

Limes einer Variation  
von gemischten  
Hodge-Strukturen  
auf einer Familie  
von nichtkompakten  
Riemannschen Flächen

STEVE BRÜSKE

April 2007



Mathematisches Institut  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
Westfälische Wilhelms-Universität Münster



Reine Mathematik

# Limes einer Variation von gemischten Hodge-Strukturen auf einer Familie von nichtkompakten Riemannschen Flächen

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften im Fachbereich  
Mathematik und Informatik  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von  
STEVE BRÜSKE  
aus Münster  
-2007-

Dekan:	PROF. DR. DR. H.C. JOACHIM CUNTZ
Erster Gutachter:	PROF. DR. HELMUT A. HAMM
Zweiter Gutachter:	DR. JÖRG SCHÜRMAN
Tag der mündlichen Prüfung:	16.05.2007
Tag der Promotion:	11.07.2007

**Für  
Emma,  
Marie  
und  
Britta.**



# Inhaltsverzeichnis

Danksagung	ix
Einleitung	xi
<b>1 Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1 Periodenmatrix der abelschen Differentiale . . . . .	1
1.2 Periodenmatrix auf einer endlich punktierten Riemannschen Fläche . . . . .	2
1.3 Quasi-Homogenisierung . . . . .	5
1.4 Filtrierungen . . . . .	8
1.5 Hodge-Strukturen . . . . .	9
1.6 Variation von Hodge-Strukturen . . . . .	12
1.7 Periodenabbildung einer Variation von Hodge-Strukturen . . . . .	14
1.8 Gemischte Hodge-Strukturen . . . . .	14
1.9 Variation von gemischten Hodge-Strukturen . . . . .	17
1.10 Periodenabbildung einer Variation von graduiert-polarisierten gemischten Hodge-Strukturen . . . . .	18
<b>2 Der kompakte Fall</b>	<b>21</b>
2.1 Lokale Monodromie . . . . .	21
2.2 Limes-Gewichtsfiltrierung $W^\infty$ . . . . .	22
2.3 Limes-Hodge-Filtrierung $F_\infty$ . . . . .	23
2.4 Beispiele . . . . .	25
<b>3 Kompaktifizierung einer (semi-)lokalen Faserung einer isolierten Singularität</b>	<b>33</b>
3.1 (Semi-)lokale Faserung einer isolierten Singularität . . . . .	33
3.2 Kompaktifizierung . . . . .	35
<b>4 Der punktierte Fall</b>	<b>39</b>
4.1 Limes-Gewichtsfiltrierung $\hat{W}^\infty$ . . . . .	39
4.2 Limes Hodge-Filtrierung $\hat{F}_\infty$ . . . . .	44
4.3 Beispiele . . . . .	50
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>53</b>
<b>Index</b>	<b>55</b>





# Danksagung

Ich möchte mich herzlich bei all jenen Personen und Organisationen bedanken, die mich auf unterschiedliche Weise unterstützt und zu dieser Dissertation beigetragen haben.

An erster Stelle richtet sich mein Dank an Herrn PROF. DR. HELMUT A. HAMM, der mein Promotionsvorhaben betreut hat, für seine nette Unterstützung, seine anregenden Bemerkungen und seine ermutigenden Worte. Für fachliche und finanzielle Unterstützung während der Erarbeitung dieser Dissertation danke ich der DEUTSCHEN FORSCHUNGSGEMEINSCHAFT. Ein großer Dank gilt auch meiner Arbeitsgruppe „Geometrie singulärer Räume“ und dem Team im BLAUEN PAVILLION für die vielen Stunden, in denen Sie ein offenes Ohr für mich hatten. Insbesondere danke ich DR. JÖRG SCHÜRMAN, DR. DANIEL C. EPPING, DIPL.MATH. ANJA WENNING, DR. BJÖRN HILLE, DR. GUNNAR DIETZ, DIPL.MATH. HENDRIK SCHLIETER und DIPL.MATH. CHRISTIAN WAHLE.

Zum Schluss will ich mich noch bei meiner Frau BRITTA und bei meinen beiden Kindern MARIE LOTTA und EMMA LEA bedanken, die mich all die Jahre bei meinem Promotionsvorhaben seelisch unterstützt haben.

STEVE BRÜSKE

Münster, 1. April 2007



# Einleitung

Sei  $\tilde{X}$  das Nullstellengebilde einer algebraischen Gleichung  $y^2 - f(x, t) = 0$  in  $\mathbb{C}^3$  und  $\text{pr}_t : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$  die Projektion auf die  $t$ -Koordinate, wodurch wir eine Familie von affinen algebraischen Kurven  $\tilde{X}_t = \text{pr}_t^{-1}(t)$  erhalten. Wir setzen voraus, dass die Abbildung  $\text{pr}_t$  nur isolierte Singularitäten besitzt, insbesondere eine in  $0 \in \tilde{X}_0$ . Wir wollen diese Singularität genauer untersuchen und schränken daher den Totalraum  $\tilde{X}$  auf eine geeignete Umgebung  $X$  von  $0 \in \mathbb{C}^3$  ein, so dass die Abbildung

$$f = \text{pr}_t|_X : X \rightarrow S, \quad S := f(X)$$

glatt außerhalb von  $0 \in \mathbb{C}^3$  und

$$f|_{X^*} : X^* \rightarrow S^*, \quad X^* = X - f^{-1}(0), \quad S^* = S - 0$$

ein lokal triviales  $C^\infty$ -Faserbündel ist. Für  $t \neq 0$  sind die Fasern  $X_t = f^{-1}(t)$  berandete Riemannsche Flächen. Analog zu einem Verfahren von Homann [Hom90] erhalten wir durch Anheftung von Kreisscheiben und Entfernung eines geeigneten Divisors einen faserstreuen starken Deformationsretrakt einer Familie von affinen algebraischen Kurven, deren Fasern für  $t \neq 0$  punktierte kompakte Riemannsche Flächen sind, auf die Familie  $f : X \rightarrow S$ . Die Kohomologie  $H^1(X_t, \mathbb{C})$  der Fasern  $X_t$  für  $t$  nahe 0 kann nun mit gemischten Hodge-Strukturen versehen werden, deren Variation über  $S$  uns im Limes eine gemischte Hodge-Struktur liefert.

Ziel dieser Arbeit ist es, ein Verfahren anzugeben, wie man diese gemischte Hodge-Struktur im Limes konkret berechnen kann.

Falls  $Y$  eine glatte projektive Varietät ist und somit auch eine Kähler-Mannigfaltigkeit, gibt es eine direkte Summenzerlegung der de Rham-Kohomologie

$$H^n(Y, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(Y), \quad \overline{H^{p,q}(Y)} = H^{q,p}(Y)$$

in Räume von geschlossenen modulo exakten  $(p, q)$ -Formen [Hod41], wobei die komplexe Konjugation durch  $H^n(Y, \mathbb{C}) = H^n(Y, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  gegeben ist. Diese Zerlegung ist die Hodge-Zerlegung der  $n$ -ten Kohomologiegruppe, oder anders ausgedrückt eine Hodge-Struktur vom Gewicht  $n$ .

Haben wir nun eine Familie  $Y_t$  von glatten projektiven Varietäten, parametrisiert durch eine einfach zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit  $S$  und einen eigentlichen Morphismus  $f : Y \rightarrow S$ , können wir nach Griffiths [Gri68a],[Gri68b] und Deligne [Del71b] über den Zusammenhang der Faserung  $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \bigcup_{t \in S} H^n(Y_t, \mathbb{C})$  die Hodge-Struktur auf  $H^n(Y_t, \mathbb{C})$

durch die auf  $H^n(Y_{t_0}, \mathbb{C})$  mit einer festen Faser  $Y_{t_0}$  ersetzen. Für jeden Punkt  $t \in S$  können wir zu der Hodge-Filtrierung

$$F^p H^n(Y_t, \mathbb{C}) := \bigoplus_{r \geq p} H^{r,s}(Y_t), \quad H^n(Y_t, \mathbb{C}) = F^p \oplus \overline{F^{n-p+1}}, \quad \forall p \in \mathbb{Z},$$

welche äquivalent zu der Hodge-Zerlegung ist, eine Filtrierung

$$H^n(Y_{t_0}, \mathbb{C}) = F^0(t) \supset F^1(t) \supset \dots \supset F^{n+1}(t) = \{0\}$$

assoziiieren, wodurch wir die Periodenabbildung  $\tilde{\phi} : S \rightarrow \mathcal{F}$  erhalten. Ist  $S$  nun nicht einfach zusammenhängend, kann es sein, dass die Identifizierung der Faser  $Y_{t_0}$  nach einer Verschiebung entlang einer geschlossenen Kurve in  $S$  nicht die Identität ist. Es bietet sich also an, eine Abbildung  $\phi$  in einen Quotienten von  $\mathcal{F}$  durch eine geeignete Gruppe zu betrachten.

Nach Griffiths-Schmidt [GS75] ist im kompakten Fall die Periodenabbildung durch holomorphe, verzweigte Periodenmatrizen gegeben. Die Monodromiematrix ist nach Landman quasi-unipotent. Durch einen geeigneten Basiswechsel erhält man eine unipotente Monodromiematrix und über deren nilpotenten Anteil kann man die Verzweigung aus den Periodenmatrizen entfernen. Mittels einer Variation der Hodge-Struktur erhält man durch den Zeilenraum dieser „entwisteten“ Periodenmatrix die Hodge-Filtrierung im Limes, welche als Konsequenz des Nilpotenten-Orbit-Theorems (vgl. [Sch73]) existiert. Durch die in [Gri70b] eingeführte Gewichtsfiltrierung des nilpotenten Anteils der Monodromie erhält man im Limes eine gemischte Hodge-Struktur.

Analog kann auch der Limes einer Variation von gemischten Hodge-Strukturen betrachtet werden. Hierzu muss allerdings erst geprüft werden, ob die Variation zulässig ist (vgl. [SZ85]), so dass man im Limes eine gemischte Hodge-Struktur erhält.

Wie schon erwähnt, können wir für  $t \neq 0$  die Kohomologie  $H^1(X_t, \mathbb{C})$  der Fasern  $X_t$  mit gemischten Hodge-Strukturen versehen. Um analog zum kompakten Fall die Periodenabbildung durch holomorphe, verzweigte Periodenmatrizen zu beschreiben, führen wir den Begriff der Periodenmatrix auf einer punktierten Riemannschen Fläche ein. Über eine Variation der gemischten Hodge-Strukturen erhält man auch hier die Hodge-Filtrierung im Limes durch den Zeilenraum der unverzweigten Periodenmatrix. Die Gewichtsfiltrierung der Kohomologie der punktierten Fasern sowie die Gewichtsfiltrierung des nilpotenten Anteils der Monodromie wird durch eine Faltung in eine relative Gewichtsfiltrierung umgewandelt. Hierüber erhält man im Limes eine gemischte Hodge-Struktur.

Im ersten Kapitel führen wir zunächst Grundlagen ein, welche wir in den folgenden Kapiteln benötigen. Hierzu gehören unter anderem die Definition der Periodenmatrix der abelschen Differentiale, bzw. die Definition der Periodenmatrix auf einer punktierten Riemannschen Fläche sowie die Begriffe der Hodge-Struktur, der gemischten Hodge-Struktur und deren Variation.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit dem oben angesprochenen kompakten Fall und reflektiert bekannte Ergebnisse. Um die Monodromie konkret berechnen zu können, führen

wir zum Schluss zwei Beispiele auf.

Das dritte Kapitel beschreibt ein Verfahren, mit dem man aus der im Anfang der Einleitung besprochenen Familie  $\text{pr}_t : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$  lokale bzw. semilokale Faserungen konstruiert, diese geeignet kompaktifiziert und einen unendlich fernen Divisor entfernt, so dass man für das vierte Kapitel eine Familie von punktierten Riemannschen Flächen erhält. Die algebraische Gleichung wurde speziell als  $y^2 - f(x, t) = 0$  gewählt, da man an ihr konkret die Lage der Verzweigungspunkte bzw. der Singularitäten ablesen und für den semilokalen Fall geeignete Parameter zum Abschneiden finden kann. Außerdem gibt es eine Familie von kompakten Riemannschen Flächen, welche wiederum einer algebraischen Gleichung  $y^2 - g(x, t) = 0$  genügt und einen fasertreuen starken Deformationsretrakt von dieser Familie auf die semilokale Faserung. Bei einer allgemeineren Ausgangslage kann man hierüber keine Aussage treffen.

Im letzten Kapitel versehen wir die Fasern einer Familie von punktierten Riemannschen Flächen analog zu Homann [Hom90] mit einer gemischten Hodge-Struktur, deren Variation uns im Limes nach Steenbrink-Zucker [SZ85] ebenfalls eine gemischte Hodge-Struktur liefert. Die Gewichtsfiltrierung dieser gemischten Hodge-Struktur ist eine Faltung der oben angesprochenen Filtrierungen. Die zugehörige Hodge-Filtrierung ist aus dem Zeilenraum der „entwisteten“ degenerierten Periodenmatrix abzulesen. Für den im dritten Kapitel besprochenen Fall lässt sich nun mit Hilfe der gewonnenen Resultate die gemischte Hodge-Struktur im Limes bestimmen. Ein zum zweiten Kapitel analoges Beispiel ermöglicht dann eine exakte Berechnung der Limes-MHS.



# 1 Grundlagen

Neben der Periodenmatrix der abelschen Differentiale auf einer kompakten Riemannschen Fläche wollen wir in diesem Kapitel eine Periodenmatrix auf einer kompakten Riemannschen Fläche ohne endlich viele Punkte definieren und erhalten, analog zum kompakten Fall, durch Wahl spezieller Basen eine normierte Form. Außerdem wird die für Kapitel 3 benötigte Quasi-Homogenisierung definiert. Am Ende des Kapitels geben wir Definitionen und Aussagen aus der Hodge-Theorie im reinen sowie im gemischten Fall an. Die Definitionen kann man zum größten Teil in dem Übersichtsartikel [BZ90] wiederfinden.

## 1.1 Periodenmatrix der abelschen Differentiale

Sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche,  $\delta_1, \dots, \delta_{2g}$  eine symplektische Basis von  $H_1(X, \mathbb{Z})$  und  $\omega_1, \dots, \omega_g$  eine Basis der holomorphen 1-Formen  $\Gamma(X, \Omega_X^1)$  auf  $X$ .

**1.1.1 Definition (Periodenmatrix der abelschen Differentiale).** *Die Matrix*

$$\Omega = \begin{pmatrix} \int_{\delta_1} \omega_1 & \dots & \int_{\delta_{2g}} \omega_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\delta_1} \omega_g & \dots & \int_{\delta_{2g}} \omega_g \end{pmatrix}$$

heißt *Periodenmatrix der abelschen Differentiale von  $X$* .

Die Periodenmatrix der abelschen Differentiale genügt den folgenden Riemannschen Bedingungen.

**1.1.2 Definition (Riemannsche Bedingungen).** *Es existiert eine schiefsymmetrische Matrix  $Q \in \text{Mat}(2g, \mathbb{Z})$ , so dass die zwei folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$\Omega Q {}^t\Omega = 0 \quad (\text{Riemannsche Gleichung}),$$

$$-i \Omega Q \overline{{}^t\Omega} > 0 \quad (\text{Riemannsche Ungleichung}).$$

Nach [GH94], 2.2, S. 227 ff. existiert eine normierte Basis der holomorphen Differentialformen, so dass die Periodenmatrix von der Gestalt  $(\mathbb{1}_g, Z)$  mit  ${}^tZ = Z$  und  $\text{Im } Z > 0$  ist.

## 1.2 Periodenmatrix auf einer endlich punktierten Riemannschen Fläche

Im Folgenden sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ ,  $\mathbb{N} \ni r \geq 1$  und  $D := \{P_1, \dots, P_r\}$  eine Menge von paarweise verschiedenen Punkten aus  $X$ .

**1.2.1 Definition (Garbe der holomorphen 1-Formen auf  $X - D$  mit logarithmischen Polen entlang  $D$ ).**  $\Omega_X^1(\log D)$  bezeichne die Garbe der holomorphen 1-Formen auf  $X - D$  mit logarithmischen Polen entlang  $D$ , welche wie folgt definiert ist. Ein Schnitt von  $\Omega_X^1(\log D)$  über eine offene Umgebung  $U \subset X$  ist eine holomorphe 1-Form  $\omega$  auf  $U \cap (X - D)$ , welche meromorph entlang  $U \cap D$  ist, so dass  $\omega$  höchstens einfache Pole entlang  $U \cap D$  besitzt.

Wir geben nun die Dimension von  $\Gamma(X, \Omega_X^1(\log D))$  bzw.  $H_1(X - D, \mathbb{Q})$  an.

**1.2.2 Lemma.** *Es gilt*

$$(i) \dim \Gamma(X, \Omega_X^1(\log D)) = g + r - 1$$

$$(ii) \dim H_1(X - D, \mathbb{Q}) = 2g + r - 1$$

*Beweis.* (i) Da  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$  ist, gilt zunächst  $\dim \Gamma(X, \Omega_X^1) = g$ . Neben diesen entlang  $P_1, \dots, P_r$  holomorphen 1-Formen  $\omega_1, \dots, \omega_g$ , gibt es 1-Formen mit nicht verschwindendem Residuum entlang der Punktierung, welche wir für  $i = 1, \dots, r - 1$  wie folgt festlegen (vgl. [FK92], III.3.5):

$$\text{Res}_{P_l} \omega_{g+i} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } l = i \\ -1 & , \text{ falls } l = i + 1 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Wie leicht zu zeigen ist, sind die Differentialformen  $\omega_1, \dots, \omega_{g+r-1}$  linear unabhängig und spannen  $\Gamma(X, \Omega_X^1(\log D))$  auf.

(ii) Sei  $\chi_X = 2 - 2g$  die Eulercharakteristik der kompakten Riemannschen Fläche  $X$ . Die Eulercharakteristik der punktierten Fläche  $X - D$  berechnet sich durch  $\chi_{X-D} = \chi_X - r = 2 - 2g - r$ , da sich für jeden herausgenommenen Punkt bei geeigneter Zerlegung die Anzahl der Flächen um zwei und die Anzahl der Kanten um drei erhöht. Weiter gilt für die nullte Bettizahl  $\beta_0 = 1$ , da  $X - D$  zusammenhängend und die zweite Bettizahl  $\beta_2 = 0$ , da  $X - D$  nicht kompakt. Es folgt

$$\dim H_1(X - D, \mathbb{Q}) = \beta_1 = \beta_0 + \beta_2 - \chi_{X-D} = 1 - (2 - 2g - r) = 2g + r - 1$$

□

$\delta_1, \dots, \delta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g$  sei nun eine kanonische Basis von  $H_1(X, \mathbb{Q})$ . In dem folgenden Kollar erweitern wir diese Basis zu einer Basis von  $H_1(X - D, \mathbb{Q})$ , die wir zur Berechnung der Periodenmatrix auf  $X - D$  benutzen.

Zu den Punkten  $P_1, \dots, P_{r-1}$  wählen wir zunächst geeignete disjunkte kompakte Umgebungen mit zugehörigen Randzykeln  $c_1, \dots, c_{r-1}$ . Dann folgt:



**1.2.3 Korollar.**  $\delta_1, \dots, \delta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g, c_1, \dots, c_{r-1}$  ist eine Basis von  $H_1(X - D, \mathbb{Q})$ .

*Beweis.* Es seien  $\omega_1, \dots, \omega_{g+r-1}$  die Differentialformen aus dem Beweis zu Lemma 1.2.2. Dann gilt:

$$\int_{c_i} \omega_{g+j} = \delta_{ij}$$

woraus direkt folgt, dass  $c_1, \dots, c_{r-1}$  linear unabhängig sind.

Sei  $(A, B) = (\int_{\gamma_j} \omega_i, \int_{\delta_j} \omega_i)_{1 \leq i, j \leq g}$  die Periodenmatrix der abelschen Differentiale bzgl. der Basen  $\gamma_1, \dots, \gamma_g, \delta_1, \dots, \delta_g$  und  $\omega_1, \dots, \omega_g$ . Da die Spalten von  $(A, B)$   $\mathbb{R}$ -linear unabhängig sind, gibt es für jede Linearkombination  $\gamma = \sum_{j=1}^g a_j \gamma_j + b_j \delta_j$ ,  $a_j, b_j \in \mathbb{Q}$  ein  $\omega_i$ , so dass  $\int_{\gamma} \omega_i \neq 0$ . Da aber für alle  $k = 1, \dots, r-1$  die Integrale  $\int_{c_k} \omega_i = 0$  sind, sind auch  $\delta_1, \dots, \delta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g, c_1, \dots, c_{r-1}$  linear unabhängig und bilden nach Lemma 1.2.2 eine Basis von  $H_1(X - D, \mathbb{Q})$ .  $\square$

Die Periodenmatrix der kompakten Riemannschen Fläche kann nun wie folgt für die punktierte Riemannsche Fläche erweitert werden.

**1.2.4 Definition (Periodenmatrix der abelschen Differentiale auf einer endlich punktierten Riemannschen Fläche).** Sei  $\delta_1, \dots, \delta_{2g+r-1}$  eine Basis von  $H_1(X, \mathbb{Q})$  und  $\omega_1, \dots, \omega_{g+r-1}$  eine Basis von  $\Gamma(X, \Omega_X^1(\log D))$ . Dann definieren wir

$$\Omega_D := \left( \int_{\delta_j} \omega_i \right)_{ij}$$

und nennen  $\Omega_D$  die Periodenmatrix der abelschen Differentiale auf  $X - D$  mit logarithmischen Polen entlang  $D$ .

Um die Periodenmatrix  $\Omega_D$  auf eine Gestalt  $(\mathbf{1}_{g+r-1}, *)$  zu bringen und die fehlenden Einträge mit Hilfe der Differentialformen aus  $\Omega_X^1$  zu beschreiben, geben wir das Reziprozitätsgesetz für Differentialformen erster und dritter Gattung an.

**1.2.5 Satz (vgl. [GH94], 2.2, 229f).** Sei  $\omega$  eine Differentialform erster Gattung auf  $X$ ,  $\eta$  eine Differentialform dritter Gattung auf  $X$  mit Polen  $P_j \in X$ ,  $j = 1, \dots, r$  und  $\delta_1, \dots, \delta_{2g}$  eine symplektische Basis von  $H_1(X, \mathbb{Z})$ , so dass kein Pol  $P_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  auf diesen geschlossenen Kurven liegt. Des Weiteren bezeichne  $P$  das Fundamentalpolygon von  $X$  und  $p : X' \rightarrow X$  die universelle Überlagerung von  $X$  mit  $P \subset X'$ . Dann existiert ein Punkt  $P_0 \in X - \{P_1, \dots, P_r\}$ , so dass

$$\sum_{l=1}^g \left( \int_{\delta_l} \omega \int_{\delta_{g+l}} \eta - \int_{\delta_{g+l}} \omega \int_{\delta_l} \eta \right) = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}_{Q_j} (p^* \eta) \cdot \int_{Q_0}^{Q_j} p^* \omega$$

mit

$$Q_j := (p|_P)^{-1}(P_j), \quad j = 0, 1, \dots, r.$$

**1.2.6 Lemma.** *Es gibt eine Basis  $\delta_1, \dots, \delta_{2g+r-1}$  von  $H_1(X - D, \mathbb{Z})$  und  $\omega_1, \dots, \omega_{g+r-1}$  von  $\Gamma(X, \Omega_X^1(\log D))$ , so dass die Periodenmatrix der abelschen Differentiale auf  $X - D$  von der Gestalt*

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_g & 0 & Z \\ 0 & \mathbf{1}_{r-1} & C \end{pmatrix}$$

ist, mit

$$Z = Z^t, \quad \text{Im } Z > 0, \quad C = \left( 2\pi i \int_{Q_{l+1}}^{Q_l} p^* \omega_j \right)_{\substack{l=1, \dots, r-1 \\ j=1, \dots, g}},$$

wobei  $p: X' \rightarrow X$  die universelle Überlagerung von  $X$  und  $Q_l := (p|_P)^{-1} P_l$ .

*Beweis.* Aus dem kompakten Fall ist bekannt, dass es eine kanonische Basis  $\omega_1, \dots, \omega_g$  der holomorphen Differentialformen auf  $X$  gibt, so dass bezüglich einer kanonischen Basis  $\delta'_1, \dots, \delta'_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g$  von  $H_1(X, \mathbb{Z})$  die Periodenmatrix der abelschen Differentiale von der Gestalt

$$\left( \int_{\delta'_j} \omega_i, \int_{\gamma_j} \omega_i \right) = (\mathbf{1}_g, Z)$$

ist, mit  $Z = Z^t$  und  $\text{Im } Z > 0$ . Des Weiteren wählen wir analog zu Korollar 1.2.3  $r - 1$  zusätzliche 1-Zykel  $c_1, \dots, c_{r-1}$  auf  $X$ , so dass

$$\delta_1, \dots, \delta_{2g+r-1} := \delta'_1, \dots, \delta'_g, c_1, \dots, c_{r-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_g$$

eine Basis von  $H_1(X - D, \mathbb{Z})$  ist, und  $\omega_{g+1}, \dots, \omega_{g+r-1}$  sei wieder so gewählt, dass für  $i = 1, \dots, r - 1$

$$\text{Res}_{P_l} \omega_{g+i} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } l = i \\ -1 & , \text{ falls } l = i + 1 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (1.1)$$

und zusätzlich  $\int_{\delta_j} \omega_{g+i} = 0$  für  $i = 1, \dots, r - 1$  und  $j = 1, \dots, g$  gilt. Dies kann durch die Transformation

$$\omega_{g+i} \mapsto \omega_{g+i} - \sum_{j=1}^g \left( \int_{\delta_j} \omega_{g+i} \right) \cdot \omega_j$$

erreicht werden, da  $\int_{\delta_j} \omega_i = \delta_{ij}$  für  $i, j = 1, \dots, g$  gilt.

Die Periodenmatrix der abelschen Differentiale auf  $X - D$  mit logarithmischen Polen ent-

lang  $D$  ist dann für  $i = 1, \dots, g+r-1$  und  $j = 1, \dots, 2g+r-1$  von der Gestalt

$$\Omega_D = \left( \int_{\delta_j} \omega_i \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_g & 0 & Z \\ 0 & \mathbf{1}_{r-1} & C \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 1.2.5 gilt für  $i = 1, \dots, r-1$  und  $j = 1, \dots, g$ :

$$\sum_{l=1}^g \left( \int_{\delta_l} \omega_j \int_{\delta_{g+r-1+l}} \omega_{g+i} - \int_{\delta_{g+r-1+l}} \omega_j \int_{\delta_l} \omega_{g+i} \right) = 2\pi\sqrt{-1} \sum_{l=1}^k \operatorname{Res}_{Q_l} (p^* \omega_{g+i}) \cdot \int_{Q_0}^{Q_l} p^* \omega_j, \quad (1.2)$$

wobei  $Q_0$  ein Punkt aus  $X'$  mit  $Q_j \neq Q_0$  für  $j = 1, \dots, r$ . Mit Hilfe von Gleichung 1.1,  $\int_{\delta_j} \omega_i = \delta_{ij}$  für  $i, j = 1, \dots, g$  und  $\int_{\delta_j} \omega_{g+i} = 0$  für  $i = 1, \dots, r-1, j = 1, \dots, g$  erhalten wir aus 1.2 für  $j = 1, \dots, g$

$$\int_{\delta_{g+r-1+j}} \omega_{g+i} = 2\pi\sqrt{-1} \left( \int_{Q_0}^{Q_i} p^* \omega_j - \int_{Q_0}^{Q_{i+1}} p^* \omega_j \right) = 2\pi\sqrt{-1} \int_{Q_{i+1}}^{Q_i} p^* \omega_j$$

und somit eine Beschreibung der Matrix  $C$  durch die Differentialformen aus  $\Omega_X^1$  und den herausgenommenen Punkten.  $\square$

## 1.3 Quasi-Homogenisierung

Sei  $f(x, y)$  ein Polynom in zwei Variablen  $x, y$ , welches eine affine Varietät beschreibt. Um diese Varietät zu kompaktifizieren, ist es möglich, das Polynom zu homogenisieren. Hierdurch können aber zusätzliche Singularitäten entstehen. Um dies zu verhindern, benutzen wir hier die Quasi-Homogenisierung von  $f$  mit einem Gewichtungsvektor  $\mathbf{p}$ . Die hierdurch entstehende gewichtet-projektive Varietät liegt dann nicht im  $\mathbb{P}^2$ , sondern in dem folgenden gewichtet-projektiven Raum. Die folgenden Definitionen stammen aus [Kun97].

**1.3.1 Definition (Gewichtet-projektiver Raum).** Sei  $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ ,  $\operatorname{ggT}(p_0, \dots, p_n) = 1$ . Auf  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$  wird durch

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto (t^{p_0} x_0, \dots, t^{p_n} x_n) \quad \text{mit } t \in \mathbb{C}^*$$

eine Operation der multiplikativen Gruppe  $\mathbb{C}^*$  von  $\mathbb{C}$  gegeben. Sei  $[x_0, \dots, x_n]$  die Bahn von  $(x_0, \dots, x_n)$  und  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^n$  die Menge aller Bahnen unter dieser Operation. Der Raum  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^n$  heißt der gewichtete-projektive Raum zum Gewichtungsvektor  $\mathbf{p}$ , und  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  heißt ein System homogener Koordinaten des Punktes  $[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_{\mathbf{p}}^n$ .

**1.3.2 Definition (Quasi-Homogenisierung).** Sei  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  ein Polynom,  $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$  der Gewichtsvektor und  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^n$  der zugehörige gewichtet komplex-projektive Raum mit quasi-homogenen Koordinaten  $(x_0 : \dots : x_n)$ . Dann ist

$$f_{\mathbf{p}}^*(x_0, \dots, x_n) = x_0^{\deg_{\mathbf{p}}(f)} \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0^{p_1}}, \dots, \frac{x_n}{x_0^{p_n}}\right)$$

die Quasi-Homogenisierung von  $f$  bezüglich der Homogenisierungsvariablen  $x_0$  und des Gewichtsvektors  $\mathbf{p}$ . Hierbei bezeichnet  $\deg_{\mathbf{p}} f$  den bezüglich  $\mathbf{p}$  gewichteten Totalgrad. Sei  $g$  ein bezüglich  $p$  quasi-homogenes Polynom, dann bezeichne  $g_*$  die Dehomogenisierung von  $g$  und ist definiert über

$$g_*(x_1, \dots, x_n) := g(1, x_1, \dots, x_n).$$

**1.3.3 Bemerkung.** Sei  $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  ein Ideal, dann definieren wir die Quasi-Homogenisierung von  $I$  als

$$I_{\mathbf{p}}^* := \langle f_{\mathbf{p}}^* | f \in I \rangle \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n].$$

Sei  $J \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  ein quasi-homogenes Ideal, d.h.  $J$  wird durch quasi-homogene Polynome erzeugt, dann ist die Dehomogenisierung von  $J$  definiert durch

$$J_* := \langle g_* | g \in J \rangle.$$

Für Hauptideale  $(f) \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  und  $(g) \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  gilt somit

$$(f)_{\mathbf{p}}^* = (f_{\mathbf{p}}^*) \quad \text{bzw.} \quad (g)_* = (g_*).$$

Analog zur projektiven Varietät kann auch im gewichteten Fall eine Varietät im gewichtet-projektiven Raum definiert werden.

**1.3.4 Definition (gewichtete-projektive Varietät).** Eine Teilmenge  $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbf{p}}^n$  heißt gewichtet-projektive Varietät, falls es bezüglich des Gewichtsvektors  $\mathbf{p}$  quasi-homogene Polynome  $F_1, \dots, F_r \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  gibt, so dass sich  $Y$  als Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$F_i = 0, \quad i = 1, \dots, r$$

in  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^n$  schreiben lässt. Beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte gewichtet-projektiver Varietäten sind wieder gewichtet-projektive Varietäten. Die gewichtet-projektiven Varietäten sind die abgeschlossenen Mengen einer Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^n$ .

Im Folgenden werden wir statt  $f_{\mathbf{p}}^*$  kurz  $f^*$  bzw. für  $\mathfrak{a}_{\mathbf{p}}^*$  kurz  $\mathfrak{a}^*$  schreiben.

Wir haben nun die Einbettung

$$\mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{p}}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (1 : x_1 : \dots : x_n),$$

wodurch  $\mathbb{C}^n$  bzgl. der Topologie  $\mathcal{T}$  offen on  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^n$  liegt, da  $\mathbb{C}^n$  das Komplement von  $\{x_0 = 0\}$  ist.

**1.3.5 Definition (projektiver Abschluss).** Sei  $Y \subset \mathbb{C}^n$  eine nicht-leere affine Varietät. Der Abschluss von  $Y$  in der in Definition 1.3.4 beschriebenen Topologie  $\mathcal{T}$  heisst projektiver Abschluss von  $Y$  und wird mit  $\bar{Y}$  bezeichnet.

Um den projektiven Abschluss einer affinen Varietät im gewichtet-projektiven Raum  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^n$  konkret über die Quasi-Homogenisierung des zugehörigen Ideals berechnen zu können, muss das Ideal gleich seinem Radikal sein. Dies wird im Folgenden erörtert.

**1.3.6 Bemerkung.** Sei nun  $Y := \mathcal{V}(\langle f_1, \dots, f_m \rangle)$  mit  $f_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Dann definieren wir

$$Y^* := \mathcal{V}(\langle f_1^*, \dots, f_m^* \rangle)$$

und es gilt

$$\bar{Y} \subset Y^*.$$

**1.3.7 Lemma.** Sei  $Y \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{p}}^n$  eine gewichtet-projektive Varietät, dann gilt

$$Y = \mathcal{V}(\mathcal{I}(Y)) \tag{1.3}$$

*Beweis.* „ $\subseteq$ “: trivial.

„ $\supseteq$ “: Da  $Y$  eine gewichtet-projektive Varietät ist, wird sie durch die Lösungen eines Gleichungssystems  $f_1 = 0, \dots, f_m = 0$ ,  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  bestimmt, und somit ist  $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{I}(Y)$  und

$$\mathcal{V}(\mathcal{I}(Y)) \subseteq \mathcal{V}(f_1, \dots, f_m) = Y.$$

□

**1.3.8 Satz.** Sei  $Y \subset \mathbb{C}^n$  eine nichtleere affine Varietät und  $\bar{Y}$  ihr projektiver Abschluss. Dann gilt

$$\mathcal{I}(\bar{Y}) = \mathcal{I}(Y)^*. \tag{1.4}$$

*Beweis.* „ $\subseteq$ “: Sei  $g \in \mathcal{I}(\bar{Y})$  quasi-homogen, dann gibt es ein  $s \in \mathbb{N}$  und ein  $\tilde{g} \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ , mit  $x_0 \nmid \tilde{g}$ , so dass  $g = x_0^s \cdot \tilde{g}$ . Dann verschwindet  $f := \tilde{g}_*$  auf  $Y$ , also  $f \in \mathcal{I}(Y)$ . Da nun  $f^* = \tilde{g}$ , ist  $g = x_0^s \cdot f^* \in \mathcal{I}(Y)^*$ .

„ $\supseteq$ “: Sei  $f \in \mathcal{I}(Y)$ , dann ist  $f^* \in \mathcal{I}(Y^*)$  und da  $\bar{Y} \subseteq Y^*$  gilt  $f^* \in \mathcal{I}(\bar{Y})$ . □

**1.3.9 Satz.** Gilt  $\mathfrak{a} = \text{Rad}(\mathfrak{a})$ , so ist  $\overline{V(\mathfrak{a})} = V(\mathfrak{a}^*)$ .

*Beweis.* Nach [Kun97] Theorem 3.5 ist  $\text{Rad } \mathfrak{a} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{a}))$ , und da  $\mathfrak{a} = \text{Rad}(\mathfrak{a})$  ist, gilt

$$\mathfrak{a} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})). \tag{1.5}$$

Somit folgt

$$\overline{\mathcal{V}(\mathfrak{a})} \stackrel{(1.3)}{=} \mathcal{V}(\mathcal{I}(\overline{\mathcal{V}(\mathfrak{a})})) \stackrel{(1.4)}{=} \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})^*)) \stackrel{(1.5)}{=} \mathcal{V}(\mathfrak{a}^*).$$

□

Zum Abschluss dieses Paragraphen wollen wir noch einen geeigneten Gewichtungsvektor für eine im Affinen gegebene hyperelliptische Kurve angeben, so dass der projektive Abschluss keine zusätzlichen Singularitäten enthält.

**1.3.10 Lemma.** *Sei  $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ ,  $\deg g(x) = m > 0$  und  $f = y^2 - g(x)$ ,  $X = V(f)$  die zugehörige affine Varietät und  $p = (1, 1, \lceil \frac{m}{2} \rceil)$  ein Gewichtungsvektor. Dann besitzt die projektive Varietät  $Y = \mathcal{V}((f_p^*))$  keine zusätzlichen Singularitäten. Hierbei bezeichne*

$$\lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$$

die obere Gaussklammer von  $x$ .

*Beweis.* Da  $f$  reduziert ist, ist das durch  $f$  erzeugte Ideal gleich seinem Radikal. Nach Satz 1.3.9 stimmt der quasi-projektive Abschluss mit dem Nullstellengebilde des quasi-homogenisierten Polynoms überein.  $g(x)$  lässt sich als  $g(x) = a_0 \prod_{j=1}^m (x - a_j)$  mit  $a_j \in \mathbb{C}$ ,  $a_0 \neq 0$  darstellen. Die Quasi-Homogenisierung von  $f$  liefert

$$f^* = y^2 - z^k a_0 \prod_{j=1}^m (x - a_j z), \text{ wobei } k = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \cdot 2 - m = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } m \text{ gerade} \\ 1 & , \text{ falls } m \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Wie man leicht nachrechnet, gibt es keine unendlich fernen Punkte von  $Y$ , d.h. Punkte der Gestalt  $(x_0 : y_0 : 0)$ , die

$$f^*(x_0 : y_0 : 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 : y_0 : 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 : y_0 : 0) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0 : y_0 : 0) = 0$$

erfüllen.

□

## 1.4 Filtrierungen

Um im Folgenden Hodge-Strukturen bzw. gemischten Hodge-Strukturen definieren zu können, benötigen wir den Begriff der Filtrierung eines Vektorraumes.

**1.4.1 Definition (Filtrierung).** *Eine absteigende Filtrierung  $F$  auf einem Vektorraum  $V$  ist eine Familie von Unterräumen  $\{F^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , so dass für alle  $k \in \mathbb{Z}$*

$$F^k \subset F^{k-1}$$

*gilt. Eine aufsteigende Filtrierung  $W$  auf einem Vektorraum  $V$  ist eine Familie von Unterräumen  $\{W_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , so dass für alle  $k \in \mathbb{Z}$*

$$W_{k-1} \subset W_k$$

*gilt.*

Für manche Beschreibungen ist es sinnvoll, die Indizes von gegebenen Filtrierungen zu verschieben.

**1.4.2 Definition (verschobene Filtrierung).** *Sei  $F$  eine absteigende,  $W$  eine aufsteigende Filtrierung eines Vektorraumes  $V$  und  $n \in \mathbb{Z}$ . Dann sind die verschobene Filtrierung  $F[n]$  und  $W[n]$  definiert durch*

$$(F[n])^p := F^{p-n}$$

und

$$(W[n])_p := W_{p+n}.$$

Falls auf einem Vektorraum mehrere Filtrierungen gegeben sind, ist es möglich, durch eine Faltung eine neue Filtrierung zu definieren, welche die ursprünglichen enthält. Dieses wird im Kapitel 4 für die Limes-Gewichtsfiltrierung  $\dot{W}^\infty$  genutzt.

**1.4.3 Definition (Faltung von Filtrierungen).** *Seien  $W, W'$  zwei Filtrierungen eines Vektorraumes  $V$ . Dann ist die Faltung  $W * W'$  eine weitere Filtrierung und definiert durch:*

$$(W * W')_i := \sum_{j+k=i} W_j \cap W'_k.$$

Als einfache Folgerungen ergeben sich:

**1.4.4 Korollar.**

$$(i) \quad (W * W') = (W' * W)$$

$$(ii) \quad (W * W')[n] = (W[n] * W') = (W * W'[n])$$

Wir wollen nun notwendige Grundlagen zur Theorie einer Variation von Hodge-Strukturen bzw. einer Variation von gemischten Hodge-Strukturen zusammenstellen.

## 1.5 Hodge-Strukturen

Sei nun  $X$  eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit.

**1.5.1 Satz (Hodge-Zerlegung, vgl. [GH94], S.116f.).** *Die de Rham-Kohomologie lässt sich schreiben als:*

$$H_{DR}^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(X), \quad H^{q,p} = \overline{H^{p,q}}$$

Auf  $H_{DR}^n(X, \mathbb{C})$  lässt sich durch

$$F^p H_{DR}^n(X, \mathbb{C}) := \bigoplus_{r \geq p} H^{r, n-r}(X)$$

eine absteigende Filtrierung definieren, welche Anlass zu den folgenden Definitionen liefert:

**1.5.2 Definition (Hodge-Struktur (HS)).** Eine Hodge-Struktur vom Gewicht  $n$  ist ein Paar  $(H_{\mathbb{Z}}, H^{p,q})$ , bestehend aus

- einem Gitter  $H_{\mathbb{Z}}$  von endlichem Rang und
- einer direkten Summenzerlegung von  $H = H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$

$$H = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}, \quad H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}.$$

Wir werden nun zwei Beispiele für eine Hodge-Struktur angeben.

**1.5.3 Beispiele.** (i) (**triviale Hodge-Struktur**)

Die triviale Hodge-Struktur  $\mathbb{Z}$  ist definiert durch das Gitter  $\mathbb{Z}$  und die Hodge-Zerlegung  $\mathbb{C} = \mathbb{C}^{0,0}$ .

(ii) (**Hodge-Struktur von Tate**)

Für  $k \in \mathbb{Z}$  bezeichne  $\mathbb{Z}(k)$  den  $k$ -ten Tate-Twist, welcher eine Hodge-Struktur vom Gewicht  $-2k$  ist, gegeben durch das Gitter  $(2\pi i)^k \mathbb{Z}$  auf  $i^k \mathbb{R}$  und die Zerlegung  $\mathbb{C} = \mathbb{C}^{-k,-k}$ .

Anstatt die Hodge-Struktur durch eine Zerlegung auszudrücken, kann dies auch über eine absteigende Filtrierung des Raumes geschehen.

**1.5.4 Bemerkung (Hodge-Filtrierung).** Folgende Definition ist zu 1.5.2 äquivalent: Eine Hodge-Struktur vom Gewicht  $n$  ist ein Paar  $(H_{\mathbb{Z}}, F)$ , bestehend aus

- einem Gitter  $H_{\mathbb{Z}}$  von endlichem Rang und
- einer endlichen absteigenden Filtrierung  $F$  von  $H$ ,

so dass für alle  $p \in \mathbb{Z}$

$$H = F^p \oplus \overline{F^{n-p+1}}$$

gilt.  $F$  heißt Hodge-Filtrierung von  $H$ .

*Beweis.* Die Hodge-Filtrierung definiert eine Hodge-Zerlegung durch

$$H^{p,q} = F^p \cap \overline{F^q}.$$

Umgekehrt definiert die Hodge-Zerlegung die Hodge-Filtrierung durch

$$F^p = \bigoplus_{r \geq p} H^{r, n-r}.$$

□

Lässt man die Hodge-Strukturen variieren, ist es sinnvoll, sie mit einer Polarisierung zu versehen.



**1.5.5 Definition (polarisierte Hodge-Struktur (PHS)).** Eine polarisierte Hodge-Struktur vom Gewicht  $n$  ist ein Tripel  $(H_{\mathbb{Z}}, F, Q)$ , bestehend aus

- einer Hodge-Struktur  $(H_{\mathbb{Z}}, F)$  vom Gewicht  $n$  und
- einer  $(-1)^n$ -symmetrischen Bilinearform

$$Q : H_{\mathbb{Z}} \times H_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z},$$

so dass die Riemannschen bilinearen Relationen, ausgedrückt durch die Zerlegung

- (i)  $Q(H^{p,q}, H^{p',q'}) = 0$  für alle  $(p', q') \neq (p, q)$  und
- (ii)  $i^{p-q}Q(\psi, \bar{\psi}) > 0$  für alle  $\psi \in H^{p,q}$ ,  $\psi \neq 0$

oder durch die Hodge-Filtrierung

- (i')  $Q(F^p, F^{n-p+1}) = 0$  und
- (ii')  $Q(C\psi, \psi) > 0$  für alle  $\psi \neq 0$

erfüllt sind. Hierbei sei  $C : H \rightarrow H$  der Weil-Operator  $C|_{H^{p,q}} = i^{p-q}$ .  $Q$  heißt Polarisierung der Hodge-Struktur  $\{H_{\mathbb{Z}}, H_{p,q}\}$ .

**1.5.6 Definition (klassifizierender Raum einer PHS und sein kompaktes Dual).** Sei  $(H_{\mathbb{Z}}, F, Q)$  eine polarisierte Hodge-Struktur vom Gewicht  $n$ ,  $f^p := \dim F^p(H)$  und  $\text{Flag}(H; \dots, f^p, \dots)$  die Menge aller Filtrierungen  $F$  auf  $H = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$  von festen Dimensionen  $f^p = \dim F^p$ .

Dann ist der klassifizierende Raum  $D$  von  $(H_{\mathbb{Z}}, F, Q)$  und sein kompaktes Dual  $\check{D}$  definiert als

$$\check{D} := \{F \in \text{Flag}(H; \dots, f^p, \dots) \mid Q(F^p, F^{n-p+1}) = 0, \quad \forall p\} \quad (1.6)$$

und

$$D := \left\{ F \in \check{D} \mid i^{2p-n}Q(u, \bar{u}) > 0, \quad \forall p, \quad \forall 0 \neq u \in F^p \cap \bar{F}^{n-p} \right\}. \quad (1.7)$$

Wir wollen nun die Elemente aus  $D$  bzw. aus  $\check{D}$  durch Periodenmatrizen  $\Omega$  beschreiben, welche den Riemannschen Bedingungen aus Definition 1.1.2 genügen.

**1.5.7 Lemma (vgl. [GS75], 3(c)).** Sei  $(H_{\mathbb{Z}}, F, Q)$  eine polarisierte Hodge-Struktur vom Gewicht 1,  $\dim F^0 = 2g$  und  $\dim F^1 = g$ . Die Punkte aus  $\check{D}$  bzw.  $D$  lassen sich durch Periodenmatrizen  $\Omega$  darstellen, welche der ersten Riemannschen Bedingung bzw. den beiden Riemannschen Bedingungen genügen.

*Beweis.* Sei  $\delta^1, \dots, \delta^{2g}$  eine Basis von  $H_{\mathbb{Z}}$  und  $\delta_1, \dots, \delta_{2g}$  ihr Dual. Die darstellende Matrix von  $Q$  bzgl.  $\delta^1, \dots, \delta^{2g}$  bezeichnen wir auch mit  $Q$ . Nach Wahl einer Basis  $\omega_1, \dots, \omega_g$  von  $F^1$  ist  $\Omega = (\langle \delta_j, \omega_i \rangle)_{i,j}$  eine Periodenmatrix der Hodge-Struktur. Man kann nun leicht erkennen, dass die Bedingung

$$Q(F^p, F^{n-p+1}) = 0, \quad \text{für alle } p$$

aus (1.6) äquivalent ist zu der Forderung

$$\Omega Q^t \Omega = 0$$

und die zusätzliche Bedingung

$$i^{2p-n} Q(u, \bar{u}) > 0, \text{ für alle } p \text{ und für alle } 0 \neq u \in F^p \cap \bar{F}^{n-p}$$

aus (1.7) mit

$$-\Omega Q^t \bar{\Omega} > 0$$

übereinstimmt. □

Sei  $H_{\mathbb{R}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$ . Man hat nun drei auf  $D$  operierende Lie-Gruppen:

$$G_{\mathbb{C}} := \{g \in \text{Gl}(H) \mid Q(g\phi, g\psi) = Q(\phi, \psi) \quad \forall \phi, \psi \in H\},$$

$$G_{\mathbb{R}} := \{g \in G_{\mathbb{C}} \mid g(H_{\mathbb{R}}) \subset H_{\mathbb{R}}\}$$

und

$$G_{\mathbb{Z}} := \{g \in G_{\mathbb{R}} \mid g(H_{\mathbb{Z}}) \subset H_{\mathbb{Z}}\}.$$

Die folgenden Resultate sind in [GS75], §3(b) nachzulesen.

**1.5.8 Lemma.**  $G_{\mathbb{R}}$  operiert transitiv auf  $D$  und  $G_{\mathbb{C}}$  operiert transitiv auf  $\check{D}$ .

Um  $D$  nun als Quotientenraum von  $G_{\mathbb{R}}$  darzustellen, fixieren wir einen Basispunkt  $d \in \check{D}$ . Wir erhalten eine Referenz-Hodge-Filtrierung  $F_d$  auf  $H$  und somit eine Referenz-Hodge-Struktur.  $G_{\mathbb{C}}$  operiert auf  $\check{D}$  mit der Isotropiegruppe

$$B := \{g \in G_{\mathbb{C}} \mid gF_d^p \subset F_d^p, \quad \forall p\}$$

in  $d$  und  $G_{\mathbb{R}}$  operiert auf  $D$  mit der Isotropiegruppe

$$V := B \cap G_{\mathbb{R}}$$

in  $d$ .

**1.5.9 Korollar.**  $D \simeq G_{\mathbb{R}}/V$  ist eine offene komplexe Untermannigfaltigkeit von  $\check{D} \simeq G_{\mathbb{C}}/B$ . Jede Untergruppe  $\Gamma$  von  $G_{\mathbb{Z}}$  operiert eigentlich diskontinuierlich auf  $D$ , und  $D/\Gamma$  ist ein normaler analytischer Raum.

## 1.6 Variation von Hodge-Strukturen

Sei  $\pi : Y \rightarrow S$  eine Familie von glatten projektiven Varietäten  $Y_t = \pi^{-1}(t) \subset \mathbb{P}^m$  parametrisiert durch eine komplexe Mannigfaltigkeit  $S$ . Mit  $\mathcal{R} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$  erhält man durch

Verkleben der Kohomologiegruppen der Fasern  $H^n(Y_t, \mathcal{R})$  zu einer lokal konstanten Garbe  $\mathcal{H}_{\mathcal{R}} := R^n \pi_* \mathcal{R}_Y = \bigcup_{t \in S} H^n(Y_t, \mathcal{R})$  auf  $S$  den Gauss-Manin Zusammenhang  $\nabla$  auf  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}_S} \mathcal{O}_S$ . Auf jeder Faser  $(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})_t = H^n(Y_t, \mathbb{C})$  existiert eine Hodge-Filtrierung  $F_t$ . Griffiths hat in [Gri68b], Theorem 1.1 gezeigt, dass diese Familie von Filtrierungen holomorph in  $t$  ist, wodurch man für  $\mathcal{H}$  eine absteigende Filtrierung von holomorphen Untergarben  $\mathcal{F}$  erhält. Griffiths Transversalitätstheorem (vgl. [GS75], Theorem 3.1) besagt, dass  $\nabla \mathcal{F}^p(\mathcal{H}) \subset \Omega_S^1 \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}^{p-1}(\mathcal{H})$  gilt. Hierdurch wird die folgende Definition motiviert.

**1.6.1 Definition (Variation von Hodge-Strukturen (VHS)).** *Eine Variation von Hodge-Strukturen vom Gewicht  $n$  auf einer zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeit  $S$  ist ein Tripel  $(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{F}, \nabla)$  bestehend aus*

- $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$  : einem lokalen System von freien  $\mathbb{Z}$ -Moduln von endlichem Rang auf  $S$ ,
- $\mathcal{F}$  : einer absteigenden Filtrierung von  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}_S} \mathcal{O}_S$  durch holomorphe Unterbündel  $\mathcal{F}^p$  und
- $\nabla$  : dem Gauss-Manin Zusammenhang  $\nabla : \mathcal{H} \rightarrow \Omega_S^1 \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{H}$  korrespondierend zu dem lokalen System  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ ,

so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) Für alle  $t \in S$  induziert  $\mathcal{F}$  eine Filtrierung  $F_t$  auf der (analytischen) Faser

$$\mathcal{H}_t := \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S/\mathfrak{m}_{S,t}} \cong (\mathcal{H}_{\mathbb{C}})_t \cong (\mathcal{H}_{\mathbb{Z}})_t \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C},$$

wodurch eine Hodge-Struktur vom Gewicht  $n$  beschrieben wird. Hierbei ist  $\mathfrak{m}_{S,t}$  die Idealgarbe zum Punkt  $t \in S$ .

- (ii) Für alle  $p \in \mathbb{Z}$  gilt

$$\nabla \mathcal{F}^p(\mathcal{H}) \subset \Omega_S^1 \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}^{p-1}(\mathcal{H})$$

(Griffiths-Transversalität).

Wie oben schon erwähnt, ist es sinnvoll, polarisierte Hodge-Strukturen variieren zu lassen. Hierzu definieren wir weiter:

**1.6.2 Definition (Variation von polarisierten Hodge-Strukturen (VPHS)).** *Eine Variation von polarisierten Hodge-Strukturen vom Gewicht  $n$  auf einer zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeit ist ein Quadrupel  $(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{F}, \nabla, \mathcal{Q})$ , bestehend aus*

- $(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{F}, \nabla)$  : einer Variation von Hodge-Strukturen und
- $\mathcal{Q}$  : einer lokal konstanten  $(-1)^n$ -symmetrischen Bilinearform  $Q$  auf  $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}$

so dass für jedes  $t \in S$  faserweise eine polarisierte Hodge-Struktur  $((\mathcal{H}_{\mathbb{Z}})_t, F, Q)$  induziert wird.

## 1.7 Periodenabbildung einer Variation von Hodge-Strukturen

Es sei  $(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{F}, \nabla, \mathcal{Q})$  eine Variation von polarisierten Hodge-Strukturen vom Gewicht  $n$  über einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit  $S$ ,  $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$  die universelle Überlagerung von  $S$  und  $t_0 \in S$  ein Basispunkt. Der Pullback von  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$  unter  $\pi$  auf  $\tilde{S}$  ist eine konstante Garbe, und man erhält nach Wahl einer Referenz-Hodge-Struktur eine holomorphe Abbildung

$$\tilde{\phi} : \tilde{S} \rightarrow D,$$

wobei  $D$  der klassifizierende Raum der Referenz-Hodge-Struktur ist. Sei  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}, t_0}$  die Faser von  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$  über  $t_0$ . Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(S, t_0)$  operiert durch Isometrien auf  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}, t_0}$  und somit induziert die lokal konstante Garbe  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$  eine Darstellung

$$\rho : \pi_1(S, t_0) \rightarrow G_{\mathbb{Z}}.$$

Für  $\gamma \in \pi_1(S, t_0)$  und  $\tilde{s} \in \tilde{S}$  gilt

$$\tilde{\phi}(\gamma\tilde{s}) = \rho(\gamma)\tilde{\phi}(\tilde{s}).$$

**1.7.1 Definition (Monodromiegruppe der VPHS).** *Die Untergruppe*

$$\Gamma = \rho(\pi_1(S, t_0)) \subset G_{\mathbb{Z}}$$

*wird die Monodromiegruppe der Variation von polarisierten Hodge-Strukturen genannt.*

Nach Korollar 1.5.9 gibt es nun eine holomorphe Abbildung zwischen normalen analytischen Räumen.

**1.7.2 Definition (Periodenabbildung der VPHS).**  *$\tilde{\phi}$  induziert eine holomorphe Abbildung*

$$\phi : S \rightarrow D/\Gamma,$$

*die Periodenabbildung der Variation von polarisierten Hodge-Strukturen zum Periodengebiet  $D/\Gamma$ .*

**1.7.3 Satz (vgl. [Gri70a], (9.3)).** *Die Periodenabbildung ist holomorph, lokal liftbar, und die lokalen Liftungen sind horizontal.*

## 1.8 Gemischte Hodge-Strukturen

Wir haben gesehen, dass auf der Kohomologie von kompakten Kähler-Mannigfaltigkeiten, und somit auch auf der von projektiven Varietäten, eine Hodge-Struktur gegeben ist. Für den Fall, dass wir aber eine affine oder eine singuläre Varietät haben, kann man zunächst nichts über die Existenz einer reinen Hodge-Struktur auf der Kohomologiegruppe aussagen.

So gilt zum Beispiel  $\dim H^1(X, \mathbb{C}) = 1$  für  $X = \mathbb{C} - \{0\}$ , wodurch wir keine Hodge-Struktur auf  $H^1(X, \mathbb{C})$  gegeben haben. Daher müssen wir den Begriff der Hodge-Struktur erweitern, indem wir die rationale Kohomologie zunächst mit Hilfe einer aufsteigenden Filtrierung zerlegen. Die graduierten Anteile besitzen dann wiederum eine Hodge-Struktur. Somit definiert man nach Deligne [Del71a]:

**1.8.1 Definition (gemischte Hodge-Struktur (MHS)).** Eine gemischte Hodge-Struktur ist ein Tripel  $(H_{\mathbb{Z}}, W, F)$ , bestehend aus

$H_{\mathbb{Z}}$  : einem Gitter von endlichem Rang,

$W$  : einer endlichen aufsteigenden Filtrierung von  $H_{\mathbb{Q}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$   
(Gewichtsfiltrierung) und

$F$  : einer endlichen absteigenden Filtrierung von  $H = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$   
(Hodge-Filtrierung),

so dass die induzierten Filtrierungen auf

$$\mathrm{Gr}_k^W(H) = W_k(H)/W_{k-1}(H)$$

eine Hodge-Struktur vom Gewicht  $k$  definieren. Es gilt

$$F^p \mathrm{Gr}_k^W(H) = (W_k(H) \cap F^p(H) + W_{k-1}(H))/W_{k-1}(H)$$

Analog zum Fall der reinen Hodge-Struktur können wir auch hier eine Polarisierung definieren. Dies geschieht auf den graduierten Anteilen.

**1.8.2 Definition (graduiert-polarisierte gemischte Hodge-Struktur (GPMHS)).** Eine graduiert-polarisierte gemischte Hodge-Struktur ist ein Quadrupel  $(H_{\mathbb{Z}}, F, W, Q)$ , bestehend aus

$(H_{\mathbb{Z}}, F, W)$  : einer gemischten Hodge-Struktur und

$Q$  : einer Familie von  $(-1)^k$ -symmetrischen Bilinearformen  $Q_k$  auf  
 $\mathrm{Gr}_k^W(H_{\mathbb{Q}})$ ,

so dass  $(\mathrm{Gr}_k^W(H_{\mathbb{Z}}), F(\mathrm{Gr}_k^W(H)), Q_k)$  für alle  $k$  eine polarisierte Hodge-Struktur vom Gewicht  $k$  ist.

**1.8.3 Definition (Morphismus von gemischten Hodge-Strukturen).** Es seien  $(H_{\mathbb{Z}}, F, W)$  und  $(H'_{\mathbb{Z}}, F', W')$  zwei gemischte Hodge-Strukturen auf den Räumen  $H = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$  bzw.  $H' = H'_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ . Ein Morphismus  $f : (H_{\mathbb{Z}}, F, W) \rightarrow (H'_{\mathbb{Z}}, F', W')$  ist ein Morphismus von gemischten Hodge-Strukturen, falls

$$f(H_{\mathbb{Z}}) \subset H'_{\mathbb{Z}}, \quad f(W_k H) \subset W'_k H' \quad \text{und} \quad f(F^p H) \subset F^p H'.$$

Anders als bei der reinen Hodge-Struktur kann der klassifizierende Raum nicht direkt, sondern muss über die graduierten Anteile definiert werden. Für unsere Untersuchungen

benötigen wir die Voraussetzung, dass die graduiert-polarisierte gemischte Hodge-Struktur  $(H_{\mathbb{Z}}, F, W, Q)$  die Gewichtslänge 1 hat, d.h.

$$0 = W_{n-1}(H_{\mathbb{Q}}) \subset W_n(H_{\mathbb{Q}}) \subset W_{n+1}(H_{\mathbb{Q}}) = H_{\mathbb{Q}}.$$

**1.8.4 Definition (Griffiths-Gebiet und kompaktes Dual).** Sei  $(H_{\mathbb{Z}}, F, W, Q)$  eine graduiert-polarisierte gemischte Hodge-Struktur von Gewichtslänge 1. Wir definieren

$$f^p := \dim F^p(H_{\mathbb{C}}), \quad f_k^p := \dim F^p(\mathrm{Gr}_k^W(H_{\mathbb{C}}))$$

sowie

$$\check{\mathcal{F}}_k := \mathrm{Flag}(\mathrm{Gr}_k^W(H); \dots, f_k^p, \dots).$$

Dann ist für jedes  $k$  das Griffiths-Gebiet  $D_k$  und sein kompaktes Dual  $\check{D}_k$  definiert durch

$$\check{D}_k := \{F \in \check{\mathcal{F}}_k \mid Q_k(F^p, F^{k-p+1}) = 0, \forall p\}$$

und

$$D_k := \{F \in \check{D}_k \mid i^{2p-k} Q_k(u, \bar{u}) > 0, \forall 0 \neq u \in F^p \cap \bar{F}^{k-p}, \forall p\}.$$

**1.8.5 Definition (Klassifizierender Raum einer GPMHS und sein kompaktes Dual).** Sei

$$\check{\mathcal{F}} := \{F \in \mathrm{Flag}(H; \dots, f^p, \dots) \mid \dim(F^p \cap W_n(H)) = f_n^p, \forall p\}$$

und seien  $\pi_k : \check{\mathcal{F}} \rightarrow \check{\mathcal{F}}_k$  die Projektionen. Dann ist der klassifizierende Raum  $D$  von  $(H_{\mathbb{Z}}, F, W, Q)$  und sein kompaktes Dual  $\check{D}$  definiert als

$$\check{D} := \pi_n^{-1}(\check{D}_n) \cap \pi_{n+1}^{-1}(\check{D}_{n+1}) \subset \check{\mathcal{F}}$$

und

$$D := \pi_n^{-1}(D_n) \cap \pi_{n+1}^{-1}(D_{n+1}) \subset \check{D}.$$

Für die polarisierten Hodge-Strukturen  $(\mathrm{Gr}_k^W(H_{\mathbb{Z}}), F, Q)$  definieren wir die Mengen

$$G_{k,\mathbb{C}} = \{g \in \mathrm{Gl}(\mathrm{Gr}_k^W(H)) \mid Q_k(gu, gv) = Q_k(u, v), \forall u, v \in H\},$$

$$G_{k,\mathbb{R}} = \{g \in G_{k,\mathbb{C}} \mid g(\mathrm{Gr}_k^W(H_{\mathbb{R}})) = \mathrm{Gr}_k^W(H_{\mathbb{R}})\},$$

$$G_{k,\mathbb{Z}} = \{g \in G_{k,\mathbb{R}} \mid g(\mathrm{Gr}_k^W(H_{\mathbb{Z}})) = \mathrm{Gr}_k^W(H_{\mathbb{Z}})\},$$

$$G_{\mathbb{C}} = \{g \in \mathrm{Gl}_W(H) \mid \mathrm{Gr}_k^W(g) \in G_{k,\mathbb{C}}, \forall k\},$$

$$G_{\mathbb{R}} = \{g \in G_{\mathbb{C}} \mid gH_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{R}}\}$$

und

$$G_{\mathbb{Z}} = \{g \in G_{\mathbb{R}} \mid gH_{\mathbb{Z}} = H_{\mathbb{Z}}\},$$

wobei

$$\mathrm{Gl}_W(H) = \{g \in \mathrm{Gl}(H) \mid g(W_n) = W_n, \forall n\}.$$

Wir wollen nun analog zur Variation von polarisierten Hodge-Strukturen auch für die Variation von graduiert-polarisierten gemischten Hodge-Strukturen eine holomorphe Periodenabbildung zwischen analytischen Räumen definieren.

**1.8.6 Proposition** ([Usu84], Proposition (2.11)). *Es gilt:*

(i)  $G_{\mathbb{C}}$  operiert transitiv auf  $\check{D}$ .

(ii)  $G_{\mathbb{R}}$  operiert transitiv auf  $D$ .

(iii) Sei  $d \in D$  ein Basispunkt,  $F(d)$  die zugehörige Filtrierung und

$$B = \{g \in G_{\mathbb{C}} \mid g(F^p(d)) = F^p(d), \forall p\}.$$

Dann ist  $V = B \cap G_{\mathbb{R}}$  kompakt.

(iv)  $G_{\mathbb{Z}}$  ist eine arithmetische Untergruppe von  $G_{\mathbb{R}}$ .

Es folgt:

**1.8.7 Korollar** ([Usu84], Corollary (2.14)). *Es gilt*

$$D \cong G_{\mathbb{R}}/V \hookrightarrow \check{D} \cong G_{\mathbb{C}}/B,$$

jede Untergruppe  $\Gamma \subset G_{\mathbb{Z}}$  operiert auf  $D$  eigentlich diskontinuierlich und  $D/\Gamma$  ist Hausdorff. Außerdem gibt es eine Untergruppe  $\Gamma' \subset \Gamma$  von endlichem Index, so dass  $D/\Gamma'$  glatt ist.

## 1.9 Variation von gemischten Hodge-Strukturen

Um später die Limes-MHS im punktierten Fall zu erhalten, benötigen wir, wie auch schon im reinen Fall, eine Variation von graduiert-polarisierten gemischten Hodge-Strukturen.

**1.9.1 Definition (Variation von graduiert-polarisierten gemischten Hodge-Strukturen (VGPMHS)).** *Eine Variation von gemischten Hodge-Strukturen auf einer zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeit  $S$  ist ein Quintupel  $(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{W}, \mathcal{F}, \nabla, \mathcal{Q})$ ,*

bestehend aus

- $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$  : einem lokales System von  $\mathbb{Z}$ -Moduln von endlichem Rang auf  $S$ ,
- $\mathcal{W}$  : einer aufsteigenden Filtrierung von  $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}_S} \mathbb{Q}_S$  durch lokale Untersysteme  $\mathcal{W}_q$ ,
- $\mathcal{F}$  : einer absteigenden Filtrierung von  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}_S} \mathcal{O}_S$  durch holomorphe Unterbündel  $\mathcal{F}^p$ ,
- $\nabla$  : dem Gauss-Manin Zusammenhang  $\nabla : \mathcal{H} \rightarrow \Omega_S^1 \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{H}$  korrespondierend zu dem lokalen System  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$  und
- $\mathcal{Q}$  : einer Familie von lokal konstanten  $(-1)^k$ -symmetrischen Bilinearformen  $\mathcal{Q}_k$  auf  $\mathrm{Gr}_k^{\mathcal{W}}(\mathcal{H}_{\mathbb{Q}})$ ,

welche die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- (i) Für alle  $t \in S$  induzieren  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{W}$  eine gemischte Hodge-Struktur  $(H_{\mathbb{Z}}, W, F)$  auf der (analytischen) Faser

$$\mathcal{H}_t := \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_{S,t} \cong (\mathcal{H}_{\mathbb{C}})_t \cong (\mathcal{H}_{\mathbb{Z}})_t \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}.$$

- (ii) Für alle  $p \in \mathbb{Z}$  gilt

$$\nabla \mathcal{F}^p(\mathcal{H}) \subset \Omega_S^1 \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}^{p-1}(\mathcal{H})$$

(Griffith-Transversalität).

- (iii)  $(\mathrm{Gr}_k^{\mathcal{W}}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}), \mathcal{F}(\mathrm{Gr}_k^{\mathcal{W}}(\mathcal{H})), \nabla, \mathcal{Q}_k)$  ist eine Variation von polarisierten Hodge-Strukturen.

## 1.10 Periodenabbildung einer Variation von graduiert-polarisierten gemischten Hodge-Strukturen

Es sei  $(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{W}, \mathcal{F}, \nabla, \mathcal{Q})$  eine Variation von graduiert-polarisierten gemischten Hodge-Strukturen von Gewichtslänge 1 über einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit  $S$ ,  $t_0 \in S$  ein Basispunkt und  $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$  die universelle Überlagerung von  $S$ . Weiter sei  $H_{\mathbb{Z}} = \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(t_0)$  die Faser von  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$  über  $t_0$ ,  $W = \mathcal{W}(t_0)$  die induzierte Gewichtsfiltrierung,  $F = \mathcal{F}(t_0)$  die induzierte Hodge-Filtrierung,  $Q = \mathcal{Q}(t_0)$  die graduierte Polarisierung und  $D$  der klassifizierende Raum der gemischten Hodge-Struktur  $(H_{\mathbb{Z}}, W, F, Q)$ . Dann erhält man eine holomorphe Abbildung

$$\tilde{\phi} : \tilde{S} \rightarrow D.$$

Das lokale System  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$  auf  $S$  induziert die Monodromiedarstellung

$$\rho : \pi_1(S, t_0) \rightarrow G_{\mathbb{Z}}.$$



**1.10.1 Definition (Monodromiegruppe der VGPMHS).** *Die Untergruppe*

$$\Gamma = \rho(\pi_1(S, t_0)) \subset G_{\mathbb{Z}}$$

*heißt Monodromiegruppe der Variation von graduiert-polarisierten gemischten Hodge-Strukturen.*

Nach Korollar 1.8.7 operiert  $\Gamma$  eigentlich diskontinuierlich auf  $D$ , wodurch wir die folgende holomorphe Abbildung analytischer Räume erhalten.

**1.10.2 Definition (Periodenabbildung der VGPMHS).** *Die Abbildung*

$$\phi : S \rightarrow D/\Gamma$$

*heißt Periodenabbildung der Variation von graduiert-polarisierten gemischten Hodge-Strukturen zum Periodengebiet  $D/\Gamma$ .*

**1.10.3 Satz (vgl. [Usu84], Theorem 4.2).** *Die Periodenabbildung  $\phi$  der Variation von graduiert-polarisierten gemischten Hodge-Strukturen  $(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{W}, \mathcal{F}, \mathcal{Q})$  ist holomorph, lokal liftbar und die lokalen Liftungen sind horizontal.  $\phi$  ist durch die Projektionsabbildung*

$$p : D \rightarrow D_n \times D_{n+1}$$

*kompatibel mit den Griffiths-Periodenabbildungen  $\phi_k$  der Variation von polarisierten Hodge-Strukturen  $(\mathrm{Gr}_k^{\mathcal{W}}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}), F(\mathrm{Gr}_k^{\mathcal{W}}(\mathcal{H})), \nabla, \mathcal{Q}_k)$ ,  $k = n, n + 1$ .*



## 2 Der kompakte Fall

Es sei  $\epsilon > 0$ ,  $\Delta := \Delta_\epsilon(0)$  die Kreisscheibe vom Radius  $\epsilon$  um 0,  $\Delta^* := \Delta - \{0\}$  und  $\pi : X \rightarrow \Delta$  eine Familie von projektiven Kurven  $X_t = \pi^{-1}(t)$ , wobei die Fasern  $X_t$ ,  $t \in \Delta^*$  Riemannsche Flächen vom Geschlecht  $g$  sind und  $X_0$  genau eine  $A_k$ -Singularität,  $k \in \mathbb{N}$  besitzt. Für den nilpotenten Anteil  $\mathcal{N}^*$  der Monodromietransformation der Kohomologie bezüglich des Randzyklus von  $\Delta$  sei

$$(\mathcal{N}^*)^2 = \mathbf{0}.$$

### 2.1 Lokale Monodromie

Da  $\pi|_{X^*} : X^* \rightarrow \Delta^*$ ,  $X^* := \pi^{-1}(\Delta^*)$  nach dem Satz von Ehresmann (vgl. [Ebe01], Theorem 4.1) eine lokal triviale differenzierbare Faserung ist, können wir für  $t \neq 0$  die Monodromie  $h_t : X_t \rightarrow X_t$  bezüglich eines kanonischen Erzeugenden von  $\pi_1(\Delta^*, t)$  beschreiben, welche ein Diffeomorphismus der Faser  $X_t$  ist. Seien

$$\mathcal{M} := (h_t)_* : H_1(X_t, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X_t, \mathbb{Z})$$

und

$$\mathcal{T} := (h_t^*)^{-1} : H^1(X_t, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X_t, \mathbb{Z})$$

die Monodromietransformationen für Homologie und Kohomologie, also  $\mathcal{T} = (\mathcal{M}^*)^{-1}$ .

Wir setzen von nun an weiter voraus, dass die Monodromietransformationen unipotent sind.

**2.1.1 Definition (Monodromiematrix).** *Die Darstellungsmatrix der Monodromietransformationen für Homologie bzw. Kohomologie bzgl. einer kanonischen Basis wird mit  $M$  bzw.  $T$  bezeichnet und Monodromiematrix der Homologie bzw. Kohomologie genannt.*

Wir benutzen ab jetzt eine kanonische Basis

$$\delta_1, \dots, \delta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g \tag{2.1}$$

für die Homologie, d.h. für die Schnittzahlen (vgl. [Ebe01] 4.6) gilt:

$$\begin{aligned} \langle \delta_i, \delta_j \rangle &= 0, \text{ für } 1 \leq i, j \leq g, \\ \langle \gamma_i, \gamma_j \rangle &= 0, \text{ für } 1 \leq i, j \leq g \end{aligned}$$

und

$$\langle \delta_i, \gamma_j \rangle = \begin{cases} 0 & , \text{ für } i \neq j \\ 1 & , \text{ für } i = j. \end{cases}$$

## 2.2 Limes-Gewichtsfiltrierung $W^\infty$

Sei  $V$  ein endlich dimensionaler Vektorraum,  $N$  ein nilpotenter Endomorphismus von  $V$  und  $l \in \mathbb{N}$  so gewählt, dass  $N^l \neq 0$  und  $N^i = 0$  für alle  $i > l$ .

**2.2.1 Proposition (vgl. [Gri70b], 255f).** *Es gibt eine eindeutige Filtrierung  $L = L(N)$  von  $V$ , so dass gilt:*

$$(1) \quad NL_i \subset L_{i-2},$$

$$(2) \quad N^i \text{ induziert einen Isomorphismus } \mathrm{Gr}_i^L V \cong \mathrm{Gr}_{-i}^L V.$$

$L$  wird die Gewichtsfiltrierung von  $N$  genannt. Iterativ ist  $L$  gegeben durch:

$$(i) \quad L_{-(l+1)} = 0,$$

$$(ii) \quad L_i = \{v \in V \mid N^{i+1}v \in L_{-(i+2)}\}, \text{ für } i \geq 0,$$

$$(iii) \quad L_{-i} = N^i L_i, \text{ für } i > 0.$$

Als einfache Folgerung berechnet sich für  $l = 1$  die Gewichtsfiltrierung von  $N$  zu:

**2.2.2 Korollar.**

$$\begin{aligned} L_{-2} &= 0, \\ L_{-1} &= \mathrm{Im} N, \\ L_0 &= \mathrm{Ker} N, \\ L_1 &= V. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun wieder unsere obige Familie  $\pi : X \rightarrow \Delta$ . Für  $t \in \Delta^*$  nahe 0 definieren wir  $V := H^1(X_t, \mathbb{Q})$ . Sei  $L$  die Gewichtsfiltrierung des nilpotenten Anteils  $\mathcal{N}^*$  der Monodromie  $\mathcal{T}$ .

**2.2.3 Definition.** *Mit den obigen Bezeichnungen wird die verschobene Filtrierung*

$$W^\infty := L[-1]$$

*die Limes-Gewichtsfiltrierung der Familie  $\pi : X \rightarrow \Delta$  genannt.*

**2.2.4 Bemerkung.** *Für die Graduierten der Filtrierung  $W^\infty$  gilt:*

$$\mathrm{Gr}_0^{W^\infty} = \mathrm{Im} N^*,$$

$$\mathrm{Gr}_1^{W^\infty} = \mathrm{Ker} N^* / \mathrm{Im} N^*,$$

$$\mathrm{Gr}_2^{W^\infty} = H^1(X_t, \mathbb{Q}) / \mathrm{ker} N^*.$$

## 2.3 Limes-Hodge-Filtrierung $F_\infty$

Sei  $(\mathcal{H}_\mathbb{Z}, \mathcal{F}, \nabla, \mathcal{Q})$  eine polarisierte Variation von Hodge-Strukturen, wobei  $\pi^* : X^* \rightarrow \Delta^*$  die Einschränkung der obigen Familie auf die punktierte Kreisscheibe  $\Delta^*$ ,  $\mathcal{H}_\mathbb{Z} := \bigcup_{t \in \Delta^*} H^1(X_t, \mathbb{Z})$  und  $\nabla$  der Gauss-Manin-Zusammenhang der Familie  $\pi$  ist. Aus Abschnitt 1.7 erhält man die Periodenabbildung  $\phi : \Delta^* \rightarrow D/\Gamma$ . Weiter sei  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$  die obere Halbebene und

$$e : U \rightarrow \Delta^*; \quad z \mapsto t = e(z) := \exp(2\pi iz)$$

die universelle Überlagerung von  $\Delta^*$ . Aus der lokalen Liftbarkeit von  $\phi$  (vgl. Lemma 1.7.3) folgt, dass auch  $\phi \circ e$  lokal geliftet werden kann, und da  $U$  einfach zusammenhängend ist, existiert eine globale Liftung  $\tilde{\phi} : U \rightarrow D$ , wodurch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & D \\ e \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^* & \xrightarrow{\phi} & D/\Gamma \end{array}$$

kommutiert. Da zu  $t_0 \in S$  die Fundamentalgruppe  $\pi_1(\Delta^*, t_0)$ , aufgefasst als Decktransformationsgruppe von  $U$ , durch die Translation  $z \mapsto z + 1$  erzeugt wird, ist

$$\tilde{\phi}(z + 1) = \mathcal{T}\tilde{\phi}(z)$$

und  $\tilde{\psi}(z) := \exp(-\mathcal{N}^* z)\tilde{\phi}(z)$  eine 'Enttwistung' von  $\tilde{\phi}$ , d.h.  $\tilde{\psi}(z + 1) = \tilde{\psi}(z)$ .  $\tilde{\psi}$  induziert die Abbildung

$$\psi : \Delta^* \rightarrow \check{D}; \quad t \mapsto \tilde{\psi} \left( \frac{1}{2\pi i} \log t \right). \quad (2.2)$$

Um die Limes-Hodge-Filtrierung zu definieren, muss eine Fortsetzung in 0 gefunden werden. Dies liefert der folgende Satz:

**2.3.1 Satz (vgl. [GS75], Proposition (9.4)).** *Sei  $X$  eine quasi-projektive Varietät,  $\pi : X \rightarrow \Delta$  eine eigentlich holomorphe Abbildung, so dass  $\pi$  glatt außerhalb von  $\pi^{-1}(0)$  ist und die Fasern  $X_t = \pi^{-1}(t)$  glatte projektive Varietäten für  $t \neq 0$  sind.*

*Dann ist die Abbildung  $\psi : \Delta^* \rightarrow \check{D}$  zu einer Abbildung  $\psi : \Delta \rightarrow \check{D}$  fortsetzbar.*

*Die zu  $\psi(0) \in \check{D}$  zugehörige Filtrierung ist die Limes-Hodge-Filtrierung  $F_\infty$ .*

Wir wollen nun die Limes-Hodge-Filtrierung über die Periodenmatrizen der Fasern  $X_t$  beschreiben.

**2.3.2 Satz (Regulär singuläre Punkte, vgl. [GS75], Theorem (3.31)).** *Die Periodenabbildung lässt sich durch holomorphe, verzweigte Periodenmatrizen  $\Omega(t)$ ,  $t \in \Delta^*$ , darstellen, welche der Abschätzung*

$$\|\Omega(t)\| \leq C |t|^{-\mu},$$

für ein  $\mu \in \mathbb{N}$  in der aufgeschlitzten Kreisscheibe  $0 < \arg t < 2\pi$  genügen.

**2.3.3 Satz (vgl. [Gri70b], Proposition 13.3).** *Es gibt eine Basis  $\delta_1, \dots, \delta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g$  von  $H_1(X_t, \mathbb{Q})$ , so dass die Schnittmatrix  $Q$ , die Monodromiematrix  $M$  und die Periodenmatrix  $\Omega(t)$  von der Gestalt*

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_g \\ -\mathbf{1}_g & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_g & N_1 \\ 0 & \mathbf{1}_g \end{pmatrix}, \quad N_1 = {}^t N_1, \quad N_1 > 0,$$

$$\Omega(t) = (\mathbf{1}_g, Z(t)), \quad \text{mit } Z(t) = {}^t Z(t), \quad \text{Im } Z(t) > 0$$

und

$$Z(t) = \frac{\log t}{2\pi i} N_1 + \tilde{Z}(t), \quad \tilde{Z}(t) \text{ ist holomorph in } \Delta.$$

Wir erhalten nun über die Periodenabbildung (2.2) und Satz 2.3.2 die folgende Aussage:

**2.3.4 Korollar.** *Für  $t \in \Delta^*$  ist die Matrix*

$$\left( \mathbf{1}_g, \tilde{Z}(t) \right) = (\mathbf{1}_g, Z(t)) \cdot \exp \left( -\frac{\log t}{2\pi i} N \right)$$

*holomorph und unverzweigt und lässt sich in  $t = 0$  fortsetzen. Die Limes-Hodge-Filtrierung  $F_\infty$  ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} (F_\infty)^1 &= \text{Zeilenraum der Matrix } \left( \mathbf{1}_g, \tilde{Z}(0) \right), \\ (F_\infty)^0 &= H^1(X_t, \mathbb{C}), \quad \text{für } t \text{ nahe } 0. \end{aligned}$$

*Beweis.* Nach Satz 2.3.3 ist die Periodenmatrix  $(\mathbf{1}_g, Z(t))$  von der Gestalt

$$Z(t) = \frac{\log t}{2\pi i} N_1 + \tilde{Z}(t)$$

mit  $\tilde{Z}(t)$  holomorph in  $\Delta$ . Es gilt

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & N_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

und daher

$$\left( \mathbf{1}_g, \tilde{Z}(t) \right) = (\mathbf{1}_g, Z(t)) \cdot \exp \left( -\frac{\log t}{2\pi i} N \right).$$

Für  $t \in \Delta^*$  lässt sich eine Basis von  $H^{1,0}(X_t)$  durch

$$\omega_i(t) = \delta^i + \sum_{j=1}^g Z_{ij}(t) \cdot \gamma^j$$

und somit die Periodenabbildung als Zeilenraum der Periodenmatrix darstellen. Nach Satz

2.3.1 erhält man die gewünschte Filtrierung.  $\square$

**2.3.5 Satz (Limes-MHS, vgl. [Sch73], Theorem (6.16)).** Für  $t$  nahe 0 ist das Tripel

$$(H^1(X_t, \mathbb{Q}), W^\infty, F_\infty)$$

eine gemischte Hodge-Struktur und wird Limes-MHS der Familie  $\pi : X \rightarrow \Delta$  genannt.

## 2.4 Beispiele

Um die Monodromiematrix explizit angeben und somit die Limes-MHS konkret berechnen zu können, betrachten wir nun als Beispiel Familien von kompakten Riemannschen Flächen, welche sich als zweiblättrige Überlagerung der Riemannschen Zahlenkugel darstellen lassen.

Für festes  $k \in \mathbb{N}$  sei  $\text{pr}_t : X^k \rightarrow \Delta$  eine Familie von hyperelliptischen Kurven  $X_t^k = \text{pr}_t^{-1}(t)$ , welche mit  $0 < |a| \leq |b|$ ,  $a \neq b$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$  fest definiert ist durch

$$X^k := \{(x, y, t) \in \mathbb{C}^2 \times \Delta \mid y^2 - (x^k - t)(x - a)(x - b) = 0\}.$$

Hierbei bezeichne  $\Delta = \Delta_\epsilon(0) \subset \mathbb{C}$  eine Kreisscheibe mit festem Radius  $\epsilon$  um 0, wobei  $\epsilon \ll |a|$ .

**2.4.1 Lemma.** Es gibt einen Gewichtungsvektor  $\mathbf{p}$ , so dass für den Abschluss  $\overline{X}^k$  von  $X^k$  in  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^2 \times \Delta$  die Funktion  $\text{pr}_t : \overline{X}^k \rightarrow \Delta$  in den Punkten von  $\overline{X}^k - \{0\}$  glatt ist. Die Fasern  $\overline{X}_t^k$ ,  $t \neq 0$  sind kompakte Riemannsche Flächen und haben das Geschlecht  $g = \lceil \frac{k}{2} \rceil$ . Die Faser  $\overline{X}_0^k$  hat eine  $A_{k-1}$ -Singularität in  $p = (0 : 0 : 1, 0)$ .

*Beweis.* Es lässt sich leicht nachrechnen, dass die Fasern  $X_t^k$  für  $t \in \Delta^*$  glatt sind,  $X_0^k$  in 0 eine  $A_{k-1}$  Singularität besitzt und sonst glatt ist. Nach Lemma 1.3.10 wählen wir nun den Gewichtungsvektor

$$\mathbf{p} = \begin{cases} (1, 1, \frac{k+2}{2}) & , \text{ falls } k \text{ gerade} \\ (1, 1, \frac{k+3}{2}) & , \text{ falls } k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

wodurch die Fasern  $\overline{X}_t^k$  keine zusätzlichen Singularitäten erhalten und  $\text{pr}_t$  außerhalb von  $(0 : 0 : 1, 0)$  glatt ist.  $\square$

Als nächstes wählen wir ein  $t_0 \in \Delta^*$  nahe 0 und somit eine Referenzfaser  $\overline{X}_{t_0}^k$ , anhand derer die Monodromietransformationen der Homologie beschrieben werden. Sei weiter  $\delta_1, \dots, \delta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g$  eine kanonische Basis von  $H_1(\overline{X}_{t_0}^k, \mathbb{Z})$  mit Schnitzzahlen

$$\begin{aligned} \langle \delta_i, \delta_j \rangle &= 0, \text{ für } 1 \leq i, j \leq g, \\ \langle \gamma_i, \gamma_j \rangle &= 0, \text{ für } 1 \leq i, j \leq g \end{aligned}$$

und

$$\langle \delta_i, \gamma_j \rangle = \begin{cases} 0 & , \text{ für } i \neq j \\ 1 & , \text{ für } i = j. \end{cases}$$

Um die Monodromietransformationen nun konkret für diese Basis zu berechnen, schauen wir uns die Fälle  $k = 4$  (vgl. Abbildung 2.1) und  $k = 3$  (vgl. Abbildung 2.2) an. Die Bilder zeigen jeweils eine Kopie der Sphäre mit geeigneten Verzweigungsschnitten. Die Basis  $\delta_1, \dots, \delta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g$  verläuft auf dem einen Blatt, wenn die Linie durchgezogen gezeichnet ist und auf dem anderen, wenn sie gestrichelt ist. Das jeweils erste Bild der Abbildungen zeigt die Faser  $X_{t_0}$  vor, das jeweils zweite nach der Monodromietransformation. In den letzten Bildern der Abbildungen wurden die Verzweigungsschnitte zurück in die Ausgangslage gesetzt, um die neuen Zykel über die Schnittzahlen mit den alten zu berechnen. Über diese Beobachtungen erhalten wir das folgende Lemma.

**2.4.2 Lemma.** *Die Monodromiematrix für die Kohomologie bzgl. der Basis  $\delta_1, \dots, \delta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g$  ist quasi-unipotent. Nach geeignetem Basiswechsel*

$$\Delta \rightarrow \Delta, \quad t \mapsto t^l, \quad l = \begin{cases} k & , \text{ falls } k \text{ gerade,} \\ 2k & , \text{ falls } k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

erhalten wir eine unipotente Monodromiematrix von der Gestalt:

$$M = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_g & N_1 \\ 0 & \mathbb{1}_g \end{pmatrix}, & N_1 = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix}, & \text{ falls } k \text{ gerade,} \\ \mathbb{1}_{2g} & , & \text{ falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Im ungeraden Fall ist die Monodromie also endlich.

*Beweis.* Für den Fall  $k = 4$  erhalten wir über die Abbildung 2.1 die folgenden Schnittzahlen:

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\delta'_1$	$\delta'_2$	$\gamma'_1$	$\gamma'_2$
$\delta_1$	-1	1	1	1
$\delta_2$	1	-1	0	0
$\gamma_1$	0	-1	-1	-1
$\gamma_2$	0	-1	0	-1

und somit gilt für die neuen Zykel

$$\begin{aligned} \delta'_1 &= -\langle \gamma_1, \delta'_1 \rangle \delta_1 - \langle \gamma_2, \delta'_1 \rangle \delta_2 + \langle \delta_1, \delta'_1 \rangle \gamma_1 + \langle \delta_2, \delta'_1 \rangle \gamma_2 \\ &= -\gamma_1 + \gamma_2, \\ \delta'_2 &= -\langle \gamma_1, \delta'_2 \rangle \delta_1 - \langle \gamma_2, \delta'_2 \rangle \delta_2 + \langle \delta_1, \delta'_2 \rangle \gamma_1 + \langle \delta_2, \delta'_2 \rangle \gamma_2 \\ &= \delta_1 + \delta_2 + \gamma_1 - \gamma_2, \end{aligned}$$



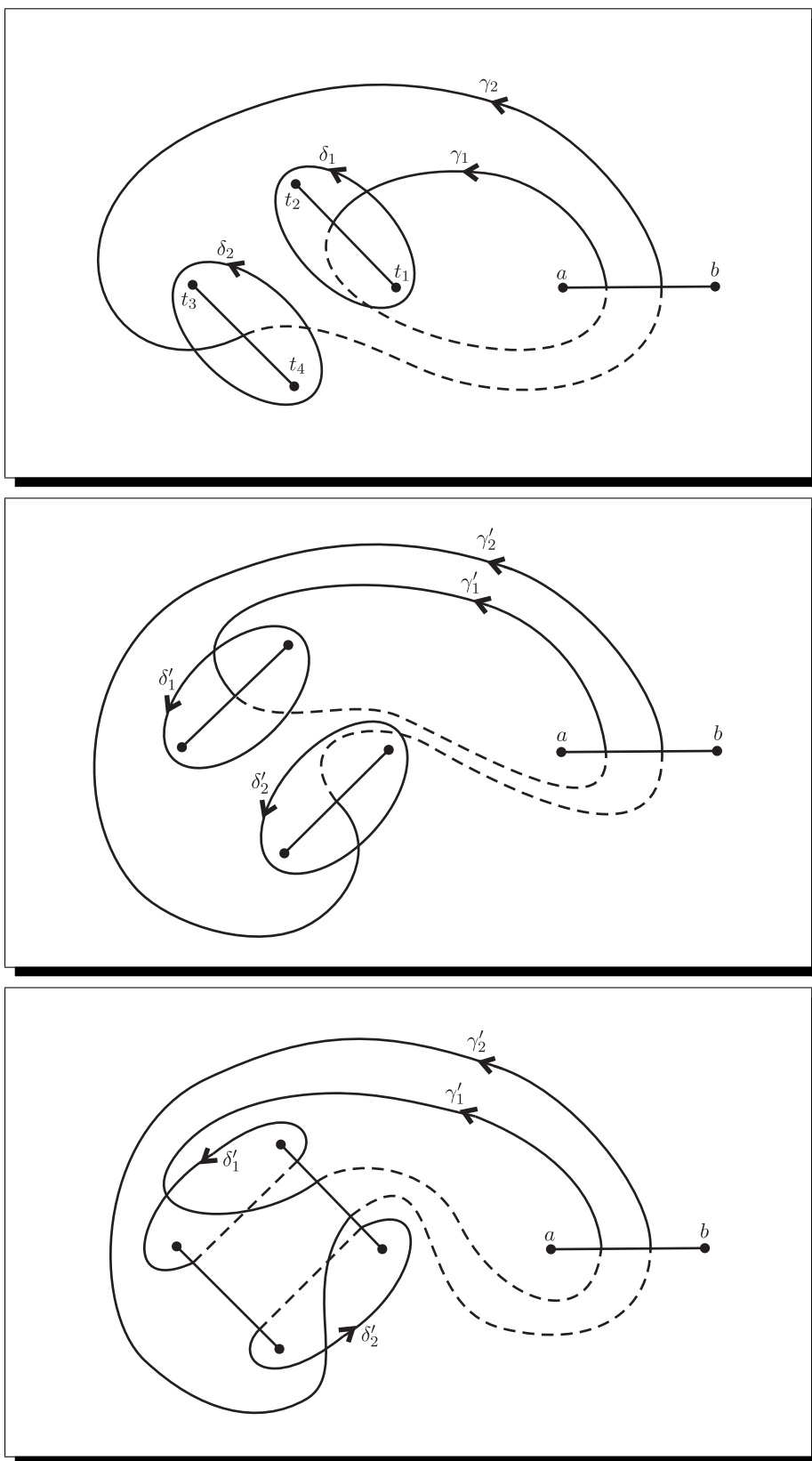


Abbildung 2.1: Monodromietransformation von  $H_1(\overline{X}_{t_0}^4, \mathbb{Z})$ .

$$\begin{aligned}
\gamma'_1 &= -\langle \gamma_1, \gamma'_1 \rangle \delta_1 - \langle \gamma_2, \gamma'_1 \rangle \delta_2 + \langle \delta_1, \gamma'_1 \rangle \gamma_1 + \langle \delta_2, \gamma'_1 \rangle \gamma_2 \\
&= \delta_1 + \gamma_1, \\
\gamma'_2 &= -\langle \gamma_1, \gamma'_2 \rangle \delta_1 - \langle \gamma_2, \gamma'_2 \rangle \delta_2 + \langle \delta_1, \gamma'_2 \rangle \gamma_1 + \langle \delta_2, \gamma'_2 \rangle \gamma_2 \\
&= \delta_1 + \delta_2 + \gamma_1.
\end{aligned}$$

Für die Monodromiematrix bzgl. dieser Basis erhalten wir:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Fall  $k = 3$  in Abbildung 2.2 zeigt die Monodromietransformation der Homologie von  $\overline{X}_{t_0}^3$ . Für den Schnittzahlenvergleich erhalten wir hier:

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\delta'_1$	$\delta'_2$	$\gamma'_1$	$\gamma'_2$
$\delta_1$	-1	1	1	1
$\delta_2$	1	-1	0	0
$\gamma_1$	-1	0	0	0
$\gamma_2$	0	-1	0	-1

und für die neuen Zykel:

$$\begin{aligned}
\delta'_1 &= -\langle \gamma_1, \delta'_1 \rangle \delta_1 - \langle \gamma_2, \delta'_1 \rangle \delta_2 + \langle \delta_1, \delta'_1 \rangle \gamma_1 + \langle \delta_2, \delta'_1 \rangle \gamma_2 \\
&= \delta_1 - \gamma_1 + \gamma_2, \\
\delta'_2 &= -\langle \gamma_1, \delta'_2 \rangle \delta_1 - \langle \gamma_2, \delta'_2 \rangle \delta_2 + \langle \delta_1, \delta'_2 \rangle \gamma_1 + \langle \delta_2, \delta'_2 \rangle \gamma_2 \\
&= \delta_2 + \gamma_1 - \gamma_2, \\
\gamma'_1 &= -\langle \gamma_1, \gamma'_1 \rangle \delta_1 - \langle \gamma_2, \gamma'_1 \rangle \delta_2 + \langle \delta_1, \gamma'_1 \rangle \gamma_1 + \langle \delta_2, \gamma'_1 \rangle \gamma_2 \\
&= \gamma_1, \\
\gamma'_2 &= -\langle \gamma_1, \gamma'_2 \rangle \delta_1 - \langle \gamma_2, \gamma'_2 \rangle \delta_2 + \langle \delta_1, \gamma'_2 \rangle \gamma_1 + \langle \delta_2, \gamma'_2 \rangle \gamma_2 \\
&= \delta_2 + \gamma_1.
\end{aligned}$$

Für die Monodromiematrix bzgl. dieser Basis erhalten wir im ungeraden Fall somit:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M^6 = \mathbb{1}_4.$$

Für beliebiges  $k$  gelangt man zu obigem Resultat durch analoge Vorgehensweise.  $\square$

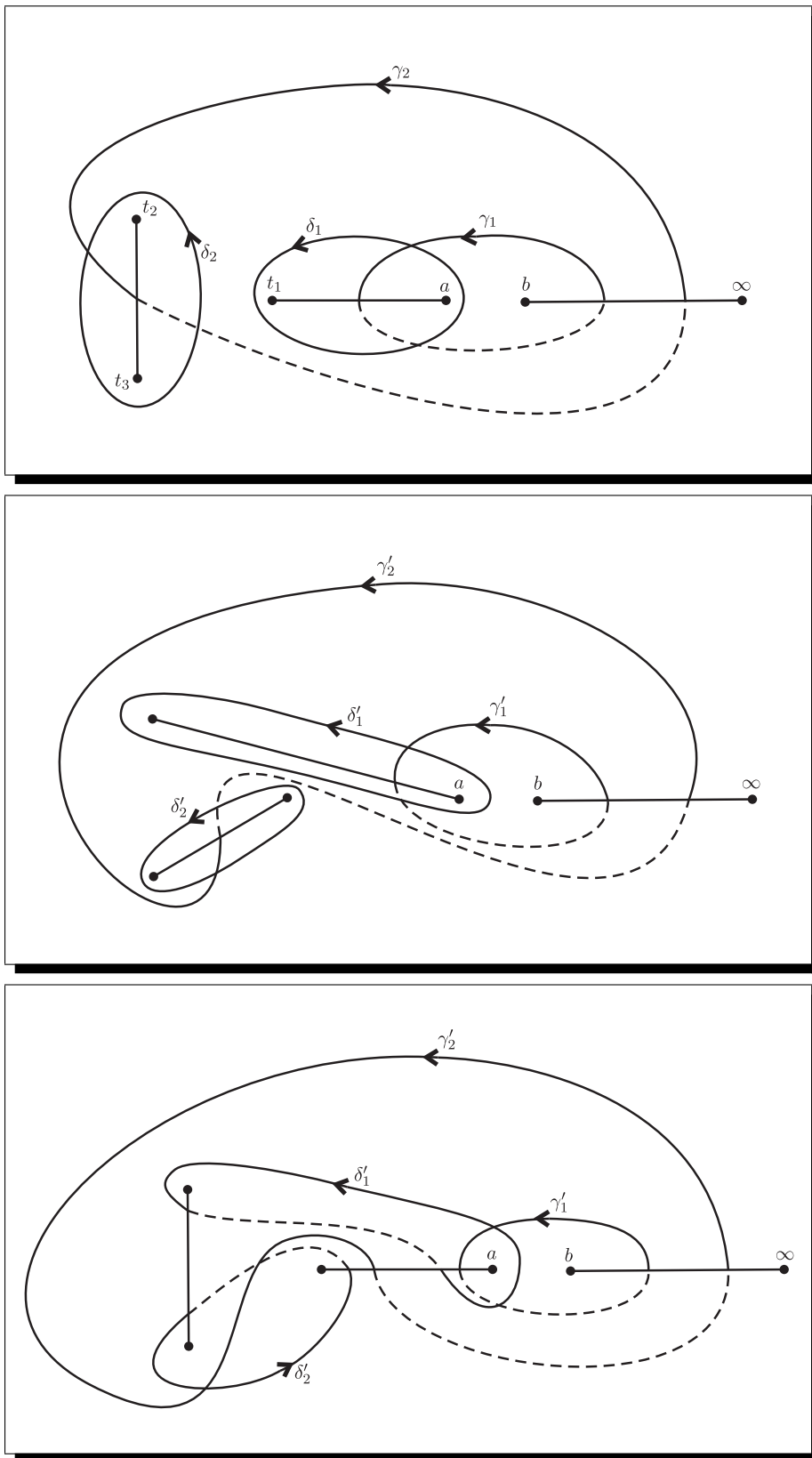
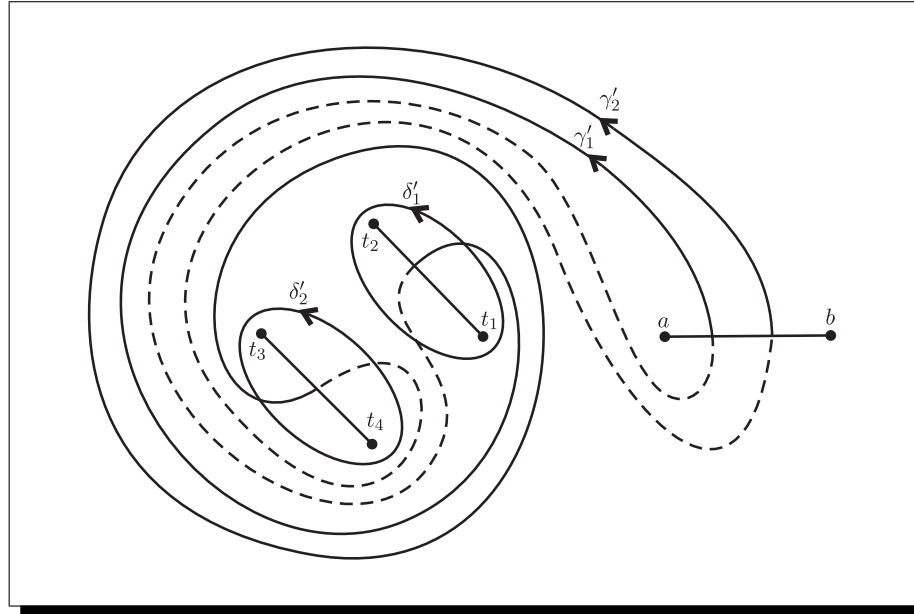


Abbildung 2.2: Monodromietransformation von  $H_1(\bar{X}_{t_0}^3, \mathbb{Z})$ .

**2.4.3 Bemerkung.** Für den geraden Fall kann man die Monodromiematrix der Homologie nach dem Basiswechsel  $t \mapsto t^k$  auch direkt aus Abbildung 2.3 ablesen. Im ungeraden Fall erkennt man die Identität nicht auf den ersten Blick, da hier der Verzweigungsschnitt von  $t_1$  nach  $a$  neu gesetzt werden muss.



**Abbildung 2.3:** Monodromietransformation nach Basiswechsel von  $H_1(\overline{X}_{t_0}^4, \mathbb{Z})$ .

$\delta^1, \dots, \delta^g, \gamma^1, \dots, \gamma^g$  sei eine Basis von  $H^1(\overline{X}_{t_0}^k, \mathbb{Q})$  dual zu  $\delta_1, \dots, \delta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g$ . Um die Limes-Gewichtsfiltrierung  $W^\infty$  zu bekommen, wollen wir nun das Bild und den Kern des nilpotenten Anteils  $\mathcal{N}^*$  der Monodromietransformation der Kohomologie  $\mathcal{T}$  bestimmen. Da die Monodromie im ungeraden Fall endlich ist, ist die Limes-Gewichtsfiltrierung trivial und wir erhalten im Limes eine reine Hodge-Struktur.

**2.4.4 Korollar.** Für gerades  $k$  erhält man:

$$\begin{aligned} \text{Ker } \mathcal{N}^* &= \text{Span}(\delta^1 - \delta^2, \dots, \delta^1 - \delta^g, \gamma^1, \dots, \gamma^g), \\ \text{Im } \mathcal{N}^* &= \text{Span}\left(\sum_{j=1}^g \gamma^j\right). \end{aligned}$$

*Beweis.* Über die transponierte Monodromiematrix erhält man die Abbildung  $\mathcal{T}$ , und über deren nilpotenten Anteil  $\mathcal{N}^*$  das Behauptete.  $\square$

**2.4.5 Korollar.** Sei  $L$  die Gewichtsfiltrierung von  $\mathcal{N}^*$  und  $W^\infty = L[-1]$ . Dann erhalten wir für gerades  $k$ :

$$\begin{aligned} (W^\infty)_i &= 0, \quad \text{für } i < 0, \\ (W^\infty)_0 &= \text{Span} \left( \sum_{j=1}^g \gamma^j \right), \\ (W^\infty)_1 &= \text{Span} (\delta^1 - \delta^2, \dots, \delta^1 - \delta^g, \gamma^1, \dots, \gamma^g), \\ (W^\infty)_i &= H^1(\overline{X}_{t_0}^k, \mathbb{Q}), \quad \text{für } i > 1. \end{aligned}$$

Die Limes-Hodge-Filtrierung ist nach Korollar 2.3.4 gegeben durch den Zeilenraum der „entwisteten“ Periodenmatrix  $(\mathbf{1}_g, \tilde{Z}(t))$  in  $t = 0$ . Man erhält somit:

$$\begin{aligned} (F_\infty)^0 &= \text{Span} (\delta^1, \dots, \delta^g, \gamma^1, \dots, \gamma^g), \\ (F_\infty)^1 &= \text{Span} \left( \delta^1 + \sum_{j=1}^g \tilde{Z}_{1j}(0) \gamma^j, \dots, \delta^g + \sum_{j=1}^g \tilde{Z}_{gj}(0) \gamma^j \right). \end{aligned}$$

Hierdurch kann nun die Limes-Hodge-Struktur bestimmt werden.

**2.4.6 Korollar.** Die Limes-MHS  $(H^1(\overline{X}_{t_0}^k, \mathbb{Q}), W^\infty, F_\infty)$  mit Gewichten  $0, 1, 2$  ist für gerades  $k$  vom Typ  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  und  $(1, 1)$  und für ungerades  $k$  vom Typ  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$ .

*Beweis.* Sei  $H := H^1(X_t, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$ . Nach Satz 2.3.5 ist  $(H^1(\overline{X}_t^k, \mathbb{Q}), W^\infty, F_\infty)$  eine Limes-MHS, und die graduierten Anteile der gemischten Hodge-Struktur  $\text{Gr}_i^{W^\infty} H$ ,  $i = 0, 1, 2$  sind für gerades  $k$  definiert durch

$$\begin{aligned} \text{Gr}_0^{W^\infty} H &= \text{Span} \left( \sum_{j=1}^g \gamma^j \right), \\ \text{Gr}_1^{W^\infty} H &= \text{Span} (\delta^1 - \delta^2, \dots, \delta^1 - \delta^g, \gamma^1 - \gamma^2, \dots, \gamma^1 - \gamma^g), \\ \text{Gr}_2^{W^\infty} H &= \text{Span} \left( \sum_{j=1}^g \delta^j \right). \end{aligned}$$

Somit ist die Hodge-Struktur auf dem graduierten Anteil  $\text{Gr}_0^{W^\infty} H$  vom Gewicht 0, also vom Typ  $(0, 0)$ . Die Hodge-Struktur auf dem Anteil  $\text{Gr}_1^{W^\infty}$  ist vom Gewicht 1, und damit vom Typ  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$ . Aufgrund der Gleichheit

$$(F_\infty)^1 \text{Gr}_2^{W^\infty} H = \text{Gr}_2^{W^\infty} H = \overline{(F_\infty)^1} \text{Gr}_2^{W^\infty} H$$

ist die Hodge-Struktur auf  $\text{Gr}_2^{W^\infty}$  vom Typ  $(1, 1)$ .

Für ungerades  $k$  erhalten wir für die graduierten Anteile:

$$\mathrm{Gr}_0^{W^\infty} H = 0,$$

$$\mathrm{Gr}_1^{W^\infty} H = H,$$

$$\mathrm{Gr}_2^{W^\infty} H = 0$$

und die Limes-MHS ist somit eine reine Hodge-Struktur vom Gewicht 1. □

# 3 Kompaktifizierung einer (semi-)lokalen Faserung einer isolierten Singularität

In diesem Kapitel schränken wir den Totalraum einer Familie von ebenen projektiven algebraischen Kurven soweit ein, dass er bis auf einen Punkt glatt ist.

Um nun auf den Nachbarfasern der singulären Faser eine reine bzw. gemischte Hodge-Struktur zu definieren und somit über den Limes einer Variation dieser reinen bzw. gemischten Hodge-Strukturen die singuläre Faser zu beschreiben, muss der Totalraum noch faserweise „algebraisiert“ werden, welches im zweiten Teil dieses Kapitels geschieht.

## 3.1 (Semi-)lokale Faserung einer isolierten Singularität

Sei im Folgenden  $f(x, t)$  ein Polynom in zwei Variablen, welches sich nicht als  $h(t) \cdot \tilde{f}(x, t)$ ,  $h(t)$  nicht konstant schreiben lässt, so dass mit der Hyperfläche

$$X := V(y^2 - f(x, t)) \subset \mathbb{C}^3 \tag{3.1}$$

die Projektionsabbildung

$$\text{pr}_t : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y, t) \mapsto t$$

nur isolierte Singularitäten besitzt. Hierbei kann es natürlich sein, dass die Menge der Raumsingularitäten von  $X$

$$X_{\text{sing}} = \{(x, y, t) \in X \mid X \text{ bei } (x, y, t) \text{ singulär}\}$$

kleiner ist als die Menge der kritischen Punkte  $C_{\text{pr}_t}$  von  $\text{pr}_t$ . Weiter definieren wir mit  $X_t := (\text{pr}_t)^{-1}(t)$  für die Überlagerung

$$\text{pr}_x : X_t \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto (x)$$

den Verzweigungsort

$$B := \{(x, y, t) \in X \mid (x, y) \text{ ist Verzweigungspunkt von } X_t \\ \text{bzgl. der Überlagerung } \text{pr}_x\}$$

und für  $Y \subset X$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$  die Teilmengen

$$Y_{|x|<\delta} = \{(x, y, t) \in Y \mid |x| < \delta\},$$

$$Y_{|x|\leq\delta} = \{(x, y, t) \in Y \mid |x| \leq \delta\}$$

und

$$Y_{|x|=\delta} = \{(x, y, t) \in Y \mid |x| = \delta\}.$$

Sei

$$\Delta = \Delta_\eta(0) := \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \eta\}, \quad \Delta^* := \Delta - \{0\}$$

die Kreisscheibe bzw. die punktierte Kreisscheibe vom Radius  $\eta$  um 0,

$$\mathcal{X}_{\eta,\delta} = \text{pr}_t^{-1}(\Delta)_{|x|<\delta}, \quad \overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta} = \text{pr}_t^{-1}(\Delta)_{|x|\leq\delta}, \quad \partial\mathcal{X}_{\eta,\delta} = \text{pr}_t^{-1}(\Delta)_{|x|=\delta}$$

und analog

$$\mathcal{X}_{\eta,\delta}^* = \text{pr}_t^{-1}(\Delta^*)_{|x|<\delta}, \quad \overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}^* = \text{pr}_t^{-1}(\Delta^*)_{|x|\leq\delta}, \quad \partial\mathcal{X}_{\eta,\delta}^* = \text{pr}_t^{-1}(\Delta^*)_{|x|=\delta}.$$

Um zu zeigen, dass  $\text{pr}_t|_{\mathcal{X}_{\eta,\delta}^*} : \mathcal{X}_{\eta,\delta}^* \rightarrow \Delta^*$  ein lokal triviales  $C^\infty$ -Faserbündel ist, benötigen wir noch folgenden Satz.

**3.1.1 Satz (Ehresmann'scher Faserungssatz, vgl. [Boh86], 3.1.).** *Es seien  $M, N$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten.  $M$  besitze einen Rand  $\partial M$ ,  $\partial N$  sei leer und  $N$  sei zusammenhängend. Weiter sei  $f : M \rightarrow N$  eine eigentliche  $C^\infty$ -Submersion, derart dass auch  $f|_{\partial M}$  eine Submersion ist.*

*Dann sind  $f$  und  $f|_{M-\partial M}$  lokal triviale  $C^\infty$ -Faserbündel.*

**3.1.2 Lemma.** *Es gibt ein  $\delta \in \mathbb{R}$  mit  $C_{\text{pr}_t} \cap \text{pr}_t^{-1}(0)_{|x|\leq\delta} = (0, 0, 0)$  und ein  $\eta \in \mathbb{C}$ , so dass*

$$(i) \quad C_{\text{pr}_t} \cap \mathcal{X}_{\eta,\delta} = (0, 0, 0) \quad \text{und}$$

$$(ii) \quad \text{pr}_t|_{\mathcal{X}_{\eta,\delta}^*} : \mathcal{X}_{\eta,\delta}^* \rightarrow \Delta^* \quad \text{ein lokal triviales } C^\infty\text{-Faserbündel ist.}$$

*Beweis.* (i) Da  $X$  nach Voraussetzung nur isolierte Singularitäten besitzt, kann man zu einem geeigneten  $\delta$  ein  $\eta$  finden, so dass (i) erfüllt ist.

(ii) Nach (i) ist  $\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}^*$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, deren Fasern  $(\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}^*)_t$  kompakt sind, wodurch  $\text{pr}_t|_{\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}^*} : \overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}^* \rightarrow \Delta^*$  eine eigentliche Submersion ist. Um die Submersion auch auf dem Rand  $\partial\mathcal{X}_{\eta,\delta}^*$  zu gewährleisten, muss  $B \cap \partial\mathcal{X}_{\eta,\delta}^* = \emptyset$  gelten. Dies lässt sich wiederum durch geeignete Verkleinerung von  $\delta$  und  $\eta$  realisieren. Nach Satz 3.1.1 erhalten wir eine Faserung als Paar  $(\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}^*, \partial\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}^*)$ , wodurch auch  $f|_{\mathcal{X}_{\eta,\delta}^*}$  eine differenzierbare Faserungsabbildung ist. □



**3.1.3 Bemerkung.** Wir wollen nun  $\delta$  und  $\eta$  so wählen, dass möglichst viele Verzweigungspunkte der Fasern beim Abschneidungsprozess erhalten bleiben. Hierzu definieren wir die Mengen

$$B_0 := \text{pr}_t^{-1}(0) \cap B$$

$$C_0 := \text{pr}_t^{-1}(0) \cap (C_{\text{pr}_t} - (0, 0, 0))$$

und unterscheiden nun die Fälle

$$(i) \quad B_0 \neq \emptyset \wedge C_0 = \emptyset \quad \text{und}$$

$$(ii) \quad B_0 \neq \emptyset \wedge C_0 \neq \emptyset.$$

In (i) wählen wir  $\delta$  so, dass

$$\max\{|x| \mid (x, y, 0) \in B_0\} < \delta,$$

und in (ii) ist  $\delta$  bestimmt durch

$$\max\{|x| \mid (x, y, 0) \in B_0 \cap \text{pr}_t^{-1}(0) \mid_{|x| < \delta}\} < \delta < \tilde{\delta} := \min\{|x| \mid (x, y, 0) \in C_0\}.$$

Im nächsten Schritt wählen wir  $\eta$  so, dass Lemma 3.1.2 noch erfüllt ist.

## 3.2 Kompaktifizierung

Auf den Fasern der lokalen bzw. der semilokalen Fälle kann nicht ohne weiteres eine reine bzw. gemischte Hodge-Struktur definiert werden. Ähnlich wie bei [Hom90] gibt es einen starken Deformationsretrakt von einer Familie von endlich punktierten kompakten Riemannschen Flächen.

**3.2.1 Satz.** Es seien  $\delta, \eta$  wie in Bemerkung 3.1.3 gewählt,  $f(x, t)$  das Polynom aus (3.1) und  $g(x, t) \cdot h(x, t)$  eine Zerlegung von  $f(x, t)$ , so dass die Nullstellen von  $f(x, t)$ , welche in  $\bar{\mathcal{X}}_{\eta, \delta}$  liegen, genau die Nullstellen von  $g(x, t)$  sind. Weiter sei  $\mathcal{Y}_\eta = V(y^2 - g(x, t)) \mid_{|t| < \eta}$ ,  $\text{pr}'_t : \mathcal{Y}_\eta \rightarrow \Delta$  die Projektionsabbildung. Nach Wahl eines Zweiges der Wurzel definieren wir noch die folgende Abbildung:

$$j : \bar{\mathcal{X}}_{\eta, \delta} \rightarrow j(\bar{\mathcal{X}}_{\eta, \delta}) \subset \mathcal{Y}_\eta, \quad (x, y, t) \mapsto \left( x, \frac{1}{\sqrt{h(x, t)}} \cdot y, t \right),$$

welche offensichtlich ein Homöomorphismus ist. Dann besteht die Menge der isolierten Singularitäten von  $\text{pr}'_t$  nur noch aus dem Punkt  $(0, 0, 0)$ . Außerdem gibt es eine bezüglich  $\text{pr}'_t$  fasertreue starke Deformationsretraktion von  $\mathcal{Y}_\eta$  auf  $j(\bar{\mathcal{X}}_{\eta, \delta})$ .

*Beweis.* Nach Definition besitzt  $g(x, t)$  nur einfache Nullstellen außerhalb von  $(0, 0, 0)$ , wodurch die Abbildung  $\text{pr}'_t \mid_{\mathcal{Y}_\eta^*} : \mathcal{Y}_\eta^* \rightarrow \Delta$  glatt ist. Hierbei ist  $\mathcal{Y}_\eta^* = \mathcal{Y}_\eta - \{(0, 0, 0)\}$ .

$\mathcal{Y}_\eta - j(\mathcal{X}_{\eta,\delta})$  ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand  $j(\partial\mathcal{X}_{\eta,\delta})$  und

$$\alpha : \mathcal{Y}_\eta - j(\mathcal{X}_{\eta,\delta}) \rightarrow \{|x| \geq \delta\} \times \Delta$$

eine zweiblättrige, unverzweigte und unbegrenzte Überlagerung. Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden:

(i)  $\mathcal{Y}_\eta - j(\mathcal{X}_{\eta,\delta})$  ist nicht zusammenhängend:

Sei  $\text{pr}_2$  die Projektionsabbildung von  $\{|x| \geq \delta\} \times \Delta$  auf die zweite Komponente. Dann ist jede Zusammenhangskomponente biholomorph zu  $\{|x| \geq \delta\} \times \Delta$ , und die bezüglich  $\text{pr}_2$  fasertreuen starken Deformationsretrakte

$$r_1, r_2 : \{|x| \geq \delta\} \times \Delta \rightarrow \{|x| = \delta\} \times \Delta$$

liefern einen bezüglich  $\text{pr}'_t$  fasertreuen starken Deformationsretrakt

$$\mathcal{Y}_\eta - j(\mathcal{X}_{\eta,\delta}) \rightarrow j(\partial\mathcal{X}_{\eta,\delta}).$$

(ii)  $\mathcal{Y}_\eta - j(\mathcal{X}_{\eta,\delta})$  ist zusammenhängend:

Sei  $\text{pr}_2$  nun die Projektionsabbildung von  $\{|x| \geq \sqrt{\delta}\} \times \Delta$  auf die zweite Komponente. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung

$$\varphi : \mathcal{Y}_\eta - j(\mathcal{X}_{\eta,\delta}) \rightarrow \{|x| \geq \sqrt{\delta}\} \times \Delta,$$

so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_\eta - j(\mathcal{X}_{\eta,\delta}) & \xrightarrow{\varphi} & \{|x| \geq \sqrt{\delta}\} \times \Delta \\ & \searrow (x,t) & \swarrow \alpha \\ & & \{|x| \geq \delta\} \times \Delta \end{array}$$

kommutiert. Der bezüglich  $\text{pr}_2$  fasertreue starke Deformationsretrakt

$$\{|x| \geq \sqrt{\delta}\} \times \Delta \rightarrow \{|x| = \sqrt{\delta}\} \times \Delta$$

liefert einen bezüglich  $\text{pr}'_t$  fasertreuen starken Deformationsretrakt

$$\mathcal{Y}_\eta - j(\mathcal{X}_{\eta,\delta}) \rightarrow j(\partial\mathcal{X}_{\eta,\delta}).$$

□

Wir wollen nun zeigen, dass

$$R^m(\mathrm{pr}_t |_{\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}})_*(\mathbb{Z}_{\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}}) \cong R^m(\mathrm{pr}'_t |_{\mathcal{Y}_\eta})_*(\mathbb{Z}_{\mathcal{Y}_\eta}).$$

Hierzu benötigen wir folgendes Homotopieaxiom:

**3.2.2 Lemma (Homotopieaxiom, vgl. [Ham74], Lemma 1.10).** *Seien  $Z$  und  $Z'$  topologische Räume und seien  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{S}'$  Garben auf  $Z$  bzw.  $Z'$ . Für  $j = 0, 1$  seien  $h_j : Z \rightarrow Z'$  stetige Abbildungen und  $H_j : h_j^{-1}\mathfrak{S}' \rightarrow \mathfrak{S}$  Garbenhomomorphismen. Sei  $p : Z \times [0, 1] \rightarrow Z$  die kanonische Projektion und für  $\tau \in [0, 1]$  sei  $i_\tau : Z \rightarrow Z \times [0, 1]$  definiert durch  $i_\tau(z) = (z, \tau)$ . Sind  $H_0$  und  $H_1$  homotop, d.h. es gibt eine stetige Abbildung  $\chi : Z \times [0, 1] \rightarrow Z'$  und einen Homomorphismus  $H : \chi^{-1}\mathfrak{S}' \rightarrow p^{-1}\mathfrak{S}$  mit  $\chi \circ i_j = h_j$  und  $i_j^*(H) = H_j$  für  $j = 0, 1$ , so induzieren  $H_0$  und  $H_1$  für jedes  $m \in \mathbb{Z}$  den gleichen Homomorphismus*

$$H^m(Z', \mathfrak{S}') \rightarrow H^m(Z, \mathfrak{S}).$$

Gibt es darüber hinaus stetige Abbildungen  $g$  und  $g'$  von  $Z$  bzw.  $Z'$  in einen topologischen Raum  $S$  derart, dass die Homotopie fasertreu ist, so induzieren  $H_0$  und  $H_1$  für jedes  $m \in \mathbb{Z}$  den gleichen Garbenhomomorphismus

$$R^m g'_* \mathfrak{S}' \rightarrow R^m g_* \mathfrak{S}.$$

**3.2.3 Korollar.** *Für alle  $m \in \mathbb{Z}$  gilt:*

$$R^m(\mathrm{pr}_t |_{\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}})_*(\mathbb{Z}_{\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}}) \cong R^m(\mathrm{pr}'_t |_{\mathcal{Y}_\eta})_*(\mathbb{Z}_{\mathcal{Y}_\eta}).$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Aussage:

$$R^m(\mathrm{pr}_t |_{j(\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})})_*(\mathbb{Z}_{j(\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})}) \cong R^m(\mathrm{pr}_t |_{\mathcal{Y}_\eta})_*(\mathbb{Z}_{\mathcal{Y}_\eta}).$$

Nach Satz 3.2.1 gibt es eine bezüglich  $\mathrm{pr}'_t$  fasertreue starke Deformationsretraktion von  $\mathcal{Y}_\eta$  auf  $j(\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})$ , also eine Abbildung  $r : \mathcal{Y}_\eta \rightarrow j(\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})$ , so dass  $\mathrm{id}_{\mathcal{Y}_\eta} \sim i \circ r$  und  $\mathrm{id}_{j(\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})} = r \circ i$ . Hierbei ist  $i : j(\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}) \rightarrow \mathcal{Y}_\eta$  die Inklusionsabbildung. Nach Lemma 3.2.2 induzieren die Abbildungen  $\mathrm{id}$  und  $i \circ r$  den gleichen Garbenhomomorphismus

$$R^m(\mathrm{pr}'_t |_{\mathcal{Y}_\eta})_*(\mathbb{Z}_{\mathcal{Y}_\eta}) \rightarrow R^m(\mathrm{pr}'_t |_{j(\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})})_*(\mathbb{Z}_{j(\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})}).$$

Wir erhalten somit das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R^m(\mathrm{pr}'_t |_{\mathcal{Y}_\eta})_*(\mathbb{Z}_{\mathcal{Y}_\eta}) & \xrightarrow{\mathrm{id}=(i \circ r)^*} & R^m(\mathrm{pr}'_t |_{\mathcal{Y}_\eta})_*(\mathbb{Z}_{\mathcal{Y}_\eta}) \\ & \searrow i^* & \nearrow r^* \\ & R^m(\mathrm{pr}_t |_{j(\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})})_*(\mathbb{Z}_{j(\overline{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})}) & \end{array}$$

wodurch die Abbildung  $i^*$  injektiv ist. Die Surjektivität von  $i^*$  erhalten wir wegen

$id_{j(\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})} = r \circ i$  über das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R^m(\mathrm{pr}'_t|_{j(\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})})_*(\mathbb{Z}_{j(\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})}) & \xrightarrow{id=(r \circ i)^*} & R^m(\mathrm{pr}'_t|_{j(\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})})_*(\mathbb{Z}_{j(\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})}) \\ & \searrow r^* & \nearrow i^* \\ & R^m(\mathrm{pr}'_t|_{\mathcal{Y}_\eta})_*(\mathbb{Z}_{\mathcal{Y}_{\eta,\delta}}) & \end{array}$$

und somit den Isomorphismus

$$R^m(\mathrm{pr}'_t|_{j(\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})})_*(\mathbb{Z}_{j(\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})}) \cong R^m(\mathrm{pr}'_t|_{\mathcal{Y}_\eta})_*(\mathbb{Z}_{\mathcal{Y}_\eta}).$$

Es bleibt zu zeigen:

$$R^m(\mathrm{pr}_t|_{\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}})_*(\mathbb{Z}_{\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}}) \cong R^m(\mathrm{pr}'_t|_{j(\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})})_*(\mathbb{Z}_{j(\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})}).$$

Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta} & \xrightarrow{j} & j(\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}) \\ & \searrow \mathrm{pr}_t & \swarrow \mathrm{pr}'_t \\ & \Delta & \end{array}$$

Da die Abbildung  $j : \bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta} \rightarrow j(\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})$  ein Homöomorphismus ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} R^m(\mathrm{pr}_t|_{\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}})_*(\mathbb{Z}_{\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}}) &= R^m(\mathrm{pr}'_t|_{j(\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})} \circ j)_*(\mathbb{Z}_{\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}}) = R^m(\mathrm{pr}'_t|_{j(\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})})_* \circ j_*(\mathbb{Z}_{\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta}}) \\ &= R^m(\mathrm{pr}'_t|_{j(\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})})_*(\mathbb{Z}_{j(\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta})}), \end{aligned}$$

wodurch der zweite Teil der Behauptung bewiesen ist.  $\square$

Mit diesem Resultat können wir nun die regulären Fasern der Familie  $\bar{\mathcal{X}}_{\eta,\delta} \rightarrow \Delta$  simultan mit gemischten Hodge-Strukturen versehen, um dann im Limes eine gemischte Hodge-Struktur in einer kleinen Umgebung der singulären Faser zu beschreiben. Dieses wird im folgenden Kapitel untersucht.

## 4 Der punktierte Fall

Wir betrachten die Familie  $\pi : X \rightarrow \Delta$  von projektiven Kurven  $X_t := \pi^{-1}(t)$  aus Kapitel 2. Für  $i = 1, \dots, r$  seien  $p_i : \Delta \rightarrow X$  holomorphe Schnitte (d.h.  $\pi \circ p_i = \text{id}_\Delta$ ) mit  $p_i(t) \neq p_j(t)$  für alle  $t \in \Delta$ . Mit  $P_i := p_i(\Delta)$  ist  $P := \bigcup_{i=1}^r P_i$  ein glatter Divisor in  $X$ , welcher jede Faser  $X_t$ ,  $t \in \Delta$  transversal schneidet. Die Abbildung  $\pi' : X' \rightarrow \Delta$  bezeichne die Einschränkung von  $\pi$  auf  $X' = X - P$ . Dann sind die Fasern  $X'_t := \pi'^{-1}(t)$  projektive Kurven, aus denen eine endliche Punktmenge  $P_t = \{P_{1,t}, \dots, P_{r,t}\}$ , mit  $P_{i,t} := P_i \cap X_t$ ,  $i = 1, \dots, r$  entfernt wurde.

Nach Kapitel 2 trägt für  $t \in \Delta^*$  die Kohomologie  $H^m(X_t, \mathbb{Z})$  der Faser  $X_t$  eine reine Hodge-Struktur vom Gewicht  $m$ . Da die Faser  $X'_t$  nicht kompakt ist, kann man zunächst nichts über die Existenz einer reinen Hodge-Struktur vom Gewicht  $m$  auf der Kohomologiegruppe  $H^m(X'_t, \mathbb{Z})$  aussagen, wohl aber über die Existenz einer gemischten Hodge-Struktur auf  $H^m(X'_t, \mathbb{Z})$ . Wie auch schon im Kapitel 2 interessiert uns der Limes der Variation der gemischten Hodge-Struktur  $(R^m \pi'_* \mathbb{Q}_{X'}, \mathcal{W}, \mathcal{F}, \nabla, \mathcal{Q})$ .

Um die Limes-MHS dieser Familie in der Nähe der singulären Faser zu beschreiben, wird in diesem Kapitel eine Gewichtsfiltrierung des nilpotenten Anteils der Monodromie relativ zu der durch die Punktierung gegebenen Gewichtsfiltrierung berechnet. Im ersten Schritt wird also die Gewichtsfiltrierung der Punktierung bestimmt, im zweiten Schritt die Gewichtsfiltrierung gegeben durch die Monodromie und im letzten Schritt die relative Gewichtsfiltrierung als Faltung der beiden ersten.

Analog zu Kapitel 2 setzen wir auch hier voraus, dass für den nilpotenten Anteil  $\mathcal{N}^*$  der Monodromietransformation der Kohomologie

$$(\mathcal{N}^*)^2 = \mathbf{0}$$

gelte.

### 4.1 Limes-Gewichtsfiltrierung $\dot{W}^\infty$

Sei  $X$  eine glatte projektive Varietät der Dimension  $n$  über  $\mathbb{C}$  und  $Y$  ein glatter ampler Divisor auf  $X$ . Über die exakte Sequenz des Raumpaares  $(X, Y)$  erhält man die folgende Exaktheit.

**4.1.1 Lemma** (vgl. [Usu84], Lemma (1.3)). *Man hat eine Gysin-Sequenz*

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \underbrace{H^{n-2}(Y, \mathbb{Z})}_{\cong H_Y^n(X, \mathbb{Z})} \rightarrow H^n(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(X - Y, \mathbb{Z}) \\ \rightarrow \underbrace{H^{n-1}(Y, \mathbb{Z})}_{\cong H_Y^{n+1}(X, \mathbb{Z})} \rightarrow H^{n+1}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Dieses Lemma können wir nun für  $t \in \Delta^*$  auf das Raumpaar  $(X_t, P_t)$  anwenden.

**4.1.2 Korollar.** *Man hat eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow H^1(X_t, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X'_t, \mathbb{Z}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (4.1)$$

*Beweis.* Nach Lemma 4.1.1 ist die Sequenz

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \underbrace{H^{-1}(P_t, \mathbb{Z})}_{=0} \rightarrow H^1(X_t, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X'_t, \mathbb{Z}) \\ \rightarrow \underbrace{H^0(P_t, \mathbb{Z})}_{\cong \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}} \rightarrow \underbrace{H^2(X_t, \mathbb{Z})}_{\cong \mathbb{Z}} \rightarrow \underbrace{H^2(X'_t, \mathbb{Z})}_{=0} \rightarrow \underbrace{H^1(P_t, \mathbb{Z})}_{=0} \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

exakt und somit auch (4.1). □

**4.1.3 Lemma** (vgl. [CMSP03], 3.2 – 3.3). *Aus der exakten Residuum-Sequenz*

$$0 \longrightarrow \Omega_{X_t}^1 \longrightarrow \Omega_{X_t}^1(\log P_t) \xrightarrow{\text{Res}} \mathcal{O}_{P_t} \longrightarrow 0$$

*erhält man die folgende Hodge-Filtrierung*

$$\begin{aligned} F^0(H^1(X'_t, \mathbb{C})) &= H^1(X'_t, \mathbb{C}), \\ F^1(H^1(X'_t, \mathbb{C})) &= H^0(X_t, \Omega_{X_t}^1(\log P_t)), \\ F^2(H^1(X'_t, \mathbb{C})) &= 0. \end{aligned}$$

**4.1.4 Bemerkung.** *Für  $t \in \Delta^*$  definieren wir die Gewichtsfiltrierung  $W$  auf  $H^1(X'_t, \mathbb{Q})$  durch*

$$\begin{aligned} W_0(H^1(X'_t, \mathbb{Q})) &= 0, \\ W_1(H^1(X'_t, \mathbb{Q})) &= H^1(X_t, \mathbb{Q}), \\ W_2(H^1(X'_t, \mathbb{Q})) &= H^1(X'_t, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Sei von nun an  $\delta_1, \dots, \delta_{2g+r-1}$  eine Basis von  $H_1(X'_t, \mathbb{Z})$  gemäß Lemma 1.2.6,  $\delta^1, \dots, \delta^{2g+r-1}$  eine hierzu duale Basis von  $H^1(X'_t, \mathbb{Q})$  und  $\omega_1, \dots, \omega_{g+r-1}$  eine Basis von  $\Gamma(X_t, \Omega_{X_t}^1(\log P_t))$ . Hierdurch ist für  $t \in \Delta^*$  die Periodenmatrix von der Gestalt

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_g & 0 & Z(t) \\ 0 & \mathbb{1}_{r-1} & C(t) \end{pmatrix},$$

mit  $Z(t) = {}^t Z(t)$ ,  $\text{Im } Z(t) > 0$  und

$$C(t) = \begin{pmatrix} Q_{i,t} \\ 2\pi\sqrt{-1} \int_{Q_{i+1,t}} p^* \omega_j(t) \end{pmatrix}_{\substack{i=1, \dots, r-1 \\ j=1, \dots, g}},$$

wobei  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  die universelle Überlagerung von  $X$ ,  $P$  das Fundamentalpolygon und  $Q_{i,t} := (p|_P)^{-1} P_{i,t}$ .

Um nun die Limes-MHS einzuführen, müssen wir die Gewichtsfiltrierung  $W$  der Punktierung aus Bemerkung 4.1.4 und die Monodromiegewichtsfiltrierung aus Korollar 2.2.2 durch Faltung in eine Gewichtsfiltrierung umformen. Die Existenz dieser relativen Gewichtsfiltrierung ist nur dann gewährleistet, wenn für die Gewichtsfiltrierung  $W$  der regulären Fasern und für den nilpotenten Endomorphismus der Monodromie bestimmte Bedingungen gelten. Die Informationen aus diesem Abschnitt stammen aus [SZ85].

**4.1.5 Definition (Morphismus filtrierter Vektorräume).** *Es seien  $V$  und  $V'$  Vektorräume,  $W$  und  $W'$  Filtrierungen auf  $V$  bzw.  $V'$ . Eine lineare Abbildung  $\phi : V \rightarrow V'$  ist ein Morphismus von filtrierten Vektorräumen, wenn gilt:*

$$\phi(W_k) \subset W'_k.$$

*Notation:*  $\phi : (V, W) \rightarrow (V', W')$ .

**4.1.6 Bemerkung.** *Ein Morphismus von filtrierten Vektorräumen  $\phi : (V, W) \rightarrow (V', W')$  induziert folgende lineare Abbildungen:*

$$\phi_k : W_k \longrightarrow W'_k,$$

$$\text{Gr}_k \phi : \text{Gr}_k^W V \longrightarrow \text{Gr}_k^{W'} V'.$$

**4.1.7 Definition (strikt Morphismus filtrierter Vektorräume).** *Ein Morphismus von filtrierten Vektorräumen  $\phi : (V, W) \rightarrow (V', W')$  heißt strikt kompatibel mit der Filtrierung, falls*

$$\phi(V) \cap W'_l = \phi(W_l),$$

bzw.

$$\phi^{-1}(W'_l) = W_l + \text{Ker } \phi.$$

Eine einfache aber für uns wichtige Folgerung liefert das folgende Korollar.

**4.1.8 Korollar.** *Sei  $\phi$  ein Endomorphismus eines filtrierten Vektorraums  $V$  mit Filtrierung  $0 = W_0 \subset \dots \subset W_n = V$ , so dass  $\phi(V) = \phi(W_1)$ .*

*Dann ist  $\phi : (V, W) \rightarrow (V, W)$  strikt.*

*Beweis.* Für  $i = 0, \dots, n$  ist  $\phi(V) \cap W_i = \phi(W_i)$  zu zeigen.

Für  $i=0$  ist die Gleichung trivialerweise erfüllt. Da

$$\phi(V) = \phi(W_1) \subset W_1$$

nach Definition gelten muss, ist die Gleichung auch für  $i \neq 0$  erfüllt.  $\square$

Sei  $\mathcal{N}^*$  der nilpotente Endomorphismus der Monodromietransformation der Kohomologie. Dann gilt:

**4.1.9 Lemma.** *Für jedes  $l \in \mathbb{N}_+$  ist  $(\mathcal{N}^*)^l$  strikt kompatibel mit der Filtrierung  $W$  aus Bemerkung 4.1.4.*

*Beweis.* Sei  $t \in \Delta^*$  und  $\delta_1, \dots, \delta_{2g+r-1}$  wiederum eine Basis von  $H_1(X'_t, \mathbb{Q})$  gemäß Lemma 1.2.6. Nach eventueller Verkleinerung der Kreisscheibe  $\Delta^*$  erkennt man, dass durch die Monodromietransformation der Homologie von  $H_1(X'_t, \mathbb{Q})$  die Zyklen der Punktierung  $\delta_{g+1}, \dots, \delta_{g+r-1}$  identisch abgebildet werden. Außerdem wird das Bild der Zyklen  $\delta_1, \dots, \delta_g, \delta_{g+r}, \dots, \delta_{2g+r-1}$  unter der Monodromietransformation auch von diesen Zykeln wieder erzeugt. Es gilt also für  $i = 1, \dots, r-1$

$$\mathcal{M}(\delta_{g+i}) = \delta_{g+i},$$

sowie für  $j = 1, \dots, g, g+r, \dots, 2g+r-1$

$$\mathcal{M}(\delta_j) \in \text{Span}(\delta_1, \dots, \delta_g, \delta_{g+r}, \dots, \delta_{2g+r-1})$$

und somit für alle  $l \in \mathbb{N}_+$ ,  $i = 1, \dots, r-1$  und  $j = 1, \dots, g, g+r, \dots, 2g+r-1$

$$(\mathcal{N}^*)^l(\delta^{g+i}) = 0 \quad \text{und} \quad (\mathcal{N}^*)^l(\delta^j) \in \text{Span}(\delta^1, \dots, \delta^g, \delta^{g+r}, \dots, \delta^{2g+r-1}).$$

Schließlich erhalten wir:

$$(\mathcal{N}^*)^l(H^1(X'_t, \mathbb{Q})) = (\mathcal{N}^*)^l(H^1(X_t, \mathbb{Q})) = (\mathcal{N}^*)^l(W_1 H^1(X'_t, \mathbb{Q})).$$

Nach Korollar 4.1.8 ist  $(\mathcal{N}^*)^l$  strikt kompatibel mit der Filtrierung  $W$ .  $\square$



**4.1.10 Definition.** Eine Gewichtsfiltrierung von  $N$  relativ zu  $W$  ist eine Filtrierung  $M$  von  $V$ , so dass

$$(i) \quad NM_i \subset M_{i-2},$$

$$(ii) \quad M \operatorname{Gr}_k^W V = {}^k M.$$

Hierbei bezeichnet  ${}^k M$  die Gewichtsfiltrierung  $M(\operatorname{Gr}_k N)$  (vgl. Proposition 2.2.1) auf  $\operatorname{Gr}_k^W V$ .

Sei  $L(N)$  die Gewichtsfiltrierung des nilpotenten Endomorphismus  $N$  aus Proposition 2.2.1, dann gilt nach [SZ85], 2.11 die folgende Aussage:

**4.1.11 Proposition.** Es sei für jedes  $l \in \mathbb{N}_+$ ,  $N^l$  strikt kompatibel mit  $W$ . Dann existiert die relative Gewichtsfiltrierung und ist gegeben durch

$$M = L(N) * W.$$

Wir können nun für die Familie  $X'$  die Limes-Gewichtsfiltrierung definieren. Hierzu bezeichne wiederum  $W$  die Gewichtsfiltrierung aus Bemerkung 4.1.4 und  $\mathcal{N}^*$  den nilpotenten Anteil der Monodromietransformation der Kohomologie.

**4.1.12 Korollar (Limes-Gewichtsfiltrierung).** Die Filtrierung  $M = L(\mathcal{N}^*) * W$  ist eine Gewichtsfiltrierung von  $\mathcal{N}^*$  relativ zu der Filtrierung  $W$ .

$$\dot{W}^\infty := M[-1]$$

wird Limes-Gewichtsfiltrierung der Familie  $\pi : X' \rightarrow \Delta$  genannt.

*Beweis.* Nach Lemma 4.1.9 ist für jedes  $l \in \mathbb{N}_+$  der Endomorphismus  $(\mathcal{N}^*)^l$  strikt kompatibel mit der Filtrierung  $W$  und nach Proposition 4.1.11 existiert somit die relative Gewichtsfiltrierung in obiger Form.  $\square$

Nach Definition ist  $\dot{W}^\infty$  gegeben durch  $\dot{W}_i^\infty = \sum_{j+k=i} W_{j-1} \cap L(\mathcal{N}^*)_k$ . Wendet man nun diese Filtrierung auf den Vektorraum  $H^1(X'_t, \mathbb{Q})$  an und benutzt, dass

$$\operatorname{Im} \mathcal{N}^* \subset H^1(X_t, \mathbb{Q}) \cap \operatorname{Ker} \mathcal{N}^* \subset H^1(X_t, \mathbb{Q})$$

und

$$\operatorname{Ker} \mathcal{N}^* + H^1(X_t, \mathbb{Q}) = H^1(X'_t, \mathbb{Q}),$$

erhält man die Unterräume

$$\dot{W}_i^\infty (H^1(X'_t, \mathbb{Q})) = 0, \quad i < 0,$$

$$\dot{W}_0^\infty (H^1(X'_t, \mathbb{Q})) = \text{Im } \mathcal{N}^*,$$

$$\dot{W}_1^\infty (H^1(X'_t, \mathbb{Q})) = H^1(X_t, \mathbb{Q}) \cap \text{Ker } \mathcal{N}^*,$$

$$\dot{W}_i^\infty (H^1(X'_t, \mathbb{Q})) = H^1(X'_t, \mathbb{Q}), \quad i \geq 2$$

sowie die graduierten Anteile

$$\text{Gr}_0^{\dot{W}^\infty} (H^1(X'_t, \mathbb{Q})) = \text{Im } \mathcal{N}^*,$$

$$\text{Gr}_1^{\dot{W}^\infty} (H^1(X'_t, \mathbb{Q})) = (H^1(X_t, \mathbb{Q}) \cap \text{Ker } \mathcal{N}^*) / \text{Im } \mathcal{N}^*,$$

$$\text{Gr}_2^{\dot{W}^\infty} (H^1(X'_t, \mathbb{Q})) = H^1(X'_t, \mathbb{Q}) / (H^1(X_t, \mathbb{Q}) \cap \text{Ker } \mathcal{N}^*).$$

Wir können nun die graduierten Anteile der Filtrierungen  $\dot{W}^\infty$  und  $W^\infty$  aus Bemerkung 2.2.4 miteinander vergleichen.

**4.1.13 Bemerkung.** Für die graduierten Anteile der Filtrierungen  $W^\infty$  und  $\dot{W}^\infty$  gilt

$$\text{Gr}_0^{\dot{W}^\infty} (H^1(X'_t, \mathbb{Q})) = \text{Gr}_0^{W^\infty} (H^1(X_t, \mathbb{Q})),$$

$$\text{Gr}_1^{\dot{W}^\infty} (H^1(X'_t, \mathbb{Q})) = \text{Gr}_1^{W^\infty} (H^1(X_t, \mathbb{Q})),$$

$$\text{Gr}_2^{\dot{W}^\infty} (H^1(X'_t, \mathbb{Q})) = \text{Gr}_2^{W^\infty} (H^1(X_t, \mathbb{Q})) + \mathbb{Q}(\delta^{g+1}, \dots, \delta^{g+r-1}).$$

## 4.2 Limes Hodge-Filtrierung $\dot{F}_\infty$

Sei  $\phi : \Delta^* \rightarrow D/\Gamma$  die Periodenabbildung der Variation von graduiert-polarisierten gemischten Hodge-Strukturen  $(\mathcal{H}_\mathbb{Q}, \mathcal{W}, \mathcal{F}, \nabla, \mathcal{Q})$  zum Periodengebiet  $D/\Gamma$  mit unipotenter Monodromie. Analog zur Variation von polarisierten Hodge-Strukturen folgt aus der lokalen Liftbarkeit von  $\phi$  (vgl. Satz 1.10.3) die Existenz einer globalen Liftung  $\tilde{\phi} : U \rightarrow D$ , wodurch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & D \\ e \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^* & \xrightarrow{\phi} & D/\Gamma \end{array}$$

kommutiert. Wegen

$$\tilde{\phi}(z+1) = \mathcal{T}\tilde{\phi}(z)$$

können wir mit  $\tilde{\psi}(z) := \exp(-\mathcal{N}^*z)\tilde{\phi}(z)$  eine Abbildung

$$\tilde{\psi} : U \rightarrow D$$

unabhängig von der Monodromie definieren, welche mit  $\psi(t) := \tilde{\psi}\left(\frac{1}{2\pi i} \log t\right)$  die Abbildung

$$\psi : \Delta^* \rightarrow \check{D}$$

definiert.

**4.2.1 Definition (Limes Hodge-Filtrierung).** *Falls eine Fortsetzung von  $\psi : \Delta^* \rightarrow \check{D}$  in 0 existiert, so definieren wir*

$$\dot{F}_\infty := \lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) \in \check{D}$$

als die Limes-Hodge-Filtrierung.

Damit die Limes-MHS existiert müssen wir, anders als im kompakten Fall, noch eine Forderung an die Variation der gemischten Hodge-Strukturen stellen.

**4.2.2 Definition (zulässige Variation von MHS, vgl. [Pea01] 2.17).** *Eine Variation  $(\mathcal{H}_\mathbb{Z}, \mathcal{W}, \mathcal{F}, \nabla, \mathcal{Q})$  von graduiert-polarisierten gemischten Hodge-Strukturen mit unipotenter Monodromie heißt zulässig, falls sie folgende Bedingungen erfüllt:*

- (i) *die Gewichtsfiltrierung von  $\mathcal{N}^*$  relativ zu der Gewichtsfiltrierung  $\mathcal{W}$  existiert,*
- (ii) *die Limes Hodge-Filtrierung  $\dot{F}_\infty$  existiert.*

Damit wir für unsere Variation der gemischten Hodge-Strukturen die Zulässigkeit überprüfen können, müssen wir zunächst die Singularität auflösen, um folgende Degeneration der regulären Fasern zu erhalten.

**4.2.3 Definition (semistabile Degeneration, semistabile Degeneration von Paaren).** *Ein eigentlicher surjektiver Morphismus  $f : Y \rightarrow \Delta$  von einer algebraischen Varietät  $Y$  zur Einheitskreisscheibe heißt semistabile Degeneration, falls  $f$  folgende Bedingungen erfüllt:*

- (i)  *$f$  ist glatt über  $\Delta^*$ ,*
- (ii)  *$f^{-1}(0)$  ist ein Divisor mit normalen Überkreuzungen.*

Sei weiter  $D$  ein Divisor von  $Y$  flach über  $\Delta$ , so dass  $D \cup Y_0$  ein reduzierter Divisor mit normalen Überkreuzungen ist.

Dann heißt der Morphismus  $f : (Y, D) \rightarrow \Delta$  eine semistabile Degeneration des Paares  $(Y, D)$ .

**4.2.4 Satz (vgl. [Usu91] (3.2)).** Sei  $Y' = Y - D$ ,  $f' : Y' \rightarrow \Delta$  die Einschränkung von  $f$  auf  $Y'$ ,  $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}} = R^n f'_* \mathbb{Q}_{Y'}$  und  $\mathcal{W} = \mathcal{W}(D)[n]$ . Dann ist die VGPMHS  $(\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}, \mathcal{W}, \mathcal{F}, \nabla, \mathcal{Q})$  zulässig.

Für unserer Familie  $\pi' : X' \rightarrow \Delta$  aus dem Anfang des Kapitels erhalten wir somit die folgende Aussage.

**4.2.5 Korollar.** Die Variation von graduiert-polarisierten gemischten Hodge-Strukturen  $(R^n \pi'_* \mathbb{Q}_{X'}, \mathcal{W}, \mathcal{F}, \mathcal{Q})$  ist zulässig.

*Beweis.* Sei  $\varphi : Y' \rightarrow X'$  eine Auflösung der Singularität von  $X'$ , d.h.  $\varphi$  induziert eine biholomorphe Abbildung  $Z' - \varphi^{-1}(0) \rightarrow X' - \{0\}$  und  $\varphi^{-1}(0)$  ist ein Divisor mit normalen Überkreuzungen in  $Y'$ , wodurch  $X' - \pi'^{-1}(0) = Y' - (\pi' \circ \varphi)^{-1}(0)$ . Die Einschränkung von  $\pi'$  ist glatt, also auch flach auf dem Divisor  $P$  und somit auch  $\pi' \circ \varphi$  auf  $\varphi^{-1}(P)$ . Nach Satz 4.2.4 ist die Variation von graduiert-polarisierten gemischten Hodge-Strukturen  $(R^n \pi'_* \mathbb{Q}_{X'}, \mathcal{W}, \mathcal{F}, \mathcal{Q})$  zulässig.  $\square$

Nachdem die Existenz der Limes-Hodge-Filtrierung  $\dot{F}_{\infty}$  durch die Zulässigkeit unserer Variation gesichert ist, geben wir nun eine explizite Berechnung über die in Kapitel 1 konstruierte Periodenmatrix auf einer punktierten Riemannschen Fläche dieser Filtrierung an.

**4.2.6 Satz.** Es existiert eine Basis  $\delta_1, \dots, \delta_{2g+r-1}$  von  $H_1(X'_t, \mathbb{Z})$ , wobei die Schnittmatrix  $Q$ , die Monodromiematrix  $M$  und die Periodenmatrix  $\Omega(t)$  von der Gestalt

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbb{1}_g \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathbb{1}_g & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_g & 0 & N_1 \\ 0 & \mathbb{1}_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_g \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Omega(t) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_g & 0 & Z(t) \\ 0 & \mathbb{1}_{r-1} & C(t) \end{pmatrix}$$

sind. Hierbei ist die Untermatrix  $N_1$  symmetrisch und positiv definit. Die Untermatrix  $C(t)$  ist holomorph in  $\Delta$  und die Matrix  $Z(t)$  lässt sich schreiben als

$$Z(t) = \tilde{Z}(t) + \frac{\log t}{2\pi i} N_1,$$

mit  $\tilde{Z}(t)$  holomorph in  $\Delta$ .

*Beweis.* Es existiert nun eine Basis  $\delta'_1, \dots, \delta'_{2g}$  von  $H_1(X_t, \mathbb{Z})$  und  $\omega'_1, \dots, \omega'_g$  von  $\Gamma(X_t, \Omega_{X_t}^1)$ , so dass Satz 2.3.3 erfüllt ist. Des Weiteren lässt sich nach Lemma 1.2.6 die Basis  $\delta'_1, \dots, \delta'_{2g}$  von  $H_1(X_t, \mathbb{Z})$  mit den Zykeln  $c_1, \dots, c_{r-1}$  aus Korollar 1.2.3 zu einer Basis  $\delta_1, \dots, \delta_{2g+r-1} = \delta'_1, \dots, \delta'_g, c_1, \dots, c_{r-1}, \delta'_{g+1}, \dots, \delta'_{2g}$  von  $H_1(X'_t, \mathbb{Z})$  erweitern, so dass  $Q$ ,  $M$  und  $\Omega(t)$  von obiger Gestalt sind, mit

$$C(t) = \left( 2\pi i \int_{Q_{l+1,t}}^{Q_{l,t}} p^* \omega_k(t) \right)_{k,l}, \quad Q_{m,t} := p^{-1} P_{m,t}, \quad m = 1, \dots, r.$$

Da nun sowohl die Punkte  $P_m(t) := P_{m,t}$  für  $m = 1, \dots, r$  als auch die Differentialformen  $\omega_1(t), \dots, \omega_g(t)$  holomorph in  $t \in \Delta$  sind, ist  $C(t)$  ebenfalls holomorph.  $\square$

Analog zu Kapitel 2 setzen wir auch hier weiter voraus, dass für den nilpotenten Anteil der Monodromietransformation  $\mathcal{N}^2 = 0$  gelte.

**4.2.7 Korollar.** *Für  $t \in \Delta^*$  ist die Matrix*

$$\tilde{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_g & 0 & \tilde{Z}(t) \\ 0 & \mathbf{1}_{r-1} & C(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_g & 0 & Z(t) \\ 0 & \mathbf{1}_{r-1} & C(t) \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{\log t}{2\pi i} (M - \mathbf{1}_{2g+r-1})\right)$$

*holomorph und unverzweigt und lässt sich in  $t = 0$  fortsetzen. Die Limes-Hodge-Filtrierung  $\dot{F}_\infty$  ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} \left(\dot{F}_\infty\right)^1 &= \text{Zeilenraum der Matrix } \tilde{\Omega}(0), \\ \left(\dot{F}_\infty\right)^0 &= H^1(X'_t, \mathbb{C}), \quad \text{für } t \text{ nahe } 0. \end{aligned}$$

*Beweis.* Nach Satz 4.2.6 ist die Periodenmatrix  $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_g & 0 & Z(t) \\ 0 & \mathbf{1}_{r-1} & C(t) \end{pmatrix}$  von der Gestalt

$$Z(t) = \tilde{Z}(t) + \frac{\log t}{2\pi i} N_1,$$

mit  $\tilde{Z}(t)$  und  $C(t)$  holomorph in  $\Delta$ . Da  $(M - \mathbf{1}_{g+r-1})^2 = 0$ , gilt

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_g & 0 & \tilde{Z}(t) \\ 0 & \mathbf{1}_{r-1} & C(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_g & 0 & Z(t) \\ 0 & \mathbf{1}_{r-1} & C(t) \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{\log t}{2\pi i} (M - \mathbf{1}_{2g+r-1})\right).$$

Für  $t \in \Delta^*$  lässt sich eine Basis von  $\Gamma(X'_t, \Omega_{X'_t}^1(\log P_t))$  durch

$$\begin{aligned} \omega_i(t) &= \delta^i + \sum_{j=1}^g \tilde{Z}_{ij}(t) \cdot \delta^{g+j+1}, \quad i = 1, \dots, g, \\ \omega_{g+k}(t) &= \delta^{g+1} + \sum_{l=1}^g C_{kl}(t) \cdot \delta^{g+l+1}, \quad k = 1, \dots, r-1 \end{aligned}$$

und somit die Periodenabbildung als Zeilenraum der Periodenmatrix darstellen. Die Filtrierung stimmt dann faserweise mit der Filtrierung aus Lemma 4.1.3 überein. Nach Satz 2.3.1 erhält man die gewünschte Filtrierung.  $\square$

Nach Korollar (A.9) [SZ85] folgt nun über die Zulässigkeit der obigen Variation graduiert polarisierter gemischter Hodge-Strukturen:

**4.2.8 Korollar.** *Für  $t$  nahe 0 ist das Tripel*

$$\left(H^1(X'_t, \mathbb{Z}), \dot{W}^\infty, \dot{F}_\infty\right)$$

*eine gemischte Hodge-Struktur und wird die Limes-MHS der Familie  $\pi' : X' \rightarrow \Delta$  genannt.*

Wir wollen uns nun wieder der Familie  $\mathcal{Y}_\eta$  von punktierten hyperelliptischen Riemannschen Flächen aus Satz 3.2.1 zuwenden. Da sich nach Voraussetzung  $g(x, t)$  nicht als  $h(t) \cdot \tilde{g}(x, t)$  schreiben lässt, ist für alle  $t \in \Delta$  der Grad  $m = \deg_x g(x, t)$  konstant. Nach Lemma 1.3.10 lassen sich also die Fasern  $\mathcal{Y}_t$  von  $\text{pr}_t : \mathcal{Y}_\eta \rightarrow \Delta$  simultan mit dem Gewichtungsvektor  $\mathbf{p} := (1, 1, \lceil \frac{m}{2} \rceil)$  quasihomogenisieren. Sei  $\overline{\mathcal{Y}}_\eta$  die zugehörige Kompaktifizierung von  $\mathcal{Y}_\eta$  in  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^2 \times \Delta$ , dann ist  $P := \overline{\mathcal{Y}}_\eta - \mathcal{Y}_\eta$  ein glatter Divisor, schneidet die Fasern  $\overline{\mathcal{Y}}_t$  transversal und besteht aus einer beziehungsweise zwei Zusammenhangskomponenten  $P_i$ , d.h. die Fasern  $\overline{\mathcal{Y}}_t$  besitzen ein beziehungsweise zwei unendlich ferne Punkte  $P_t := \overline{\mathcal{Y}}_t - \mathcal{Y}_t$ . Weiter sei  $g$  das Geschlecht von  $\overline{\mathcal{Y}}_t$ .

**4.2.9 Korollar.** *Für ungerades  $\deg_x g(x, t)$  trägt die Kohomologiegruppe  $H^1(\mathcal{Y}_t, \mathbb{C})$  eine reine Hodge-Struktur.*

*Beweis.* Für ungerades  $\deg_x g(x, t)$  sind die Riemannschen Flächen  $\mathcal{Y}_t$  einfach punktiert. Nach Korollar 4.1.2 erhalten wir somit einen Isomorphismus

$$H^1(\overline{\mathcal{Y}}_t, \mathbb{Q}) \cong H^1(\mathcal{Y}_t, \mathbb{Q}),$$

wodurch  $H^1(\mathcal{Y}_t, \mathbb{C})$  eine reine Hodge-Struktur trägt.  $\square$

Somit können wir für ungerades  $\deg_x g(x, t)$  die gemischte Hodge-Struktur im Limes analog zu Kapitel 2 bilden.

**4.2.10 Korollar.** *Für ungerades  $\deg_x g(x, t)$  ist die Limes-MHS der Familie  $\text{pr}_t : \mathcal{Y}_\eta \rightarrow \Delta$  mit der Limes-MHS der Familie  $\text{pr}_t : \overline{\mathcal{Y}}_\eta \rightarrow \Delta$  identisch.*

Im Folgenden sei nun  $\deg_x g(x, t)$  gerade, wodurch der glatte Divisor  $P$  aus zwei Zusammenhangskomponenten  $P_1$  und  $P_2$  besteht, über die wir folgende Aussage treffen können.

**4.2.11 Lemma.** *Die Komponenten  $P_1$  bzw.  $P_2$  können mit holomorphen Schnitten  $p_1 : \Delta \rightarrow \overline{\mathcal{Y}}_\eta$  bzw.  $p_2 : \Delta \rightarrow \overline{\mathcal{Y}}_\eta$  identifiziert werden.*

*Beweis.* Da  $P$  ein glatter Divisor ist, die Fasern transversal schneidet und für  $i = 1, 2$  die Abbildung  $\text{pr}_t|_{P_i} : P_i \rightarrow \Delta$  holomorph und bijektiv ist, ist die Abbildung  $p_i : \Delta \rightarrow \overline{\mathcal{Y}}_\eta$  ebenfalls holomorph und es gilt  $\text{pr}_t \circ p_i = \text{id}_\Delta$ .  $\square$

Gemäß Korollar 4.2.8 erhalten wir somit die folgende Limes-MHS:

**4.2.12 Bemerkung.** *Die Limes-Hodge-Filtrierung  $\dot{F}_\infty$  ist durch den Zeilenraum der Matrix  $\tilde{\Omega}(0)$  aus Korollar 4.2.7 gegeben:*

$$\left(\dot{F}_\infty\right)^1 = \text{Zeilenraum der Matrix } \begin{pmatrix} \mathbf{1}_g & 0 & \tilde{Z}(0) \\ 0 & 1 & C(0) \end{pmatrix},$$

$$\left(\dot{F}_\infty\right)^0 = H^1(\mathcal{Y}_t, \mathbb{C}), \quad \text{für } t \text{ nahe } 0.$$

und die Limes-Gewichtsfiltrierung  $\dot{W}^\infty$  durch

$$\dot{W}_i^\infty(H^1(\mathcal{Y}_t, \mathbb{Q})) = 0, \quad i < 0,$$

$$\dot{W}_0^\infty(H^1(\mathcal{Y}_t, \mathbb{Q})) = \text{Im } \mathcal{N}^*,$$

$$\dot{W}_1^\infty(H^1(\mathcal{Y}_t, \mathbb{Q})) = H^1(\bar{\mathcal{Y}}_t, \mathbb{Q}) \cap \text{Ker } \mathcal{N}^*,$$

$$\dot{W}_i^\infty(H^1(\mathcal{Y}_t, \mathbb{Q})) = H^1(\mathcal{Y}_t, \mathbb{Q}), \quad i \geq 2.$$

Wir können nun die soeben gewonnene Limes-MHS auf die Familie von analytisch berandeten Riemannschen Flächen  $\text{pr}_t : \bar{\mathcal{X}}_{\eta, \delta} \rightarrow \Delta$  aus Kapitel 3 übertragen. Aus Korollar 3.2.3 erhalten wir einen Isomorphismus

$$H^1(\mathcal{Y}_t, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^1(\bar{\mathcal{X}}_t, \mathbb{Z}).$$

Somit können wir die gemischte Hodge-Struktur von  $H^1(\mathcal{Y}_t, \mathbb{Z})$  auf  $H^1(\bar{\mathcal{X}}_t, \mathbb{Z})$  übertragen.

**4.2.13 Satz.**  $H^1(\bar{\mathcal{X}}_t, \mathbb{Z})$  hat eine natürliche gemischte Hodge-Struktur, so dass die Restriktionsabbildung

$$\left( H^1(\mathcal{Y}_t, \mathbb{Q}), \dot{W}^\infty, \dot{F}_\infty \right) \xrightarrow{\sim} \left( H^1(\bar{\mathcal{X}}_t, \mathbb{Q}), \dot{W}^\infty, \dot{F}_\infty \right)$$

ein Isomorphismus von gemischten Hodge-Strukturen ist.

Bevor wir die gewonnenen Erkenntnisse auf ein konkretes Beispiel anwenden, wollen wir für  $t \neq 0$  noch eine für die Berechnung notwendige Basis von  $\Gamma(\bar{\mathcal{Y}}_t, \Omega_{\bar{\mathcal{Y}}_t}(\log P_t))$  angeben. Es seien  $A_{1,t}, \dots, A_{2g+2,t}$  die Verzweigungspunkte der Überlagerung

$$\text{pr}_x : \bar{\mathcal{Y}}_t \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto x.$$

Dann gilt nach [FK92], III.7.4:

**4.2.14 Lemma.** Für  $t \neq 0$  ist der Divisor

$$\left( \sqrt{g(x, t)} \right) = A_{1,t} + \dots + A_{2g+2,t} - (g+1) \cdot P_{1,t} - (g+1) \cdot P_{2,t}.$$

**4.2.15 Satz.** Für  $j = 1, \dots, g+1$  bilden die Differentialformen

$$\omega_j(t) := \frac{x^{j-1} dx}{\sqrt{g(x, t)}}$$

eine Basis von  $\Gamma(\bar{\mathcal{Y}}_t, \Omega_{\bar{\mathcal{Y}}_t}(\log P_t))$ . Hierbei sind  $\omega_1, \dots, \omega_g$  holomorph auf ganz  $\bar{\mathcal{Y}}_t$  und  $\omega_{g+1}(t)$  besitzt einfache Pole bei  $P_{1,t}$  und  $P_{2,t}$ .

*Beweis.* Zunächst gilt trivialerweise die lineare Unabhängigkeit der obigen Differentialformen. Weiter setzen wir o.B.d.A.  $x(A_i) \neq 0$  für  $i = 1, \dots, 2g+2$  voraus. Der Nulldivisor

von  $x$  sei dann durch

$$x^{-1}(0) = P_{3,t} + P_{4,t}$$

gegeben, und wir erhalten die Divisoren

$$(x) = P_{3,t} + P_{4,t} - P_{1,t} - P_{2,t}$$

sowie

$$(dx) = A_1 + \dots + A_{2g+2} - 2 \cdot P_{1,t} - 2 \cdot P_{2,t}.$$

Zusammen mit Lemma 4.2.14 gilt somit für den Divisor von  $\omega_j(t)$ :

$$(\omega_j(t)) = (g-j) \cdot P_{1,t} + (g-j) \cdot P_{2,t} + (j-1) \cdot P_{3,t} + (j-1) \cdot P_{4,t}.$$

Für  $1 \leq j \leq g$  sind die Differentialformen somit holomorph und  $\omega_{g+1}(t)$  besitzt einfache Pole bei  $P_{1,t}$  und  $P_{2,t}$ .  $\square$

Um nun für  $t \neq 0$  die Periodenmatrix auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_g & 0 & Z(t) \\ 0 & 1 & C(t) \end{pmatrix}$$

zu bringen, müssen wir diese Basis wie folgt anpassen. Sei  $A := \left( \int_{\delta_j} \omega_i(t) \right)_{i,j=1,\dots,g}$  und  $B := (b_{kl})_{i,j} := A^{-1}$  die inverse Matrix. Dann definieren wir

$$\omega'_i(t) = \sum_{k=1}^g b_{ki} \cdot \omega_k(t)$$

und

$$\omega'_{g+1} := \frac{1}{\text{Res}_{P_{1,t}}} \left( \omega_{g+1}(t) - \sum_{j=1}^g \left( \int_{\delta_j} \omega_{g+1} \right) \cdot \omega_j \right).$$

### 4.3 Beispiele

Wir wollen mit einem Beispiel abschließen, welches analog zu 2.4 gewählt ist. Um direkt eine unipotente Monodromiematrix zu erhalten, haben wir den Basiswechsel schon in die unten stehende Gleichung (4.2) mit einfließen lassen.

Für gerade  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $|a| < |b|$  sei nun mit  $\eta < |a|$  und  $\Delta = \Delta_\eta(0)$ ,  $\text{pr}_t : X^k \rightarrow \Delta$  eine Familie von hyperelliptischen Kurven, definiert durch

$$y^2 - (x^k - t^k)(x-a)(x-b) \cdot h(x,t) = 0, \quad (4.2)$$

wobei  $x_0 := \min \{|x| \mid h(x,t) = 0, t \in \Delta\}$  eine mehrfache Nullstelle von  $h(x,t)$  sei, mit  $|b| <$



$|x_0|$ . Nach Bemerkung 3.1.3 wählen wir ein  $|b| < \delta < |x_0|$ , definieren  $\mathcal{X}_{\eta,\delta}^k := \text{pr}_t^{-1}(\Delta)_{|x|<\delta}$  und erhalten zunächst den semilokalen Fall

$$\text{pr}_t|_{\mathcal{X}_{\eta,\delta}^k} : \mathcal{X}_{\eta,\delta}^k \rightarrow \Delta.$$

Schließlich betrachten wir die analog zu Satz 3.2.1 konstruierte Familie  $\text{pr}_t : \mathcal{Y}_\eta^k \rightarrow \Delta$ , definiert durch

$$y^2 - (x^k - t^k)(x - a)(x - b) = 0.$$

Sei  $t_0 \in \Delta^*$  nahe 0,  $\overline{\mathcal{Y}_\eta^k}$  eine geeignete Kompaktifizierung gemäß Lemma 1.3.10,  $\delta_1, \dots, \delta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g$  eine Basis von  $H_1(\overline{\mathcal{Y}_{t_0}^k}, \mathbb{Q})$  wie in Lemma 2.4.2 und  $\alpha \in H_1(\mathcal{Y}_{t_0}^k, \mathbb{Q})$  nach Lemma 1.2.6 gewählt.

Zu der Basis  $\delta_1, \dots, \delta_g, \alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_g$  ist nach Satz 4.2.6 und Lemma 2.4.2 für den Randzyklus  $\Gamma$  von  $\Delta$  die Monodromiematrix von der Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_g & 0 & N_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_g \end{pmatrix}, \quad \text{mit } N_1 = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix}.$$

Sei  $\delta^1, \dots, \delta^g, \alpha^*, \gamma^1, \dots, \gamma^g$  eine Basis von  $H^1(\mathcal{Y}_{t_0}^k, \mathbb{Q})$  dual zu der vorherigen. Das Bild und der Kern des nilpotenten Anteils der Picard-Lefschetz Monodromietransformation der Kohomologie bestimmt sich zu:

$$\begin{aligned} \text{Ker } \mathcal{N}^* &= \text{Span}(\delta^1 - \delta^2, \dots, \delta^1 - \delta^g, \alpha^*, \gamma^1, \dots, \gamma^g), \\ \text{Im } \mathcal{N}^* &= \text{Span}\left(\sum_{j=1}^g \gamma^j\right). \end{aligned}$$

Für die Graduierten der Limes-Gewichtsfiltrierung erhält man

$$\begin{aligned} \text{Gr}_0^{\dot{W}^\infty}(H^1(X_t^k, \mathbb{Q})) &= \text{Span}\left(\sum_{j=1}^g \gamma^j\right), \\ \text{Gr}_1^{\dot{W}^\infty}(H^1(X_t^k, \mathbb{Q})) &= \text{Span}(\delta^1 - \delta^2, \dots, \delta^1 - \delta^g, \gamma^1 - \gamma^2, \dots, \gamma^1 - \gamma^g), \\ \text{Gr}_2^{\dot{W}^\infty}(H^1(X_t^k, \mathbb{Q})) &= \text{Span}\left(\sum_{j=1}^g \delta^j, \alpha^*\right). \end{aligned}$$

Die Limes-Hodge-Filtrierung wird nach Bemerkung 4.2.12 durch den Zeilenraum der Matrix  $\tilde{\Omega}(0)$  aufgespannt. Somit ergibt sich:

$$\left(\dot{F}_\infty\right)^0 = \text{Span}(\delta^1, \dots, \delta^g, \alpha^*, \gamma^1, \dots, \gamma^g),$$

$$\left(\dot{F}_\infty\right)^1 = \text{Span} \left( \delta^1 + \sum_{j=1}^g \tilde{Z}_{1j}(0) \gamma^j, \dots, \delta^g + \sum_{j=1}^g \tilde{Z}_{gj}(0) \gamma^j, \alpha^* + \sum_{j=1}^g C_j(0) \gamma^j \right).$$

Hierbei ist für  $j = 1, \dots, g$

$$C_j(t) = 2\pi i \int_{(p|_P)^{-1}(P_{2,t})}^{(p|_P)^{-1}(P_{1,t})} p^* \omega_j(t),$$

$p$  die universelle Überlagerung und  $P$  das Fundamentalpolygon. Schließlich können wir analog zu Korollar 2.4.6 den Typ der gemischten Hodge-Struktur im Limes bestimmen.

**4.3.1 Korollar.** *Die Limes-MHS  $(H^1(\mathcal{Y}_t^k, \mathbb{Q}), \dot{W}^\infty, \dot{F}_\infty)$  mit  $0 < t \ll 1$  und somit auch die Limes-MHS  $(H^1(\mathcal{X}_{t,\delta}^k, \mathbb{Q}), \dot{W}^\infty, \dot{F}_\infty)$  mit  $0 < t \ll 1$  ist vom Typ  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  und  $(1, 1)$ .*

*Beweis.* Nach Bemerkung 4.1.13 ist die Hodge-Struktur auf den Graduierten  $\text{Gr}_0^{\dot{W}^\infty}(H^1(\mathcal{Y}_t^k, \mathbb{Q}))$  und  $\text{Gr}_1^{\dot{W}^\infty}(H^1(\mathcal{Y}_t^k, \mathbb{Q}))$  identisch mit der auf  $\text{Gr}_0^{\dot{W}^\infty}(H^1(\overline{\mathcal{Y}}_t^k, \mathbb{Q}))$  bzw.  $\text{Gr}_1^{\dot{W}^\infty}(H^1(\overline{\mathcal{Y}}_t^k, \mathbb{Q}))$ .

Des Weiteren gilt analog zu Korollar 2.4.6

$$\begin{aligned} \left(\dot{F}_\infty\right)^1 \text{Gr}_2^{\dot{W}^\infty}(H^1(\mathcal{Y}_t^k, \mathbb{Q})) &= \text{Gr}_2^{\dot{W}^\infty}(H^1(\mathcal{Y}_t^k, \mathbb{Q})) \\ &= \overline{\left(\dot{F}_\infty\right)^1} \text{Gr}_2^{\dot{W}^\infty}(H^1(\mathcal{Y}_t^k, \mathbb{Q})). \end{aligned}$$

Nach Satz 4.2.13 erhält man diese Limes-MHS ebenfalls auf der Familie  $\mathcal{X}_{\eta,\delta}^k$ .  $\square$

**4.3.2 Bemerkung.** *Es sei noch bemerkt, dass für ungerades  $k$  auf der Kohomologie  $H_1(\mathcal{Y}_t^k, \mathbb{C})$  der Fasern  $\mathcal{Y}_t^k$ ,  $t \neq 0$  der Familie von hyperelliptischen Kurven  $\text{pr}_t : \mathcal{Y}_\eta^k \rightarrow \Delta$  definiert durch*

$$y^2 - (x^k - t^{2k})(x - a)(x - b) = 0$$

nach Korollar 4.2.9 eine reine Hodge-Struktur gegeben ist. Außerdem ist in diesem Fall die Monodromie endlich, wodurch die relative Gewichtsfiltrierung zu dem nilpotenten Anteil der Monodromietransformation der Kohomologie trivial ist. Die gemischte Hodge-Struktur im Limes ist somit eine reine Hodge-Struktur.

# Literaturverzeichnis

- [Boh86] BOHNHORST, G., *Einfache holomorphe Abbildungen*. Math. Ann., 275(3):513–520, 1986. 34
- [BZ90] BRYLINSKI, J.-L. und S. ZUCKER, *An overview of recent advances in Hodge theory*. In: *Several complex variables, VI*, Band 69 der Reihe *Encyclopaedia Math. Sci.*, Seiten 39–142. Springer, Berlin, 1990. 1
- [CMSP03] CARLSON, J., S. MÜLLER-STACH und C. PETERS, *Period mappings and period domains*, Band 85 der Reihe *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. 40
- [Del71a] DELIGNE, P., *Théorie de Hodge. I*. In: *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1*, Seiten 425–430. Gauthier-Villars, Paris, 1971. 15
- [Del71b] ———, *Travaux de Griffiths*. In: *Séminaire Bourbaki. Vol. 1969/70: Exposés 364–381*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 180, Seiten 213–237. Springer-Verlag, Berlin, 1971. xi
- [Ebe01] EBELING, W., *Funktionentheorie, Differentialtopologie und Singularitäten*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2001. Eine Einführung mit Ausblicken. 21
- [FK92] FARKAS, H. M. und I. KRA, *Riemann surfaces*, Band 71 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, Second Auflage, 1992. 2, 49
- [GH94] GRIFFITHS, P. A. und J. HARRIS, *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original. 1, 3, 9
- [Gri68a] GRIFFITHS, P. A., *Periods of integrals on algebraic manifolds. I. Construction and properties of the modular varieties*. Amer. J. Math., 90:568–626, 1968. xi
- [Gri68b] ———, *Periods of integrals on algebraic manifolds. II. Local study of the period mapping*. Amer. J. Math., 90:805–865, 1968. xi, 13
- [Gri70a] ———, *Periods of integrals on algebraic manifolds. III. Some global differential-geometric properties of the period mapping*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (38):125–180, 1970. 14

- [Gri70b] ———, *Periods of integrals on algebraic manifolds: Summary of main results and discussion of open problems*. Bull. Amer. Math. Soc., 76:228–296, 1970. xii, 22, 24
- [GS75] GRIFFITHS, P. A. und W. SCHMID, *Recent developments in Hodge theory: a discussion of techniques and results*. In: *Discrete subgroups of Lie groups and applications to moduli (Internat. Colloq., Bombay, 1973)*, Seiten 31–127. Oxford Univ. Press, Bombay, 1975. xii, 11, 12, 13, 23
- [Ham74] HAMM, H. A., *Zur analytischen und algebraischen Beschreibung der Picard-Lefschetz-Monodromie*. Habilitationsschrift. Georg-August-Universität Göttingen, 1974. 37
- [Hod41] HODGE, W. V. D., *The Theory and Applications of Harmonic Integrals*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1941. xi
- [Hom90] HOMANN, W., *Isolierte Singularitäten und gemischte Hodge-Strukturen*, Band 49 der Reihe *Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster*, 2. Serie. Universität Münster, Mathematisches Institut, Münster, 1990. xi, xiii, 35
- [Kun97] KUNZ, E., *Einführung in die algebraische Geometrie*. vieweg, Braunschweig, 1997. mit 145 Übungsaufgaben. 5, 7
- [Pea01] PEARLSTEIN, G. J., *Degenerations of mixed Hodge structure*. Duke Math. J., 110(2):217–251, 2001. 45
- [Sch73] SCHMID, W., *Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping*. Invent. Math., 22:211–319, 1973. xii, 25
- [SZ85] STEENBRINK, J. und S. ZUCKER, *Variation of mixed Hodge structure. I*. Invent. Math., 80(3):489–542, 1985. xii, xiii, 41, 43, 47
- [Usu84] USUI, S., *Variation of mixed Hodge structure arising from family of logarithmic deformations. II. Classifying space*. Duke Math. J., 51(4):851–875, 1984. 17, 19, 40
- [Usu91] ———, *Period maps and their extensions*. Sci. Rep. College Gen. Ed. Osaka Univ., 40(1-2):21–37, 1991. 46

# Index

- Dehomogenisierung, 6
- Ehresmann'scher Faserungssatz, 34
- Faltung von Filtrierungen, 9
- Filtrierung, 8
  - verschobene, 9
- Garbe der holomorphen 1-Formen auf  $X - D$  mit logarithmischen Polen entlang  $D$ , 2
- Gewichtet-projektive Varietät, 6
- Gewichtet-projektiver Raum, 5
- Gewichtsfiltrierung
  - Limes  $\dot{W}^\infty$ , 43
  - Limes  $W^\infty$ , 22
  - relative, 43
- Gewichtsfiltrierung eines nilpotenten Operators, 22
- Gewichtungsvektor, 5
- Griffith-Transversalität, 13
- Griffiths-Gebiet, 16
  - kompaktes Dual, 16
- Griffiths-Transversalität, 18
- Hodge-Filtrierung, 10
  - Limes  $\dot{F}_\infty$ , 45, 47
  - Limes  $F_\infty$ , 23, 31
- Hodge-Struktur, 10
  - gemischte (MHS), 15
  - graduiert-polarisierte gemischte (GPMHS), 15
  - Limes-MHS, 25, 31, 47, 52
  - polarisierte (PHS), 11
  - triviale, 10
  - von Tate, 10
- Hodge-Strukturen
  - Variation von (VHS), 13
  - Morphismus von gemischten, 15
  - Variation von graduiert-polarisierten gemischten (VGPMHS), 17
  - Variation von polarisierten (VPHS), 13
    - zulässige Variation von gemischten, 45
- Hodge-Zerlegung, 9
- Homotopieaxiom, 37
- Klassifizierender Raum
  - einer GPMHS, 16
  - einer PHS, 11
- Kompaktes Dual des klassifizierenden Raumes
  - einer GPMHS, 16
  - einer PHS, 11
- Monodromie, 21
- Monodromiegruppe
  - einer VGPMHS, 19
  - einer VPHS, 14
- Monodromiematrix, 21, 26
- Monodromietransformation, 21
- Morphismus von filtrierten Vektorräumen, 41
  - strikt kompatibel, 41
- Periodenabbildung
  - einer VGPMHS, 19
- Periodenmatrix
  - der abelschen Differentiale, 1
  - der abelschen Differentiale auf einer endlich punktierten Riemannschen Fläche, 3
- Projektiver Abschluss, 7

Quasi-homogenes

  Ideal, 6

  Polynom, 6

Quasi-Homogenisierung, 5

Residuum-Sequenz, 40

Riemannsche

  Bedingungen, 1

  Gleichung, 1

  Ungleichung, 1

Semistabile Degeneration, 45

Weil-Operator, 11

