Benno Grabinger

Das Ziegenproblem

Das Ziegenproblem hielt 1991 viele Menschen in Atem. Feten platzten, Eheleute stritten sich, Mathe-Lehrer verwirrten ihre Schüler. In Deutschland beschäftigten sich die Wochenzeitungen DIE ZEIT und DER SPIEGEL mit diesem ungewöhnlichen Thema und erzeugten eine Flut von Leserbriefen. In diesen wurde das Thema - ähnlich wie in den USA - äußerst emotionsgeladen diskutiert. Ein Grund dafür scheint - neben dem eigentlichen Thema - die amerikanische Journalistin Marilyn vos Savant zu sein, die als Mensch mit dem höchsten Intelligenzquotient der Welt galt. Mit der Lösung einer Denksportaufgabe in ihrer Kolumne "Fragen Sie Marilyn" hatte sie die Diskussion angefacht. Von etwa 10 000 Briefeschreibern - darunter viele Mathematiker - widersprachen ihr viele in oft rüder Weise. Die Rede war von einer "nationalen Krise der mathematischen Schulbildung", von "Lachsalven in der gesamten mathematischen Welt". Ein Leser meinte sogar, Marilyn sei die eigentliche Ziege in dem Problem.

Das Problem, um das es ging, stellt sich wie folgt dar:

> Du nimmst an einer Spielshow im Fernsehen teil, bei der man eine von drei verschlossenen Türen auswählen soll. Hinter einer Tür wartet der Preis, ein Auto, hinter den beiden anderen stehen Ziegen. Du zeigst auf eine Tür, sagen wir Nummer eins. Sie bleibt vorerst geschlossen. Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet. Mit den Worten "Ich zeige Ihnen mal was", öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer drei, und eine meckernde Ziege schaut ins Publikum. Er fragt: "Bleiben Sie bei Nummer eins, oder wählen Sie Nummer zwei? Ist es günstig die Tür zu wechseln oder spielt dies überhaupt keine Rolle?

Marilyn vos Savant behauptet, die Tür Nummer zwei besitzt jetzt eine größere Chancen, d.h. es ist günstiger zu wechseln.

Zwei der Leserbriefe auf Marilyns Behauptung (zitiert nach [2])

Dear Marilyn,

...your answer that you should switch to door number 2 ...is incorrect. Each of doors number 1 and number 2 has 1/2 chance of winning... Your correspondents seem rather rude; I wager your womanhood is a factor!

[Respondent was a professor in the Department of Pure Mathematics at Cambridge University in England.]

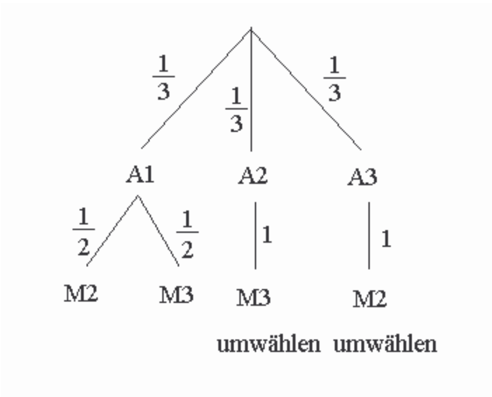
Dear Ms. vos Savant

It is apparent from your "Ask Marilyn" column, dealing with probabilities, ... that being smart is no guarantee of being correct. Your analysis of the game-show probabilities, and the analogy involving the pea under a shell, reveals a misunderstanding of the rudiments of probability theory, and an appalling lack of logic. ...

...I urge you to lower your mantle of omniscience and seek the advice of experts when the subject matter is outside your area of expertise. Your ignorant responses are hurting the fight against mathematical illiteracy.

[Respondent was another professor of mathematics.]

Mit der zweiten Pfadregel lässt sich das Problem leicht lösen. Ohne Einschränkungen kann man annehmen, dass der Kandidat die Tür 1 auswählt. (Sollte dies nicht sein, so lassen sich die Türen umnummerieren.) Es werden nun die Ereignisse A1, A2, A3, M2 und M3 betrachtet:
A1, A2, A3 bedeuten, dass das Auto hinter Tür 1, 2 oder 3 steht. M2 und M3 bedeuten, dass der Moderator die Tür 2 bzw. 3 öffnet. (Tür 1 wird er vernünftigerweise nicht öffnen.)



Die Pfade (A2 $\rightarrow$ M3) und (A3 $\rightarrow$ M2) bilden das Ereignis "Erfolg durch Umwählen".
Mit der 2. Pfadregel ergibt sich als Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis:
P(Erfolg durch Umwählen)

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Die Wahrscheinlichkeit zum Erfolg durch Beharren auf der zuerst gewählten Tür zu gelangen ist damit: P(Erfolg durch nicht Umwählen) = $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Die Rechnung zeigt, dass es besser ist zu wechseln.

Simulationsplan für das Ziegenproblem:

1. Zufallswahl einer Tür, hinter der das Auto steht
2. Zufällige Kandidaten-Erstwahl
3. Moderator öffnet eine Tür, die nicht die Autotür und nicht die gewählte Tür ist.
4. Steht das Auto nicht hinter der gewählten Tür, so wird ein Punkt für "Wechseln der Tür" gut geschrieben.

zu 1: Die Variable a bezeichne die Tür, hinter der das Auto steht.

zu 2: Die Variable k bezeichne die Tür, die der Kandidat wählt.

zu 3: Je nach Wert von a und k muss der Moderator die Tür m auswählen. Eine Übersicht liefert die nächste Tabelle:

a	k	m=f(a,k)
1	1	2, 3
1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	2	1, 3
2	3	1
3	1	2
3	2	1
3	3	1, 2

Wie ergibt sich m aus a und k?

Falls $a \neq k$, so lässt sich leicht nachprüfen, dass $m = \frac{6}{a \cdot k}$ gilt.

Im Fall von a = k liefert 1 + (a mod 2) eine der beiden Türen, welche der Moderator öffnen kann.

zu 4. Die Nummer w der Tür, zu der gewechselt werden kann, ergibt sich aus k und m zu w=6-m-k. Nachweis durch die folgende Tabelle:

k	m	w=6-m-k
1	2	3
1	3	2
2	3	1

Simulation auf dem TI-92

Eine Simulation des Ziegenproblems kann im Data-Matrix-Editor übersichtlich dargestellt werden. Im folgenden Beispiel werden 100 Simulationen durchgeführt und ausgewertet.
In der Spalte c1 wird per Zufall die Tür mit der Nummer a ausgewählt, hinter der das Auto steht. rand(3) liefert eine der Zahlen 1,2 oder 3 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit. Um 100 mal ein Auto hinter einer Tür zu verstecken wird eine Folge von 100 dieser Zufallszahlen erzeugt:

```
c1=seq(rand(3),i,1,100)
```

Entsprechend erfolgt die Kandidatenerstwahl der Tür mit der Nummer k zu:

```
c2=seq(rand(3),i,1,100)
```

Wie zuvor beschrieben wird aus den Zahlen a und k die Moderatorentür ermittelt.

Diese Nummer wird in die 3. Spalte eingetragen:

```
c3=seq(whenc1[i]=c2[i],1+mod(c1[i],2),6/(c1[i]*c2[i])
   ),i,1,100)
```

Die Nummer w der Tür zu der gewechselt werden kann ist w=6-m-k und wird in Spalte 4 gebildet:

```
c4=seq(6-c3[i]-c2[i],i,1,100)
```

In Spalte 5 wird schließlich registriert, ob ein eventueller Wechsel erfolgreich wäre. Das ist dann der Fall wenn die Zahlen w und a gleich sind. In diesem Fall wird eine 1 in die Spalte 5 eingetragen, sonst eine 0:

```
c5=seq(when(c4[i]=c1[i],1,0),i,1,100)
```

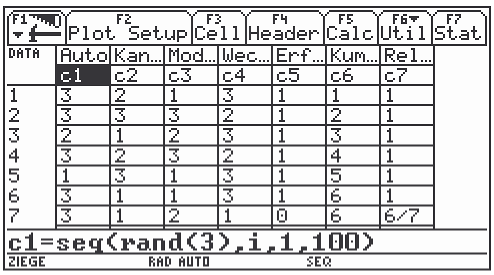
Die absolute Anzahl der Erfolge in Spalte 5 wird durch Aufsummieren in Spalte c6 ermittelt:

```
c6=cumsum(c5)
```

Die relative Häufigkeit für Erfolg durch Umwahl ergibt sich in der Spalte c7 als:

```
c7=seq(c6[i]/i,i,1,100)
```

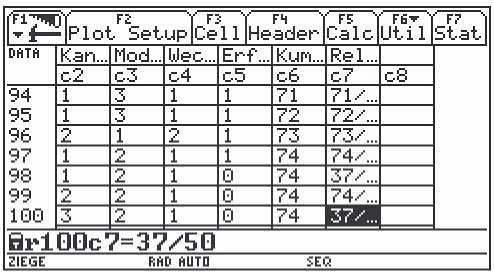
Die beiden Bildschirmausdrucke zeigen die Ergebnisse der 100 Simulationen. Die relative Häufigkeit für Erfolg durch Umwahl ergibt sich dabei - in guter Übereinstimmung mit dem Theoriewert - zu $\frac{37}{50} = \frac{74}{100} = 0{,}74$.



DATA	Auto	Kan...	Mod...	Wec...	Erf...	Kum...	Rel...
	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
1	3	2	1	3	1	1	1
2	3	3	3	2	1	2	1
3	2	1	2	3	1	3	1
4	3	2	3	2	1	4	1
5	1	3	1	3	1	5	1
6	3	1	1	3	1	6	1
7	3	1	2	1	0	6	6/7

c1=seq(rand(3),i,1,100)

ZIEGE RAD AUTO SEQ



DATA	Kan...	Mod...	Wec...	Erf...	Kum...	Rel...	
	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8
94	1	3	1	1	71	71/...	
95	1	3	1	1	72	72/...	
96	2	1	2	1	73	73/...	
97	1	2	1	1	74	74/...	
98	1	2	1	0	74	37/...	
99	2	2	1	0	74	74/...	
100	3	2	1	0	74	37/...	

r100c7=37/50

ZIEGE RAD AUTO SEQ

Literatur

1. Benno Grabinger, Stochastik mit DERIVE, 2. Auflage, Bonn 1997
2. Brendan Kelly. Statistics with the TI-92, Brendan Kelly Publishing Inc., Burlington, Ontario 1997