated Life Testing

Stromspannung (in kV)	Lebensdauern (in Minuten)
26	5.79, 1579.52, 2323.7
28	68.85, 426.07, 110.29, 108.29, 1067.6
30	17.05, 22.66, 21.02, 175.88, 139.07, 144.12, 20.46, 43.40, 194.90, 47.30, 7.74
32	0.40, 82.85, 9.88, 89.29, 215.10, 2.75, 0.79, 15.93, 3.91, 0.27, 0.69, 100.58, 27.80, 13.95, 53.24
34	0.96, 4.15, 0.19, 0.78, 8.01, 31.75, 7.35, 6.50, 8.27, 33.91, 32.52, 3.16, 4.85, 2.78, 4.67, 1.31, 12.06, 36.71, 72.89
36	1.97, 0.59, 2.58, 1.69, 2.71, 25.50, 0.35, 0.99, 3.99, 3.67, 2.07, 0.96, 5.35, 2.90, 13.77
38	0.47, 0.73, 1.40, 0.74, 0.39, 1.13, 0.09, 2.38

TABELLE 5.1: Stromspannungen und die dazugehörigen Lebenszeiten.

Konfidenzbereiche:

Niveau $\alpha = 0.9$ :	$(0, 19.994]$ bzw. $[15.122, \infty)$ ,
Niveau $\alpha = 0.95$ :	$(0, 20.850]$ bzw. $[14.550, \infty)$ ,
Niveau $\alpha = 0.99$ :	$(0, 22.298]$ bzw. $[13.819, \infty)$ .

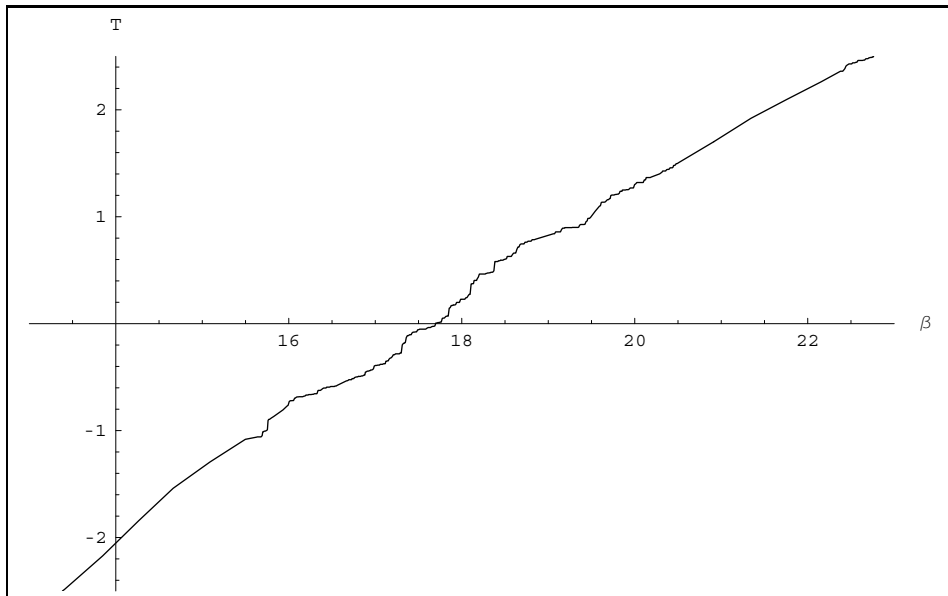


ABBILDUNG 5.4: Graph der asymptotischen Prüfstatistik  $T(r')$  in Abhängigkeit von  $\beta$ .

---



---

## Kapitel 6

### KONKURRIERENDE RISIKEN

---

Das Problem der konkurrierenden Risiken (engl. Competing Risks) steht in enger Verwandtschaft zu dem Problem zufällig-zensierter Daten. In diesem Kapitel werden Zufallsgrößen  $X_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq k$ ,  $k \geq 2$ ) untersucht. In der Situation konkurrierender Risiken kann man allerdings nur

$$X_i := \min_{1 \leq j \leq k} X_{i,j} \quad (1 \leq i \leq n)$$

und

$$\Delta_i := \sum_{j=1}^k j \mathbf{1}_{\{X_{i,j} = X_{i,1\uparrow}\}} \quad (1 \leq i \leq n)$$

beobachten. Es sei folgende Bedingung vorausgesetzt:

$$(X_{i,1}, \dots, X_{i,k}) \quad (1 \leq i \leq n) \text{ ist eine i.i.d. Folge} \tag{6.1}$$

und  $X_1$  besitzt eine stetige Verteilung.

Wie bereits in den obigen Kapiteln festgehalten, sollte man sich in solchen Situationen darauf beschränken, nur  $R$  (Rangstatistik von  $X$ ) und  $\Delta$  zu beobachten. Offenbar kann man aber ebenso gut  $A$  (Antirangstatistik von  $X$ ) und  $\Delta_{\uparrow}$  (zeitlich geordnetes  $\Delta$ ) beobachten. Aus diesem Grund sollen Tests, die nur über  $(R, \Delta)$  bzw.  $(A, \Delta_{\uparrow})$  von den Daten abhängen, Rangtests genannt werden. Getestet werden in dieser Situation Hypothesen über das Verhältnis der  $X_{1,j}$  ( $1 \leq j \leq k$ ) zueinander. Anschaulich kann man sich die Situation folgendermaßen vorstellen: Es liegt eine Serienschaltung von  $k$  Komponenten vor. Falls eine der Komponenten ausfällt, so fällt das

ganze System aus. Man beobachtet den Zeitpunkt, an dem das System ausgefallen ist, und aus welchem Grund das System ausgefallen ist, d.h. welche Komponente den Systemausfall herbeigeführt hat. Für einige medizinische Anwendungen siehe (Hoel, 1972). Ein Beispiel behandelt die Frage, welche von zwei Krebsarten die „schlimmere“ ist.

## 6.1 UNZENSIERTE DATEN

Als erstes soll gezeigt werden, dass in der obigen Situation die Projektion auf  $\Delta_{\uparrow}$  eine *suffiziente Statistik* ist. Dazu zeigt man als erstes wie in (Neuhaus, 1988, Lemma 3.1) oder (Moser, 1992, Seite 24, Satz 2.3):

**6.1 Satz** *Unter der Voraussetzung (6.1) sind die Zufallsvektoren  $(R, A)$  und  $(X_{\uparrow}, \Delta_{\uparrow})$  stu.. Dabei besitzt sowohl  $R$  als auch  $A$  eine Laplace-Verteilung auf der Menge  $\mathcal{S}_n$ .*

BEWEIS: Da  $X_1, \dots, X_n$  stu. und identisch verteilt sind, besitzt  $R$  eine Laplace-Verteilung auf der Menge  $\mathcal{S}_n$  (siehe (Witting and Nölle, 1970, Seite 111, Satz 3.9)). Das Gleiche gilt damit auch für  $A$ .

Für  $C \in \mathbb{B}_{\leq}^n \otimes \text{Pow}(\{1, \dots, k\}^n)$  gilt wegen der Permutationsinvarianz der Verteilung von  $(X_1, \dots, X_n)$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X_{\uparrow}, \Delta_{\uparrow}) \in C) &= \mathbb{P}\left(\sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \{X_{\pi(1)} \leq \dots \leq X_{\pi(n)}, (X_{\uparrow}, \Delta_{\uparrow}) \in C\}\right) \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \mathbb{P}(X_{\pi(1)} \leq \dots \leq X_{\pi(n)}, (X_{\uparrow}, \Delta_{\uparrow}) \in C) \\ &= n! \mathbb{P}(X_1 \leq \dots \leq X_n, (X_{\uparrow}, \Delta_{\uparrow}) \in C). \end{aligned}$$

Dies führt aus dem gleichen Grund zu

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A = a, (X_{\uparrow}, \Delta_{\uparrow}) \in C) &= \mathbb{P}(X_{a_1} \leq \dots \leq X_{a_n}, (X_{\uparrow}, \Delta_{\uparrow}) \in C) \\ &= \frac{1}{n!} \mathbb{P}((X_{\uparrow}, \Delta_{\uparrow}) \in C) \\ &= \mathbb{P}(A = a) \mathbb{P}((X_{\uparrow}, \Delta_{\uparrow}) \in C) \end{aligned}$$

für alle  $a \in \mathcal{S}_n$ ,  $C \in \mathbb{B}_{\leq}^n \otimes \text{Pow}(\{1, \dots, k\}^n)$ . Damit ist die Behauptung bewiesen, da man  $R$  aus  $A$  berechnen kann.  $\square$

Setzt man nicht mehr voraus, dass  $X_1$  stetig verteilt ist, so bleibt die Aussage zur stochastischen Unabhängigkeit gültig. Selbstverständlich muss

$R$  oder  $A$  dann aber nicht mehr eine Laplace-Verteilung auf  $\mathcal{S}_n$  besitzen. Nach (Allen, 1963) und (Armitage, 1959) gilt ähnlich im Fall  $k = 2$ :  $R$  und  $\Delta$  sind genau dann stu., wenn  $X_{1,1}$  und  $X_{1,2}$  proportionale Ausfallraten besitzen.

Also kann man unter der Voraussetzung (6.1) die bedingte Verteilung  $\mathbb{P}^{(A, \Delta_{\uparrow}) | \Delta_{\uparrow} = \delta_{\uparrow}}$  als eine Laplace-Verteilung auf der Menge  $\{(a, \delta_{\uparrow}) : a \in \mathcal{S}_n\}$  wählen. Damit gilt nach Definition der Suffizienz:

**6.2 Satz** *Die Projektion auf  $\Delta_{\uparrow}$  ist suffizient für*

$$\mathfrak{P} := \{ \mathbb{P}^{(A, \Delta_{\uparrow})} : \mathbb{P}^{(X_{i,1}, \dots, X_{i,k})} \text{ genügt (6.1)} \},$$

und damit auch für jede Teilklasse von  $\mathfrak{P}$  suffizient.

Als nächstes sollte nun natürlich die Verteilung von  $\Delta_{\uparrow}$  bestimmt werden. Aus diesem Grund seien für den Rest dieses Abschnitts die Zufallsgrößen  $X_{1,1}, \dots, X_{1,k}$  stu. und nach  $F_j$  ( $F_j$  sei eine stetige Verteilungsfunktion) verteilt ( $1 \leq j \leq k$ ). Es sei allerdings darauf hingewiesen, dass man diese Voraussetzung nicht anhand der Daten überprüfen kann. Dies wurde von (Cox, 1959) und vielen anderen Autoren festgehalten und als Identifizierungsproblem bezeichnet. Da in der obigen Situation die Verteilungsfunktion von  $X_1$  durch  $1 - \prod_{j=1}^k (1 - F_j)$  gegeben ist, ist diese insbesondere auch stetig.

**6.3 Lemma** *Bezeichnet  $f_j$  eine  $\mu$ -Dichte von  $F_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) für ein beliebiges  $\sigma$ -endliches Maß  $\mu$  mit  $P_{F_1}, \dots, P_{F_k} \ll \mu$  und  $M$  die Menge  $\{(z_1, \dots, z_n) : z_1 \leq \dots \leq z_n\}$ , so gilt:*

$$\mathbb{P}(\Delta_{\uparrow} = \delta_{\uparrow}) = n! \int_M \prod_{i=1}^n f_{\delta_{i\uparrow}}(t_i) \prod_{l \neq \delta_{i\uparrow}} (1 - F_l(t_i)) d\mu^{(n)}(t). \quad (6.2)$$

*Gilt  $F_1 = \dots = F_k$ , so besitzt  $\Delta_{\uparrow}$  eine Laplace-Verteilung auf der Menge  $\{1, \dots, k\}^n$ .*

**BEWEIS:** Bezeichnet  $\#$  das Zählmaß auf  $\{1, \dots, k\}$ , so ist eine  $\mu \otimes \#$ -Dichte von  $(X_i, \Delta_i)$  durch

$$\frac{d\mathbb{P}^{(X_i, \Delta_i)}}{d\mu \otimes \#}(x_i, \delta_i) = f_{\delta_i}(x_i) \prod_{l \neq \delta_i} (1 - F_l(x_i))$$

gegeben. Nutzt man diese und eine weitere Beziehung aus dem Beweis von Satz 6.1 aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Delta_{\uparrow} = \delta_{\uparrow}) &= n! \mathbb{P}(A = (1, \dots, n), \Delta_{\uparrow} = \delta_{\uparrow}) \\ &= n! \int_M \prod_{i=1}^n f_{\delta_{i\uparrow}}(t_i) \prod_{l \neq \delta_{i\uparrow}} (1 - F_l(t_i)) d\mu^{(n)}(t). \end{aligned}$$

Gilt  $F_1 = \dots = F_k$ , so ist  $\mathbb{P}(\Delta_{\uparrow} = \delta_{\uparrow})$  unabhängig von  $\delta_{\uparrow}$ . Also besitzt  $\Delta_{\uparrow}$  eine Laplace-Verteilung.  $\square$

Dies vereinfacht sich im *Proportional Hazard Model* (PH-Model), d.h.  $X_{1,j}$  besitze die kumulative Ausfallrate  $\vartheta_j \Lambda_0$  ( $1 \leq j \leq k$ ) mit beliebiger stetiger kumulativer Ausfallrate  $\Lambda_0$ , zu:

**6.4 Lemma** *Bezeichnet  $Y_j$  die Anzahl der durch das Risiko  $j$  verursachten Ausfälle und gilt  $p_j := \vartheta_j / (\vartheta_1 + \dots + \vartheta_k)$  ( $1 \leq j \leq k$ ), so erhält man im PH-Model:*

$$\mathbb{P}(\Delta_{\uparrow} = \delta_{\uparrow}) = p_1^{y_1} \dots p_k^{y_k}. \quad (6.3)$$

*Aus diesem Grund ist  $Y := (Y_1, \dots, Y_k)$  eine für das PH-Model suffiziente Statistik, die einer  $\mathfrak{M}(n, p_1, \dots, p_k)$ - (Multinomial-) Verteilung genügt.*

BEWEIS: Nach (6.2) und Korollar 1.7 gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Delta_{\uparrow} = \delta_{\uparrow}) &= n! \int_M \prod_{i=1}^n \vartheta_{\delta_{i\uparrow}} \exp\left(-\sum_{j=1}^k \vartheta_j t_i\right) d\lambda_{|(0,\infty)^{(n)}}^{(n)}(t) \\ &= n! \frac{\vartheta_1^{y_1} \dots \vartheta_k^{y_k}}{(\vartheta_1 + \dots + \vartheta_k)^n} \int_M \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k \vartheta_j\right) \exp\left(-\sum_{j=1}^k \vartheta_j t_i\right) d\lambda_{|(0,\infty)^{(n)}}^{(n)}(t). \end{aligned}$$

Dabei stellt das Integral gerade die Wahrscheinlichkeit dar, dass die Antirangstatistik  $A$  unter einer i.i.d. Folge von  $Exp(\vartheta_1 + \dots + \vartheta_k)$ -verteilten Zufallsgrößen den Wert  $(1, \dots, n)$  annimmt. Also beträgt dieser Wert  $1/n!$ . Die Suffizienz von  $Y$  folgt damit aus dem Neyman-Kriterium. Die Verteilungsaussage erhält man aus  $\mathbb{P}_{\vartheta}(\Delta = \delta) = p_{\delta_1} \dots p_{\delta_n}$  und einer kombinatorischen Überlegung.  $\square$

Im PH-Model hat man also nur noch durch  $(Y_1, \dots, Y_k)$  induzierte Hypothesen zu betrachten. Diese bestehen aus Hypothesen über die Parameter

von Multinomialverteilungen. Da die Klasse der Multinomialverteilungen nach (Witting, 1985, Seite 149, Beispiel 1.159) eine  $(k-1)$ -parametrische *Exponentialfamilie* in

$$\zeta_i(p) = \ln(p_i/p_k) \quad (1 \leq i \leq k-1) \quad \text{und} \quad T_i(y) = y_i \quad (1 \leq i \leq k-1) \quad (6.4)$$

ist, kann man mit Hilfe der Theorie der optimalen Tests in mehrparametrischen Exponentialfamilien eine Reihe von interessanten Fragestellungen behandeln:

Da die kumulative Ausfallrate von  $X_1$  durch  $\sum_{j=1}^k \vartheta_j \Lambda_0$  gegeben ist, gibt  $p_j = \vartheta_j / (\vartheta_1 + \dots + \vartheta_k)$  den Anteil von  $X_{1,j}$  an der kumulativen Ausfallrate von  $X_1$  an ( $1 \leq j \leq k$ ). Aus diesem Grund lautet eine naheliegende Hypothese:

$$\mathbf{H} : \vartheta_1 \geq \rho \vartheta_k, \quad \mathbf{K} : \vartheta_1 < \rho \vartheta_k \quad (\rho > 0).$$

Für diese Hypothesen erweist sich der Zeichentest als optimal:

**6.5 Satz** *In der obigen Situation ist der Test  $\varphi^*(y_1, \dots, y_k) := \varphi_{y_2+\dots+y_{k-1}}^*(y_1)$  mit*

$$\varphi_{y_2+\dots+y_{k-1}}^*(y_1) := \begin{cases} 1 & < \\ \gamma_{y_2+\dots+y_{k-1}}^* & \text{falls } y_1 = c_{y_2+\dots+y_{k-1}}^* \\ 0 & > \end{cases}$$

( $c_{y_2+\dots+y_{k-1}}^*$  bezeichnet das  $\alpha$ -Quantil der  $\mathcal{B}(n - y_2 - \dots - y_{k-1}, 1/(1 + \rho))$ -Verteilung) ein gleichmäßig bester auf  $\{\vartheta_1 = \rho \vartheta_k\}$   $\alpha$ -ähnlicher Rangtest und somit auch ein gleichmäßig bester zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Rangtest für die Hypothesen  $\mathbf{H} : \vartheta_1 \geq \rho \vartheta_k$ ,  $\mathbf{K} : \vartheta_1 < \rho \vartheta_k$  ( $\rho > 0$ ).

BEWEIS: Mit den Bezeichnungen in (6.3) und (6.4) lauten die Hypothesen

$$\mathbf{H} : \zeta_1 \geq \ln(1/(1 + \rho)), \quad \mathbf{K} : \zeta_1 < \ln(1/(1 + \rho)).$$

Nach Lemma 6.4 und (Witting, 1985, Seite 376, Satz 3.60) ist daher nur noch die bedingte Verteilung zu bestimmen. Für diese gilt jedoch nach (Johnson et al., 1997, Seite 35):

$$\mathbb{P}_p^{(Y_1, \dots, Y_k) | (Y_{i_1}, \dots, Y_{i_l}) = (y_{i_1}, \dots, y_{i_l})} = \mathfrak{M}(n - y_{i_1} - \dots - y_{i_l}, p'_1, \dots, p'_{k-l}) \quad (6.5)$$

mit  $p'_r = p_{m(r)} / \sum_{\nu \notin \{i_1, \dots, i_l\}} p_\nu$  ( $1 \leq r \leq k-l$ ), wobei  $m(r)$  der Reihe nach alle nicht in  $\{i_1, \dots, i_l\}$  auftretenden Werte durchläuft. Insbesondere gilt also:

$$\mathbb{P}_p^{(Y_1, \dots, Y_k) | (Y_2, \dots, Y_{k-1}) = (y_2, \dots, y_{k-1})} = \mathfrak{M}(n - y_2 - \dots - y_{k-1}, p_1/(p_1 + p_k), p_k/(p_1 + p_k)).$$

Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Für den Fall  $k = 2$  und  $\rho = 1$  wurde der gleiche Test in (Bagai et al., 1989b) hergeleitet. Dort konnte allerdings nur gezeigt werden, dass er ein lokal gleichmäßig bester Rangtest für den Fall ist, dass  $X_{1,1}, X_{1,2}$  beide einer Exponentialverteilung genügen. Hier konnte nun aber gezeigt werden, dass der Test wesentlich bessere Güteeigenschaften besitzt. Eine weitere ähnliche Fragestellung wird in (Bagai et al., 1989a) behandelt.

Analog erhält man für die zweiseitige Fragestellung:

**6.6 Satz** *In der obigen Situation ist der Test  $\varphi^*(y_1, \dots, y_k) := \varphi_{y_2 + \dots + y_{k-1}}^*(y_1)$  mit  $m(y) := y_2 + \dots + y_{k-1}$  und*

$$\varphi_{m(y)}^*(y_1) := \begin{cases} 1 & \notin [c_{m(y),1}^*, c_{m(y),2}^*] \\ \gamma_{m(y),i}^* & \text{falls } y_1 = c_{m(y),i}^* \ (i = 1, 2) \\ 0 & \in (c_{m(y),1}^*, c_{m(y),2}^*) \end{cases},$$

wobei  $c_{m(y),i}^*, \gamma_{m(y),i}^*$  ( $i = 1, 2$ ) aus

$$\mathcal{B}(n - m(y), 1/(1 + \rho))([c_{m(y),1}^*, c_{m(y),2}^*]^c) + \sum_{i=1}^2 \gamma_{m(y),i}^* \mathcal{B}(n - m(y), 1/(1 + \rho))(\{c_{m(y),i}^*\}) = \alpha$$

$$\text{und } \int x \varphi^*(x) d\mathcal{B}(n - m(y), 1/(1 + \rho))(x) = \frac{\alpha(n - m(y))}{1 + \rho}$$

bestimmt werden, ein gleichmäßig bester auf  $\{\vartheta_1 = \rho\vartheta_k\}$   $\alpha$ -ähnlicher lokal unverfälschter Rangtest und somit auch ein gleichmäßig bester zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Rangtest für die Hypothesen  $\mathbf{H} : \vartheta_1 = \rho\vartheta_k$ ,  $\mathbf{K} : \vartheta_1 \neq \rho\vartheta_k$  ( $\rho > 0$ ).

Eine weitere, häufig behandelte Fragestellung ist die, ob die kumulativen Ausfallraten der  $X_{1,j}$  ( $1 \leq j \leq k$ ) alle übereinstimmen (siehe (Lam, 1998), (Yip and Lam, 1992) und (Yip and Lam, 1993); dort werden asymptotisch optimale Rangtests unter gewissen Verteilungsannahmen hergeleitet). Hier kann aber eine etwas allgemeinere Fragestellung behandelt werden. Liege erneut ein PH-Model vor. Es soll nun die Frage untersucht werden, wie die einzelnen  $X_{1,j}$  ( $1 \leq j \leq k$ ) anteilmässig an der kumulativen Ausfallrate von  $X_1$  beteiligt sind. Für die induzierten Hypothesen muss daher die Fragestellung  $\mathbf{H} : p = p_0$ ,  $\mathbf{K} : p \neq p_0$  untersucht werden. Da die induzierten

Hypothesen dieselben wie beim  $\chi^2$ -Anpassungstest sind, sollte man einen ähnlichen Test verwenden.<sup>1</sup> In (Witting and Nölle, 1970, Seite 87ff.) wird der Test  $\varphi^*$  mit

$$\varphi^*(y_1, \dots, y_k) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{j=1}^k \frac{(y_j - np_{j,0})^2}{np_{j,0}} > \chi_{k-1, \alpha}^2 \\ 0 & \text{falls } \sum_{j=1}^k \frac{(y_j - np_{j,0})^2}{np_{j,0}} \leq \chi_{k-1, \alpha}^2 \end{cases}$$

( $\chi_{k-1, \alpha}^2$  bezeichnet das  $\alpha$ -Fraktile der  $\chi_{k-1}^2$ -Verteilung) vorgeschlagen. Beachte aber auch (Bickel and Doksum, 1977, Kapitel 8). Dort wird ein anderer Test für die gleichen Hypothesen vorgeschlagen. Man kann allerdings auch Regressionskoeffizienten  $\rho_j > 0$  ( $1 \leq j \leq k$ ) festlegen, und dann bzgl. der speziellen Verteilungsannahme  $\vartheta_j = \vartheta_{j,0} + \rho_j t$  ( $1 \leq j \leq k$ ) lokal gleichmäßig beste Rangtests für die Hypothesen  $\mathbf{H} : t = 0$ ,  $\mathbf{K} : t > 0$  finden.

Nun noch zu Fragestellungen, die auch in (Neuhaus, 1991) behandelt wurden. Sei eine absolut stetige Verteilungsfunktion  $F$  mit absolut stetiger Dichte  $f > 0$ , die die Ableitung  $f'$  besitzt, und  $\int f^2(x) + |f'(x)| d\lambda(x) < \infty$  gegeben. In diesem Fall interessiert man sich für *Lokationsalternativen*  $X_{1,j} \sim F(x - t\rho_j)$  ( $1 \leq j \leq k$ ), wobei für die Regressionskoeffizienten  $\rho_1 + \dots + \rho_k = 0$  und  $\rho_j \neq 0$  ( $1 \leq j \leq k$ ) gelte. Getestet werden sollen die Hypothesen  $\mathbf{H} : t = 0$ ,  $\mathbf{K} : t > 0$ . Gilt  $\rho_k \geq \dots \geq \rho_1$ , so testet man gegen eine Alternative auf Trend. Als Resultat erhält man:

**6.7 Satz** *In der obigen Situation ist der Test  $\varphi^*(\delta_{\uparrow})$  mit*

$$\varphi^*(\delta_{\uparrow}) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{i=1}^n \rho_{\delta_{i\uparrow}} b_i < c^* \\ \gamma^* & \text{falls } \sum_{i=1}^n \rho_{\delta_{i\uparrow}} b_i = c^* \\ 0 & \text{falls } \sum_{i=1}^n \rho_{\delta_{i\uparrow}} b_i > c^* \end{cases},$$

wobei  $c^*, \gamma^*$  aus

$$\frac{1}{k^n} \left| \left\{ \delta \in \{1, \dots, k\}^n : \sum_{i=1}^n \rho_{\delta_i} b_i < c^* \right\} \right| + \frac{\gamma^*}{k^n} \left| \left\{ \delta \in \{1, \dots, k\}^n : \sum_{i=1}^n \rho_{\delta_i} b_i = c^* \right\} \right| = \alpha$$

<sup>1</sup>Der  $\chi^2$ -Anpassungstest ist auf jeder Sphäre um  $p_0$  ein Maximin-Test (siehe (Strasser, 1985, Seite 18))

bestimmt werden und für  $1 \leq i \leq n$

$$b_i := \int_M \prod_{l=1}^n f(x_l)(1 - F(x_l))^{k-1} \left( \frac{f(x_i)}{1 - F(x_i)} + (1 - F(x_i)) \frac{f'(x_i)}{f(x_i)} \right) d\mathbb{X}^{(n)}(x)$$

gilt, ein lokal gleichmäßig bester auf  $\{t = 0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Rangtest für die Hypothesen  $\mathbf{H} : t = 0$ ,  $\mathbf{K} : t > 0$ .

BEWEIS: Unter dem Parameter  $t$  gilt:

$$\mathbb{P}_t(\Delta_{\uparrow} = \delta_{\uparrow}) = n! \int_M \prod_{i=1}^n f(x_i - \rho_{\delta_{\uparrow}} t) \prod_{l \neq \delta_{\uparrow}} (1 - F(x_i - \rho_l t)) d\mathbb{X}^{(n)}(x).$$

Dieser Ausdruck ist nach  $t$  differenzierbar (siehe (Elstrodt, 1999, Seite 146, Satz 5.7)), wobei man für die Ableitung an der Stelle 0 erhält:

$$n! \int_M \sum_{i=1}^n \left( -\rho_{\delta_{\uparrow}} f'(x_i)(1 - F(x_i))^{k-1} + \sum_{l \neq \delta_{\uparrow}} \rho_l f^2(x_i)(1 - F(x_i))^{k-2} \right) \prod_{m \neq i} f(x_m)(1 - F(x_m))^{k-1} d\mathbb{X}^{(n)}(x).$$

Beachtet man, dass  $\rho_1 + \dots + \rho_k = 0$  gilt, so vereinfacht sich dieser Ausdruck zu:

$$-n! \sum_{i=1}^n \rho_{\delta_{\uparrow}} \int_M \left( (1 - F(x_i))^{k-2} (f^2(x_i) + (1 - F(x_i))f'(x_i)) \prod_{l \neq i} f(x_l)(1 - F(x_l))^{k-1} \right) d\mathbb{X}^{(n)}(x)$$

Geht man weiter wie in Satz 5.6 vor, so erhält man das Resultat.  $\square$

Da man eine Skalenfamilie auf  $\mathbb{R}_+$  mit Hilfe der Logarithmustransformation auf eine Lokationsfamilie zurückführen kann, erhält man damit Alternativen zu denen in (Froda, 1987) vorgeschlagenen Rangtests. Da die dort vorgeschlagenen Rangtests über  $(R, \Delta)$  von den Daten abhängen, sind sie allerdings schwieriger auszuwerten als die hier vorgeschlagenen Rangtests. Ähnliche Fragestellungen werden auch in (Beyersmann et al., 2003) mit Hilfe asymptotischer Methoden angegangen.



## 6.2 TYP II-ZENSIERTE DATEN

In der Situation Typ II-zensierter Daten mit Zensierungsanzahl  $h$  (siehe Seite 2) kann man nur

$$A^h := (A_1, \dots, A_h) \quad \text{und} \quad \Delta_{\uparrow}^h := (\Delta_{1\uparrow}, \dots, \Delta_{h\uparrow})$$

beobachten. Da aus Satz 6.1 folgt, dass  $A^h$  und  $\Delta_{\uparrow}^h$  stu. sind, ist in dieser Situation die Projektion auf  $\Delta_{\uparrow}^h$  eine suffiziente Statistik:

**6.8 Satz** *Die Projektion auf  $\Delta_{\uparrow}^h$  ist suffizient für*

$$\mathfrak{P}^{II} := \left\{ \mathbb{P}^{(A^h, \Delta_{\uparrow}^h)} : \mathbb{P}^{(X_{i,1}, \dots, X_{i,k})} \text{ genügt (6.1)} \right\},$$

und damit auch für jede Teilklasse von  $\mathfrak{P}^{II}$  suffizient.

Sind erneut die Zufallsgrößen  $X_{1,1}, \dots, X_{1,k}$  stu. und nach  $F_j$  ( $F_j$  sei eine stetige Verteilungsfunktion) verteilt ( $1 \leq j \leq k$ ), so erhält man für die Verteilung von  $\Delta_{\uparrow}^h$ :

**6.9 Lemma** *Bezeichnet  $f_j$  eine  $\mu$ -Dichte von  $F_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) für ein beliebiges  $\sigma$ -endliches Maß  $\mu$  mit  $P_{F_1}, \dots, P_{F_k} \ll \mu$  und  $M$  die Menge  $\{(z_1, \dots, z_n) : z_1 \leq \dots \leq z_n\}$ , so gilt:*

$$\mathbb{P}(\Delta_{\uparrow}^h = \delta_{\uparrow}^h) = n! \sum_{\substack{\delta \in \{1, \dots, k\}^n \\ (\delta_1, \dots, \delta_h) = \delta_{\uparrow}^h}} \int_M \prod_{i=1}^n f_{\delta_i}(t_i) \prod_{l \neq \delta_i} (1 - F_l(t_i)) d\mu^{(n)}(t). \quad (6.6)$$

*Gilt  $F_1 = \dots = F_k$ , so besitzt  $\Delta_{\uparrow}^h$  eine Laplace-Verteilung auf der Menge  $\{1, \dots, k\}^h$ .*

BEWEIS: Die Behauptung folgt aus

$$\mathbb{P}(\Delta_{\uparrow}^h = \delta_{\uparrow}^h) = \sum_{\substack{\delta \in \{1, \dots, k\}^n \\ (\delta_1, \dots, \delta_h) = \delta_{\uparrow}^h}} \mathbb{P}(\Delta_{\uparrow} = \delta) \quad (6.7)$$

mit Hilfe von (6.2). □

Dies vereinfacht sich im PH-Model zu:

**6.10 Lemma** *Bezeichnet  $Y_j$  die Anzahl der durch das Risiko  $j$  verursachten Ausfälle und gilt  $p_j := \vartheta_j / (\vartheta_1 + \dots + \vartheta_k)$  ( $1 \leq j \leq k$ ), so erhält man im PH-Model:*

$$\mathbb{P}(\Delta_{\uparrow}^h = \delta_{\uparrow}^h) = p_1^{y_1} \cdots p_k^{y_k} \sum_{\substack{(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{N}_0^k \\ z_1 + \dots + z_k = n - h}} p_1^{z_1} \cdots p_k^{z_k}.$$

*Aus diesem Grund ist  $Y := (Y_1, \dots, Y_k)$  eine für das PH-Model suffiziente Statistik, die einer  $\mathfrak{M}(h, p_1, \dots, p_k)$ -Verteilung genügt.*

BEWEIS: Siehe Lemma 6.4 und (6.7). □

Somit hat man im PH-Model nur noch durch  $(Y_1, \dots, Y_k)$  induzierte Hypothesen zu betrachten, wobei  $(Y_1, \dots, Y_k)$  einer  $\mathfrak{M}(h, p_1, \dots, p_k)$ -Verteilung genügt. Also hat man in den jeweiligen Sätzen nur die Beobachtungsanzahl  $n$  durch die Zensierungsanzahl  $h$  zu ersetzen, um optimale Tests zu erhalten.

Für das in Satz 6.7 behandelte *Regressionsproblem* erhält man das folgende Resultat:

**6.11 Satz** *In der Situation von Satz 6.7 ist der Test  $\varphi^*(\delta_{\uparrow}^h)$  mit*

$$\varphi^*(\delta_{\uparrow}^h) := \begin{cases} 1 & < \\ \gamma^* & \text{falls } \sum_{i=1}^h \rho_{\delta_{i\uparrow}^h} b_i = c^* \\ 0 & > \end{cases},$$

wobei  $c^*, \gamma^*$  aus

$$\frac{1}{k^h} \left| \left\{ \delta \in \{1, \dots, k\}^h : \sum_{i=1}^h \rho_{\delta_i} b_i < c^* \right\} \right| + \frac{\gamma^*}{k^h} \left| \left\{ \delta \in \{1, \dots, k\}^h : \sum_{i=1}^h \rho_{\delta_i} b_i = c^* \right\} \right| = \alpha$$

*bestimmt werden, ein lokal gleichmäßig bester auf  $\{t = 0\}$   $\alpha$ -ähnlicher Rangtest für die Hypothesen  $\mathbf{H} : t = 0$ ,  $\mathbf{K} : t > 0$ .*

BEWEIS: Nach (6.7) und dem Beweis von Satz 6.7 erhält man als Ableitung von  $\mathbb{P}_t(\Delta_{\uparrow}^h = \delta_{\uparrow}^h)$  an der Stelle 0:

$$-n! \sum_{\substack{\delta \in \{1, \dots, k\}^n \\ (\delta_1, \dots, \delta_h) = \delta_{\uparrow}^h}} \sum_{i=1}^n \rho_{\delta_i} b_i.$$

Nutzt man nun noch aus, dass  $\rho_1 + \dots + \rho_k = 0$  gilt, so erhält man das Resultat auf dem gleichen Weg wie in Satz 5.6.  $\square$

### 6.3 TYP I-ZENSIERTE DATEN

Liege nun eine Typ I-Zensierung mit Zensierungszeitpunkt  $C$  vor. Da man in dieser Situation nur die  $x_i$  mit  $x_i \leq C$  beobachten kann ( $1 \leq i \leq n$ ) (siehe Seite 2), hat man als erstes die Antirangstatistik  $A$  und den Indikatorvektor  $\Delta_{\uparrow}$  abzuändern. Diese beiden angesprochenen Statistiken werden durch  $A^I = (A_1^I, \dots, A_n^I)$  mit

$$A_i^I := \begin{cases} A_i & \text{falls } X_{a_i} \leq C \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \quad (1 \leq i \leq n)$$

und  $\Delta_{\uparrow}^I = (\Delta_{1\uparrow}^I, \dots, \Delta_{n\uparrow}^I)$  mit

$$\Delta_{i\uparrow}^I := \begin{cases} \Delta_i & \text{falls } X_{i\uparrow} \leq C \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \quad (1 \leq i \leq n)$$

definiert. Setzt man

$$\mathcal{S}_{n,l\infty} := \{(a_1, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_{n-l} \in \{1, \dots, n\}, \\ a_i \neq a_j \quad \forall 1 \leq i < j \leq n-l, \quad a_{n-l+1} = \dots = a_n = \infty\},$$

so bildet  $(A^I, \Delta_{\uparrow}^I)$  nach  $\bigcup_{l=0}^n \mathcal{S}_{n,l\infty} \times \{1, \dots, k\}^{n-l} \times \{\infty\}^l$  ab, wobei als dazugehörige  $\sigma$ -Algebra die Potenzmenge gewählt wird. Auch hier soll als erstes wieder nach einer suffizienten Statistik gesucht werden:

**6.12 Satz** *Die Projektion auf den Indikatorvektor  $\Delta_{\uparrow}^I$  ist eine für*

$$\mathfrak{P}^I := \left\{ \mathbb{P}^{(A^I, \Delta_{\uparrow}^I)} : \mathbb{P}^{(X_{i,1}, \dots, X_{i,k})} \text{ genügt (6.1)} \right\},$$

*suffiziente Statistik, und damit insbesondere auch für jede Teilklasse von  $\mathfrak{P}^I$  suffizient.*

BEWEIS: Für  $\delta_{\uparrow}^I \in \{1, \dots, k\}^{n-l} \times \{\infty\}^l$  gilt wegen der Permutationsinvarianz der Verteilung von  $(X_1, \dots, X_n)$ :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(\Delta_{\uparrow}^I = \delta_{\uparrow}^I) \\
 &= \mathbb{P}\left(\sum_{a \in \mathcal{S}_{n,l,\infty}} \{X_{a_1} \leq \dots \leq X_{a_{n-l}} \leq C, X_j > C \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \forall j \notin \{a_1, \dots, a_{n-l}\}, \Delta_{\uparrow}^I = \delta_{\uparrow}^I\right) \\
 &= \sum_{a \in \mathcal{S}_{n,l,\infty}} \mathbb{P}\left(X_{a_1} \leq \dots \leq X_{a_{n-l}} \leq C, X_j > C \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \forall j \notin \{a_1, \dots, a_{n-l}\}, \Delta_{\uparrow}^I = \delta_{\uparrow}^I\right) \\
 &= \frac{n!}{(n-l)!} \mathbb{P}(X_1 \leq \dots \leq X_{n-l} \leq C, X_j > C, n-l+1 \leq j \leq n, \Delta_{\uparrow}^I = \delta_{\uparrow}^I).
 \end{aligned}$$

Damit erhält man für  $(a^I, \delta_{\uparrow}^I) \in \mathcal{S}_{n,l,\infty} \times \{1, \dots, k\}^{n-l} \times \{\infty\}^l$ :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(A^I = a^I, \Delta_{\uparrow}^I = \delta_{\uparrow}^I) \\
 &= \mathbb{P}(X_{a_1^I} \leq \dots \leq X_{a_{n-l}^I} \leq C, X_j > C \quad \forall j \notin \{a_1^I, \dots, a_{n-l}^I\}, \Delta_{\uparrow}^I = \delta_{\uparrow}^I) \\
 &= \frac{(n-l)!}{n!} \mathbb{P}(\Delta_{\uparrow}^I = \delta_{\uparrow}^I).
 \end{aligned}$$

Also kann  $\mathbb{P}^{(A^I, \Delta_{\uparrow}^I) | \Delta_{\uparrow}^I = \delta_{\uparrow}^I}$  unabhängig von der Verteilung von  $\mathbb{P}^{(X_{1,1}, \dots, X_{1,k})}$  als eine Laplace-Verteilung auf der Menge  $\{(a^I, \delta_{\uparrow}^I) : a^I \in \mathcal{S}_{n,l,\infty}\}$  gewählt werden.  $\square$

Somit sollte man auch in diesem Fall zuerst die Verteilung von  $\Delta_{\uparrow}^I$  bestimmen. Aus diesem Grund seien für den Rest dieses Abschnitts die Zufallsgrößen  $X_{1,1}, \dots, X_{1,k}$  stu. und nach  $F_j$  ( $F_j$  sei eine stetige Verteilungsfunktion) verteilt ( $1 \leq j \leq k$ ).

**6.13 Lemma** *Bezeichnet  $f_j$  eine  $\mu$ -Dichte von  $F_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) für ein beliebiges  $\sigma$ -endliches Maß  $\mu$  mit  $P_{F_1}, \dots, P_{F_k} \ll \mu$  und  $M_{y_{\infty}}^I$  die Menge  $\{(z_1, \dots,$*

$z_{n-y_\infty}) : z_1 \leq \dots \leq z_{n-y_\infty} \leq C$ , so gilt für  $\delta_\uparrow^I \in \{1, \dots, k\}^{n-y_\infty} \times \{\infty\}^{y_\infty}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Delta_\uparrow^I = \delta_\uparrow^I) &= \frac{n!}{(n-y_\infty)!} \\ &\times \int_{M_{y_\infty}^I} \prod_{i=1}^{n-y_\infty} f_{\delta_{i\uparrow}^I}(t_i) \prod_{l \neq \delta_{i\uparrow}^I} (1 - F_l(t_i)) d\mu^{(n-y_\infty)}(t) \left( \prod_{j=1}^k (1 - F_j(C)) \right)^{y_\infty}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

BEWEIS: Nach Satz 6.12 und dem Beweis von Lemma 6.3 gilt für  $\delta_\uparrow^I \in \{1, \dots, k\}^{n-y_\infty} \times \{\infty\}^{y_\infty}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Delta_\uparrow^I = \delta_\uparrow^I) &= \frac{n!}{(n-y_\infty)!} \mathbb{P}\left(X_1 \leq \dots \leq X_{n-y_\infty} \leq C, X_j > C, \right. \\ &\quad \left. n - y_\infty + 1 \leq j \leq n, \Delta_\uparrow^I = \delta_\uparrow^I\right) \\ &= \frac{n!}{(n-y_\infty)!} \int_{M_{y_\infty}^I} \prod_{i=1}^{n-y_\infty} f_{\delta_{i\uparrow}^I}(t_i) \prod_{l \neq \delta_{i\uparrow}^I} (1 - F_l(t_i)) d\mu^{(n-y_\infty)}(t) (\mathbb{P}(X_n > C))^{y_\infty}. \end{aligned}$$

Dies liefert die Behauptung.  $\square$

Dies vereinfacht sich im PH-Model, d.h.  $X_{1,j}$  besitze die kumulative Ausfallrate  $\vartheta_j \Lambda_0$ , zu:

**6.14 Lemma** *Bezeichnet  $Y_j$  die Anzahl der durch das Risiko  $j$  verursachten Ausfälle,  $Y_\infty$  die Anzahl der Zensurierungen und gilt  $p_j := (1 - \exp(-(\vartheta_1 + \dots + \vartheta_k) \Lambda_0(C))) \vartheta_j / (\vartheta_1 + \dots + \vartheta_k)$  ( $1 \leq j \leq k$ ) sowie  $p_\infty := 1 - p_1 - \dots - p_k$ , so ist  $Y := (Y_1, \dots, Y_k, Y_\infty)$  eine für das PH-Model suffiziente Statistik, die einer  $\mathfrak{M}(n, p_1, \dots, p_k, p_\infty)$ -Verteilung genügt.*

BEWEIS: Nach (6.8) und Korollar 1.7 gilt für  $\delta_\uparrow^I \in \{1, \dots, k\}^{n-y_\infty} \times \{\infty\}^{y_\infty}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Delta_\uparrow^I = \delta_\uparrow^I) &= \frac{n!}{(n-y_\infty)!} \frac{\vartheta_j^{y_1} \dots \vartheta_k^{y_k}}{(\vartheta_1 + \dots + \vartheta_k)^{n-y_\infty}} \\ &\times \int_{\{(z_1, \dots, z_{n-y_\infty}) : z_1 \leq \dots \leq z_{n-y_\infty} \leq \Lambda_0(C)\}} \prod_{i=1}^{n-y_\infty} \left( \sum_{j=1}^k \vartheta_j \right) \exp\left(-\sum_{j=1}^k \vartheta_j t_i\right) \\ &\quad d\lambda_{|[0, \infty)^{(n-y_\infty)}}^{(n-y_\infty)}(t) \exp\left(-y_\infty \sum_{j=1}^k \vartheta_j \Lambda_0(C)\right). \end{aligned}$$

Also ist  $Y$  nach dem Neyman-Kriterium suffizient für das PH-Model. Die Verteilungsaussage erhält man aus  $\mathbb{P}(\Delta_i^I = \delta_i^I) = p_i \quad i \in \{1, \dots, k, \infty\}$ .  $\square$

Damit hat man im *PH-Model* erneut nur noch durch  $(Y_1, \dots, Y_k, Y_\infty)$  induzierte Hypothesen zu betrachten. Für die bereits in den vorherigen Abschnitten angesprochenen Fragestellungen erhält man daher die folgenden Sätze:

**6.15 Satz** *In der Situation von Satz 6.5 ist der Test  $\varphi^*(y_1, \dots, y_k, y_\infty) := \varphi_{y_2+\dots+y_{k-1}+y_\infty}^*(y_1)$  mit*

$$\varphi_{y_2+\dots+y_{k-1}+y_\infty}^*(y_1) := \begin{cases} 1 & < \\ \gamma_{y_2+\dots+y_{k-1}+y_\infty}^* & \text{falls } y_1 = c_{y_2+\dots+y_{k-1}+y_\infty}^* \\ 0 & > \end{cases}$$

( $c_{y_2+\dots+y_{k-1}+y_\infty}^*$  bezeichnet das  $\alpha$ -Quantil der  $\mathcal{B}(n - y_2 - \dots - y_{k-1} - y_\infty, 1/(1 + \rho))$ -Verteilung) ein gleichmäßig bester auf  $\{\vartheta_1 = \rho\vartheta_k\}$   $\alpha$ -ähnlicher Rangtest und somit auch ein gleichmäßig bester zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Rangtest für die Hypothesen  $\mathbf{H} : \vartheta_1 \geq \rho\vartheta_k$ ,  $\mathbf{K} : \vartheta_1 < \rho\vartheta_k$  ( $\rho > 0$ ).

Analog erhält man für die zweiseitige Fragestellung:

**6.16 Satz** *In der Situation von Satz 6.6 ist der Test  $\varphi^*(y_1, \dots, y_k, y_\infty) := \varphi_{y_2+\dots+y_{k-1}+y_\infty}^*(y_1)$  mit  $m(y) := y_2 + \dots + y_{k-1} + y_\infty$  und*

$$\varphi_{m(y)}^*(y_1) := \begin{cases} 1 & \notin [c_{m(y),1}^*, c_{m(y),2}^*] \\ \gamma_{m(y),i}^* & \text{falls } y_1 = c_{m(y),i}^* \quad (i = 1, 2) \\ 0 & \in (c_{m(y),1}^*, c_{m(y),2}^*) \end{cases},$$

wobei  $c_{m(y),i}^*, \gamma_{m(y),i}^*$  ( $i = 1, 2$ ) aus

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}(n - m(y), 1/(1 + \rho))([c_{m(y),1}^*, c_{m(y),2}^*]^c) \\ & + \sum_{i=1}^2 \gamma_{m(y),i}^* \mathcal{B}(n - m(y), 1/(1 + \rho))(\{c_{m(y),i}^*\}) = \alpha \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad \int x \varphi^*(x) d\mathcal{B}(n - m(y), 1/(1 + \rho))(x) = \frac{\alpha(n - m(y))}{1 + \rho}$$

bestimmt werden, ein gleichmäßig bester auf  $\{\vartheta_1 = \rho\vartheta_k\}$   $\alpha$ -ähnlicher lokal unverfälschter Rangtest und somit auch ein gleichmäßig bester zum Niveau  $\alpha$  unverfälschter Rangtest für die Hypothesen  $\mathbf{H} : \vartheta_1 = \rho\vartheta_k$ ,  $\mathbf{K} : \vartheta_1 \neq \rho\vartheta_k$  ( $\rho > 0$ ).

Interessiert man sich nun erneut für die Fragestellung

$$\left( \frac{\vartheta_1}{\vartheta_1 + \dots + \vartheta_k}, \dots, \frac{\vartheta_k}{\vartheta_1 + \dots + \vartheta_k} \right) = p_0,$$

so hat man das Problem, dass die  $p_j$  noch von der unbekanntem kumulativen Ausfallrate  $\Lambda_0$  abhängen. Aus diesem Grund sollte man an  $Y_\infty$  bedingte Tests betrachten (beachte auch Satz 6.17). Da  $p_j/(p_1 + \dots + p_k) = \vartheta_j/(\vartheta_1 + \dots + \vartheta_k)$  ( $1 \leq j \leq k$ ) gilt, kürzt sich nach (6.5) bei der bedingten Verteilung der unbekanntem Anteil  $\Lambda_0$  heraus und man erhält somit bedingt die gleiche Verteilungsannahme wie im unzensierten Fall, falls man  $n$  durch  $n - y_\infty$  ersetzt. Also bietet sich der folgende Test für die obige Fragestellung an:  $\varphi^*(y_1, \dots, y_k, y_\infty) = \varphi_{y_\infty}^*(y_1, \dots, y_k)$  mit

$$\varphi_{y_\infty}^*(y_1, \dots, y_k) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{j=1}^k \frac{(y_j - (n - y_\infty)p_{j,0})^2}{(n - y_\infty)p_{j,0}} > \chi_{k-1, \alpha}^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \leq$$

( $\chi_{k-1, \alpha}^2$  bezeichnet das  $\alpha$ -Fraktile der  $\chi_{k-1}^2$ -Verteilung).

Als letztes soll nun noch das *Regressionsproblem* aus Satz 6.7 behandelt werden. Um einen naheliegenden Test angeben zu können, soll als erstes eine für  $F_1 = \dots = F_k = F$ ,  $F$  beliebig, suffiziente und vollständige Statistik angegeben werden:

**6.17 Satz** Die Anzahl der Zensierungen  $Y_\infty$  ist eine für  $F_1 = \dots = F_k = F$ ,  $F$  beliebig, suffiziente und vollständige Statistik. Dabei ist die Verteilung von  $\Delta_\dagger^I$  bedingt unter  $Y_\infty = y_\infty$  eine Laplace-Verteilung auf der Menge  $\{1, \dots, k\}^{n-y_\infty} \times \{\infty\}^{y_\infty}$ .

BEWEIS: Nach (6.8) gilt für  $\delta_\dagger^I \in \{1, \dots, k\}^{n-y_\infty} \times \{\infty\}^{y_\infty}$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\Delta_\dagger^I = \delta_\dagger^I) \\ &= \frac{n!}{(n - y_\infty)!} \int_{M_{y_\infty}^I} \prod_{i=1}^{n-y_\infty} f(t_i) (1 - F(t_i))^{k-1} d\mu^{(n-y_\infty)}(t) (1 - F(C))^{ky_\infty}. \end{aligned}$$

Also ist  $Y_\infty$  nach dem Neyman-Kriterium eine suffiziente Statistik. Aus der obigen Beziehung ergibt sich auch unmittelbar die behauptete Beziehung für die bedingte Verteilung. Da  $Y_\infty$  aber einer  $\mathcal{B}(n, (1 - F(C))^k)$ -Verteilung

genügt, ist  $Y_\infty$  aber offenbar auch vollständig für die vorliegende Verteilungsklasse.  $\square$

Aus diesem Grund sollte man in der Situation von Satz 6.7 den folgenden Test anwenden:

**6.18 Satz** *Definiert man den Test  $\varphi^*$  durch  $\varphi^*(\delta_\uparrow^I) := \varphi_{y_\infty}^*(\delta_\uparrow^I)$  mit*

$$\varphi_{y_\infty}^*(\delta_\uparrow^I) := \begin{cases} 1 & < \\ \gamma^*(y_\infty) & \text{falls } \sum_{i=1}^{n-y_\infty} \rho_{\delta_\uparrow^I} b_i^{y_\infty} = c^*(y_\infty) \\ 0 & > \end{cases},$$

wobei  $c^*(y_\infty), \gamma^*(y_\infty)$  aus

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k^{n-y_\infty}} \left| \left\{ \delta \in \{1, \dots, k\}^{n-y_\infty} : \sum_{i=1}^{n-y_\infty} \rho_{\delta_i} b_i^{y_\infty} < c^*(y_\infty) \right\} \right| \\ & + \frac{\gamma^*(y_\infty)}{n^{n-y_\infty}} \left| \left\{ \delta \in \{1, \dots, k\}^{n-y_\infty} : \sum_{i=1}^{n-y_\infty} \rho_{\delta_i} b_i^{y_\infty} = c^*(y_\infty) \right\} \right| = \alpha \end{aligned}$$

bestimmt werden und für  $1 \leq i \leq n - y_\infty$

$$b_i^{y_\infty} := \int_{A_{y_\infty}^I} \prod_{l=1}^{n-y_\infty} f(x_l)(1 - F(x_l))^{k-1} \left( \frac{f(x_i)}{1 - F(x_i)} + (1 - F(x_i)) \frac{f'(x_i)}{f(x_i)} \right) d\mathbb{X}^{(n-y_\infty)}(x)$$

gilt, so hält der Test das Niveau  $\alpha$  auf  $F_1 = \dots = F_k$  genau ein, und die bedingten Tests sind für das Testen der bedingten Verteilungen lokal gleichmäßig bester Rangtests für die Hypothesen  $\mathbf{H} : t = 0$ ,  $\mathbf{K} : t > 0$ .

BEWEIS: Nach (6.8) erhält man für  $\delta_\uparrow^I \in \{1, \dots, k\}^{n-y_\infty} \times \{\infty\}^{y_\infty}$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_t(\Delta_\uparrow^I = \delta_\uparrow^I | Y_\infty = y_\infty) \\ & = y_\infty! \int_{M_{y_\infty}^I} \prod_{i=1}^{n-y_\infty} f(x_i - \rho_{\delta_\uparrow^I} t) \prod_{l \neq \rho_{\delta_\uparrow^I}} (1 - F(x_i - \rho_l t)) d\mathbb{X}^{(n-y_\infty)}(x) \\ & \quad \times \left( 1 - \prod_{j=1}^k (1 - F(C - \rho_j t)) \right)^{-(n-y_\infty)} \end{aligned}$$



## 6.4 Anmerkungen

---

Unter Beachtung von  $\rho_1 + \dots + \rho_k = 0$  berechnet sich die Ableitung von  $\ln(\mathbb{P}_t(\Delta_{\uparrow}^I = \delta_{\uparrow}^I | Y_{\infty} = y_{\infty}))$  nach  $t$  an der Stelle 0 wie im Beweis von Satz 6.7 nach (Elstrodt, 1999, Seite 146, Satz 5.7) zu:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^{n-y_{\infty}} \rho_{\delta_{\uparrow}^I} \int_{M_{y_{\infty}}^I} \prod_{l=1}^{n-y_{\infty}} f(x_l) (1 - F(x_l))^{k-1} \\
 & \qquad \qquad \qquad \left( \frac{f(x_i)}{1 - F(x_i)} + (1 - F(x_i)) \frac{f'(x_i)}{f(x_i)} \right) d\mathbb{X}^{(n-y_{\infty})}(x) \\
 & \qquad \qquad \qquad \times \left( \int_{M_{y_{\infty}}^I} \prod_{l=1}^{n-y_{\infty}} f(x_l) (1 - F(x_l))^{k-1} d\mathbb{X}^{(n-y_{\infty})}(x) \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

Dies liefert die Behauptung, falls man beachtet, dass der Test Neyman-Stuktur bzgl.  $Y_{\infty}$  besitzt. □

## 6.4 ANMERKUNGEN

Nun noch zur Auswertung der Tests aus den Regressionsproblemen: Da man die Teststatistiken als Summen von stochastisch unabhängigen Zufallsgrößen schreiben kann, kann man den  $p$ -Wert der Tests ähnlich wie im Algorithmus von (Pagano and Tritchler, 1983) bestimmen. Wie dies genau geht, soll am Beispiel des Tests aus Satz 6.7 deutlich gemacht werden. Sind  $Z_1, \dots, Z_n$  stu. Zufallsgrößen, wobei  $Z_i$  eine Laplace-Verteilung auf  $\{\rho_1 b_i, \dots, \rho_k b_i\}$  besitzt ( $1 \leq i \leq n$ ), so ist die Prüfstatistik des Tests wie  $Z_1 + \dots + Z_n$  verteilt. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit berechnet sich die charakteristische Funktion  $\varphi_{Z_1 + \dots + Z_n}$  von  $Z_1 + \dots + Z_n$  als Produkt der charakteristischen Funktionen  $\varphi_{Z_i}$  der  $Z_i$ . Diese sind aber ganz einfach zu bestimmen, da die Anzahl der Risiken  $k$  in der Regel recht klein ist. Nimmt man an, dass die  $\rho_j b_i$  schon gerundet und auf natürliche Zahlen transformiert wurden, so erhält man mit Hilfe einer Umkehrformel für charakteristische Funktionen (siehe (Gebhard, 1995, Seite 34)) für die transformierten Werte:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(Z_1 + \dots + Z_k = z) &= \frac{1}{Q} \sum_{l=0}^{Q-1} \varphi_{Z_1 + \dots + Z_n} \left( \frac{2\pi l}{Q} \right) \exp \left( -\frac{2\pi i z l}{Q} \right) \\
 &= \frac{1}{Q} \sum_{l=0}^{Q-1} \prod_{m=1}^n \varphi_{Z_m} \left( \frac{2\pi l}{Q} \right) \exp \left( -\frac{2\pi i z l}{Q} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{Q} \sum_{l=0}^{Q-1} \prod_{m=1}^n \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \exp\left(\frac{2\pi il\rho_j b_m}{Q}\right) \exp\left(-\frac{2\pi izl}{Q}\right) \\
&= \frac{1}{Qk^n} \sum_{l=0}^{Q-1} \prod_{m=1}^n \sum_{j=1}^k \exp\left(\frac{2\pi il(\rho_j b_m - z)}{Q}\right),
\end{aligned}$$

wobei als  $Q$  eine beliebige Zahl echt größer als  $\max\{\rho_j b_i : 1 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq n\}$  gewählt werden kann. Um den  $p$ -Wert des Tests zu bestimmen, hat man dann nur noch die entsprechenden Einzelwahrscheinlichkeiten aufzusummieren. Insbesondere ist es daher bei der Leistungsfähigkeit der heutigen Rechner nicht nötig, den Test asymptotisch auszuführen.

Zu guter letzt soll erneut eine Studie ausgewertet werden. Bei dieser wurden 99 männliche Mäuse im Alter zwischen 5 und 6 Wochen mit einer Strahlendosis von 300r bestrahlt und anschließend die Todesursache in drei Gruppen eingeteilt (siehe (Hoel, 1972)). Die drei Gruppen sind:

- Thymic Lymphoma; An dieser Krankheit starben 22 Mäuse.
- Reticulum Cell Sarcoma; An dieser Krankheit starben 38 Mäuse.
- 39 Mäuse starben aus einem anderen Grund.

Biologen sagen, dass diese drei Todesursachen unabhängig voneinander sind. Nimmt man zusätzlich an, dass die Ausfallraten proportional sind, so kann man die oben hergeleiteten Rangtests anwenden. Dieselben Daten wurden auch in (Bagai et al., 1989a) ausgewertet. Dort wurden die beiden Krebsarten zu einer Todesursache zusammengefasst und die Hypothesen  $\mathbf{H}$  : „Es ist wahrscheinlicher an einer anderen Ursache zu sterben als an Krebs zu sterben“,  $\mathbf{K}$  : „Es ist wahrscheinlicher an Krebs zu sterben als an einer anderen Ursache“ getestet. Auf diese Fragestellung sollte man Satz 6.5 anwenden. Bei den hier vorliegenden Daten berechnet sich der  $p$ -Wert des Tests aus Satz 6.5 zu 0.022. Dies ist hoch signifikant. Mit Hilfe von Satz 6.5 hätte man auch die Hypothesen  $\mathbf{H}$  : „Es ist wahrscheinlicher an Thymic Lymphoma als an Reticulum Cell Sarcoma zu sterben“,  $\mathbf{K}$  : „Es ist wahrscheinlicher an Reticulum Cell Sarcoma als an Thymic Lymphoma zu sterben“ überprüfen können. Bei den hier vorliegenden Daten ergibt sich der  $p$ -Wert des bedingten Tests zu 0.026. Auch dies ist hoch signifikant.

---

## LITERATURVERZEICHNIS

---

- Allen, W. R. (1963). A Note on the Conditional Probability of Failure when Hazards are Proportional. *Operations Research*, 11:658–659.
- Alsmeyer, G. (2000). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 30, Institut für Mathematische Statistik, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster, 2 edition.
- Alsmeyer, G. (2002). *Mathematische Statistik*. Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 36, Institut für Mathematische Statistik, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster.
- Andersen, P. K., Borgan, O. B., Gill, R. D., and Keiding, N. (1992). *Statistical Models based on Counting Processes*. Springer-Verlag, New York.
- Armitage, P. (1959). The Comparison of Survival Curves. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 122:279–300.
- Bagai, I., Deshpandé, J. V., and Kochar, S. C. (1989a). A Distribution-Free Test for the Equality of Failure Rates due to two Competing Risks. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 18(1):107–120.
- Bagai, I., Deshpandé, J. V., and Kochar, S. C. (1989b). Distribution Free Tests for Stochastic Ordering in the Competing Risks Models. *Biometrika*, 76(4):775–781.
- Bain, L. J. (1978). *Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models*. Dekker, New York.

- Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Holt, Rinehardt and Winston, Inc., New York.
- Barlow, R. E. and Scheuer, E. M. (1971). Estimation from Accelerated Life Tests. *Technometrics*, 13(1):145–159.
- Bartholomew, D. J. (1963). The Sampling Distribution of an Estimate Arising in Life Testing. *Technometrics*, 5(3):361–374.
- Basu, A. P., Ghosh, J. K., and Sen, P. K. (1983). A Unified Way of Deriving LMP Rank Tests from Censored Data. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 45(3):384–390.
- Beyersmann, J., Janssen, A., and Mayer, C.-D. (2003). Private Kommunikation mit dem Titel: Efficient rank tests for semiparametric competing risk models.
- Bickel, P. J. and Doksum, K. A. (1977). *Mathematical Statistics, Basic Ideas and Selected Topics*. Holden-Day, Inc., San Francisco.
- Chatterjee, S. K. and Sen, P. K. (1973). Nonparametric Testing under Progressive Censoring. *Calcutta Statistical Association Bulletin*, 22(1):13–50.
- Cohen, A. C. (1965). Maximum Likelihood Estimation in the Weibull Distribution Based On Complete and Or Censored Samples. *Technometrics*, 7(4):579–588.
- Cox, D. R. (1959). The Analysis of exponentially distributed Lifetimes with two Types of Failure. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 21:411–421.
- Cox, D. R. (1972). Regression Models and Life-Tables (with Discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 24(2):187–220.
- David, H. A. (1970). *Order Statistics*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Efron, B. (1967). The Two Sample Problem with Censored Data. In *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, volume 4, pages 831–853.
- Elstrodt, J. (1999). *Maß- und Integrationstheorie*. Springer, Berlin, 2 edition.

- Fisher, R. A. (1935). *The Design of Experiments*. Oliver and Boyd LTD., Edinburgh.
- Fleming, T. R. and Harrington, D. P. (1991). *Counting Processes and Survival Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Froda, S. (1987). A Signed Rank Test for Censored Paired Lifetimes. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 16(12):3497–3517.
- Gebhard, J. (1995). *Optimalitätseigenschaften und Algorithmen für Permutationstests*. Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 26, Institut für Mathematische Statistik, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster.
- Gebhard, J. and Schmitz, N. (1998a). Permutation Tests – A Revival?! I. Optimum Properties. *Statistical Papers*, 39(1):75–86.
- Gebhard, J. and Schmitz, N. (1998b). Permutation Tests – A Revival?! II. An efficient Algorithm for Computing the Critical Region. *Statistical Papers*, 39(1):87–96.
- Gehan, E. A. (1965). A Generalized Wilcoxon Test for Comparing arbitrarily singly-censored Samples. *Biometrika*, 52(1):203–223.
- Gill, R. D. (1983). *Censoring and Stochastic Integrals*. Mathematical Centre Tracts, Amsterdam.
- Hájek, J., Šidák, Z., and Sen, P. K. (1999). *Theory of Rank Tests*. Academic Press, San Diego, California, 2 edition.
- Hoeffding, W. (1951). "Optimum" Nonparametric Tests. In *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 83–92.
- Hoel, D. G. (1972). A Representation of Mortality Data by Competing Risks. *Biometrics*, 28:475–488.
- Janssen, A. (1991). Conditional Rank Tests for Randomly Censored Data. *The Annals of Statistics*, 19(3):1434–1456.
- Janssen, A. (2003). Private Kommunikation.
- Janssen, A. and Mason, D. M. (1990). *Non-Standard Rank Tests*. Springer, New York.

- Janssen, A. and Mayer, C.-D. (2001). Conditional Studentized Survival Tests for Randomly Censored Models. *Scandinavian Journal of Statistics*, 28(2):283–293.
- Jin, Z., Lin, D. Y., Wei, L. J., and Ying, Z. (2003). Rank-based Inference for the Accelerated Failure Time Model. *Biometrika*, 90(2):341–354.
- Johnson, N. L., Kotz, S., and Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions, Volume 1*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2 edition.
- Johnson, N. L., Kotz, S., and Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions, Volume 2*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2 edition.
- Johnson, N. L., Kotz, S., and Balakrishnan, N. (1997). *Discrete Multivariate Distributions*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Johnson, R. A. and Mehrotra, K. G. (1972). Locally Most Powerfull Rank Tests for the Two-Sample Problem with Censored Data. *The Annals of Mathematical Statistics*, 43(3):823–831.
- Kalbfleisch, J. D. and Prentice, R. L. (1980). *The Statistical Analysis of Failure Time Data*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Kellerer, A. M. and Chmelevsky, D. (1983). Small-Sample Properties of Censored-Data Rank Tests. *Biometrics*, 39(3):675–682.
- Kvam, P. H. and Samaniego, F. J. (1993). Life Testing in Variably Scaled Environments. *Technometrics*, 35(3):306–314.
- Lam, K. F. (1998). A Class of Tests for the Equality of  $k$  Cause-Spezifc Harard Rates in a Competing Risks Models. *Biometrika*, 85(1):179–188.
- Lawless, J. F. (2003). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2 edition.
- Lehmann, E. L. (1953). The Power of Rank Tests. *The Annals of Mathematical Statistics*, 24(1):23–43.
- Lehmann, E. L. (1986). *Testing Statistical Hypotheses*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2 edition.

- Louis, T. A. (1981). Nonparametric Analysis of an Accelerated Failure Time Model. *Biometrika*, 68(2):381–390.
- Mallepr e, A. (1997). Logrank-Tests. Master’s thesis, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster.
- Mann, N. R., Schafer, R. E., and Singpurwalla, N. D. (1974). *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- McNichols, D. T. and Padgett, W. J. (1988). Inference for Step-Stress Accelerated Life Tests under arbitrary Right-Censorship. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 20:169–179.
- Miller, R. (1981). *Survival Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Moser, M. (1992). Aspekte linearer Rangtests bei zensierten Daten. Master’s thesis, Universität Freiburg, Freiburg.
- Nelson, W. (1972). Graphical Analysis of Accelerated Life Test Data with the Inverse Power Law Model. *IEEE Transactions of Reliability*, 21(1):2–11.
- Nelson, W. (1980). Accelerated Life Testing – Step-Stress Models and Data Analyses. *IEEE Transactions of Reliability*, 29(2):103–108.
- Nelson, W. (1990). *Accelerated Testing*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Neuhaus, G. (1988). Asymptotically Optimal Rank Tests for the Two-Sample Problem with Randomly Censored Data. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 17:2037–2058.
- Neuhaus, G. (1991). Some Linear and Nonlinear Rank Tests for Competing Risks Models. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 20(1):667–701.
- Neuhaus, G. (1993). Conditional Rank Tests for the Two-Sample Problem under Random Censorship. *The Annals of Statistics*, 21(4):1760–1779.
- Pagano, M. and Tritchler, D. (1983). On Obtaining Permutation Distributions in Polynomial Time. *Journal of the American Statistical Association*, 78(382):435–440.

- Peto, R. and Peto, J. (1972). Asmptotically Efficient Rank Invarinat Test Procedures. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 135(2):185–207.
- Pitman, E. J. G. (1937). Significance Tests which may be applied to Samples from any Population. *Journal of the Royal Statistical Society*, 4(1):119–130.
- Prentice, R. L. (1978). Linear Rank Tests with Right Censored Data. *Biometrika*, 65(1):167–179.
- Rao, U. V. R., Savage, I. R., and Sobel, M. (1960). Contributions to the Theory of Rank Order Statistics: The Two-Sample Censored Case. *The Annals of Mathematical Statistics*, 31(2):415–426.
- Ritov, Y. (1990). Estimation in a Linear Regression Model with Censored Data. *The Annals of Statistics*, 18(1):303–328.
- Savage, I. R. (1956). Contributions to the Theory of Rank Order Statistics — The Two-Sample Case. *The Annals of Mathematical Statistics*, 27(3):590–615.
- Schmitz, N. (1995). *Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitstheorie*. B. G. Teubner, Stuttgart.
- Schmoyer, R. L. (1986). An Exact Distribution-Free Analysis for Accelerated Life Testing at Several Levels of a Single Stress. *Technometrics*, 28(2):165–175.
- Sethuraman, J. and Singpurwalla, N. D. (1982). Testing of Hypotheses for Distributions in Accelerated Life Tests. *Journal of the American Statistical Association*, 77(377):204–208.
- Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (1993). *Stochastic Orders and their Applications*. Academic Press, Boston.
- Shaked, M. and Singpurwalla, N. D. (1983). Inference for Step-Stress Accelerated Life Tests. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 7:295–306.



- Shaked, M., Zimmer, W. J., and Ball, C. A. (1979). A Nonparametric Approach to Accelerated Life Testing. *Journal of the American Statistical Association*, 74(367):694–699.
- Sinha, S. H. and Kale, B. K. (1979). *Life Testing and Reliability Estimation*. Wiley Eastern, New Delhi.
- Solomon, P. J. (1984). Effect of Misspecification of Regression Models in the Analysis of Survival Data. *Biometrika*, 71(2):291–298.
- Strasser, H. (1985). *Einführung in die lokale asymptotische Theorie der Statistik*. Bayreuther Mathematische Schriften, Heft 19, Mathematisches Institut der Universität Bayreuth.
- Tsiatis, A. A. (1990). Estimating Regression Parameters using Linear Rank Tests for Censored Data. *The Annals of Statistics*, 18(1):354–372.
- Völker, D. (2002). Tests für Typ II-zensierte Lebensdauerverteilungen unter besonderer Berücksichtigung von Exponentialverteilungen. Master's thesis, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster.
- Witting, H. (1985). *Mathematische Statistik I*. B. G. Teubner, Stuttgart.
- Witting, H. and Müller-Funk, U. (1995). *Mathematische Statistik II*. B. G. Teubner, Stuttgart.
- Witting, H. and Nölle, G. (1970). *Angewandte Mathematische Statistik*. B. G. Teubner, Stuttgart.
- Ying, Z. (1993). A Large Sample Study of Rank Estimation for Censored Regression Data. *The Annals of Statistics*, 21(1):76–99.
- Yip, P. and Lam, K. F. (1992). A Class of non-parametric Tests for the Equality of Failure Rates in a Competing Risk Model. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 21(9):2541–2556.
- Yip, P. and Lam, K. F. (1993). A multivariate nonparametric Test for the Equality of Failure Rates in a Competing Risks Model. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 22(11):3199–3222.

## Literaturverzeichnis

---

Zelen, M. and Dannemiller, M. C. (1961). The Robustness of Life Testing Procedures Derived from the Exponential Distribution. *Technometrics*, 3(1):29–49.

---

---

---

---