Julian Krumsdorf

Beispielgebundenes Beweisen

(2015)

Beispielgebundenes Beweisen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
des Doktors in den Erziehungswissenschaften
an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Vorgelegt von:

Julian Krumsdorf
aus Berlin

(2015)

---

1. Gutachter: Prof. Dr. J. Voigt
2. Gutachter: Prof. Dr. M. Nührenbörger

Tag der mündlichen Prüfung: 28.10.2014

Danksagung

Die vorliegende Arbeit über das beispielgebundene Beweisen ist am Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster in der Arbeitsgruppe von Herrn Prof. Dr. Jörg Voigt entstanden. Gerne erinnere ich mich der ungezählten Stunden seiner wohlwollenden Förderung und des fachlichen Austauschs. Sein steter Ansporn und seine konstruktive Kritik haben zum Gelingen dieser Arbeit wesentlich beigetragen. Dafür gebührt ihm mein ausdrücklicher Dank.

Des weiteren möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Marcus Nührenbörger dafür herzlich bedanken, das Zweitgutachten übernommen zu haben. Gleichfalls danke ich Herrn Prof. Dr. Heinz Steinbring für die Möglichkeit, den internen Tagungen "Erkennen mathematischer Zusammenhänge" beizuwohnen. Besonders würdigen möchte ich den jüngst verstorbenen Herrn Prof. Dr. em. Arnold Kirsch, der mir einige Materialien zum beispielgebundenen Beweisen zusandte. Auch auf den früheren Doktoranden-, Forschungskolloquien und -tagungen habe ich mich willkommen, gut aufgehoben und beraten gefühlt sowie interessante Anregungen für den Fortgang meiner Arbeit erhalten. Als inhaltliche und lebensweltliche Bereicherung empfinde ich insbesondere die Vorarbeiten meiner Vorgänger Herrn Prof. Dr. Ralph Schwarzkopf und Herrn Prof. Dr. Michael Meyer.

Mein Dank gilt überdies jenen Lehrerinnen, Lehrern und Eltern, die mir an den Schulen mein Forschungsfeld eröffneten, sowie allen interviewten Schülerinnen und Schülern, welche mir mit ihren vorbildlich, beispielhaft und zuweilen auch beispiellos begründeten Beiträgen die empirische Grundlage meiner Arbeit boten.

Widmen möchte ich diese Arbeit jenem Mathematiklehrer, der mich für das Fach schon früh begeisterte, und jener Mathematiklehrerin, die mich für die Wissenschaft bezauberte. Wie sich die Jüngsten schon an der Mathematik versuchen, habe ich nun selbst auch exemplarisch kennenlernen dürfen.

Meinen Eltern danke ich schließlich für die jahrelange unermüdliche Unterstützung in reichlich bewegter und erfüllter Zeit.

Köln, im Jahre 2015 Julian Krumsdorf

Einleitung

Einordnung der Arbeit

Beweisen ist ein wesentliches Charakteristikum der mathematischen Disziplin. Doch die gegenwärtige Schulpraxis tut sich mit dem Beweisen schwer, und so bietet sich das beispielgebundene Beweisen als schülergemäße Beweisform an. Es ist daher die Aufgabe der Mathematikdidaktik zu klären, was das beispielgebundene Beweisen ausmacht. Die vorliegende Arbeit reiht sich dabei in den interpretativen Zweig mathematikdidaktischer Forschung ein.

Ziel der Arbeit vor dem Hintergrund der Forschung

Die Sichtung des Forschungsstands offenbart eine bunte Begriffsvielfalt zum beispielgebundenen Beweisen. Oft wird von beispielgebundenen Beweisen als theoretischen, von Schülern nachzuvollziehenden oder herzustellenden Produkten gesprochen. Entsprechend häufig erfolgt eine Klassifikation von Beweistypen, eine Kategorisierung von Beweisniveaus bis hin zu empfohlenen Bewertungsmaßstäben. Seltener wird das beispielgebundene Beweisen als Beweisprozess wahrgenommen, welcher etwa zwischen induktivem Prüfen und formalem (resp. formellem) Beweisen changieren kann. Die vorliegende Arbeit soll das beispielgebundene Beweisen aus mehreren Perspektiven als einen solchen Beweisprozess charakterisieren und empirisch untersuchen.

Gehalt und Besonderheit der Arbeit

Im Folgenden wird zum einen ein eigener theoretischer Zugang zum beispielgebundenen Beweisen erarbeitet. Das beispielgebundene Beweisen wird zum anderen in Einzelfallstudien an Schülern erprobt und interpretiert. Dabei kommt es auf den Einsatz passender Methoden an. Eine Besonderheit der vorliegenden Arbeit ist, dass der aus der Objektiven Hermeneutik entlehnte Begriff der latenten Sinnstrukturen zur theoretischen Fassung beispielgebundenen Beweisens, d.h. direkt auf den Forschungsgegenstand bezogen wird, während er sonst methodologischer Natur ist.

Paradoxie beispielgebundenen Beweisens

Die meisten Grundschüler und jüngeren Sekundarstufenschüler sind der formalen Ausdrucksweise oder der formellen Darstellung eines Beweises noch nicht voll mächtig. Gleichwohl können einige von ihnen durchaus schon beweisen – am Beispiel. Beim beispielgebundenen Beweisen werden die Schüler jedoch mit Paradoxien konfrontiert: Ein mathematischer Beweis kann der landläufigen Meinung nach nicht an ein Beispiel gebunden sein. Wenn die Schüler jedoch bei der Durchführung ihrer am Beispiel gehaltenen deduktiven Schlüsse erkennen lassen, dass sie diese allgemeingültig(er) denken, kann man durchaus von einem vollgültigen Beweis sprechen. Lässt sich dieses Verständnis beispielgebundenen Beweisens theoretisch präziser fassen?

Interpretation beispielgebundenen Beweisens

Die Entäußerung der Beweisgedanken stellt die Schüler vor sprachliche wie den Experten vor interpretative Probleme. In wie weit hat der Schüler wirklich die Allgemeingültigkeit einer Behauptung am Beispiel bewiesen? Häufig lässt sich dies situativ gar nicht zweifelsfrei sagen. Zuweilen lässt es selbst die Analyse des Transkripts nicht zu, diese Frage eindeutig zu beantworten. Gleichwohl soll die vorliegende Arbeit zeigen, wie Schüler am Beispiel die Allgemeingültigkeit einer Behauptung beweisen. So wie Schüler das Allgemeingültige im Beweisen am Beispiel erkennen mögen, ist es für den Forscher von Interesse, in wie weit er aus der Interpretation der Einzelfallstudien verallgemeinerbare Resultate über das Verhalten von Schülern beim beispielgebundenen Beweisen erzielen kann.

Gliederung

1.1 *Beweisen*

In ↑ Kap. 1.1 erfolgen zunächst einige allgemeinere Betrachtungen zum Beweisen: Zunächst wird geklärt, was das Beweisen ausmacht, und durch welche Funktionen es charakterisiert werden kann (↑ Abs. 1.1.1). Diese Beweisfunktionen sind zu berücksichtigen, wenn Schüler in mathematischen Gesprächen mit dem Experten beweisen. Dieser beobachtet, wie sich die Schüler während ihres Beweisens verhalten. Deshalb werden auch die meisten Studien zum Beweisverhalten von Schülern vorab behandelt (↑ Abs. 1.1.2). Schließlich kann eine kurze sprachhistorische Betrachtung des Begriffs des Beweisens hilfreich sein, um dessen heutige Verwendung in der Mathematikdidaktik und in der Alltagssprache zu reflektieren. Zuvor werden einige Bemerkungen zum Verhältnis zwischen Beweisen, Begründen und Argumentieren gemacht (↑ Abs. 1.1.3).

1.2 *Beispielgebundenes Beweisen*

In ↑ Kap. 1.2 wird bei der weitergehenden Sichtung des Forschungsstands mit den frühen Ansätzen zum beispielgebundenen Beweisen begonnen (↑ Abs. 1.2.1). Diese werden hauptsächlich unter den Bezeichnungen *prämathematisches Beweisen* und *paradigmatisches Beweisen* diskutiert. Alsdann erfolgt eine Auseinandersetzung mit zumeist englischsprachigen Artikeln über das *generic example* und das *generic proving* (↑ Abs. 1.2.2). Gesondert wird anschließend das *inhaltlich-anschauliche Beweisen* und das *operative Beweisen* diskutiert. Dabei steht die erklärende Beweisfunktion im Vordergrund (↑ Abs. 1.2.3). Mehr um die geometrische Darstellung beispielgebundener Beweise geht es bei der Thematisierung von *visual proofs* (↑ Abs. 1.2.4). Schließlich wird das beispielgebundene Beweisen mehr auf den Mathematikunterricht bezogen und dabei besonders die kommunikative Beweisfunktion betont (↑ Abs. 1.2.5).

1.3 *Entdecken, Prüfen und Begründen*

In ↑ Kap. 1.3 geht es um das Entdecken, das Prüfen und das Begründen von Behauptungen. Die dahinter stehenden Schlussformen nach PEIRCE sind die Abduktion, die Induktion und die Deduktion. Relevant ist diese Theoriebildung in Hinblick auf die entdeckenden und prüfenden Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen im engeren Sinne (i.e.S.). Zunächst wird das Begründen per Deduktion behandelt (↑ Abs. 1.3.1). Anschließend wird das Entdecken per Abduktion thematisiert (↑ Abs. 1.3.2). Für das beispielgebundene Beweisen erfährt das Entdecken mit latenter Beweisidee besondere Beachtung (↑ Abs. 1.3.3). Entsprechend wird das Prüfen per Induktion zum Thema gemacht (↑ Abs. 1.3.4) und im Prüfen mit latenter Beweisidee vertieft (↑ Abs. 1.3.5).

1.4 *Struktur von Argumenten*

In ↑ Kap. 1.4 geht es um die Struktur von Argumenten nach TOULMIN. Mit Blick auf das beispielgebundene Beweisen wird das beispielgebundene Argumentgefüge eingeführt. Eingangs wird dargestellt, was unter einem Argument zu verstehen ist (↑ Abs. 1.4.1). Danach werden Argumentgefüge behandelt und dabei zwischen mehrgliedrigen und mehrschichtigen Argumenten unterschieden (↑ Abs. 1.4.2). Anschließend erfolgt ein Vergleich zwischen Argumenten und Schlüssen. Dabei wird insbesondere eine Abgrenzung von Argumenten zur Abduktion und Induktion vorgenommen, während unter bestimmten Bedingungen ein Argument mit der Deduktion als Schlussform identifiziert werden kann (↑ Abs. 1.4.3). Schließlich wird mit Blick auf den Forschungsgegenstand des beispielgebundenen Beweisens dargestellt, was man unter einem beispielgebundenen Argument verstehen kann (↑ Abs. 1.4.4).

1.5 *Latente Sinnstrukturen und beispielgebundenes Beweisen*

In ↑ Kap. 1.5 wird das beispielgebundene Beweisen begrifflich gefasst und damit die theoretische Grundlage der vorliegenden Arbeit gelegt. Hierfür wird der Begriff der latenten Sinnstruktur verwendet (↑ Abs. 1.5.1). Anschließend wird geklärt, was unter der subjektiven Realisierung und Manifestierung beim Entdecken und Prüfen mit latenter Beweisidee zu verstehen ist (↑ Abs. 1.5.2). Dies führt alsdann zum Beweis als subjektiv realisierter und manifestierter Sinnstruktur (↑ Abs. 1.5.3). Darauf aufbauend kann schließlich das beispielgebundene Beweisen definiert werden (↑ Abs. 1.5.4).

2.1 *Forschungsperspektiven*

In ↑ Teil 2 geht es um die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Forschungsperspektiven, Forschungsfragen und Forschungsmethoden. In ↑ Kap. 2.1 werden die Forschungsfragen zu fünf verschiedenen Forschungsperspektiven präzisiert. Dabei stellt die theoretische Perspektive das beispielgebundene Beweisen i.e.S. dar (↑ Abs. 2.1.1). Die kategoriale Perspektive begreift das beispielgebundene Beweisen als Changieren zwischen induktivem Prüfen und formellem Beweisen (↑ Abs. 2.1.2). Die praktische Perspektive fasst das beispielgebundene Beweisen i.w.S. auf (↑ Abs. 2.1.3). Bei der sprachlichen Perspektive steht die Explikation des Allgemeingültigen am Besonderen im Vordergrund (↑ Abs. 2.1.4). Schließlich werden noch weitere, weniger zentrale Perspektiven eingenommen (↑ Abs. 2.1.5)

2.2 *Methodologie und Methoden*

In ↑ Kap. 2.2 wird zu Beginn der methodischen Reflexion die vorliegende Arbeit in den interpretativen Zweig der Mathematikdidaktik eingeordnet. Dazu wird das der interpretativen Mathematikdidaktik zugrundeliegende allgemeine Weltbild expliziert und in Beziehung zum eigenen Vorgehen gesetzt (↑ Abs. 2.2.1). Als relevanter Forschungsansatz sind in diesem Zusammenhang die sogenannten Einzelfallstudien zu nennen (↑ Abs. 2.2.2). Im Rahmen von Einzelfallstudien können verschiedene Gesprächsformen zum Einsatz kommen, welche Auswirkungen auf den resultierenden Gesprächs- bzw. Interaktionstext haben (↑ Abs. 2.2.3). Anschließend werden für die entstandenen Texte mögliche Interpretationsansätze vorgestellt, wie sie sich in der interpretativen Mathematikdidaktik eingebürgert haben (↑ Abs. 2.2.4). Alsdann wird der spezifische theoretische Zugriff dieser Arbeit reflektiert, der zunächst vom Forschungsgegenstand des beispielgebundenen Beweisens her gedacht wird (↑ Abs. 2.2.5). Die Abduktion wird an dieser Stelle nicht als Schlussform in der Charakterisierung mathematischen Entdeckens, sondern als der Interpretation von Texten dienendes forschungslogisches Vorgehen behandelt (↑ Abs. 2.2.6). Schließlich wird über das forschungspraktische Vorgehen reflektiert (↑ Abs. 2.2.7) und auf das Beweisen und Typisieren am Beispiel eingegangen (↑ Abs. 2.2.8).

2.3 *Forschungspraxis*

In ↑ Kap. 2.3 soll das forschungspraktische Vorgehen der empirischen Studie konkretisiert werden. Bei diesen der methodischen Konzeption nachgelagerten Überlegungen geht es hauptsächlich um die Datenerhebung, deren Aufbereitung und deren Auswertung. Zunächst wird die Auswahl und die Entwicklung der verwendeten Aufgabenbeispiele motiviert (↑ Abs. 2.3.1). Anschließend wird der Ablauf der durchgeführten Schülerexperimente geschildert (↑ Abs. 2.3.2). Ferner wird das Vorgehen bei der Auswahl der Szenen zur Analyse begründet und auf die Transkription der Szenen eingegangen (↑ Abs. 2.3.3). Schließlich werden die Szenen interpretiert (↑ Abs. 2.3.4).

3.1 – 3.5 *Einzelfallstudien*

Die anschließend in ↑ Teil 3 dargestellten Einzelfallstudien bilden das empirische Fundament der vorliegenden Arbeit über das beispielgebundene Beweisen. Die dabei durchgeführten Analysen sind zum einen grundschulbezogene Aufgabenstellungen zum gegensinnigen Verändern (↑ Kap. 3.1) und zu Zahlenmauern (↑ Kap. 3.2). Zum anderen handelt es sich um sekundarstufenbezogene Aufgabenstellungen zum vollständigen Graphen (↑ Kap. 3.3), zum Außenwinkelsatz (↑ Kap. 3.4) und zu den Potenzregeln (↑ Kap. 3.5). Der inhaltliche Fokus wird dabei grundsätzlich auf Indizien für und gegen die subjektive Realisierung des Beweises als Sinnstruktur gelegt (vgl. ↑ Abs. 2.1.1). Teils wird das beispielgebundene Beweisen im Changieren zwischen induktivem Prüfen und formalem Beweisen beobachtet (vgl. ↑ Abs. 2.1.2), teils Zugänge des Entdeckens und Prüfens zum beispielgebundenen Beweisen erprobt (vgl. ↑ Abs. 2.1.3), teils die sprachliche Explikation des Allgemeingültigen beim beispielgebundenen Beweisen der Schüler verfolgt (vgl. ↑ Abs. 2.1.4). Hinzu treten noch weitere Perspektiven, wie die Wahl und die Anzahl der Beispiele, die Allgemeinheitsgrade von Behauptungen, das Beweisverständnis der Schüler beim beispielgebundenen Beweisen sowie Interventionsmöglichkeiten des Experten resp. Lehrenden auf das beispielgebundene Beweisen der Schüler (vgl. ↑ Abs. 2.1.5).

Aufbau der Einzelfallstudien

Der Aufbau der Einzelfallstudien in ↑ Teil 3 orientiert sich am folgenden Muster: Eingangs wird in der mathematischen Analyse jeweils der mathematische Kern des gewählten Aufgabenbeispiels behandelt. In Vorbereitung auf die Einzelfallstudien werden dabei verschiedene Beweiswege und schülergerechte Darstellungsmittel erwogen und mathematikdidaktisch reflektiert. Die im methodischen Teil präzisierten Forschungsfragen erfahren danach jeweils eine aufgabenbezogene Akzentuierung und sollen zu den Einzelfallbetrachtungen überleiten. Kontextschilderungen enthalten Informationen zu den jeweils befragten Schülern und zum jeweils anvisierten Ablauf des Schülerexperiments. Sie dienen dem Leser auch zur Überbrückung von nicht aufgeführten Interviewsequenzen. In den einzelnen Haupt-, Kontrast- und Vergleichsanalysen werden längere oder kürzere Interviewsequenzen dokumentiert, das Verhalten der Schüler beim beispielgebundenen Beweisen kommentiert und mit den angeführten Forschungsfragen sowie untereinander in Beziehung gesetzt. Es werden alsdann jeweils schülerbezogene Ergebnisse aus den Analysen heraus zusammengefasst. Schließlich erfolgt jeweils ein Resümé, das die durch die vorliegende Analyse gewonnenen Ergebnisse in den Gesamtzusammenhang der Arbeit stellt.

4 *Forschungsergebnisse*

In ↑ Teil 4 werden die Resultate aus den vorangegangenen Teilen der Arbeit vereint. Es fließen also Ergebnisse aus der Sichtung des Forschungsstands, der eigenen theoretischen Untersuchungen, der methodischen Reflexion und der eigenen empirischen Studien zusammen. Dies erfolgt entlang der im methodischen Teil aufgeworfenen Themen: Grundsätzlich ist der Fokus auf Indizien für und gegen die subjektive Realisierung des Beweises als Sinnstruktur gelegt worden (↑ Kap. 4.1). Auch wurde das beispielgebundene Beweisen im Changieren zwischen induktivem Prüfen und formalem Beweisen untersucht (↑ Kap. 4.2). Zudem wurden Zugänge des Entdeckens und Prüfens zum beispielgebundenen Beweisen eruiert (↑ Kap. 4.3). Überdies fand die sprachliche Explikation des Allgemeingültigen beim beispielgebundenen Beweisen Berücksichtigung (↑ Kap. 4.4). Schließlich sind noch Ergebnisse zu den weiteren Perspektiven angeführt (↑ Kap. 4.5). Ein Ausblick beschließt die vorliegende Arbeit (↑ Kap. 4.6).

Abkürzungsverzeichnis

Schülernamen

Al – Ali	Ma – Mareike
Ay – Aya	Mi – Mike
Fa – Fabian	Mo – Moritz
Fr – Frieda	So – Sonja
Ju – Judith	Sö – Sören
Lu – Ludwig	Za – Zaida

Eigenbezeichnungen

I – Interviewer	J.K. – Julian Krumsdorf

Abkürzungen

Aufl.	Auflage
Beh.	Behauptung
beispielgeb.	beispielgebunden
bspw.	beispielsweise
bzw.	beziehungsweise
c.f.	*confer* (lat.) für *compare, consult, see* (engl.)
Def.	Definition
d.h.	das heißt
Diss.	Dissertation
dto.	*dito* (frz.), *ditto* (ital.) – desgleichen (wörtl. gesagt, gesprochen)
e.g.	*exempli gratia* (lat.) für *for example* (engl.)
engl.	englisch
Fig.	Figur(en)
frz.	französisch
ggf.	gegebenenfalls
i.e.	*id est* (lat.) – das heißt
i.d.R.	in der Regel
ital.	italienisch
Habil.	Habilitationsschrift
Hrsg.	Herausgeber
Kl.	Klasse
lat.	lateinisch
sic!	*sic* (lat.) – (wirklich) so!
s.o.	siehe oben
s.u.	siehe unten
u.a.	unter anderem / und andere
Ts.	Taunus
Univ.	Universität
v.	von
v.a.	vor allem
Verallg.	Verallgemeinerung
z.B.	zum Beispiel
wörtl.	wörtlich
zw.	zwischen

Inhaltsverzeichnis

Teil 1

Forschungs(gegen)stand

In ↑ Kap. 1.1 wird der aktuelle Forschungsstand zum Beweisen dargestellt und darauf in ↑ Kap. 1.2 hinsichtlich des beispielgebundenen Beweisens vertieft. Alsdann werden in ↑ Kap. 1.3 die theoretischen Schlussformen der Abduktion, Induktion und Deduktion nach PEIRCE eingeführt, mit denen das Entdecken, Prüfen und Begründen von Behauptungen logisch charakterisiert werden kann. Zudem wird in ↑ Kap. 1.4 die Struktur von Argumenten nach TOULMIN thematisiert. Hierauf aufbauend wird in ↑ Kap. 1.5 eine Definition beispielgebundenen Beweisens i.e.S. (im engeren Sinne) und i.w.S. (im weiteren Sinne) gegeben.

1.1 Beweisen

Es heißt, die Mathematik sei eine beweisende Disziplin, deren Spezifikum das deduktive Schließen ist. Aus der Perspektive eines mathematischen Experten erscheint das Beweisen als ein Prozess, bei dem die Gültigkeit einer allgemein statuierten Behauptung aus bekannten Voraussetzungen durch schrittweise Anwendung von Sätzen und Definitionen formell-deduktiv und damit denknotwendig erwiesen wird. Der dokumentierte Beweis ist dann (als Produkt) eine Manifestation des schließend vollzogenen Beweisens (als Prozess). Auch in dieser Arbeit soll hauptsächlich vom Beweisen und weniger von Beweisen gesprochen werden, da nicht bestimmte Formen von Beweisen untersucht werden sollen, sondern sozial ausgehandelte Beweisprozesse und -verläufe, unter welchen Beweise als Produkte entstehen.

allgemeine Betrachtungen zum Beweisen

Bevor in ↑ Kap. 1.2 der Forschungsstand zum beispielgebundenen Beweisen diskutiert wird, erfolgen zunächst einige allgemeinere Betrachtungen zum Beweisen: Zunächst wird geklärt, was das Beweisen ausmacht, und durch welche Funktionen es charakterisiert werden kann (↑ Abs. 1.1.1). Diese Beweisfunktionen sind zu berücksichtigen, wenn – wie in der vorliegenden Arbeit – Schüler in mathematischen Gesprächen mit dem Experten beweisen. Dieser beobachtet, wie sich die Schüler während ihres Beweisens verhalten. Deshalb werden auch Studien zum Beweisverhalten von Schülern vorab behandelt (↑ Abs. 1.1.2). Schließlich erfolgt noch eine kurze sprachhistorische Betrachtung des Begriffs des Beweisens, um über dessen heutige Verwendung in der Mathematikdidaktik und in der Alltagssprache zu reflektieren. Auch werden einige Bemerkungen zum Verhältnis zwischen Beweisen, Begründen und Argumentieren gemacht (↑ Abs. 1.1.3).

1.1.1 Funktionen des Beweisens

In der mathematikdidaktischen Diskussion der vergangenen Jahrzehnte sind verschiedene Funktionen des Beweisens zusammengetragen worden, die deutlich machen, dass dem Beweisen je nach mathematikdidaktischem Ansatz und Kontext mehrere Facetten und Wirkungen zugesprochen werden. Diese werden im Folgenden angeführt und diskutiert, um das Thema der vorliegenden Arbeit, das beispielgebundene Beweisen, in den weiteren Rahmen des Beweisens einzubetten. Hierbei wird einem prozesshaften Verständnis vom (beispielgebundenen) Beweisen eine große Bedeutung zugemessen. Wenn in der nun zitierten Fachliteratur eher von Beweisfunktionen statt von Funktionen des Beweisens gesprochen wird, möge dies mitbedacht werden.

verifikative Beweisfunktion

Beweisfunktionen nach Bell [1976]*: verification, illumination, systematisation*

Das historisch gewachsene Verständnis vom Beweisen stellt die Verifikation einer Aussage in den Vordergrund. Die Allgemeingültigkeit einer Aussage soll durch logisches Schließen streng deduktiv erwiesen werden, so dass kein Zweifel an ihrer Richtigkeit (ihrer Wahrheit) bestehen bleibt. In einer Studie von Bell (1976) über das Begründungsverhalten von Schülern im Mathematikunterricht werden zur Bedeutung des Beweises in der mathematischen Disziplin jedoch auch weitere Beweisfunktionen angeführt:

> ”The mathematical meaning of proof carries three senses. The first is *verification or justification*, concerned with the truth of a proposition; the second is *illumination*, in that a good proof is expected to convey an insight into *why* the proposition is true; this does not affect the *validity* of a proof, but its presence in a proof is aesthetically *pleaning*. The third sense of proof is the most characteristically mathematical, that of *systematisation*, i.e. the organisation of results into a deductive system of axioms, major concepts and theorems, and minor results derived from these.” (Bell, 1976, 24, H.i.O.)

explanative Beweisfunktion

Was der Autor hier als *illumination* umschreibt, lässt sich auch als explanative (erklärende, zur Einsicht verhelfende) Beweisfunktion deuten. Bell (1976) betont im vorliegenden Zitat, dass ein *good proof* auch Einsicht darüber vermittelt, warum (und nicht nur dass) eine allgemeingültige Behauptung wahr ist. Als mathematikspezifisch sieht der Autor eine systematisierende Beweisfunktion im Sinne einer Vernetzung von Axiomen, Begriffen und Sätzen an, wie sie dem Leser aus der Hochschulmathematik geläufig ist. Dem gegenüber gibt Jahnke (1978) zu bedenken, dass die Schulmathematik nicht axiomatisch aufgebaut sei, was er auf den folgenden Umstand zurückführt:

systematisierende Beweisfunktion

> ”Das Problem der fehlenden Axiomatik hängt genuin mit dem Problem der Entwicklungsdynamik des Wissens zusammen, denn die Tatsache, daß das Wissen beim Schüler sich entwickelt, macht es unmöglich, sich auf den Standpunkt eines abgeschlossenen Systems zu stellen. Bei dem Problem der fehlenden Axiomatik geht es also darum, wie man eine bewußte Entwicklungsperspektive auf das Beweisproblem gewinnen kann.” (Jahnke, 1978, 212)

Mit diesem didaktischen Problem der Entwicklung neuen Wissens setzt sich de Villiers (1990) insofern auseinander, als dass er die entdeckende Beweisfunktion thematisiert. Der Autor ergänzt die obige Aufstellung von Bell (1976, 24) zudem noch um die kommunikative Beweisfunktion:

Beweisfunktionen nach de Villiers [1990]

- *verification* (concerned with the **truth** of a statement)
- *explanation* (providing insight into **why** it is true)
- *systematisation* (the **organisation** of various results into a deductive system of axioms)
- *discovery* (the discovery or invention of **new** results)
- *communication* (the **transmission** of mathematical knowledge)

(de Villiers, 1990, 18f., H.i.O.)

Bei de Villiers (1990) und Rav (1999) lassen sich eine Reihe von älteren mathematischen Sätzen finden, die durch das Entdecken einer zumeist erst weniger allgemeinen Aussage bewiesen wurden. de Villiers (1990, 17ff.) möchte mit seinem Verweis auf die gängige Praxis in Schulbüchern einer anscheinend verbreiteten Fehlvorstellung zur Entstehung von Beweisen entgegentreten, bei der neue mathematische Sätze *a priori* als Behauptungen statuiert und erst *a posteriori* bewiesen würden. Mit dem kommunikativen Aspekt weist de Villiers (1990) schließlich auf die Bedeutung der Weitergabe, Vermittlung und Diskussion mathematischen Wissens in Beweisform hin. Beweise erleichtern die Kommunikation über Mathematik und werden zu einem sozial geteilten Kulturgut.

Die vorstehend unterschiedenen Beweisfunktionen sind beim Beweisen in Schule und Hochschule häufig ineinander verwoben, und oft treten einige von ihnen je nach Kontext gegenüber anderen hervor. So trägt die erste Beweisfunktion der Verifikation einen gemeinhin als objektiv, wissenschaftlich angesehenen Charakter, wie er insbesondere durch formelle (formalisierte) Beweise zum Ausdruck kommt. Dem gegenüber verweist die fünfte Beweisfunktion eher auf die Aushandlung mathematischen Wissens zwischen Lernenden, welche sich etwa beim gemeinsamen Suchen, Finden und Darstellen von Beweisen zeigt. Bei Hanna & Jahnke (1996, 902f.), de Villiers (1999, 3) und Hanna (2000, 8) werden noch weitere Beweisfunktionen genannt; für die vorliegende Arbeit sind jedoch hauptsächlich die fünf genannten Funktionen relevant. Sie werden im Folgenden anhand weiterer Quellen der zitierten Reihenfolge nach inhaltlich präzisiert. Dabei wird jeweils ein erster Bezug zum beispielgebundenen Beweisen vorgenommen.

Verifikative Beweisfunktion

verification – verifikative Beweisfunktion

An primären Funktionen des mathematischen Beweisens wurden oben Verifikation und Explanation genannt. Diesen entsprechen etwa die etymologisch ableitbaren Bedeutungen des Erweisens und des Weise-Machens (↑ Abs. 1.1.3). Hanna macht in ihren frühen Arbeiten einen ähnlichen Unterschied zwischen Beweisen, die beweisen (*proofs that proof* bzw. *proving that*) und Beweisen, die erklären (*proofs that explain why* bzw. *proving why*):

> "A proof that proves shows only *that* a theorem is true; it provides evidential reasons alone. It is concerned only with substantiation, with what are known as *Rationes cognoscendi*, that is, why-we-hold-it-to-be-so reasons. A proof that explains, on the other hand, also shows *why* a theorem is true; it provides a set of reasons that derive from the phenomenon itself: *Rationes essendi*, or why-it-is-so reasons. A proof that proves may rely on mathematical induction or even on syntactic considerations alone. But a proof that explains must provide a rationale based upon the mathematical ideas involved, the mathematical properties that cause the asserted theorem to be true." (Hanna, 1990, 9, H.i.O.)

Der Beweis, der beweist, ist somit ein relativ lückenloser und vollständiger Nachweis der Allgemeingültigkeit einer Aussage. Deren Wahrheit wird gesichert, indem aus bekannten Voraussetzungen (Prämissen) durch denknotwendiges (deduktives) Schließen vermöge mathematischer Gründe (Definitionen, Axiome, bekannte Sätze) auf resultierende Aussagen (Konklusionen) geschlossen wird (↑

Kap. 1.4). Prämissen und Konklusionen sind dabei möglichst allgemein gehalten. Die Wahrheit der Aussage wird somit nicht empirisch unter Anführung von Beispielen, sondern theoretisch gesichert, indem die Aussage als allgemeingültig erwiesen wird. Im Fach Mathematik der allgemeinbildenden Schule und mehr noch der Hochschule steht diese verifikative Beweisfunktion im Vordergrund. Häufig begegnet diese dem Leser in der formellen (formalisierten) Darstellung von Beweisen in Fachpublikationen und Lehrbüchern in Verwendung von Variablenzeichen und von mathematischen Symbolen. Man spricht dann von einem formellen Beweis, der hauptsächlich wahrheitssichernden Charakter hat. Dieser kann auch als manifestes, in algebraischer Sprache formuliertes Produkt eines Beweisprozesses angesehen werden. In Differenzierung der Darstellung eines Beweises wird in der vorliegenden Arbeit von formalem Beweisen gesprochen, wenn ein Beweis von seinen Argumenten her gesehen zwar allgemein, aber von seiner Darstellung her nicht formell (formalisiert) gehalten ist, etwa wenn ein Schüler beim Beweisen seine Umgangssprache zur Formulierung des Allgemeinen und des Allgemeingültigen benutzt. Mit der Differenzierung zwischen formalem Beweisen und formellem Beweisen wird hier also eine ähnliche Unterscheidung getroffen, wie dies in den Diskussionen um formale Bildung der 1980er Jahre zu Form und Formalisierung etwa Wicke (1985, 55ff.) unternommen hat.

vorwiegend verifikative Funktion formeller Beweise

formales und formelles Beweisen

Erklärende Beweisfunktion

explanation – erklärende Beweisfunktion

Hanna (1990, 9) unterscheidet in ihrem obigen Zitat vom Beweis, der beweist, den Beweis, der erklärt, und insofern die ursächlichen Gründe einer behaupteten Aussage verstehbar machen soll. Wird ein formeller Beweis etwa nur als schließender Kalkül (etwa in Umformungen von Termen mit Variablenzeichen vermöge von Operatoren) verstanden, mag er eine verifikative Funktion erfüllen. Dies bedeutet aber noch nicht, dass der Lernende auch die Einsicht erhält, warum sich die jeweilige Aussage unter den gegebenen Voraussetzungen als allgemeingültig erweist.

Daraus haben sich insbesondere für die Schulmathematik didaktische Ansätze ergeben, die auf eine Relativierung der dominierenden verifikativen Beweisfunktion hinauslaufen. Die Wahrheit einer mathematischen Aussage kann etwa anhand einzelner Beispiele durch Zeichnen, Messen oder Rechnen empirisch (induktiv) geprüft werden. Damit lassen sich aber häufig noch nicht die Gründe für die Allgemeingültigkeit der betrachteten Aussage klären. Hier kann das beispielgebundene Beweisen ansetzen: Wenn es dem Lernenden nämlich hinsichtlich einer Aussage gelingt, aus der empirischen Erkenntnis am besonderen Beispiel eine theoretische Erkenntis des Allgemeingültigen zu erlangen, hat er Einsicht darin gewonnen, warum die betrachtete Aussage allgemeingültig ist. Beim beispielgebundenen Beweisen tritt, wie die späteren theoretischen Ausführungen in ↑ Kap. 1.5 zeigen, die Einsicht gewinnende, explanative Beweisfunktion hervor: Der Lernende muss zwischen dem Besonderen und dem Allgemeingültigen unterscheiden, mathematische Zusammenhänge erschließen und die Grenzen vorgenommener Verallgemeinerungen erkennen. Wenn Lernende überdies während eines Beweises ihr Augenmerk auf ein charakteristisches oder strukturelles Merkmal richten, kann dies Steiner (1978) zufolge Einsicht bewirken:

erklärende Funktion beispielgebundenen Beweisens

> "My proposal is that an explanatory proof makes reference to a characterizing property of an entity or structure mentioned in the theorem, such that from the proof it is evident that the result depends on the property. It must be evident, that is, that if we substitute in the proof a different object at the same domain, the theorem collapses; more, we should be able to see as we vary the object how the theorem changes in response." (STEINER, 1978, 143)

beispielgebundenes Beweisen als Prozess

An dieser Schilderung wird aber auch deutlich, dass es beim erklärenden Beweisen nicht so sehr auf den Beweis als fertiges Produkt ankommt, wenn er erhellend sein soll, sondern auf einen allmählichen Erkenntnisprozess und dessen passende didaktische Motivierung. Dies lässt sich gerade auch vom beispielgebundenen Beweisen sagen.

Nicht nur in der neueren fachdidaktischen Literatur, sondern auch von Mathematikern selbst wird der explanativen Beweisfunktion gegenüber der verifikativen Beweisfunktion eine besondere Bedeutung eingeräumt. Es sei hier auf computergestützte oder überlange Beweise etwa zum Vier-Farben-Problem, zur Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen oder zum Großen FERMATschen Satz hingewiesen, die zwar wahrheitssichernd, aber selbst vielen Mathematikern schwer erklärlich sind. MANIN (1977, 51) zufolge ist es wohl gerade auch ein Qualitätsmerkmal von Beweisen, wenn sie uns zur Einsicht verhelfen: "The moral: a good proof is one which makes us wiser." Mit dieser an das obige Zitat von BELL (1976, 24) erinnernden Charakterisierung eines *good proof* wird die explanative Funktion des Beweisens im Sinne eines einsichtsvollen Weise-Machens erneut hervorgehoben (↑ Abs. 1.1.3).

Systematisierende Beweisfunktion

systematisation – systematisierende Beweisfunktion

Die dritte, eingangs auch schon bei BELL (1976, 24) genannte Beweisfunktion betrifft die beziehungsreiche Systematisierung mathematischer Begriffe, Axiome, Definitionen und Sätze. Dieser Ordnungsaspekt lässt sich auf die Zeit während oder nach entsprechender Beweisaktivitäten beziehen. Bezüglich des Mathematikunterrichts wird etwa seit FREUDENTHAL (1973, 451ff.) häufig vom lokalen Ordnen gesprochen, und zwar in Abgrenzung zum streng deduktiv-axiomatischen globalen Ordnen in der Hochschulmathematik und rückblickend auf die Zeit der sogenannten Neuen Mathematik an den Schulen der 1970er Jahre. Beim lokalen Ordnen werden nur in einzelnen (schul)mathematischen Teilgebieten Beweise ausgeführt und miteinander in Beziehung gesetzt, während ansonsten anschauliche, heuristische Überlegungen und Plausibilitätsbetrachtungen angestrebt werden. Ein Beispiel für ein solches lokales Ordnen gibt die Satzgruppe des PYTHAGORAS (inklusive Höhen- und Kathetensatz).

weitere Aspekte der systematisierenden Beweisfunktion

DE VILLIERS (1986, 8f.) differenziert hinsichtlich weiterer Funktionen einer Syste-matisierung von bekannten Sätzen, Definitionen und Axiomen. Er führt dabei die Identifikation nicht explizierter oder bislang verborgen gebliebener Voraussetzungen von Sätzen an, die Möglichkeit einer Vereinfachung oder Vereinheitlichung mathematischer Theorien, das Aufspüren möglicher Ring- oder Zirkel-schlüsse zwischen mathematischen Argumenten sowie die Einnahme einer globalen Perspektive, um etwa strukturelle Gemeinsamkeiten von Objekten herauszuarbeiten, und um ggf. ökonomischere oder elegantere Beschreibungen mathematischer Sachverhalte zu finden.

systematisierende Funktion des Beweisens selbst

Aber auch beim Beweisen selbst werden zugrunde gelegte mathematische Sätze, Definitionen und Begriffe aufeinander bezogen. Der Lernende muss mathematische Prämissen und Regeln im Beweisprozess sinnvoll ordnen und verknüpfen, um auf entsprechende Konklusionen zu schließen. Zur Darstellung der Beweisstruktur eignen sich der Theorie von Argumenten nach Toulmin (1996) entlehnte mehrgliedrige oder mehrschichtige Argumentgefüge, wie sie in ↑ Kap. 1.4 dieser Arbeit eingeführt werden. Das Systematisieren von Aussagen ist auch hinsichtlich des Allgemeinheitsgrads einer fraglichen Behauptung relevant, wie sich dies beim beispielgebundenen Beweisen zeigt, wenn etwa der Gültigkeitsbereich einer Behauptung untersucht wird und es im Rahmen dieses Beweisprozesses zu einer fortschreitenden Verallgemeinerung der Behauptung kommt. Beispielsweise kann man an einen Regelverband denken, in dem es um die Addition einer bestimmten Anzahl äquidistanter Zahlen in verschiedener Anordnung geht, wobei die Konstanz der Summe beim gegensinnigen Verändern ein wiederkehrendes Argument darstellt (↑ Kap. 3.1).

systematisierende Funktion beispielgebundenen Beweisens

Entdeckende Beweisfunktion

discovery – entdeckende Beweisfunktion

Wie oben bereits angesprochen, thematisiert de Villiers (1990) die entdeckende Beweisfunktion als vierten Aspekt, welcher später von Rav (1999) in seiner Analyse mathematikhistorischer Pionierleistungen durch einige Beispielen illustriert wird. de Villiers (1990, 21) versteht unter der entdeckenden Funktion des Beweisens das Auffinden oder Erzeugen neuer Ergebnisse durch die Beweistätigkeit selbst: "proof can frequently lead to new results". Er grenzt sich dabei von der unterrichtsnahen Vorgehensweise ab, bei der zunächst eine Behauptung *a priori* aufgestellt, damit schon bekannt und erst *a posteriori* bewiesen wird ("first the result is presented *followed* by the proof").

Entdecken durch Beweisen

Beweisen durch Entdecken

Von der entdeckenden Beweisfunktion zu unterscheiden ist das Beweisen durch Entdecken. Meyer (2007, 33f.) schickt diesbezüglich voraus, dass vom logischen Standpunkt her durch einen streng deduktiven Beweis gerade kein neues Wissen generiert bzw. entdeckt wird, da von vorausgesetzten Prämissen vermöge bekannter Regeln deduktiv auf eine Konklusion geschlossen wird. Wie in ↑ Abs. 1.3.3 ausführlicher behandelt wird, kann der Lernende hingegen eine Entdeckung machen, indem er ein Resultat (im logischen Sinne) anhand eines besonderen Beispiels deduktiv herstellt. In der deduktiven Herstellung eines als beispielhaft begriffenen Resultats kann er dann ggf. einen allgemeingültigen Beweis erkennen. Meyer & Voigt (2009a, 48ff.) zufolge bedeutet dies, dass der Lernende mit latenter Beweisidee entdeckt. Das Entdecken mit latenter Beweisidee gilt als didaktisch besonders produktiv, zumal es sich zum beispielgebundenen Beweisen wandeln kann. Auch deshalb erscheint es im Rahmen der vorliegenden Arbeit sinnvoll, (beispielgebundene) Beweisprozesse zu untersuchen, d.h. auch eher vom Beweisen statt von Beweisen zu sprechen. Ein solcher (beispielgebundener) Beweisprozess schließt einen Wechsel zwischen Entdecken, Prüfen und Begründen ein (↑ Kap. 1.4).

beispielgebundenes Beweisen durch Entdecken

Kommunikative Beweisfunktion

communication – kommunikative Beweisfunktion

Das Beweisen besitzt auch kommunikative Funktionen wie die Wissensvermittlung, das Argumentieren und das Überzeugen Anderer. Mit Letzterem dürfte im Mathematikunterricht aber weniger ein Überreden gemeint sein – das heutzutage pejorativ verwendete Weismachen ist beim Beweisen allenfalls von sprachlichem Interesse (↑ Abs. 1.1.3). Auch geht es beim Beweisen im Mathematikunterricht eher weniger um die Strittigkeit einer behaupteten Aussage, so dass sich kein alltagsnaher Dissens einstellen dürfte (vgl. etwa Krummheuer (2003, 248f.) und Schwarzkopf (2000, 238f.)). Vielmehr besteht häufig bald Konsens über die Allgemeingültigkeit der betrachteten Aussage, wenn auch der Grad ihrer Allgemeingültigkeit diskursionswürdig sein kann. Vor allem aber ist die Frage, wie bewiesen werden kann, Gegenstand der mathematischen Auseinandersetzung. Ausgehandelt, d.h. verworfen, modifiziert, akzeptiert oder verfeinert werden die jeweiligen Argumente, die zu der betrachteten Aussage führen:

> ”Proof as a form of social interaction (...) involves the **subjective negotiation** of not only the meanings of concepts concerned, but implicitly also of the criteria for an acceptable argument. In turn such a social filtration of a proof in various communications contributes to its refinement and the identification of errors, as well as sometimes to its rejection by the discovery of a counter-example.” (de Villiers, 1990, 22, H.i.O.)

Über Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht gibt es mittlerweile eine reichhaltige Literatur (siehe etwa Mormann (1981), Schwarzkopf (2000), Knipping (2003), Bezold (2009)), auf die teils noch an späteren Stellen eingegangen wird.

kommunikative Funktion beispielgebundenen Beweisens

Ein Beweis erfordert an sich eine sprachliche Ausdrucksform in Variablenzeichen und deduktiven Schlüssen, welche seiner Allgemeinheit Rechnung trägt, um die behauptete allgemeingültige Aussage zu verifizieren. Eine Spannung liegt darin, dass das Denken und Sprechen in und an Beispielen den Lernenden jedoch naturgemäß leichter fällt. Auch dürfte das Versprachlichen des an Beispielen allgemein Erkannten den Lernenden zumal an der Front ihres Wissens schwer fallen. Dies gilt um so mehr für jüngere Schüler, die noch nicht algebraischformell zu sprechen oder zu schreiben vermögen.

Wie vorstehend angesprochen, besitzen die diskutierten Funktionen des Beweisens eine unterschiedliche Relevanz für verschiedene Beweistypen und Zugänge zum Beweisen. Im nachfolgenden ↑ Abs. 1.1.2 soll an vorwiegend quantitativ ausgerichteten Studien kurz dargestellt werden, welches Beweisverhalten von Schülern sich in der Praxis des Mathematikunterrichts zeigt, und wie dieses von Forschern kategorisiert und beurteilt wird. Dabei werden Aspekte beispielgebundenen Beweisens häufig thematisiert, so dass sich eine Lektüre dieser Studien lohnt.

1.1.2 Beweisverhalten von Schülern – empirische Studien

Kategorisierungen und Bewertungen des Beweisverhaltens von Schülern

Die in ↑ Abs. 1.1.1 dargestellten Funktionen von Beweisen spielen auch bei der Konzeption und Durchführung quantitativ angelegter Studien zum Beweisverhalten von Schülern eine Rolle, wenn es etwa darum geht, inwiefern die Äußerungen eines Schülers als Beweis anzusehen sind. Das Beweisverhalten von Schülern lässt sich manchen Forschern zufolge kategorisieren und in Hinblick auf erreichte Kompetenzniveaus beurteilen:

- Beweisverhalten von Schülern zwischen Induktion und Deduktion

  Einige Forscher (beispielsweise Fischbein & Kedem (1982), Vinner (1983), Chazan (1993), Edwards (1998)) untersuchen, in wie weit bei Schülern ein mathematikspezifisch deduktives Vorgehen von einem eher heuristisch-induktiven Vorgehen unterschieden werden kann.

- Detailierte Kategorisierungen des Beweisverhaltens von Schülern

  Zunehmend umfangreichere Studien (etwa Balacheff (1988), Martin & Harel (1989), Healy & Hoyles (2000)) gehen der Frage nach, mit welchen detailiert angelegten Kategorisierungen sich das Beweisverhalten von Schülern beschreiben lässt. Teils werden dabei Beweisschemata und -typen entwickelt.

- Kompetenzniveaus von Schülern im (beispielgebundenen) Beweisen

  Manche Studien verwenden überdies Beweiskategorisierungen, um Kompetenzniveaus von Schülern im (beispielgebundenen) Beweisen zu ermitteln, zu operationalisieren und auf diesem Wege für die Unterrichtspraxis nutzbar zu machen (hier Goldberg (1984)). Diese Kompetenzniveaus orientieren sich häufig an einer formellen Beweisdarstellung als höchster Stufe.

Relevanz bisheriger empirischer Studien für das beispielgebundene Beweisen

In den betrachteten Studien geben manche Forscher auch darüber Auskunft, welche didaktischen Mittel und Methoden zu empfehlen sind, um das (beispielgebundene) Beweisen der Schüler zu fördern oder zu untersuchen. Mit Blick auf die Einzelfallstudien in ↑ Teil 3 werden einige der dabei genannten Vorgehensweisen herausgestellt.

Beweisverhalten von Schülern zwischen Induktion und Deduktion

induktives Prüfen nach deduktivem Schließen nach FISCHBEIN & KEDEM [1982]

FISCHBEIN & KEDEM (1982, 128) untersuchen u.a., ob Schüler nach einem deduktiv geführten Beweis noch weitere induktive Prüfungen durchführen ("need for further checks"), um sich der Allgemeingültigkeit der zu beweisenden Aussage ganz sicher zu werden. Der Einteilung der Antworten von etwa 400 Schülern im Alter von 15 bis 17 Jahren nach kommen die Autoren zu folgendem Ergebnis:

> "most of the subjects favour supplementary checks of an already proven mathematical statement, even if they have previously expressed their full agreement with the statement and its formal proof. (...) Our basic explanation of this finding is that the ordinary student is intuitively inclined towards an empirical interpretation of the validity of an argumentation. He naturally tends to seek support for a statement by accumulating as many as possible significant confirmations." (FISCHBEIN & KEDEM, 1982, 131)

induktives Prüfen als möglicher Ausgangspunkt beispielgebundenen Beweisens

Die Autoren führen ein zusätzliches Prüfen des schon Bewiesenen an neuen Beispielen damit auf ein induktiv geprägtes, natürliches Beweisverhalten der Schüler zurück, bei dem diese möglichst viele Belege zur Bestätigung eines Beweises einholen. Könnte man den Befund der Autoren aber nicht auch dadurch erklären, dass sich die Schüler nicht nur an der verifikativen Beweisfunktion orientieren? Durch die nachträglich bestätigenden Beispiele scheinen die Schüler mehr Einsicht im Sinne der explanativen Beweisfunktion zu gewinnen (↑ Abs. 1.1.1). Diese Interpretation vor dem Hintergrund der Beweisfunktionen hätte folgende Konsequenz: Sofern Schüler formell (in formalisierter Sprache) beweisen können und danach induktiv prüfen, dürften sie im Sinne der explanativen Beweisfunktion das zuvor allgemeingültig Bewiesene nunmehr in der Besonderheit des gewählten Beispiels wiedererkennen. Das beispielgebundene Beweisen kann auf diesem Wege also seine Berechtigung durchaus selbst für Schüler erfahren, welche formell beweisen können. Dies heißt umgekehrt aber auch, dass das induktive Prüfen − gegenüber der landläufigen Interpretation − nicht nur als ein Notbehelf für jene Schüler anzusehen ist, welche formelle Beweise nicht nachvollziehen oder nicht selbst führen können. Das induktive Prüfen lässt sich im Sinne der explanativen Beweisfunktion vielmehr auch als möglicher Ausgangspunkt für das beispielgebundene Beweisen betrachten. Zudem lässt sich der Befund der Autoren insofern hinterfragen, als dass Schüler bei vorgetragener Zustimmung oder Reproduktion eines formell dargestellten Beweises dessen Allgemeingültigkeit nicht notwendigerweise auch einsehen müssen.

induktives Prüfen und deduktives Schließen bei FISCHBEIN [1982]

In Hinblick auf dieselbe Studie stellt FISCHBEIN (1982) fest:

> "Only 24.5% of the entire population accepted the correctness of the proof and *at the same time* answered that additional checks are not necessary (...) *The concept of formal proof is completely outside the main stream of behaviour*." (FISCHBEIN, 1982, 16f., H.i.O.)

Der Autor interpretiert dieses Ergebnis dahingehend, dass Schülern der Unterschied zwischen Induktion und Deduktion nicht klar sei.

Bestätigung von speziellen, schon allgemein bewiesenen Aussagen bei Vinner [1983]

Vinner (1983, 289ff.) untersucht Verhaltensweisen von Schülern beim Beweisen insofern, als dass er die Schüler Spezifikationen von bereits bewiesenen Aussagen untersuchen lässt. Er macht dabei folgende Beobachtungen:

- Einige Schüler prüfen die spezielle Aussage im Beispiel rein induktiv, etwa durch Ausrechnen.
- Andere Schüler verwenden jedoch den schon bekannten Beweis auch als Mittel, um durch dessen Spezifikation die bewiesene Aussage nochmals zu bestätigen.
- Nur etwa die Hälfte der als unterschiedlich begabt ausgewiesenen 365 Schüler tendiert dazu, auf die Allgemeingültigkeit des Beweises zu verweisen, welche Spezifikationen *per se* einschließt.

Vinner (1983, 294) zieht aus seinen Beobachtungen die Schlussfolgerung, dass ein Drittel der Schüler das Wesen eines mathematischen Beweises nicht verstehe. Hier stellt sich jedoch die Frage, ob die Schüler nicht eher einer gefühlten Erwartung der Lehrkraft entsprechen, im Beispiel genauso zu schließen wie im Beweis, wenn dieser in seiner Allgemeinheit im Unterricht schon geführt worden ist.

Reichen mehrere Beispiele für einen Beweis aus?

Eine zudem in einigen Studien untersuchte Frage ist, ob Schülern ein Prüfen der Behauptung an mehreren Beispielen ausreicht, um die Allgemeingültigkeit einer behaupteten Aussage zu sichern, oder ob für die Schüler ein Beweis mehr ausmacht. Diese Frage ist für den Forschungsgegenstand des beispielgebundenen Beweisens von besonderer Bedeutung. Sie wird in den betrachteten Studien indessen häufig vor dem Hintergrund einer angenommenen Gegensätzlichkeit zwischen einem induktiv geprägten, informellen Beweiszugang und einer deduktiven, formellen Beweisdarstellung untersucht und je nach Schülerantwort kategoriell entschieden.

zur Rolle des Beispiels beim Beweisen bei Chazan [1993]

Chazan (1993, 359ff.) hat in seiner teilweise qualitativ untermauerten Studie über computergestützte empirische Verifikationen geometrischer Aussagen Schüler interviewt, ob diese empirische Belege schon als Beweis betrachten oder nicht (*empirical evidence as proof*, als dichotome Kategorien formuliert: *evidence is proof* und *evidence is not proof*). Auch befragt er die Schüler, ob diese umgekehrt einen mathematischen Beweis lediglich als empirischen Beleg betrachten oder nicht (*mathematical proof simply as evidence*, als dichotome Kategorien formuliert: *proof is just evidence* und *proof is not just evidence*).

In der Kategorie *evidence is proof* fasst Chazan (1993, 368ff.) folgende Schüleransichten zusammen:

- ein Beispiel reicht als Begründung der allgemeinen Aussage aus
- es sind (geometrisch motivierte) Fallunterscheidungen vorzunehmen

- ein Beispiel ist repräsentativ für eine ganze Klasse von Beispielen
- ein Beispiel sollte nicht zu speziell gewählt werden, da es sonst als nicht repräsentativ gelten kann

Dem gegenüber zählt CHAZAN (1993, 370f.) folgende Schüleransichten zur Kategorie *evidence is not proof*:

- es könnte ein Gegenbeispiel zur behaupteten Aussage existieren
- jedes Beispiel ist in irgendeiner Hinsicht besonders
- Messen (Zeichnen) ist nicht exakt

Hinsichtlich des Beweisverständnisses findet CHAZAN (1993, 371ff.) bei den Schülern verschiedenste Auffassungen vor: Einige Schüler erwecken den Eindruck, dass der Beweis nur ein weiterer empirischer Beleg sei, andere sind der Meinung, dass ein Beweis keine Sicherheit vor weiteren Gegenbeispielen gebe, nicht allgemeingültig sei, sich nur auf spezielle Voraussetzungen beziehe oder von der Richtigkeit angeführter Gründe abhängig sei. Zudem gibt es Schüler, die die Auffassung vertreten, dass der Beweis nicht nur ein empirischer Beleg sei, da er für alle betrachteten Fälle geführt werden könne.

Problematik der Bildung von Kategorien zum Beweisverhalten von Schülern

Die von CHAZAN (1993) dargestellten Interviewauszüge lassen eine weitgehende Reflexion der Schüler über die mathematikspezifische (bzw. geometriespezifische) Beweisproblematik erkennen. Die oben genannte Kategorie, dass ein Beispiel repräsentativ für eine ganze Klasse von Beispielen sein kann, kennzeichnet ein genuin beispielgebundenes Beweisverständnis. Es stellt sich dabei allerdings auch die Frage, ob sich das beobachtete Beweisverhalten und die daraus abgeleiteten Beweisvorstellungen von Schülern in der vorstehenden Weise kategorisieren lassen. CHAZAN (1993, 385) kommt etwa auch zu dem Ergebnis, dass extensives Arbeiten an Beispielen und Messen die Schüler nicht *per se* vom (beispielgebundenen) Beweisen abhalten. Zugleich beobachtet er eine Skepsis jüngerer Schüler gegenüber rein deduktiven, auf theoretische Wahrheitssicherung abzielenden Beweisen. Deshalb empfiehlt CHAZAN (1993, 383), mit geometrischen Beweisen unter Betonung ihrer explanativen Funktion zu beginnen. Sie könnten der Ausgangspunkt dafür sein, den Schülern dann auch die Bedeutung der verifikativen Beweisfunktion bei deduktiv-formell gehaltenen Beweisen zu vermitteln.

induktiv und deduktiv denkende Schüler bei WILLIAMS [1979]

CHAZAN (1993, 382) diskutiert ferner eine Einteilung von WILLIAMS (1979) in *inductive thinkers*, *deductive thinkers* und Zwischenkategorien. In dessen Untersuchungen bestätige sich, dass Schüler hinsichtlich ihres Beweisverhaltens in mehrere Kategorien einzustufen seien. CHAZAN (1993, 382) diskutiert weiter, wie die Beweisvorstellungen der Schüler und die Selbsteinschätzung ihres Beweisverhaltens ausfallen und wie dieses durch Interventionen der Lehrpersonen zu verändern sei, um ggf. vorliegende Fehlvorstellungen auszuräumen. Statt aber Kategorien vorzugeben und das Beweisverhalten von Schülern danach einzuordnen, lässt sich das Beweisen der Schüler auch als zu erforschender Prozess auffassen, zumal aus manchen Interviewauszügen der Schüler hervorgeht, dass sich deren Beweisvorstellungen während ihres Beweisens ändern.

EDWARDS (1998) kommt in seiner Studie über das Beweisverhalten von Schülern der Sekundarstufe zu widersprüchlichen Einschätzungen. Einerseits müssten die Schüler an die Allgemeingültigkeit einer Aussage glauben, bevor sie diese beweisen. Andererseits würden die Schüler die Auffassung vertreten, dass ein Beispiel oder mehrere Beispiele für den Beweis einer Behauptung ausreichen. Dieser Befund kann so interpretiert werden, dass die Behauptung für die Schüler unfraglich ist, sie deshalb auf häufig einfachere, induktiv geprägte Strategien zur Beweissicherung zurückgreifen. Ihr Beweisbedürfnis lässt sich bereits in der Bestätigung der scheinbar unfraglichen Aussage durch Beispiele stillen. Deshalb könnte man das Beweisbedürfnis der Schüler möglicherweise dadurch wecken, dass man ihnen eine als fraglich ausgezeichnete Aussage an einem Beispiel präsentiert. Mit anderen Worten: Die Schüler könnten durch einen im Beispiel gehaltenen, vorgelegten Beweis zum beispielgebundenen Beweisen einer Behauptung als hinterfragenswerte Aussage angeregt werden. Dies stellt einen der Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen dar, wie sie in ↑ Kap. 1.3 theoretisch und in ↑ Kap. 3.5 anhand vorgelegter Potenzregeln praktisch behandelt werden.

induktives Prüfen statt Beweisfindung bei EDWARDS [1998]

Kategorisierungen des Beweisverhaltens von Schülern

Einige Forscher stellen verschiedene Beweiskategorien auf, nach denen sie das Beweisverhalten von Schülern einordnen. MARTIN & HAREL (1989, 43f.) – vorgängig HAREL & MARTIN (1986) – haben herausgefunden, dass selbst angehenden Lehrern eine Unterscheidung zwischen induktivem und deduktivem Vorgehen beim Beweisen nicht immer leicht fällt. Je nachdem, ob den 101 Personen der Untersuchung der jeweilige mathematische Kontext bekannt oder unbekannt gewesen ist, wurden induktive und deduktive Vorgehensweisen der angehenden Lehrer quantitativ erfasst. Hierbei haben die Autoren folgende Kategorien für ein induktives Vorgehen gebildet:

induktive und deduktive Kategorisierungen bei MARTIN & HAREL [1989]

- *examples*
  (”two particular instances of the generalization involving small numbers”)
- *pattern*
  (”a chart containing a sequence of instances of the generalization”)
- *big number*
  (”a particular instance of the generalization involving large numbers”)
- *example and nonexample*
  (”an example supporting the general statement”)

Dem deduktiven Vorgehen haben MARTIN & HAREL (1989, 44f.) alsdann folgende Kategorien zugeordnet:

- *general proof*
  (”a correct general proof (...) including statements justifying each step”)
- *false proof*
  (”a fallacious proof of the generalization, including statements purporting to justify each step”)

- *particular proof*
  ("a correct proof of the generalization, including statements justifying each step, in which particular numbers were substituted for each of the variables")

Den angehenden Lehrern wurden Begründungen zu Aussagen wie etwa über die Teilbarkeit natürlicher Zahlen vorgelegt. Sie wurden alsdann aufgefordert, diese vorgelegten Begründungen zu bewerten. Martin & Harel (1989, 46f.) gehen damit der Frage nach, inwiefern angehende Lehrer induktiv geprägte Begründungen als Beweis mathematischer Aussagen akzeptieren, und welchen Validierungsgrad sie den jeweiligen Begründungen (auf einer vierstufigen Skala) beimessen. Die Autoren unterscheiden dabei zwischen bekanntem und unbekanntem mathematischem Kontext und beziehen auch so genannte "ritualistic aspects of proof" mit ein, d.h. es soll etwa mit einem vorgelegten *false proof* im Gewand eines formellen Beweises getestet werden, ob sich die angehenden Lehrer durch die bloße Form der Beweisdarstellung beeinflussen lassen. Wie zuvor schon angesprochen wurde, stellt die Vorlage eines falschen Beweises ebenso eine Zugangsmöglichkeit zum beispielgebundenen Beweisen dar.

particular proof bei Martin & Harel [1989]

Martin & Harel (1989, 45) zufolge sprechen angehende Lehrer der Kategorie *particular proof* einen geringeren Validierungsgrad zu als allen anderen Kategorien, sieht man von dem vorgelegten *false proof* ab. Ansonsten erhalten Martin & Harel (1989, 48) für den Fall, dass den angehenden Lehrern der mathematische Kontext bekannt ist, folgendes (signifikante) Ergebnis: "more students accepting correct deductive arguments also accepted an argument presented in the particular case than rejected it". Von denjenigen angehenden Lehrern also, welche deduktive Argumente akzeptieren, sagt der Mehrheit auch ein Argument am Beispiel zu, statt dieses Argument am Beispiel abzulehnen. Sie geben dafür folgende Erklärung:

> "First, students may be interpreting a particular proof as an inductive argument, in which case it is seen as an instantiation of the inductive argument frame. This seems unlikely; the same pattern of high levels of acceptance of a particular proof was found in students rating inductive arguments low. Second a particular proof may be viewed as an instantiation of the deductive process used in the general proof. In this case, they are 'replaying' the general deductive argument in the particular case." (Martin & Harel, 1989, 49f.)

Gestützt werde die zweite Interpretation durch die oben zitierten Ergebnisse von Vinner (1983, 290f.), nach denen einige Schüler zu einer Spezialisierung eines formellen Beweises tendierten, statt auf diesen selbst zu verweisen, wenn sie die jeweilige Aussage für eine Beispielinstanz verifizieren sollen.

Nutzen der Kategorien von Martin & Harel [1989] *für das beispielgebundene Beweisen*

Für die vorliegende Arbeit sind die von Martin & Harel (1989, 43ff.) beschriebenen induktiven und deduktiven Abstufungen insofern von Belang, als dass sie zu Stadien beispielgebundenen Beweisens werden können und für die Anlage von Aufgabenstellungen Anregungen bieten. Etwa kann die Kategorie *big number* als "a particular instance of the generalization involving large numbers" (s.o.) Schülern den Zugang zu einem *particular proof* ebnen, da der Umgang mit großen oder unhandlichen Zahlen dem Ausrechnen als rein induktives Verfahren nach der Kategorie *examples* vorbeugen kann. Dies stellt eine weitere Zugangsmöglichkeit zum beispielgebundenen Beweisen dar, wie sie in den Einzelfallstudien in ↑ Kap. 3.3 und in Kap. ↑ 3.4 zum vollständigen Graphen und zum Außenwinkelsatz thematisiert wird.

Beweiskategorien nach van Hiele [1973] *sowie* van Dormolen [1977]

In früherer Zeit stellten van Hiele (1973) sowie van Dormolen (1977, 32) eine dreistufige Skala von Beweiskategorien auf. Letzterer illustriert dies in geometrischem Kontext. Im *ground level* denke der Schüler noch an eine ganz konkrete Instanz. Sobald der Schüler ein Objekt hinsichtlich bestimmter allgemeiner Eigenschaften als repräsentativ für eine ganze Klasse von Beispielen sehe, befinde er sich im *first level of thinking*. Gelange er schließlich zu einem selbstreflektierenden Begründen und damit auf einen *second level of thinking*, werde er diese Beispiele nur noch als Illustration für den allgemeingültigen Beweis einer Aussage heranziehen.

Beweiskategorien nach Balacheff [1988]

Balacheff (1988) unterscheidet folgende Beweiskategorien:

- *naïve empiricism*
  ("in which the truth of a result is asserted after verifying several cases")
- *the crucial experiment*
  ("in which a proposition is verified on a particular case recognised to be typical but non-trivial")
- *the generic example*
  ("in which the reasons for the truth of an assertion are made explicit in a prototypical case")
- *the thought experiment*
  ("in which the operations and foundational relations of the proof are indicated in some other way than by the result of their use")

(jeweils Coe & Ruthven (1994, 44, H.i.O.); vgl. Balacheff (1988, 218ff.))

Hinzu kommt nach Balacheff (1991, 94) noch die Kategorie *proof by 'reasons'*, die in Balacheff (1988, 226) noch als *calculations of statements* bezeichnet und wie folgt erläutert wird:

> "They are intellectual constructions based on more-or-less formalised, more-or-less explicit theories of the ideas in question in the solution of the problem. These proofs appear as the result of an inferential calculation on statements. They rely on definitions or explicit characteristic properties." (Balacheff, 1988, 226f.)

Es handelt sich dabei also um formale Beweise, die jedoch nicht notwendigerweise formell dargestellt werden. Balacheff (1988, 222ff.) teilt die genannten Kategorien wie folgt ein:

- pragmatic proofs:
  naive empiricism, *crucial experiment*, *generic example*

- conceptual proofs: *thought experiment*, *calculations of statements*

generic example

Das *generic example* steht stellvertretend für eine ganze Klasse von Beispielen und nicht etwa für ein spezifisches Beispiel. Diese Differenz muss gleichwohl von den Schülern erst wahrgenommen werden, wenn sie (etwa im Rahmen des beispielgebundenen Beweisens) allmählich erkennen, dass das betrachtete Beispiel für etwas Allgemeineres als für sich selbst steht. Von einem *generic example* sehe der Schüler beim *thought experiment* als vierter Stufe BALACHEFF (1988, 225) zufolge ab, dieses werde vom Schüler abstrakt konstruiert, und seine Eigenschaften allgemein betrachtet. Wenn BALACHEFF (1991, 217) von einem "move into conceptual proof" spricht, stellen die vorstehenden fünf Beweisstufen Stadien in einem stetig gedachten und abstrakter werdenden Lernprozess dar. LEDDY (2001) kommentiert diesen Ansatz wie folgt:

Kritik an den Beweiskategorien von BALACHEFF [1988] *durch* LEDDY [2001]

> "Implicit in these hierarchies is the notion that students will progress from one level to another and that one must move through one level before reaching another. Whilst this is undoubtedly true, it should also be stressed that students will move back and forth depending on the task that they are involved with. In other words, a student capable of a thought experiment in one situation may regress to naïve empiricism in another. Once again, we see that finding a theory of how students learn to prove is rather elusive." (LEDDY, 2001, 35)

beispielgebundenes Beweisen als Übergangsprozess zwischen Beweiskategorien?

An dieser Kritik setzt die vorliegende Untersuchung beispielgebundenen Beweisens an: BALACHEFF (1988) belegt zwar – anders als primär quantitativ angelegte Studien – die Evidenz seiner vorgestellten Beweiskategorien an Interviewauszügen, die inhaltlich einzelnen Beweiskategorien zugeordnet werden. Wie aber der von LEDDY (2001, 35) angesprochene Lernprozess des Schülers zwischen diesen oder ähnlichen Beweiskategorien abläuft, zeichnet er nicht nach. Das beispielgebundene Beweisen wird in der vorliegenden Arbeit nun als ein solch changierender Prozess zwischen induktivem Prüfen und formalem (resp. formellen) Beweisen aufgefasst und empirisch untersucht. Dafür kann die Arbeit von BALACHEFF (1988) wertvolle Hinweise geben.

Beweiskategorien nach COE & RUTHVEN [1994]

COE & RUTHVEN (1994) greifen die Beweiskategorien von VAN DORMOLEN (1977) und BALACHEFF (1988) auf und gelangen zu folgender Klassifikation, um das Beweisverhalten von Schülern der Sekundarstufe zu untersuchen:

- *'empirical' proof*
  ("a conjecture explicitly stated, supported by weight of confirming examples or pattern of results, without explanation")
- *'weak deductive' proof*
  ("some attempt to suggest an underlying reason")
- *'strong deductive' proof*
  ("an attempt at a clear, logical argument with reasonably explicit link between the starting assumptions and a clearly defined conclusion")

(jeweils COE & RUTHVEN (1994, 44))

Hiervon ausgehend beobachten die Autoren, dass die meisten Schüler zwar eine allgemeingültige Aussage zu verifizieren beabsichtigen, diese faktisch aber als *'empirical' proof* nur an Beispielen prüfen. Die Schüler würden kaum deduktive Begründungsstrategien (d.h. *'weak deductive' proof* oder *'strong deductive' proof*) verfolgen. Dabei ist die Verwendung der Bezeichnung des Deduktiven durch Coe & Ruthven (1994) zu kritisieren: Auch beim *empirical proof* werden Deduktionen im logischen Sinne vollzogen. Diese können durchaus zu einem Beweis, einem *deductive proof* im Sinne der Autoren ausgeführt werden (vgl. auch ↑ Abs. 1.3.5 über das Prüfen mit latenter Beweisidee). Die Kategorisierungen der Autoren scheinen sich mithin eher auf die Darstellung und den Formalisierungsgrad der Beweisversuche zu beziehen. Ansonsten kommen Coe & Ruthven (1994) noch zu dem Ergebnis, dass für einige Schüler eher die explanative und die systematisierende Beweisfunktion von Belang sei:

- ”Few students were concerned to explain why rules or patterns occurred, or to locate them within some wider mathematical system.”
- ”Students' proof strategies were primarily and predominantly empirical, with a very low incidence of strategies that could be described as deductive.”
- ”Students' primary concern was to validate conjectured rules and patterns which, for most, took the form of testing them against a few examples.”

(jeweils Coe & Ruthven (1994, 52))

Beweiskategorien nach Miyazaki [2000]

Auch Miyazaki (2000) stellt neue Beweiskategorien auf. Dabei verfeinert er das Vorgehen von Balacheff (1988), indem er sechs Niveaustufen von Beweisen definiert. Diese Beweisniveaus illustriert er theoretisch an der Aufgabenstellung des gegensinnnigen Veränderns von drei oder fünf aufeinanderfolgenden Summanden (vgl. ↑ Kap. 3.1) und führt überdies auch Äußerungen von Schülern der achten Klasse zu diesem Thema an. Zur Aufstellung seiner Beweiskategorien geht Miyazaki (2000, 53f.) von drei Achsen aus: Inhalt, Darstellung des Beweises und Denken der Lernenden (*contents, representation* und *thinking*). Jede dieser voneinander unabhängig gedachten Achsen besteht aus zwei Polen. Hinsichtlich des Inhalts wählt er etwa die bekannte Unterscheidung zwischen *inductive reasoning* und *deductive reasoning*, um induktives Prüfen von deduktivem Begründen zu trennen. Bei der Darstellung differenziert Miyazaki (2000, 53f.) zwischen ”a functional language of demonstration” und ”a language other than a functional language of demonstration, drawings, and/or manipulable object”. Als Darstellungsmittel zur Präsentation eines Beweises kommen also zum einen Symbole und Variablenzeichen in Betracht, zum anderen ikonische Darstellungen wie Zeichnungen, Schaubilder und Muster. Die Kombination dieser zwei Achsen ergeben somit vier Beweistypen:

A: formeller Beweis

B: formaler Beweis in ikonischer Darstellung

C: induktives Prüfen in ikonischer Darstellung

D: induktives Prüfen in symbolischer Darstellung

Bezogen auf das Denken der Lernenden als dritter Achse macht MIYAZAKI (2000, 55) schließlich einen zusätzlichen Unterschied zwischen *concrete operations* und *formal operations*. Hierbei stützt sich der Autor auf die Theorie der kognitiven Entwicklung von Kindern und Jugendlichen nach PIAGET. Das höchste Beweisniveau A (resp. das niedrigste Beweisniveau C) lässt kein konkretes (resp. formales) Operieren zu, so dass diese Differenzierung nur die Zwischenkategorien B und D betrifft. Denn der Lernende kann, wenn er einen formalen Beweis in ikonischer Darstellung führt (B), konkret oder abstrakt denken, wie auch im Fall einer formalisierten induktiven Prüfung (D). Und so sieht MIYAZAKI (2000, 65) in der Beweiskategorie B eine Entsprechung zu einem *generic proof* im Sinne von BALACHEFF (1988), wenn der Lernende am ikonischen Beispiel zunächst konkret operiert, später aber darin Allgemein(er)es sieht und dies möglicherweise versprachlicht. Für das beispielgebundene Beweisen ist diese weitergehende Differenzierung der Zwischenkategorien also insofern interessant, als dass der Lernende an einer ikonischen Darstellung vielleicht schon allgemein(er) denkt, sich daran aber zunächst noch konkret äußert. Im Unterschied zu MIYAZAKI (2000) ist in der vorliegenden Arbeit aber letztlich nicht die Eingruppierung von Schüleräußerungen in eine Beweiskategorie entscheidend, sondern der Prozess allmählicher Übergänge zwischen ihnen.

beispielgebundenes Beweisen in allmählichen Übergängen zwischen Kategorien

Feststellen von Beweisschwierigkeiten durch HEALY & HOYLES [1998]

In manchen Studien des ausgehenden 20. Jahrhunderts werden bei Schülern Beweisschwierigkeiten beklagt. So berichten HEALY & HOYLES (1998) in einer groß angelegten Studie mit fast 2500 Schülern im Alter von 14 Jahren, dass die meisten Schüler keine Beweise konstruieren könnten. Vielmehr griffen sie zu induktiven Prüfungen, um vorgelegte Behauptungen zu verifizieren. Auch hochleistende Schüler schnitten bei geometrischen Aufgabenstellungen im Beweisen schlecht ab. Die Autoren führen diesen Befund auf eine fehlende Vertrautheit der Schüler mit dem Beweisen zurück. Was den Schülern weit besser gelang, war das Auswählen eines korrekten Beweises und das Einschätzen der Allgemeingültigkeit eines Beweises.

Operationalisierung von Beweiskategorien bei HEALY & HOYLES [2000]

HEALY & HOYLES (2000) operationalisieren die Beweiskategorien von BALACHEFF (1988), indem sie im Rahmen ihrer Studie Arbeitsblätter mit vorgelegten Beweisen dieser Kategorien an 182 hochleistende 14-15jährige Schülern verteilten. Die Schüler sollten ankreuzen, für welchen der vorgelegten Beweise sie wohl die beste Note von ihrem Lehrer bekämen, und welchen Beweis sie selbst bevorzugen würden. Überdies sollten die Schüler Zustimmung, Ablehnung oder Enthaltung gegenüber Beurteilungen zu manchen vorgelegten Beweisen vornehmen. Die Behauptungen waren den Schülern teils bekannt, teils weniger bekannt. Die Autoren kommen zum folgenden Ergebnis:

> ”Although our study showed that the majority of the students were unable to construct valid proofs in this domain, it also indicated that they valued general and explanatory arguments. Additionally, although students predominantly used empirical arguments for their own proofs, they also recognized that these had low status and would not receive the highest marks from their teachers. The majority were also aware that empirical arguments were not general – particularly if the statement to be proved was not familiar – but they recognized that examples offered a powerful

> means of gaining conviction about a statement's truth. Most students were also aware that a valid proof must be general and that once a proof has been given, no further work is necessary to ascertain the truth of specific cases within its domain of validity." (Healy & Hoyles, 2000, 425)

Die Studie von Healy & Hoyles (2000) ist überwiegend quantitativ ausgerichtet: Die Beweiskategorien von Balacheff (1988) finden in Fragebögen Eingang, in welchen die Schüler durch Präferieren bestimmter Beweise oder vorgelegter Beurteilungen der intendierten Differenzierung der Autoren folgen. Was die Autoren damit nicht untersuchen, ist der Prozess des Beweisens ggf. vom Entdecken einer Behauptung über das Entwickeln einer Beweisidee bis hin zum Präsentieren eines Beweises. Die Autoren erfahren zwar, was die Schüler über verschiedene Typen von Beweisen denken, aber wie Schüler (beispielgebunden) beweisen, kann der Studie nicht entnommen werden.

Klassifikationen von Antworten nach Recio & Godino [2001]

Schließlich haben Recio & Godino (2001) die Antworten von Studienanfängern nach Vorlage eines arithmetischen und eines geometrischen Beweisproblems untersucht und in vier Schemata klassifiziert:

- "answers, which are mere confirmations of the propositions to prove, using particular examples, as explanatory argumentations. (...) Since there is only an explanatory intention, we describe these types of answers as *explanatory argumentative schemes*."
- "answers are based on verifying the propositions given to prove by using particular examples, without the intention of justifying the general validity of the proposition and using empirical-inductive procedures. Therefore, we refer to these type of answers as *empirical-inductive proof schemes*."
- "answers develop informal logical approaches, based on the use of analogies, graphical tools, etc. We classify these types of answers as *informal deductive proof schemes*."
- "answers follow a formal approach, more in agreement with the transformation rules of a symbolic and algebraic language, in which the mathematical terms operate, than to the specific meaning of these terms. That is why we call them *formal deductive proof schemes*."

(jeweils Recio & Godino (2001, 90f., H.i.O.))

Die Autoren bemerken, dass bei manchen Problemen (wie etwa dem Winkelsummensatz im Vieleck) die Studienanfänger mehrere Beweisschemata probierten, begonnen bei dem empirisch-induktiven über das informelle bis zum formellen Deduktionsschema. Diese Beobachtung bestätigt, dass die Studienanfänger bei ihrem Beweisen einen Prozess durchlaufen, während dessen Übergänge zwischen den einzelnen Beweiskategorien stattfinden. Insofern dürfte es Sinn machen, den Schülern in den nachstehenden Einzelfallstudien unbekannte und nicht zu einfache Aufgaben zu stellen, um einen solchen (beispielgebundenen) Beweisprozess anzustoßen.

Kompetenzniveaus von Schülern im Beweisen

von Beweiskategorien zu Kompetenzniveaus

Schon in den vorstehend aufgestellten Beweiskategorien von Balacheff (1988), Coe & Ruthven (1994) und Healy & Hoyles (2000) hat sich eine Tendenz zur Hierarchisierung und Operationalisierung gezeigt. In manchen der schon besprochenen quantitativen Studien werden Schüler den *a priori* festgelegten Beweiskompetenzen nach eingruppiert. So steuert ein Forscher das Beweisverhalten der Schüler schon im Voraus, wenn er etwa den Schülern auf Fragebögen eine Auswahl an Antworten vorgibt, die jeweils für eine Beweiskategorie stehen. Dieses Vorgehen erleichtert zwar die Operationalisierung, allerdings sagen die dadurch gewonnenen Ergebnisse über das beobachtbare Beweisverhalten der Schüler selbst wenig aus. Werden die Beweiskategorien des Forschers in dem Sinne hierarchisiert, dass der formelle Beweis als höchste erreichbare Beweisstufe und das bloße enaktive Prüfen als niedrigste sogenannte Beweisstufe gewertet werden, lassen sich Kompetenzniveaus im Beweisen bilden.

Bildung von Kompetenzniveaus

Der obigen Unterscheidung von Miyazaki (2000) folgend, können sich Kompetenzniveaus im Beweisen auf die Beweiskategorie, auf die Beweisdarstellung und auf das Denken der Schüler beim Beweisen beziehen. Letzteres lässt sich nur indirekt bestimmen, indem man die Schüler während ihres Beweisens befragt. In die Bildung von Kompetenzniveaus fließt ferner ein, welche Beweisfunktion für den Forscher wie für den Lehrer jeweils von größerem Interesse ist (↑ Abs. 1.1.1). Auch thematisch kann dabei unterschieden werden. So können Beweise etwa in der Arithmetik oder Geometrie geführt werden. Da es in der vorliegenden Arbeit nicht darum geht, Fähigkeiten von Schülern im (beispielgebundenen) Beweisen zu erheben, sondern das beispielgebundene Beweisen an sich und als beobachtbaren Prozess zu untersuchen, soll an dieser Stelle bloß exemplarisch auf Goldberg (1984) eingangen werden. Die Autorin klassifiziert gegen Ende ihrer Arbeit "Fähigkeiten im beispielgebundenen Begründen" bezogen auf die Arithmetik nach Noten.

Fähigkeiten im beispielgebundenen Beweisen nach Goldberg [1984]

Die Kompetenz des Schülers besteht auf dem Niveau der Note 4 darin, eine Aussage an vorgegebenen und eigenen Beispielen induktiv zu prüfen. Verbessern kann der Schüler seine Kompetenz im beispielgebundenen Begründen Goldberg (1984, 177) zufolge auf Note 3 dadurch, dass er sich in einer repräsentativen Auswahl von Beispielen versucht und darin "die Möglichkeit der Verallgemeinerung" sieht. Die Beurteilung des Schülers wird um so besser, je selbstständiger und sicherer er beispielgebunden begründet:

> "für die Note '2':
> Der Schüler findet selbständig eine zum Begründen geeignete repräsentative Auswahl von Beispielen bzw. Gegenbeispielen. Nur wenn das Kriterium für die Auswahl nicht naheliegend ist, braucht er einen entsprechenden Hinweis. Er verallgemeinert die Beispiele i. W. richtig; die Formulierung kann unvollständig sein." (Goldberg, 1984, 177)

Dass die Autorin nur die Kompetenz des Schülers im beispielgebundenen Begründen und nicht etwa im formellen Beweisen beurteilen möchte, lässt sich an der höchsten Niveaustufe erkennen:

> ”für die Note ’1’:
> Der Schüler kann die Wahrheit oder Falschheit von Aussagen selbständig durch beispielgebundenes Begründen beweisen, d. h., er formuliert eine richtige und vollständige Verallgemeinerung, braucht sie aber nicht formal darzustellen.” (Goldberg, 1984, 178)

Damit ergeben sich für die Beurteilung im Mathematikunterricht einsetzbare Kompetenzniveaus für das beispielgebundene Begründen. Inwieweit die Notengebung wirklich praktikabel ist, sei dahingestellt.

Die Darstellung der empirischen Studien zum Beweisverhalten von Schülern hat ein vielfältiges Bild ergeben. Dabei standen Kategorisierungen und Kompetenzniveaus des Beweisens im Vordergrund. Einzelne Bezeichnungen, wie zum Beispiel *big number* von Martin & Harel (1989, 43f.) oder *generic example* von Balacheff (1988, 219) spielen für das beispielgebundene Beweisen eine Rolle und werden später wieder aufgegriffen.

1.1.3 Beweisen, Begründen, Argumentieren

Hier wird kurz beschrieben, wie sich Begründen und Argumentieren zum Beweisen verhält. Dann folgen einige etymologische Bemerkungen zum Beweisen.

Begründen und Argumentieren

Argumentieren und Begründen finden sich nicht nur im Mathematikunterricht wieder, sondern charakterisieren auch außermathematische Tätigkeiten (etwa in Politik und Rechtswissenschaft). Dagegen ist das Beweisen im Sinne eines denknotwendigen, streng deduktiven Schließens mathematikspezifisch und betont den logischen Charakter (zu Schlussformen siehe ↑ Kap. 1.3). Innerhalb des Mathematikunterrichts spricht man zumindestens in den jüngeren Klassenstufen vom Begründen, um anzuzeigen, dass nicht nur formalisierte Beweisdarstellungen gelehrt und gelernt werden, sondern eine Fülle von Begründungsarten. Diese fächern etwa Meyer & Prediger (2009, 3) am Aufgabenbeispiel der Gaussschen Summenformel illustrierend auf: "1. 'Begründung' mit speziellem Beispiel (...) 2. Begründung mit generischem Beispiel (...) 3. Begründung mit generischem Bild (...) 4. Begründung mit allgemeinem Bild (...) 5. Begründung mit Algebraisierung (...) 6. Begründung mit vollständiger Induktion". Beim Begründen steht häufig auch weniger die *verifikative Beweisfunktion* als vielmehr die *explanative Beweisfunktion* im Vordergrund (↑ Abs. 1.1.1). Vom Argumentieren lässt sich sprechen, wenn Schüler die Struktur eines Beweises oder einzelne Begründungsschritte gegenüber Mitschülern oder dem Lehrer darlegen sollen. Hierbei gewinnt die kommunikative Beweisfunktion an Bedeutung (↑ Abs. 1.1.1). Das Toulmin-Schema eignet sich zur Darstellung der Beweis- und Argumentstruktur und damit als Hilfsmittel für Lehrende (↑ Kap. 1.4). Zu weiteren (psycho)logischen Aspekten des Beweisens im Mathematikunterricht sei auf Walsch (1992) verwiesen. Zur weiteren Abgrenzung des Beweisens vom Argumentieren und zu einer Verhältnisbestimmung zwischen Beweisen, Begründen und Argumentieren siehe Brunner (2013, 106ff.) und Brunner (2014, 27ff.).

Beweisen – sprachlich betrachtet

'beweisen' in verifikativer, explanativer Urbedeutung

Einige der in ↑ Abs. 1.1.1 betrachteten Beweisfunktionen finden sich in den Ursprüngen des Verbs *beweisen* wieder, so vor allem die verifikative und explanative Beweisfunktion. Etymologisch leitet sich dessen Stammverb *weisen* nach Grimm & Grimm (1854, 1778) und Walde & Pokorny (1973, 236ff.) vom mittelhochdeutschen *wĭsen* (resp. althochdeutschen *weizen*) in der Bedeutung von *wissend, weise machen* ab. Den Autoren nach geht das zugrunde liegende Adjektiv *weise* (englisch *wise*) ursprünglich auf die indogermanische Wurzel **ŭeid-* in der Bedeutung von *sehen, wissen* zurück: So zeigt sich im deutschen

Verwandtschaft von 'sehen', 'beweisen' und 'wissen'

Verb *wissen* und im lateinischen *videre* für *sehen* der sogenannte Ausfall des im Altgriechischen ursprünglich als *w* ausgesprochenen Digammas (Ϝ) in der Verbform (Ϝ)οἶδα (*ich habe gesehen*, *ich weiß*; Perfekt von εἴδω – *ich sehe*, *ich erkenne*). Das Wort εἶδος bedeutet nach Menge-Güthling (2001, 204) also *das zu Sehende*, *die Gestalt.* Wer zuvor gesehen hat, hat Wissen erworben, weiß und ist weise geworden – ein Prozess, der auch im Rahmen des *visual proving* dieser Arbeit untersucht wird (↑ Abs. 1.2.4).

'weismachen' in explanativer und kommunikativer Bedeutung

Mit dem Verb *beweisen* ist das Verb *weismachen* verwandt. Letzteres hatte Stosch (1778, 48f.) zufolge im Mittelhochdeutschen ursprünglich die Bedeutung von *jmdm. wissen machen, jmdm. entdecken, jmdn. über etw. unterrichten*, mithin eine explanative (erklärende) und auch kommunikative Bedeutung (↑ Abs. 1.1.1). Erst später hat sich die heutige pejorative Nuance *glauben machen, überreden, suggerieren* durchgesetzt. Die Semantik des Verbs *weismachen* deutet also ursprünglich auf einen sozialen Erkenntnisprozess hin, der sich zwischen Personen vollzieht, um Überzeugung und Wissen zu erlangen. Hierin zeigt sich die stark kommunikative Komponente von *weismachen*.

Herkunft und Bedeutung von 'Beweis'

Nach Ritter (1971, 882) ist das Substantiv *Beweis* eine sogenannte Rückbildung aus dem heute ungebräuchlichen, eher auf einen Prozess hinweisende Wort *Beweisung* und bedeutete als mittelhochdeutsches *bewǐs* ursprünglich *Rechtsspruch, Urteil*, in dieser Bedeutung also eine (allgemein) verbindliche (Rechts-) Gültigkeit. Sturm (1670, 10ff.) hat den Terminus *Beweis* in der Schreibung *Beweiß* schon früh anstelle des lateinischen Substantivs *demonstratio* in die damalige mathematisch-philosophische Fachsprache eingeführt. Man vergleiche hierzu die Abkürzung *q.e.d. quod erat demonstrandum – was zu beweisen war* sowie das Diktum Fermats, nach dem es das Wesen des Beweisens sei, Überzeugung zu erzwingen (frz. "la qualité essentielle d'une démonstration est de forcer à croire" nach Descartes (1667, 296)).

die verifikative Bedeutung von 'erweisen'

Das zum *Beweis* nicht mehr so gebräuchliche Synonym *Erweis* besitzt eher verifikative Bedeutung (↑ Abs. 1.1.1), welche sich etwa in der Wendung *etwas hat sich als wahr erwiesen* zeigt. Der *Erweis* bzw. *Beweis* deutet insofern auf das Ergebnis eines Prozesses hin, d.h. von einem *Erweisen* bzw. *Beweisen* im Sinne von *einen Nachweis führen* oder *einen Beweis führen*. Ob jedoch etwas wirklich *bewiesen* oder *erwiesen* worden ist, erfordert eine Interpretation des Beweises durch einen Rezipienten in Bezug auf dessen Wahrheit und (Allgemein-)Gültigkeit. Deshalb kann man die Auffassung vertreten, ein als Beweis vorliegendes Schriftstück sei nicht per se ein Beweis, sondern bedürfe einer subjektiven und sozial geteilten Auseinandersetzung, um zu einem Beweis als Ergebnis des Prozesses Beweisen zu werden. Hierin zeigt sich die kommunikative Funktion des Beweises (↑ Abs. 1.1.1), wie sie während eines Schülerexperiments zum (beispielgebundenen) Beweisen oder im Mathematikunterricht zum Tragen kommt. Um die Prozesshaftigkeit des Beweisens zu betonen, wird in dieser Arbeit hauptsächlich vom Beweisen und weniger von Beweisen gesprochen. Ob auch das beispielgebundene Beweisen wirklich als Beweisen angesehen wird, ist nicht nur Gesprächsthema im Mathematikunterricht, sondern auch im forschenden Diskurs, wie dies im nachstehenden ↑ Kap. 1.2 dargestellt wird.

die kommunikative Bedeutung von 'beweisen'

der 'Beweis' als Ergebnis des Prozesses 'Beweisen'

Die vorstehenden sprachlichen Betrachtungen zum Begriff des Beweisens unterstreichen noch einmal die inhaltlich motivierte Differenzierung der Beweisfunktionen aus ↑ Abs. 1.1.1. Es wurde bemerkt, dass die Bezeichnungen des Beweisens, des Begründens oder des Argumentierens in unterschiedlichen Kontexten verwandt werden. In dieser Forschungsarbeit wird der (paradox anmutenden) Bezeichnung des (beispielgebundenen) Beweisens der Vorzug gegeben.

1.2 Beispielgebundenes Beweisen

Im vorigen ↑ Kap. 1.1 wurde ein Teil der mathematikdidaktischen Forschungslage zum weiter gefassten Begriff des Beweisens vorgestellt. Dabei wurde an manchen Stellen auch schon das beispielgebundene Beweisen erwähnt. Betont wurde etwa, dass es für die vorliegende Untersuchung sinnvoller sein dürfte, mehr vom (beispielgebundenen) Beweisen statt von (beispielgebundenen) Beweisen zu sprechen. Denn der beispielgebundene Beweisprozess hin zum Beweis als dessen Produkt soll untersucht werden.

In der deutsch- und englischsprachigen mathematikdidaktischen Literatur der letzten vierzig Jahre begegnen dem Forscher nun eine Vielzahl von Bezeichnungen für das beispielgebundene Beweisen – es konnten über dreißig sinnverwandte Bezeichnungen ausgemacht werden (siehe nachfolgende Aufstellung). Somit soll versucht werden, das Forschungsfeld des beispielgebundenen Beweisens begrifflich zu ordnen und dessen verschiedenen Facetten zu beleuchten.

Forschungsstand zum beispielgebundenen Beweisen

Begonnen wird bei der weitergehenden Sichtung des Forschungsstands mit den frühen Ansätzen zum beispielgebundenen Beweisen (↑ Abs. 1.2.1). Diese werden hauptsächlich unter den Bezeichnungen *prämathematisches Beweisen* und *paradigmatisches Beweisen* diskutiert. Alsdann erfolgt eine Auseinandersetzung mit zumeist englischsprachigen Artikeln über das *generic example* und das *generic proving* (↑ Abs. 1.2.2). Gesondert wird anschließend das *inhaltlich-anschauliche Beweisen* und das *operative Beweisen* diskutiert. Dabei steht die erklärende Beweisfunktion im Vordergrund (↑ Abs. 1.2.3). Mehr um die geometrische Darstellung beispielgebundener Beweise geht es bei der Thematisierung von *visual proofs* (↑ Abs. 1.2.4). Schließlich wird das beispielgebundene Beweisen mehr auf den Mathematikunterricht bezogen und dabei besonders die kommunikative Beweisfunktion betont (↑ Abs. 1.2.5).

Die nachstehende Unterteilung ist inhaltlich motiviert und folgt jeweils ungefähr chronologisch. Es werden folgende Beweischarakterisierungen behandelt:

1.2.1 Frühe Ansätze zum beispielgebundenen Beweisen

- *pre-formal proving* und *thought experiment* nach LAKATOS (1982)
- *konkrete Beweise* und *Generalisierung am Paradigma* nach STEIN (1981)
- *Beweisen am paradigmatischen Beispiel* nach FREUDENTHAL (1978)
- *Beweisen am beweiskräftigen repräsentativen Beispiel* nach BESUDEN (1979)
- *premathematical proofs* nach SEMADENI (1976)
- *(recurrent) action proofs* nach SEMADENI (1981b)
- *handlungsbezogenes Beweisen* nach BLUM & KIRSCH (1991)
- *prämathematisches Beweisen* nach KIRSCH (1979)
- *Beweisen in enaktiver Verkörperung* nach WINTER (1983a)
- *Beweisen in enaktiver Repräsentation* nach WINTER (1983b)

1.2.2 Generic examples und generic proving

- *generic examples* nach MASON & PIMM (1984)
- *Variablenaspekte* nach MALLE (1986)
- *Wort-, Buchstaben- und Quasi-Variablen* nach AKINWUNMI (2012)
- *Stufenfolge von Vorformen von Variablen* nach FISCHER (2009)
- *Niveaus der Verallgemeinerung* nach MORMANN (1981)
- *Beispielgebundenes Beweisen auf Repräsentationsebenen* nach RATZINGER (1992)
- *pragmatic proofs* und *conceptual proofs* nach BALACHEFF (1988), darunter *naive empiricism*, *crucial experiment*, *generic example*, *thought experiment*
- *generic-example assisted proofs* nach MOVSHOVITZ-HADAR (1988)
- *empirical* und *structural generalisations* nach BILLS (1996) und ROWLAND (1998)
- *generic proving* und *formal proving* nach BIEHLER & KEMPEN (2013)
- *generic examples* und *generic proving* nach LERON & ZASLAVSKY (2009)

1.2.3 Inhaltlich-anschauliches und operatives Beweisen

- *intuitiv-anschauliche Beweise* nach BRANFORD (1913)
- *inhaltlich-anschauliche Beweise* nach WITTMANN & MÜLLER (1988), nach BLUM & KIRSCH (1991) und nach KRAUTHAUSEN (2001)
- *reality-related proofs* resp. *contextual proofs* nach BLUM (2003)
- *operative proofs* nach WITTMANN (1996) und nach WITTMANN & ZIEGENBALG (2004)

1.2.4 Visual proving

- *Beweisen durch Hinschauen* nach NEUBRAND & MÖLLER (1990)
- *Operative Beweise* an Punktmustern nach WITTMANN & ZIEGENBALG (2004)
- *Beweisen in der Geometrie* nach HOLLAND (2007)
- *proving without words* nach NELSON (1993)
- *acceptable visual proofs* nach BORWEIN & JÖRGENSON (2001)
- *purported proofs* nach BARWISE & ETCHEMENDY (1996)
- *empirical, represential, descriptive, generative mode* nach HERBST (2004)
- *visual proving* nach DAVIS (1993)

1.2.5 Beispielgebundenes Beweisen als Dialog

- *Methode des dialogischen Beweisenlehrens* nach VOLLRATH (1967), (1969)
- *beispielgebundenes Begründen* nach GOLDBERG (1984), (1992)

Die nachfolgende Diskussion des Forschungsstands dient der Vorbereitung auf die eigene theoretische Begriffsbestimmung zum beispielgebundenen Beweisen als Forschungsgegenstand in ↑ Kap. 1.5. Sie soll die späteren Forschungsfragen in ↑ Kap. 2.1 motivieren und strukturieren helfen. Überdies soll sie zur Konstruktion von Aufgabenstellungen anregen und praktische Hinweise zur Durchführung der eigenen empirischen Studien in ↑ Teil 3 geben.

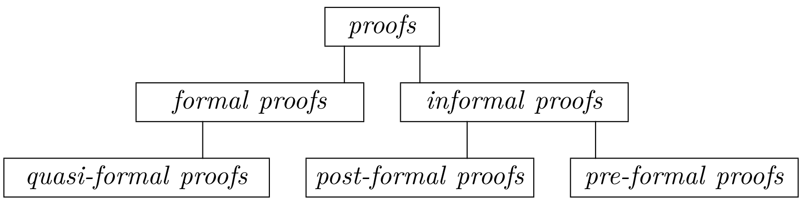
1.2.1 Frühe Ansätze zum beispielgebundenen Beweisen

Die frühen Forschungsansätze zum beispielgebundenen Beweisen sind geprägt von der Entwicklung einer sogenannten *Prämathematik*, wie sie von Semadeni ins Spiel gebracht und dann von einer Reihe weiterer Autoren auf das *prämathematische Beweisen* unter wechselnden Bezeichnungen spezifiziert worden ist. Einige Autoren haben dabei den Einsatz *prämathematischer Beweisen* in der Grundschule erwogen.

Pre-formal proving und thought experiment nach Lakatos

pre-formal proving und thought experiment nach Lakatos [1978]

Zum Ende der 1970er Jahre ist das Beweisen in der Mathematikdidaktik ausführlich diskutiert worden. Während in der vorliegenden Arbeit zwischen formalen (allgemein gehaltenen) und formellen (formalisierten) Beweisen differenziert wird, spricht man in der mathematikdidaktischen Literatur oft von formalen im Sinne von formellen Beweisen und bezeichnet die anderen Beweisformen als nicht-formal oder informal. Der (laut Herausgebern ursprünglich bereits um 1960 entstandene) Aufsatz "What does a mathematical proof prove?" von Lakatos (1978, 61ff.) – zu dt. "Was beweist ein mathematischer Beweis?" als Lakatos (1982, 60ff.) – unterscheidet also *formal proofs* von *informal proofs*, zu denen er wiederum so genannte *post-formal proofs* und *pre-formal proofs* zählt:



Auch in anderen seiner Schriften wie "Proofs and Refutations" – zu dt. "Beweise und Widerlegungen" – entwickelt Lakatos (1976) resp. Lakatos (1979) in Abgrenzung zu einem formell-deduktiven Mathematik- und Beweisverständnis eine gleichsam empirisch ergänzte Auffassung vom Beweisen.

Beispiel Euler*scher Polyedersatz*

Als *quasi-formal proofs* bezeichnet Lakatos (1978, 63) "formal proofs with gaps", bei der nicht alle zugrunde liegenden Regeln und Axiome genannt werden. Die Kategorie der *post-formal proofs* bezieht Lakatos (1978, 68f.) auf Sätze über Sätze wie etwa auf den Vollständigkeitssatz der mathematischen Logik oder auf das Dualitätsprinzip in der projektiven Geometrie. Die andere, hier relevante Kategorie bilden *pre-formal proofs*. Dabei handelt es sich um nicht-formelle Begründungen, die nicht ohne Weiteres zu einem formellen Beweis ausgebaut werden können, da sie nicht direkt auf eine formell-logische Axiomatik zurückgreifen. Als Beispiel gibt Lakatos (1982, 62f.) einen Beweis des Eulerschen Satzes über einfache Polyeder wieder. Dessen Gültigkeit habe er zwar am Beispiel eines Würfels "*anschaulich gezeigt*", jedoch "in nicht einem noch so großzügigen logischen Sinne *bewiesen*" (H.i.O.). Sein Gedankenexperiment (*thought experiment*) besteht darin, den Term $E - F + K$ für die Ecken-, Flächen- und Kantenanzahl E, F und K einfacher Polyeder für eine Triangulierung von Polyederprojektionen auf die Ebene zu betrachten (↑ Abb. 1.1). Weder bei der Triangulierung noch bei der Wegnahme einer Kante oder zweier Kanten und einer Ecke ändert sich die Summe $E - F + K = 1$, da auch jeweils eine Fläche verschwindet. Durch diese Überlegung lässt sich dann herleiten, dass die Behauptung $E - F + K = 2$ für den ursprünglichen Würfel als einfachen Polyeder gilt. Den Beweisprozess hat LAKATOS (1976, 6ff.) auch als bebildertes, platonischen Dialogen nachempfundenes Lehrer-Schüler-Gespräch dargestellt. Das Gedankenexperiment ordnet er in die Kategorie der *pre-formal proofs* ein und nimmt damit die englische Bezeichnung *thought experiment* von BALACHEFF (1988) vorweg (↑ Abs. 1.1.2 und ↑ Abs. 1.2.2).

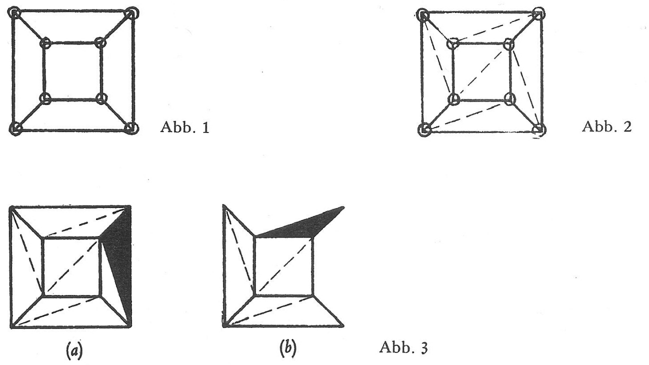


Abb. 1.1: Gedankenexperiment (*thought experiment*) zum *Polyedersatz* nach LAKATOS (1979, 3)

LAKATOS (1978, 65) bemerkt zudem, dass es in einer *pre-formal theory* zwar keine Definition dafür gebe, was ein Beweis sei, und es mithin keine Möglichkeit der Verifikation gebe. Ruft man sich die Beweisfunktionen aus ↑ Abs. 1.1.1 in Erinnerung, ist dies nicht verwunderlich: In *pre-formal proofs* tritt die verifikative Beweisfunktion hinter die explanative (erklärende) Beweisfunktion zurück. Umgekehrt lässt sich LAKATOS (1978, 65) zufolge ein Theorem wie der EULERsche Satz über Polyeder im Allgemeinen gleichwohl durch die Angabe von Gegenbeispielen falsifizieren, indem man etwa Polyeder mit Löchern betrachtet. Dies zeigt, dass man den Grad der Allgemeingültigkeit mancher Behauptung durchaus auch einschränken muss – ein Problem, mit dem auch viele Schüler während ihres beispielgebundenen Beweisens in fortschreitender Verallgemeinerung ringen (vgl. etwa die Einzelfallstudien in ↑ Kap. 3.1 und ↑ Kap. 3.3 über das gegensinnige Verändern und den vollständigen Graphen).

Konkrete Beweise und Generalisierung am Paradigma nach Stein

konkrete Beweise nach STEIN [1981]

STEIN (1981, 64) stellt seiner Bibliographie über das Beweisen einige Ausführungen über sogenannte *konkrete Beweise* voran, die "an einem Beispiel oder einem Modell" arbeiten, welche "den allgemeinen Sachverhalt vertreten" müssen. Dies müsse dem Lernenden aber auch "bewusst werden". Um das Gemeinsame der verschiedenen Ansätze in der Fachliteratur herauszuarbeiten, subsummiert der

Autor unter diese absichtlich allgemein gehaltene Definition *konkreter Beweise* drei Beweistypen:

- *prä-formale Beweise* nach LAKATOS (1978) (wie oben beschrieben)
- *prä-mathematische Beweise* nach SEMADENI (1976) und KIRSCH (1979)
- *Generalisierung am Paradigma* nach STEIN (1981) in Anlehnung an FREUDENTHAL (1978)

Generalisierung am Paradigma nach STEIN [1981]

STEIN (1981, 64) möchte der *Generalisierung am Paradigma* "einen Beweis einer All-Aussage bezeichnen, bei dem die Variable durch ein beweiskräftiges Zahlenbeispiel ersetzt wurde". Dabei sei "die Allgemeingültigkeit der Einsicht dadurch gewährleistet (...), daß nur die für die Beweisführung wesentlichen Züge der Beispiele betrachtet werden." Die Kategorie der *Generalisierung am Paradigma* wird hier also auf einen arithmetisch-algebraischen Kontext eingeschränkt, bei dem der Lernende an den besonderen Beispielzahlen das durch die Variablenzeichen repräsentierte Allgemeine und damit die Allgemeingültigkeit des Beweises erkennen soll. STEIN (1981, 64) führt die von BELL (1979, 371) resp. BELL (1976, 28) entlehnte Beispielaufgabe *Add and Take* an, der das gegensinnige Verändern zugrunde liegt, die auch bei anderen Autoren wie BALACHEFF (1988) zum Einsatz kommt:

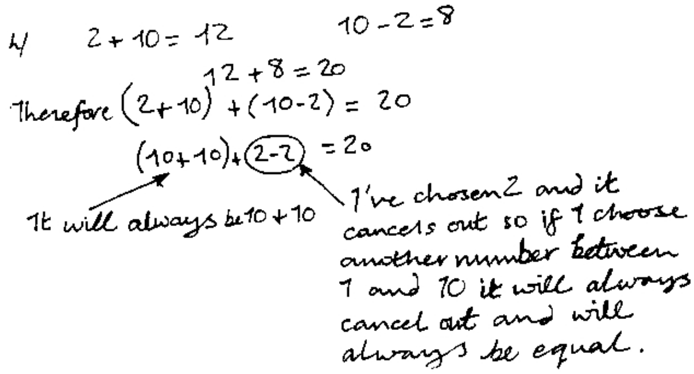


Abb. 1.2: Schülerlösung der Aufgabe *Add and Take* nach BALACHEFF (1988, 217)

Zur Zahl 10 soll eine einstellige Zahl addiert werden sowie zudem deren Differenz zur Zahl 10, so dass das Ergebnis wiederum 20 beträgt. Als "Beispiel für induktives Schließen" gibt STEIN (1981, 64) zufolge einen ausgerechneten Term wie $19 + 1 = 20$ oder $14 + 6 = 20$ an. Das Ausschreiben zu $(10 + 4) + (10 - 4) = 20$ stelle dem gegenüber einen "vollgültigen Beweis" dar. Von entscheidender Bedeutung für die Möglichkeit, hier konkret am Paradigma zu generalisieren, ist die Vermeidung des Verrechnens von Termen wie $(10 + 4) + (10 - 4)$ zu $14 + 6$ in der eher algorithmisch gestellten Beispielaufgabe *Add and Take*. Statt auszurechnen, soll der Lernende die Zahl 4 in der Gleichung $(10+4) + (10-4) = 20$ als beispielhaft ansehen, sie zumindestens gedanklich als variables Zeichen auffassen und damit gleichsam zu einer Variablen x werden lassen. In der deutschen Mathematikdidaktik spricht man bei dieser Aufgabenstellung von der Konstanz der Summe unter gegensinnigem Verändern zweier (dreier, mehrerer) Summanden.

In der Einzelfallstudie in ↑ Kap. 3.1 sollen Grundschüler die Behauptung beweisen, dass die Summe dreier aufeinander folgender Zahlen mit dem Dreifachen der mittelgroßen Zahl übereinstimmt, sowie Verallgemeinerungen der Behauptung auf äquidistante, umgeordnete oder zahlreichere Summanden vornehmen und beweisen.

Beweisen am paradigmatischen Beispiel nach Freudenthal

Beweisen am paradigmatischen Beispiel nach FREUDENTHAL [1978]

FREUDENTHAL (1978, 195ff.) bezieht den Begriff des Paradigmas allgemeiner auf Lernprozesse und illustriert dies an verschiedenen Beispielen aus der Mathematikdidaktik und aus angrenzenden Wissensbereichen. Die Wirkung des exemplarischen Lernens gründe sich auf Beispielen (Paradigmen):

> "Es soll viel wirksamer sein, es soll ohne Mnemotechnik funktionieren und auch, ohne notwendigerweise bewußt zu werden, wie die Paradigmen, nach denen das Kind seine Muttersprache grammatisch beherrschen lernt – daß es hinterdrein bewußt gemacht werden kann, ist ein Zweites, das, wenn das Paradigma etwas taugt, sogar von höherer Stufe sein wird, wie eben z.B. die explizite Grammatik der Muttersprache." (FREUDENTHAL, 1978, 195)

Hierbei lässt sich die Grammatik als latente Sinnstruktur betrachten (↑ Abs. 1.5), die dem Kind zwar durch ihre Anwendung, aber häufig nicht explizit vertraut ist und damit vorbewusst bleibt. Das Kind soll die grammatikalischen Regeln bloß an paradigmatischen Wendungen umsetzen lernen, nicht diese explizit auswendig lernen, zumal diese Regeln allgemeiner formuliert werden müssten. Und so nennt FREUDENTHAL gegenüber allgemeineren Sprech- und Denkweisen an Vorteilen *paradigmatischer Beispiele* in der Mathematik auch folgende:

> "Allgemeine Formulierungen können gar, wenn die Sprachentwicklung nicht weit genug fortgeschritten ist, viel weniger zugkräftig als paradigmatische Beispiele sein, ja selbst die *inhaltliche* Verallgemeinerung beeinträchtigen. Beispiele dagegen, paradigmatische genug, können vollgültige Mathematik sein." (FREUDENTHAL, 1978, 214, H.i.O.)

Eine Argumentation an einem *paradigmatischen Beispiel* dürfte FREUDENTHAL (1978, 214) also durchaus schon als vollgültigen, *paradigmatischen Beweis* ansehen: Wenn nämlich ein Lernender eine entsprechende Verallgemeinerung nicht "schon beim ersten Fall, dem Paradigma" eingesehen hat, sondern vielmehr "nun *ein* Paradigma oft genug übertragen hat, um schließlich auch zu einer allgemeinen Formulierung zu gelangen" (H.i.O.), kann dies zwar auch "von mangelhafter Einsicht in die Stufen des Lernprozesses zeugen". Es kann aber nach FREUDENTHAL (1978, 214) auch Folgendes sein: "Die zahlreichen Beispiele waren dann nötig, um das *Bedürfnis* an allgemeiner Formulierung zu erwecken und um ihre *sprachlichen Vorbedingungen* zu üben" (H.i.O.). Auf einen *paradigmatischen Beweis* gemünzt, bedeutet dies, dass im Lernenden einerseits ein Beweisbedürfnis geweckt und andererseits eine sprachliche Ausdrucksfähigkeit vorausgesetzt oder geschult werden muss, vermöge derer der Lernende einen solchen Beweis am Beispiel formulieren kann. Beide Aspekte werden von verschiedenen Mathematikdidaktikern in der Folgezeit im Zusammenhang mit dem (beispielgebundenen) Beweisen aufgegriffen, so vor allem von WITTMANN & ZIEGENBALG (2004) (↑ Abs. 1.2.3).

Beweisen am beweiskräftigen repräsentativen Beispiel nach Besuden

Beweisen am beweiskräftigen repräsentativen Beispiel nach BESUDEN [1979]

BESUDEN (1979, 85) geht in seinem Artikel "Vollständige Induktion in der Grundschule?" zunächst von der früher üblichen Gegenüberstellung zwischen induktivem und deduktivem Denken aus und diskutiert, wie ein "Übergang von den Einzelfällen auf den allgemeinen Fall hergestellt oder abgesichert werden" kann. Hierbei erwähnt er PÓLYA (1949, 133), welcher eine *induktive Phase* einer *beweisenden Phase* voranzustellen empfiehlt und sybillinisch formuliert: "Induktion ist die Methode, allgemeine Gesetze durch Beobachtung und Kombination besonderer Fälle zu entdecken". Zumindestens lässt sich die Induktion also als ein Erarbeitungsweg zum Beweisen auffassen. Neuere Zugänge insbesondere zum beispielgebundenen Beweisen wie etwa das Entdecken mit und ohne latente(r) Beweisidee werden in ↑ Kap. 1.3 behandelt.

BESUDEN (1979, 85) begreift weiters das mathematische Beweisverfahren der vollständigen Induktion als eine "Vervollständigung der Induktion durch das beweiskräftige repräsentative Beispiel": Die sich in Einzelerfahrungen erschöpfende Induktion wird mit ihrer *Vervollständigung am beweiskräftigen repräsentativen Beispiel* zu einem Beweis. Das Beispiel $n = n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ des Induktionsanfangs gilt in der Regel als nicht repräsentativ – um den Induktionsschluss führen zu können, hat man BESUDEN (1979, 86) zufolge vielmehr "ein repräsentatives Beispiel an der Hand, das beweiskräftig ist, weil es alle wesentlichen Elemente des entscheidenden Schlusses enthält."

Um in der Grundschule die vollständige Induktion angemessen vermitteln zu können, muss nach BESUDEN (1979, 85) jedoch auf Variablen verzichtet werden. Folglich gibt der Autor Beweise von Behauptungen wieder, die er für alle vier Jahrgangsstufen aus Arithmetik und Geometrie an Beispielen entwickelt hat – die Beweise sind informell gehalten mit einer geeigneten Beispielinstanz im Induktionsschluss. Hieran lässt sich aber auch feststellen, dass nicht jede seiner Behauptungen nur durch vollständige Induktion bewiesen werden kann, sondern auch direkt am repräsentativen Beispiel. Die vollständige Induktion steht hier also nur für ein mögliches Beweisverfahren, ohne welche sich die theoretischen Ausführungen von BESUDEN (1979) zum *beweiskräftigen repräsentativen Beispiel* aber nicht wesentlich ändern. Insofern lässt sich seine Zusammenfassung mit entsprechenden Abstrichen etwa auch im Sinne von STEINs *Generalisierung am Paradigma* oder FREUDENTHALS *Beweisen am paradigmatischen Beispiel* lesen, wenn es abschließend heißt:

> "Mathematische Begriffe, Regeln oder Sätze brauchen (...) nicht weniger Allgemeingültigkeit zu haben, wenn man nur dafür sorgt, daß repräsentative Beispiele herangezogen werden, die den allgemeinen Fall vertreten. Auf diese Weise kann die Induktion mathematisch vervollständigt werden." (BESUDEN, 1979, 91)

Mit der vorliegenden Formulierung legt der Autor zugleich nahe, dass ein mathematischer Begriff, eine Regel oder ein Satz nicht *per se* allgemeingültig ist, sondern als allgemeingültig erkannt werden muss. Dies kann paradigmatisch geschehen.

Premathematical proofs nach Semadeni

Weit umfassender als die vorstehenden Autoren hat Semadeni im Rahmen der so genannten Prämathematik das Thema der *prämathematischen Beweise* untersucht und später zu sogenannten *action proofs* verfeinert. Da sich etliche der Folgeautoren aus inhaltlichen Gründen auf ihn beziehen, soll der Diskussion seiner Ausführungen hier größerer Raum gegeben werden.

premathematical proofs nach Semadeni [1976]

Semadeni lehnt sich in seinen Schriften nach eigenem Bekunden der kognitiven Entwicklungstheorie von Piaget an. Dabei bezieht er sich hauptsächlich auf die Phase des konkret-operationalen Denkens beim Kinde. Vereinfachend setzt Semadeni (1976, 3) Bezeichnungen wie "the formal, syntactical approach of deductive mathematics" und "the meaningful, semantical approach of premathematics" gegeneinander, um die konstruktivistisch verstandene *Prämathematik* zu favorisieren als

> "the process of looking for best *concretizations* of important mathematical notions and for *paradigmatic examples* (in the sense of H.Freudenthal) , which are typical for premathematics," (Semadeni, 1976, 3)

Hierbei versteht Semadeni unter dem weit gefassten Begriff der Konkretisierung (*concretization*) einen der deduktiv aufgefassten Mathematisierung (*mathematization*) entgegengesetzten Vorgang im Sinne einer konkreten, passenden paradigmatischen Beispielauswahl. Die *primitive mathematization* sieht er im Unterschied zur formalisierenden *mathematization* als Zwischenstadium in einem nicht-formalisierten Abstraktionsprozess an. Letzteren charakterisiert Semadeni (1976, 7) selbst als "the process of abstracting mathematical ideas which are correct in substance but not yet formalized in theory".

Das *prämathematische Beweisen* einer Behauptung aber, welchem Semadeni eine Schlüsselrolle im Rahmen seiner *Prämathematik* zubilligt, zeigt sich ihm als dreischrittiger Prozess:

> "certain concrete actions performed first as physical activities (manipulation of objects, drawing pictures, walking etc.), then internalized (the same actions performed by the mind) and finally generalized (the child becomes sure that the method applies not only to the few cases in which the action has actually been performed but also to all other cases covered by the statement)" (Semadeni, 1976, 16)

Für Semadeni sind also enaktiv oder ikonisch vollzogene Handlungen, deren Internalisierung und schließlich deren Generalisierung Bestandteile eines solchen Beweisprozesses. Jene konkreten, im *prämathematischen Beweis* physisch (enaktiv) wie kognitiv vollzogenen Handlungen sollen dabei drei Bedingungen erfüllen:

> "1° In substance, all arguments are to be semantically correct.
> 2° The concrete actions mentioned above (physical actions and actions performed in the mind) are to be a concretization of a formal mathematical proof of the given statement.
> 3° The method should be valid in all cases specified in the statement; moreover, the generalization of the internalized actions should be entirely straightforward (no exceptional cases where other actions ot [sic!] other arguments must be used)." (SEMADENI, 1976, 16)

Mithin stellt sich für SEMADENI das *prämathematische Beweisen* als stets mögliche Generalisierung internalisierter Handlungen dar, die am konkreten Beispiel enaktiv initiiert und kognitiv vollzogen werden. Den *prämathematischen Beweis* grenzt der Autor damit einerseits vom formellen Beweis insofern ab, als jener auf formelle Sprache verzichtet; andererseits aber auch von einer induktiven Bestätigung der Behauptung an mehreren Beispielen:

> "A premathematical proof should not be confused with the (didactically wrong) procedure of verifying the statement for just a few concrete cases and asserting that it is true in general," (SEMADENI, 1976, 16)

Insofern ließe sich das prämathematische Beweisen auch zwischen dem induktiven Prüfen und dem formellen Beweisen betrachten. Zwischen diesen Polen kann in der vorliegenden Arbeit das prozessual zu verstehende beispielgebundene Beweisen verortet werden (↑ Kap. 1.5), für welches das prämathematische Beweisen eine Möglichkeit darstellt. Wissenschaftstheoretisch gesehen möchte SEMADENI seine Konzeption der Prämathematik ebenso keinem empirischen Verständnis unterordnen, sondern sie als Teil der Mathematik sehen:

> "The use of concrete models in premathematical arguments might suggest that premathematics is an *empirical science*. Such a point of view would be quite wrong. Premathematical arguments are based on logic, not on empirical data." (SEMADENI, 1976, 23, H.i.O.)

An dieser Stelle grenzt der Autor die Induktion als *empirical proof* am Beispiel des Satzes von PYTHAGORAS zum *premathematical proof* wie folgt ab:

> "For instance, there are many premathematical proofs of the Pythagorean theorem, e.g., some wellknown process of cutting a square in a suitable way, moving the parts, and joining them together; after this procedure has been internalized and generalized, it becomes an abstract, logical proof. An empirical proof of this theorem might consist in measuring hundreds of rectangle triangles, computing sums of squares of sides and investigating the results statistically; this would not be a premathematical proof. The internalized, abstract concepts and operations are of mathematical type, and this is why premathematics should be regarded as a part of mathematics." (SEMADENI, 1976, 23f.)

Damit ist es SEMADENI einerseits gelungen, *premathematical proofs* zu charakterisieren, andererseits die dadurch konstituierte Prämathematik als Teil der Mathematik zu begreifen. In der Folge erweitert SEMADENI sein Konzept der *premathematical proofs* zu einem Konzept der sogenannten *action proofs.*

Action proofs nach Semadeni

Schema Permanence Principle (SPP) nach SEMADENI [1981a]

Um den weiteren Hintergrund von SEMADENI zum *prämathematischen Beweisen* und zum *action proving* auszuleuchten, erscheint ein kleiner Exkurs über das *Schema Permanence Principle* (SPP) hilfreich. In seiner späteren Publikation "A principle of scheme permanence in defining arithmetical concepts" verfeinert SEMADENI (1981a) sein Verständnis von der *Prämathematik* nämlich dahingehend, dass er Schemata der Generalisierung und Spezialisierung, wie sie etwa von algebraischen Strukturen der Gruppen, Ringe, Körper etc. aus der Hochschulmathematik bekannt sind, auf arithmetische Problemstellungen bezieht. Bedeutsam ist hier sein zunächst abstrakt definiertes

> "Schema Permanence Principle (SPP). If one wants to generalize a concept from a known domain to a broader one, it is advisable to select a suitable concretization of the given concept, to extend the concretization so as to keep the schema of it the same, and to find out what the given concept becomes in the new situation." (SEMADENI, 1981a, 3, H.i.O.)

Unter einem Schema versteht SEMADENI dabei die (z.B. graphische) Darstellung einer Situation, Konstruktion oder Handlung, welche es dem Lernenden in Prozessen von Vereinfachung und Verallgemeinerung erlaubt, unter Ausschluss irrelevanter Eigenschaften die wesentlichen Merkmale des Konzepts zu erfassen. Auf den Mathematikunterricht gemünzt heißt dies:

> "In other words, for the given concept we first choose a paradigmatic example, familiar to the students; we then keep the example and try to devise a strategy of changing variable as to increase the difficulty step by step. The students will be likely to accept the extended concept if the schema holds the same." (SEMADENI, 1981a, 3)

Das hier von FREUDENTHAL entlehnte *paradigmatische Beispiel* soll den Schülern also helfen, ein (z.B. arithmetisches) Konzept als erweiterbar zu begreifen. Als Anwendungsbeispiele für das *Schema Permanence Principle* (SPP) führt SEMADENI (1981a, 4ff.) etwa die Subtraktion ganzer Zahlen an, statt nur mit natürlichen Zahlen zu operieren. Trivialere Anwendungsbeispiele geben die von FREUDENTHAL (1973, 280ff.) als Permanenzprinzip propagierte *induktiv-extrapolatorische Methode* sowie das bloße Rechnen mit größeren Zahlen.

action proofs nach SEMADENI [1981b]

Wie die beiden genannten, auf die Induktion bezogenen arithmetischen Anwendungsbeispiele können auch die früheren *prämathematischen Beweise* in das diskutierte Schema eingeordnet werden. So betrachtet SEMADENI (1981b, 2, H.i.O.) ”a general scheme of devising some kind of primary-school proofs, called action proofs”. Seine *action proofs* sollen formelle Beweise in der Schulmathematik ersetzen helfen; er hebt ihre Berechtigung insbesondere im Mathematikunterricht der Grundschule hervor und sieht sie zwischen einem intuitiven und einem deduktiven Verständnis von Mathematik angesiedelt. SEMADENIs folgende allgemeine Beschreibung einer *action proof* hat sich aus der oben genannten Darstellung *prämathematischer Beweise* und aus seinen Ausführungen über das *Scheme Permanence Principle* (SPP) entwickelt:

> ”An action proof of a statement S should consist of the following steps:
>
> 1° Choose a special case of S. The case should be generic (that is, possibly without special features), not too complicated and not to simple (trivial examples may later turn out particularly hard to generalize). Choose an enactive and/or iconic representation of this case, a paradigmatic example (in the sense of [Fr]).
> Perform certain concrete, physical actions (manipulating objects, drawing pictures, moving body etc.) as to verify the statement in the given case.
>
> 2° Choose other examples, keeping the general schema of them permanent and varying the constants involved. In each case verify the statement, trying to use the same method as before.
>
> 3° When you no longer need physical actions, perform them in mind until you see that you can do the same for a whole class of cases.
>
> 4° Try to find out what is the class of cases for which this method works.”
>
> (SEMADENI, 1981b, 3)

Der Autor gibt in diesem Zitat mit der Beschreibung einer *action proof* als Spezialfall eines *Schema Permanence Principle* (SPP) eine Methode an, mittels enaktiver und ikonischer Repräsentationen eine behauptete Aussage zu beweisen und dabei ihren Gültigkeitsbereich abzustecken. SEMADENI (1981b, 3) stellt anschließend fest: ”Thus, an action proof is a result of internalizing an action rather than a logical inferrence from given premises”. Dies erinnert in der Betonung der Internalisierung einer Handlung wiederum an das konstruktivistische Verständnis kognitiver Entwicklung und wirft damit auch die Frage auf, wie viel Anleitung ein Schüler braucht, um einen solchen *action proof* selbstständig durchzuführen.

Bedeutsam ist die Beschreibung des *action proof* durch SEMADENI aber vor allem deshalb, weil sich verschiedene spätere Autoren (wie etwa BALACHEFF, BLUM, PADBERG, WITTMANN & MÜLLER u.a.) begrifflich und inhaltlich darauf beziehen. Das initial gewählte Beispiel in einem *action proof* soll *generic* sein (s.o.), also nicht zu sehr an Besonderheiten gebunden oder zu trivial sein. Die allgemeine Aussage soll an dem gewählten Beispiel verifiziert werden können. Durch das Betrachten weiterer Beispiele soll die statuierte Aussage unter Variation von Konstanten analog zum generischen Beispiel geprüft werden, mit dem Ziel, den Beweis für eine (genauer zu bestimmende) ganze Klasse von Fällen zu erschließen. Hierbei soll der initiale, enaktiv bzw. ikonisch verstandene

Handlungsbezug nun keine Rolle mehr spielen, sondern allenfalls noch kognitiv vollzogen werden, so dass die Aussage für eine ganze Klasse von Fällen im Allgemeinen beweisbar ist.

Als ein Anwendungsbeispiel der *action proofs* führt SEMADENI (1981b, 4ff.) die Kommutativität der Multiplikation an. Dabei unterscheidet der Autor eine geometrisch veranschaulichte Begründung der Richtigkeit des Beispiels $157 \cdot 29 = 29 \cdot 157$ ohne Ausmultiplizieren von einer bloß induktiven Prüfung wie $3 \cdot 5 = 15 = 5 \cdot 3$. Seine Schilderung zeigt, dass ein nicht zu trivial gewähltes Zahlenbeispiel im Sinne der *big numbers* von MARTIN & HAREL (1989) (↑ Abs. 1.1.2) einer bloß induktiv geführten Herleitung entgegenwirkt, und dass das Beweisen an einer passenden geometrischen Veranschaulichung den formellen Beweis ersetzen kann. KIRSCH (1979, 272) kritisiert hingegen die Schlichtheit des Kommutativgesetzes als Regel an sich, was einen zugehörigen prämathematischen Beweis hinfällig mache.

recurrent action proofs nach SEMADENI [1981b]

Darüber hinaus gibt SEMADENI als Analogon zur vollständigen Induktion für die *Prämathematik* die Unterkategorie des *recurrent action proof* an:

> ”In a recurrent action proof the formal argument of mathematical induction is replaced by the knowledge of the recurrence procedure. One has to learn (in the process of exploring suitable representations) how to pass from a given number to the next. Jumping from a number to another is not enough; one has to proceed systematically through the successive cases $1, 2, 3$, etc. until the way of iterating the action and making the step $n \mapsto n + 1$ is practically grasped” (SEMADENI, 1981b, 6, H.i.O.)

Diese Fassung der vollständigen Induktion als *recurrent action proof* stellt eine differenziertere Beschreibung von BESUDENs *mathematischer Vervollständigung* (↑ Abs. 1.2.1) dar: Der beispielhaft geführte Induktionsschritt von einer Instanz auf die nächste muss als allgemein durchführbar begriffen werden, nur dann kann von einer vollständiger Induktion resp. einem *recurrent action proof* gesprochen werden. Als Aufgabenbeispiel gibt SEMADENI die Berechnung der Anzahl von Permutationen einer m-elementigen Menge an. Ein mehr auf die Schulmathematik bezogener Induktionsschluss im Rahmen eines *recurrent action proof* ist etwa der Winkelsummensatz im regelmäßigen n-Eck, wenn von dessen angenommener Winkelsumme $(n - 2) \cdot 180°$ auf die Winkelsumme eines $(n + 1)$-Ecks geschlossen wird.

Vergleich von action proofs mit heuristic arguments etc. nach SEMADENI [1981b]

Schließlich vergleicht SEMADENI seine Beweismethode des *action proof* auf geometrischem Gebiet nach einigen illustrierenden Aufgabenbeispielen auch mit *heuristic, plausible arguments* und *visual proofs*. Zu letzteren bemerkt der Autor:

> ”Some visual proofs (like the celebrated ’look’ in a proof of the Pythagorean theorem) are, in fact, action proofs. To understand such a proof requires a lot of concrete actions (e.g., cutting the given square and moving the pieces) performed in mind. Many people are unable to do this without help; they ’cannot see’.” (SEMADENI, 1981b, 11)

Wie sich das Sehen zum Beweisen und Wissen wandeln kann, lässt sich zwar sprachetymologisch nachzeichnen (↑ Abs. 1.1.3). Im mathematischen Kontext reicht das von NEUBRAND & MÖLLER (1990) propagierte bloße *Beweisen durch Hinschauen* bei einem *visual proof* allerdings nicht aus (↑ Abs. 1.2.4). Nachdem bereits SEMADENI davon gesprochen hat, dass viele Leute im Zusammenhang mit geometrischen Darstellungen jene *action proofs* nicht vollziehen könnten, kommt er zur entscheidenden Frage:

> ”One may criticize the concept of an action proof arguing that it involves a psychological question: how one can know whether the child is convinced of its validity by inner understanding (and not just by being prompted by the authority of the teacher).” (SEMADENI, 1981b, 12)

An dieser Stelle soll die Untersuchung dieser Arbeit ansetzen (↑ Kap. 1.5): Wie kann empirisch festgestellt werden, ob ein Lernender das Allgemeingültige am Besonderen des Beispiels erkennt? Welche Indizien sprechen dafür oder dagegen, dass einem Lernenden die Beweisidee bewusst wurde? SEMADENI begnügt sich abschließend lediglich damit, auf eine entsprechende Beweisproblematik bei Schulbüchern der Sekundarstufe und auf weiteren Forschungsbedarf zu verweisen:

> ”Yet, exactly the same criticism applies to any proof in a secondary-school textbook: if the author finds his proof correct and complete, it does not mean automatically that students understand it. Of course, empirical work is needed to determine what action proofs really work in the classroom, in particular – to clarify the role of recurrent action proofs.” (SEMADENI, 1981b, 12)

Einige deutschsprachige Autoren wie KIRSCH (1979) und WINTER (1983a) entwickeln das prämathematische Beweisen in dieser Hinsicht noch etwas weiter.

Prämathematisches Beweisen nach Kirsch

prämathematisches Beweisen nach KIRSCH [1979]

KIRSCH (1979, 262) reflektiert in seinem Aufsatz die Ausführungen von SEMADENI (1976). Auch er bietet vielfältige Beispiele für *prämathematische Beweise* und unternimmt dies zur ”kritischen Abgrenzung” von der prämathematischen Konzeption SEMADENIs. Statt von prämathematischem Beweisen zu sprechen, möchte KIRSCH (1979, 262) für den deutschsprachigen Raum von *adäquatem Repräsentieren eines Beweises auf enaktivem Niveau* oder *beispielgebundenem Begründen* sprechen. Das betreffende Beispiel müsse so gewählt sein, dass es ”die Übertragbarkeit auf jeden anderen Fall erkennen” lasse, um ”eine allgemeine Begründungsstrategie” darzubieten. Hierin sei eine Verwandtschaft zu dem *paradigmatischen Beispiel* nach FREUDENTHAL (s.o.) erkennbar. Für KIRSCH (1979, 262, H.i.O.) sind *prämathematische Beweise* zwar durchaus ”*Beweise*, aber in besonderer Art dargestellt”, wobei nicht alle Beweise (etwa der höheren

Mathematik) beispielgebunden geführt werden könnten. Als mögliche, beispielgebunden zu bearbeitende Aufgabenstellungen führt KIRSCH (1979, 263ff.) die Neunerprobe für die Multiplikation, das Abzählen der Diagonalen in einem n-Eck, Sätze über Netze und Flächen wie den EULERschen Polyedersatz (s.o.) sowie einige elementargeometrische Aussagen an.

Abgrenzen möchte der Autor die *prämathematischen Beweise* dabei jedoch von

> "– *unzulänglichen Begründungen, 'nur für Kinder';*
> – *nur experimentellen Verifikationen;*
> – *nur 'anschaulichen' Begründungen;*
> – *(unvollständiger) Induktion nach Verifikation einiger Sonderfälle;*
> – *plausiblen Begründungen im Sinne von G. Polya."*
>
> (KIRSCH, 1979, 262)

Mit den plausiblen Begründungen verweist der Autor auf die Theorie des plausiblen Schließens nach PÓLYA (1962) resp. PÓLYA (1963). Während KIRSCH (1979, 262) den "Beweis des Kommutativgesetzes der Multiplikation natürlicher Zahlen durch Um-Gliedern eines konkreten rechteckigen Feldes" als "Paradebeispiel für beispielgebundenes Begründen" und damit als prämathematischen Beweis ansieht, zählt KIRSCH (1979, 272) das Kommutativgesetz $a + b = b + a$ für die Addition natürlicher Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ nicht dazu. Denn bei der bloßen mengentheoretischen Betrachtung über $A \cup B = B \cup A$ gäbe es nichts zu beweisen. Die sonst üblichen anschaulichen Begründungen über die Anordnung oder Lage der Mengen oder "die zeitliche Reihenfolge" in der Vereinigung zur Gesamtmenge gelten dem Autor nicht als (prämathematische) Beweise. Mit einem solchen Beispiel möchte KIRSCH (1979, 272) eine "Abgrenzung der Prämathematik 'nach unten' vornehmen". Eine entsprechende Kritik wäre gleichwohl auch für das genannte Kommutativgesetz $a \cdot b = b \cdot a$ der Multiplikation natürlicher Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ möglich.

Andererseits bezieht KIRSCH (1979, 262ff.) auch andere Beweistypen in seine Konzeption *prämathematischer Beweise* mit ein, darunter *indirektes Argumentieren*, *Unmöglichkeitsbeweise* und selbst *induktives Argumentieren*. Dessen Berechtigung hebt KIRSCH (1979, 266) hervor, wenn er schreibt: "Auch ein solches sollte nicht grundsätzlich aus dem Bereich der Prämathematik ausgeschlossen werden". Worin die Unterschiede zwischen *induktivem Argumentieren* und den oben genannten Gesichtspunkten liegen, die der Autor nicht zu *prämathematischen Beweisen* zählt, bleibt im Dunkeln. Ergänzend spricht KIRSCH (1979, 272f.) an, dass die *prämathematischen Beweise* im Mathematikunterricht eingesetzt werden sollten, ohne jedoch hierbei konkret zu werden. Auch thematisiert der Autor, welchen Stellenwert eine solche *Prämathematik* in der Lehramtsausbildung haben könnte. Etwa werde selbst manchen Lehramtsstudierenden erst vermöge der *Prämathematik* der Zugang zur eigentlichen Mathematik geebnet. Andererseits könnten manche Studierende *prämathematische Beweise* auch bloß als *experimentelle Verifikationen* missverstehen. Sie sollten jedenfalls von den Fachdidaktikern entwickelte *prämathematische Beweise* kennen, um die Leistungen von Schülern bei ihren Beweisversuchen besser einschätzen zu können.

Beweisen in enaktiver Verkörperung und Repräsentation nach Winter

Beweisen in enaktiver Verkörperung nach WINTER [1983b]

Auch WINTER (1983a) diskutiert die von SEMADENI eingeführten *prämathematischen Beweise*. Der Autor zeigt, wie auf diesem Wege die Teilbarkeitsregeln durch Grundschüler entdeckt und bewiesen werden können. In seinen nachstehenden theoretischen Ausführungen zu *prämathematischen Beweisen* betont er ihren praktischen Bezug zur Alltagswirklichkeit. Wie schon FREUDENTHAL (1979) kommt er auf den besonderen Charakter der beim *prämathematischen Beweisen* verwendeten Sprache zu sprechen, welche sich hier beim wirklichen und gedanklichen Vollzug von Handlungen mit konkreten Gegenständen einstellt:

> "Prämathematische Beweise sind vollgültige mathematische Beweise, die aber nicht in der Fachsprache (etwa mit Verwendung von Variablen) notiert werden, sondern in der Sprache praktischer Handlungen (mit realen Dingen), die man wirklich oder nur in Gedanken ausführt. Man könnte (besser) von Beweisen in enaktiver Verkörperung sprechen. Ihr pädagogischer Wert liegt vor allem darin, daß die Schüler auf besonders eindringliche Weise erfahren, inwieweit das Beweisen eine kreative und wissens- und einsichtsvermehrende Aktivität ist (und nicht etwa eine lästige Pflichtübung, womöglich ein undurchsichtiges Sprachspiel). Prämathematische Beweise beziehen alltägliche Erfahrungen ein; sie sollen aber nicht fachsprachlich geführte ersetzen, sondern durchsetzen und begleiten. Sie sind umso besser, je leichter sie sich in den kanonischen Fachjargon übersetzen lassen." (WINTER, 1983a, 178)

Das *prämathematische Beweisen* – oder nach WINTER das *Beweisen in enaktiver Verkörperung* – soll also in der Umgangssprache enaktiv oder in bloßer Vorstellung geführt werden. Seine pädagogische Qualität bemisst sich nach WINTER daran, inwieweit es den Schülern Wissen und Einsicht vermitteln kann, und wie gut sich die prämathematischen Beweise in einen Beweis der Fachsprache übersetzen lassen. Maßgeblich bleiben jedoch die Beweise in formalisierter Darstellung. Die sprachlichen Aspekte prämathematischen Beweisens greifen die Autoren MASON & PIMM (1984, 285) (↑ Abs. 1.2.2) und später die Autoren WITTMANN & ZIEGENBALG (2004, 38) (↑ Abs. 1.2.4) wieder auf.

Beweisen in enaktiver Repräsentation mit Anwendungsbezug nach WINTER [1983a]

In WINTER (1983b, 94) wird von der "enaktiven Repräsentation oder Verkörperung eines Beweises" gesprochen. Der Autor bezieht in diesem Rahmen auch alltagsnahe Sachaufgaben ein, die er an Beispielen erläutert: etwa eine Anzahl an Tagen multipliziert mit einem Geldbetrag, um welchen ein Kontostand seither täglich konstant sinkt, oder das gleichsinnige Verändern an konstant bleibenden Altersdifferenzen. Wie die zuvor genannten Mathematikdidaktiker begreift WINTER (1983b, 71) es als lohnende Aufgabe, "zu zahlreichen (nichtgeometrischen) Begriffen und Sätzen 'isomorphe' Verkörperungen in anschaulich-intuitiven Situationen oder Konfigurationen" zu suchen. "Solche Verkörperungen sollen nicht die Begriffsbildungen ersetzen sondern die Anwendungsweite und also den Allgemeinheitscharakter der Begriffe realisieren". Dazu gehöre auch, "daß die Situationen mit den Mitteln der formalen Begrifflichkeit dargestellt werden" können. Insofern könnte man hier von beispiel- und zugleich anwendungsbezogenen Beweisen sprechen, da die von WINTER angeführten, beweiskräftigen Beispiele stets einem Sachkontext entstammen. Dies kann dem Lernenden jedoch die Erkenntnis des Allgemeingültigen am Besonderen erschweren, da er zusätzlich noch aus und in den Sachkontext übersetzen muss. Auch dürften die mathematischen Sachverhalte nicht immer so isomorph abgebildet werden können wie es WINTER vorschwebt. Dies lässt den Autor auch zu folgender Feststellung hinsichtlich des *prämathematischen Beweisen* im Allgemeinen gelangen:

> "Man erkennt an den Beispielen, daß prämathematische Beweise nicht etwa 'leichter' in einem vordergründigen Sinne sind, sie sind sogar insofern eher anspruchsvoller als sie außermathematisches Wissen mit einbeziehen." (WINTER, 1983b, 71)

Während WINTER (1983a) noch den zu leistenden gedanklichen Akt der enaktiven Verkörperung *prämathematischer Beweise* hervorhebt, richtet WINTER (1983b) seine Aufmerksamkeit eher auf in Sachkontexten zu suchende "isomorphe Verkörperungen" von Begriffen und Sätzen, ohne dass er an dieser Stelle auf den Prozess des *prämathematischen Beweisens* eingeht. Schüler stehen damit in der Gefahr, von den Sachkontexten so sehr eingenommen zu werden, dass ihnen darüber die Essenz des (prämathematischen) Beweisens verlorengeht.

Das *prämathematische Beweisen* ist vorstehend in seinen verschiedenen frühen Ansätzen thematisiert worden. Es wird in der Folge zum einen von BALACHEFF (1988) im *pragmatic proof* (↑ Abs. 1.2.2) und zum anderen von BLUM & KIRSCH (1991) im *inhaltlich-anschaulichen Beweisen* (↑ Abs. 1.2.3) aufgegriffen.

1.2.2 Generic examples und generic proving

Thematisierung des generic example bei verschiedenen Autoren

Die Bezeichnung des *generic example* (generisches Beispiel) für ein Beispiel, das für etwas Allgemeines steht, ist von Mason & Pimm (1984) in Abgrenzung zum *particular example* als einem nur im Besonderen gehaltenen Beispiel eingeführt worden und wird auch in der späteren fachdidaktischen Literatur zum beispielgebundenen Beweisen aufgegriffen. In welcher Weise sich die Ambiguität der Bezeichnung *generic example* bei den verschiedenen Autoren auch im *beispielgebundenen Beweisen* zeigt, ist einer näheren Betrachtung wert. Mason & Pimm (1984) gehen schon auf den Aspekt der sprachlichen Darstellung des Allgemeinen sowie auf die Abhängigkeit der Deutung des Beispiels als *generic example* vom jeweiligen Betrachter ein. Relevant sind in diesem Zusammenhang auch die Variablenaspekte von Malle (1986), überdies werden Akinwunmi (2012), Fischer (2009), Mormann (1981) und Ratzinger (1992) zitiert. Die schon in ↑ Abs. 1.1.2 angesprochene empirische Studie von Balacheff (1988) stellt dann das *generic example* neben das *crucial experiment* (Schlüsselexperiment) und das *thought experiment* (Gedankenexperiment), wodurch verschiedene Typen beispielgebundener Beweise postuliert werden, wie sie bei Schülern beobachtet werden können. Movshovitz-Hadar (1988) führt als Kategorie den *generic-example assisted proof* und in der Folge den *transparent (pseudo-) proof* ein. Leron & Zaslavsky (2009), Rowland (1998) sowie Biehler & Kempen (2013) beschäftigen sich schließlich mit der Vermittlung von *generic proving* in Schule und Hochschule.

Generic Examples nach Mason & Pimm

generic example bei Mason & Pimm [1984]

Zurückgehend auf frühere Ausführungen in Pimm (1983) kennzeichnen Mason & Pimm (1984, 277) den Terminus *generic example* zunächst etwas widersprüchlich als "a specialization which nonetheless speaks the generality". Unter Berücksichtigung der subjektiven Perspektive definieren die Autoren das *generic example* an anderer Stelle wie folgt:

> "A generic example is an actual example, but one presented in such a way as to bring out its intended role as the carrier of the general. This is done by means of stressing and ignoring various key features, of attempting to structure one's perception of it. Different ways of seeing lead to different ways of knowing. Unfortunately it is almost impossible to tell whether someone is stressing and ignoring in the same way as you are." (Mason & Pimm, 1984, 287)

Das generische Beispiel wird also als Träger des Allgemeinen vom jeweiligen Betrachter hinsichtlich struktureller Merkmale angesehen. Die Lernenden sollen darin also Informationen aufgreifen und verarbeiten, die nötig sind, um am generischen Beispiel das Allgemeine erkennen zu können. Freilich geht dabei jeder Lernende anders vor. Abzugrenzen ist das generische Beispiel Mason & Pimm (1984, 285) zufolge vom besonderen Beispiel, dem *particular example*, dessen Betrachtung im Besonderen gehalten bleibt.

Ob ein Beispiel generisch oder besonders ist, hängt vom Betrachter und dessen Erkenntnisprozess ab, so die Autoren. Ein als generisch angeführtes Beispiel kann dabei *particular* werden und umgekehrt (abgestuft auch nach Gültigkeitsbereich), und eine solche Einstufung ist gekoppelt an die subjektive Bewusstwerdung des Allgemeinen durch den Lernenden. Diese Subjektbezogenheit thematisieren die Autoren auch, wenn sie auf den Umgang von Lehrer und Schülern mit generischen Beispielen zu sprechen kommen:

Betrachterabhängigkeit des generic example

> "A teacher having written an example of a technique or theory on the board, is seeing the generality embodied in the example, and may well never think of indicating the scope of the example, nor of stressing the parts that need to be stressed in order to appreciate the exampleness. However, the pupils have far less experience, even with a particular instance of the situation under discussion (and may well be unaware there are others) which as a consequence, absorbs all their attention. The pupils may see only the particular (which is possibly for them still quite general, i.e., not mastered). As a result they often try to 'learn the example'." (Mason & Pimm, 1984, 286)

Der generische Charakter des *generic example* bildet sich demnach erst in der subjektiven Bewusstwerdung des Allgemeinen am Besonderen aus (↑ Abs. 1.5.3). Demnach kann eine einzelne Schüleräußerung, eine Planskizze oder ein niedergelegtes Beispiel nicht *per se* generisch sein, sondern allenfalls in dieser Weise intendiert, vermittelt oder aufgefasst werden. Wenn der Schüler mit der Gleichungskette

generischer Charakter des generic example

Beispiel zweite Potenzregel

$$(3 \cdot 4)^2 = (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4) = (3 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 4) = 3^2 \cdot 4^2$$

eine Potenzregel postuliert, kann man zunächst nicht sicher sein, ob der Lernende dies noch als *particular example* mit den konkreten Zahlzeichen 3 und 4 auffasst, und inwieweit er darin etwas Allgemeingültigeres im Sinn hat. Für den Schüler mag die Variation der Basiszahlen klar sein, die Variation der Exponenten jedoch nicht, so dass der Schüler darin vielleicht nur den Beweis der Regel $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ in der Gleichungskette sieht (zu diesem Aufgabenbeispiel vgl. die Ausführungen in ↑ Kap. 1.3 und die Einzelfallstudie in ↑ Kap. 3.5). Das generische Beispiel wäre also im Ganzen nicht als statisch vorliegende Kategorie aufzufassen, sondern als Instanz, an der eine betrachterabhängige, subjektive Realisierung des Allgemeinen allmählich erfolgen kann.

Die Autoren stellen schließlich folgende Forschungsfragen:

Forschungsfragen von Mason & Pimm [1984]

> "How can you expose the genericity of an example to someone who sees only its specificity? Apart from stressing and ignoring, and repeating the general statement over and over, how can the necessary act of perception, of seeing the general in the particular, be fostered? How can you discern the extent of the generality perceived by someone else when looking at a particular example together?
> Why do we offer students examples in class, and what are they supposed

> to make of them? If examples are always examples of something, how can students become aware of that which the examples are supposed to be exemplifying?" (Mason & Pimm, 1984, 287f.)

Die vorstehenden Fragen nach der Betrachterabhängigkeit und der sozial geteilten Erkenntnis des Allgemeinen im Besonderen des Beispiels legen weiteren Forschungsbedarf nahe und sind – auf die Rolle des Beispiels im beispielgebundenen Beweisen bezogen – auch in der vorliegenden Arbeit von großer Bedeutung.

Variablenaspekte nach Mason & Pimm, Malle u.a.

Bevor im nachfolgenden Absatz die Rolle des *generic example* im Rahmen eines *generic proving* diskutiert wird, soll noch jene Analogie zwischen Alltagssprache und mathematischer Sprache in Bezug auf das *generic example* thematisiert werden, von der Mason & Pimm (1984) in ihrem Beitrag ausgehen. In diesem Zusammenhang finden auch die Variablenaspekte von Malle (1986) Berücksichtigung, welche in die Diskussion generischer Beispiele in arithmetischen Kontexten einfließen können.

Es hat überrascht, dass Mason & Pimm (1984, 278ff.) das *generic example* an seiner sprachlichen Darstellung zu identifizieren suchen und die Abhängigkeit vom Betrachter zunächst unberücksichtigt lassen. Sie beziehen die englischen Ausdrücke *specific / particular*, *generic* und *general* auf einzelne mathematiksprachliche Äußerungen, nachdem sie anfangs entsprechende alltagssprachliche Wendungen wie "give me a kleenex" – zu dt. "gib mir ein Tempo" – auf Generizität hin untersucht haben.

Konkretismus und Mitverstehen in der Alltagssprache

Etwa kann das Wort *Brot* als Bezeichnung eines gemahlenen Erzeugnisses in seiner eigentlichen Bedeutung ganz konkret verwendet werden. In den beiden Wendungen "sein Brot verdienen" oder "der Mensch lebt nicht vom Brot allein" fungiert das Wort "Brot" jedoch nur als ein Beispiel für etwas je Allgemeineres, etwa für den Verdienst oder für weitere menschliche Bedürfnisse. An den verschiedenen Verwendungsmöglichkeiten des Wortes "Brot" zeigt sich, dass das Mitverstehen (in der Sprachwissenschaft als Stilmittel *Synekdoché* genannt, von altgr. συνεκδοχή für *Mitverstehen*) des jeweils allgemeiner Gemeinten unsicher ist. Es kann auf diesem Wege zwischen Gesprächspartnern zuweilen auch zu Missverständnissen (im Sinne eines *Nicht-Mitverstehens*) kommen. Eröffnet der eine Gesprächspartner dem anderen Gesprächspartner jedoch den weiteren Kontext seiner Verwendung des Wortes "Brot" und damit dessen weiteren Deutungshorizont, kann das *Mitverstehen* des allgemeiner Gemeinten zu einem sozial geteilten *einander Mitverstehen* im Allgemeinen werden.

Mitverstehen als subjektives Realisieren des Allgemeingültigen

Es stellt sich die Frage, ob die sprachwissenschaftliche Analogie – wie sie auch in Mason & Pimm (1984) bemüht wird – hilfreich ist, um das *generic example* präziser zu fassen. Das Charakteristische eines *generic example* liegt in einem Mitverstehen eines strukturellen Zusammenhangs, das eine subjektive Realisierung des Allgemeinen im Besonderen des Beispiels ermöglicht (↑ Abs. 1.5.3). In der obigen Gleichung zur zweiten Potenzregel kann der Schüler in den Zahlzeichen 2, 3 und 4 auch Variable sehen, so dass er möglicherweise die speziellere Regel $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ oder sogar auch die allgemeinere Regel $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ in verschiedenen Allgemeinheitsgraden und Gültigkeitsbereichen erkennt. Diese Erkenntnis des allgemeinen strukturellen Zusammenhangs muss sprachlich vermittelt (versprachlicht, manifestiert) werden, um sie zu einer sozial geteilten Erkenntnis, einem Mitverstehen am Besonderen des Beispiels werden zu lassen. Ein *generic example* ist also in der Tat nicht *per se* statisch zu betrachten, sondern erfordert eine (ggf. sozial zu teilende) fortschreitende Erkenntnis seiner Generizität hin zum Allgemeinen.

Aufgabenbeispiel zweite Potenzregel

Mason & Pimm (1984) versuchen nun aber, das *generic example* vom *specific / particular example* auf der sprachlichen und ikonischen Ebene zu unterscheiden. Eine sprachlich-figurale Darstellung mit der kategoriellen Unterscheidung in *specific*, *generic* und *general* wie die folgende ist jedoch inhaltlich klärungsbedürftig:

specific / particular example nach Mason & Pimm [1984]

specific	*generic*	*general*
6	6 can be	
. . . . . .	. . . . . .	
	$2N$	$2N$

sprachlich-figurative Darstellung
nach Mason & Pimm (1984, 281)

Diese Untersuchung auf der sprachlichen Mikroebene einer einzelnen Äußerung kommt über die rhetorische Figur der *Synekdoché* indessen kaum hinaus und zeigt gerade dadurch an, dass es sich bei einem *generic example* nicht einfach um eine Zwischenkategorie handelt – das generische "can be" macht vielmehr auch selbst kontextbezogene Worte wie etwa die von den Autoren angefügte Fußnote notwendig:

> "6, when seen in the context of even numbers, CAN be seen as a generic even number, but this requires stressing some of its features (its evenness) and ignoring other features (that it is a product of two primes, that it is divisible by 3, ...). It is almost impossible to tell whether someone else is stressing and ignoring the same way that you are, without recourse either to algebra or considerable discussion. (...)" (Mason & Pimm, 1984, 288)

Wenn im angeführten Beispiel von *der, einer* oder *irgendeiner (beliebigen) Zahl* (*the*, *a*, *any number*) gesprochen wird, kann man die weiters angeführten isolierten mathematischen Sprechweisen deshalb nicht wie die Autoren eindeutig den Kategorien *particular / specific*, *generic*, *general* zuordnen:

”THE even number 6,	THE even number $2N$
AN even number (like) 6,	AN even number $2N$
ANY even number (like) 6,	ANY even number $2N$”

(Mason & Pimm, 1984, 281)

Ungefähr übersetzt bedeutet dies:

DIE gerade Zahl 6,	DIE gerade Zahl $2N$
EINE gerade Zahl (wie) 6,	EINE gerade Zahl $2N$
IRGENDEINE (beliebige) gerade Zahl (wie) 6,	IRGENDEINE (beliebige) gerade Zahl $2N$

sprachliche Indizien zur subjektiven Realisierung des Allgemeingültigen

Entsprechende Schüleräußerungen gäben allenfalls Hinweise, wie der Schüler die Zahl 6 verstanden haben könnte. Dies lässt sich erst im weiteren Unterrichts- oder Gesprächsverlauf unter Berücksichtigung des Kontexts deuten. An Indizien kann man nur grob unterscheiden:

- Mit dem bestimmten Artikel (*die* bzw. *the*) gibt man in der Regel das Spezifische als (gerade) Zahl 6 wieder (*specific*).
- Die Verwendung des unbestimmten Artikels (*ein* bzw. *a*) ist zweideutig: die Ausdrucksweise *eine gerade Zahl (wie)* 6 kann auf die spezielle Zahl 6 verweisen (*particular*), die nur von 6 vertreten wird, oder auf das Merkmal der Geradzahligkeit einer Zahl wie 6, ohne dass die gerade Zahl bestimmt, benannt oder bekannt sein muss (*generic*).
- Schließlich kann der Gebrauch des Indefinitpronomens (*irgendeine* bzw. *any*) für eine beliebige Zahl überhaupt, mithin für jedwede gerade Zahl stehen (*general*), während *irgendeine* Zahl auch für eine auszuwählende oder bestimmbare, noch unbekannte Zahl stehen kann.

Für Lernende reicht es also nicht, allein durch Artikel oder Pronomen die Funktion eines Beispiels als *generic example* anzuzeigen. Ähnlich wie im obigen rein sprachlichen Beispiel muss der Lernende erst eine dem mathematischen Kontext angemessene Sprache finden, um seine subjektive Realisierung des Allgemeinen am Besonderen sprachlich vermitteln zu können. Die Zweideutigkeit der einzelnen Sprechweisen zeigt zudem, dass sich ohne weitergehende Versprachlichung des (arithmetischen) Kontexts kein *generic example* rekonstruieren lässt. Dies muss vom Mitschüler, Lehrer und Forscher letztlich interpretativ erschlossen werden (↑ Kap. 1.5 und ↑ Kap. 2.2).

Variablenaspekte nach Malle [1986]

Malle (1986) benennt in seinem Basisaufsatz die in der Mathematikdidaktik geläufigen grundlegenden Variablenaspekte:

> ”Gegenstandsaspekt
> Variable als unbekannte oder nicht näher bestimmte Zahl (allgemeiner als unbekannter oder nicht näher bestimmter Gegenstand).
>
> Einsetzungsaspekt
> Variable als Leerstelle (Platzhalter), in die man Zahlen einsetzen darf.

> Kalkülaspekt (Rechenaspekt)
> Variable als bedeutungsloses Zeichen, mit dem nach bestimmten Regeln operiert werden darf."
>
> (MALLE, 1986, 3), vgl. MALLE (1993, 46)

Für den Gegenstandsaspekt führt der Autor eine Beispielaufgabe an, bei der sich der Schüler eine unbekannte Zahl ausdenkt und mit ihr operiert. Den Einsetzungsaspekt illustriert er an einem Term, für dessen Platzhalter Beispielzahlen einzusetzen sind. Den Kalkülaspekt zeigt MALLE schließlich an der Lösung variablenhaltiger Gleichungen. Seine Ausführungen vervollständigt er durch eine Übersicht, in der er den Gegenstands-, Einsetzungs- und Kalkülaspekt systematisch auf Variable, Term und Gleichung bezieht. Die Variable wird dabei als Teil eines Terms und dieser als Teil einer Gleichung aufgefasst:

	Gegenstandsaspekt	Einsetzungsaspekt	Kalkülaspekt
Variable	Zahl	Platzhalter (Leerstelle)	Zeichen
Term	Zahl	Zahlform	Zeichenreihe
Gleichung	Aussage	Aussageform	Zeichenreihe

Variablenaspekte nach MALLE (1986, 4) und MALLE (1993, 47)

In den empirischen Fallstudien von ↑ Teil 3 sollen (ggf. zu entdeckende) Aussagen über geometrische oder arithmetische Zusammenhänge beispielgebunden bewiesen werden. Dabei spielen alle drei Variablenaspekte in ihrem jeweiligen Auftreten eine Rolle. MALLE (1986, 4) zufolge ist es "geradezu charakteristisch für das Umgehen mit Variablen in der Mathematik, daß man die einzelnen Aspekte beständig wechseln muß und unter Umständen mehrere Aspekte gleichzeitig im Auge behalten muß."

Variablenaspekte beim Aufstellen von Formeln

Beispielsweise kommt beim Aufstellen der Formel $x \cdot (x-1)/2$ für die Anzahl der Verbindungen in einem vollständigen Graphen mit x Ecken jedem Teil dieses Terms eine bestimmte gegenständliche Bedeutung zu, die sich der Lernende zumal beim Entdecken der Behauptung allmählich erschließen kann (↑ Abs. 1.5.1 und ↑ Abs. 3.3.1). So steht $x - 1$ für die Anzahl der von jeder der x Ecken ausgehenden Verbindungen, welche insgesamt doppelt gezählt werden würden, dividierte man ihre Gesamtzahl $x \cdot (x - 1)$ nicht durch 2. Durch Einsetzen von Beispielzahlen in der allgemeiner gehaltenen Formel $x \cdot y/2$ und der Prüfung an einer Zeichnung kommt mancher Lernende vielleicht erst auf den genannten Zusammenhang zwischen der Anzahl x an Ecken und der Anzahl der von ihnen jeweils ausgehenden Verbindungen $y := x - 1$. Schließlich sind auch Umformungen des Terms $x \cdot (x - 1)/2$ in $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$ oder $1 + 2 + \cdots + (x - 1)$ im Sinne des Kalkülaspekts möglich, wobei sich in jedem Summanden des zweiten Terms wiederum eine gegenständliche Bedeutung als noch nicht schon abgezählte Verbindungen zu den übrigen der x Eckpunkte ausmachen lässt. Aus beiden Umformungen lässt sich ersehen, dass die Betonung des Kalkülaspekts nicht notwendigerweise mit einem Verlust, sondern auch mit einem Wechsel an gegenständlicher Bedeutung von Variablen- resp. Zahlzeichen verbunden sein kann.

Wort-, Buchstaben- und Quasi-Variablen nach AKINWUNMI [2012]

AKINWUNMI (2012, 8) spricht bei ihrer Schilderung einer Propädeutik von Variablenkonzepten in der Grundschule von Wort-, Buchstaben- und Quasi-Variablen. "Wortvariablen wie 'Haufen', 'Mensch', oder 'Tag' " (vgl. MALLE (1993, 44)) lassen sich als historische Vorläufer zu heute geläufigen Buchstabenvariablen wie a, δ oder V_n betrachten. Zur Rolle so genannter *Quasi-Variablen* für Grundschüler führt die Autorin an:

> "Wenn Kinder allgemeine Zusammenhänge ausdrücken möchten, bevor ihnen die Möglichkeiten der algebraischen Sprache zur Verfügung stehen, so greifen sie oftmals auf konkrete Zahlenbeispiele zurück. Die konkreten Zahlen, die aber von den Kindern allgemeiner gedacht werden und wie Variablen als Platzhalter dienen, werden in der Literatur als Quasi-Variablen bezeichnet". (AKINWUNMI, 2012, 88)

Stufenfolge der Vorformen von Variablen nach FISCHER [2009]

In diesem Zusammenhang zitiert die Autorin auch FISCHER (2009), welche die Variablenauffassungen von Fünftklässlern untersucht hat und dabei auf eine Stufenfolge von Vorformen von Variablen gestoßen ist, dessen dritte Stufe die von AKINWUNMI (2012) genannten Quasi-Variablen darstellen:

> "Als Vorformen von Variablen kann eine Skala von zunehmend abstrakten Zahlauffassungen bezeichnet werden. Dabei besteht die Abstraktion in einem Absehen von spezifischen Eigenschaften bestimmter Zahlen. Auf der ersten Stufe treten sie als Zahlen auf, deren absolute Größe genutzt wird, um z. B. Rechenhandlungen explizit auszuführen und mit einem Ergebnis zu versehen, das durch einen Zahlnamen repräsentiert wird. Auf der nächsten Stufe wird auf diese Möglichkeit des Ausrechnens verzichtet. Zwar wird weiterhin durch einen Zahlnamen auf eine bestimmte Zahl verwiesen, aber sie wird im Sinne eines Bausteins eingesetzt und kann bis zum Endergebnis hin verfolgt werden. Auf der dritten Stufe wird ein Baustein weiterhin mit einem Zahlnamen repräsentiert, aber dieser Name steht nicht mehr ausschließlich für die benannte Zahl, sondern dient als Stellvertreter, an dem gezeigt wird, wie mit einer beliebigen Zahl verfahren wird. Auf der vierten Stufe wird auf die Benennung und damit Hervorhebung einer bestimmten Zahl verzichtet. Stattdessen erhält der Baustein ein neutrales Zeichen wie einen Buchstaben oder ein 'Platzhalterzeichen'." (FISCHER, 2009, 26)

Insofern können die Quasi-Variablen nach AKINWUNMI (2012, 89) als "Brücke zwischen bestimmten und unbestimmten Zahlen dienen", und offenbaren damit jenen generischen Charakter, von dem schon MASON & PIMM (1984) weiter oben sprachen.

Variablenaspekte beim beispielgebundenen Beweisen

Folgt man der ursprünglichen Einteilung von MALLE (1986, 3), sind – grob gesprochen – für das beispielgebundene Beweisen Gegenstands- und Einsetzungsaspekt in ihrer Bezogenheit auf eine Aussage(form) primär, doch kommt, wie etwa die Aufgabenbeispiele der Zahlenmauern (↑ Abs. 3.1.1) und des Umfangswinkel-Mittelpunktswinkelsatzes (↑ Abs. 3.4.1) zeigen, auch dem Kalkülaspekt Bedeutung zu. Dieser Aspekt tritt zudem beim operativen Beweisen nach WITTMANN stärker hervor (↑ Abs. 1.2.3). Löst sich das Kalkül ganz vom Gegenständlichen ab im Sinne eines bloßen Operierens an Zeichenreihen, wird formell bewiesen. Insgesamt gesehen mag es hilfreich sein, die Variablenaspekte beim beispielgebundenen Beweisen im Blick zu behalten. Dabei ist es wiederum interpretationsbedürftig, welcher Variablenaspekt während dessen jeweils im Vordergrund steht und in wie weit der Lernende das Allgemein(gültig)e im Besonderen dabei wirklich erkannt hat.

Niveaus der Verallgemeinerung nach MORMANN [1981]

Hinsichtlich der Rolle von Variablen beim beispielgebundenen Beweisen sind noch die Studien von MORMANN (1981) und RATZINGER (1992) zu nennen. MORMANN (1981, 75) unterscheidet bei der Entwicklung von Beweisen wie der Quersummenregel für alle zweistelligen Zahlen verschiedene Verallgemeinerungsniveaus:

> "Die Entwicklung des Beweises dieser Aussage verläuft über verschiedene Niveaus der Verallgemeinerung. Während auf einem niedrigen Niveau die einzelne Zahl, für die die Quersummenregel bewiesen werden soll, isoliert für sich steht, wird auf den entwickelteren Niveaus die einzelne Zahl als Funktionswert eines zunehmend komplexeren Variablenzusammenhanges aufgefaßt. Damit ändert sich der Gegenstandsbereich der Untersuchung; es geht nicht mehr in einem naiven Sinne um die Gesamtheit aller einzelnen Zahlen, sondern um die 'allgemeine natürliche Zahl', deren adäquate Beschreibung erst im entwickelten Variablenkalkül gelingt." (MORMANN, 1981, 75)

In diesem Zusammenhang spricht der Autor auch an, dass an der mathematischen Sprache zumindest in Arithmetik und Algebra erkennbar sei, wann Variablen eingeführt werden. Dabei ist es MORMANN (1981, 71) zufolge vom Kontext abhängig, "ob man in der natürlichen Sprache Variablen durch Artikel oder Adjektive, wie 'ein', 'beliebige', 'irgendwelche', oder andere Wendungen wie 'z.B.', 'usw.', 'ebenso' usw. mehr oder minder explizit ausdrückt." (vgl. hierzu die Ausführungen von MASON & PIMM (1984, 281) weiter oben). Der Begriff der Variable ist nach MORMANN (1981, 71) dessen ungeachtet "durch größere Explizitheit, Formalisierung, Kontextfreiheit und systematischere Verwendung" attributiert.

Beispielgebundenes Beweisen auf Repräsentationsebenen nach RATZINGER [1992]

Die Niveaus der Verallgemeinerung bei MORMANN (1981, 75) erscheinen im Lehrbuch bei PADBERG (1997, 58ff.) und vorgängig bei RATZINGER (1992, 54ff.) als Repräsentationsebenen beispielgebundenen Beweisens, dessen Definition RATZINGER (1992, 49) wiederum von KIRSCH (1979, 262) übernimmmt. Am Aufgabenbeispiel der Transitivität der Teilbarkeitsrelation $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c \; \forall \; a, b, c \in \mathbb{N}$ lässt sich nach RATZINGER (1992, 54) unterscheiden:

- *Ikonische Repräsentationsebene* (durch (Kreise um) Punkte/Kugeln)
- *Symbolische Repräsentationsebene* (durch Beispielzahlen)
- *Beweis mit Variablennutzung* (durch Variablenzeichen)

Im Sinne von STEIN (1986, 81) könne man die zugehörigen Beweise vom Konkreten hin zum Abstrakten ansiedeln. Dabei blieben nach RATZINGER (1992, 56) die vollzogenen logischen Schlussweisen identisch, Unterschiede wären jedoch bei der konkreten bis allgemeinen Formulierung der entsprechenden Sätze auszumachen. Der Autor illustriert die vorgenommene Dreiteilung noch an der Summenregel $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid (b+c) \; \forall \; a,b,c \in \mathbb{N}$, der Produktregel $a \mid b \wedge c \mid d \Rightarrow a \cdot c \mid b \cdot d \; \forall \; a,b,c,d \in \mathbb{N}$ sowie der Quersummenregel (vgl. hierzu auch ↑ Abs. 1.4.1). Dabei wird der *Beweis mit Variablennutzung* jeweils als formaler und nur zum Teil formell gehaltener (formalisierter) Beweis geführt.

An weiterer Literatur zu den oben genannten Variablenaspekten, zur algebraischen Sprache im (frühen) Mathematikunterricht und zur sogenannten *Early Algebra* sei hier ergänzend und exemplarisch auf KÜCHEMANN (1978), MALLE (1993, 44ff.), HEFENDEHL-HEBEKER & HUSSMANN (2003, 65ff.), BARZEL ET AL. (2008) und SPECHT (2009, 24ff.) verwiesen.

Generic Proving nach Balacheff

Untersuchungen zum beispielgebundenen Beweisen nach BALACHEFF [1988]

Als erste umfassende empirische Studie zum beispielgebundenen Beweisen kann der Aufsatz von BALACHEFF (1988) resp. BALACHEFF (1987) betrachtet werden (vgl. hierzu auch ↑ Abs. 1.1.2). BALACHEFF beobachtet beispielgebundene Beweisprozesse von Schülern und untersucht insbesondere, wie die Schüler zu ihrer Überzeugung von der Allgemeingültigkeit einer vorgeschlagenen Beispiellösung gelangen. Der interaktionistisch-interpretative Ansatz erlaubt es BALACHEFF, die Lösungsprozesse sichtbarer zu machen, daraus Typen und Niveaus von Beweisen abzuleiten und dadurch Aussagen über den beispielgebundenen Beweisprozess zu gewinnen. Für die vorliegende Arbeit sind auch BALACHEFFS aufgabenbezogene Anregungen, seine Ausführungen zu sprachlichen Aspekten beispielgebundenen Beweisens und die Schilderung seiner Erfahrungen im Umgang mit den befragten Schülern hilfreich, so dass der Aufsatz im Folgenden nochmals genauer studiert werde.

pragmatic und conceptual proofs

BALACHEFF (1988) differenziert zunächst verschiedene Niveaus und Typen von Beweisen, um dann später die Ergebnisse seiner empirischen Studie entsprechend zu formulieren. Grundsätzlich unterscheidet BALACHEFF zwischen *pragmatic proofs* und *conceptual proofs*:

> "*pragmatic* proofs are those having recourse to actual action or showings, and by contrast, *conceptual* proofs are those which do not involve action and rest on formulations of the properties in question and relations between them." (BALACHEFF, 1988, 217, H.i.O.)

Mit der Bezeichnung *pragmatic proof* knüpft BALACHEFF an den Terminus *action proof* von SEMADENI (1981b) bzw. SEMADENI (1984) an. Allerdings begreift BALACHEFF (1988, 216) unter einem *pragmatic proof* zunächst ein *direct proof by showing*, bei dem die benutzten Operationen und Handlungen enaktiv durchgeführt werden. Als Paradebeispiel für einen solchen Beweistyp führt BALACHEFF dann auch den anschaulichen Beweis dafür an, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen n^2 ergibt (siehe NEUBRAND & MÖLLER (1990, 54) und ↑ Abs. 1.2.4). Die *pragmatic proofs* kommentiert BALACHEFF (1988, 217) in seiner Interpretation von SEMADENI (1984) wie folgt: Eine solche Art von Beweisen beruhe auf der Fähigkeit desjenigen, in der visuellen Darstellung Gründe zu rekonstruieren, die er implizit zwar schon in seinen Gedanken trage, aber noch nicht ganz zu erklären vermöge. BALACHEFF führt daraufhin die Überlegungen SEMADENIs weiter und bezieht den Aspekt der Versprachlichung bei der Darstellung eines Beweises ein:

> ”This detachment from action, from the here-and-now, does not happen by itself. It gets expressed in the language of the everyday. (...) Nevertheless, use of such language already requires a certain distance so that the action can be described and made explicit. As Sémadéni suggests (thinking of an extension of action proofs), the movement to conceptual proofs lies essentially in taking account of the generic quality of those situations previously envisaged.” (BALACHEFF, 1988, 217)

BALACHEFF betont an dieser Stelle, dass *conceptual proofs* eine distanzierte, reflektierte und versprachlichte Sicht auf den vollzogenen Lösungsprozess erfordern. Zur Illustration eines solchen *conceptual proof* führt er die Aufzeichnungen eines Schülers zum gegensinnigen Verändern an (*Add and Take*, vgl. ↑ Kap. 1.2.1):

Aufgabenbeispiel gegensinniges Verändern

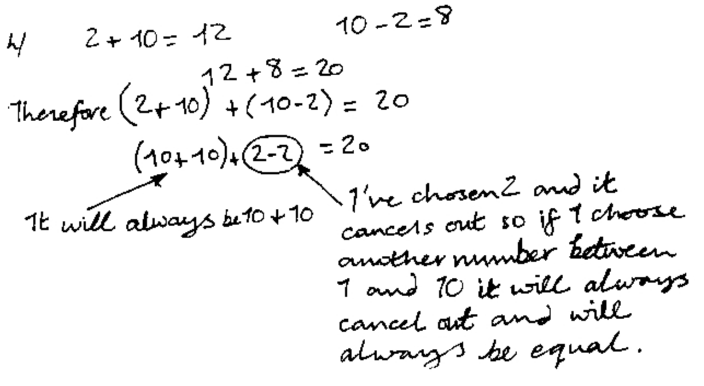


Abb. 1.3: Schülerlösung der Aufgabe *Add and Take* nach BALACHEFF (1988, 217)

Der Schüler hat hier seine dargestellten Operationen dahingehend schriftlich kommentiert, dass es unerheblich sei, um welche Zahl gegensinnig verändert werde. Diese Erkenntnis erwächst aber erst aus einer Loslösung von der eigentlichen Aufgabe $8 + 12 = 20$, d.h. diese Aufgabe wird nicht bloß direkt ausgerechnet, sondern auch so dargestellt, dass die Zahlen 8 und 12 als zur Zahl 10 gleichdifferente Beispielzahlen angesehen werden können. Die Verwendung der Umgangssprache erlaubt es BALACHEFF zufolge, den in mathematikhaltiger Sprache vollzogenen Lösungsprozess aus der Distanz heraus als einen *conceptual proof* zu charakterisieren. Um schließlich *formal proofs* zu generieren, führt BALACHEFF drei notwendige Gütekriterien an:

- "a *decontextualisation*, giving up the actual object for the class of objects, independent of their particular circumstances;"
- "a *depersonalisation*, detaching the action from the one who acted and of whom it must be independent;"
- "a *detemporalisation*, disengaging the operations from their actual time and duration: the process is fundamental to the passage from the world of actions to that of relations and operations."

(Balacheff, 1988, 217f., H.i.O.)

Dabei beschreibt die Dekontextualisierung die eigentliche Loslösung von der Besonderheit des Beispiels zum allgemein(gültig)er Erkannten, während die Depersonalisierung auf den Aspekt der Betrachterunabhängigkeit und die Detemporalisierung auf die zeitliche Unabhängigkeit sowie die symbolische Funktion einer funktionalisierten Sprache hinweist. Der Schüler dekontextualisiert und depersonalisiert teilweise, wenn er mündlich (bzw. in der obigen Abb. 1.3 schriftlich niedergelegt) erläutert: "It will always be 10 + 10 I've chosen 2 and it cancels out so if I choose another number between 1 and 10 it will always cancel out and will always be equal." Überdies betont Balacheff (1988, 218) mit diesem Aufgabenbeispiel auch die Wichtigkeit der Versprachlichung beim (beispielgebundenen) Beweisen. Dies geschieht inhaltlich in einer allmählichen Ablösung vom betrachteten Beispiel, sozial in einer angestrebten Perspektivenunabhängigkeit und methodisch in einem operativ-relationalen statt enaktiven Verständnis.

vier Beweistypen

An Beweistypen führt Balacheff an:

> "Among the various types of pragmatic and conceptual proofs, we have singled out four main types which hold a privileged position in the cognitive development of proof: naive empiricism, the crucial experiment, the generic example and the thought experiment." (Balacheff, 1988, 218)

naive empiricism und crucial experiment

Der Autor zählt *naive empiricism* (naive Empirie) sowie *crucial experiment* (Schlüsselexperiment) deshalb zu den Typen von Beweisen, weil sie von den Lernenden als solche angesehen werden können, auch wenn sie dies aus Expertensicht nicht sind. Das *generic example* (generisches Beispiel) und das *thought experiment* (Gedankenexperiment) hingegen sieht er als wahrheitsbegründend an (vgl. Lakatos (1976) in ↑ Abs. 1.2.1). Balacheff (1988, 218) formt aus diesen Beweistypen eine Hierarchie – entscheidende Kriterien dafür, in welche Kategorie ein Beweis eingruppiert werde, seien die Ansprüche an die Allgemeingültigkeit und an das, was der Autor *the conceptualisation of knowledge* nennt. Während er also *naive empiricism*, *crucial experiment* und *generic example* zu den *pragmatic proofs* zählt, gruppiert er – vom "calculations of statements" (↑ Abs. 1.1.2) abgesehen – nur das *thought experiment* in die Kategorie *conceptual proofs* ein. Zum *naive empiricism* führt er aus:

> "Naive empiricism consists of asserting the truth of a result after verifying several cases. This very rudimentary (and as we know, insufficient) means of proving is one of the first forms of the process of generalisations (Piaget, 1978)." (Balacheff, 1988, 218)

Das *crucial experiment* beschreibt Balacheff in Abgrenzung davon wie folgt:

> ”The expression ’crucial experiment’ coined by Francis Bacon (*Novum Organum*, 1620), refers to an experiment whose outcome allows a choice to be made between two hypotheses, it having been designed so that the outcome should be clearly different according to whether one or other hypothesis is the case. (...)
> We use the same expression for a slightly different process, one of verifying a proposition on an instance which ’doesn’t come for free’, asserting that ’if it works here, it will always work’. (...) This type of validation is distinguishable from naive empiricism in that the pupil poses explicitly the problem of generality and resolves it by staking all on the outcome of a particular case that she recognises to be not too special.” (Balacheff, 1988, 218f., H.i.O.)

Gegenüber dem *naive empiricism* sind sich die Lernenden beim *crucial experiment* also durchaus des Anspruchs auf Allgemeingültigkeit bewusst, den zu prüfende und zu beweisende Behauptungen *per se* stellen, auch wenn sie diese vielleicht nur an einem typischen Beispiel geprüft haben. Während Balacheff einen *naive empiricism* bei einigen Lernenden beobachtet und zugleich als ”resistant to generalisation” beschreibt, realisieren andere Lernende doch zumindest, dass das naturkundlich anmutende Prinzip ”was mehrmals gilt, gilt immer” das Wesen mathematischen Beweisens verfehlt.

generic example und thought experiment

Im Gegensatz zu den beiden ersten Beweistypen des *naive empirism* und des *crucial experiment* betont Balacheff zum *generic example* und *thought experiment*:

> ”The generic example involves making explicit the reasons for the truth of an assertion by means of operations or transformations on an object that is not there in its own right, but as a characteristic representative of its class. The account involves the characteristic properties and structures of a class, while doing so in terms of the names and illustration of one of its representatives. (...)
> The thought experiment invokes action by internalising it and detaching itself from a particular representation. It is still coloured by an anecdotal temporal development, but the operations and foundational relations of the proof are indicated in some other way than by result of their use, something which is the case for the generic example.” (Balacheff, 1988, 219)

Das *generic example* wird von Balacheff also ähnlich wie Mason & Pimm (1984) als charakteristischer Repräsentant für eine ganze Klasse von Beispielen gesehen, an dem zudem die Gründe für die Allgemeingültigkeit einer Behauptung besonders gut herausgearbeitet werden können (etwa anhand eines vorliegenden vollständigen Graphens mit 5 Ecken). Vom *generic example* als charakteristischem Repräsentanten wird beim *thought experiment* abgesehen –

ein Beispiel (etwa eines vorgestellten vollständigen Graphens mit n Ecken) wird rein kognitiv konstruiert und dessen der Konkretion enthobenen Eigenschaften zum Führen eines Beweises verwendet.

Aufgabenbeispiel vollständiger Graph

Das Aufgabenbeispiel des vollständigen Graphen, welches in veränderter Form auch in der Einzelfallstudie in ↑ Kap. 3.3 zum Einsatz kommt, wird von Balacheff wie folgt gestellt:

> "you are to write a message which will be given to other pupils of your own age, which is to:
> provide a means of calculating the number of diagonals of a polygon when you know the number of vertices it has." (Balacheff, 1988, 220)

An Lösungsvorschlägen bot sich dem Studienleiter insgesamt ein facettenreiches Bild – steht n für die Anzahl der Ecken eines n-Ecks, schlugen die zu Paaren gefassten Schüler für die Anzahl an Diagonalen im vollständigen Graphen u.a. folgende Lösungen vor:

"$f_1(n) = n(n-3)/2$
n^2
n
$f(n+1) = f(n) + a(n+1)$ and $a(n+1) = a(n) + 1$ where $a(n)$ is the number of diagonals which should have been added to pass from P_{n-1} to P_n.
$f_2(n) = (n-3) + (n-3) + (n-4) + (n-54)$ [sic!]$+ \cdots + 2 + 1$ (...)
$n.s(n)$, where $s(n)$ is the number of diagonals at a vertex
$n/2$ (...)
$n/2$ or n
$n/2$ or $(n-1)/2$ (...)"

einige Schülerlösungen nach Balacheff (1988, 221), vgl. Balacheff (1991, 94f.)

Erkenntnisse aus den Forschungen von Balacheff [1988]

Am vorstehenden Aufgabenbeispiel des vollständigen Graphen und deren Beispiellösungen durch die Schüler illustriert Balacheff (1988, 222f.) seine hierarchisch gedachte Klassifikation der *pragmatic proofs* und *conceptual proofs*. Zumal das betrachtete Aufgabenbeispiel des vollständigen Graphens in abgewandelter Form auch in der Einzelfallstudie in ↑ Kap. 3.3 eingesetzt wird, sind für die vorliegende Arbeit einige seiner Erkenntnisse, die er daraus zieht, von besonderem Interesse:

prozesshafter Charakter des Beweisens

- Die bloße Auswertung der Schülerlösungen erweist sich nach Balacheff (1988, 228) zur Einordnung in die vorgestellte Hierarchie an Beweistypen als untauglich, vielmehr gelte es, den Prozess einer Beweisproduktion zu verfolgen und dann eine Eingruppierung vorzunehmen.

soziale Aspekte des Beweisens

- Eine mögliche Ursache dafür, dass Schüler das Stadium des *naive empiricism* nicht verlassen, besteht nach Balacheff (1988, 222) in der potentiell hemmenden sozialen Interaktion zwischen Lehrer und Schülern oder zwischen Schülern untereinander, zumal dann, wenn diese sehr unterschiedliche Lösungskonzepte verträten. Der *naive empiricism* werde von den Schülern jedoch nicht *per se* als Lösungskonzept favorisiert.

- Der bei einem Schüler schließlich jeweils festgestellte Beweistyp ist nach Ansicht von BALACHEFF (1988, 228) davon abhängig, welche Wendungen der Weg des Denkens über das jeweilige Problem nehmen kann. Zudem stehen *naive empiricsm* und (hin zum) *crucial experiment* eher für einen empirischen Pragmatismus, während *generic example* und (hin zum) *thought experiment* eher einen logischen Rationalismus verträten, wobei sich diese Ismen laut FISCHBEIN (1982, 17) in ihrer parallelen Koexistenz einander bedingen und ergänzen (sollten). Eine solche Unterscheidung erinnert auch an jene von HANNA (1989) resp. HANNA (1990, 9) in *proving that* und *proving why* unter Rückbezug auf die verifikative und explanative Beweisfunktion. Das *proving why* ist bei HANNA ähnlich induktiv konnotiert wie der *naive empiricism* und das *crucial experiment* bei BALACHEFF (↑ Abs. 1.1.1).

Beweistypen abhängig von Beweisfunktionen

- Eine Schwierigkeit in der Verwendung eines *generic examples* liegt nach BALACHEFF (1988, 224) darin, dass die Erläuterungen des jeweiligen Sprechers zum generischen Charakter des verwendeten Beispiels von den Zuhörern akzeptiert werden müssten, damit sie dieses nicht nur als *crucial experiment* ansähen. Dies verweist auf die kommunikative Funktion des Beweisens als sozial geteilten Interaktionsprozess (siehe ↑ Abs. 1.1.1) und auf die vom Betrachter abhängige Perspektive auf das *generic example.*

Perspektivenabhängigkeit des generic example

- Der potentiell beobachtbare Übergang vom *generic example* zum *thought experiment* erfordert nach BALACHEFF eine kognitive Konstruktion:

Übergang vom generic example zum thought experiment

> "A generic example constitutes a transitional stage in moving from pragmatic to conceptual proofs, in that it always requires a negotiation of the generic character of the example employed. This fragility encourages an evolution towards the thought experiment, which detaches itself from the particular." (BALACHEFF, 1988, 229)

  Hier erscheint das *generic example* als eine Leiter, Stütze oder Krücke, die nach Erreichen eines höheren Niveaus an Allgemeinheit und Allgemeingültigkeit nicht mehr benötigt wird. Als generisch wird hier – anders als noch bei MASON & PIMM (1984) – also auch der Prozess des Beweisens angesehen.

- Die Entäußerung eines *thought experiment* schließt nach BALACHEFF (1988, 226) komplexe kognitive und linguistische Konstruktionen mit ein: Eine Schwierigkeit bestehe darin, Operationen an einem abstrakten Objekt unter Verlust ihrer formell-algebraischen Darstellung umgangssprachlich hinreichend gut auszudrücken, um einen Beweis zu führen. Eine Möglichkeit für eine solche Dekontextualisierung sei die Ersetzung der besonderen durch eine allgemeine(re) Formulierung. Die von BALACHEFF angeführten Schülerlösungen zeigen jedoch, dass dabei auch strukturelle Aspekte verloren gehen können und die Schüler zu sehr oder zu wenig weitgehend generalisieren.

sprachliche Aspekte des Beweisens

Resümé der Forschungen von Balacheff [1988]

Die empirischen Untersuchungen von Balacheff (1988) geben insgesamt einen Überblick darüber, wie Schüler (beispielgebunden) beweisen und welchen Beweiskonzeptionen sie dabei folgen. Die von ihm vorgenommene, auch selbst kritisierte Kategorisierung nach Beweistypen erleichtert Balacheff zwar die Beschreibung seiner reich dokumentierten Schülerlösungen. Zudem liefern sie wichtige Beobachtungen und Erkenntnisse zum Beweisen als sozial geteilte und sprachlich vermittelte Tätigkeit, was auch in der vorliegenden Arbeit seine Berücksichtigung findet. Dass das (beispielgebundene) Beweisen aber als Prozess verstanden werden kann, der sich nicht nur einseitig dem *conceptual proof* oder *formal proof* nähert, sondern zwischen Beweiskonzepten und -typen oszillieren kann, klingt bei Balacheff allenfalls an. Wie beim beispielgebundenen Beweisen nämlich der von Balacheff (1988, 229) angesprochener Übergang von einem generischen Beispiel (*generic example*) zu einem Gedankenexperiment (*thought experiment*) ablaufen kann, bleibt offen und bedarf einer genaueren empirischen Untersuchung.

Generic-example assisted proof nach Movshovitz-Hadar

structured proof und generic-example assisted proof nach Movshovitz-Hadar [1988]

Movshovitz-Hadar (1988, 17) spricht in Anlehnung an die Vorarbeiten von Mason & Pimm (1984) von einem *generic-example assisted proof.* Dies versteht sie als eine unterrichtspraktische Alternative, und zwar einerseits zu einem *formal deductive proof* als formellem Beweis, und andererseits zu einem *structured proof* als mehr die innere Beweisstruktur betonenden formalen Beweis. In welchem Verhältnis diese beiden Präsentationsformen von Beweisen zum *generic-example assisted proof* stehen, beschreibt Movshovitz-Hadar wie folgt:

> "(...) a structured proof reduced the pedagogical problem of the meaningful exposition inherent in a formal deductive proof to the inner parts of the proof. When the inner parts are not trivial, structured proofs and fully deductive proof show similar pedagogical problems. A generic-example assisted proof (...) has the potential to respond to this difficulty.
> The proof of a generic example should not be confused with a fully general proof. It only *suggests* the full proof through a generalizable concrete example. From the purely logical point of view there is no replacement for the formal proof. From the pedagogical point of view, a proof of the generic example can sometimes replace the general proof." (Movshovitz-Hadar, 1988, 18, H.i.O.)

Somit ist ein *general proof* nach Movshovitz-Hadar nur bedingt durch ein *generic-example assisted proof* ersetzbar, auch wenn dies in der Schulmathematik durchaus pädagogische Vorteile habe.

stimulating responsive (S-R) method nach Movshovitz-Hadar [1988]

Movshovitz-Hadar bettet den als Kategorie verstandenen *generic-example assisted proof* in eine Übersicht über weitere Präsentationsformen von Sätzen und Beweisen für den Mathematikunterricht ein. Unter anderem hält die Autorin eine Entdeckung (*surprising exposition*) gefolgt von einem *generic-example assisted proof* für eine geeignete Methode, um die Schüler zum Beweisen im Mathematikunterricht zu motivieren (*stimulating responsive (S-R) method*). Entdecken die Schüler die Behauptung nämlich selbst oder bekommen sie eine überraschende Behauptung präsentiert, wecke dies auch eher ihr Beweisbedürfnis. Dieses können sie etwa an einem *generic example* oder freilich auch an den übrigen Beweistypen von BALACHEFF (1988) befriedigen. MOVSHOVITZ-HADAR (1988, 19) nennt das Entdecken der Behauptung an dieser Stelle bloß "the 'aha!' effect". Auf die genauen Zusammenhänge zwischen den Schlussformen Abduktion, Induktion und Deduktion, die jeweils eine Entdeckung, eine Prüfung und eine Begründung charakterisieren, deren mögliches Zusammenspiel bei der Präsentation eines Satzes und eines nachfolgenden beispielgebundenen Beweises wird in ↑ Kap. 1.3 ausführlicher eingegangen.

transparent (pseudo-)proof nach MOVSHOVITZ-HADAR [2002]

Der Terminus *generic-example assisted proof* erscheint in späteren Arbeiten wie MOVSHOVITZ-HADAR ET AL. (2002) als *transparent (pseudo-)proof*, zu dem es wie folgt heißt:

> "A *transparent proof*, is a proof of a particular case which is 'small enough to serve as a concrete example, yet large enough to be considered a non-specific representative of the general case. One can see the general proof through it because nothing specific to the case entered the proof.' Because a transparent proof is not a completely polished proof, this kind of 'proof' was later re-named *Transparent Pseudo-Proof* or as abbreviated: *Transparent P-Proof.* (M-H, 1988, 1998)" (MOVSHOVITZ-HADAR ET AL., 2002, 915, H.i.O.)

Lernumgebung zur Befähigung im beispielgebundenen Beweisen

Dem *transparent pseudo-proof* wird der Beweischarakter hier als *pseudo-proof* abgesprochen, dessen Transparenz jedoch prinzipiell dazu verhelfe, die Allgemeingültigkeit des formalen Beweises zu erkennen. Von der Prozesshaftigkeit eines *generic proving* wird bei MOVSHOVITZ-HADAR nicht gesprochen. Der *transparent pseudo-proof* wird vielmehr als pädagogische Methode oder Mittel beschrieben. Diese Methode hat in eine Lernumgebung zur Entwicklung der Beweisfähigkeiten von Schülern und Studierenden Eingang gefunden. Die bei deren praktischem Einsatz auftretenden Schwierigkeiten sollen vom Grundgedanken her durch eine umsichtige Vorbereitung des Lehrenden gemildert werden:

> "Consequently, we now strongly advocate, wherever it is appropriate, the use of transparent p-proofs as a pedagogical tool, as it was shown to support both the development of one's belief in the truth of mathematical statements and of one's ability in justify this belief. However, it can not be overemphasized that extreme care must be taken by the instructor in constructing this tool, be it in verbal-symbolic presentation or in visual-pictoral representation, so that the presentation is indeed of a transparent proof, namely, it does not hang in any way to the specifics of the particular case and hence is readily generalizable. The success of the resulting learning environment in yielding the development of the ability to prove, depends heavily on elaborate and careful preparation of the tools by the instructor." (MOVSHOVITZ-HADAR ET AL., 2002, 916)

Damit gerinnt der *transparent (pseudo-)proof* zu einer im Mathematikunterricht einsatzfähigen Methode beispielgebundenen Beweisens, durch deren didaktische

Perfektionierung der Lernende zum gewünschten Erfolg, nämlich der Befähigung zum Beweisen am Beispiel, gelangen soll. Im Vordergrund steht dabei weniger die tatsächlichen Deutungen der Lernenden als vielmehr die ausgefeilte Präsentation der *transparent (pseudo-)proof* als "paedagogical tool" durch die Lehrenden. Diese Lernumgebung orientiert sich also eher an praktischen Erfordernissen in der Vermittlung beispielgebundenen Beweisens. Dem gegenüber weist die vorliegende Arbeit auf den zwischen induktivem Prüfen und formalem Beweisen changierenden Charakter des beispielgebundenen Beweisens als Erkenntnisprozess hin, welcher – wie die Einzelfallstudien in ↑ Teil 3 zeigen – bei jedem Schüler anders verlaufen kann. Auf dieser Grundlage können allenfalls Empfehlungen zur Thematisierung beispielgebundenen Beweisens im Mathematikunterricht ausgesprochen werden.

Generic proofs nach Bills, Rowland u.a.

empiricial und structural generalisations nach Bills [1996] und Rowland [1998]

Einige Darstellungen neueren Datums setzen sich mit der Frage auseinander, wie *generic proving* Schülern und Studierenden vermittelt werden kann, machen aber auch teilweise theoretische Aussagen. Rowland (1998, 4-67f.) und Bills & Rowland (1999, 111) knüpfen zunächst an die Definitionen für *generic proof* und *generic example* bei Mason & Pimm (1984, 284ff.) und Balacheff (1988, 219) an. Dabei treffen sie eine Unterscheidung zwischen empirischen und strukturellen Verallgemeinerungen (*empirical* und *structural generalisations*):

> "The former [empirical generalisations, J.K.] derive only from the form of 'results' (usually numerical) and observed relationships. (...) empirical generalisations may possess predictive potential but lack explanatory power. (...) Structural generalisations, on the other hand, are based on underlying meanings, structures or procedures. They go beneath the form of results to achieve explanatory insight." (Rowland, 1998, 4-69)

Die Rede vom explanativen Charakter des *structural generalisation* erinnert an die erklärenden Beweisfunktion aus ↑ Abs. 1.1.1. Die von Bills (1996) zuvor gegebene Definition des *structural generalisation* ist an ein Beispiel gekoppelt:

> "A 'structural' generalisation' generalises a result from a single or several examples based on the generalisability of the process by which that result was obtained." (Bills, 1996, 95)

Strukturelle Verallgemeinerungen tragen im Gegensatz zu bloß empirischen Verallgemeinerungen also ein erklärendes Potential in sich, welches durch ein *generic example* repräsentiert werden kann. Dieses grenzt Rowland (2000) weiter von einer die Richtigkeit einer Behauptung bloß bestätigenden Beispielinstanz ab:

> "The confirming instance has only to be demonstrated to be true, by any means whatever; the subtlety or lack of it in the demonstration is of no consequence. But in the generic example the demonstration must be more

> than a demonstration of truth; it must in some way explain, account for the property, in one instance, in the process of confirming it, so that that one instance is seen to more than a case of serendipity." (Rowland, 2000, 40)

Die vorstehende, von Bills (1996, 95) und Rowland (1998, 4-69) getroffene Unterscheidung zwischen *empirical generalisations* und *structural generalisations* kommt der Differenzierung zwischen *result pattern generalisation* und *process pattern generalisation* nahe, wie sie später von Harel (2002, 191) und Pedemonte (2007, 29) im engeren Rahmen der Diskussion um die sogenannte *cognitive unity* vorgenommen wird. Dieser in ↑ Abs. 1.4.3, 1.5.2 kritisch gewürdigte Ansatz verweist wie die obige Unterscheidung auf jenes damit verwandte didaktische Dilemma beispielgebundenen Beweisens, das schon Semadeni (1984, 34) bei der Untersuchung seiner *action proofs* beklagt hat:

> "One may criticize that the concept of an action proof by arguing that it involves a psychological question: how can one know whether the child is convinced of the valildity of the proof by inner understanding and not just by being prompted by the authority of the teacher?" (Semadeni, 1984, 34)

In ↑ Abs. 1.5.1 der vorliegenden Arbeit wird versucht, das beispielgebundene Beweisen als ein allmähliches subjektives Realisieren und Manifestieren eines Beweises aufzufassen, der eine latente Sinnstruktur darstellt. Ein solches Verständnis schließt *empirical generalisations* und *structural generalisations* ein.

generic proving und formal proving nach Biehler & Kempen [2013]

Biehler & Kempen (2013) resp. Kempen (2013) forschen darüber, wie Studierende des ersten Studienjahres generische Beweise entwickeln und in formale Beweise münden lassen. Sie stellen einleitend fest, dass das Potential, welches das (generische) Beweisen in Schule und Hochschule spielen könnte, noch nicht ausgeschöpft sei, und pflichten damit Rowland (2002) bei, welcher bemerkt:

> "I am saying that the potential of the generic example as a didactical tool is virtually unrecognized and unexploited in the teaching of number theory, and I am urging a change in this state of affairs." (Rowland, 2002, 157)

Ein Ziel ihrer eigenen Studie ist es, Schwierigkeiten von Studierenden mit generischen Beweisen und Beispielen festzustellen. Eine weitere Fragestellung ist, wie die Studierenden bei der Statuierung einer Behauptung und bei deren formalem Beweisen mit Variablen umgehen. Zudem interessiert die Autoren, ob sich die Argumente der generischen Beweise der Studierenden auch in deren formalen Beweisen wiederfinden. Dazu klassifizieren Biehler & Kempen (2013, 91) (vgl. Kempen (2013, 530)) einerseits Typen von Beweisen, die die Studierenden als generische Beweise einreichen:

1. "The 'generic proof' contains examples, which do not fit to the statement."
2. "The 'generic proof' is just a verification by several examples without presenting the examples as generic. (...)"
3. "The examples are presented as generic, but no further explanation is given."
4. "The generic proof contains operations and ideas, which are named and generalized. (...)"

Zum anderen kategorisieren Biehler & Kempen (2013, 92) (vgl. Kempen (2013, 530)) die abgegebenen formalen Beweise:

1. "The reasoning in the formal proof is logical and correct."
2. "The reasoning process contains gaps and/ or statements are used that are not true in general."
3. "The reasoning does not contain any argumentation."
4. "Miscellaneous"

Die Auswertung der nicht repräsentativen Studie bestätigt das Bild einschlägiger Studien aus ↑ Abs. 1.1.2:

> "In our study, only a few students understood the idea of a generic example. This finding corresponds with the literature. It is well-known that preservice elementary teachers have difficulties in distinguishing proof and verification by examples (e.g. Martin & Harel, 1989; Recio & Godino, 2001). (...) Yet, those students that recognized a common ground in the concrete examples were able to transfer it to the formal proof. In this transition to formal proof the students struggled with the formal language of mathematics, the use of the symbols and the meaning and definition of the variables." (Biehler & Kempen, 2013, 93f.)

generic examples und generic proving nach Leron & Zaslavsky [2009]

Leron & Zaslavsky (2009, 2-53) gehen auf die Bedeutung und Rolle von *generic proofs* im Mathematikunterricht ein. Angelehnt an Mason & Pimm (1984) definieren die Autoren: "A generic proof is, roughly, a proof carried out on a generic example". Dabei verstehen sie unter generischem Beweisen ähnlich tautologisch alle Lehrer- und Schüleraktivitäten im Rahmen eines generischen Beweises. Zur Illustration wird der Satz, dass die Teileranzahl von Quadratzahlen (*perfect squares*) stets ungerade ist, generisch bewiesen und der Beweis als *generic proof* bezeichnet. Die Autoren möchten gerne die Frage beantworten, was ein geeignetes generisches Beispiel im Kontext eines generischen Beweises ausmache. Für sie ist dies eine Frage der Komplexität des Beispiels:

> "An example simple enough to be easy and familiar for the students, but complex enough to be free of distracting special features, thus having the potential of representing the 'general case' for the students." (Leron & Zaslavsky, 2009, 2-56)

statische Betrachtung von generic examples

Auch wenn die Autoren eingangs das generische Beweisen (*generic proving*) in der Betrachtung aller Lehrer- und Schüleraktivitäten sehen, leiten sie die

Generizität des Beweises doch stets aus seiner als Endprodukt vorliegenden Darstellung selbst ab, und somit anders als schon MASON & PIMM (1984) nicht daraus, wie der Lernende damit umgehen kann.

Die Hauptschwierigkeit generischer Beweise besteht nach LERON & ZASLAVSKY (2009, 2-56) darin, dass sie nicht wirklich den betreffenden Satz beweisen. Hierin zeigt sich wiederum, dass die Autoren das generische Beweisen weniger als Erkenntnisprozess, sondern produktorientiert betrachten. In einer Metadiskussion werden schließlich verschiedene Dimensionen generischen Beweisens dargestellt (siehe hierzu auch ↑ Kap. 1.4). Die Autoren beschreiben diesen Aspektreichtum generischen Beweisens wie folgt:

> "In the case of generic proving, the chain of successive refinements moves from the specific (an example) to the general, but it is also possible to move along other dimensions, such as from the intuitive to the formal (by gradually formalizing an argument), or from the global to the local (by gradually adding technical details). This method can be very effective in helping teachers and students bridge the difficult gap from common sense to formal mathematics." (LERON & ZASLAVSKY, 2009, 2-58)

Bezieht man die letzte Aussage eher auf die Interaktion zwischen Lehrer als Experten und Schülern als Lernende, so lässt sich – zurückgehend auf MASON & PIMM (1984) – die Überwindung von Rahmungsdifferenzen der Gesprächspartner auch als beiderseits sprachliche Herausforderung betrachten, welche LERON & ZASLAVSKY (2009) unberücksichtigt lassen. Beim beispielgebundenen Beweisen spielt jedoch nicht nur die subjektive, sondern auch die sozial geteilte Realisierung des Allgemeingültigen in seiner Versprachlichung am Besonderen des Beispiels eine wichtige Rolle.

Im Rückblick auf die von MASON & PIMM (1984) und BALACHEFF (1988) durchgeführten Untersuchungen des *generic example* und *generic proving* lassen sich die Betrachterabhängigkeit des *generic example* und ein prozessuales Verständnis des *generic proving* als neuartige Aspekte beispielgebundenen Beweisens herausstreichen. Das als Träger des Allgemeingültigen fungierende *generic example* kann weder durch ikonische Darstellungen charakterisiert noch vermöge isolierter mathematischer Sprechweisen identifiziert werden. Vielmehr bedarf es einer kontextualisierten Versprachlichung, um das am *generic example* je allgemeingültig Erkannte vermitteln zu können. Das Moment der Versprachlichung betonen in der Folge auch die deutschsprachigen Mathematikdidaktiker.

1.2.3 Inhaltlich-anschauliches und operatives Beweisen

Einführung

Beim anschaulichen Beweisen geht man von einem konkreten, visuell wahrnehmbaren Gegenstand aus, an dem etwas Allgemeines bewiesen wird. In der Regel wird dieser Gegenstand ikonisch dargestellt (etwa als Dreieck oder als Plättchenmuster), welcher vordergründig betrachtet nur das Besondere sehen lässt, aber durch geschulte Betrachtung als Gegenstand allgemeinerer Art aufgefasst werden kann. Um einen anschaulichen Beweis zu führen, muss das Allgemeinere am Besonderen dieses Beispiels gedanklich eingesehen werden. Beim operativen Beweisen wird der Fokus mehr auf einfache Operationen gelegt, etwa das Verschieben von Plättchen, das Verbinden zweier Punkte oder das Vertauschen von Summanden. Diese Operationen müssen selbst bereits als allgemeiner ausführbar erkannt werden, bevor sie ihre Verwendung und Wirkung beim Beweisen finden können. Da das Erkennen des Allgemein(er)en (resp. allgemein(er) Gültigen) am Besonderen jeweils kognitiv geschieht, bedarf das anschauliche wie das operative Beweisen der Versprachlichung. Dadurch kann das zunächst subjektiv für allgemeingültig Befundene sozial geteilt und von Anderen ggf. auch anerkannt werden.

Quellen inhaltlich-anschaulichen und operativen Beweisens

In der mathematikdidaktischen Fachliteratur ist das von Branford (1913) eingeführte und von Wittmann & Müller (1988) wieder aufgegriffene *inhaltlich-anschauliche Beweisen* in Abgrenzung zu sogenannten *experimentellen 'Beweisen'* und *formalen Beweisen* rege diskutiert worden. Dabei beziehen sich verschiedene Autoren wie Blum, Kirsch, Krauthausen, Müller, Wittmann und Ziegenbalg häufig auf das Konzept der *action proofs* von Semadeni (1981b) (↑ Abs. 1.2.1) und tragen die noch frühere Diskussion um *preformal proofs* weiter aus. Krauthausen (2001) bespricht das inhaltlich-anschauliche Beweisen insbesondere an Aufgabenbeispielen in der Grundschule. Blum (2003) führt sogenannte *reality-related proofs* resp. *contextual proofs* ein, bei denen einzelne Schlüsse in den Kontext von Handlungen eingebunden werden, die verallgemeinerbar und in diesem Sinne *generisch* sind. Auf Wittmann (1985) geht hingegen die Bezeichnung *operative Beweise* zurück; dabei wird der Fokus eher auf *allgemein ausführbare Operationen* gelegt, die auf eine ganze Klasse anwendbar sind. Als Darstellungsmittel dienen in solchen *operativen Beweisen* häufig Punktmuster oder Legeplättchen, so dass die Aufgabenbeispiele hauptsächlich der figuralen Arithmetik entstammen. In Wittmann & Ziegenbalg (2004) wird schließlich der Aspekt der Versprachlichung beim *operativen Beweisen* betont, ohne die sich der Beweis nur in Handlungen erschöpfen und damit nicht zu einer sozial geteilten Sinnstruktur werden würde.

Inhaltlich-anschauliches Beweisen, *reality-related proving* und *operatives Beweisen* können als spezielle Formen beispielgebundenen Beweisens aufgefasst werden, da es sich jeweils um ein Erkennen und Entäußern des Allgemeingültigen anhand von im Besonderen gehaltenen Beispielen handelt, jedoch bestimmte Besonderheiten hinzutreten. Etwa setzen die verschiedenen Autoren den Kontext des Beweisens fest, thematisieren die Darstellung der Beispiele, fassen das Erkennen des Allgemeinen am Besondern als ausführbare Operation auf oder betonen zum Teil die Bedeutung der Versprachlichung des für allgemeingültig Befundenen.

Inhaltlich-anschauliches Beweisen nach Wittmann & Müller

inhaltlich-intuitives Beweisen nach Branford [1913]

Wittmann & Müller (1988, 248) zitieren in ihrem Aufsatz "Wann ist ein Beweis ein Beweis?" eine Unterscheidung von Branford (1913) zwischen sogenannten *experimentellen 'Beweisen'*, *wissenschaftlichen Beweisen* und *intuitiv-anschaulichen Beweisen.* Dem *experimentellen 'Beweis'*

> "stehen nun die anderen Beweisarten gegenüber, die wissenschaftliche und die durch Intuition, wobei letztere eine mehr vorläufige und weniger strenge Art des idealen wissenschaftlichen Beweises ist; in Wirklichkeit gibt es keine scharfe Grenzlinie zwischen diesen beiden Beweisarten, sie zeigen nur einen Unterschied in dem Grade logischer Strenge. Die durch diese Beweisarten gewonnenen Wahrheiten sind allgemeingültig, soweit wir urteilen können (die sinnliche Erfahrung müsste uns ja sonst die Ausnahmen zeigen)." (Branford, 1913, 108f.)

Formelle Strenge wird also schon von Branford (1913) nicht als notwendiges Kriterium dafür angeführt, um von einem Beweis zu sprechen. Andererseits werden die sogenannten *experimentellen 'Beweise'* als induktive Prüfungen betrachtet, weil sie im Unterschied zu den beiden anderen Beweisarten nicht die Allgemeingültigkeit eines behaupteten Satzes gewährleisten. Wittmann & Müller (1988) entwickeln aus den Vorarbeiten von Branford (1913) nun ihr Konzept von *inhaltlich-anschaulichen Beweisen*:

inhaltlich-anschauliches Beweisen nach Wittmann & Müller [1988]

> "Die experimentellen 'Beweise' bestehen in der Verifikation einer endlichen Zahl von Beispielen, was natürlich keine Allgemeingültigkeit sichert. Inhaltlich-anschauliche, operative Beweise stützen sich dagegen auf Konstruktionen und Operationen, von denen intuitiv erkennbar ist, daß sie sich auf eine ganze Klasse von Beispielen anwenden lassen und bestimmte Folgerungen nach sich ziehen." (Wittmann & Müller, 1988, 249)

Auch wenn die Autoren die alte Bezeichnung *intuitiv-anschauliche Beweise* von Branford (1913) durch ihre neue Bezeichnung *inhaltlich-anschauliche Beweise* ersetzt haben, definieren sie diese doch darüber, dass bei diesen die allgemeine Verwendbarkeit gewisser Konstruktionen "intuitiv erkennbar" sei. Was Intuition jedoch konkret bedeuten soll, d.h. wie die geistige Aktivität des Lernenden abläuft und psychologisch zu verstehen ist, führen sie nicht aus. Die Verwendung des Terminus' der Intuition birgt damit die Gefahr, ein empirisch nicht sicher feststellbares Konstrukt als real zu postulieren. Die Autoren statuieren also lediglich, dass dem Lernenden das Erkennen des Allgemeinen resp. Allgemeingültigen durch die inhaltlich-anschauliche Darstellung eines Beweises möglich werden kann.

Beispiele inhaltlich-anschaulicher Beweise nach Wittmann & Müller [1988]

Wie ein *inhaltlich-anschaulicher Beweis* aussehen kann, zeigen Wittmann & Müller (1988) in ihren Beweisbeispielen des chinesischen Restsatzes, des Satzes von der Irrationalität der Zahl $\sqrt{2}$, des schon in ↑ Abs. 1.2.1 bei Lakatos (1982) diskutierten Eulerschen Polyedersatzes und eines mit Punktmustern geführten Beweises über Trapezzahlen. Konkret bedeutet der *inhaltlich-anschauliche Beweis* bei Letzteren:

> "Zum Beispiel ist die Zerlegung einer im Punktmuster dargestellten Trapezzahl in Dreiersäulen eine für Trapezzahlen universell anwendbare Operation, die genau überblickbare Konsequenzen für das Dreierrestverhalten der Trapezzahl hat. Das Punktmuster fungiert hier gar nicht als Bild, sondern als Symbol (vgl. *Jahnke* 1984)." (Wittmann & Müller, 1988, 249, H.i.O.)

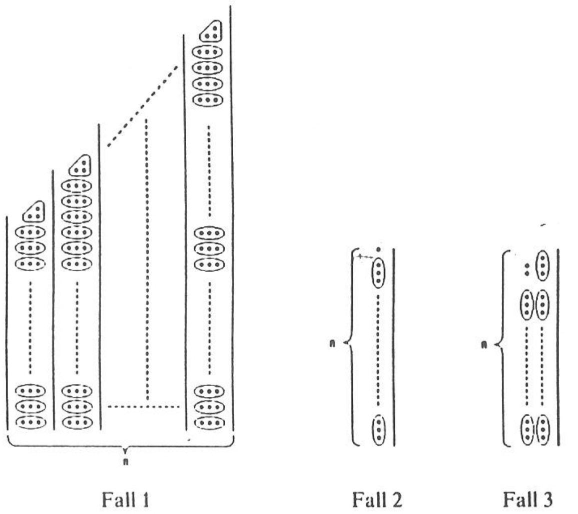


Abb. 1.4: Fallunterscheidung zur Zerlegung von Trapezzahlen in Dreiersäulen aus Wittmann & Müller (1988, 244)

Überzeugungskraft inhaltlich-anschaulicher Beweise nach Wittmann & Müller [1988]

Insofern handelt es sich beim *inhaltlich-anschaulichen Beweisen* nicht um ein bloßes *Beweisen durch Hinschauen* nach Neubrand & Möller (1990) (↑ Abs. 1.2.4). Gleichwohl ist – wie in dem genannten Aufgabenbeispiel mit den Trapezzahlen – das sogenannte intuitive Erkennen oder vielmehr das Erkennen des Allgemeingültigen im Besonderen der Beispiele davon abhängig, inwieweit der einzelne Lernende subjektiv realisiert hat, dass die weiter oben genannten "Konstruktionen und Operationen" in einem weiteren, allgemeineren Rahmen geführt werden können als nur in einem oder mehreren vorliegenden Beispielen. Mit Blick auf die Forschungsfragen zum beispielgebundenen Beweisen in ↑ Kap. 2.1 kann also gefragt werden: Wie soll festgestellt werden, ob der Lernende das Punktmuster nicht nur als Darstellung eines bestimmten Beispiels, sondern auch als Darstellung für etwas Allgemeineres auffasst? Der *intuitiv-anschauliche* resp. *inhaltlich-anschauliche Beweis* ist insofern nicht *per se* ein Beweis, da das Erkennen des Allgemeingültigen im besonders Gehaltenen ein zunächst subjektiver Denkprozess ist. Erst dessen Entäußerung kann zu einem sozial geteilten und anerkannten Wissen führen. Hierin zeigt sich nach ↑ Abs. 1.1.1 die kommunikative Funktion des Beweisens. Wittmann & Müller (1988, 253) sprechen in diesem Zusammenhang selbst von einem Anerkennungsprozess dessen, was den Status als Beweis erst erhält, und zitieren in diesem Zusammenhang auch das Diktum Fermats, nachdem es das Wesen des Beweisens sei, Überzeugung zu erzwingen – frz. "la qualité essentielle d'une démonstration est de forcer à croire" (vgl. Descartes (1667, 296) und ↑ Abs. 1.1.3). Das Ziel eines solchen auf Überzeugung beruhenden Anerkennungsprozesses ist bei *inhaltlich-anschaulichen Beweisen* aber gerade davon abhängig, ob wirklich alle Lernenden am Besonderen des Beispiels das Allgemeingültige realisieren; anderenfalls wäre eher von einem *experimentellen 'Beweis'* zu sprechen. Da es den Autoren zufolge bei *inhaltlich-anschaulichen Beweisen* hauptsächlich darum geht, Überzeugung zu gewinnen, betonen WITTMANN & MÜLLER (1988) neben dem *proving that* vor allem das Einsicht schaffende *proving why* im Sinne von HANNA (1990) (↑ Abs. 1.1.1):

> "In dem Maße, in der die Überzeugungskraft auf Einsicht beruht, werden (relativ) inhaltlich-anschauliche Beweise weiterhin eine wichtige Rolle in der Mathematik spielen. Beweise, die Einsicht in die relevanten Begriffe vermitteln, sind für uns als Forscher und Lehrer interessanter und wertvoller als Beweise, die nur die Gültigkeit der Behauptung belegen." (WITTMANN & MÜLLER, 1988, 253)

elementarmathematisches Forschungsprogramm nach WITTMANN & MÜLLER [1988]

Die Autoren enden mit einem Plädoyer für ein "elementarmathematisches Forschungsprogramm" für den Mathematikunterricht, in dem *inhaltlich-anschauliche Beweise* eine wichtige Rolle spielen sollen:

> "Eine sinngemäße Übertragung von Beweisaktivitäten in die schulischen Rahmenbedingungen erfordert daher eine Loslösung von formalen, deduktiv durchorganisierten Darstellungen der für die Schule relevanten elementarmathematischen Gebiete zugunsten inhaltlich-anschaulicher Darstellungen. Diese sind gekennzeichnet durch Einbettung in sinnvolle Kontexte, durch Entwicklung von Motivationen, durch ein Vorgehen gemäß heuristischer Strategien, durch die Verwendung bedeutungshaltiger präformaler Darstellungen und durch entsprechende inhaltlich-anschauliche Beweise. (...)
> Inhaltlich-anschauliche Beweise sollen in erster Linie dem Verstehen von Gesetzmäßigkeiten dienen und müssen in den Lernprozeß der Schüler und ihre Verständigung untereinander eingebettet werden." (WITTMANN & MÜLLER, 1988, 254)

Bezug zum beispielgebundenen Beweisen

Es kann festgehalten werden, dass sich das inhaltlich-anschauliche Beweisen nach WITTMANN & MÜLLER (1988) auf die allgemeine Verwendbarkeit gedanklicher Konstruktionen zum Erkennen des Allgemeingültigen am Besonderen stützt. Beim beispielgebundenen Beweisen geht es der vorliegenden Arbeit nach nun darum, wie dieser Erkenntnisprozess theoretisch gefasst und empirisch untersucht werden kann.

Differenzierung des inhaltlich-anschaulichen Beweisens bei BRUNNER [2013]

BRUNNER (2013, 56ff.) differenziert das inhaltlich-anschauliche Beweisen nach WITTMANN & MÜLLER (1988) durch Verknüpfung mit Beweisansätzen nach LEISS & BLUM (2006) aus. Diese Synthese aus formal-deduktivem, experimentellem und inhaltlich-anschaulichem Beweis und den algebraischen, paradigmatischen, zeichnerischen, inhaltlichen und iterativen Beweisansätzen führt zur Klassifikation *Formal-deduktiver Beweis mit algebraischen Mitteln*, *Experimenteller*

Beweis, *Inhaltlich-anschaulicher Beweis nach dem paradigmatischen / zeichnerischen / inhaltlichen / iterativen Ansatz*. Die Autorin kommentiert:

> "So beschreiben der inhaltlich-anschauliche Beweis nach dem paradigmatischen Ansatz sowie der inhaltlich-anschauliche Beweis nach dem iterativen Ansatz ein bestimmtes inhaltliches Vorgehen, nämlich das Generieren eines Paradigmas bzw. das iterative Verfahren. Der inhaltlich-anschauliche Beweis nach dem zeichnerischen Ansatz und nach dem inhaltlichen Ansatz hingegen bezieht sich auf Repräsentationsmedien, nicht auf Vorgehensweisen." (Brunner, 2013, 57)

Inhaltlich-anschauliches Beweisen nach Blum & Kirsch

inhaltlich-anschauliches Beweisen nach Blum & Kirsch [1991]

Bei Wittmann & Müller (1988, 249) enthielt die Definition des *inhaltlich-anschaulichen Beweisens* noch ein intuitives Moment. Eine Arbeitsdefinition dessen, was ein *inhaltlich-anschaulicher Beweis* konkret ist, versuchen auch Blum & Kirsch (1991) resp. Blum & Kirsch (1989) unter Rückbezug auf Semadeni (1976) (↑ Abs. 1.2.1):

> "In Anlehnung an Semadenis Konzept 'prämathematischer Beweise' (...) wollen wir hier unter einem <u>inhaltlich-anschaulichen Beweis</u> eine Kette von korrekten Schlüssen verstehen, die auf nicht-formale Prämissen zurückgreifen, d.h. insbesondere auf inhaltlich-anwendungsbezogene Grundideen (wie z.B. Ableitung als lokale Änderungsrate) oder auf intuitiv evidente, 'allgemein geteilte', 'psychologisch offenkundige' Aussagen (letzteres nach Thom 1973). Die Schlüsse sollen in ihrer 'psychologisch natürlichen' Ordnung aufeinanderfolgen. Sie müssen vom konkreten, inhaltlich-anschaulich gegebenen Fall direkt verallgemeinerbar sein, wobei diese Übertragbarkeit auf den allgemeinen Fall intuitiv erkennbar sein soll, und sie müssen bei Formalisierung der jeweiligen Prämissen korrekten formal-mathematischen Argumenten entsprechen." (Blum & Kirsch, 1989, 202, H.i.O.)

Kritik an der intuitiven Charakterisierung inhaltlich-anschaulicher Beweise

An dieser Stelle bleibt jedoch wiederum im Unklaren, was unter *intuitiv evidenten*, *allgemein geteilten*, *psychologisch offenkundigen* Aussagen zu verstehen ist. Die Verwendung der Intuition lässt sich wissenschaftlich schwer fassen, so dass man es vielleicht eher so formulieren könnte: Der *inhaltlich-anschauliche Beweis* wird nicht *per se* durch seine Darstellung zu einem Beweis, sondern durch die je individuell verschiedene, subjektiv zu erbringende Erkenntnisleistung des Allgemeingültigen, die dem Anschein nach in der Darstellung des "konkreten, inhaltlich-anschaulich gegebenen Falls" (s.o.) angelegt sein kann. Auf dieser Lesart beruht etwa die Definition des beispielgebundenen Beweisens in der vorliegenden Arbeit, wie sie in ↑ Kap. 1.5 gegeben wird.

Bezug zum beispielgebundenen Beweisen

Dem obigen Zitat nach müsse die Formalisierung der jeweiligen Prämissen korrekten formal-mathematischen Argumenten entsprechen. Dies ist eine Einschränkung, die für das beispielgebundene Beweisen jedoch nicht zu gelten braucht. Die mathematische Analyse zum gegensinnigen Verändern in ↑ Kap. 3.1 zeigt etwa, dass ein solcher Parallelismus zwischen inhaltlich-anschaulichem und formellem Beweis nicht immer gegeben sein muss. Auch zeigen etwa die unzähligen Beweisvariationen des Satzes von PYTHAGORAS, dass ihr Mehrwert gerade in ihrer anschaulichen Vielfalt liegt. Am Beispiel der an der Stellenwerttafel ikonisch nachvollziehbaren Quersummenregeln (↑ Abs. 1.4.1) dürfte überdies deutlich werden, dass die schematische, zum Teil sehr komplizierte Formalisierung inhaltlich-anschaulicher Beweise auch nicht immer wünschenswert ist.

Unterschiede inhaltlich-anschaulicher Beweise zu prämathematischen Beweisen

Auch wenn die Autoren BLUM & KIRSCH ihre Arbeitsdefinition *inhaltlich-anschaulicher Beweise* an die Definition *prämathematischer* resp. *handlungsbezogener Beweise* (*action proofs*) von SEMADENI anlehnen, lassen die Autoren im Unterschied zu diesen auch induktive Prüfungen zu:

> "Solche inhaltlich-anschaulichen Beweise dürfen auch – im Gegensatz zu Semadeni – <u>induktive</u> Argumente ('usw.') oder <u>indirekte</u> Argumente ('Wir stellen uns vor ...' oder 'Was wäre, wenn ...') enthalten, jeweils bezogen auf inhaltlich-anschauliche Gegebenheiten. Was solch 'inhaltlich-anschauliche', 'offenkundige' etc. Argumentations-Grundlagen sind, entscheiden die jeweils betroffenen Individuen (...) auf der Basis ihres Wissens." (BLUM & KIRSCH, 1989, 202, H.i.O.)

Einordnung inhaltlich-anschaulicher Beweise

In einer weiteren Unterscheidung sprechen BLUM & KIRSCH (1989, 203) in Hinblick auf den *handlungsbezogenen Beweis* SEMADENIs eher "von einer enaktiven Repräsentation eines formal-exakten Beweises", weil bei diesem "sowohl die Prämissen als auch die Schlüsse enaktiv dargestellt" sei. Schließlich subsummieren BLUM & KIRSCH die *handlungsbezogenen Beweise* und die *inhaltlich-anschaulichen Beweise* unter den Oberbegriff der *präformalen Beweise* und schlagen vor, vier Stufen – nämlich *experimentelle 'Beweise', handlungsbezogene Beweise, inhaltlich-anschauliche Beweise, formale Beweise* – als Beweisarten zu unterscheiden. Dabei sind sich die Autoren durchaus der Schwierigkeit bewusst, Grenzen zwischen den eingeführten Kategorien zu ziehen, so dass sich die Frage stellt, ob die eingeführten Begriffe ihrem Zweck der Unterscheidung verschiedener Beweisarten wirklich dienen können.

Inhaltlich-anschauliches Beweisen nach Krauthausen

inhaltlich-anschauliches Beweisen nach KRAUTHAUSEN [2001]

KRAUTHAUSEN (2001) bezieht das *inhaltlich-anschauliche Beweisen* in seinem Artikel mit dem von FREUDENTHAL (1979, 187) entlehnten Titel "Wann fängt das Beweisen an? Jedenfalls, ehe es einen Namen hat" mehr auf den Grundschulunterricht. Dabei führt er u.a. den Aspekt der Versprachlichung beim Führen eines elementaren Beweises durch die Grundschüler an:

> "Regelhaftigkeiten bei der Addition zweier Summanden unterschiedlicher oder gleicher Paritäten lassen sich bspw. von Zweitklässlern nicht nur identifizieren, sondern auch beschreiben, darstellen und begründen (Abb. 1). Die Vorläufigkeit des verbalen Ausdrucks sollte hier nicht beunruhigen, denn schon hier finden sich i.d.R. Schlüsselwörter, die Beweis-Relevantes

> in sich tragen; v.a. ist aber bereits ein gutes Stück des Weges zurückgelegt, wenn Kinder (gewohnheitsmäßig und von sich aus) das '*weil* ...' ins Spiel bringen." (Krauthausen, 2001, 100, H.i.O.)

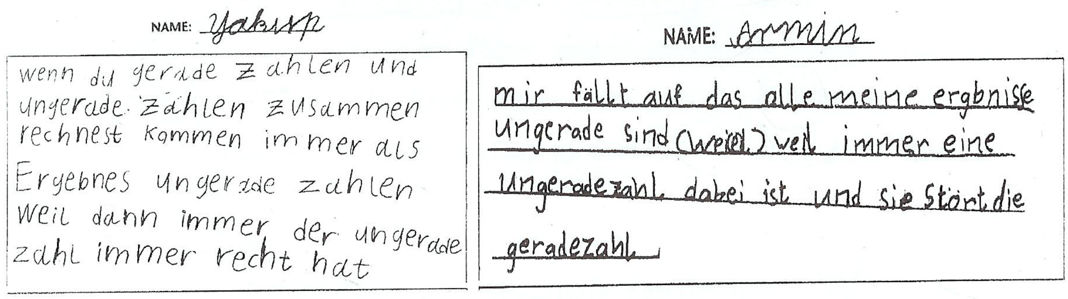
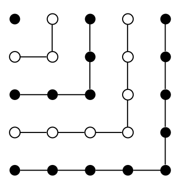


Abb. 1: Yakurp und Armin auf der Suche nach dem »weil ...«

Abb. 1.5: Schülerlösungen aus Krauthausen (2001, 100)

Wie die beiden Schülerlösungen in ↑ Abb. 1.5 zeigen, ist die alltagssprachliche Beschreibung eines Beweises an Beispielen jedoch kein leichtes Unterfangen. Auch wenn es einfacher sein mag, Allgemeingültiges gedanklich am Beispiel zu realisieren, kann die adäquate Verbalisierung einer solchen Erkenntnis nicht nur Kindern einige Schwierigkeiten bereiten. Insofern beobachtet Krauthausen hier ein Phänomen, das sich besonders in die Grundschule zeigt, aber nicht nur dort. Der Autor nennt hinsichtlich *inhaltlich-anschaulicher Beweise* überdies noch einen weiteren Aspekt, der für die Situation in der Grundschule besonders relevant ist:

> "*c) Geläufigkeit adäquater Werkzeuge*: Inhaltlich-anschauliche Beweise greifen auf Handlungserfahrungen mit Darstellungen zurück, die als solche bekannt sein müssen. 'Plättchenbeweise' sind weder Kindern noch Lehramtsstudierenden unmittelbar evident. So müssen Vorerfahrungen bspw. mit Punktmusterdarstellungen bis zu einem Grade *geläufig* sein (dies sollte bereits im 1. Schuljahr angebahnt werden!), damit tatsächlich ihr *Werkzeug*-Charakter zum Tragen kommen kann und die Werkzeuge nicht *als solche* einen Teil des Problems darstellen." (Krauthausen, 2001, 106, H.i.O.)



Die Erleichterung, die enaktiv oder ikonisch geführte Beweise am Beispiel mit sich bringen, wird also durch den Aufwand erkauft, dass die Lernenden mit (überdies passend zu wählenden) beweisrelevanten Darstellungsmitteln und Veranschaulichungen umgehen lernen müssen. Wird der Lernende vorab darin geschult, kann ein Beweis am Beispiel leichter geführt werden. Dies geschieht deshalb in den meisten der in ↑ Teil 3 durchgeführten Einzelfallstudien als sogenannte Vorübungen (vgl. auch ↑ Abs. 1.2.5). Die grundsätzliche Problematik des Umgangs mit bildlichen Darstellungen und Veranschaulichungsmitteln in der Grundschule ist bereits von Schipper & Hülshoff (1984), Voigt (1993) und Wittmann (1993) thematisiert worden. Diese tritt auch insbesondere bei *visual proofs* auf, welche in ↑ Abs. 1.2.4 behandelt werden.

Krauthausen gibt eine Empfehlung, wie das Erkennen des Allgemeingültigen am Beispiel und damit ein "Erlernen des inhaltlich-anschaulichen Beweisens" befördert werden kann:

> "*2. Von konkreten Beispielen zur Allgemeingültigkeit*: In Beweissituationen wird häufig voreilig nach dem Königsweg, der 'guten' und endgültigen Darstellung gesucht. Dabei ist es durchaus nicht unmathematisch, sich einen zunächst noch unvertrauten Sachverhalt durch die Betrachtung einer Reihe von Beispielen induktiv zu erschließen. Die dadurch wachsende Vertrautheit mit der Aufgabe fördert das Entdecken zugrunde liegender Muster." (Krauthausen, 2001, 107, H.i.O.)

Man könnte erwidern, dass die Betrachtung einer Reihe von Beispielen eher das rein induktive Verständnis der Lernenden fördere – ein Kritikpunkt, den man auch der "Methode des beispielgebundenen Begründens" nach Goldberg (1992, 42) in ↑ Abs. 1.2.5 entgegenbringen kann. Interessant ist an dieser Stelle jedoch, dass Krauthausen bei der Anbahnung von Beweisen an Beispielen explizit das induktive Prüfen und das Entdecken nennt, diesem also gleichwohl seine Berechtigung beim inhaltlich-anschaulichen Beweisen einräumt. Den sich im Entdecken, Prüfen und Begründen vollziehenden Erkenntnisprozess beschreibt er weiters wie folgt:

> "Zunächst mögen die Beispiele relativ willkürlich gewählt sein, dann wird man Spezial-/Grenzfälle prüfen, um zu sehen, wie sich das System strukturell verhält. Spätestens wenn erste Muster aufschimmern, wird man die Beispiele systematischer auswählen, um Hypothesen daran zu überprüfen. Auch das geschickte Auswählen und Modifizieren des Arbeitsmaterials bedarf der kundigen Unterstützung durch die Lehrerin. Denn nicht zuletzt geht es auch darum, die konkreten Beispiele – für sich genommen jeweils nur Einzelfälle – auf das vermutete *allgemeine* Muster zu beziehen; auch von inhaltlich-anschaulichen Beweisen, die diesen Namen zu Recht tragen, wird der Nachweis der *Allgemeingültigkeit* erwartet. (...) Diese am *Ende* des Vorgehens stehende Ablösung vom empirischen Einzelfall dient dem gerechtfertigten (und entlastenden) Verzicht auf aufwendige Detailnachweise." (Krauthausen, 2001, 107f., H.i.O.)

Bezug zum beispielgebundenen Beweisen

Denkt man die Ausführungen Krauthausens fort, könnte man das Beweisen am Beispiel als einen zu verbalisierenden Prozess einer allmählichen Ablösung von im und am Beispiel gehaltenen Überlegungen zum als allgemeingültig Erkannten ansehen (↑ Kap. 1.5). Dieser Erkenntnisprozess schließt Entdeckungen und induktive Prüfungen seinen Worten nach mit ein, so dass man von einem beispielgebundenen Beweisen i.w.S. (im weiteren Sinne) sprechen könnte. Hiervon zeugen auch die Ausführungen von Meyer & Voigt (2009a) zu Erarbeitungswegen von Beweisen über das Entdecken und Prüfen, wie sie in ↑ Kap. 1.3 thematisiert werden.

Reality-related proofs nach Blum

reality-related proofs nach Blum [2003]

Blum (2003) entwickelt das Konzept *präformaler Beweise*, wie es etwa schon von Kirsch (1979) oder Blum & Kirsch (1991) beschrieben wurde, zu sogenannten *reality-related proofs* resp. *contextual proofs* weiter. Dabei nutzt Blum (2003, 3) resp. Blum (2006, 9) das nunmehr von Voigt (2013) diskutierte Konstrukt des Modellierungskreislaufs zwischen *Realität* (*reality*) und *Mathematik* (*mathematics*) zur Erläuterung (↑ Abb. 1.6).

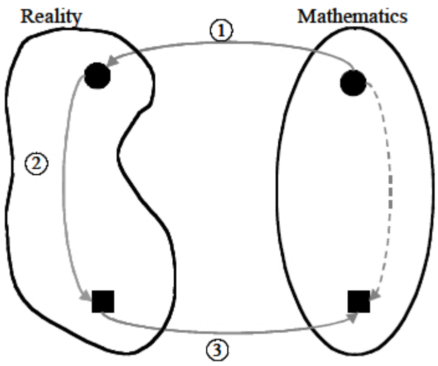


Abb. 1.6: Modellierungskreislauf in einfacher Form von Blum (2003, 3) in der Leserichtung → (1) *realisation* → (2) *argumentation* → (3) *mathematisation*

In Umkehrung der gewöhnlichen Leserichtung spricht der Autor von einem *realisation-argumentation-mathematisation*-Zyklus, der als Abfolge dieser drei Stadien zu einem *reality-related proof* werde:

> "First we have *interpreted* the premises (certain mathematical objects or operations and certain interrelations) in a specific real context, we have – as I call it – *realised* them. Second we have carried out certain *arguments* or *actions* within this context by means of contextualized knowledge. This has led to certain results. Third we have *mathematised* these results, i. e. translated them back into mathematics, and hereby obtained mathematical results. Altogether we have thus proven a certain mathematical theorem. That's what I call a *reality-related proof* (or *contextual proof*) of this theorem. (...) So a reality-related proof is – in short – a chain of certain correct conclusions based on certain valid premises, where conclusions and premises are realised in a specific context." (Blum, 2003, 3, H.i.O.)

In seiner Interpretation des Aufsatzes von Wittmann (1996) nennt Blum (2003, 10) dieses Vorgehen das sogenannte *operative principle of reality-related proving*. Einige zusätzliche Bedingungen müssen für eine *reality-related proof* noch erfüllt werden:

"– Some of the conclusions may consist simply of certain actions, actually carried out or only imagined; in any case, all contextual actions or considerations have to be accompanied by *reflections* upon the validity of these actions.

- All conclusion must be capable of being *generalised* directly from the concrete case, so that case has to be 'generic'.
- If 'formalised', the conclusions have to correspond to correct formal-mathematical arguments; it is, however, not necessary for such a formalisation to be actually effected or even recognisable." (Blum, 2003, 3, H.i.O.)

Dem Autor zufolge sind Prämissen und Konklusionen durch den gewählten Kontext spezifiziert. Die vollzogenen Konklusionen sind in dem Sinne verallgemeinerbar, als dass die konkreten, kontextualisierten Fälle *generisch* betrachtet werden können. Hierbei bleibt jedoch die Frage offen, wie der Lernende an diesen Beispielfällen das Allgemeingültige erkennen soll.

Sachkontexte und Grundvorstellungen

Als Realität können statt Sachkontexten allein Anschauungsmittel wie Punktmuster oder Abbildungen verwendet werden. Dies trifft etwa auf die von Blum (2003, 4) *geometric-intuitive proofs* genannten Beweise in den Aufsätzen Kirsch (1979) und Wittmann & Müller (1988) zu. Daraus lässt sich wie in der Besprechung von Krauthausen (2001) ableiten, dass Anschauungs- und Darstellungsmittel nicht vom eigentlichen Beweisen am Beispiel ablenken sollten, ihre Verwendung erlernt werden muss und damit erst zu einem adäquaten Einsatz als Hilfsmittel beispielgebundenen Beweisens führen kann. Die Einzelfallstudie aus ↑ Kap. 3.1 zum gegensinnigen Verändern zeigt diesbezüglich große Kontraste.

Blum (2003, 3) bemerkt zur Verallgemeinerbarkeit der von ihm oben angesprochenen Konklusionen: "The kind and extent of the conclusions depend heavily on the specific preknowledge in the given real context. This may vary individually (...)". Bei der Frage nach der Möglichkeit der Übertragung zwischen (Sach-)Kontext und Mathematik führt er sogenannte *concept images*, *intuitions* bzw. *fundamental notions*, sprich *Grundvorstellungen* (GV) als Bedeutungsträger an:

> "Very roughly speaking, GVs describe relations between mathematical topics, real contexts and individual mental structures. They carry the *meaning* (in German '*Bedeutung*') of a mathematical topic and, to the learner, they represent the 'essential', the 'heart' of the topic. To be a bit more precise: they serve
>
> - to constitute *meaning* (in German '*Sinn*'),
> - to construct *mental representations* which also allow for actions in the imagination,
> - to create *links* to the real world and thus to enable individuals to translate between mathematics and reality."
>
> (Blum, 2003, 5f., H.i.O.)

mögliche Kritik an Blum [2003]

Eine Kritik an den Grundvorstellungen und dem Modellierungskreislauf würde an dieser Stelle zu weit führen, hier sei auf Voigt (2013) resp. Voigt (2011) und Meyer & Voigt (2011) verwiesen. Auch müsste empirisch untersucht werden, ob und wie Lernende *reality-related proofs* vermöge solcher Grundvorstellungen führen. Der Umgang mit Sachkontexten dürfte das beispielgebundene

Beweisen für den Lernenden komplizierter gestalten, weil mit dem Erkennen des Allgemeingültigen im Besonderen des Beispiels zudem ein kontextbezogenes Verständnis erforderlich ist. Dies wurde auch bei der Besprechung von Winter (1983a) in ↑ Abs. 1.2.1 kritisiert. Oft ist dieser Kontext, in den das Beispiel aus Expertensicht eingebettet oder eingekleidet erscheint, später jedoch selbst ohne Relevanz, weil von ihm abstrahiert werden kann. Die Kontextgebundenheit besitzt dann didaktisch gesehen keinen Mehrwert, wenn es eigentlich um beispielgebundenes Beweisen geht. Insofern lassen sich *reality-related proofs* als spezifische Form beispielgebundener Beweise verstehen, weil sie zugleich kontextgebunden sind bzw. der Kontext selbst beispielhaft und zum Teil austauschbar erscheint.

Bezug zum beispielgebundenen Beweisen

Operatives Beweisen nach Wittmann

Auch Wittmann (1985) bezieht sich bei seinen Ausführungen über *operative Beweise* auf jene *premathematical proofs* von Semadeni (1976) und Kirsch (1979). Bei seinen *operativen Beweisen* knüpft er zudem an das *operative Prinzip in der Mathematikdidaktik* an, das wiederum auf die Methode des operativen Lernens nach Aebli (1985) und auf die genetische Erkenntnistheorie nach Piaget zurückgeht.

operatives Prinzip der Mathematikdidaktik nach Wittmann [1985]

> ”Objekte erfassen bedeutet, zu erforschen, wie sie konstruiert sind und wie sie sich verhalten, wenn auf sie Operationen (Transformationen, Handlungen, . . .) ausgeübt werden. Daher muß man im Lern- oder Erkenntnisprozeß in systematischer Weise
>
> (1) untersuchen, welche Operationen ausführbar und wie sie miteinander verknüpft sind,
> (2) herausfinden, welche Eigenschaften und Beziehungen den Objekten durch Konstruktion aufgeprägt werden,
> (3) beobachten, welche Wirkungen Operationen auf Eigenschaften und Beziehungen der Objekte haben (Was geschieht mit . . ., wenn . . .?)”
>
> (Wittmann, 1985, 9, H.i.O.)

Dabei lässt Wittmann die Gestalt der *Objekte* bewusst offen, diese könnten konkret dargestellt oder abstrahiert sein. *Operative Beweise* sieht Wittmann (1985, 11) nun als *Spezialfälle des operativen Prinzips* an. Sie seien

operative Beweise nach Wittmann [1985]

> ”Beweise, bei denen die den Objekten durch Konstruktion aufgeprägten Eigenschaften und Beziehungen sowie deren Verhalten bei Operationen explizit ausgenutzt werden” (Wittmann, 1985, 11)

Bei der Beobachtung der Wirkungen von *Operationen* lassen sich seinem handlungsorientierten Verständnis nach Wenn-dann-Aussagen formulieren, die somit als allgemein einsetzbare (und in diesem Sinne) allgemeingültige mathematische Regeln verwendet werden können, um *operative Beweise* zu führen. Wie der Lernende dazu kommt, die mathematische Allgemeingültigkeit der *Operationen* zu erkennen, beschreibt Wittmann (1974) den wohl von Piaget herrührenden Leitsatz ”Denken ist verinnerlichtes Handeln” wie folgt:

> "Der Übergang von den konkreten Handlungen zu den intellektuellen Operationen kommt dadurch zustande, daß sich die Handlungen *von ihrer Bindung* an spezielle Objekte immer mehr lösen (d.h. einen immer abstrakteren Charakter annehmen) und immer mehr *durch ihre Vorstellung ersetzt* werden (Verinnerlichung, Symbolisierung, sprachliche Darstellung). Der intellektuelle Fortschritt wird in erster Linie dadurch bewirkt, daß sich die intellektuellen Folgeprodukte der Handlungen (*Piaget* nennt sie 'Operationen') in flexiblen Systemen (*Gruppierungen*) organisieren, die dem Individuum eine typisch "intelligente" Anpassung ermöglichen." (WITTMANN, 1974, 45, H.i.O.)

Bezug zum beispielgebundenen Beweisen

Diese Formulierung erinnert an das beispielgebundene Beweisen, bei dem sich der Lernende das Allgemeingültige am besonders Gehaltenen durch eine allmähliche Ablösung vom Beispiel erschließt, und zwar im Austausch mit dem Interviewer, Mitschüler oder Lehrer. Wenngleich WITTMANN unter "konkreten Handlungen" häufig enaktiv vollzogene Operationen versteht, könnte man sagen, dass der Lernende in seiner anfänglichen Bindung an das vorliegende besondere Beispiel zunächst konkreter operiert, davon allmählich abstrahiert und dies auch anderen zu erkennen gibt. Vom theoretischen Verständnis lässt sich das *operative Beweisen* nach WITTMANN, sofern man es als Erkenntnisprozess vom besonders Gehaltenen zum Allgemeingültigeren auffasst, somit auch als beispielgebundenes Beweisen auffassen.

Beispiel ANNA-*Zahlen*

Als Beispiel für einen *operativen Beweis* führt WITTMANN (1996, 18) sogenannte ANNA-Zahlen ein, deren Hunderter- und Zehnerziffern sowie Tausender- und Einerziffern jeweils übereinstimmen. Die Differenz zu ihren entsprechenden NAAN-Pendants beträgt stets ein Vielfaches von 891; beispielsweise ist $8668 - 6886 = 1782 = 2 \cdot 891$. In Vermeidung eines formellen Beweises unter Verwendung von Variablenzeichen lässt sich nach WITTMANN (1996, 19) ein *operativer Beweis* mittels einer Stellenwerttafel führen, in denen die einzelnen Stellenwerte durch Punkte belegt werden (↑ Abb. 1.7, vgl. ↑ Abs. 1.4.1).

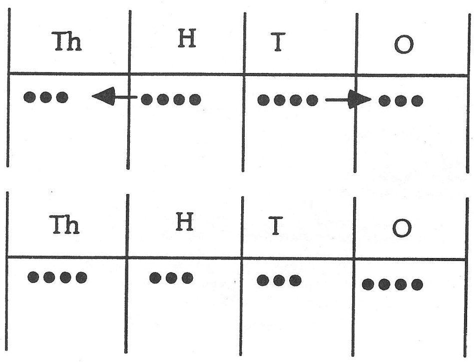


Abb. 1.7: Darstellung der Subtraktion $4334 - 3443 = +1000 - 100 - 10 + 1 = +891$ in der Stellenwerttafel aus WITTMANN (1996, 19)

Als elementare *Operation* repräsentiert nun das Verschieben eines Punktes von der Einer- in die Zehnerspalte die Rechnung $+10 - 1 = +9$. Als fortgesetzte

Operation hat das Verschieben eines Punkts von Hundertern zu Tausendern und eines Punkts von Zehnern zu Einern den Effekt, dass die Differenz der Zahlen $+1000 - 100 - 10 + 1 = +891$ ist. Angewandt auf die Behauptung über ANNA-Zahlen, ergibt eine entsprechend fortgesetzte *Operation* beim Verschieben mehrerer Punkte für die jeweilige Differenz ANNA$-$NAAN ein Vielfaches von 891. Dabei betont Wittmann (1996) die allgemeine, nicht auf ANNA-Zahlen beschränkte Anwendbarkeit der Verschiebe-*Operation* in einer Stellenwerttafel:

> "Moving counters between the columns of a place value table must not be seen as an ad hoc trick for ANNA-numbers. In fact, it has a wide range of applications, including the foundation of divisibility rules, one of the pillars of elementary number theory (cf. Winter 1983). (...)
> A systematic analysis of elementary arithmetic (Wittmann & Müller 1990 and 1992) has shown that number representations which embody the fundamental ideas of arithmetic are particularly useful for explaining (proving) number patterns." (Wittmann, 1996, 20f.)

Deshalb begreift Wittmann (1996, 21) es auch als eine lohnenswerte Aufgabe, weitere Teile der Elementarmathematik aus der Perspektive des *operativen Prinzips* zu rekonstruieren, mehr noch dieses Unterfangen nicht nur auf die Elementarmathematik zu beschränken, denn:

> "Representations of mathematical objects are an integral part of the evolution of mathematical theories in general. These representations, in most cases symbolic, form a 'quasi-reality' of objects which is accessible to observation and experiment in a way basically not different from the elementary example (...) [the ANNA-numbers, J.K.]. Therefore operative proofs are genuinely mathematical. They form a sound basis for raising the notion of proof to more formal settings later on." (Wittmann, 1996, 21)

Wahl der Repräsentationsformen bei operativen Beweisen

Dabei stellt sich zum einen die Frage, welche Repräsentation mathematischer *Objekte* jeweils gewählt werden soll, um eine (zum Beispiel für ANNA-Zahlen getroffene) Behauptung *operativ* zu *beweisen*, mit anderen Worten, wie (unterschiedlich) mathematische *Objekte* dargestellt werden können und welche Repräsentationsform jeweils didaktisch sinnvoll ist. Zum anderen ist fragenswert, ob die *operativen Beweise* wirklich selbstständig, gleichsam als verinnerlichte Handlungen ohne äußeres Korrektiv oder Spiegelbild geführt werden können. Kann die mehr oder weniger symbolisch geformte *Quasi-Realität* der jeweiligen Repräsentationsform mathematischer *Objekte* zudem als gesondert einzuübendes Beweismittel dienen, ohne dabei schon auf einen konkreten mathematischen Kontext bezogen zu sein?

In Wittmann (2009) werden noch weitere Beispiele *operativer Beweise* für den Grundschulunterricht gegeben und ihr theoretischer Hintergrund etwas anders dargestellt. So werden nach Einführung in den Umgang mit zweireihigen Plättchenmustern (↑ Abb. 1.8) für gerade und ungerade Zahlen dem Schüler je zwei Summanden bis 10 zum Addieren gegeben (↑ Abb. 1.9). Der Schüler soll die daran ggf. entdeckten Regeln mit Hilfe der früher einstudierten Plättchenarithmetik mittels *Operationen* im Sinne von verinnerlichten Handlungen begründen. An Eigenschaften solch beispielhafter *operativer Beweise* nennt der Autor:

> "– *they arise from the exploration of a mathematical problem,*
> – *are based on operations with 'quasi-real' mathematical objects, and*
> – *are communicable in a problem-oriented language with little symbolism."*
>
> (Wittmann, 2009, 2-254, H.i.O.)

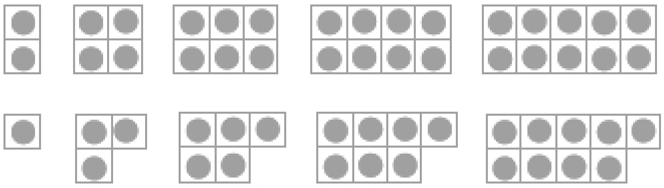


Abb. 1.8: Figurierte Zahlen als Plättchenmuster aus Wittmann (2009, 2-251)

4 + 6 =	5 + 1 =	2 + 1 =	1 + 8 =
6 + 8 =	7 + 3 =	4 + 3 =	3 + 6 =
8 + 4 =	9 + 5 =	6 + 5 =	5 + 4 =
10 + 2 =	5 + 7 =	8 + 7 =	7 + 2 =

Abb. 1.9: Additionsaufgaben im Zahlenraum bis 20 aus Wittmann (2009, 2-251)

Der letzte Gesichtspunkt ist für die (Grund-)Schule insofern von Bedeutung, als Wittmanns *quasi-reale* Repräsentationsformen mathematischer *Objekte* (wie Stellenwerttafel oder Plättchenreihen) den Schülern eine an die Alltagssprache angelehnte, nur leicht symbolisch durchsetzte Ausdrucksweise erlauben.

Ausführlicher kommen Wittmann & Ziegenbalg (2004) in ihrem Beitrag für Lehramtsstudierende auf die notwendige Versprachlichung von *Operationen* an figuralen Zahldarstellungen zu sprechen. Die Autoren sehen Punktmusterdarstellungen zunächst als Grundlage für stichhaltige *operative Beweise* an und stellen einen entsprechenden historischen Bezug zur *Spielstein-* bzw. *figuralen Arithmetik* her; es werden überdies *operative Beweise* von Aussagen über Summen gerader und ungerader Zahlen, über die Summe der ersten n ungeraden Zahlen und über Dreierreste von Trapezzahlen geführt und dabei zweireihige, quadratisch-winkelförmige und trapezförmige Punktmuster betrachtet (↑ Abb. 1.4, 1.8 und ↑ Abs. 1.2.4).

sprachliche Aspekte operativer Beweise nach Wittmann & Ziegenbalg [2004]

> "Dadurch, dass aber nicht auf einzelne Beispiele, sondern auf *allgemein ausführbare Operationen und deren 'Wirkungen'* zurückgegriffen wird, ist

> die Allgemeingültigkeit gesichert. Man nennt Beweise dieser Art deshalb *operative Beweise*. Die speziellen Punktmuster, die bei einem operativen Beweis gezeichnet oder angedeutet werden, haben selbst nur eine indirekte Bedeutung. Sie dienen lediglich zur Demonstration der allgemein ausführbaren Operationen und fungieren als Stellvertreter (Variable) für beliebige Muster." (WITTMANN & ZIEGENBALG, 2004, 38, H.i.O.)

Nach einem Rückgriff auf DAMEROW & LEFÈVRE (1981, 144ff.), welche die *Operationen Erzeugungshandlungen* bzw. *Legeakte* nennen und dabei die Reflexion über die *Legeakte* betonen, unterstreichen WITTMANN & ZIEGENBALG schließlich zur Wichtigkeit ihrer sprachlichen Explikation,

> "dass das bloße Legen bestimmter Punktmuster und die Verifikation von Beziehungen an diesen speziellen Mustern keine Beweise sind, sondern dass es auf die 'Wirkungen' *allgemein ausführbarer Operationen* an Punktmustern ankommt. Diese müssen unbedingt sprachlich beschrieben werden." (WITTMANN & ZIEGENBALG, 2004, 38f., H.i.O.)

Die sprachliche Explikation der *Operationen* ist einerseits für den Forscher wichtig, damit dieser interpretieren kann, ob der Schüler die *Operationen* nicht nur als Legeakte ansieht und in bloßer Betrachtung von speziellen Punktmustern verbleibt. Andererseits trägt die Versprachlichung in der Interaktion zwischen Lehrer und Schülern auch dazu bei, den *operativen Beweis* im Sinne der kommunikativen Beweisfunktion (↑ Abs. 1.1.1) zum sozial geteilten Wissen der Klassengemeinschaft werden zu lassen.

Bezug zum beispielgebundenen Beweisen

Das beispielgebundene Beweisen kann in konkreten (enaktiven) Handlungen durchaus seinen Ausgangspunkt nehmen, jedoch auch ohne expliziten Handlungsbezug gelingen. Beispielsweise ist in der Geometrie der Handlungsbezug in einem Beweisschritt, der eine abbildungsgeometrische *Operation* wie etwa eine Spiegelung oder eine Drehung verwendet, offensichtlich – in einem Beweisschritt, der vermöge eines Kongruenzsatzes geführt wird, jedoch weniger. Wenn zur Bestimmung der Anzahl der Verbindungen in einem vollständigen Graphen mit 5 Ecken etwa ein Papierstern aufgelegt und weggenommen wird, um $5 \cdot (5-1)$ Verbindungsansätze von $5 \cdot (5-1)/2$ Verbindungen sichtbar zu machen und damit die Division durch 2 zu veranschaulichen, handelt es sich um eine konkrete, aber im Grunde allgemein ausführbare Operation. Gleichwohl lässt sich dies auch dadurch einsehen, dass eine Verbindung und damit alle Verbindungen jeweils zwei Eckpunkte hat. Es besteht also die Möglichkeit, beim beispielgebundenen Beweisen manche Regeln als Operationen (ggf. mit konkretem Handlungsbezug) im Sinne WITTMANNs aufzufassen.

Nicht nur *inhaltlich-anschauliches Beweisen*, *reality-related proving* und *operatives Beweisen* können als spezielle Formen beispielgebundenen Beweisens angesehen werden. Hierunter fällt auch das *visual proving*, bei dem anhand einer repräsentierenden geometrischen Darstellung (*diagram*) etwas Allgemeingültiges bewiesen werden soll.

1.2.4 Visual proving

Bezug zum operativen Beweisen

Die *operativen Beweise* Wittmanns bedienen sich dem vorigen Absatz nach vorzugsweise enaktiver und ikonischer Repräsentationsformen. Wittmann beschreibt den *operativen Beweis* als Ergebnis eines handlungsorientierten Lernprozesses, dessen *allgemein ausführbare Operationen* – mit Aebli gesprochen – als verinnerlichte Handlungen betrachtet werden können. Insofern können diese *Operationen* (aufgrund ihrer Wiederholbarkeit und ihrer allgemeinen Anwendbarkeit) vorab einstudierbare Regeln sein, die im *operativen Beweis* dann keiner weiteren Begründung oder Stützung bedürfen. Allerdings reichen bloße Lege- oder Denkakte im Sinne von Damerow & Lefèvre (1981) nicht aus, um die Beweise zum sozial geteilten Wissen werden zu lassen, so dass Wittmann die Wichtigkeit der sprachlichen Explikation der *Operationen* betont hat. In einer mehr prozessorientierten Sicht auf das beispielgebundene Beweisen kommt der Sprache während des Beweisens aber auch die Funktion zu, das eigene Denken zu stützen, indem der Lernende in einem Wechselspiel Begriffe bildet und zugleich begreift.

Beweisen nach Neubrand & Möller und Wittmann & Ziegenbalg

Aufgabenbeispiel Quadratmuster nach Neubrand & Möller [1990]

Um in die weitläufigere Problematik des *visual proving* exemplarisch einzuführen, bietet sich das recht bekannte, sowohl bei Neubrand & Möller (1990) als auch bei Wittmann & Ziegenbalg (2004) verwendete figurierte Quadratmuster mit markierten Winkeln bzw. Haken an. Weitere figurale Aufgabenbeispiele führt in knapper Darstellung übrigens schon Besuden (1979, 89ff.) für die Grundschule an. An der gewählten figuralen Darstellung soll der Beweis dafür erbracht werden, dass die ersten n ungeraden natürlichen Zahlen die Summe n^2 ergeben:

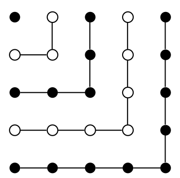
> ”Die Quadratzahlen kann man sich z.B. so der Reihe nach aufbauen. Um jede schon gezeichnete Quadratanordnung legt man eine weitere Schicht herum:
>
> $$\begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \circ & \circ & \circ & \circ \end{array}$$
>
> Dies drückt sich demnach so aus: $Q_{n+1} = Q_n + n + n + 1 = n^2 + 2n + 1$. Damit haben wir einerseits die wohlbekannte ’binomische Formel’ geometrisch hergeleitet. Andererseits galt dieser Aufbauprozess ja schon von Anfang an, nämlich ab $Q_1 = 1$. Stets wurden ungeradzahlig viele Punkte – und zwar kommen aufeinanderfolgend alle ungeraden Zahlen vor – um das schon bestehende Quadrat herumgelagert.” Es gilt also: $(n+1)^2 = 1 + 3 + 5 + ... + (2n+1)$. (Neubrand & Möller, 1990, 53f.)

An dieser Beschreibung zur dargestellten Abbildung lässt sich ein für den Experten geläufiger Wechsel zwischen symbolischer und geometrischer Darstellung

Wechsel zwischen symbolischer und geometrischer Darstellung

Aufgabenbeispiel Quadratmuster bei WITTMANN & ZIEGENBALG [2004]

erkennen. Diese inhaltlich und sprachlich relativ versiert vollzogene Übertragung kann jedoch von einem Lernenden nicht erwartet werden. Deshalb könnte es diesem Lernenden schwer fallen einzusehen, warum ein weiteres Umlagern der jeweils angezeigten Quadratanordnung mit einer weiteren ungeraden Anzahl von Punkten überhaupt ein Quadrat ergibt. Das Umlagern macht bei WITTMANN & ZIEGENBALG (2004, 37) gerade eine handlungsbezogene *Operation* aus, die nicht nur von den Experten, sondern auch von den Lernenden beschrieben werden muss:



> "Immer wenn Sie an ein schon erhaltenes quadratisches Muster einen 'Winkelhaken' (griechisch Gnomon) anfügen, erhalten Sie ein neues Quadrat: Durch Anlegen eines Hakens mit 5 Plättchen erhalten Sie aus $1 \cdot 1$ das Quadrat $2 \cdot 2$, durch Anlegen eines Hakens mit 3 Plättchen das Quadrat $3 \cdot 3$, usw. Jeder Haken stellt eine ungerade Zahl dar, denn an das $k \cdot k$ Quadrat werden unten und rechts jeweils k Plättchen und zusätzlich an der Ecke ein einzelnes Plättchen angefügt, also insgesamt $k + k + 1 = 2 \cdot k + 1$ Plättchen." (WITTMANN & ZIEGENBALG, 2004, 37)

Die Autoren führen die Darstellung des Beweises weiter aus. Die Wiederholbarkeit der handlungsbezogenen *Operation* des Umlagerns wird als beispielhaft vollzogene Handlung erklärt, aber nicht weiter hinterfragt. Einmal begriffen und verbalisiert, kann sie nun sukzessive eingesetzt werden:

> "Dies können Sie am Muster (...) Schritt für Schritt verfolgen:
>
> $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 2 \cdot 2$
> $2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 = 3 \cdot 3$
> $3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1 = 4 \cdot 4$
> $4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 1 = 5 \cdot 5$
>
> ...
>
> Allgemein: $(n - 1)^2 + 2 \cdot (n - 1) + 1 = n^2$"
>
> (WITTMANN & ZIEGENBALG, 2004, 37)

operatives Beweisen an Punktmustern nach WITTMANN & ZIEGENBALG [2004]

Die Punkte ... deuten an, dass man sich die Rechnungen (und damit die *Operation* des Umlagerns) fortgesetzt denken soll, um sich das Allgemeine im Besonderen zu erschließen. Ohne weitere Erläuterungen an den Lernenden würden die nacheinander gereihten *Operationen* aber nur induktive Prüfungen darstellen. Ähnlich verhält es sich bei der übergeordneten Behauptung, deren Begründung man einsehen müsse:

> "Sie ersehen aus diesen Operationen an Punktmustern: n^2 ist die Summe von 1 und der Winkelhaken $3, 5, 7, \dots, 2n-1$, d.h. $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.
> Die Begründung ergibt sich daraus, dass die Rechnung jeder Stufe in die Rechnung der nachfolgenden Stufe einfließt. Man kann sich also in der 'Induktionskette' Zahl für Zahl (Stufe für Stufe) hochhangeln und vergewissert sich auf diese Weise, dass sich die Formel auf alle Zahlen fortpflanzt." (Wittmann & Ziegenbalg, 2004, 37)

Bei Neubrand & Möller (1990) heißt es zur Erarbeitung der Begründung entsprechend:

Beweisen durch Hinschauen nach Neubrand & Moeller [1990]

> "Durch das Herausarbeiten, dass sich die Quadrate aus den 'Gnomonen' der Reihe nach aufbauen, wurde ein allgemein-gültiges Prinzip sichtbar. Dieses Argument ist von vorneherein auf jede beliebige Seitenzahl des Ausgangsquadrats anwendbar. Somit erhält diese Begründung den Charakter eines allgemeinen Beweises auf einer 'inhaltlich-anschaulichen' (G. Müller und E. Ch. Wittmann) Basis." (Neubrand & Möller, 1990, 56)

Der Autor grenzt sein *Beweisen durch Hinschauen* von der Induktion ab:

> "Somit genügt ein bloßes Fortsetzen einer vermeintlichen Anfangsserie nicht. Vielmehr müssen Strukturen herausgearbeitet, allgemeine Aufbauprinzipien erkannt, Beziehungen geometrischer Art benutzt werden, um zu einem überzeugenden Ergebnis über einen 'Beweis durch Hinschauen' zu kommen." (Neubrand & Möller, 1990, 57)

Vergleich beider Beweise an Punktmustern

In beiden Aufsätzen benutzen die Autoren Abbildungen zur Unterstützung ihrer (handlungsbezogenen) Beweise. Wittmann & Ziegenbalg (2004) betonen zudem die dazu notwendige sprachliche Explikation grundlegender *Operationen* in einem solchen Lernprozess und legen das mathematikdidaktische *operative Prinzip* zugrunde (↑ Abs. 1.2.3). Die Beweiskraft einer Abbildung wird in beiden Arbeiten hingegen nur implizit problematisiert, etwa wenn es heißt, dass an einer solchen Abbildung "allgemeine Aufbauprinzipien erkannt" oder Begründungen "ersehen" werden (vgl. obige Zitate). Noch mehr als *operative Beweise*, in denen *Operationen* exemplarisch einstudiert und als allgemein anwendbar und schließlich allgemeingültig aufgefasst werden, setzen *Beweise durch Hinschauen*, im weiteren Sinne alle *visual proofs*, einen versierten Umgang im Wechsel zwischen enaktiven, ikonischen und symbolischen Repräsentationsformen voraus. Was der Lernende aus einer Planskizze oder figuralen Darstellung liest, was er darin als besonders und was als allgemeiner ansieht, ob und wie er dies mit vorhandenem Wissen verknüpft, bleibt jedoch offen. Die in der Arithmetik geläufige Differenzierung zwischen Zahl und Variable scheint in Planskizzen und figuralen Darstellungen aufgehoben. Dies erschwert es einerseits, den Prozess beispielgebundenen Beweisens nachzuzeichnen, so dass der Sprache des Lernenden dabei um so größeres Gewicht zukommt. Andererseits liegen in geometrischen Repräsentationsformen an sich schon vom Alltagsverständnis gelöste Abstraktionen, die dem Erkennen des Allgemeingültigen durchaus dienlich sein können und dies wohlmöglich sogar erleichtern.

Beweisen in der Geometrie nach Holland

Niveaustufe des Argumentierens

Einen anderen Ansatz zum *visual proving* verfolgt HOLLAND (2007). In seinem Lehrbuch über Geometrie in der Sekundarstufe schreibt er zur Niveaustufe des geometrischen Argumentierens (vgl. ↑ Abs. 1.1.2):

> "Geometrie als Lehre vom Anschauungsraum zielt auf das einsichtige und beziehungsreiche Lernen geometrischer Sätze und Verfahren. Für Aussagen, deren Allgemeingültigkeit nicht unmittelbar einsichtig ist, bedarf es dazu eines Beweises. Ziel des Beweises ist somit ein 'Aha-Erlebnis' als Zeichen gewonnener Einsicht. Ein Beweis unter dieser Zielsetzung braucht aber keineswegs die Kriterien der 'Strenge' zu erfüllen, wie sie von einem formalen Beweis erwartet werden." (HOLLAND, 2007, 132)

Der Autor bemerkt, dass zum Führen eines (geometrischen) Beweises kein Formalismus nötig sei. Für die Niveaustufe des Argumentierens reicht es zunächst aus, wenn der Lernende eine Beweisidee erahnt und insofern ein 'Aha-Erlebnis' macht (zur Deutung des 'Aha-Erlebnisses' als abduktiven Schluss im Rahmen einer Entdeckung mit latenter Beweisidee sei auf ↑ Abs. 1.3.4 verwiesen). Dabei betont HOLLAND (2007, 132) die "Bezugnahme auf die Beweisfigur, wobei diese variable gesehen werden muss, so dass keine Einschränkung auf ungewollte Sonderfälle entsteht." Mit dieser die Darstellung des Beispiels betreffenden Voraussetzung formuliert der Autor das Ziel geometrischen Beweisens auf der Niveaustufe des Argumentierens:

> "Die Niveaustufe des Argumentierens zielt nicht auf ein eigentliches *Beweisverständnis* und kann dieses auch nicht erreichen. Die Schüler sollen jedoch den Unterschied erleben zwischen einer Überzeugung, die nur aufgrund von Zeichnen und Messen gewonnen wird, und der zu einem Aha-Erlebnis führenden *Einsicht* in die Allgemeingültigkeit der vermuteten geometrischen Beziehung, zu der häufig nur eine minimale Argumentation erforderlich ist." (HOLLAND, 2007, 133, H.i.O.)

Niveaustufe des inhaltlichen Schließens

Haben Schüler den Unterschied zwischen induktivem Schließen und versuchsweisem Beweisen am Beispiel erfahren, sind sie im Grunde auch in der Lage, inhaltlich zu schließen. Dabei misst auch dieser Autor der Versprachlichung eine wichtige Rolle bei:

> "Beweise auf dieser Niveaustufe sind bereits soweit strukturiert, dass sie eine Notation als Sequenz von Beweisschritten zulassen. Meist wird man jedoch eine umgangssprachliche, die Schülertätigkeit beschreibende Darstellung wählen." (HOLLAND, 2007, 133f.)

Niveaustufe des formalen Schließens

Beim inhaltlichen Schließen kommt es dem Autor zufolge also eher auf die tiefergehende Einsicht in die Allgemeingültigkeit der betrachteten Aussage an, statt dass ein lückenloser und detailierter Beweis geführt werden muss. Auch brauche der Schüler seinen Umgang mit der Beweisfigur noch nicht selbstkritisch zu reflektieren. Dies ist erst auf der Niveaustufe des formalen Schließens erforderlich:

> "Auf dieser Stufe des Beweisens wird der Beweis vorrangig oder sogar ausschließlich unter dem Aspekt der Geometrie als deduktiver Theorie gesehen. Ein Beweis auf dieser Stufe soll aufdecken, aus welchen anderen Sätzen der Satz *gefolgert* werden kann, die somit *Gründe* seiner Gültigkeit sind." (HOLLAND, 2007, 135, H.i.O.)

Insgesamt gesehen erscheint die von HOLLAND (2007) vorgenommene Unterscheidung in Niveaustufen des Argumentierens, des inhaltlichen Schließens und des formalen Schließens wenig geometriespezifisch. Eine ähnliche Unterteilung (hinsichtlich ikonischer und symbolischer Repräsentationsebene, letztere unter Zahlen- und unter Variablenbenutzung) findet sich für die Arithmetik bei PADBERG (1997, 59f.) resp. RATZINGER (1992, 54ff.) (↑ Abs. 1.1.2).

Visual Proving nach Borwein & Jörgenson

bildlich gebundenes Beweisen als Sonderform beispielgebundenen Beweisens

Die bisherige Erörterung zum *Beweisen durch Hinschauen* und zum *Beweisen in der Geometrie* lässt sich nun in die weitläufigere Diskussion um *visual proofs* oder *interaction with diagrams* einbetten, welche in den letzten beiden Jahrzehnten auch durch den leichter gewordenen Einsatz dynamischer Geometriesoftware beeinflusst wurde. Wie an der obigen Gegenüberstellung von *operativen Beweisen* und *Beweisen durch Hinschauen* deutlich wurde, hat eine visuelle Darstellung Beispielcharakter in dem Sinne, dass daran – in eigenen Worten – *bildlich gebundene Beweise* geführt werden können. In den Studien von ↑ Teil 3 ist die Behauptung zuweilen selbst vorwiegend geometrischer Natur (nämlich in den Aufgabenstellungen zum vollständigen Graphen und zum Außenwinkelsatz) oder arithmetischer Natur (nämlich in den Aufgabenstellungen zum gegensinnigen Verändern, zu den Zahlenmauern und zu den Potenzregeln), teils verbunden mit der Möglichkeit einer ikonischer Darstellung. Die mehr oder weniger bildlich gebundenen Beweise können insofern als Sonderform beispielgebundener Beweise aufgefasst werden und bieten entsprechende Implikationen wie beim *beispielgebundenen Beweisen*: Zunächst können etwa unpassende visuelle Repräsentationen den Zweck des *bildlich gebundenen Beweisens* verfehlen, ähnlich wie sich in der Arithmetik manche Beispielzahlen als ungeeignet herausstellen, um an ihnen das Allgemeingültige der jeweiligen Behauptung zu erkennen. Einige bekannte Beispiele visueller Fehlrepräsentationen geben beispielsweise BROWN (2000) oder NELSON (1993) in seinem Buch mit dem programmatischen Titel "Proving without words". Als Beispiel für einen *visual proof* findet man bei BORWEIN & JÖRGENSON (2001, 899) resp. BROWN (1997, 172) eine Abbildung für die Summenformel $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{2n} = \frac{1}{3}$ (↑ Abb. 1.10).

proving without words nach NELSON [1993]

Gütekriterien für visual proofs nach BORWEIN & JÖRGENSON [2001]

BORWEIN & JÖRGENSON (2001, 898) stellen nun folgende Fragen hinsichtlich einer visuellen Repräsentation: "Can it contribute directly to the body of mathematical knowledge? Can an image act as a form of 'visual proof'?". An Gütekriterien für einen *acceptable visual proof* führen die Autoren drei notwendige, aber nicht hinreichende Bedingungen an:

- "*reliability*: the underlying means of arriving at the proof are reliable and the result is unvarying with each inspection"

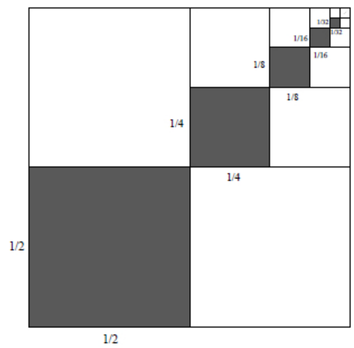


Abb. 1.10: Beispiel für einen *visual proof* aus Borwein & Jörgenson (2001, 899)

- "*consistency*: the means and end of the proof are consistent with other known facts, beliefs and proofs"
- "*repeatability*: the proof may be confirmed by or demonstrated to others"

jeweils (Borwein & Jörgenson, 2001, 898)

bildlich gebundenes Beweisen in Subsumption zum beispielgebundenen Beweisen

Mehrdeutigkeiten beim visual proving

Diese drei Kriterien (*repeatability, reliability, consistency*) erinnern etwas an die aufeinander aufbauenden Hauptgütekriterien Objektivität, Reliabilität und Validität von Messinstrumenten oder Tests, sofern man unterschiedliche Lesarten im Vermessen durch Anschauen einer Abbildung als *visual proofs* ansieht. Man könnte sich auch fragen, ob die obigen Kriterien allein für *visual proofs* gelten oder nicht gar für Beweise im Allgemeinen. Was dabei unter *reliable means* zu verstehen ist, lassen die Autoren offen. Der Charakterisierung von *visual proofs* kommt es näher, in Subsumption zum *beispielgebundenen Beweisen* vom *bildlich gebundenen Beweisen* zu sprechen. Dem Bild kommt in seiner sinnlichen Wahrnehmung mit den Augen keine Beweiskraft an sich zu, in ihm lässt sich aber möglicherweise eine latente Sinnstruktur durch geistige Anschauung erkennen. Diese latente Sinnstruktur muss vom Lernenden als Beweis am Bild erst subjektiv realisiert werden und sich durch sprachliche Explikation manifestieren. In diesem Sinne könnte man also das *visual proving*, sofern als Prozess *bildlich gebundenen Beweisens* verstanden, ebenso wie das *operative proving* als Sonderformen beispielgebundenen Beweisens ansehen. Was aber macht die Besonderheit *bildlich gebundener Beweise* aus? Borwein & Jörgenson nennen den Aspekt der Mehrdeutigkeit eines Bildes und meinen damit die unterschiedlichen Deutungsweisen durch den Betrachter:

> "In graphical representations, the same facts and relationships are often presented in multiple modes and dimensions. For example, the path through the information is usually indeterminate, leaving the viewer to establish what is important (and what is not) and in what order the dependencies should be assessed. Further, unintended information and relationships may be perceived, either due to the unanticipated interaction of the complex array of details or due to the viewer's own perceptual and cognitive processes." (Borwein & Jörgenson, 2001, 899)

successful visual representations

Die jeweilige Behauptung kann als Deutungsmöglichkeit aus der mehrdeutigen Abbildung erschlossen werden. Gleichwohl die Autoren dabei von "kognitiven Prozessen" sprechen, richten sie ihr Augenmerk vor allem auf die Charakterisierung geeigneter visueller Darstellungen:

> "As a consequence, successful visual representations tend to be spartan in their detail. And the few examples of visual proof which withstand close inspection are limited in their scope and generalizability. The effort to bring images closer to conformity with the prevailing logical modes of proof, they have subsequently lost the richness which is intrinsic to the visual." (Borwein & Jörgenson, 2001, 899)

Die Auswahl geeigneter visueller Darstellungsmittel ist jedoch eher eine Vorbedingung, als dass sie den Erfolg des *visual proving* als Prozess garantieren könnte. Die empfohlene Sparsamkeit einer Abbildung erhöht zweifelsohne ihre Mehrdeutigkeit und somit ihr Potential für ihre allgemeine Anwendbarkeit. Entsprechend kann darauf verwiesen werden, dass auch in arithmetischen Kontexten beispielgebundenen Beweisens mehrere Grade an Allgemeingültigkeit von Behauptungen bestehen und gesehen werden können, etwa in Regelverbänden. Man betrachte das Beispiel $7 + 9 + 8 = 3 \cdot 8$ zum gegensinnigen Verändern im arithmetischen Kontext. Es hat ebenso das Potential zur Begründung eines ganzen Regelverbandes in fortschreitender Verallgemeinerung (siehe hierzu die Einzelfallstudie in ↑ Kap. 3.1).

Allgemeingültigkeit von visual proofs

Die Befürworter von *visual proofs* stimmen darin überein, dass die Haltung, Beweise an visuellen Repräsentationen seien bloße Heuristik, ein Dogma sei. Hier drängt sich die vergleichbare Diskussion zu den aus ↑ Abs. 1.2.3 bekannten so genannten *experimentellen 'Beweisen'* gegenüber *inhaltlich-anschaulichen Beweisen* auf: Durch bloßes Bestätigen einer Behauptung in der Betrachtung mehrerer Bilder, etwa durch Variation einer Einflussgröße, ergibt sich noch kein *visual proof*. Für den lernenden Betrachter stellt sich nach Barwise & Etchemendy (1996, 180) vielmehr "the task of extracting information implicit in some explicitly presented information". Mit der Einnahme einer solchen Perspektive, die aus strukturellen Merkmalen der Abbildung Informationen zieht ("there is structure, there is information"), kann auch ein Kriterium für die Gültigkeit eines *visual proof* gegeben werden:

Kriterien für die Gültigkeit von visual proofs nach Barwise & Etchemendy [1996]

> "As long as the purported proof really does clearly demonstrate that the information represented by the conclusion is implicit in the information represented by the premises, the purported proof is valid." (Barwise & Etchemendy, 1996, 180)

Entsprechendes kann man auch für das beispielgebundene Beweisen im Allgemeinen sagen: Durch eine filternde Fokussierung auf die implizit vorhandenen strukturellen Merkmale des Beispiels kann die Allgemeingültigkeit der Behauptung erkannt werden. Der Beweis lässt sich als latente Sinnstruktur bei *visual* *proofs* jedoch auf geometrischem Wege und damit möglicherweise kompakter oder eingängiger extrahieren.

Dynamisierung von visual proofs

Die Autoren sehen die Manipulation geometrischer Objekte als erkenntnisfördernd an, etwa wie wenn in arithmetischen Kontexten Parameter oder Instanzen verändert werden. In ihrem interaktiven Programm *Hyperproof* gehen Barwise & Etchemendy (1994) schließlich über das Konzept der statischen Betrachtung lediglich einer Abbildung hinaus. Hier soll dem Lernenden eine Übertragungsmöglichkeit zwischen visuellem und semantisch-sprachlichem Kontext geboten werden. Erst die Reflexion über diese Zusammenschau lässt den Lernenden aber einen sogenannten *heterogeneous proof* führen, ein Ansatz, den später Rinvold & Lorange (2011) als *multimodial proof* weiterentwickeln. Das Ineinandergreifen von visuellen und sprachlichen Ebenen begegnet dem Leser jedoch auch – wenngleich nicht in einer solchen Dynamik – in den Beschreibungen des Quadratmusters bei Wittmann & Ziegenbalg (2004) und Neubrand & Möller (1990) aus ↑ Abs. 1.2.4.

Interaktionsmodi nach Herbst

empirischer, repräsentionaler, deskriptiver und generativer Modus nach Herbst [2004]

Herbst (2004, 129f.) stellt theoretische und empirische Ergebnisse zum Gebrauch von geometrischen Repräsentationsformen im Schulunterricht vor. Er diskutiert dabei vier Interaktionsmodi, denen er jeweils empirisches Beispielmaterial unterlegt:

1. *empirical mode of interaction*
2. *representational mode of interaction*
3. *descriptive mode of interaction*
4. *generative (resp. prescriptive) mode of interaction*

empirischer Interaktionsmodus nach Herbst [2004]

Nach Herbst (2004) werden die Austauschbeziehungen bei den *interactions with diagrams* zwischen lernendem Akteur (*actor*), repräsentierender geometrischer Darstellung (*diagram*) und repräsentiertem mathematischem Objekt (*object*) hergestellt. Im empirischen Modus identifiziert der lernende Akteur den geometrischen Kontext mit dem mathematischen Objekt, d.h. es findet eine schematische Übertragung statt, so dass das Diagramm als äquivalent zum mathematischen Objekt betrachtet wird (im epistemologischen Dreieck nach Steinbring (1993, 118) käme dies einer Identifikation von Symbol und Objekt gleich). Da die geometrische Darstellung im Allgemeinen konkret gehalten ist und eine Parallelbeziehung zwischen Objekt und Darstellung angenommen wird, verbleibt eine Argumentation an der geometrischen Darstellung folglich häufig im Induktiven, es werden gleichsam *experimentelle 'Beweise'* im Sinne von Wittmann & Müller (1988) geführt innerhalb der geometrischen Darstellung. Ein Beispiel für ein Agieren im empirischen Modus liefert die Einzelfallstudie in ↑ Kap. 3.1 zum gegensinnigen Verändern.

repräsentionaler Interaktionsmodus nach HERBST [2004]

Dem gegenüber dient der repräsentationale Modus der deduktiv-formalen Übertragung von Objekteigenschaften in eine zu gestaltende geometrische Darstellung. Das Diagramm repräsentiert damit gewisse Eigenschaften des Objekts und fungiert als Piktogramm oder Illustration. Wenn über das Objekt gesprochen werden soll, kann dies stellvertretend dafür am Diagramm geschehen.

HERBST (2004, 131) hat in seiner empirischen Forschung jedoch festgestellt, dass nicht allein empirische und repräsentationale Modi die eigentliche Rolle des Diagramms beim geometrischen Beweisen beschreiben. Der Gebrauch von Abbildungen vollzieht sich nicht nur rein experimentell oder rein illustrativ. Dies führt den Autor zum deskriptiven Modus:

deskriptiver Interaktionsmodus nach HERBST [2004]

> "I call *descriptive* (...) a mode of interaction between actor, object, and diagram whereby a diagram consists of two overlapping systems: a system of *referents* and a system of *signs*[3]. The diagram is a particular object, which not only represents the mathematical object. To the extent that the diagram is accepted as accurate in some regards (...), the diagram actualizes the object, making it amenable to be the source of discourse about the object or a referent for discourse, as in the empirical mode." (HERBST, 2004, 131, H.i.O.)

Man könnte erwarten, dass diese eher prozesshafte Beschreibung als Wechselspiel zwischen Zeichen (*sign*) und Bezeichnetem (*referent*) in der Verwendung von Abbildungen dem beispielgebundenen Beweisen näher käme. Diese Erwartung drückt auch KNIPPING (2005, 171) aus, wenn sie in der Besprechung von HERBST (2004) schreibt:

> "As the descriptive mode of interaction falls between the empirical mode and the representational mode, just as preformal proving falls between empirical verification and formal proving, one might expect there to be a relationship. In fact the role of diagrams in geometry is an illustration of the object relatedness of preformal proving (...)." (KNIPPING, 2005, 171)

Dem gegenüber weist HERBST (2004) auf Folgendes hin:

> "some of those features of a diagram, which are available to perception along with the premises of an argument (and whatever is known), can actually feed the argument produced. Perception of a diagram thus supports and at times even replaces the logical machinery of discourse as a source of statements about the object; (...)" (HERBST, 2004, 132)

Es bestehe mithin die Gefahr, in der geometrischen Repräsentation möglicherweise ganz andere mathematische Objekte zu sehen als vorgesehen. Aus der Perspektive der Lernenden stellt sich dies nämlich HERBST (2004, 131) zufolge derart dar, dass sie einerseits nur die Informationen verwenden dürfen, die das

Diagramm bereithält, ohne es zu verändern. Andererseits müssen sie auch alle (relevanten) Informationen aus dem Diagramm extrahieren, um sie für ihren Beweis zu benutzen.

Spräche man beim beispielgebundenen Beweisen von einem deskriptiven Modus, könnte es passieren, ein bestehendes gültiges Argument bei Anwendung auf andere Gültigkeitsbereiche mechanisch zu übernehmen, ohne die veränderten Prämissen zu berücksichtigen. Um dies weiter zu untersuchen, lässt HERBST (2004) die Lernenden vorgeblich richtige geometrische Darstellungen betrachten, die das in Frage stehende mathematische Objekt jedoch nicht darstellen (eine beispielgebundene Entsprechung wäre die Vorlage vorgeblicher beispielgebundener Beweise wie in der Einzelfallstudie aus ↑ Kap. 3.5 zu den Potenzregeln). Entsprechend ausfallende Beobachtungen veranlassen HERBST (2004) schließlich dazu, den generativen Modus als vierten Interaktionsmodus einzuführen, bei dem hypothetische Identifikationen zwischen der veränderbaren geometrischen Darstellung und dem mathematischen Objekt vorgenommen werden, um dessen Eigenschaften besser erkennen und differenzieren zu können:

generativer bzw. präskriptiver Interaktionsmodus nach HERBST [2004]

> "I call *generative* (or prescriptive; (...)) a mode of interaction between actor, object, and diagram whereby an initial, hypothetical identification between object and diagram affords conditions and constraints for the actor to anticipate operations on the diagram and their results, and whereby the actualization of those operations on the diagram constrains the interpretation of the results of those operations in ascribing properties to the object, further differentiating the object from the diagram (...)." (HERBST, 2004, 134, H.i.O.)

Die dabei vollzogenen *operations* bestehen etwa darin, dass Hilfslinien gezeichnet werden oder zusätzliche Zeichen oder Symbole generiert werden, um ein Argument leichter führen zu können. Den generativen Modus kann man insofern als Prozess beispielgebundenen Beweisens an geometrischen Darstellungen, mithin als eigentlich *bildlich gebundenes Beweisen* betrachten. Das Allgemeingültige kann durch die reflektierte Modifikation des Bildes und der allmählichen Lösung vom Bild erkannt werden, es wird am verändert gesehenen Bild subjektiv realisiert. KNIPPING (2005) formuliert dies in Auseinandersetzung mit deskriptivem und generativem Modus wie folgt:

> "In the descriptive mode the diagram is considered fixed. The teacher has included all the necessary elements and left out all the irrelevant ones. For a student to make changes to such a diagram would be counterproductive. In the generative mode however, it is through acting on the diagram that the reasoning process occurs. Both the generative mode and the descriptive mode are similar to preformal proving in that they involve founding the argument directly on a representation, but the generative mode is more suitable to developing students' reasonabel proving, because it has this element of action." (KNIPPING, 2005, 171)

Auf den letztgenannten Handlungsbezug beim beispielgebundenen Beweisen wurde in Besprechung der Arbeiten von SEMADENI (1976), BLUM (2003) und WITTMANN (1996) bereits eingegangen. Insgesamt gesehen unterscheiden sich *bildlich gebundene Beweise* im Verständnis der vorliegenden Arbeit also zunächst nur in der Fokussierung auf einen geometrischen Kontext. Wenn sie sich mit arithmetischen Anteilen mischen (wie beim eingangs referierten figurierten Quadratmuster), stellt dies hohe Anforderungen an den Lernenden hinsichtlich seiner Lese- und Übertragungsfähigkeit der Abbildung als geometrisch dargestellte arithmetische Sinnstruktur. Gleichzeitig entbehren Abbildungen jedoch auch mehr oder weniger jener Konkretion von Beispielzahlen: Ein abgebildetes Dreieck wird ja häufig nicht mehr als das konkrete Dreieck mit präzise gemessenen Längen und Winkeln gesehen, sondern vertritt (etwa als gleichschenkliges oder rechtwinkliges) Dreieck eine ganze, zu bestimmende Klasse von Dreiecken. Demnach sind visuelle Darstellungen schon an sich mehr vom konkreten Beispielobjekt gelöst als im arithmetischen Kontext die Beispielzahlen. Eine solch weitgehendere Lösung vom Konkreten erschwert aber auch das Analysieren bildgebundener Beweisprozesse und das Sprechen darüber. Da vom Konkreten schon mehr gelöst, dürfte die Suggestionskraft der Abbildungen, das Allgemeine zu vertreten, auch ungleich stärker wirken als bei Beispielzahlen, welche (zum Beispiel als gerade Zahlen) nur ab und an als Vertreter einer ganzen Klasse von Zahlen gesehen werden. Gerade auch die Vermutung, die Abbildungen könnten etwas allgemein Falsches suggerieren, ist – wie oben dargestellt – von HERBST (2004) empirisch bestätigt worden.

generativer Interaktionsmodus und bildlich gebundene Beweise

Wie die Diskussion der Autoren NEUBRAND & MÖLLER (1990), WITTMANN & ZIEGENBALG (2004), HOLLAND (2007), BORWEIN & JÖRGENSON (2001), BARWISE & ETCHEMENDY (1996), HERBST (2004) und KNIPPING (2005) gezeigt hat, lässt sich auch das *visual proving* in seinen verschiedenen genannten Ausprägungen häufig als beispielgebundenes Beweisen im Sinne der vorliegenden Arbeit auffassen. Während des beispielgebundenen Beweisens ist etwa die Übertragung zwischen geometrischer und symbolischer Darstellung für die Schüler keineswegs einfach zu leisten. Die geometrische Darstellung hat insofern doppelten Beispielcharakter, als dass sie daran beispielgebundenes Beweisen ermöglicht. Deshalb lassen sich Termini wie *bildgebundenes Beweisen* oder *bildlich beispielgebundenes Beweisen* diskutieren.

1.2.5 Beispielgebundenes Beweisen als Dialog

Neben den bereits vorgestellten Definitionsversuchen anderer Autoren hat Goldberg (1984) das beispielgebundene Beweisen – von der Autorin *beispielgebundenes Begründen* genannt – theoretisch zu fassen versucht und empirisch untersucht. Wie schon ihre Diskussion von Niveaustufen im *beispielgebundenen Begründen* in ↑ Abs. 1.1.2 zeigte, ist ihre wissenschaftliche Untersuchung unterrichtsnah gehalten. Dies eignet sich gut als Folie für die vorliegende, mehr empirische Einzelfälle betonende Arbeit.

Methode des dialogischen Beweisenlehrens nach Vollrath [1969]

Goldberg (1984, 157) überträgt die *Methode des dialogischen Beweisenlehrens* von Vollrath (1969), Vollrath (1968) resp. Vollrath (1967) auf das *beispielgebundene Begründen* in der 7. Klasse. Die beispielgebundenen Beweise von Sätzen der Arithmetik und Geometrie sollen auch bei ihr in einem Streitgespräch zwischen Schüler (als *Proponenten*) und zweifelndem Lehrer (als *Opponenten*) entwickelt werden. Wenn der Lehrer seine Beispiele so auswähle, dass der Rechenaufwand groß wird, sei der Schüler Goldberg (1984, 155) zufolge dazu veranlasst, "sich eine Gewinnstrategie zu erarbeiten, nach der er den Dialog für weitere Beispiel auch ohne Rechenaufwand gewinnen kann." In Anwendung der Methode von Vollrath übernimmt Goldberg (1984, 157) dessen Vorgehen insoweit, als dass jeder Schüler dazu aufgefordert wird, so viele Beispiele zu untersuchen, wie dieser selbst brauche, "um die Zusammenhänge erkennen und begründen zu können".

beispielgebundenes Beweisen als Vorstufe formalen resp. formellen Beweisens

Goldberg (1984, 154) sieht das *beispielgebundene Begründen* in ihrer nachstehend noch vorgestellten Definition als Vorstufe des formalen (und auch formellen) Beweisens an. Die Schüler würden vermöge des *beispielgebundenen Begründens* von der "Ebene der mittelbaren Anschauung" allmählich zur "Ebene des abstrakt-verbalen Denkens" übergehen. Goldberg (1984, 163, H.i.O.) klassifiziert "mögliche Niveaus der Fähigkeiten im beispielgebundenen Begründen" der Schüler im (beispielgebundenen) Beweisen, um schließlich den Lehrern an den Schulen eine entsprechende Notenskala an die Hand zu geben, (↑ Abs. 1.1.2).

Bezüge zur vorliegenden Forschungsarbeit

Für die nachstehenden eigenen empirischen Untersuchungen ist am Ansatz von Goldberg resp. Vollrath zum einen relevant, dass sich das (beispielgebundene) Beweisen im Dialog zwischen Lehrer (resp. Interviewer) und Schüler entwikkelt, dabei also ein Kommunikationsprozess mit einer notwendigen Versprachlichung der Beweisideen abläuft. Zum anderen stellt sich die Frage, ob das *beispielgebundene Begründen* als Methode bzw. "Gewinnstrategie" (s.o.) und Vorstufe zum formalen Beweisen angesehen werden kann, und welche Rolle die dazu offenbar notwendigen initialen Beispiele spielen. Schließlich führt Goldberg (1992, 42) das in 7. Klassen empirisch untersuchte Aufgabenbeispiel vom Peripheriewinkel-Zentriwinkelsatz (d.h. Umfangswinkel-Mittelpunktswinkelsatz als Spezialfall des Außenwinkelsatzes) an, das wegen der guten Vergleichbarkeit auch in der vorliegenden Arbeit in ↑ Kap. 3.4 verwendet wird.

Beispielgebundenes Begründen nach Goldberg

Vor- und Rückwärtsarbeiten zum Einüben beweisrelevanter Tätigkeiten

In ihrem Artikel über das Beweisen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I führt Goldberg (1992) für das *beispielgebundene Begründen* einen Beweis des Peripheriewinkel-Zentriwinkelsatzes (Umfangswinkel-Mittelpunktswinkelsatzes) an, der in einem Unterrichtsgespräch erarbeitet wird (s.u.). Die Schüler sollen zuvor zum "Training einzelner beweisrelevanter Tätigkeiten" mehrere vorbereitende Aufgaben zum Vor- und Rückwärtsarbeiten erhalten, die Goldberg (1992) folgendermaßen beschreibt:

> "*a) zum Rückwärtsarbeiten*
> Woraus würde folgen, daß – zwei Winkel gleich groß sind?
> (mögliche Antworten: ... daraus, daß sie Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind, entsprechende Winkel in kongruenten Dreiecken sind, Peripheriewinkel über demselben Bogen sind, Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind, Gegenwinkel im Parallelogramm sind, oder ...); (...)
>
> *b) zum Vorwärtsarbeiten*
> – Ein Dreieck hat zwei gleichgroße Innenwinkel. Was folgt daraus?
> (Zwei Seiten sind gleich groß; die Winkelhalbierende des dritten Winkels ist Symmetrieachse.)"
>
> (Goldberg, 1992, 38f.)

Das "Training einzelner beweisrelevanter Tätigkeiten" ist im Verständnis nach Goldberg (1992, 39) zunächst nicht auf einen bestimmten Beweis bezogen, sondern dient dazu, dass die Schüler die einzelnen Beweisschritte an einfachen Beispielen einüben (vgl. hierzu die Einzelfallstudie in ↑ Kap. 3.4). Diese exemplarischen Strategien sollen Goldberg (1992, 41) zufolge nicht als zusätzlicher Lehrstoff vermittelt werden. Die Autorin beschreibt an der Aufgabenstellung vom Peripheriewinkel-Zentriwinkelsatz, wie jeweils einzelne Sätze und Definitionen als "Beweismittel" beim Lösen von einführenden Aufgaben vor dem Erarbeiten eines komplexen Beweises verwendet werden können (↑ Abb. 1.11). Durch das Lösen dieser Aufgaben würden die einzelnen Sätze und Definitionen in einem ähnlichen Zusammenhang aufbereitet, wie sie dann später im Beweis benötigt würden.

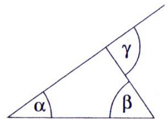
Goldbergs Unterrichtsbeispiel zum Umfangswinkel-Mittelpunktswinkelsatz

Wie bereits eingangs angesprochen, übernimmt Goldberg (1992, 43) bei ihren empirischen Untersuchungen die auf Vollrath zurückgehende *Methode des dialogischen Beweisenlehrens* zur Untersuchung des beispielgebundenen Beweisens in der Schulsituation. Zu Beginn des Unterrichts- bzw. Streitgesprächs fordert der Lehrer die Schüler dazu heraus, den Peripheriewinkel-Zentriwinkelsatz zu beweisen. Ausgehend vom Winkel $x° = 40°$ soll der Winkel α berechnet werden und schließlich der Beweis der behaupteten Formel $\alpha = 2 \cdot x°$ für ein beliebiges x zwischen 0 und 90 erarbeitet werden (↑ Abb. 1.12).

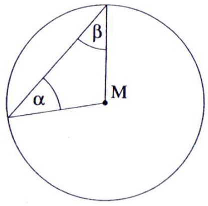
Man kann dieses Unterrichtsgespräch so interpretieren, dass die Behauptung $\alpha = 2 \cdot x°$ durch die Eingangsfrage des Lehrers noch nicht im Raum steht –

Beispiel 4:

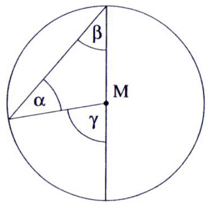
a) gegeben: $\alpha = 20°$; $\beta = 40°$
gesucht: γ
Lösung: $\gamma = 20° + 40° = 60°$
(Außenwinkelsatz)



b) gegeben: $\alpha = 15°$
gesucht: β
Lösung: $\beta = \alpha = 15°$
(Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)



c) gegeben: $\alpha = 30°$
gesucht: γ
Lösung: 1. $\beta = \alpha = 30°$
(Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)
2. $\gamma = 30° + 30° = 60°$
(Außenwinkelsatz)



d) gegeben: $\beta = 27°$
gesucht: α
Lösung: $\alpha = 27°$
(Peripheriewinkelsatz)

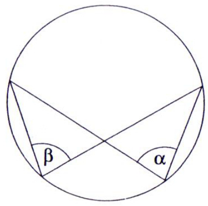


Abb. 1.11: Vorübungen aus Goldberg (1992, 40)
als "Beweismittel" zum Erarbeiten komplexer Beweise

vielmehr stellt der Lehrer den Schülern zunächst eine *Berechnungsaufgabe* im Sinne von Holland (2007, 152ff.). Damit mag die Hoffnung verbunden sein, dass die Schüler bei der Bearbeitung der angeführten Beispiele die Behauptung entdecken, an einigen Beispielen induktiv prüfen und schließlich (beispielgebunden) beweisen (vgl. Entdecken und Prüfen mit latenter Beweisidee in ↑ Abs. 1.3.3 und ↑ Abs. 1.3.5). Um das Beweisbedürfnis der Schüler nach Entdecken der Behauptung zu wecken, tritt der Lehrer im Sinne des geschilderten *dialogischen Beweisenlehrens* als *advocatus diaboli* auf, indem er seine Schüler am kaum noch vorstellbaren Beispiel $\frac{1}{1000}°$ als Umfangswinkel zur Begründung der Behauptung auffordert (vgl. *small/big number* im Sinne von Harel & Martin (1986) in ↑ Abs. 1.1.2). Anschließend möchte der Lehrer mit $x°$ als unbestimmtem Umfangswinkel zur Formalisierung des Beweises überleiten.

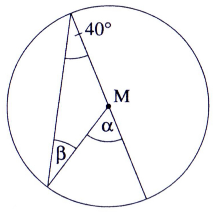
Goldbergs unterrichtspraktische Methode des beispielgebundenen Begründens

Goldberg beschreibt das *beispielgebundene Begründen* nicht als Sonderform des Beweisens an sich, sondern als unterrichtspraktische Methode, welche

> "allen Schülern ein Arbeiten auf der (mittelbar) anschaulichen Erkenntnisebene (Arbeiten mit Beispielen) und einen Übergang zur abstraktverbalen Ebene erlaubt. Der Zeitpunkt dieses Überganges ist dabei vom Schüler abhängig. Solange es für ihn sinnvoll ist, kann er in seiner selbständigen Tätigkeit auf der Ebene der Anschauung bleiben.

Unterrichtsgespräch.
Lehrer: Wie groß ist α, wenn der Peripheriewinkel 60° (30°, 10°, 22°, ...) groß ist? Begründe!

Nach einer gewissen – von der jeweiligen Klassensituation abhängigen – Zahl solcher Aufgaben erkennen die Schüler: α (der Zentriwinkel) ist immer doppelt so groß wie der zugehörige Peripheriewinkel.



Lehrer: Glaubt ihr wirklich, daß das für *alle* möglichen Größen des Peripheriewinkels gilt, z. B. auch wenn dieser ganz klein, etwa $\frac{1}{1000}^{\circ}$, ist?
Schüler: Ja, denn dann ist auch β $\frac{1}{1000}^{\circ}$, »weil es Basiswinkel sind«, und dann ist $\alpha = 2 \cdot \frac{1}{1000}^{\circ}$, weil »ein Außenwinkel eines Dreiecks immer so groß ist wie die beiden Innenwinkel zusammen«.
Lehrer: Und wenn wir gar nicht wissen, wie groß der Peripheriewinkel ist, wenn seine Größe z. B. x° beträgt?
Schüler: Dann ist auch $\beta = x^{\circ}$, »weil es Basiswinkel sind«, und dann ist $\alpha = 2 \cdot x^{\circ}$, weil . . .

Abb. 1.12: Reales Unterrichtsgespräch nach Goldberg (1992, 43)

> In den Schulversuchen wurde dies dadurch realisiert, daß jeder Schüler die Aufgabe bekam, erst einmal Beispiele (für jeden Fall mindestens eines) zu suchen und die Wahrheit der Ausage [sic!] für diese Beispiele zu überprüfen. Dabei soll jeder Schüler solange die Aussage an verschiedenen Beispielen überprüfen, bis er erkennt, *daß* und *warum* die Aussage wahr ist. Für diese Aufgabe bekamen die Schüler zwischen 5 und 10 Minuten Zeit. Erst anschließend wurde die Verallgemeinerung der Beispiele im Unterrichtsgespräch erarbeitet." (Goldberg, 1992, 42, H.i.O.)

Die Autorin hält das selbstständige Arbeiten der Schüler an Beispielen somit für unproblematisch. Sie vertraut darauf, dass die Schüler nach dem induktiven Prüfen einer gewissen Anzahl bearbeiteter Beispiele zu einer Begründung der allgemeinen Behauptung finden, die der verifikativen wie explanativen Beweisfunktion gleichermaßen genügt (vgl. hierzu ↑ Abs. 1.1.1). Die Autorin schränkt jedoch ein:

> "Nicht allen Schülern wird bei jedem beispielgebundenen Begründen der Übergang zur abstrakt-verbalen Ebene gelingen (manchem Schüler wird es in Klasse 7 noch gar nicht und manchem Schüler sehr schnell gelingen). Aber jeder Schüler kann sich mit dem jeweiligen Problem aktiv auseinandersetzen und Erkenntnisse auf der für ihn geeigneten Ebene gewinnen." (Goldberg, 1992, 42)

Die Autorin spricht hier und im vorangegangenen Zitat von einem unterschiedlich ausgeprägten Arbeiten der Schüler auf anschaulicher und abstrakt-verbaler Ebene. Das *beispielgebundene Begründen* sieht sie dabei als eine mögliche Vorform des formalen Beweisens an. Wie vorab in ↑ Abs. 1.1.2 beschrieben, macht Goldberg (1984, 163, 177, H.i.O.) überdies verschiedene "(Niveaus der) Fähigkeiten im beispielgebundenen Begründen" der Schüler aus, die dann einer Notenskala zugeordnet werden. Goldberg (1992, 43) merkt in ihrer Erörterung

Vorteile der Methode des beispielgebundenen Begründens

des in ↑ Abb. 1.12 angeführten realen Unterrichtsgesprächs als unterrichtspraktische Vorteile "gegenüber den auf 'herkömmliche' Art geführten Beweisen" an:

> "– Bei Unterrichtsversuchen in mehreren 7. Klassen zum beispielgebundenen Erarbeiten des Zentriwinkel-Peripheriewinkelsatzes waren jeweils alle Schüler in der Lage, die Beispiele zu verallgemeinern und den Beweis verbal zu formulieren. (...)
> – Die Schüler empfanden das Beweisen in diesem Fall als leicht, und die Stunde hat ihnen Spaß gemacht.
> – Alle Schüler können am Erarbeiten des Beweises aktiv beteiligt werden.
> – Jeder Schüler kann so lange mit Beispielen arbeiten, bis ihm selbst die Verallgemeinerung gelingt (innere Differenzierung!)" (Goldberg, 1992, 43)

Definition beispielgebundenen Begründens nach Goldberg [1992]

Abgesehen von den mehr unterrichtspraktischen Gesichtspunkten hat Goldberg aber auch den Versuch unternommen, eine Definition *beispielgebundenen Begründens* zu geben. Dabei sind für sie die Anzahl und die Auswahl der bearbeiteten Beispiele von großer Bedeutung:

> "(...) Beispielgebundenes Begründen bedeutet also:
>
> Durch das Bearbeiten vieler (die nötige Zahl ist individuell verschieden) Beispiele wird der Beweisgedanke vorbereitet.
>
> Die Beispiele müssen so gewählt werden, daß alle Fälle erfaßt und einzeln bearbeitet werden können. (Es muß eine *repräsentative Beispielauswahl* erfolgen, d.h. *vollständige* Fallunterscheidung.)
>
> Im Laufe der Bearbeitung muß von den einzelnen Beispielen eines Falles abstrahiert werden und gedanklich das herausgearbeitet werden, *was alle Beispiele* dieses Falles *gemeinsam* haben und was das Wesen der zu beweisenden Behauptung betrifft.
>
> Dadurch gelangt man zu der Überzeugung, daß diese Behauptung *immer gelten muß*. Als Begründung formuliert man den Gedanken 'Das muß ja immer so sein, denn ...'." (Goldberg, 1992, 42, H.i.O.)

Kritik an Goldbergs *Definition des beispielgebundenen Begründens*

Diese aus der Unterrichtserfahrung resultierende Definition erweckt den Eindruck, als ob nur die Anzahl der Beispiele erhöht werden muss, bis auch der letzte Schüler den Übergang zur abstrakt-verbalen Erkenntnisebene selbstständig bewältigt. Wenn nachträglich alle Schüler den beispielgebundenen Beweis führen können, stellt sich die Frage, ob die Schüler den beispielgebundenen Beweis vielleicht nur im nachfolgenden Unterrichtsgespräch schematisch zu formulieren gelernt haben und nicht schon vorher bei ihrer selbstständigen Arbeit an den Beispielen. Wie im von Goldberg (1992, 43) in ↑ Abb. 1.12 angeführten Unterrichtsgespräch stellt sich zudem die Frage, wann die Behauptung als zu beweisender Satz eingeführt wird, d.h. ob der Satz entdeckt oder zur Prüfung und zum Beweis vorgegeben wird. Hierin zeigen sich mithin verschiedene Zugangsmöglichkeiten zum (beispielgebundenen) Beweisen, wie sie in ↑ Kap. 1.3 behandelt werden.

Implikationen für das beispielgebundene Beweisen

Kritik am methodischen Ansatz GOLDBERGs

Aus theoretischer Sicht wirft GOLDBERGs Darstellung *beispielgebundenen Begründens* als eine mögliche Vorform des formalen Beweisens und ihre daraus resultierende Klassifizierung von Fähigkeitsniveaus Lernender Fragen auf: Es bleibt etwa offen, wie sich beim Lernenden jener Übergang von der "Ebene der mittelbaren Anschauung" zur "Ebene des abstrakt-verbalen Denkens" (s.o.) vollzieht und wie die Autorin die genannten Ebenen auffasst. Wie in ↑ Kap. 1.5 der vorliegenden Arbeit dargelegt wird, lässt sich unter diesem Übergangsphänomen durchaus eine allmähliche kognitive Realisierung und Manifestierung des beispielgebundenen Beweises als latente Sinnstruktur verstehen. GOLDBERG hingegen sieht das *beispielgebundene Begründen* nicht als einen ungerichteten, changierenden Prozess zwischen induktivem Prüfen und formalem Beweisen an, sondern als Vorform formalisierbaren Beweisens. Die Lernenden sollen daran gemessen werden, welche Stufe sie auf der Skala vom induktiven Prüfen bis zum voll entfalteten formalisierten Beweisen erreichen, was das eigentliche Lernziel darstelle. GOLDBERG (1984, 161) geht dabei von der Unabänderlichkeit des Beweisgedankens im Beispiel und auf formaler Ebene aus. Diese Fixierung ist beim Vorliegen mehrerer Beweisvariationen hinderlich. Wie die Aufgabenstellung zum gegensinnigen Verändern in ↑ Kap. 3.1 zeigt, braucht ein beispielgebundener Beweis aber auch nur bedingt formalisierbar zu sein, wie es umgekehrt auch nicht zu jedem formalen Beweis eine beispielgebundene Entsprechung geben muss.

Bearbeiten von Beispielen

Ist GOLDBERG zu optimistisch, wenn sie im Bearbeiten möglichst vieler Beispiele beim beispielgebundenen Beweisen eine Möglichkeit dafür sieht, dass der Lernende dadurch das Allgemein(gültig)e in den besonderen Beispielen erkenne? Es steht zu befürchten, dass sich mancher Lernende in der Vielzahl von zu bearbeitenden Beispielen verlieren kann, deren latente Strukturmerkmale dann aus dem Blick geraten (vgl. hierzu die Einzelfallstudie in ↑ Kap. 3.4). Das Rechnen mit zum Teil immer komplizierteren Beispielen kann in den Vordergrund treten und bietet bloß in diesem Sinne noch eine Herausforderung. Anders gesagt, besteht bei fortgesetzten induktiven Prüfungen die Gefahr einer Algorithmisierung. Und die Wiederholung vieler Beispiele kann selbst bei schon gelungener Formalisierung des Beweises dazu führen, dass dieser zu einer bloß schematisch-formalisierten Darstellung im Sinne eines Variablenkalküls herabsinkt. Etwa kann der Schüler im obigen Unterrichtsgespräch zwar 40° formal durch $x°$ ersetzen, möglicherweise denkt er aber noch immer an 40°. Eine Erklärung für ein solches Szenarium kann nach KRUMSDORF (2009b, 11) darin liegen, dass der Schüler das induktive Prüfen mit einer Vielzahl an Beispielen für die Erkenntnissicherung als schon ausreichend betrachtet.

unterrichtspraktische Fragen

Vom unterrichtspraktischen Standpunkt her bleibt offen, wann und wie die entsprechende Behauptung zum beispielgebundenen Beweisen eingeführt werden soll. Hier verfährt die Autorin überdies uneinheitlich: So gibt der Lehrer in der Mehrzahl der Aufgabenbeispiele die Behauptungen für zu beweisende Sätze in GOLDBERG (1984) bzw. GOLDBERG (1992) als *Opponent* vor, im hier vorgestellten Unterrichtsgespräch sollen die Schüler jedoch nach entsprechenden Vorübungen begründen. Die Behauptung wird erst noch entdeckt, dann ggf. an mehreren Beispielen geprüft und schließlich (beispielgebunden) bewiesen. GOLDBERG thematisiert den passenden Zeitpunkt der Einführung der Behauptung bloß implizit, wenn sie schreibt:

> "Am obigen Beispiel des Peripheriewinkelsatzes etwa sieht man, daß etwas bewiesen wurde, von dem man noch gar nicht so genau weiß, was es ist. Die Voraussetzung muß nachträglich durch eine allgemeine Beschreibung der zur Aufgabenstellung verwendeten Figur gewonnen werden." (Goldberg, 1992, 43f.)

Wie im nachfolgenden ↑ Kap. 1.3 gezeigt wird, eignet sich der Begriff der Latenz eines Beweises, um dieses praktische Problem klarer zu formulieren. Relevant ist dies für die Durchführung der Einzelfallstudien in ↑ Teil 3 dieser Arbeit.

Anregungen zur Durchführung der eigenen Studien

Trotz der vorgebrachten Kritik bieten die Studien Goldbergs wichtige Anknüpfungspunkte zur Durchführung der eigenen Untersuchungen des beispielgebundenen Beweisens, gerade auch für das vorliegende Aufgabenbeispiel des Umfangswinkel-Mittelpunktswinkelsatzes (resp. des Außenwinkelsatzes). Erstens kann das von Goldberg aufgeworfene Übergangsphänomen in der Betrachtung des beispielgebundenen Beweises als latente, subjektiv realisierte bzw. manifeste Sinnstruktur empirisch untersucht werden. Zweitens lässt sich dabei die von Vollrath herrührende *Methode des dialogischen Beweisenlehrens* als Kommunikationsweise einsetzen, bei der die Schüler durch den zweifelnden Lehrer resp. Interviewer zum (beispielgebundenen) Beweisen herausgefordert werden. Besteht die Gefahr, dass sich die Schüler in zu vielen Beispielen verlieren und sich ihr induktives Prüfen algorithmisiert, können die Schüler etwa durch Rückwärtsarbeiten dazu angeregt werden, die strukturellen allgemeineren Aspekte des Aufgabenbeispiels schon zu Beginn stärker in den Blick zu nehmen. Auch dies wird etwa in der vorliegenden Einzelfallstudie in ↑ Kap. 3.4 an der ähnlich konzipierten Aufgabenstellung des Umfangswinkel-Mittelpunktswinkelsatzes (Außenwinkelsatzes) versucht. Goldberg (1984, 155f.) zufolge kann der Lehrer als Moderator zur "Auswahl repräsentativer Beispiele" bzw. zur Wahl von Beispielen anregen, bei denen "der Rechenaufwand sehr groß wird" (vgl. *big/small number* im Sinne von Martin & Harel (1989) in ↑ Abs. 1.1.2). Wie eingangs erwähnt, geschieht Letzteres in der Hoffnung, dass die Schüler eine strukturierte Sicht auf die Beispiele als Gewinn betrachten. Erleichtert werden kann dies etwa durch bedingt vorstellbare Beispiele wie $x^\circ = \frac{1}{1000}^\circ$, bei denen einerseits der Rechenaufwand unverhältnismäßig groß werden würde, und die sich andererseits einer anschaulichen Betrachtung weitgehend entziehen.

---

kritische Fragen

Die Diskussion der Arbeit von Goldberg (1992) bietet vielfältige Ansatzpunkte für die praktische Durchführung des beispielgebundenen Beweisens. Zusammenfassend geben die Ausführungen Goldbergs zu folgenden Fragen Anlass:

- Besteht durch das induktive Prüfen an einer Vielzahl von Beispielen die Gefahr einer Algorithmisierung? Wird hierdurch das Erkennen struktureller Beweisaspekte wohlmöglich erschwert?
- Erscheint den Schülern das induktive Prüfen an einer Vielzahl von Beispielen bereits als ausreichende Erkenntnissicherung? Verstehen die Schüler das mathematikspezifische Beweisen dann eher als ein naturkundliches / induktives Verfahren?
- Gibt es auch beispielgebundene Beweise, die eine Formalisierung nicht zulassen, oder formalisierte Beweise, zu denen es keine beispielgebundene Entsprechung gibt?
- Wie können Lernende den von GOLDBERG (1984, 154) genannten Übergang von der "Ebene der mittelbaren Anschauung" zur "Ebene des abstrakt-verbalen Denkens" bewältigen? Wie kann der Gefahr begegnet werden, dass sie den Beweis bloß schematisch formulieren? Wie lässt sich erreichen, dass die Lernenden den Beweis formal führen und sich dabei auch der Allgemeinheit ihrer Argumente bewusst sind?

Anregungen für die Durchführung der eigenen Studien

Die Ausführungen GOLDBERGs können darüber hinaus zur Untersuchung der folgenden Fragen anregen:

- Sind Vorübungen zum Einüben "beweisrelevanter Fähigkeiten" (GOLDBERG, 1992, 39) ein geeignetes Mittel, um die Schüler auf das beispielgebundene Beweisen vorzubereiten?
- Wie kann die *Methode des dialogischen Beweisenlehrens* im Interview bzw. unterrichtspraktisch umgesetzt werden?
- Soll die fragliche Behauptung entdeckt oder von Seiten des Interviewers resp. des Lehrers vorgegeben werden, damit die Schüler zum beispielgebundenen Beweisen gelangen?
- Wie gehen die Schüler in geometrischen Kontexten mit einer Beweisfigur um? Sehen sie diese als allgemein zu denkende Überlegungsfigur und/oder als konkretisierte Überlegungsfigur für ihre Argumente im Beispiel an?
- Wie kann der Lehrer jene wünschenswerte Auswahl repräsentativer Beispiele vornehmen, um Schüler zum beispielgebundenen Beweisen anzuregen?
- Welche Rolle spielt das von GOLDBERG angesprochene Rückwärtsarbeiten für das beispielgebundene und formale Beweisen?

Einige der vorstehenden Fragen werden als Forschungsfragen in ↑ Kap. 2.1 aufgegriffen. Zur Untersuchung der Thesen GOLDBERGs am Aufgabenbeispiel des Umfangswinkel-Mittelpunktswinkelsatzes (Außenwinkelsatzes) sei direkt auf die Einzelfallstudie in ↑ Kap. 3.4 verwiesen.

1.3 Entdecken, Prüfen und Begründen

beispielgebundenes Beweisen i.w.S.

Während des beispielgebundenen Beweisens im weiteren Sinne (i.w.S.) kann der Lernende eine fragliche Behauptung entdecken, prüfen oder begründen. Dabei können die Ausführungen des Lernenden mehr oder weniger am Beispiel gebunden sein und die Allgemeingültigkeit seiner Argumente soweit erkennen lassen, dass man sagen kann, der Lernende führe einen (beispielgebundenen) Beweis. Zur Präzisierung dessen, was Entdecken, Prüfen und Begründen jeweils für sich genommen logisch heißt, eignet sich eine von PEIRCE (1960) stammende Einteilung von Schlussformen in Abduktion, Induktion und Deduktion. Nach MEYER (2007, 40ff.) charakterisiert die Schlussform Abduktion das Entdecken, die Schlussform Induktion das Prüfen und die Schlussform Deduktion das Begründen. Auch hier wird das Entdecken, Prüfen und Begründen terminologisch auf einen mathematischen Erkenntnisprozess (wie das beispielgebundene Beweisen) bezogen. Dem Universalitätsanspruch der philosophischen Theorie der Schlussformen nach wird diese Theorie auch in anderen Bereichen angewandt, z.B. in Wissenschaftstheorie, Kriminologie oder medizinischer Diagnostik.

Schlussformen Abduktion, Induktion, Deduktion nach PEIRCE [1960]

Entdecken/Prüfen/Begründen

Nachfolgend geht es um das Entdecken, Prüfen und Begründen von Behauptungen. Relevant ist diese Theoriebildung in Hinblick auf die entdeckenden und prüfenden Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen im engeren Sinne (i.e.S.). Zunächst wird das Begründen per Deduktion (↑ Abs. 1.3.1) und anschließend das Entdecken per Abduktion (↑ Abs. 1.3.2) behandelt. Für das beispielgebundene Beweisen spielt das Entdecken mit latenter Beweisidee eine besondere Rolle (↑ Abs. 1.3.3). Entsprechend wird das Prüfen per Induktion thematisiert (↑ Abs. 1.3.4) und im Prüfen mit latenter Beweisidee vertieft (↑ Abs. 1.3.5).

beispielgebundenes Beweisen i.e.S.

1.3.1 Begründen per Deduktion

- Leitbeispiel zweite Potenzregel
- Deduktion und beispielgebundenes Beweisen

1.3.2 Entdecken per Abduktion

- Alltagsbeispiel
- Abduktionstypen
- Entdeckung der zweiten Potenzregel per Abduktion

1.3.3 Entdecken mit latenter Beweisidee

- Vergleich des Entdeckens ohne und mit latente(r) Beweisidee
- Entdecken mit latenter Bew.idee und beispielgebundenes Beweisen

1.3.4 Prüfen per Induktion

- Alltagsbeispiel
- PEIRCEscher Dreischritt
- Induktionstypen

1.3.5 Prüfen mit latenter Beweisidee

- Vergleich des Prüfens ohne und mit latente(r) Beweisidee
- Prüfen mit latenter Beweisidee und beispielgebundenes Beweisen

1.3.1 Begründen per Deduktion

Schlussform Deduktion

Bei der Deduktion wird von einem spezifischen Fall vermöge eines bekannten, allgemeingültigen Gesetzes auf ein spezifisches Resultat geschlossen (vgl. MEYER & VOIGT (2009b, 38)):

Fall	$F(x_0)$
Gesetz	$\forall x\colon F(x) \Rightarrow R(x)$
Resultat	$R(x_0)$

Die Deduktion ist im Gegensatz zur Abduktion und Induktion ein wahrheitsübertragender Schluss, d.h. das Schließen von einem spezifischen Fall auf ein spezifisches Resultat erfolgt denknotwendig mittels eines allgemeingültigen Gesetzes.

Leitbeispiel zweite Potenzregel

Leitbeispiel zweite Potenzregel

Zur Verdeutlichung wird im mathematischen Kontext nachstehend das Leitbeispiel der zweiten Potenzregel (für Potenzen mit gleichen Exponenten) verwendet, da sich daran später auch das beispielgebundene Beweisen gut darstellen lässt (↑ Kap. 1.5 und ↑ Kap. 3.5). Beweis, Entdeckung und Prüfung lassen sich einfach verstehen, zeigen mit den Schlussformen nach PEIRCE aber auch ihre Komplexität. Anders als etwa der Satz von PYTHAGORAS können die Potenzregeln schrittweise verallgemeinert werden, wie es auch in der Schulpraxis üblich ist. Dies ist gerade für das beispielgebundene Beweisen wichtig. Die Potenzregeln stehen jeweils exemplarisch für einen beweisbaren Satz. MEYER & VOIGT (2009b, 36ff.) benutzen in diesem Zusammenhang die erste Potenzregel (für Potenzen mit gleichen Basiszahlen) auf ganz ähnliche Weise.

Zweite Potenzregel	Wenn zwei Potenzen den gleichen Exponenten besitzen, a^n und b^n mit $a, b, n \in \mathbb{N}$, dann ist ihr Produkt $a^n \cdot b^n$ gleich $(a \cdot b)^n$.

Die Gleichungskette

$$a^2 \cdot b^2 \overset{pd}{=} (a \cdot a) \cdot (b \cdot b) \overset{ak}{=} (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{pd}{=} (a \cdot b)^2 \quad \forall\, a, b \in \mathbb{N}$$

ist ein formell gehaltener Beweis der zweiten Potenzregel für den Spezialfall $n = 2$. Dabei ist in *pd* jeweils die Potenzdefinition und in *ak* das Assoziativ- und Kommutativgesetz benutzt worden. Als Deduktionskette ausgeschrieben heißt dies (unter Einführung eines jeweils Aussagen herstellenden Hilfsterms T):

Deduktionskette

$T := a^2 \cdot b^2 \overset{pd}{\Rightarrow} T = (a \cdot a) \cdot (b \cdot b) \overset{ak}{\Rightarrow} T = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{pd}{\Rightarrow} T = (a \cdot b)^2$

Der letzte Schritt dieser Deduktionskette kann wie folgt dargestellt werden (vgl. auch Meyer & Voigt (2009b, 38)):

Fall	$T = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$
Gesetz	$\forall\, p, n \in \mathbb{N} : (\underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{n \text{ Faktoren } p}) =: p^n$ (Definition der Potenz)
Resultat	$T = (a \cdot b)^2$

Um das Gesetz auf den Fall anzuwenden, wird dabei das Wissen genutzt, dass ein Produkt natürlicher Zahlen wieder eine natürliche Zahl ist (Abgeschlossenheit von $\mathbb{N}$ bezüglich der Multiplikation). Solche algebraischen Finessen sollen im Folgenden unberücksichtigt bleiben. Alle Deduktionsschritte zusammengenommen, erhält man schließlich (unter Weglassen der Hilfsvariablen T) als verkürzte Darstellung den folgenden Schluss:

Fall	Zwei Potenzen besitzen den gleichen Exponenten, a^2 und b^2 mit $a, b \in \mathbb{N}$
Gesetz	Assoziativ- und Kommutativgesetz, Potenzdefinition
Resultat	$a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$ (Zweite Potenzregel für $n = 2$)

Eigenschaften des Gesetzes

Das jeweilige Gesetz ist bei den Deduktionen bekannt, von allgemeiner Gültigkeit und auf den spezifischen Fall anwendbar, um das jeweilige spezifische Resultat zu erhalten. Das Gesetz kann auch als Definition (wie hier als Potenzdefinition) vorliegen oder als Satz (wie hier als Assoziativ- oder Kommutativgesetz) auftreten.

Darstellung von Deduktionen

Zum Führen einer Deduktion ist zudem keine formell gehaltene Darstellung wie in der obigen Deduktionskette notwendig.

Deduktion und beispielgebundenes Beweisen

Fall und Resultat können ganz im Beispiel gehalten sein, wie etwa bei Setzung von $a = 3$, $b = 4$ im betrachteten Leitbeispiel. Dann nimmt die zugehörige Gleichungskette die folgende Gestalt an:

$3^2 \cdot 4^2 \overset{pd}{=} (3 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 4) \overset{ak}{=} (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4) \overset{pd}{=} (3 \cdot 4)^2$

beispielgebundenes Beweisen für $n = 2$

Wenn angenommen werden kann, dass der Lernende von der Besonderheit der verwendeten Basiszahlen $a = 3$, $b = 4$ absieht und entsprechend verbalisiert, dass seine deduktiven Schlüsse unabhängig von der Wahl der Basiszahlen sind, führt er einen beispielgebundenen Beweis der Potenzregel für den Spezialfall $n = 2$. Wenn einiges überdies dafür spricht, dass der Lernende auch von der Besonderheit des verwendeten Exponenten $n = 2$ absieht und entsprechend verbalisiert, dass seine deduktiven Schlüsse sogar unabhängig von der Wahl des Exponenten sind, führt er einen beispielgebundenen Beweis der Potenzregel für das allgemeine $n \in \mathbb{N}$. Die Umformungen in der Gleichungskette sind dabei komplexer als für den Spezialfall $n = 2$, und die einzelnen deduktiven Schlüsse in der Deduktionskette schwieriger zu ziehen. Schließlich kann der Lernende noch mehr als zwei Potenzen mit gleichen Exponenten oder Exponenten aus $\mathbb{Z}$ usw. betrachten und seine deduktiven Schlüsse fortschreitend verallgemeinern.

beispielgebundenes Beweisen für $n \in \mathbb{N}$

Ein Satz wie die zweite Potenzregel kann am Beispiel per Abduktion generiert (entdeckt) werden oder per Induktion an Beispielen plausibler gemacht werden. Im Folgenden wird in Anlehnung an Meyer (2007, 31ff.) diskutiert, wie das Entdecken per Abduktion (↑ Abs. 1.3.2) und das Prüfen per Induktion (↑ Abs. 1.3.4) logisch gefasst werden kann. Von besonderer Bedeutung für das beispielgebundene Beweisen des Gesetzes sind Zugänge über das Entdecken mit latenter Beweisidee (↑ Abs. 1.3.3) und des Prüfens mit latenter Beweisidee (↑ Abs. 1.3.5), wie sie von Meyer & Voigt (2008, 140f.) und Meyer & Voigt (2009b, 48f., 55f.) dargestellt werden. Diese Sonderformen des Entdeckens und Prüfens haben sich als didaktisch produktiv herausgestellt und stehen in engem theoretischen Zusammenhang zum beispielgebundenen Beweisen.

Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen

1.3.2 Entdecken per Abduktion

Schlussform Abduktion

Peirce (1960, CP 5.189, 117) benutzte zur universellen Beschreibung der Abduktion den rechten Teil des folgenden Schemas, das Meyer & Voigt (2009b, 35) um die linksstehende, formelle Darstellung ergänzt haben (vgl. Meyer (2007, 40ff.) zu dessen ausführlicher Herleitung):

Resultat	$R(x_0)$	”The surprising fact, C, is observed;”
Gesetz	$\forall x$: $F(x) \Rightarrow R(x)$	”But if A were true, C would be a matter of course,”
Fall	$F(x_0)$	”Hence, there is reason to suspect that A is true.”

Nach Meyer & Voigt (2009b, 35) markiert die Beobachtung eines überraschenden Phänomens (altgr. φαινόμενον – *etwas, das sich zeigt, erscheint*) den Ausgangspunkt für eine Abduktion. Für das überraschende, spezifische Phänomen wird per Abduktion eine mögliche Erklärung gesucht. Das spezifische

überraschendes Resultat, unterstelltes Gesetz, erklärender Fall

Phänomen wird auf einen spezifischen Fall vermöge eines unterstellten, allgemeingültig angenommenen Gesetzes zurückgeführt, gleichsam abduziert. Umgekehrt kann das ursprünglich überraschende, beobachtete Phänomen nunmehr als Resultat einer deduktiven Anwendung dieses Gesetzes auf den erklärenden Fall erscheinen. Die Statuierung des zugrundeliegenden Gesetzes und damit des erklärenden Falls erfolgt dabei versuchsweise, genauer gesagt hypothetisch: Wird nämlich ein dem Resultat zugrundeliegendes anderes Gesetz angenommen, ergibt sich häufig auch ein anderer erklärender Fall. Damit ist die Abduktion beschrieben als Schluss von einem beobachteten Phänomen auf einen möglicherweise erklärenden, aber nicht sicheren Fall vermöge eines hypothetisch unterstellten, zugrundeliegenden allgemeingültigen Gesetzes. Das Phänomen kann der Betrachter durch einen Perspektivenwechsel nunmehr als Resultat (als Wirkung, Folge, Symptom) eines erklärenden Falls in deduktiver Anwendung des unterstellten Gesetzes verstehen.

Alltagsbeispiel

Alltagsbeispiel nasse Straßen

Als illustrierendes Alltagsbeispiel werde angenommen, ein Mädchen aus der Sahara lande zu später Stunde das erste Mal in seinem Leben mit dem Flugzeug in mitteleuropäischen Breiten und stelle beim Heraustreten aus dem Flughafenterminal fest, dass die Straße davor nass ist. Es führe dieses gemeinhin mehr oder weniger überraschende Phänomen darauf zurück, dass ein vorbeigefahrenes Reinigungsfahrzeug die Straße gesäubert haben muss, wie es auch vor dem Abflug am heimatlichen Flughafen geschah. Das Mädchen kann also das hypothetische Gesetz assoziieren, dass Straßen nass werden, wenn Reinigungsfahrzeuge Straßen säubern:

Resultat	Die Straße vor dem Flughafenterminal ist nass.
Gesetz	Wenn Reinigungsfahrzeuge Straßen säubern, werden diese nass.
Fall	Ein Reinigungsfahrzeug hat diese Straße gesäubert.

Das Mädchen wäre möglicherweise erstaunt, wenn es erfahren würde, dass es vielleicht auch geregnet haben könnte, und dass die meisten Menschen das Phänomen der nassen Straße eher auf diesen Fall zurückführten. Viele Mitteleuropäer würden – etwa bei ihrer Rückkehr aus einem sonnigen Urlaub in südlicheren Breiten – eher das für sie selbstverständliche Gesetz assoziieren, dass Straßen nass werden, wenn es regnet. Wenn die gegenüberliegende Straßenseite jedoch trocken zu sein scheint, wird nicht die Gültigkeit dieses Gesetzes selbst, aber dessen ursächliche Annahme in dieser Situation in Frage gestellt.

hypothetischer Charakter des Gesetzes

Das Alltagsbeispiel zeigt zum einen, dass das unterstellte Gesetz hypothetischen Charakter hat: Wenn Menschen ein Phänomen (nasse Straßen) zunächst wenig überraschend erscheint, da ein angenommener Fall (es regnet) und ein weithin bekanntes korrektes Gesetz (wenn immer es regnet, werden die Straßen nass) dieses Phänomen zu erklären scheint, dürfte sie die Zurückführung auf den wirklich eingetretenen Fall (Straßenreinigung) in der Unterstellung eines alternativen Gesetzes umso mehr in Erstaunen versetzen. Über diesen alternativen Fall mögen die Betrachter vielleicht mit einem *ach so?*, *huch?* oder *nanu?* ihre Verwunderung ausdrücken. Sie gelangen darüber aber zur Erkenntnis, dass ihre für sie bisher selbstverständliche Erklärung für das beobachtete Phänomen bloß eine Hypothese gewesen ist.

Moment der Verwunderung bei alternativen Fällen

Das Alltagsbeispiel zeigt zum anderen, dass der Lernende ein vorfindbares Resultat (nasse Straßen bei gutem Wetter mit geringer Luftfeuchte) zuweilen als überraschend empfinden kann, was ihm besonderen Anlass und Motivation zu dessen Erklärung zu geben vermag: Hat der Lernende dann (ein Indiz für) den erklärenden Fall gefunden (ein Reinigungsfahrzeug ist vorbeigefahren), befriedigt dies seine Entdeckerlust. Ausrufe von Lernenden wie *aha!*, *ich hab's!* oder *heureka!* (altgr. εὕρεκα – *ich habe gefunden*) legen dies nahe. Der Lernende stellt die Entdeckung häufig so überlegt dar, dass er das Resultat aus dem gefundenen Fall vermöge des unterstellten Gesetzes denknotwendig folgert (vgl. Meyer & Voigt (2009b, 49)). Die durchgeführte Abduktion wird also nachträglich als Deduktion präsentiert und damit der eigentliche Erkenntnisprozess verdeckt.

überraschend-motivierender Charakter des Resultats

Moment der Befriedigung bei Fallentdeckung

Abduktionstypen

Das bei der Abduktion unterstellte Gesetz muss dem Lernenden vorher nicht notwendigerweise bekannt sein. Insofern kann dieses zum überraschenden Resultat assoziierte Gesetz auch zusammen mit dem erklärenden Fall entdeckt werden. Man spricht dann nach Eco (1985, 301) von einer *kreativen Abduktion* (lat. *creare – erschaffen*). Dadurch, dass bei der kreativen Abduktion auch das Gesetz vom Lernenden entdeckt wird, ist nach Meyer (2007, 78) nicht nur seine Verwendung, sondern es auch selbst begründungsbedürftig. Dabei hängt es vom Wissensstand des Lernenden ab, ob dieser eine kreative Abduktion führt oder nicht. Ist dem Lernenden das Gesetz schon bekannt gewesen, mit dessen Hilfe er das Resultat einem erklärenden Fall zuführt, vollzieht er nach der von Meyer (2007, 46) geteilten Definition von Eco (1985, 299f.) eine über- resp. unterkodierte Abduktion.

mögliche Unbekanntheit des Gesetzes

kreative Abduktion

Entdeckung der zweiten Potenzregel per Abduktion

Im mathematischen Kontext wird nun wieder das Leitbeispiel der zweiten Potenzregel (für Potenzen mit gleichem Exponenten) herangezogen:

Leitbeispiel zweite Potenzregel

Zweite Potenzregel	Wenn zwei Potenzen den gleichen Exponenten besitzen, a^n und b^n mit $a, b, n \in \mathbb{N}$, dann ist ihr Produkt $a^n \cdot b^n$ gleich $(a \cdot b)^n$.

Während im vorangegangenen ↑ Abs. 1.3.1 die zweite Potenzregel bereits zu begründen war, wird nunmehr davon ausgegangen, dass sie zunächst entdeckt

Entdeckung der zweiten Potenzregel per Abduktion

werden soll. Zu ihrer Entdeckung kann man den Lernenden etwa dazu auffordern, die Terme $3^2 \cdot 4^2$ und $(3 \cdot 4)^2$ (mittels Taschenrechner) auszurechnen. Der Lernende kann die Gleichheit beider Terme rechnerisch zu 144 bestimmen und an dieser Gleichheit möglicherweise die Potenzregel entdecken, d.h. er kann eine Abduktion führen:

Resultat	$3^2 \cdot 4^2 = 9 \cdot 16 = 144$ stimmt überein mit $(3 \cdot 4)^2 = 12 \cdot 12 = 144$.
Gesetz	Zweite Potenzregel
Fall	Die Exponenten der Potenzen 3^2 und 4^2 sind gleich.

Um das überraschende Phänomen der Gleichheit der ausgerechneten Terme $3^2 \cdot 4^2$ und $(3 \cdot 4)^2$ zu erklären, hat der Lernende den spezifischen Fall finden können, dass die Exponenten in beiden Potenzen 3^2 und 4^2 gleich sind. Ist ihm die zweite Potenzregel als allgemeingültiges Gesetz vorher nicht bekannt gewesen, hat er diese zudem selbst entdeckt und insofern eine kreative Abduktion vollzogen. Die Termgleichheit hat er auf die Gleichheit der Exponenten in beiden Potenzen 3^2 und 4^2 zurückgeführt und damit das zum Resultat gewordene Phänomen vermöge des abduktiv gewonnenen, hypothetisch unterstellten Gesetzes durch den abduktiv erschlossenen Fall erklärt.

mögliche Verallgemeinerungen der zweiten Potenzregel

Der Lernende könnte auch in zu starker Verallgemeinerung der Potenzregel als verknüpfungsunabhängiges Gesetz unterstellen, dass nicht nur das Produkt $a^n \cdot b^n$ gleich $(a \cdot b)^n$, sondern auch die Summe $a^n + b^n$ gleich $(a + b)^n$ für alle $a, b, n \in \mathbb{N}$ sei. Dass diese Verallgemeinerung nicht so weit trägt, kann durch die Angabe eines Gegenbeispiels leicht gezeigt werden. Umgekehrt kann der Lernende in schwächerer Verallgemeinerung auch bloß unterstellen, dass allein das Produkt $a^2 \cdot b^2$ gleich $(a \cdot b)^2$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$ sei, d.h. die zweite Potenzregel nur für den Spezialfall $n = 2$ entdecken. In welchem Allgemeinheitsgrad ein Gesetz abduktiv generiert wird, hängt also davon ab, was der Lernende an Allgemeingültigem in der Besonderheit des Beispiels vermutet. Im vorliegenden Beispiel der Potenzregel wäre ein solches Gesetz zwar für noch umfassendere Zahlbereiche (etwa für negative ganze bis hin zu reellen Basiszahlen oder auch für rationale Exponenten) gültig, kaum aber für eine andere Verknüpfung (etwa $+$ statt $\cdot$). Im Prinzip sind also verschieden allgemein gehaltene Abduktionen zu einem Regelverband denkbar. Die Regeln können im Prozess des beispielgebundenen Beweisens fortschreitend verallgemeinert werden.

1.3.3 Entdecken mit latenter Beweisidee

Was das Entdecken (resp. Prüfen) mit latenter Beweisidee bedeutet, lässt sich am einfachsten aus einer Gegenüberstellung zum Entdecken (resp. Prüfen) ohne Beweisidee herauslesen. Hierzu wird wiederum das Leitbeispiel der zweiten Potenzregel verwendet.

Vergleich des Entdeckens ohne und mit latente(r) Beweisidee

Entdecken ohne latente Beweisidee

Zur Herstellung des überraschenden Phänomens der Termgleichheit wurden in der obigen Abduktion beim bloßen Ausrechnen der Terme $3^2 \cdot 4^2$ und $(3 \cdot 4)^2$ triviale Deduktionen geführt, indem Rechenoperationen wie das Potenzieren und das Multiplizieren zu deren Anwendung kommen:

Resultat	$3^2 \cdot 4^2 = 9 \cdot 16 = 144$ stimmt überein mit $(3 \cdot 4)^2 = 12 \cdot 12 = 144$.
Gesetz	Zweite Potenzregel
Fall	Die Exponenten der Potenzen 3^2 und 4^2 sind gleich.

Der Lernende mag die zweite Potenzregel auf diesem Wege abduktiv gewonnen haben, doch gibt dieser Weg zu deren Entdeckung – auch dann, wenn der Fall verbalisiert wird – nicht ohne weiteres zu erkennen, wie ihr zugehöriger Beweis aussehen könnte. Anders verhält es sich, wenn der Lernende beim Herstellen des überraschenden Resultats etwa am Ausrechnen der Potenzen gehindert wird und die Gleichheit der Beispielterme durch Termumformungen einsehen soll:

Entdecken mit latenter Beweisidee

Resultat	$3^2 \cdot 4^2 \overset{pd}{=} (3 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 4) \overset{ak}{=} (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4) \overset{pd}{=} (3 \cdot 4)^2$
Gesetz	Zweite Potenzregel
Fall	Der Exponent der Potenzen 3^2 und 4^2 ist gleich.

Im Unterschied zum vorigen Abduktionsschema werden hier nichttriviale Deduktionen geführt, denen das Assoziativ- und das Kommutativgesetz *ak* zugrundeliegen. Als Resultat ergibt sich die bewiesene Gleichheit der Terme $3^2 \cdot 4^2$ und $(3 \cdot 4)^2$. Ein Vergleich mit der von den Beispielzahlen 3 und 4 gelösten Gleichungskette des formell gehaltenen Beweises in ↑ Abs. 1.3.1 zeigt, dass hier Deduktionen geführt werden, deren Qualität eine Beweisidee für die Potenzregel erahnen lassen. Insofern ist die Beweisidee für die zweite Potenzregel bereits in der deduktiven Herstellung des Resultats angelegt. Wie Meyer & Voigt (2009b, 49) betonen, stellt sich jedoch die Frage, ob der Lernende bei der Entdeckung der Potenzregel auf diesem Wege wirklich so überlegt vorgeht, dass er seine Idee bereits bei der vorausgehenden Herstellung des Resultats als Beweisidee erkennt. Deshalb schlagen sie vor, zurückhaltender von einer Entdeckung mit latenter Beweisidee zu sprechen, d.h. von einer Entdeckung, in der eine latente Beweisidee enthalten ist:

in der Herstellung des Resultats angelegte Beweisidee

> ”Ob der Weg zur Entdeckung eines mathematischen Satzes eine latente Beweisidee beinhaltet, hängt davon ab, wie das konkrete Resultat der späteren Abduktion festgestellt wurde. Dieses Resultat kann durch deduktive Schlüsse als sicher festgestellt werden. Wenn der Satz mit latenter Beweisidee entdeckt wird, müssen bei der Feststellung des Resultates der späteren Abduktion die Sätze oder Definitionen angewendet werden, die für den Beweis des Satzes entscheidend sind. M. a. W., auf das Resultat muss deduktiv geschlossen werden, und in diesen deduktiven Schlüssen werden die Gesetze verwendet, die für die Deduktionen im Beweis wesentlich sind.” (Meyer & Voigt, 2009b, 50f.)

Entdecken mit latenter Beweisidee und beispielgeb. Beweisen

didaktischer Nutzen des Entdeckens mit latenter Beweisidee

Die Autoren sehen die Entdeckung mit latenter Beweisidee im Vergleich zu anderen Erarbeitungswegen von Sätzen (resp. Regeln) als didaktisch sehr produktiv an. Meyer & Voigt (2009a, 16) führen aus, dass der Lernende im konkreten, deduktiv hergestellten Resultat das Allgemeingültige erkennen und diese Erkenntnis auch versprachlichen muss. Während eines solchen Erkenntnis- und Artikulationsprozesses bedürfe es überdies einer Anleitung durch den Lehrenden:

> ”Das Allgemeine ist zunächst im Konkreten verborgen, ’latent’ vorhanden. Der Experte erkennt das Allgemeine; dem Lernenden muss es nicht bewusst werden, (...). Wenn die Lernenden erst wenig erfahren darin sind, das Allgemeine im Konkreten zu erkennen, bedarf es der lenkenden Unterstützung der Lehrperson. (...) Zu der beschriebenen Herausforderung, das Allgemeine im Konkreten zu erkennen, kommt das Problem hinzu, das Allgemeine zu artikulieren.” (Meyer & Voigt, 2009a, 16)

Motivierung beispielgebundenen Beweisens

Wenn es dem Lernenden nunmehr gelingt, bei einer Entdeckung mit latenter Beweisidee von der Besonderheit der verwendeten Beispielzahlen (oder -figuren) abzusehen und zu verbalisieren, dass seine im Herstellen des Resultats vorgenommenen deduktiven Schlüsse unabhängig von der Wahl dieser Beispielzahlen (oder -figuren) sind, manifestiert er einen beispielgebundenen Beweis (vgl. Meyer & Voigt (2008, 141)). Ein solcher Zugang über das Entdecken mit latenter Beweisidee motiviert zum beispielgebundenen Beweisen als Forschungsgegenstand dieser Arbeit, von dem in ↑ Kap. 1.5 geklärt wird, wie er sich theoretisch fassen lässt.

mögliche didaktische Vorgehensweisen

Da die Entdeckung mit latenter Beweisidee das beispielgebundene Beweisen in besonderer Weise befördern kann, braucht man zu dessen Untersuchung den zu beweisenden Satz nicht als Behauptung vorgeben. Damit der Lernende jedoch keine Entdeckungen ohne Beweisidee (s.o.) führt, empfiehlt es sich, den Lernenden am bloßen Ausrechnen (resp. Messen, Zeichnen) zu hindern und ihn in der Herstellung des Resultats zu nichttrivialen Deduktionen am Beispiel anzuregen, die er zu Deduktionen im formal (resp. formell) gehaltenen Beweis verallgemeinern kann.

1.3.4 Prüfen per Induktion

Die Induktion erscheint der landläufigen Auffassung nach als ein Schluss, bei dem von einzelnen Phänomenen als Resultate in der Zusammenschau mit Fällen eine allgemeine Regelmäßigkeit in Form eines Gesetzes generiert werde:

Schlussform Induktion

Fall	$F(x_i)$
Resultat	$R(x_i)$
Gesetz	$\forall x\colon F(x) \Rightarrow R(x)$

Charakterisierung der Induktion

Dabei ist die Induktion wie die Abduktion insofern kein wahrheitsübertragender Schluss, als dass aus Fall und Resultat nicht denknotwendig auf das Gesetz geschlossen werden kann: Man setzt lediglich betrachtete Fälle und Resultate in Beziehung und schließt von einer dabei beobachteten Regelmäßigkeit auf das hypothetische Gesetz. Je häufiger sich der vermutete Zusammenhang zwischen Fall und Resultat zeigt (hier sei dies durch den Index $i \in \mathbb{N}_0$ angedeutet), desto stärker wird das erschlossene Gesetz bekräftigt. Im Unterschied zur Abduktion kann die Induktion jedoch kein Gesetz neu generieren: Damit nämlich ein Zusammenhang zwischen Resultat und Fall überhaupt in Betracht gezogen werden kann, bedarf es nach Meyer (2007, 35f.) ja schon zuvor der Kenntnis eines zu Resultat und Fall assoziierten, vermuteten Gesetzes. Dieses muss bereits abduktiv generiert worden sein. Der eigentlichen Induktion geht also eine Abduktion voraus. Sie leitet den sogenannten Peircesche Dreischritt der Induktion ein, bei dem es zu einer Abfolge von Abduktion, Deduktion und Induktion kommt (s.u.).

Alltagsbeispiel

Alltagsbeispiel nasse Straßen

Das Alltagsbeispiel der nassen Straßen aus ↑ Abs. 1.3.2 wieder aufgreifend, werde angenommen, dem Mädchen komme anderntags beim Verlassen einer überdachten U-Bahn-Anlage an einer Straße zufällig ein Reinigungsfahrzeug entgegen. Diese Begebenheit lasse das Mädchen vermöge des abduktiv generierten hypothetischen Gesetzes vom Vortag folgende deduktive Vorhersage treffen:

Fall	Ein Reinigungsfahrzeug hat (auch) diese Straße gesäubert.
Gesetz	Wenn Reinigungsfahrzeuge Straßen säubern, werden diese nass.
Resultat	Die Straße über der U-Bahn-Anlage muss (auch) nass sein.

Die Realität scheint ihr recht zu geben: In der Tat ist die Straße nass. Das Mädchen sieht sein hypothetisches Gesetz an diesem zweiten Fall also zunächst induktiv bestätigt:

Fall	Ein Reinigungsfahrzeug hat (auch) diese Straße gesäubert.
Resultat	Die Straße über der U-Bahn-Anlage ist (auch) nass.
Gesetz	Wenn Reinigungsfahrzeuge Straßen säubern, werden diese nass.

Das Mädchen bemerkt schließlich, dass es zu seiner Überraschung leicht zu regnen begonnen hat. Auch scheint das Reinigungsfahrzeug gar nicht mit einer Vorrichtung zum Nassreinigen der Straßen ausgestattet zu sein, hat aber zuvor dennoch wohl die Straße gesäubert. Dies alles verwirrt das Mädchen sehr.

Unsicherheiten der Induktion

Das Alltagsbeispiel zeigt, dass der induktiven Prüfung eine Abduktion vorausgegangen sein muss, durch die das hypothetische Gesetz zuvor statuiert wurde (wie es in ↑ Abs. 1.3.2 für den Vortag geschildert wurde). Danach wird vermöge dieses hypothetischen Gesetzes für den neuen Fall (das Reinigungsfahrzeug säubert auch diese Straße) eine deduktive Vorhersage getroffen (diese Straße muss auch nass sein). Auch wenn sich das Resultat real eingestellt hat (die Straße ist nass), können sich sowohl Fall als auch Gesetz als richtig oder falsch erweisen. Die Unsicherheit der induktiven Prüfung rührt nämlich zum einen daher, dass das zuvor abduktiv assoziierte Gesetz (in seiner Ausschließlichkeit) falsch sein kann (es gibt auch Reinigungsfahrzeuge, die die Straßen trocken reinigen, zum Beispiel im Herbst), als auch daher, dass ein anderer Fall eingetreten sein kann (es hat geregnet). Insbesondere zeigt dies, dass beobachtete Resultate und angenommene Fälle nichts miteinander zu tun haben müssen.

Peircescher Dreischritt

Leitbeispiel zweite Potenzregel

Peircescher Dreischritt

1. Abduktive Generierung des hypothetischen Gesetzes

Als mathematisches Leitbeispiel wird nun erneut die zweite Potenzregel (für Potenzen mit gleichem Exponenten) verwendet. Wie schon bemerkt, dient die Induktion zur bloßen Prüfung eines bereits vorhandenen, abduktiv generierten Gesetzes. Das Vollziehen der zugehörigen Abduktion gemäß ↑ Abs. 1.3.2 stellt den ersten Teil des Peirceschen Dreischritts dar:

Resultat	$3^2 \cdot 4^2 = 9 \cdot 16 = 144$ stimmt überein mit $(3 \cdot 4)^2 = 12 \cdot 12 = 144$.
Gesetz	Zweite Potenzregel
Fall	Die Exponenten der Potenzen 3^2 und 4^2 sind gleich.

Vermöge des abduktiv unterstellten, allgemeingültig angenommenen Gesetzes kann eine deduktive Vorhersage für einen neuen Fall getroffen werden:

2. Deduktive Vorhersage für einen neuen Fall

Fall	Die Exponenten der Potenzen 3^5 und 4^5 sind auch gleich.
Gesetz	Zweite Potenzregel
Resultat	$3^5 \cdot 4^5 = (3 \cdot 4)^5$

Diese Deduktion basiert offensichtlich auf dem hypothetisch unterstellten, als allgemeingültig angenommenen Gesetz der zweiten Potenzregel. Das Resultat ist nun eine Vorhersage für einen neuen Fall, die in der nachfolgenden Induktion rechnerisch (mittels trivialer Deduktionen oder per Taschenrechner) geprüft werden kann. Bei Erfolg dieses induktiven Tests wird das hypothetisch unterstellte Gesetz an diesem neuen Fall bekräftigt, ansonsten dürfte seine (Allgemein-) Gültigkeit in Frage zu stellen sein.

3. Induktive Bestätigung des Gesetzes an einem neuen Fall

Fall	Die Exponenten der Potenzen 3^5 und 4^5 sind auch gleich.
Resultat	$3^5 \cdot 4^5 = 243 \cdot 1024 = 248832$ stimmt überein mit $(3 \cdot 4)^5 = 12^5 = 248832$
Gesetz	Zweite Potenzregel

Das Resultat der deduktiven Vorhersage wurde mit dem Resultat der induktiven Prüfung mit Erfolg abgeglichen. Das ursprünglich abduktiv unterstellte Gesetz der Potenzregel ist also an einem neuen Fall mit anderen Beispielzahlen in seiner Gültigkeit induktiv bestätigt und damit plausibler gemacht worden. Lässt man die vorausgegangene Abduktion und Deduktion fort, scheint das durch die Induktion logisch erschlossene Gesetz der Potenzregel neu generiert worden zu sein. Dies trifft jedoch nicht zu, da es bei der vorausgehenden Abduktion schon hypothetisch unterstellt und damit schon bekannt wurde. Wie die vorstehenden Ausführungen und auch MEYER & VOIGT (2009b, 39) selbst zeigen, ist die früher gemeinhin angenommene und auch in neueren Publikationen – etwa von HOLLAND (2007) und PEDEMONTE (2007) – noch immer vertretene Interpretation der Induktion als gesetzesgenerierender Schluss somit eher der (kreativen) Abduktion zuzuschreiben.

Bootstrap-Modell und hypothetisch-deduktiver Ansatz

Aus erkennnistheoretischer Sicht bildet der PEIRCEsche Dreischritt die empirische Überprüfung einer Hypothese mittels des sogenannten *Bootstrap*-Modells ab, welches nach MEYER (2007, 65) davon ausgeht, "dass die bei der Generierung der Hypothese betrachteten Phänomene Einzelfälle [Einzelresultate, J.K.] eines dahinterliegenden, allgemeinen Gesetzes sind". Eine andere Variante empirischer Erkenntnissicherung ist der sogenannte hypothetisch-deduktive Ansatz, bei dem aus einer abduktiv generierten Hypothese zunächst deduktive Folgerungen hergestellt werden, die über den Geltungsbereich des generierten Gesetzes hinausgehen können und anschließend auf Richtigkeit überprüft werden.

Induktionstypen

enumerative bzw. unvollständige Induktion

Die in Induktionen an weiteren Fällen vorgenommene Bekräftigung des Gesetzes macht dessen Allgemeingültigkeit immer plausibler, so dass LAUTH & SAREITER (2005, 75ff.) von enumerativen Induktionen sprechen. Manche Lernende sehen in einer solchen fortschreitenden induktiven Bestätigung des Gesetzes dann bereits eine ausreichende Begründung des Gesetzes, getreu dem Motto: "was einmal (zweimal, dreimal) ... gilt, gilt immer" (vgl. etwa die Einzelfallstudie in ↑ Kap. 3.4 mit dem Umfangswinkel-Mittelpunktswinkelsatz resp. Außenwinkelsatz). Diese auf eine gewissermaßen unvollständige Induktion vertrauende Haltung lässt sich aber auch durch die mathematische Erfahrung der Lernenden selbst erklären, da sich nur wenige eingängige Behauptungen finden lassen, die zwar für mehrere, aber nicht für unendlich viele Beispielinstanzen gelten. Neben dem arithmetischen Beispiel, wonach $x^2 + x + 11$ (resp. 41) für $x \in \{0, ..., (3)9\}$ prim ist, sei das folgende geometrische Beispiel angeführt:

> "Zeichne einen Kreis, markiere n Punkte, wie viele Gebiete können innerhalb des Kreises höchstens entstehen, wenn man jeden der markierten Punkte mit jedem anderen geradlinig verbindet?
> In der Tat zählt man dort für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ resp. $1 = 2^0, 2 = 2^1, 4 = 2^2, 8 = 2^3, 16 = 2^4$ Gebiete, was den empirisch begründeten Schluß auf ein 2^{n-1}-Gesetz nahelegt. In Wirklichkeit sind es aber schon bei 6 Eckpunkten nur 31 Gebiete." (NEUBRAND & MÖLLER, 1990, 57)

eliminative Induktion

Hält das von einem weiteren Fall her deduktiv vorhergesagte Resultat der induktiven Prüfung nicht stand, wird das Gesetz für den betrachteten Fall nicht bestätigt. Diese fehlgeschlagene enumerative Induktion lässt sich nach LAUTH & SAREITER (2005, 77ff.) als eliminative Induktion ansehen. Verworfen wird dabei nicht die Gültigkeit des Gesetzes in Gänze, sondern die Annahme, dass dieses einen Zusammenhang zwischen dem betrachteten Fall unter seinen jeweiligen Prämissen und dem sich wirklich eingestellten Resultat bildet.

Alltagsbeispiel nasse Straßen

Im Alltagsbeispiel liegt eine eliminative Induktion vor, wenn das Mädchen bemerkt, dass eine Straße trocken bleibt, obwohl das Reinigungsfahrzeug die Straße säubert, zum Beispiel im Herbst. Das zuvor abduktiv assoziierte Gesetz (wenn Reinigungsfahrzeuge Straßen säubern, werden diese nass) erweist sich damit (in seiner Ausschließlichkeit) als falsch und muss modifiziert werden.

Leitbeispiel zweite Potenzregel

Wurde im Leitbeispiel etwa eine operatorunabhängige Potenzregel als Gesetz angenommen, so dass diese etwa auch für den Operator $+$ statt bloß für den Operator $\cdot$ gilt, dann genügt ein Gegenbeispiel, um das Gesetz für den Operator $+$ zu verwerfen (vgl. ↑ Abs. 1.3.2).

Ein fragliches Gesetz muss somit zumindestens modifiziert werden, falls bei dessen Prüfung eliminative Induktionen auftreten. Damit trägt die Induktion insofern zur empirischen Erkenntniserweiterung bei, als dass sie die Grenzen der Allgemeingültigkeit von hypothetisch unterstellten Gesetzen erfassen hilft (vgl. Meyer (2007, 36)). Damit kommt ihr auch im Prozess des beispielgebundenen Beweisens eine besondere Rolle zu. Beim beispielgebundenen Beweisen tritt häufig die Situation auf, dass der Lernende seine Äußerungen noch in Beispielen hält. Auch in der induktiven Prüfung am Beispiel kann der Lernende möglicherweise eine latente Beweisidee für etwas allgemeiner Gültiges erkennen, wie im Folgenden erläutert wird. Um den Lehrenden davon zu überzeugen, muss er diese Beweisidee aber noch manifestieren.

Bedeutung der Induktion für das beispielgebundene Beweisen

1.3.5 Prüfen mit latenter Beweisidee

Wie beim Entdecken lässt sich auch beim Prüfen ein Szenarium mit latenter Beweisidee vorstellen. Meyer & Voigt (2009b, 55) bemerken dazu:

> "Zur induktiven Prüfung muss für einen neuen Fall ein neues Resultat bestimmt werden, das mit demjenigen Resultat verglichen wird, das mittels des hypothetischen Satzes vorhergesagt wurde. Die Bestimmung des neuen Resultates erfolgt rein deduktiv mittels bekannter Regeln (...). Diese deduktive Bestimmung darf nicht mit der deduktiven Begründung des Satzes verwechselt werden, und hat doch eine potentielle Gemeinsamkeit mit ihr. Denn wenn die deduktive Bestimmung des konkreten Resultates schon strukturell die Begründung des Satzes vorwegnimmt, ist der Schritt von der Prüfung zur Begründung wesentlich erleichtert." (Meyer & Voigt, 2009b, 55)

Zur Konkretisierung dessen, was Prüfen mit latenter Beweisidee heißt, werde im Folgenden analog zur Gegenüberstellung in ↑ Abs. 1.3.3 verfahren.

Vergleich des Prüfens ohne und mit latente(r) Beweisidee

In der obigen Induktion wurde das neue Resultat der Termgleichheit durch bloßes Ausrechnen der Potenzterme deduktiv hergestellt:

Prüfen ohne latente Beweisidee

Fall	Der Exponent der Potenzen 3^5 und 4^5 ist auch gleich.
Resultat	$3^5 \cdot 4^5 = 243 \cdot 1024 = 248832$ stimmt überein mit $(3 \cdot 4)^5 = 12^5 = 248832$.
Gesetz	Zweite Potenzregel

Wie sähe ein Prüfen des Gesetzes mit latenter Beweisidee aus? Beispielsweise werde angenommen, der Schüler suche nach einem einfacheren Weg, um die

Prüfen mit latenter Beweisidee

Terme $3^5 \cdot 4^5$ und $(3 \cdot 4)^5$ auszurechnen, und formt diese Terme deshalb wie folgt um:

Fall	Der Exponent der Potenzen 3^5 und 4^5 ist auch gleich.
Resultat	$3^5 \cdot 4^5 \overset{pd}{=} (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4)$ $\overset{ak}{=} (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4) \overset{pd}{=} (3 \cdot 4)^5$
Gesetz	Zweite Potenzregel

Vergleicht man die beiden Induktionsschemata miteinander, so fällt auf, dass das Resultat im ersten Schema schwieriger herzustellen ist, wenn ein Taschenrechner fehlt, mithin ein bloßes Ausrechnen sogar aufwändiger erscheint als der Einsatz des Kommutativ- und Assoziativgesetzes *ak* im zweiten Schema. Der Lernende kann also durch die Vorgabe des Falls und im Verzicht auf den Taschenrechner (resp. auf andere Messinstrumente) dazu angeregt werden, eher mit statt ohne latente Beweisidee zu prüfen. Schon in den quantitativen Studien zum beispielgebundenen Beweisen wurde solch eine Intervention in der Wahl großer Beispielzahlen unter der Kategorie *big number* geführt, die es den Schülern nahezu unmöglich machte, das Resultat bloß auszurechnen (↑ Abs. 1.1.2).

Prüfen mit latenter Beweisidee und beispielgebundenes Beweisen

Entdecken und Prüfen mit latenter Beweisidee

Zum Begriff der Latenz gelten die Ausführungen aus ↑ Abs. 1.3.3 entsprechend: Wenn es dem Lernenden nämlich gelingt, beim Prüfen mit latenter Beweisidee von der Besonderheit verwendeter Beispielzahlen (oder -figuren) abzusehen und zu verbalisieren, dass seine vorgenommenen deduktiven Schlüsse im Herstellen des Resultats unabhängig von der Wahl dieser Beispielzahlen (oder -figuren) sind, manifestiert er einen beispielgebundenen Beweis (vgl. Meyer & Voigt (2008, 141)). Die Autoren weisen überdies darauf hin, dass es dem Lernenden leichter falle, sich einer Prüfung mit latenter Beweisidee bewusst zu werden, da sich der Lernende beim Entdecken mit latenter Beweisidee noch mehr an der Front seines Wissens befinde. Hinsichtlich des beispielgebundenen Beweisens weisen die Autoren bereits auf eine zentrales Problem hin:

> ”Die didaktische Problematik besteht in folgender Spannung: Einerseits kann das Prüfen mit latenter Beweisidee sich zum beispielgebundenen Beweisen wandeln. Die Feststellung eines Phänomens am Beispiel erscheint dann als Vorbereitung des Beweisens. Andererseits kann durch das Prüfen, wenn der Schüler die latente Beweisidee nicht kognitiv realisiert, das epistemologische Verständnis der mathematischen Erkenntnissicherung als induktives Vorgehen wie in den empirischen Wissenschaften stabilisiert werden. (...) Schon die widersprüchlich anmutende, in Schulbüchern gebräuchliche Formulierung ’beispielgebundenes Begründen’ weist auf diese Spannung hin.” (Meyer & Voigt, 2008, 141)

Neben dem Entdecken mit latenter Beweisidee eignet sich also das Prüfen mit latenter Beweisidee um so mehr dazu, das beispielgebundene Beweisen zu befördern. Beim induktiven Prüfen besteht gleichwohl die Gefahr, dass der Lernende die Beweisidee am deduktiv hergestellten Resultat des induktiven Schlusses nicht subjektiv realisiert und damit sein induktives Prüfen ohne Beweisidee als mathematisches Beweisen missverstehen kann.

Gefahr des induktiven Prüfens

Meyer & Voigt (2008, 141) werten die Entdeckung und die Prüfung mit latenter Beweisidee innerhalb eines Systems von Zugängen zur Erarbeitung von Merksätzen als vergleichsweise produktiv. Wie die obigen Ausführungen zeigen, können solche Zugänge zur Anbahnung beispielgebundenen Beweisens verwendet werden. Die Diskussionen am Leitbeispiel der zweiten Potenzregel haben ergeben, dass der Lernende bei der kognitiven Realisierung des Allgemeinen am Besonderen häufig erst die Grenzen der Allgemeingültigkeit des fraglichen Gesetzes austesten muss, während er dieses deduktiv zu begründen versucht. Es steht also zu erwarten, dass sich mehrere Abduktionen, Induktionen und Deduktionen während seines beispielgebundenen Beweisens abwechseln. Wie ein Schüler etwa die zweite Potenzregel im Interview beispielgebunden beweist, zeigt die Einzelfallstudie in ↑ Kap. 3.5.

didaktischer Vorteil von Szenarien mit latenter Beweisidee

In den vorstehenden Zugängen der Entdeckung und der Prüfung mit latenter Beweisidee zum beispielgebundenen Beweisen ist der Beweis im deduktiv hergestellten Resultat bereits angelegt (latent). Betrachtet man den Beweis gemäß Oevermann et al. (1979) als Sinnstruktur, so handelt es sich dabei genauer gesagt um eine latente Sinnstruktur, die zunächst nur dem Lehrenden bekannt sein mag. Diese Sinnstruktur kann aber auch vom Lernenden im Erkennen des Allgemeingültigen am Besonderen des Beispiels kognitiv realisiert und dem Lehrenden oder anderen Lernenden gegenüber verbalisiert und damit manifest werden. Es wird sich zeigen, dass sich das beispielgebundene Beweisen i.e.S. als changierender Prozess zwischen Latenz, kognitiver Realisierung und sprachlicher Manifestierung des Beweises als Sinnstruktur theoretisch fassen und empirisch belegen lässt (↑ Abs. 1.5.3 und ↑ Teil 3).

Beweis als latente Sinnstruktur

beispielgebundenes Beweisen als changierender Prozess

Mit den Schlussformen der Abduktion, Induktion und Deduktion nach Peirce ist es möglich, das Entdecken, Prüfen und Begründen zu charakterisieren. Durch das Entdecken und Prüfen mit und ohne latenter Beweisidee haben sich Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen ergeben. Hierauf aufbauend kann das beispielgebundene Beweisen als Prozess in ↑ Kap. 1.5 im engeren Sinne (i.e.S.) und im weiteren Sinne (i.w.S.) definiert werden. Vorher soll die Analyse der Struktur von Argumenten nach Toulmin eine nach Allgemeinheitsgraden differenzierte Darstellung von Beweisen ermöglichen, welche schließlich als (latente) Sinnstrukturen aufgefasst werden.

1.4 Struktur von Argumenten

Einführung

Die im vorigen ↑ Kap. 1.3 behandelten Schlussformen Abduktion, Induktion und Deduktion eignen sich zur Beschreibung von Zugängen des Entdeckens, des Prüfens und des Begründens zum beispielgebundenen Beweisen. Deduktive Schlüsse können als Argumente der Theorie TOULMINs nach differenziert untersucht werden. Gegenüber der formal-logischen Korrektheit im Sinne der Schlussform Deduktion tritt bei Argumenten und Argumentgefügen deren inhaltliche Struktur hervor: Bei Argumenten geht man von vorliegenden Tatsachen aus und gelangt über Argumentregeln zu behaupteten Aussagen. Argumentregeln können dabei weiter untermauert werden, und die behaupteten, mutmaßlichen Aussagen können bezweifelt werden.

Struktur von Argumenten nach TOULMIN

In diesem Kapitel geht es um die Struktur von Argumenten nach TOULMIN. Mit Blick auf das beispielgebundene Beweisen wird das beispielgebundene Argumentgefüge eingeführt. Eingangs wird dargestellt, was unter einem Argument zu verstehen ist (↑ Abs. 1.4.1). Danach werden Argumentgefüge behandelt und dabei zwischen mehrgliedrigen und mehrschichtigen Argumenten unterschieden (↑ Abs. 1.4.2). Anschließend erfolgt ein Vergleich zwischen Argumenten und Schlüssen. Dabei wird insbesondere eine Abgrenzung von Argumenten zur Abduktion und Induktion vorgenommen, während unter bestimmten Bedingungen ein Argument mit der Deduktion als Schlussform identifiziert werden kann (↑ Abs. 1.4.3). Schließlich wird im Hinblick auf den Forschungsgegenstand des beispielgebundenen Beweisens dargestellt, was man unter einem beispielgebundenen Argument verstehen kann (↑ Abs. 1.4.4).

1.4.1 Argumente

Bestandteile eines Arguments

Ein Argument besteht nach Toulmin (1996, 88f.) – vorgängig Toulmin (1975) und Toulmin (1958) – aus verschiedenen funktionalen Elementen, nämlich aus einem *Datum* (D), einer *Konklusion* (K) und einer sogenannten *Schlussregel* (SR), gegebenfalls ergänzt durch eine *Stützung* (S), einen *modalen Operator* (O) und eine *Ausnahmebedingung* (AB). Diese Argumentteile besitzen unterschiedliche, voneinander abgrenzbare Funktionen, und bilden in ihrem Zusammenwirken ein *Argument*.

Datum und Konklusion

Daten als vorliegende Tatsachen

Konklusion als Behauptung

Eine Behauptung bringt nach Toulmin (1996, 88) einen anzweifelbaren, begründungsbedürftigen Geltungsanspruch mit sich. Um diesen Geltungsanspruch einlösen zu können, verweist man gerne auf Tatsachen, auf denen die Behauptung beruht. *Daten* (lat. *datum – Gegebenes*) sind nach Toulmin (1996, 89) nun jene "Tatsachen, die wir als Begründung für die Behauptung heranziehen". Die Behauptung wird Toulmin (1996, 89) zufolge zu einer *Konklusion*, "deren Tauglichkeit wir zu begründen versuchen" (K), schematisch dargestellt wie folgt:

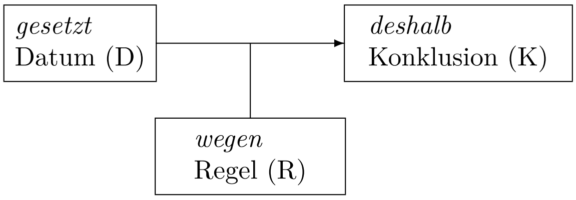
gesetzt Datum (D)	→	*deshalb* Konklusion (K)

In Anlehnung an die Ausführungen von Toulmin (1996, 88) lässt sich die *Konklusion* (K) durch "Was behauptest Du?" und die *Daten* (D) durch "Auf welche Fakten beziehst Du Deine Behauptung?" erfragen. In verkürzter Form ist das Schema lesbar als [*Datum* D; deshalb *Konklusion* K] bzw. [*Konklusion* K, weil *Datum* D] (vgl. Toulmin (1996, 98)).

Regel

Regel als begründende allgemeingültige Aussage

Die bei Toulmin (1996, 89ff.) in der deutschen Übersetzung unglücklicherweise so genannte *Schlussregel* (SR) wird im Folgenden wie in Meyer (2007, 84) als *Regel* (R) bezeichnet. Die Konklusion (K) werde zunächst auf die als Tatsachen vorliegenden Daten (D) zurückgeführt. Bezogen auf das betrachtete Argument mögen die angeführten Daten also zweifelsfrei feststehen. Warum aber der Schritt von den vorliegenden Daten auf die behauptete Konklusion angemessen, gerechtfertigt oder gewährleistet ist, ist eine Frage nach allgemein unterstellten, das Argument untermauernden *Regeln*, die bei bloßer Nennung der Daten (D) implizit bleiben würden. Toulmin (1996, 89) bezeichnet diese *Regeln* (R) als "allgemeine, hypothetische Aussagen, die als Brücken dienen können" zwischen Daten (D) und Konklusion (K):

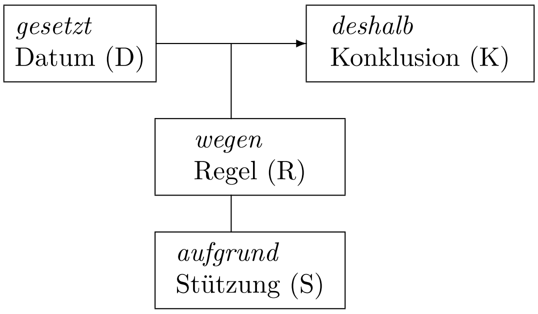


Nach Toulmin (1996, 91) besteht die Funktion der *Regel* darin, "explizit die Zulässigkeit des vorkommenden Schritts auszudrücken". Er unterstreicht, dass die *Regeln* allgemein seien und die Korrektheit aller Argumente des betreffenden Typs feststellten. Der Autor selbst bezeichnet die *Regel* als *warrant*; zur Verdeutlichung ihrer Funktion kann man auch *Argumentationsregel* nach Schwarzkopf (2001, 258), *Argumentregel* oder *Gewährsregel* sagen. Einige Autoren verwenden auch die Bezeichnung *Rechtfertigung* wie beispielsweise Wunderlich (1981, 170) oder *Garant* wie z.B. Krummheuer (1997, 35) oder Knipping (2003, 37).

Stützung

Stützung als Absicherung der Regel

Eine zur Untermauerung des Arguments angeführte Regel (R) kann bezweifelt werden. Es kann die Frage gestellt werden, warum die Regel gelten soll. Die dadurch eingeforderte Absicherung der Regel (R) bezeichnet Toulmin (1996, 93ff.) als deren *Stützung* (S).



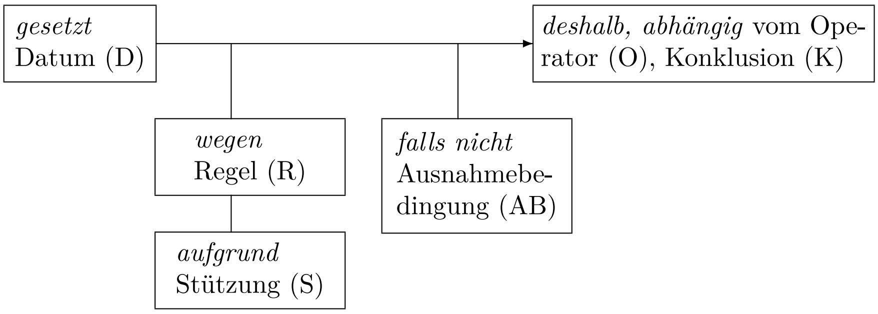
Damit die Regel (R) annehmbar wird, kann ein Verweis auf ihr Zustandekommen oder ihre Einbettung in einen Theorierahmen als *Stützung* (S) ausreichen. Somit muss es sich bei der *Stützung* (S) nicht notwendig um eine allgemeinere Regel als die Regel (R) selbst handeln – die primäre Funktion der *Stützung* (S) ist vielmehr, die Zulässigkeit der Regel (R) plausibel zu machen. Im Unterschied zu den für ein Argument notwendigen Daten (D) kann die *Stützung* (S) also implizit bleiben und insofern als optional betrachtet werden.

Modaler Operator und Ausnahmebedingung

In den meisten Alltagssituationen lässt sich aus vorliegenden Daten nichts absolut Sicheres folgern. TOULMIN (1996, 92) berücksichtigt daher auch den möglichen Umstand, dass eine Konklusion (K) als Behauptung vermöge einer Regel (R) aus den vorliegenden Daten (D) nicht denknotwendig, sondern bloß mit einer gewissen Sicherheit gefolgert werden kann. Er spricht in diesem Zusammenhang vom "Grad der Stärke", den die Daten der Konklusion (K) vermöge der Regel (R) verleihen, und kennzeichnet diese Einschränkung durch einen *modalen Operator* (O). Zusätzlich zieht TOULMIN (1996, 92) auch *Ausnahmebedingungen* (AB) als Umstände in Betracht, die die Folgerung auf die Konklusion (K) kategorisch ausschließen. Das Schema erweitert sich damit wie folgt:

modaler Operator als Gradmesser für die Stärke eines Arguments

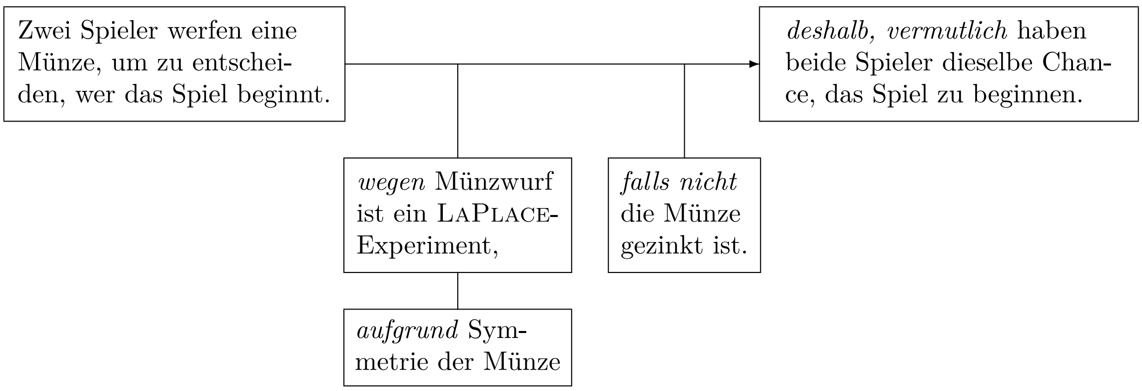
Ausnahmebedingungen zum Ausschluss der Konklusion



Beispiele für Argumente

An alltagsnahen Situationen sind modale Operatoren und Ausnahmebedingungen geläufig. Um etwa zu bestimmen, wer ein Spiel beginnt, werfen zwei Spieler eine Münze (Datum D). Falls die Münze nicht gezinkt ist (Ausnahmebedingung AB), haben beide Spieler vermutlich (modaler Operator O) dieselbe Chance, das Spiel zu beginnen (Konklusion K), weil der Münzwurf aufgrund der Symmetrie der Münze (Stützung S) aus mathematischer Sicht ein LAPLACE-Experiment ist (Regel R).

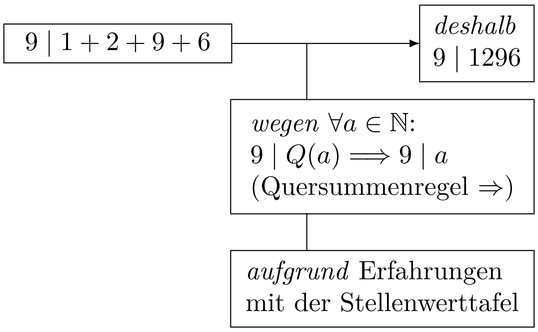
Beispiel Münzwurf



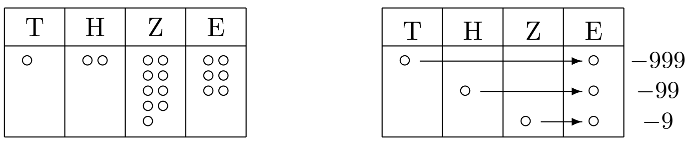
In den meisten mathematischen Kontexten versucht man, ohne modale Opera-

Beispiel Quersummenregel

toren und Ausnahmebedingungen auszukommen – man strebt die Denknotwendigkeit von Folgerungen an. Die Behauptung $9 \mid 1296$ kann etwa als Konklusion (K) aus dem Datum (D) $9 \mid 1 + 2 + 9 + 6$ vermöge der Quersummenregel (R) denknotwendig gefolgert werden:



Die Quersummenregel (R) kann wiederum durch eine schulgerechte Stützung (S) auf Erfahrungen mit der Stellenwerttafel abgesichert werden (vgl. ↑ Abs. 2.2.3):



Die Stellenwerte von Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern usw. einer natürlichen Zahl lassen sich ikonisch durch die entsprechende Anzahl an Plättchen in einer Stellenwerttafel symbolisieren. Das Verschieben aller Plättchen auf die Einer-Spalte repräsentiert die Quersummenbildung enaktiv. Beim Verschieben eines einzelnen Zehner-, Hunderter-, Tausender-Plättchens usw. ändert sich der Zahlwert um 9, 99, 999 usw., so dass sich summarisch betrachtet die natürliche Zahl und deren Quersumme bloß um ein Vielfaches von 9 voneinander unterscheiden. Ist die Quersumme einer natürlichen Zahl also durch 9 teilbar, so auch diese natürliche Zahl selbst und umgekehrt (Quersummenregel). Erfahrungsnäher kann die Stützung (S) der Quersummenregel (R) also wie folgt expliziert werden: Eine natürliche Zahl und deren Quersumme unterscheiden sich bloß um ein Vielfaches von 9.

Vorstehend wurden die Bestandteile eines Arguments und ihr Zusammenwirken an Beispielen beschrieben. Argumente können nun ihrerseits zu Argumentgefügen zusammengesetzt werden.

1.4.2 Argumentgefüge

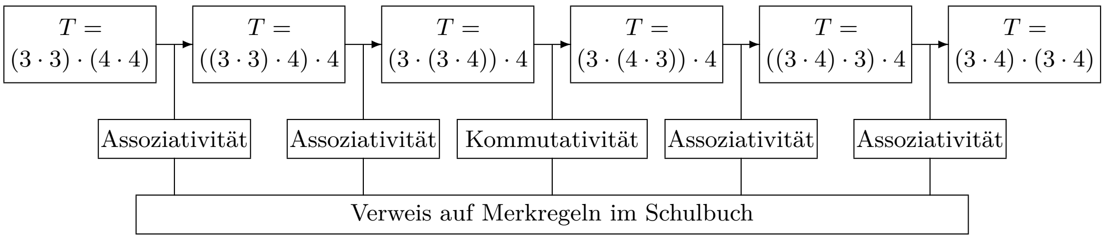
mehrgliedrige, mehrschichtige und mehrgliedrig-mehrschichtige Argumente

Ist die Argumentstruktur komplexer, wird von einem *Argumentgefüge* gesprochen. An *Argumentgefügen* unterscheidet MEYER (2007, 88ff.) in Verweis auf KRUMMHEUER (2003, 248) und KRUMMHEUER & BRANDT (2001, 36) *mehrgliedrige Argumente* von *mehrschichtigen Argumenten. Mehrgliedrige* wie *mehrschichtige Argumente* sind *Argumentgefüge*, deren einzelne Argumente miteinander unterschiedlich verknüpft sind. Wenn Mischformen von *mehrgliedrigen* und *mehrschichtigen Argumenten* auftreten, spricht man auch von *mehrgliedrig-mehrschichtigen Argumenten.*

Mehrgliedrige Argumente und Regelverbünde

Beispiel Assoziativ- und Kommutativgesetz

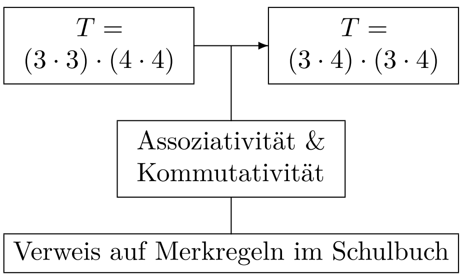
Nach MEYER (2007, 89) ist bei einem *mehrgliedrigen Argument* die Konklusion eines Arguments das Datum des folgenden Arguments. Die einzelnen Glieder eines *mehrgliedrigen Arguments* bilden damit eine Kette. Nachstehend ist ein *mehrgliedriges Argument* abgebildet, bei dem aus dem Datum $T = (3 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 4)$ vermöge der Regeln *Assoziativität (der Multiplikation)* und *Kommutativität (der Multiplikation)* die Konklusion $T = (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4)$ gefolgert werden kann:



Als Stützung kann der Verweis auf die geläufigen Merkregeln des *Umklammerns* und des *Vertauschens* erfolgen, wie diese etwa in Schulbüchern der 5. Klasse zu finden sind.

Zusammenfassung eines mehrgliedrigen Arguments zu einem Regelverbund

Man kann das Argumentgefüge als *mehrgliedriges Argument* manchmal auf ein Argument verkürzen unter Zusammenfassung aller Regeln zu einem *Regelverbund.* Dies ist dann angebracht, wenn die einzelnen Begründungsschritte mehr oder weniger trivial sind oder eine übersichtlichere Darstellungsweise erfordern. Im angeführten Beispiel erhält man also die folgende verkürzte Darstellung:



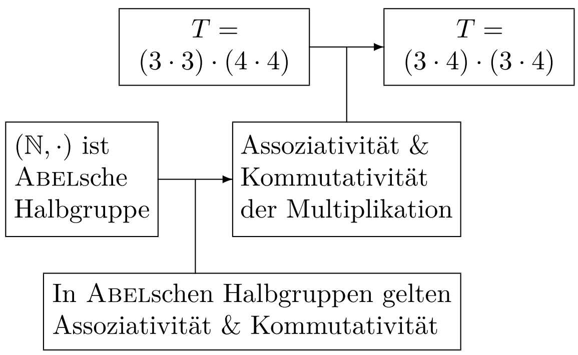
Rein mehrgliedrige Argumente können unter Angabe aller Regeln stets zu einem solchen *Regelverbund* zusammengefasst werden.

Mehrschichtige Argumente

Ein *mehrschichtiges Argument* entsteht, wenn die Regel eines Arguments als Konklusion eines zweiten Arguments resultiert, etwa weil die Regel selbst begründungsbedürftig erscheint und die Angabe einer Stützung als nicht ausreichend angesehen wird.

Beispiel Assoziativ- und Kommutativgesetz

Das obige Argument der Termumformung lässt sich auch als *mehrschichtiges Argument* darstellen:



Dabei wird aus der für den Unterricht ausreichenden Stützung vermöge der Merkregeln des Schulbuchs das mathematische Argument, dass $(\mathbb{N}, \cdot)$ eine ABELsche Halbgruppe ist und in ABELschen Halbgruppen definitionsgemäß Assoziativität und Kommutativität gelten.

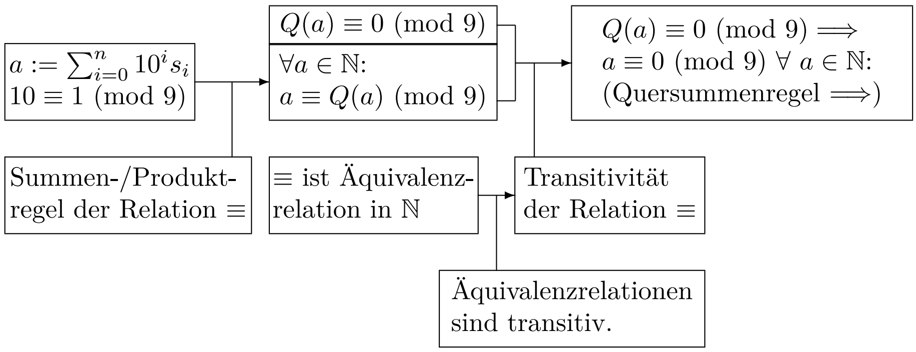
Mehrgliedrig-mehrschichtige Argumente

Beispiel Assoziativ- und Kommutativgesetz

Mehrgliedrig-mehrschichtige Argumente sind Mischformen mehrgliedriger und mehrschichtiger Argumente. Da das mehrgliedrige Argument der obigen Termumformung zusammengefasst und die Stützung durch ein Argument ersetzt wurde, handelt es sich eigentlich um ein *mehrgliedrig-mehrschichtiges Argument.*

Beispiel Quersummenregel

Im obigen Beispiel der Quersummenregel wurde deren Stützung auch wie folgt formuliert: Eine natürliche Zahl a und deren Quersumme $Q(a)$ unterscheiden sich bloß um ein Vielfaches von 9. Diese Aussage kann in formeller Darstellung mittels der geläufigen Modulo-Relation $\equiv$ auch zu $a \equiv Q(a) \pmod 9$ gefasst werden. Falls nun zudem $Q(a) \equiv 0 \pmod 9$, folgt vermöge der Transitivität der Modulo-Relation $\equiv$ die Quersummenregel ($\Longrightarrow$). Warum jedoch die Aussage $a \equiv Q(a) (\mathrm{mod}\ 9)$ gilt, zeigt sich, wenn man $a := \sum_{i=0}^{n} 10^i s_i$ stellenwertweise darstellt, so dass $Q(a) = \sum_{i=0}^{n} s_i$. Hierbei ist n die Anzahl der Stellen der natürlichen Zahl a. Wegen $10 \equiv 1 \pmod 9$ gilt $10^i \equiv 1 \pmod 9$ $\forall\ i \in \mathbb{N}$ vermöge der Produktregel für die Modulo-Relation. Zusammen mit der Summenregel für die Modulo-Relation folgt schließlich $a \equiv Q(a) \pmod 9$. Überdies erklärt und begründet sich die Transitivität der Modulo-Relation dadurch, dass die Modulo-Relation eine Äquivalenzrelation ist und Äquivalenzrelationen transitiv sind. Das Argument erweitert sich also wie folgt:



Mehrschichtigkeit und Abstraktionsgrad

Die Mehrschichtigkeit des vorstehenden Arguments zeigt einen von oben nach unten wachsenden Abstraktionsgrad: In der oberen Schicht werden Aussagen über die Quersumme $Q(a)$ einer natürlichen Zahl a miteinander verknüpft. In der mittleren Schicht sind Regeln der dabei verwendeten Relation $\equiv$ angeführt. In der unteren Schicht wird eine abstrakte Regel über Äquivalenzrelationen herangezogen, die definitorischen Charakter hat.

Vorteile von Argumentstrukturen

Obwohl diese mathematisierende, tiefergehende Strukturierung des Arguments für den schulischen Gebrauch weniger geeignet ist als der enaktiv-ikonische Gebrauch der Stellenwerttafel aus ↑ Abs. 1.4.1, besitzt sie doch folgende Vorteile: Die Quersummenregel lässt sich leicht auf spezifische Zahlen anwenden, die die Voraussetzung $a \equiv 0 \pmod 9$ erfüllen. Zum anderen wird sofort klar, warum es eine entsprechende Quersummenregel auch für den Teiler 3 gibt, da ebenso $10 \equiv 1 \pmod 3$ gilt. Schließlich rückt durch die Stellenwertdarstellung $a := \sum_{i=0}^{n} 10^i s_i$ auch eine Verallgemeinerung auf andere Stellenwertsysteme oder auf weitere, zum Beispiel alternierende Quersummenbildungen in den Bereich des Möglichen, ohne dass sich etwas an der vorliegenden Argumentstruktur wesentlich ändern dürfte. Eine solche Verallgemeinerbarkeit von Argumenten liegt auch bei beispielgebundenen Argumentgefügen vor, wie sie in ↑ Abs. 1.4.4 besprochen werden.

Mit mehrgliedrigen, mehrschichtigen und mehrgliedrig-mehrschichtigen Argument(gefüg)en können mathematische Beweise als Sinnstrukturen dargestellt werden. Bevor in ↑ Abs. 1.4.4 beispielgebundene Argument(gefüg)e behandelt werden, wird im Folgenden das Verhältnis zwischen Argument und den Schlussformen Deduktion, Abduktion und Induktion untersucht.

1.4.3 Argumente nach Toulmin und Schlüsse nach Peirce

Verwendung von PEIRCE-*Schemata*

Verwendung von TOULMIN-*Schemata*

Im Folgenden wird diskutiert, wie sich Argumente nach TOULMIN und Schlüsse nach PEIRCE zueinander verhalten. Dabei wird hauptsächlich auf die Arbeiten von KNIPPING (2003), MEYER (2007) und PEDEMONTE (2007) Bezug genommen. In Hinblick auf den Forschungsgegenstand kann nach ↑ Kap. 1.3 gesagt werden, dass das PEIRCE-Schema dazu geeignet ist, die Schlussformen Abduktion, Induktion und Deduktion voneinander logisch zu unterscheiden und in ihrem Zusammenspiel Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen wie das Entdecken und Prüfen mit latenter Beweisidee modellhaft zu entwickeln. Solche Modellzugänge können auch theoretische Erklärungen dafür bieten, warum manchen Lernenden der Übergang von der Beweisfindung zur Beweisführung im Sinne von HOLLAND (2007, 152ff.) am Beispiel eher gelingt. Dem gegenüber ist das TOULMIN-Schema eher für die Darstellung der Beweisstruktur als Argumentgefüge geeignet und mit Blick auf alltagsnahe Interview- und Unterrichtssituationen praktisch einsetzbar. Die beide Ansätze berücksichtigende Diskussion von KNIPPING (2003) und PEDEMONTE (2007) wird zeigen, dass sich die funktionalen Bedeutungen von Datum, Regel, Konklusion und ggf. Stützung jedoch ändern würden, wenn man das TOULMIN-Schema auch zur Darstellung der Schlussformen Abduktion und Induktion verwenden wollte.

Argument und Deduktion

Identifizierung von Argument und Deduktion

Das PEIRCE-Schema der Deduktion lässt sich mit dem TOULMIN-Schema in seinen Grundelementen Datum, Regel und Konklusion identifizieren:

> ”Eingeschränkt auf die Elemente Datum, Konklusion und Regel erinnert das Schema nach Toulmin an die Deduktion: Ausgehend von einem Fall (Datum) wird mit einem Gesetz (Regel) auf ein Resultat (Konklusion) geschlossen. Insofern kann das Schema zur Argumentanalyse nach Toulmin mit dem logischen Ideal der Deduktion identifiziert werden.” (MEYER, 2007, 91)

Differenzierungen zwischen Argument und Deduktion

Der Autor führt weiter aus, dass die Unterschiedlichkeit der beiden Schemata in der Qualität ihrer funktionalen Elemente liege. Mit der Stützung untermauere der Lernende im TOULMIN-Schema die Regel (und damit die Konklusion) eher inhaltlich, als dass er die Regel (und damit die Konklusion) logisch begründe. Auch im schulmathematischen Alltag werden Argumente vorgebracht und ausgehandelt, statt rein deduktiv zu schließen. MEYER (2007, 93) führt in diesem Zusammenhang ein im Sinne von PEIRCE nicht analysierbares Argument zur Verwendung des Satzes von PYTHAGORAS an. Bei diesem Argument ist die Regel kein mathematisches Gesetz, sondern eine Handlungsregel aus dem schulmathematischen Alltag (”Der Lehrer will, dass die Verwendung des Satzes des Pythagoras gelernt wird.”), was weitergehende, nicht nur auf die Mathematik beschränkte Anwendungsbereiche des Argumentschemas nach TOULMIN eröffnet.

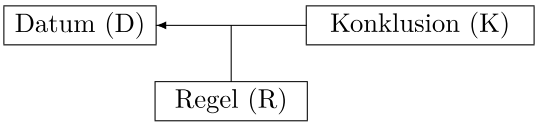
Einsatz des TOULMIN-*Schemas*

Zur Untersuchung des beispielgebundenen Beweisens ist das TOULMIN-Schema wegen seiner übersichtlichen Darstellung von (beispielgebundenen) Argumenten resp. Argumentgefügen relevant. Im nachfolgenden ↑ Kap. 1.5 wird ein Beweis dann als latente Sinnstruktur von Argumenten und Argumentgefügen aufgefasst, deren Zusammenspiel der Lernende (am Beispiel) subjektiv realisieren und manifestieren kann.

Argument und Abduktion

KNIPPING*s Darstellung der Abduktion*

Bei der Abduktion erfolgt nach ↑ Abs. 1.3.2 ein Schluss von einem überraschenden Resultat auf einen erklärenden Fall. KNIPPING (2003, 132f.) verwendet nun aber auch das TOULMIN-Schema zur Darstellung der Abduktion in dem Sinne, dass sie die Pfeilrichtung zwischen Datum (D) und Konklusion (K) umkehrt:

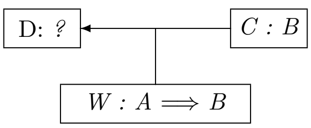


Kritik an Identifizierung von Argument und Abduktion

Die besonderen Eigenschaften der Schlussform Abduktion werden in dieser Darstellung als Argument nicht deutlich (vgl. MEYER (2007, 94f.)): Wird der abduktive Schluss von einem überraschenden Resultat auf einen erklärenden Fall nämlich als gegenläufiges Argument von einer Konklusion auf ein Datum interpretiert, wird das Datum nur noch zu einem potentiell möglichen Fall, als dass es eine unzweifelhafte, vorgegebene Tatsache ist (lat. *datum – Gegebenes*). Umgekehrt erfährt die Konklusion eine funktionale Änderung von einer fraglichen, zu begründenden Behauptung zu einem vorliegenden Resultat als Ausgangspunkt eines Abduktionsschlusses. Und schließlich muss auch das Gesetz als Regel selbst bei unterkodierten Abduktionen assoziiert werden, so dass dabei nicht vermöge der Regel gefolgert wird, anders als es die obige Darstellung nahelegt.

PEDEMONTE*s Darstellung der Abduktion*

Bei PEDEMONTE (2007, 29) findet sich folgende Darstellung des abduktiven Schlusses. Dabei sind die bezeichnenden Buchstaben D, C, W Kürzel für *datum*, *conclusion* und *warrant* (Regel), und die Zeichen *?*, A, B stehen für Aussagen.

> "In Toulmin's model an abductive step can represented as follows"
>
> 
>
>
> "The question mark means that data are to be sought in order to apply the inference rule justifying the claim."
>
> (Argument nach) PEDEMONTE (2007, 29)

Dabei geht PEDEMONTE nicht weiter auf die Umfunktionalisierung der Elemente eines solchen Arguments ein. Wie oben wird jedoch bei gegebener Konklusion C unter gegenläufiger Verwendung einer assoziierten Regel W auf ein erklärendes

Datum D geschlossen und damit die Funktionalität von Konklusion, Regel und Datum verändert. Erst rückblickend, wenn das Datum D gefunden wurde, kann die nunmehr bekannte Regel W angewendet werden, um auf die Konklusion C zu schließen.

Erklärungsversuch Entdeckung mit latenter Beweisidee

Erklärungsversuch Bidirektionalität von Aussagen

Der logischen Beschreibung komplexer Konstellationen des Entdeckens und Begründens ist eine Abfolge von Peirce-Schemata dienlicher als ein Toulmin-Schema. Bei der Entdeckung einer Behauptung mit latenter Beweisidee etwa kann der Lernende nach ↑ Kap. 1.3.3 in seinen deduktiven Schlüssen zur Herstellung des Resultats der Abduktion (nachträglich) einen Beweis erkennen. Als ein weiterer Entstehungsgrund der sich im obigen Toulmin-Schema von Pedemonte resp. Knipping wiederfindenden Verschmelzung mehrerer Peirce-Schemata lässt sich die Bidirektionalität mancher mathematischer Aussagen (genau dann . . . , wenn . . .) vermuten. Ein Beispiel hierzu ist der Satz von Thales (vgl. Meyer & Voigt (2008, 147)):

Resultat	Der am Punkt R eines Dreiecks PQR anliegende Winkel ist ein rechter Winkel.
Gesetz	Satz von Thales
Fall	Der Punkt R eines Dreiecks PQR liegt auf einem Halbkreis über der Strecke PQ.

Resultat und Fall dieses abduktiven Schlusses mit dem Satz des Thales' als Gesetz lassen sich jeweils als Konklusion und Datum eines Arguments im Sinne Toulmins auffassen. Die Autoren schreiben hierzu:

> ”Wenn man die Kategorien ’Resultat’ und ’Fall’ mitsamt ihres Inhalts vertauscht, also die erste und die letzte Zeile des Schemas komplett wechselt, ergibt sich das Schema der Deduktion; im konkreten Beispiel erhält man eine deduktive Anwendung des Thalessatzes. Wenn man nicht die Kategorien, sondern nur die konkreten Aussagen vertauscht, ergibt sich die Abduktion zur Entdeckung der Umkehrung des Thalessatzes, wobei in der Kategorie ’Gesetz’ die Umkehrung des Thalessatzes stände.” (Meyer & Voigt, 2008, 147)

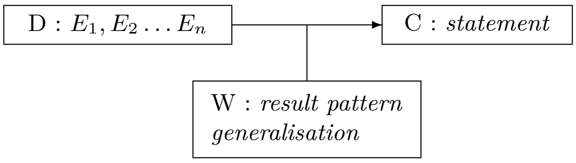
Hieraus ergibt sich, dass nur bei entsprechenden bidirektionalen Aussagen die Schlussschemata Abduktion und Deduktion gefahrlos umkehrbar und austauschbar und deshalb mit dem Toulmin-Schema ununterscheidbar identifizierbar sind.

Argument und Induktion

result pattern generalisation

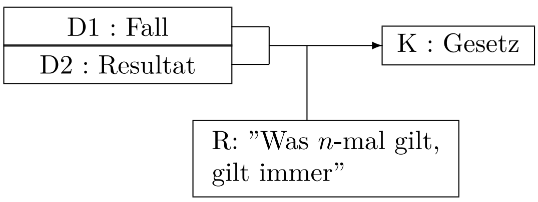
In Anlehnung an HAREL (2002, 191) unterscheidet PEDEMONTE (2007, 29) zur Darstellung der sogenannten Induktion zwischen zwei Verallgemeinerungstypen, der *result pattern generalisation* und der *process pattern generalisation*. Bei der *result pattern generalisation* wird von Einzelaussagen, die ein Ergebnismuster bilden, auf eine Gesamtaussage geschlossen:

> "Result pattern generalisation focuses on regularity in the results, and it can be visualised as: $E_1, E_2, E_3 \ldots$ where E is a property generalised on cases $1, 2, 3$ and so on. In Toulmin's model result pattern generalisation can be represented as follows:"



> "$E_1, E_2, \ldots E_n$ are the claims of the previous steps."
>
> (Argument nach) PEDEMONTE (2007, 29) [Hervorhebungen angepasst]

Dieses Argument des *result pattern generalisation* ist eine andere Darstellung für ein von MEYER (2007, 96) in seiner induktiven Verwendung kritisiertes TOULMIN-Schema. Dabei setze man an die Stelle der einzelnen Behauptungen $E_1, E_2, \ldots E_n$ den Fall D1 und das Resultat D2 als Prämissen der als Argument dargestellten sogenannten Induktion:



Argument nach (MEYER, 2007, 96)

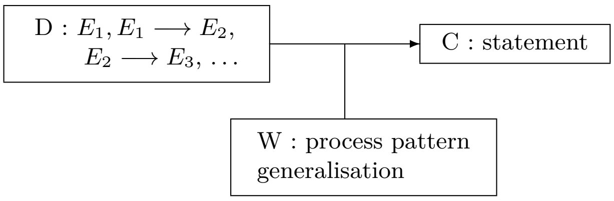
Kritik des result pattern generalisation

Der Autor bemerkt dazu, dass bei diesem Argument zur Darstellung der sogenannten Induktion die allgemeine Aussage (das Gesetz als Konklusion K) formell auf einer Ebene mit den konkret gegebenen Fakten D1 und D2 (Fall und Resultat) steht. Datum und Konklusion sollen MEYER (2007, 96) zufolge jedoch den gleichen Grad an Allgemeinheit aufweisen, um die funktionale Bedeutung der einzelnen Elemente des TOULMIN-Schemas zu wahren. Auch wird das Resultat, welches eigentlich vermöge des Falls vorausgesagt wird, bereits als gegebenes Datum benutzt. Zudem liegt im sogenannten Induktionsschema eigentlich der PEIRCEsche Drei-Schritt verborgen (s.u. und ↑ Abs. 1.3.4). Das *result pattern* *generalisation* legitimiert als angeführte Metaregel R bzw. *warrant* W das aus einer unterstellten Beziehung zwischen den jeweiligen Daten (Fall und Resultat) gefolgerte allgemeine Gesetz. Dass ein allgemeingültiger Zusammenhang zwischen den vorliegenden Daten D1 und D2 (Fall und Resultat) besteht, steht aber gerade in Zweifel und soll in Form eines allgemeingültigen Gesetzes als Konklusion K des Arguments eigentlich gefolgert werden. Formal-logisch ergibt sich also ein Zirkelschluss, und die angeführte Metaregel beschreibt die sogenannte Induktion selbst.

process pattern generalisation

Bei dem *process pattern generalisation* wird von ein Verlaufsmuster bildenden Einzelschlüssen zwischen Aussagen auf eine Gesamtaussage geschlossen:

> "Process pattern generalisation focuses on regularity in the process, and it can be visualised as: $E_1 \longrightarrow E_2, E_2 \longrightarrow E_3, \ldots$ Generalisation is given by the inference connecting one case to the next one. In Toulmin's model process pattern generalisation can be represented as follows:"



> "$E_1, E_1 \longrightarrow E_2, E_2 \longrightarrow E_3, \ldots$ are the claims of the previous arguments."
>
> (Argument nach) Pedemonte (2007, 29f.) [Hervorhebungen angepasst]

Kritik des process pattern generalisation

Hier liegt als Datum neben der Anfangsbehauptung E_1 eine Folge von deduktiven Schlüssen wie $E_1 \longrightarrow E_2$ zwischen den vormaligen Behauptungen $E_1, E_2, ...$ vor. Aus einzelnen korrekt durchführbaren deduktiven Schlüssen wird letztlich der allgemein durchführbare deduktive Schluss $E_{i-1} \longrightarrow E_i$ für ein beliebiges $i \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ gefolgert, der zusammen mit der Korrektheit der Anfangsbehauptung E_1 die allgemeine Behauptung $C := E_i \ \forall \ i \in \mathbb{N}$ deduktiv begründet (sogenannte vollständige Induktion als Deduktionsschema). Es besteht Anlass zur Hoffnung, dass der Lernende die Allgemeinheit des deduktiven Schlusses $E_{i-1} \longrightarrow E_i, i \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ im Besonderen vorausgehender deduktiver Schlüsse wie $E_1 \longrightarrow E_2$ erkennt und damit beispielgebunden beweist. Die Kritik an der obigen Darstellungsweise besteht gleichwohl wiederum darin, dass sich in der Metaregel W das eigentliche Argument der so genannten, nunmehr vollständigen Induktion verbirgt.

Meyer (2007, 96f.) verschärft die Kritik an solchen Darstellungen von so genannter (ggf. vollständiger) Induktion noch dahingehend, dass in ihnen im Sinne des Peirceschen Dreischritts (↑ Abs. 1.3.2) eigentlich alle drei Schlussformen Abduktion, Induktion und Deduktion enthalten seien:

> "Argumente der dargestellten Art enthalten, entsprechend der Analyse der Forschungslogik von Peirce, neben dem Schlussverfahren der Induktion, wenn die Konklusion etwa rechnerisch als richtig bestätigt wurde, vor allem das Schlussverfahren der Deduktion, da Konsequenzen aus einem bekannten Gesetz gezogen und auf den neuen Fall übertragen werden. In dem dargestellten Argument kann also der gesamte Dreischritt oder zumindest die Schritte Abduktion und Deduktion wiedergefunden werden." (Meyer, 2007, 96f.)

Würde also die sogenannte (ggf. vollständige) Induktion als Argument dargestellt werden, wie dies Pedemonte (2007) versucht, würden nach Meyer (2007, 97) abduktive, deduktive und induktive Schlüsse miteinander verschmelzen und damit auch entsprechende Entdeckungs- und Begründungsprozesse logisch nicht zu unterscheiden sein. Das Toulmin-Schema eignet sich also nicht zur Differenzierung zwischen Abduktion, Induktion und Deduktion und wird in der vorliegenden Arbeit somit nur zur Darstellung von Beweisen als latente Sinnstrukturen benutzt.

cognitive unity und Prüfen mit latenter Beweisidee

Vorstehend wurde an der Darstellung der sogenannten Induktion mittels des Toulmin-Schemas formale Kritik an Pedemonte (2007) geübt. In ↑ Kap. 1.5 schließt sich eine inhaltliche Kritik hinsichtlich der so genannten *cognitive unity* an, mit dem eine mögliche Strukturgleichheit zwischen dem Entdecken (respektive Prüfen) und dem Begründen einer Behauptung gefasst werden soll (zu "conjecture production" und "proof construction" vgl. in diesem Zusammenhang Boero et al. (1996, 2-121f.)). Wenn überhaupt, wäre der Begriff der *cognitive unity* nach dem hier Gesagten eher mit den Schlussformen nach Peirce zu fassen. Was Pedemonte (2007) vermöge des Toulmin-Schemas als *process pattern generalisation* darstellt, ist (neben der Verifizierung des Induktionsanfangs E_1) die Erkenntnis des allgemeinen Induktionsschlusses $E_{i-1} \longrightarrow E_i, i \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ in der Besonderheit eines Schlusses wie $E_1 \longrightarrow E_2$. Es wird sich ferner zeigen, dass diese Erkenntnis der Strukturgleichheit zwischen Beweisfindung und Beweisführung ein Sonderfall des Entdeckens resp. Prüfens mit latenter Beweisidee ist, das sich zum beispielgebundenen Beweisen wandeln kann.

Vorstehend ist versucht worden, die Beziehungen zwischen den Peirceschen Schlussformen Abduktion, Induktion, Deduktion und dem Argumentschema nach Toulmin zu klären. Es ist deutlich geworden, dass allein die Deduktion mit dem Argumentschema bedingt vereinbar ist. Um die theoretische Fassung des beispielgebundenen Beweisens im nachfolgenden ↑ Kap. 1.5 vorzubereiten, wird nun das beispielgebundene Argument(gefüg)e eingeführt.

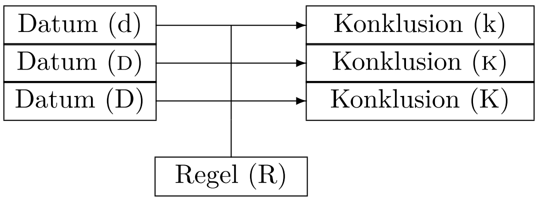
1.4.4 Beispielgebundene Argumente

Wie in ↑ Abs. 1.4.3 dargestellt, kann das Toulmin-Schema in seiner Einschränkung auf die Bestandteile Datum (D), Konklusion (K) und Regel (R) mit dem Deduktionsschema nach Peirce identifiziert werden. Wird die Konklusion (K) vermöge der Regel (R) nämlich aus dem vorliegenden Datum (D) gefolgert, ähnelt das Argument einem deduktiven Schluss von einem Fall auf ein Resultat vermöge eines Gesetzes. Zur Grundlegung dessen, was beispielgebundenes Beweisen ist, kann deshalb am Toulmin-Schema auch erläutert werden, was ein *beispielgebundenes Argument* (resp. *beispielgebundenes Argumentgefüge*) ist.

Beispielhafte Daten und Konklusionen

beispielhafte Daten und Konklusionen

Datum (d) und Konklusion (k) können in einem Argument zunächst im Beispiel gehalten (beispielhaft) sein. Die beispielhafte Konklusion (k) wird dabei als im Beispiel gehaltene Behauptung vermöge einer Regel (R) aus einem vorliegenden beispielhaften Datum (d) gezogen. Fraglich ist nun, ob auch eine allgemeinere Konklusion (ᴋ) als allgemeingültige Behauptung gefolgert werden kann, deren Konkretion die beispielhafte Konklusion (k) ist. Eine denknotwendige Folgerung der Konklusion (ᴋ) aus einem vom beispielhaften Datum (d) her entsprechend verallgemeinerten Datum (ᴅ) kann vermöge der Regel (R) durchaus gelingen, da diese allgemeingültig ist. Daten und Konklusionen können hinsichtlich ihres Allgemeinheitsgrads überdies geschichtet sein (aber nicht notwendigerweise auf einer Ebene liegen), so dass ggf. aus einem noch allgemeineren Datum (D) vermöge der Regel (R) eine entsprechend allgemeinere Konklusion (K) gezogen werden kann:



beispielgebundenes Argument

Zur formellen Unterscheidung des Allgemeinheitsgrads von Datum und Konklusion eines *beispielgebundenen Arguments* ist die Klein-, Kapitälchen- und Großschreibweise verwendet worden. Der bisherigen Sprechweise des beispielgebundenen Beweisens nach heißt dies: Wenn es bereits einen Betrachter gibt, der in der Besonderheit eines vorliegenden Datums (d) und einer daraus vermöge der Regel (R) denknotwendig gefolgerten Konklusion (k) das Allgemeine des Datums (ᴅ resp. D) und das Allgemeine der daraus vermöge der Regel (R) denknotwendig gefolgerten Konklusion (ᴋ resp. K) sieht, liegt ein beispielgebundenes Argument vor. Die Schwierigkeit der Erkenntnis des Allgemeingültigen im Besonderen kann darin liegen, die größere Komplexität bei gleichzeitig bestehend bleibender Gültigkeit des Argumentgefüges gedanklich und verbal zu erfassen.

Beispiel Kommutativität und Assoziativität

Zur Illustration eines *beispielgebundenen Argumentgefüges* werden erneut die Termumformungen herangezogen:

$$\begin{array}{ccc} T = (3 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 4) & \longrightarrow & T = (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4) \\ T = (a \cdot a) \cdot (b \cdot b) & \longrightarrow & T = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \\ T = (a \cdot \ldots \cdot a) \cdot (b \cdot \ldots \cdot b) & \longrightarrow & T = (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b) \end{array}$$

Assoziativität & Kommutativität der Multiplikation

Der Betrachter kann angesichts der vorstehenden aufgefächerten Darstellung von einem *beispielgebundenen Argument* sprechen. Der Lernende mag dieses *beispielgebundene Argument* zunächst an den Beispielzahlen 3 und 4 vollziehen, indem er aus dem Datum (d): $T = (3 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 4)$ in mehrfacher Anwendung des Assoziativ- und Kommutativgesetzes als Regeln (R) die Konklusion (k): $T = (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4)$ folgert (wie im mehrgliedrigen Argument aus ↑ Abs. 1.4.2). Dabei muss er zwar noch nicht notwendigerweise erkennen, dass dieses Argument strukturgleich für beliebige Beispielzahlen ist und entsprechend allgemeiner geführt werden kann. Der Lernende kann die Beispielzahlen 3 und 4 aber auch als Repräsentanten von beliebigen natürlichen (ganzen, rationalen, reellen, komplexen) Zahlen a und b ansehen und gedanklich eine entprechende Konklusion ziehen. Dabei muss er das allgemeinere Datum (D): $T = (a \cdot a) \cdot (b \cdot b)$ und die allgemeinere Konklusion (K): $T = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$ nicht explizit nennen – er denkt sie sich: Auch wenn der Lernende verbal im Konkreten bleibt, kann er kognitiv einem allgemeineren Argument (einem allgemeineren Datum, einer allgemeineren Konklusion) folgen und nachträglich metasprachlich zu erkennen geben, dass sich die allgemeinere Konklusion (K) aus dem allgemeineren Datum (D) vermöge der Regeln (R) ergibt.

Fortschreitende Verallgemeinerung

Es werde nun die Möglichkeit betrachtet, dass der Lernende nicht nur die Basiszahlen als variabel ansieht, sondern auch den Exponenten resp. die Anzahl der Faktoren. Der Lernende kann das Argument damit für ein noch allgemeineres Datum (D) und eine noch allgemeinere Konklusion (K) ziehen und sich dabei auf dieselben zugrunde gelegten Regeln (R) der Assoziativität und Kommutativität der Multiplikation berufen. Das vorstehende Argument ist bereits eine verkürzte Darstellung eines mehrgliedrigen Arguments als Argumentgefüge, dem die Assoziativität und Kommutativität der Multiplikation als Regel mehrfach unterliegt (vgl. wiederum das mehrgliedrige Argument aus ↑ Abs. 1.4.2). In der Tat kann es nun Schwierigkeiten bereiten, die größere Komplexität des Argumentgefüges zu erfassen, wenn der Exponent resp. die Anzahl der Faktoren a und b variiert.

Grenzen fortschreitender Verallgemeinerung

Die fortschreitende Verallgemeinerung eines Arguments oder Argumentgefüges kann jedoch an Grenzen stoßen. Das obige Argument(gefüge) gilt etwa zunächst auch, wenn jede multiplikative Verknüpfung der Beispielzahlen und Terme durch eine additive Verknüpfung + ersetzt werden würde. Dies änderte auch nichts an der Argumentstruktur, zumal Assoziativität und Kommutativität auch für die additive Verknüpfung + fortbestehen. Eine teilweise Ersetzung der Operation wie $(a \cdot a) + (b \cdot b) \neq a \cdot b + a \cdot b$ oder wie $a^2 + b^2 \neq (a \cdot b)^2$ wäre allerdings nicht statthaft. Was veranlasst viele Lernende trotzdem zu solchen inkorrekten Verallgemeinerungen? Betrachtet werde dazu eine verkürzte Darstellung des mit der Potenzdefinition zur Potenzregel vervollständigten, mehrgliedrigen Arguments:

$$\begin{array}{|c|ccc|c|}
\hline
T = 3^2 \cdot 4^2 & & \longrightarrow & & T = (3 \cdot 4)^2 \\
\hline
T = a^2 \cdot b^2 & & \longrightarrow & & T = (a \cdot b)^2 \\
\hline
T = a^n \cdot b^n & & \longrightarrow & & T = (a \cdot b)^n \\
\hline
\end{array}$$

Potenzdefinition,
Assoziativität & Kommutativität der Multiplikation

Dieses Argumentgefüge enthält die Potenzdefinition

$$a^n := (\underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a}) \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

sowie die Assoziativität und Kommutativität der Multiplikation als Regeln. Der Lernende könnte geneigt sein, aus dem additiv modifizierten Datum (D): $T = a^n + b^n$ eine entsprechend modifizierte Konklusion (K): $T = (a + b)^n$ zu folgern, da die Regeln der Assoziativität und Kommutativität bezüglich der additiven Verknüpfung + fortbestehen. Dabei übergeht er die Regel der Potenzdefinition als fortgesetzte Multiplikation, so dass die Konklusion falsch wird. Eine ähnliche Schwierigkeit tritt auf, wenn für den Exponenten n statt $\mathbb{N}$ ein allgemeinerer Zahlbereich wie $\mathbb{Z}$ gewählt wird. Dann können die bisher angeführten Regeln versagen – wie hier die Potenzdefinition in der betrachteten Form, so dass diese erst modifiziert werden muss. Zudem ist das *beispielgebundene Argumentgefüge* ggf. anzupassen, im Falle ganzzahliger Exponenten $n \in \mathbb{Z}$ treten etwa Bruchrechenregeln hinzu.

strukturelle Änderung von Argumenten

Im Rahmen solch fortschreitender Verallgemeinerungen kann sich das betrachtete *beispielgebundene Argumentgefüge* also durchaus auch strukturell ändern, und bisher fraglos für allgemeingültig gehaltene Regeln müssen gegebenenfalls modifiziert werden. Wird so weit verallgemeinert, dass die betrachtete Konklusion inkorrekt wird, liegt eine zu weitgehende Verallgemeinerung vor. Umgekehrt kann von einer nicht vollständigen Verallgemeinerung gesprochen werden, wenn die betrachteten Konklusionen in ihrer Struktur oder in ihren Gültigkeitsbereichen auf der Basis des Vorwissens noch erweiterbar sind. Konkretes hierzu liefert etwa die Einzelfallstudie in Kap. ↑ 3.3 mit dem Aufgabenbeispiel des vollständigen Graphen, welches auch nun in ↑ Kap. 1.5 Erwähnung findet.

zu weitgehende und nicht vollständige Verallgemeinerung

Das Argumentschema von TOULMIN ist vorstehend hauptsächlich dazu verwendet worden, seine Beziehung zur Schlussform Deduktion zu klären und das beispielgebundene Argumentgefüge einzuführen. Damit kann nun der Beweis als Sinnstruktur in seiner Darstellung als (ggf. beispielgebundenes) Argumentgefüge und damit das beispielgebundene Beweisen theoretisch gefasst werden.

1.5 Latente Sinnstrukturen und beispielgebundenes Beweisen

beispielgebundenes Beweisen i.e.S. und i.w.S.

Im Folgenden wird das beispielgebundene Beweisen im engeren Sinne (i.e.S.) sowie im weiteren Sinne (i.w.S.) gefasst und damit die theoretische Grundlage der vorliegenden Arbeit gelegt. Hierfür wird der Begriff der latenten Sinnstruktur verwendet (↑ Abs. 1.5.1). Anschließend wird geklärt, was unter der subjektiven Realisierung beim Entdecken und Prüfen mit latenter Beweisidee zu verstehen ist (↑ Abs. 1.5.2). Dies führt alsdann zum Beweis als subjektiv realisierter und manifestierter Sinnstruktur (↑ Abs. 1.5.3). Darauf aufbauend kann schließlich das beispielgebundene Beweisen definiert werden (↑ Abs. 1.5.4).

der Beweis als latente Sinnstruktur

In ↑ Abs. 1.3.3 wurde das beispielgebundene Beweisen im Zusammenhang mit dem Entdecken und dem Prüfen mit latenter Beweisidee diskutiert, ohne dass der Begriff der Latenz theoretisch präzisiert wurde. Versteht man den Beweis als eine latente Sinnstruktur, ermöglicht dies die Lösung des scheinbaren Widerspruchs, dass eine allgemeingültige Aussage trotz Bindung an ein Beispiel bewiesen wird. Das beispielgebundene Beweisen kann dann als ein (nachträgliches) Erkennen des Allgemeingültigen im Besonderen eines Beispiels betrachtet werden, und zwar im Sinne der subjektiven Realisierung (und ggf. der Manifestierung) einer (vormals) latenten Sinnstruktur, welche wir Beweis nennen.

latente Sinnstrukturen zur Präzisierung des Forschungsgegenstands

Die Objektive Hermeneutik trägt zur Analyse latenter Sinnstrukturen die passenden Mittel bei. Eine Besonderheit der vorliegenden Forschungsarbeit besteht darin, dass – wie nachstehend ausgeführt – die Objektive Hermeneutik hier primär der theoretischen Präzisierung des beispielgebundenen Beweisens als Forschungsgegenstand selbst dient, und eher sekundär methodologischen Charakter hat.

1.5.1 Latente Sinnstrukturen und (Interaktions-)Texte

Objektive Hermeneutik zur Analyse latenter Sinnstrukturen

Nachfolgend werden zunächst einige Schlüsselbegriffe der Objektiven Hermeneutik vorgestellt, mit der ein komplexes theoretisches, methodologisches und methodisches Konzept der qualitativ orientierten Sozialforschung bezeichnet wird. Dieses Konzept geht auf ein von Oevermann in den späten 1960er Jahren geleitetes Forschungsprojekt "Elternhaus und Schule" zurück. Es wurde zunächst in der soziologisch motivierten Sozialisationstheorie zur Beschreibung und Analyse innerfamilialer Interaktionsstrukturen verwendet. Oevermann et al. (1979) selbst führte die Objektive Hermeneutik ein Jahrzehnt später als Methodologie mit allgemeiner forschungslogischer Bedeutung in die Sozialwissenschaften ein (vgl. ↑ Abs. 2.2.4 und ↑ Abs. 2.2.7).

latente Sinnstrukturen

(Interaktions-)Texte und Ausdrucksgestalten

objektive und subjektive Sinngehalte

Als einen zentralen Gegenstand der Objektiven Hermeneutik nennt Oevermann et al. (1979, 378ff.) die latenten Sinnstrukturen bzw. objektiven Bedeutungsstrukturen von *(Interaktions-)Texten* oder so genannten *Ausdrucksgestalten*, die als Protokolle realer, symbolisch vermittelter sozialer Handlungen verschriftlicht oder visualisiert vorliegen. In der vorliegenden Arbeit fallen darunter etwa die Transkripte von Interviewsequenzen zum beispielgebundenen Beweisen oder die Zeichnungen der interviewten Schüler. Auch könnte man an schriftlich niedergelegte beispielgebundene Beweise als Äußerung einer Person ohne (oder mit imaginiertem) Gegenüber denken. Insofern kann der Oevermannsche Terminus des *(Interaktions-)Texts* hier als Text im weiteren Sinne verstanden werden, so dass im Rahmen dieser Forschungsarbeit einfach von Text gesprochen werde. Nach Oevermann et al. (1979, 379) sind in der Objektiven Hermeneutik für die Auslegung von Interaktionstexten die darin liegenden objektiven Sinngehalte relevant, d.h. die latenten Sinnstrukturen und zunächst nicht der für den oder die beteiligten Akteur(e) je verschiedene, subjektiv gemeinte Sinn. Dieser kann gleichwohl eine der möglichen latenten Sinnstrukturen bilden, sofern ein subjektiv gemeinter Sinn eines Beteiligten auch ein Ergebnis der jeweiligen Rekonstruktion latenter Sinnstrukturen ist. Die latenten Sinnstrukturen eines jeden *(Interaktions-)Texts* besitzen an sich eine Realität beanspruchende objektive Bedeutsamkeit, welche die daher objektiv genannte Hermeneutik zu rekonstruieren versucht.

> "Mit dem Begriff der latenten Sinnstrukturen werden objektive Bedeutungsmöglichkeiten als real eingeführt, unabhängig davon, ob sie von den an der Interaktion beteiligten Subjekten intentional realisiert wurden oder nicht." (Oevermann et al., 1979, 380)

der Beweis als Beispiel einer latenten Sinnstruktur

Diese latenten Sinnstrukturen sind ihrer theoretischen Definition nach nicht auf den Bereich der sozialen Welt beschränkt, sie können je nach Forschungsgebiet etwa ökonomischer, sprachlicher oder mathematischer Natur sein, auch wenn ursprünglich das primäre Anwendungsgebiet der Objektiven Hermeneutik die so genannte soziale Welt gewesen ist. Im Folgenden wird der Beweis als latente Sinnstruktur betrachtet, welche von einem Schüler – gegebenenfalls im Austausch mit dem Forscher, dem Experten, dem Lehrer, den Mitschülern oder mit sich selbst – subjektiv realisiert werden kann, aber nicht subjektiv realisiert werden muss. Die zu betrachtenden Texte können aus einer Transkription von mündlichen Interviewsequenzen zwischen Forscher oder Lehrer und Schüler und dessen schriftliche Aufzeichnungen dazu bestehen (↑ Abs. 2.3.3). Der entäußerte und dokumentierte Text eröffnet dem Forscher dann die Möglichkeit, die intentional repräsentierten, je unterschiedlich ausgeprägten Beweishandlungen des Schülers vor dem Hintergrund des im Text für den Experten erkennbaren Beweises in seiner objektiven Bedeutsamkeit als latenter Sinnstruktur zu verstehen. In der Objektiven Hermeneutik fragt man nun danach, welche (latenten) Sinnstrukturen sich in den als *(Interaktions-)Texte* dokumentierten *Ausdrucksgestalten* verkörpern:

> "Interaktionstexte konstituieren aufgrund rekonstruierbarer Regeln objektive Bedeutungsstrukturen und diese objektiven Bedeutungsstrukturen stellen die latenten Sinnstrukturen der Interaktion selber dar. Die objektiven Bedeutungsstrukturen von Interaktionstexten, Prototypen objektiver sozialer Strukturen überhaupt, sind Realität (und haben Bestand) analytisch (wenn auch nicht empirisch) unabhängig von der je konkreten intentionalen Repräsentanz der Interaktionsbedeutungen auf seiten der an der Interaktion beteiligten Subjekte." (Oevermann et al., 1979, 379)

Im Folgenden werden die vorstehenden allgemeineren Ausführungen zum Begriff der latenten Sinnstruktur nun zunächst anhand des allgemeinen Sprachgebrauchs kontextualisiert. Anschließend werden die in ↑ Abs. 1.4.4 eingeführten (beispielgebundenen) Argumentgefüge als latente Sinnstrukturen betrachtet.

Sprache als latente Sinnstruktur

Beispiel Spracherwerb

Wie schon in ↑ Abs. 1.2.1 bei der Besprechung des paradigmatischen Beispiels im Sinne von Freudenthal (1978, 214) thematisiert wurde, wenden Kinder und Muttersprachler ihre Sprache einfach an, ohne dass sie deren Grammatik als Struktur explizit kennen müssen. In ihrer Struktur kann ihnen die eigene Sprache latent bleiben, gerade weil ihnen deren Anwendung in täglicher sozialer Praxis selbstverständlich und geläufig erscheint. Wer umgekehrt als Jugendlicher oder Erwachsener eine Zweitsprache erlernt, macht sich mit einer anderen Sprachstruktur explizit vertraut und lernt darüber auch die Grammatik als Sprachenstruktur selbst kennen. Damit kann auch die eigene Sprache als grammatikalisch vorfindbare Struktur ihre Latenz allmählich verlieren.

Beispiel Alltagssprache

Ein mehr die soziale Interaktion betreffendes Beispiel ist folgendes: Den *per SMS* gesendeten Text "morgen mein freund ich komme so gegen 18 uhr" mag der Sender anders intendiert haben als der Empfänger auslegen kann: Der Sender will dem Empfänger einen guten Morgen wünschen und sich am gleichen Tag für 18 Uhr empfehlen. Der Empfänger erwartet den Sender jedoch erst am darauf folgenden Tag. Die objektive Mehrdeutigkeit des Interakts (in der Verwendung des gleichen Wortes *morgen* für die frühe Tageszeit und den kommenden Tag) besteht aber *a priori* unabhängig von dem je subjektiv intendierten Sinn der Beteiligten, sie ist darum (zunächst) latent.

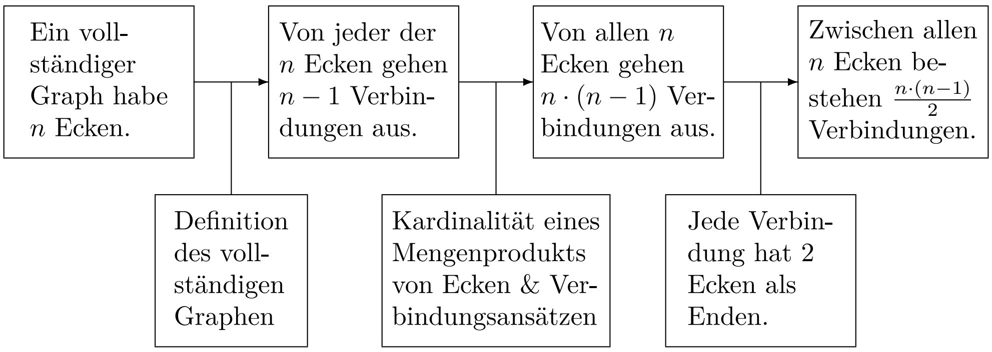
Beweis und Argumentgefüge als latente Sinnstruktur

Aufgabenbeispiel vollständiger Graph

Wie bereits erwähnt, lassen sich auch Beweise als latente Sinnstrukturen auffassen. Nach ↑ Abs. 1.4.4 kann ein Beweis in seiner Struktur als Argumentgefüge im Sinne Toulmins dargestellt werden. Zur Illustration lässt sich etwa die folgende Behauptung an einem vollständigen Graphen betrachten:

> **Behauptung:** Wenn ein vollständiger Graph n Ecken hat, dann bestehen $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Verbindungen zwischen diesen Ecken.

Eine mögliche Beweisdarstellung dieser Behauptung wäre das folgende mehrgliedrige Argumentgefüge:



Um sich den Beweis anschaulicher zu machen, lässt sich ein Fünfeck denken, das hierbei ohne Beschränkung der Allgemeinheit in einen Kreis einbeschrieben ist und einen vollständigen Graphen repräsentiert:

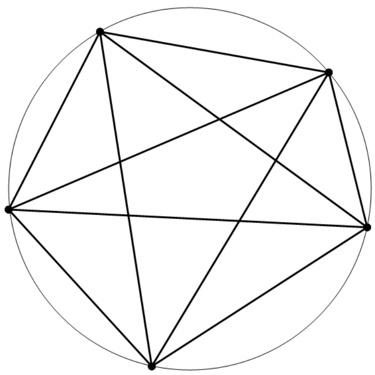


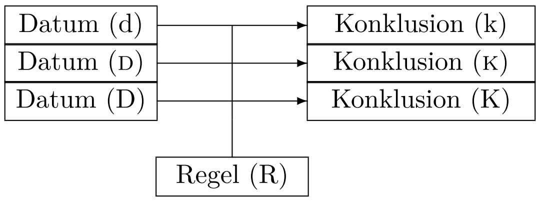
Abb. 1.13: einem Kreis einbeschriebener vollständiger Graph mit 5 Ecken

Nachstehend wird das obige Argumentgefüge vermöge der Setzung $n = 5$ an ein Beispiel gebunden.

Beispielgebundenes Argumentgefüge als latente Sinnstruktur

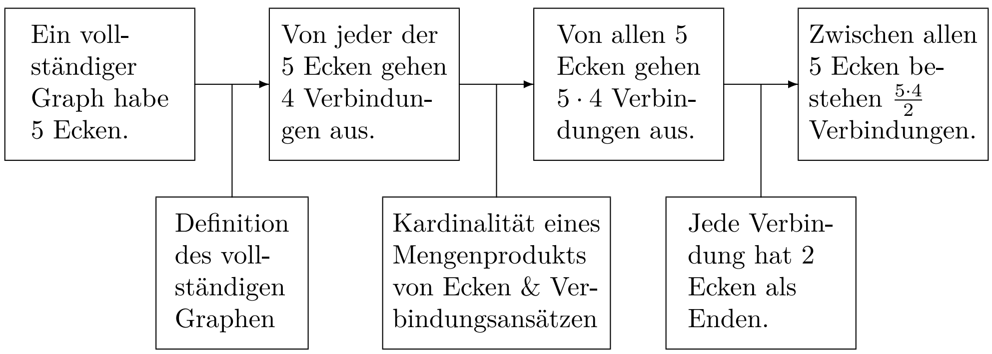
In ↑ Abs. 1.4.4 ist bereits das beispielgebundene Argument eingeführt worden als Bestandteil eines Argumentgefüges, dessen Konklusionen und Daten teilweise im Beispiel gehalten sind. Beim beispielgebundenen Argument erkennt ein Betrachter in der Besonderheit eines vorliegenden Datums (d) und einer daraus vermöge einer Regel (R) denknotwendig gefolgerten Konklusion (k) das Allgemeine des Datums (D resp. D) und das Allgemeine der daraus vermöge der Regel (R) denknotwendig gefolgerten Konklusion (K resp. K):

beispielgebundenes Argument(gefüge)



Zur formellen Unterscheidung des Allgemeinheitsgrads von Datum und Konklusion eines (beispielgebundenen) Arguments ist wieder die Klein-, Kapitälchen- und Großschreibweise verwendet worden. Entsprechendes gilt für ein Argumentgefüge. Dabei können die Daten und Konklusionen eines Argumentgefüges geschichtet vorliegen und müssen in ihrem Allgemeinheitsgrad auch nicht notwendigerweise auf einer Ebene liegen. In der betrachteten Beispielaufgabe des vollständigen Graphen können Daten und Konklusionen nun auch durchweg im Beispiel gehalten sein:

Aufgabenbeispiel vollständiger Graph ($n = 5$)



Der Kürze halber werde im Vorgriff auf die Analyse in ↑ Kap. 3.3 ein fiktives Beispielinterakt betrachtet. Ein Schüler möge begründen, warum ein vollständiger Graph mit 5 Ecken aus $\frac{5\cdot 4}{2}$ Verbindungen besteht:

Beispielinterakt

> *Von jeder Ecke des* 5*-Ecks gehen Verbindungen aus, deshalb über dem Bruchstrich* 5*. Keine Ecke ist aber mit sich selber verbunden, deshalb kommen von jeder Ecke nur* $5 - 1 = 4$ *Verbindungen, und nicht* 5*. Also steht* 4 *über dem Bruchstrich. Ich rechne jetzt* $5 \cdot 4$*, weil ich insgesamt* 5 *mal* 4 *ausgehende Verbindungen habe. Dann teile ich noch durch* 2*, weil jede Verbindung zwei Enden hat und doppelt gezählt wird.*

latente Beweisidee ohne subjektive Realisierung

Der Schüler mag bewusst nur beabsichtigt haben, die spezielle Behauptung für den Graphen mit 5 Ecken zu begründen. Für den Schüler kann der Beweis der obigen allgemeingültigen Behauptung in seiner Struktur also noch latent geblieben sein oder bleiben. In den vorgebrachten Argumenten des Schülers ist der Beweis der allgemeinen Behauptung jedoch schon angelegt, und dies sogar schon unter vollständiger Nennung der verwendeten Regeln. Der Schüler hat den Beweis gewissermaßen als beispielgebundenes Argumentgefüge produziert, noch ohne dieses in seiner Struktur als Beweis für die allgemeine Behauptung subjektiv zu realisieren.

Aufgabenbeispiel Potenzregel

Als weiteres Aufgabenbeispiel werde die zweite Potenzregel betrachtet, deren Beweis nach ↑ Abs. 1.4.4 als mehrgliedriges Argumentgefüge wie folgt dargestellt werden kann:

$T = 3^2 \cdot 4^2$	→	$T = (3 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 4)$	→	$T = (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4)$	→	$T = (3 \cdot 4)^2$
$T = a^2 \cdot b^2$	→	$T = (a \cdot a) \cdot (b \cdot b)$	→	$T = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$	→	$T = (a \cdot b)^2$
$T = a^n \cdot b^n$	→	$T = (a \cdot \ldots \cdot a) \cdot (b \cdot \ldots \cdot b)$	→	$T = (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)$	→	$T = (a \cdot b)^n$
	Potenzdefinition		Assoziativität & Kommutativität der Multiplikation		Potenzdefinition	

Es werde angenommen, der Schüler spreche in der Sprache der Beispiele, d.h. er nenne nur die Beispielzahlen 2, 3 und 4, wie es das im Beispiel gehaltene Argumentgefüge in der ersten Zeile zeigt. Durch eine solche, im Beispiel gehaltene Deduktionskette wird das überraschende Resultat etwa beim Entdecken mit latenter Beweisidee hergestellt (↑ Abs. 1.3.1). Die hier aufgefächerte Darstellung des beispielgebundenen Argumentgefüges zeigt dem Experten jedoch an, dass das Allgemein(gültig)e im Besonderen jeweils objektiv vorhanden und latent ist: Zum einen mag (zunächst) nur der Experte (gegenüber dem Schüler) die Beispielzahlen 2, 3 und 4 *per se* als Repräsentanten für beliebige Zahlen ansehen (Latenz der Variablen in den Beispielzahlen aus der Sicht des Schülers). Zum anderen mag (zunächst) nur der Experte (gegenüber dem Schüler) auch die Struktur des mehrgliedrigen Arguments, das wir Beweis nennen, erkennen, d.h. die Allgemeingültigkeit eines jeden Arguments am besonders Gehaltenen eines jeden Arguments (Latenz des Beweises als Sinnstruktur aus der Sicht des Schülers).

Latenz der Variablen in Beispielzahlen

Latenz des Beweises als Sinnstruktur

Allgemeingültigkeit und Wahrheitsgehalt latenter Sinnstrukturen

Seinen spezifisch mathematischen Sinn erfährt der Beweis als Argumentstruktur nach ↑ Abs. 1.4.2 dadurch, dass es sich dabei offensichtlich um eine Deduktionskette handelt, bei der denknotwendig auf eine wahre Behauptung geschlossen wird. Damit kann der als beispielgebundenes Argumentgefüge dargestellte Beweis der zweiten Potenzregel als eine mögliche latente, wahr und allgemeingültig vorfindbare Sinnstruktur betrachtet werden. Dem gegenüber spricht Oevermann et al. (1979, 378ff.) schwächer von latenten, objektiv vorfindbaren Sinnstrukturen. Diese objektiv vorfindbaren Strukturen haben in der Regel zwar keinen dezidiert mathematischen Charakter, was ihren Wahrheitswert anbelangt, beanspruchen jedoch ihrer Bezeichnung nach eine gewisse Allgemeingültigkeit.

Aufgabenbeispiel gegensinniges Verändern

Auch in der Mathematik gibt es objektiv vorfindbare Strukturen, deren Wahrheitsgehalt beschränkt ist. Wie die Analyse zum gegensinnigen Verändern in der Einzelfallstudie von ↑ Kap. 3.1 exemplarisch zeigt, erreicht eine Behauptung in ihrem von einer Beispielaussage aus fortschreitenden Verallgemeinerungsprozess früher oder später die Grenzen allgemeiner Gültigkeit: So ist ein Beweis der Aussage $a \circ b \circ c = 3 \cdot b$ für $a, b, c \in \mathbb{N}$ unter der vorauszusetzenden Bedingung der Äquidistanz $c - b = b - a$ und der Wahl der additivem Verknüpfung $+$ für $\circ$ denkbar (gegensinniges Verändern unter der Addition). Dieser Beweis kann beispielgebunden an der Aussage $3 + 4 + 5 = 3 \cdot 4$ geführt werden. Dennoch können Schüler zu einer weitgehenderen Verallgemeinerung des entsprechenden Beweises auf die multiplikative Verknüpfung $\cdot$ verleitet werden, so dass sie etwa auch die falsche Aussage $3 \cdot 4 \cdot 5 = 4 \cdot 4 \cdot 4$ bei bekannter Definition fortgesetzter Multiplikation zunächst als richtig erachten. Dies wäre jedoch nur für die modifizierte Aussage $a \circ b \circ c = b^3$ unter der Bedingung $c : b = b : a$ zutreffend, etwa für $2 \cdot 4 \cdot 8 = 4^3$ (gegensinniges Verändern unter der Multiplikation). Für die erste Aussage ist die Beweisstruktur in der Wahl einer beliebigen Verknüpfung $\circ$ zwar objektiv angelegt, und der Schüler kann diese sogar subjektiv realisieren und manifestieren. Daran zeigt sich jedoch, wie eine Aussage durch deren zu weitgehende Verallgemeinerung ihren spezifisch mathematischen Wahrheitsgehalt einbüßen kann und dann wohlmöglich abgeändert werden muss.

Existenz latenter Sinnstrukturen

Wie eingangs nach Oevermann et al. (1979) dargestellt, existieren Sinnstrukturen in ihrer Latenz unabhängig davon, ob sie von den an der Interaktion Beteiligten intentional realisiert werden oder nicht. Der Beweis ist als latente Sinnstruktur insofern vorfindbar, als dass es einen Betrachter (wie etwa einen mathematisch geschulten Experten oder Forscher) gibt, der den Beweis als Argumentstruktur (etwa in einem geschriebenen Text) bereits erfassen kann. Somit enthält der Begriff der Latenz von Sinnstrukturen schon deren perspektivische Abhängigkeit: Latent kann nur eine Sinnstruktur sein, wenn es mindestens einen Experten gibt, der diese Sinnstruktur zumindestens schon subjektiv realisiert hat. Ob ein Beweis auch unabhängig von einer Person verborgen existiert, ist eine mehr philosophische Frage, die seit der Antike unterschiedlich beantwortet wird und hier nicht verfolgt werden soll.

Mit dem von Oevermann entlehnten Begriff der latenten Sinnstruktur konnte der Beweis in seiner Darstellung als (beispielgebundenes) Argument(gefüge) charakterisiert werden. Wie das fiktive Beispielinterakt zum vollständigen Graphen zeigte, kann die Beweisidee latent, d.h. nicht subjektiv realisiert sein, gerade wenn der Schüler alle Argumente ganz im Beispiel hält. Der Beweis kann jedoch im Erkennen der vormals latenten Sinnstruktur noch nachträglich subjektiv realisiert werden, etwa wenn ein anderes oder ein bloß vorgestelltes Beispiel gewählt wird.

1.5.2 Subjektive Realisierung bei latenter Beweisidee

Ist der Beweis einer Behauptung als latente Sinnstruktur vorfindbar, kann diese durch den Lernenden subjektiv realisiert werden. Dies fällt dem Lernenden naturgemäß leichter, wenn er selbst die Behauptung bereits mit latenter Beweisidee entdeckt oder geprüft hat: Wie nämlich in ↑ Abs. 1.3.5 diskutiert wurde, kann sich das Entdecken und Prüfen mit latenter Beweisidee (nachträglich) zum beispielgebundenen Beweisen wandeln. Der Übergang vom Auffinden der Behauptung zum Führen des Beweises besteht dann darin, in der deduktiven beispielhaften Herstellung des Resultats der Abduktion resp. Induktion das Allgemeingültige zu erkennen. Der Beweis wird im Erkennen der vormals latenten Sinnstruktur subjektiv realisiert.

inhaltliche Kritik am Begriff der cognitive unity

In ↑ Abs. 1.4.4 blieb der von Pedemonte (2007, 25) verwendete Begriff der *cognitive unity* undefiniert. Darunter versteht die Autorin eine Ähnlichkeit zwischen dem Prozess der Entwicklung einer Behauptung und der Konstruktion ihres Beweises:

> "First of all, according to the *cognitive unity* hypothesis, there is *cognitive unity* if it is possible to observe the continuity between the processes of conjecture production and proof construction (Boero et al. 1996). My research has shown the importance of considering the process of problem-solving by comparing the process connected with the conjecture, denoted by *argumentation* in this article, and the subsequent proof as a product, (...)" (Pedemonte, 2007, 25)

cognitive unity als subjektive Realisierung des Beweises

Es wurde formal kritisiert, dass Pedemonte (2007, 29) das Toulmin-Schema verwendet, um die Schlussformen Abduktion und die Induktion schematisch darzustellen, statt diese mittels Resultat, Gesetz und Fall im Sinne von Peirce zu beschreiben. Betrachtet man das obige Zitat zur didaktischen Bedeutung der Strukturgleichheit zwischen "conjecture production" und "proof construction", erinnert dies an die Ähnlichkeit zwischen der deduktiven beispielhaften Herstellung des Resultats der Abduktion resp. Induktion und dem eigentlichen Beweis. Mit anderen Worten: Das, was die Autorin als didaktisch produktive *cognitive unity* beschreibt, lässt sich aus hermeneutischer Perspektive als kognitive (subjektive) Realisierung des Beweises als vormals latenter Sinnstruktur lesen.

Beispiel Winkelsumme in konvexem n-Eck

Auch die von der Autorin angeführten Möglichkeiten, wie eine *cognitive unity* am besten hergestellt werden kann, erinnern an die Zugänge des Entdeckens und Prüfens zum Beweisen, wie sie in Meyer & Voigt (2009a) beschrieben werden. Am Aufgabenbeispiel der Winkelsumme in einem konvexen n-Eck führt Pedemonte (2007, 31, 35ff.) aus, worin die Lücke, der "'structural gap' between argumentation and proof" bzw. die "structural distance" zwischen einer induktiv geführten "argumentation" und einem Beweis besteht: Von einzelnen Beispielen ausgehend, etwa der berechneten Winkelsumme eines Dreiecks zu 180° und eines konvexen 5-Ecks zu 540°, wird induktiv auf die Behauptung geschlossen, die Winkelsumme in einem konvexen n-Eck betrage $(n-2)\cdot 180°$ (*result pattern generalization* nach ↑ Abs. 1.4.3). Beim Auffinden der Behauptung auf diesem Weg liegt der Beweis also nicht auf der Hand. Pedemonte (2007, 31) gibt als Grund dafür an, dass die einzelnen Beispiele unverbunden gesehen werden. Dieser Eindruck ist jedoch dem Fokus auf die spezifische Aufgabenstellung geschuldet. Ihre Rede von einer "structural distance" aufgreifend, wäre passender von einem induktiven Prüfen ohne latente Beweisidee zu sprechen.

Konstruktion vollständiger Induktion

Entsprechend kommt PEDEMONTE (2007) am betrachteten Aufgabenbeispiel der Winkelsumme im konvexen n-Eck auf die Strukturähnlichkeit zwischen der *process pattern generalisation* im Auffinden der Behauptung und der vollständigen Induktion als deren Beweis zu sprechen:

> "In this case, induction is constructed by a process pattern generalisation: the cases are connected together in order to find the general law. Generalisation is made on the steps sequence. So, if mathematical inductive proof is constructed, there is a structural continuity between the inductive argumentation based on a process pattern generalisation and the proof." (PEDEMONTE, 2007, 31)

Auch dies ist nicht weiter verwunderlich, da in ↑ Abs. 1.4.3 angemerkt wurde, dass das als TOULMIN-Schema dargestellte *process pattern generalization* nichts anderes als die vollständige Induktion ist. Wesentlich für die Strukturähnlichkeit zwischen dem Auffinden der Behauptung und der Beweisführung ist hier also nicht die Verbundenheit der einzelnen Beispiele untereinander, sondern dass eine Prüfung mit latenter Beweisidee vorliegt, die sich zu einem (beispielgebundenen) Beweis wandeln kann. Insbesondere gilt: Im Führen des Induktionsschritts ist die vollständige Induktion als Beweis angelegt, zumal in der betrachteten Aufgabenstellung.

cognitive unity umfassender Begriff der latenten Sinnstruktur

Liest man also die Ausführungen von PEDEMONTE (2007) hinsichtlich des *cognitive unity*, so lässt sich diese in der kognitiven (subjektive) Realisierung des Beweises als vormals latente Sinnstruktur sehen. In ↑ Abs. 1.4.4 und ↑ Abs. 1.5.1 wurde ausgeführt, wie sich die deduktive Herstellung des Resultats einer Induktion oder Abduktion mit latenter Beweisidee als nach Allgemeinheitsgraden geschichtetes Argumentgefüge darstellen lässt. Zwischen den einzelnen Schichten herrscht eine gewisse strukturelle Ähnlichkeit (gewissermaßen ein *cognitive unity*), so dass der Übergang vom Besonderen zum Allgemeingültigen kognitiv naheliegt und der Beweis als Sinnstruktur leicht seiner Latenz enthoben werden kann. Da insgesamt dargelegt wurde, dass der bisherige Begriff der latenten Sinnstruktur denjenigen des *cognitive unity* umfasst, wird im Folgenden nur noch von latenten Sinnstrukturen gesprochen.

Statt wie PEDEMONTE (2007) alle Schlüsse von PEIRCE mit dem Argumentschema nach TOULMIN darzustellen und von einer "structural distance" zwischen Entwicklung einer Behauptung und der Konstruktion ihres Beweises zu sprechen, hat sich die Rede von der Entdeckung resp. Prüfung einer Behauptung mit oder ohne latenter Beweisidee bewährt. Der Beweis kann weiters seiner Latenz enthoben, d.h. vom Lernenden subjektiv realisiert und manifestiert werden.

1.5.3 Beweis als subjektiv realisierte und manifeste Sinnstruktur

subjektive Realisierung einer latenten Sinnstruktur

Wird die latente Sinnstruktur (etwa einer im Beispiel gehaltenen Begründung) von einem Lernenden subjektiv realisiert, verliert sie für den Lernenden ihre Latenz. Der Lernende kann darüber hinaus möglicherweise die subjektiv gewonnene, intentionale Repräsentanz der vormals latenten Sinnstruktur entäußern, um sich selbst oder anderen gegenüber deren Allgemeingültigkeit und Richtigkeit zu versichern. Diese Manifestierung des subjektiv Realisierten erfolgt häufig mündlich oder schriftlich. Da sich die subjektive Realisierung der vormals latenten Sinnstruktur als kognitiver Prozess – beim beispielgebundenen Beweisen also das Erkennen des Allgemeingültigen am besonders Gehaltenen – einem äußeren Betrachter wie dem Forscher, Experten oder Lehrer entzieht, ist dieser auf interpretierbare Äußerungen des Lernenden angewiesen.

Manifestierung einer latenten Sinnstruktur

nachträgliche Realisierung latenter Sinnstrukturen

Eine Person wird in ihrer je konkreten, subjektiv-intentionalen Verfasstheit die latenten Sinnstrukturen häufig zunächst oder überhaupt nicht gänzlich erfassen können. Zuweilen kann diese Person die objektive Bedeutsamkeit ihrer Äußerungen daran erkennen, dass sie eine offensichtliche Diskrepanz zwischen ihrer eigenen ursprünglichen Intention und einer latenten Bedeutung mehr oder weniger nachträglich realisiert. Dass es dabei zu einer vollständigen Übereinstimmung zwischen latenter Sinnstruktur und ihrer subjektiv-intentionalen Repräsentanz kommt, sieht Oevermann als einen Grenzfall an:

> ”Die vollständige Koinzidenz der intentionalen Repräsentanz mit der latenten Sinnstruktur der Interaktion ist prinzipiell möglich, aber sie stellt den idealen Grenzfall der vollständig aufgeklärten Kommunikation in der Einstellung der Selbstreflexion dar: Die handelnden Subjekte haben sich durch begleitende Rekonstruktion ihrer eigenen Interaktionstexte des vollständigen Sinns ihrer Handlungen vergewissert.” (Oevermann et al., 1979, 380)

Reflexion und Versprachlichung

Die Bereitschaft und Fähigkeit zu einer begleitenden oder nachträglichen Rekonstruktion des eigenen Erkenntniswegs erfordert hinsichtlich der subjektiven Realisierung der latenten Sinnstruktur ein kontextbezogenes Reflexionsvermögen, also beispielsweise mathematisches Erfahrungswissen. Die Manifestierung als Versprachlichung der subjektiv realisierten Sinnstruktur setzt zudem ein hinreichend entwickeltes sprachliches Ausdrucksvermögen voraus, welches ggf. in Vorübungen erworben werden kann (vgl. hierzu etwa ↑ Abs. 1.2.5 oder Abs. 3.4.9). Dies zeigt, dass subjektive Realisierung und Manifestierung von vormals latenten Sinnstrukturen vom Lernenden hohe Kompetenzen (Abstraktionsvermögen und sprachliche Fähigkeiten) verlangt.

Sprache als subjektiv realisierte und manifeste Sinnstruktur

Beispiel Alltagssprache

Wie in ↑ Abs. 1.5.1 geschildert, mag der Sender die Äußerung ”morgen mein freund ich komme so gegen 18 uhr” anders intendieren als der Empfänger auslegen kann. Die situativ vorliegende, objektive Zweideutigkeit des Interakts würden beide Beteiligte etwa bei der scheinbar verfrühten Ankunft des Senders realisieren. Bis dahin kann der doppelte Sinn des Interakts beiden Beteiligten latent bleiben, auch wenn er objektiv schon vorhanden ist.

Sender oder Empfänger können die latente Sinnstruktur aber auch schon früher subjektiv realisieren. Eine Koinzidenz der intentionalen Repräsentanz mit der latenten Sinnstruktur könnte sich dann einstellen, wenn der Sender oder der Empfänger die doppelte Bedeutung des Wortes *morgen* sofort subjektiv realisiert. Dies kann sich etwa darin manifestieren, dass sich Sender und Empfänger zwischenzeitlich einander noch einmal hinsichtlich des wirklich intendierten Zeitpunkts der Zusammenkunft versichern und auf diesem Weg einem möglichen Missverständnis rechtzeitig vorbeugen.

Beispielgebundenes Argumentgefüge zur Beweisdarstellung

Aufgabenbeispiel vollständiger Graph

Es werde wieder das Aufgabenbeispiel des vollständigen Graphen aus ↑ Abs. 1.5.1 betrachtet. Um zu prüfen, ob der Schüler das Allgemeingültige im Besonderen des 5-Ecks subjektiv realisiert hat, kann der Lehrer fragen, ob die Behauptung etwa auch für das 8-Eck gilt. Der Schüler antwortet vielleicht:

> *Das weiß ich nicht. Ich habe es nur für das* 5*-Eck überlegt.* (nach langer Pause) *Aha, ich hab's. Das ist ja immer so.*

subjektive Realisierung des Allgemeingültigen

Der Schüler kann seine Argumente allgemeingültiger halten, indem er statt von einem 5-Eck von einem (vorgestellten) 8-Eck oder sogar von einem beliebigen n-Eck spricht. Dies bedeutet jedoch noch nicht, dass er wirklich die Allgemeingültigkeit der zunächst am Besonderen des Beispiels gehaltenen Argumente erkennt. Dazu muss er sich nämlich gedanklich von den Besonderheiten des 5-Ecks lösen und sich von der weiterhin möglichen Anwendbarkeit der unterliegenden Regeln auf verallgemeinerte Daten überzeugen. Hat er erkannt, dass er seine Argumente begründetermaßen unabhängig von einer speziellen Anzahl der Eckpunkte des regelmäßigen n-Ecks führen kann, hat er den Beweis als vormals latente Sinnstruktur subjektiv realisiert.

Beispielinterakt

Den folgenden Äußerungen nach hat der Schüler den Beweis subjektiv realisiert – zu dieser Interpretation kann man gelangen, wenn dessen Äußerungen das jeweils Allgemeingültige erkennen lassen. Sprachlich kann sich der Schüler dabei trotzdem zunächst am betrachteten Beispiel des 5-Ecks resp. 8-Ecks halten:

> *Aha, ich hab's! Das ist ja immer so. Denn statt des* 5*-Ecks kann ich zum Beispiel auch, meinetwegen, ein* 8*-Eck nehmen, dann gehen von jeder der* 8 *Ecken eben* $8 - 1 = 7$ *Verbindungen aus und nicht* 4*. Ich muss wieder* 8 *mal* 7*, also Ecken mal Verbindungen nehmen, weil ich dann wieder alle von allen Ecken ausgehenden Verbindungen habe. Und dann teile ich wieder durch* 2*, weil auch beim* 8*-Eck, wie bei jedem* n*-Eck, jede Verbindung zwei Ecken hat.*

Indizien für und gegen subjektive Realisierung

Der Schüler kann auch mit der falschen Darstellung eines vollständigen Graphen

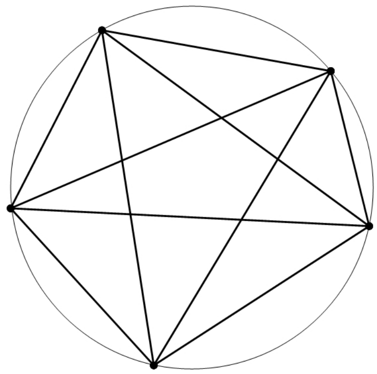


Abb. 1.14: einem Kreis einbeschriebener vollständiger Graph mit 5 Ecken

mit 7 Ecken und 20 statt $7 \cdot 6/2 = 21$ Verbindungen konfrontiert werden, etwa wenn eine Verbindung nicht aufgezeichnet wird. An die möglichen Reaktionen des Schülers lässt sich ein Indiz für oder gegen die subjektive Realisierung des Beweises knüpfen:

- Der Schüler kann sagen: *Dann ist entweder der Graph falsch gezeichnet, oder die Verbindungen sind falsch abgezählt.* Dieser Verweis auf mögliche andere Ursachen der differierenden Ergebnisse deutet darauf hin, dass der Schüler von der Richtigkeit der Behauptung überzeugt ist. Die ergänzende Frage nach deren (beispielgebundener) Begründung sichert die Vermutung ab, dass der Schüler den Beweis der Behauptung subjektiv realisiert hat.
- Der Schüler kann auch sagen: *Dann gilt es nicht allgemein.* Damit hat sich der Schüler von der (falschen) Zählung oder der falschen Zeichnung der Verbindungen blenden lassen. Letztere fungiert ja nur als Darstellungsmittel zur Veranschaulichung der Behauptung. Dies kann somit als Indiz dafür angesehen werden, dass der Schüler den Beweis in seiner denknotwendigen Struktur als Argumentgefüge noch nicht subjektiv realisiert hat. Möglicherweise hat er an den bereits vorliegenden Beispielen nur einen Algorithmus im Sinne induktiver Prüfungen ausgeführt.

teilweise subjektive Realisierung des Allgemeingültigen

Es kann auch zu einer teilweisen subjektiven Realisierung resp. Manifestierung des Beweises kommen: Bei dem Aufgabenbeispiel des vollständigen Graphen muss der Schüler nämlich nicht in Gänze alle Argumente subjektiv realisiert haben, zumal die unterliegenden Regeln recht verschieden sind. Relativ klar ist im obigen Beispielinterakt jedoch, dass der Schüler bzgl. des letzten Arguments (der Division durch 2) gedanklich verallgemeinert.

Bei dem Aufgabenbeispiel der zweiten Potenzregel kann hinsichtlich der Basen, des Exponenten, der Anzahl der Potenzen (ggf. aus anderen Zahlbereichen) und der Rechenoperationen (von $\cdot$ zu :) verallgemeinert werden. Die aufgefächerte Darstellung des Beweises als beispielgebundenes Argumentgefüge aus ↑ Abs. 1.5.1 legt nahe, wie graduell verschieden der Beweis subjektiv realisiert werden kann. Dies impliziert, dass bei der Manifestierung des Allgemeingültigen die Frage nach dessen Grenzen von Belang ist und der jeweilige Grad an Allgemeinheit von Interesse ist.

1.5.4 Beispielgebundenes Beweisen

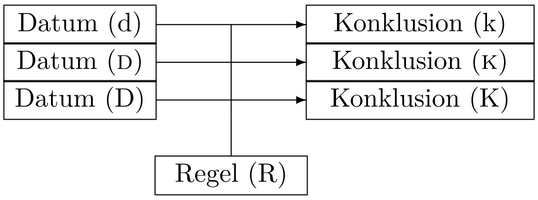
beispielgebundenes Beweisen i.e.S. und i.w.S.

Nachstehend erfolgt nun eine Klärung dessen, was in dieser Arbeit unter beispielgebundenem Beweisen i.e.S. (im engeren Sinne) und i.w.S. (im weiteren Sinne) verstanden wird. Dazu bietet es sich zunächst an, den Beweis als beispielgebundenes Argumentgefüge darzustellen. Anschließend wird dargelegt, unter welchen Bedingungen der Beweis für einen Lernenden als latente, als subjektiv realisierte und als manifeste Sinnstruktur gelten kann.

Beweis als latente, subjektiv realisierte und manifeste Sinnstruktur

beispielgebundenes Argument(gefüge)

Der Einfachheit halber werde angenommen, dass ein Beweis in seiner Sinnstruktur als beispielgebundenes Argument(gefüge) darstellbar ist. Dabei werde unter einem beispielgebundenen Argument wie in ↑ Abs. 1.4.4 ein Argument verstanden, dessen Datum (d/ᴅ/D) und dessen Konklusion (k/ᴋ/K) sowohl im Beispiel (Kleinbuchstabe) als auch im Allgemeineren (Kapitälchen) und Allgemeinen (Großbuchstabe) gehalten sein können:



Allgemeingültigkeit des beispielgebundenen Argumentgefüges

Allgemeingültig(er) wird das betrachtete beispielgebundene Argument, wenn es vermöge der unterliegenden Regel im Übergang vom Besonderen des Beispiels (d, ᴅ bzw. k, ᴋ) zum Allgemein(er)en (ᴅ, D bzw. ᴋ, K) weiterhin gültig bleibt. Entsprechendes gilt nach ↑ Abs. 1.4.3 für ein Argumentgefüge, das aus mehreren Argumenten besteht. Sofern ein einzelnes Argument im Argumentgefüge ein beispielgebundenes Argument ist, wird das Argumentgefüge im Ganzen beispielgebunden genannt.

Der Beweis kann beim beispielgebundenen Beweisen als latente, subjektiv realisierte und manifest gewordene Sinnstruktur aufgefasst werden. Dabei sind die unterschiedlichen Perspektiven des Betrachters entscheidend:

- *der Beweis als latente Sinnstruktur*

  Angenommen, ein Lernender bestätigt die Gültigkeit einer allgemeinen Aussage im Beispiel. Wenn ein beobachtender Experte darin einen Beweis in seiner Sinnstrukturiertheit als beispielgebundenes Argument(gefüge) sieht, ist dieser im Sinne Oevermanns objektiv vorhanden. Für den Lernenden ist der Beweis in seiner Sinnstrukturiertheit latent, wenn dessen subjektive Repräsentanz als Argument(gefüge) beim Lernenden kognitiv bloß im Besonderen des Beispiels gehalten ist. Dennoch beweist der Lernende aus der Perspektive des beobachtenden Experten beispielgebunden.

- *der Beweis als subjektiv realisierte Sinnstruktur*

  Erkennt ein Lernender am Besonderen des im Beispiel gehaltenen, d.h. beispielgebundenen Argument(gefüge)s dessen Allgemeinheit resp. Allgemeingültigkeit, realisiert er den Beweis in seiner Sinnstrukturiertheit subjektiv. Betrachtet man das Erkennen der Allgemeingültigkeit am besonders Gehaltenen des Beispiels als Prozess einer allmählichen Ablösung vom Beispielhaften, lässt sich von einer subjektiven Realisierung des Beweises sprechen. Gerade dieser Übergang vom latenten zum subjektiv realisierten Beweis ist für den Erkenntnisprozess beispielgebundenen Beweisens auf kognitiver Ebene charakteristisch.

- *der Beweis als manifest gewordene Sinnstruktur*

  Der Lernende manifestiert den subjektiv realisierten Beweis, wenn er dessen Allgemeingültigkeit in überzeugender Weise versprachlicht, entäußert, darstellt. Dies bedeutet nicht, dass der Lernende den Beweis durchgängig formell mit Variablen zeigen muss. Auch braucht er sich nicht durchgängig in allgemein gehaltener Umgangssprache formal zu äußern. Denn dies wäre ein Grenzfall, bei dem man schon nicht mehr von einem beispielgebundenen Beweis, sondern bereits von einem formalen, wenn nicht gar formell dargestellten Beweis spräche. Vielmehr ist mit einem manifesten beispielgebundenen Beweis gemeint, dass der Beweis noch am Beispiel gehalten sein kann und zugleich die Allgemeingültigkeit des angeführten Argument(gefüge)s erkennen lässt. Es kann allerdings auch der Fall eintreten, dass der Schüler den beispielgebundenen Beweis manifestiert, ohne ihn subjektiv zu realisieren, etwa wenn der Schüler dessen Darstellung von einem Mitschüler übernimmt.

Aufgabenbeispiel gegensinniges Verändern

Zur Manifestierung eines subjektiv realisierten Beweises ist beim gegensinnigen Verändern (vgl. ↑ Abs. 1.5.1 und ↑ Kap. 3.1) folgende Schüleräußerung denkbar:

Die Behauptung stimmt, dass die Summe von drei aufeinander folgenden Zahlen immer das Dreifache der Mittelzahl ist. Ich habe es wohl nur für $3 + 4 + 5$ *gezeigt. Aber auch wenn es andere aufeinander folgende Zahlen sind, kann ich* 1 *von der letzten Zahl zur ersten tun. Es kommt nur darauf an, dass von* 3 *zu* 4 *und zu* 5 *der Unterschied immer* 1 *ist, auch wenn es statt* 3, 4 *und* 5 *andere Zahlen sind.*

Der Schüler hält sich einerseits an das Beispiel und zeigt sich andererseits von der Allgemeingültigkeit der behaupteten Aussage überzeugt. Er lässt keinen Zweifel daran, dass die Behauptung nicht nur für die betrachtete Summe $3 + 4 + 5$, sondern auch für Summen anderer aufeinander folgender Zahlen mit Abstand 1 gilt. Aus diesem fiktiven Beispiel lässt sich ersehen, dass es zur Manifestation des subjektiv realisierten Beweises kommunikativer Fähigkeiten, insbesondere eines versierten Gebrauchs der Umgangssprache bedarf.

Beispielgebundenes Beweisen i.e.S. und i.w.S.

Definitionen beispielgebundenen Beweisens

Es wird im Folgenden zwischen beispielgebundenem Beweisen im engeren Sinne (i.e.S.) und im weiteren Sinne (i.w.S.) unterschieden. Beim beispielgebundenen Beweisen i.e.S. handelt es sich mehr um ein theoretisches Konstrukt, nämlich um das Führen beispielgebundener Argumente in Latenz, subjektiver Realisierung und Manifestierung des Allgemeingültigen durch einen Lernenden. Zum beispielgebundenen Beweisen i.w.S. zählen mehr didaktisch motivierte Zugänge des Entdeckens, Prüfens und Begründens, um den Lernenden an das beispielgebundene Beweisen i.e.S. heranzuführen und dem Experten dessen Beobachtung zu ermöglichen:

beispielgebundenes Beweisen i.e.S.

- *beispielgebundenes Beweisen i.e.S.*

  Der Lernende beweist beispielgebunden i.e.S., wenn ein betrachtender Experte in dem vom Lernenden dargestellten Beweis eine Sinnstruktur als beispielgebundenes Argument(gefüge) sieht. Das beispielgebundene Beweisen kann den Schüler zu einem subjektiven Realisieren des Beweises als vormals latenter Sinnstruktur und ggf. zu einem Manifestieren des subjektiv Realisierten verhelfen. Dabei führt der Lernende beispielgebundene Argumente, indem er seine deduktiven Schlüsse allmählich von den Besonderheiten der Beispiele löst und damit deren Allgemeingültigkeit erkennt. Das beispielgebundene Beweisen i.e.S. lässt sich dann als ein changierender Prozess zwischen Latenz, subjektiver Realisierung und sprachlicher Manifestierung eines Beweises als Sinnstruktur beobachten. Das beispielgebundene Beweisen i.e.S. ist letztlich dann abgeschlossen, wenn der Lernende das (vormals latent) Allgemeingültige des Beweises als Sinnstruktur am Beispiel subjektiv realisiert und manifestiert hat.

beispielgebundenes Beweisen i.w.S.

- *beispielgebundenes Beweisen i.w.S.*

  Der Lernende beweist beispielgebunden i.w.S., wenn er über Zugänge des Entdeckens, Prüfens und Begründens zum beispielgebundenen Beweisen i.e.S. kommt: Durch vorausgehendes Entdecken und/oder Prüfen einer Behauptung (ggf. mit latenter Beweisidee) kann der Lernende zu einem beispielgebundenen Beweis i.e.S. der abduktiv entdeckten oder induktiv geprüften Behauptung gelangen. Während das beispielgebundene Beweisen i.e.S. also einen analytischen Fokus auf die Latenz, die subjektive Realisierung und die Manifestierung eines Beweises als beispielgebundenes Argumentgefüge setzt, bildet das beispielgebundene Beweisen i.w.S. einen Rahmen, der auch abduktive Entdeckungen und induktive Prüfungen einschließt. Die Gestaltung dieses Rahmens kommt dem Experten zu, der die Auswahl und die didaktische Aufbereitung der Aufgabenstellungen vornimmt, den Ablauf des beispielgebundenen Beweisprozesses vor Augen hat, als Gesprächspartner des Lernenden in verschiedenen Rollen (Forscher, Lehrer, Elternteil, Mitschüler, *advocatus diaboli*) fungieren kann und das Gespräch mit dem Lernenden ggf. im Austausch mit seinen Kollegen entsprechend nachbereitet.

Mit dieser Differenzierung beispielgebundenen Beweisens i.e.S. und i.w.S. lassen sich die didaktisch motivierten Zugänge zum Beweisen von diesem selbst unterscheiden und terminologisch zueinander abgrenzen. Das beispielgebundene Beweisen lässt sich von beiden Perspektiven her betrachten. Die Bezeichnungen Latenz, subjektive Realisierung und Manifestierung beziehen sich stärker auf den Beweis und auf das Beweisen selbst, während das Entdecken, Prüfen und Begründen mit und ohne latente Beweisidee Zugänge zum eigentlichen Beweisen eröffnet.

Mit der theoretischen Fassung beispielgebundenen Beweisens endet der den Forschungsstand und Forschungsgegenstand behandelnde erste Teil dieser Arbeit. Im nachfolgenden ↑ Teil 2 wird über das Forschungsinteresse und über den Einsatz der Forschungsmethoden reflektiert, bevor sich daran in ↑ Teil 3 die Analysebeispiele aus der empirischen Praxis anschließen.

Teil 2

Forschungsmethoden

In ↑ Teil 1 dieser Arbeit ist der Forschungsstand und der Forschungsgegenstand theoretisch erörtert worden. Hierauf aufbauend sollen nun die Forschungsfragen aus verschiedenen Perspektiven präzisiert werden (↑ Kap. 2.1). Anschließend werden die verwendeten Methoden reflektiert (↑ Kap. 2.2). Im Übergang zum empirischen ↑ Teil 3 der Arbeit wird das forschungspraktische Vorgehen erläutert (↑ Kap. 2.3).

2.1	Forschungsperspektiven	I	2.1.1	Theoretische Perspektive: Beispielgebundenes Beweisen i.e.S.
		II	2.1.2	Kategoriale Perspektive: Induktives Prüfen $\leftarrow \cdots \rightarrow$ formelles Beweisen
		III	2.1.3	Praktische Perspektive: Beispielgebundenes Beweisen i.w.S.
		IV	2.1.4	Sprachliche Perspektive: Explikation des Allgemeingültigen am Besonderen
		V	2.1.5	Weitere Perspektiven: ◦ Wahl und Anzahl der Beispiele ◦ Allgemeinheitsgrade von Behauptungen ◦ Beweisverständnis von Schülern ◦ Interventionsmöglichkeiten von Lehrenden
2.2	Methodologie und Methoden		2.2.1	Das interpretative Weltbild
			2.2.2	Einzelfallstudien
			2.2.3	Vom Gespräch zum interpretierbaren Text
			2.2.4	Grundlegende Interpretationsansätze
			2.2.5	Rechtfertigung der theoretischen Fassung des Forschungsgegenstands
			2.2.6	Abduktion als Forschungslogik
			2.2.7	Gedankliche und empirische Vergleiche
			2.2.8	Beweisen und Typisieren am Beispiel
2.3	Forschungspraxis		2.3.1	Auswahl und Entwicklung der Aufgabenbeispiele
			2.3.2	Ablauf der Schülerexperimente
			2.3.3	Szenenauswahl und Transkription
			2.3.4	Analyse der Szenen und ihre Darstellung

2.1 Forschungsperspektiven

Die in ↑ Kap. 1.3, 1.4, 1.5 schrittweise vorgenommene theoretische Fassung beispielgebundenen Beweisens beruht auf drei Quellen:

- Objektive Hermeneutik nach Oevermann et al. (1979, 378ff.) (↑ Kap. 1.5):

  Als (latente) Sinnstruktur wird hier ein mathematischer Beweis aufgefasst. Damit wird – als Besonderheit dieser Arbeit – der Begriff der (latenten) Sinnstruktur auf den Forschungsgegenstand selbst bezogen. Das beispielgebundene Beweisen i.e.S. des Lernenden wird als ein vom Experten begleiteter Prozess angesehen, welcher sich in Latenz, in allmählicher subjektiver Realisierung und in schriftlicher und/oder mündlicher Manifestierung der mathematischen Sinnstruktur durch den Lernenden zeigt.

- Struktur von Argumenten nach Toulmin (1996, 86ff.) (↑ Kap. 1.4, vgl. Schwarzkopf (2000, 80ff.)):

  Mehrschichtige und mehrgliedrige beispielgebundene Argumentgefüge liefern eine Darstellung des Beweises als mathematische Sinnstruktur. Diese Darstellung dient dem Experten als Folie und Mittel zur Analyse von Äußerungen des Lernenden.

- Schlussformen Abduktion, Induktion, Deduktion nach Peirce (1960) (↑ Kap. 1.3, vgl. Voigt (1984, 83ff.) und Meyer (2007, 31ff.)):

  Diese Schlussformen charakterisieren das Entdecken, Prüfen und Begründen von Behauptungen. Durch Beweiszugänge wie das Entdecken und/oder das Prüfen einer Behauptung (ggf. mit latenter Beweisidee) kann der Lernende zum beispielgebundenen Beweisen i.e.S. gelangen. Da das Beweisen hier prozessual verstanden wird, lassen sich diese und andere Beweiszugänge, welche das Entdecken und Prüfen einschließen, als beispielgebundenes Beweisen i.w.S. bezeichnen.

Zu den genannten Quellen treten einige Erkenntnisse aus dem Forschungsstand (↑ Kap. 1.1, 1.2). Als Quintessenz lassen sich verschiedene Forschungsperspektiven auf das beispielgebundene Beweisen gewinnen:

2.1.1 / 4.1	I	Theoretische Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen i.e.S. (in Latenz, subjektiver Realisierung und Manifestierung des beispielgebundenen Beweises als Sinnstruktur)
2.1.2 / 4.2	II	Kategoriale Perspektive	Induktives Prüfen $\leftarrow \cdots \rightarrow$ formelles Beweisen (beispielgebundenes Beweisen im Changieren zwischen induktivem Prüfen und formalem resp. formellem Beweisen)
2.1.3 / 4.3	III	Praktische Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen i.w.S. (einschließlich von Zugängen zum beispielgebundenen Beweisen, etwa des Entdeckens und des Prüfens)
2.1.4 / 4.4	IV	Sprachliche Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen in Explikation des Allgemeingültigen am Besonderen (unter besonderer Berücksichtigung sprachlicher Aspekte)
2.1.5 / 4.5	V	Weitere Perspektiven	∘ Wahl und Anzahl der Beispiele ∘ Allgemeinheitsgrade von Behauptungen ∘ Beweisverständnis von Schülern ∘ Interventionsmöglichkeiten von Lehrenden

Zur Abgrenzung der theoretischen Perspektive von der praktischen Perspektive wird vom beispielgebundenen Beweisen i.e.S. (im engeren Sinne) und i.w.S. (im weiteren Sinne) gesprochen. Bei der kategorialen und sprachlichen Perspektive liegt jeweils der Fokus anders, so dass dabei nicht unterschieden wird. Auf weniger zentrale Forschungsperspektiven beispielgebundenen Beweisens wird je nach gewählter Aufgabenstellung eingegangen.

Im Folgenden werden zu den fünf genannten Forschungsperspektiven nun mögliche Forschungsfragen entwickelt, um die nachgelagerten Einzelfallstudien in ↑ Teil 3 vor diesem Hintergrund analysieren zu können.

2.1.1 Theoretische Perspektive: Beispielgebundenes Beweisen i.e.S.

beispielgebundenes Beweisen i.e.S.

Von besonderem Interesse ist beim beispielgebundenen Beweisen i.e.S., ob dem Schüler der Beweis latent bleibt, oder ob er diesen zumindest teilweise subjektiv realisiert. Um dies beurteilen zu können, bedarf es eines äußeren Betrachters. Nach ↑ Abs. 1.5.3 beweist ein Schüler beispielgebunden i.e.S., wenn ein Betrachter (wie ein Mitschüler, ein Lehrer oder ein Forscher) in dem vom Schüler dargestellten Beweis oder Teilen davon eine Sinnstruktur erkennt. Es lassen sich hierzu folgende Forschungsfragen stellen:

- Wie gestalten sich beim Schüler Übergänge von der Latenz des Beweises zu seiner subjektiven Realisierung und umgekehrt?
- Welche Indizien sprechen dafür und dagegen, dass ein Schüler den Beweis subjektiv realisiert hat?
- Welche Einzelargumente manifestiert der Schüler beim beispielgebundenen Beweisen, welche bleiben latent?

Ein grundlegendes Indiz für oder gegen die subjektive Realisierung des Beweises durch den Schüler ist das folgende: Formuliert der Schüler jeweils Datum und/oder Konklusion des beispielgebundenen Argumentgefüges allgemein (und ggf. auch die Regel), hat er den Beweis (in Teilen) wahrscheinlich subjektiv realisiert. Hält der Schüler seine Äußerungen überwiegend in Beispielen, ohne deren strukturelle Gemeinsamkeiten zu explizieren, kann vermutet werden, dass er den Beweis größtenteils nicht subjektiv realisiert hat.

differierende Experten- und Schülersicht

Einschränkend muss ergänzt werden: Obwohl der Experte in den Äußerungen des Schülers etwas Allgemeingültiges hineindeuten kann, hat der Schüler vielleicht lediglich beabsichtigt, eine spezielle Behauptung zu beweisen. Der Experte kann dem Schüler insofern auch zu unkritisch die subjektive Realisierung des Beweises unterstellen. Eine differierende Perspektive zwischen Experten und Schüler liegt auch dann vor, wenn ein Schüler Datum und/oder Konklusion des beispielgebundenen Argumentgefüges zwar allgemein formuliert hat, ohne dass er aber den Experten davon überzeugt, die Allgemeingültigkeit seines Beweisgangs subjektiv realisiert zu haben.

subjektive Realisierung von Einzelargumenten

Von Interesse ist auch die Frage, warum der Schüler ggf. nur manche Einzelargumente eines beispielgebundenen Beweises manifestiert, und warum andere Einzelargumente latent bleiben. Es mag sein, dass der Schüler nur einen Teil des Argumentgefüges als Beweis manifestiert, da er in den anderen Teilen kognitiv überfordert ist oder ihm dafür die sprachlichen Mittel fehlen. Auch kann er diese Teile für so selbstverständlich halten, dass er sie nicht manifestiert, obwohl er es könnte. Deshalb kann der Experte den Schüler dazu durch Nachfragen oder als *advocatus diaboli* künstlich herausfordern.

2.1.2 Kategoriale Perspektive: Induktives Prüfen ← · · · → formelles Beweisen

Grenzfälle beispielgebundenen Beweisens

Das Forschungsinteresse gilt einer prozesshaften Betrachtung beispielgebundenen Beweisens. Dieses kann zwischen induktivem Prüfen und formalem resp. formellem Beweisen als Grenzfällen changieren.

induktives Prüfen

Beim induktiven Prüfen bleibt die Beispielbindung vollständig erhalten: Der Schüler mag zwar Deduktionen führen, diese bleiben jedoch im Beispiel gehalten, ohne dass der Schüler etwas Allgemeingültiges in der Besonderheit der betrachteten Beispiele erkennt resp. erkennen lässt. Äußere Anzeichen für induktives Prüfen können enaktive Tätigkeiten wie das bloße Betrachten, Zeichnen, Messen oder das Rechnen sein. Der Einsatz von Mess-, Rechen- oder visuellen Werkzeugen kann primär der beschleunigten sukzessiven Bestätigung einer Behauptung an vielen Beispielen dienen, dadurch aber auch vom Beweisen abhalten. In ↑ Abs. 1.2.4 wurde die These von Goldberg (1992, 42) diskutiert, nach der der Beweisgedanke durch das Bearbeiten vieler Beispiele vorbereitet werde. Theoretisch lässt sich dies insoweit hinterfragen, als dass sich das Prüfen ohne latente Beweisidee nicht so einfach zu einem beispielgebundenen Beweisen wandeln lässt (vgl. ↑ Abs. 1.3.5). Aus empirischer Sicht wäre zu klären, ob ein Schüler durch sein induktives Prüfen zur Stabilisierung der Vorstellung verleitet wird, man könne in der Mathematik eine allgemeine Aussage induktiv beweisen. Es ergeben sich also folgende Fragen:

induktives Prüfen im Übergang zum beispielgebundenen Beweisen

- Wie stellt sich die These von Goldberg (1992, 42), dass das Bearbeiten vieler Beispiele früher oder später in einen Beweis mündet, empirisch dar?
- In wie weit steht ein Schüler beim induktiven Prüfen an mehreren Beispielen in der Gefahr, dass sich die Beispielbindung allmählich verfestigt? Welche Ursachen kann dies haben, und wie lässt sich dies vermeiden?

formales resp. formelles Beweisen

Den anderen Grenzfall stellt der übergangslose Sprung zum formalen resp. formellen Beweisen dar. Die Bindungen an die Beispiele sind dann beim Führen der Deduktionen vollständig gelöst. Der Schüler kann sich dabei abstrakt gehaltener Umgangssprache oder überwiegend formell gehaltener, algebraischer Sprache bedienen. Zum Grenzfall formalen Beweisens ist fragenswert:

- Wie weit gelingt es Schülern, den beispielgebundenen Beweis soweit zu manifestieren, dass man schon von einem formalen oder sogar formell gehaltenen Beweis sprechen kann?
- Warum bedarf es für manche Schüler nach Darstellung des formalen Beweises noch der Prüfung an Beispielen?

changierender Prozess beispielgebundenen Beweisens

Für den Prozess mathematischer Bildung von Schülern dürfte ein changierender Prozess zwischen den Grenzfällen des induktiven Prüfens und des formalen resp. formell gehaltenen Beweisens didaktisch am interessantesten sein.

2.1.3 Praktische Perspektive: Beispielgebundenes Beweisen i.w.S.

Entdecken und Prüfen von Behauptungen

Das beispielgebundene Beweisen i.w.S. umfasst auch das Entdecken und Prüfen einer fraglichen Behauptung in Vorbereitung auf ihren eigentlichen Beweis. Die Behauptung kann zunächst vom Schüler entdeckt werden. Die Vorgehensweise, den Schüler die Behauptung entdecken zu lassen, bietet den Vorteil, dass der Schüler ein besseres Verständnis der Behauptung gewinnen kann, als wenn ihm die Behauptung direkt vorgegeben wird. Möglicherweise entdeckt er dabei neben der Behauptung auch deren Beweisidee. Der Prozess des Entdeckens und Prüfens beansprucht jedoch Zeit. Es kann sein, dass der Schüler nicht mehr zum eigentlichen Beweisen kommt, etwa wenn er eine Vielzahl von Entdeckungen gemacht hat, oder wenn der Beweis als zu schwer empfunden wird. Andererseits kann die Vorgabe der Behauptung beim Schüler auch den Eindruck erwecken, deren Allgemeingültigkeit sei unfraglich und solle an Beispielen bloß konkretisiert oder bestätigt werden.

Entdecken und Prüfen mit und ohne latente Beweisidee

In ↑ Abs. 1.3.5 wurden die von Meyer & Voigt (2009b) entlehnten Zugänge zum Entdecken resp. Prüfen mit und ohne latente(r) Beweisidee diskutiert. Dabei scheint das Entdecken resp. Prüfen mit latenter Beweisidee didaktisch produktiv zu sein, da sich die latente Beweisidee in der retrospektiven, subjektiven Realisierung leicht zum beispielgebundenen Beweisen wandeln kann. Andererseits bedarf es zur Entdeckung und Prüfung mit latenter Beweisidee häufiger einer stärkeren Lenkung durch den Lehrenden; auch lassen sich nicht alle Beweise so im Beispiel halten, dass dies didaktisch Sinn macht. Insgesamt lassen sich folgende Forschungsfragen stellen:

- Wie lässt sich feststellen, ob sich das Entdecken resp. Prüfen mit latenter Beweisidee zu einem beispielgebundenen Beweisen wandelt?
- Wie kann man es dem Schüler beim Entdecken resp. Prüfen ohne latente Beweisidee dennoch ermöglichen, beispielgebunden zu beweisen?
- Welche Unterschiede zeigt ein Schüler beim Entdecken und beim Prüfen einer Behauptung in der Anbahnung beispielgebundenen Beweisens?

Die Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen tragen praktisch dazu bei, das beispielgebundene Beweisen i.e.S. eines Schülers und somit den Forschungsgegenstand empirisch zu untersuchen. In wie weit sie sich auch zum Einsatz im Mathematikunterricht eignen, ist eine andere Frage.

2.1.4 Sprachliche Perspektive: Explikation des Allgemeingültigen am Besonderen

sprachliche Aspekte des Beweisens

Das Kommunizieren ist eine der wichtigsten Funktionen des Beweisens (↑ Abs. 1.1.1). Auch Wittmann & Ziegenbalg (2004) haben auf die Bedeutung sprachlicher Aspekte insbesondere beim operativen Beweisen hingewiesen (↑ Abs. 1.2.4). Vermöge seiner Äußerungen versucht der Schüler beim beispielgebundenen Beweisen den Beweis als Sinnstruktur zu versprachlichen. Die Aufgabe des Experten (resp. Forschers, Lehrers) besteht dann darin, diese Manifestationen beispielgebundenen Beweisens zu interpretieren.

Umgang mit mathematikhaltiger Alltagssprache

Gerade für das beispielgebundene Beweisen ist ein versierter Umgang mit mathematikhaltiger Alltagssprache notwendig. Die Schüler müssen das Allgemeingültige im Besonderen der Beispiele nämlich verbalisieren, um den Experten davon zu überzeugen, dass sie den beispielgebundenen Beweis subjektiv realisiert haben. Doch eine formelle oder algebraisch orientierte Ausdrucksmöglichkeit besteht gerade für Schüler unterer Jahrgangsstufen oft nicht. Aus theoretischer Sicht legt das beispielgebundene Beweisen also die Schwelle zum Beweisen einerseits niedriger, da es dazu keiner formell gehaltenen Sprache bedarf und diese zudem im Beispiel gehalten sein kann. Dieser mathematikhaltigen Alltagssprache sind für die Versprachlichung höherer mathematischer Zusammenhänge andererseits natürliche Grenzen gesetzt. Im empirischen ↑ Teil 3 sollen folgende Fragen beantwortet werden:

- Mit welchen eigenen Wortschöpfungen versucht der Schüler, den beispielgebundenen Beweis zu versprachlichen?
- Welche sprachlichen Mittel können dem Schüler an die Hand gegeben werden, um beispielgebunden zu beweisen?
- Welche Fragestellungen des Experten sind geeignet, den Schüler zum Manifestieren des subjektiv Realisierten anzuregen?

In die empirische Untersuchung beispielgebundenen Beweisens gehen nun noch einige ergänzende Perspektiven ein, wie die Wahl und die Anzahl der Beispiele, der Allgemeinheitsgrad von Behauptungen, das Beweisverständnis von Schülern und Interventionsmöglichkeiten von Lehrenden beim beispielgebundenen Beweisen.

2.1.5 Weitere Perspektiven

Wahl und Anzahl der Beispiele

Das beispielgebundene Beweisen vollzieht der Schüler an einem oder an mehreren Beispielen. Ohne Verwendung von Beispielen führt der Schüler einen rein formalen (resp. formellen) Beweis. Für das beispielgebundene Beweisen kann der Schüler ein zu triviales / spezielles Beispiel gewählt haben, als dass er oder ein Betrachter daran etwas Allgemeingültiges erkennen kann. Auch kann dem Schüler das Beispiel zu kompliziert oder schwer vorstellbar erscheinen, obwohl sich daran etwas Allgemeingültigeres durchaus erkennen lässt. Nach GOLDBERG (1992, 42) bereiten die Schüler das beispielgebundene Beweisen im Bearbeiten individuell verschieden vieler Beispiele vor – zu viele Beispiele können aber den Schüler auch dazu verleiten, im induktiven Prüfen der Behauptung zu verbleiben.

- Welchen Effekt hat die Wahl von trivialen oder zu speziellen Beispielen auf das beispielgebundene Beweisen eines Schülers?
- Inwiefern eignet sich die Vorgabe komplizierter oder schwer vorstellbarer Beispiele (*big/small number*) zum beispielgebundenen Beweisen?
- Welche Funktion besitzt das jeweilige Beispiel für den Schüler? Benutzt er es, um die Behauptung darin zu bestätigen, oder um diese daran zu beweisen?

Allgemeinheitsgrade von Behauptungen und fortschreitende Verallgemeinerung

In ↑ Abs. 1.5.2 wurden verschiedene Allgemeinheitsgrade einer Behauptung diskutiert. Das beispielgebundene Argumentgefüge erfährt durch verschiedene Ebenen an Allgemeingültigkeit eine Auffächerung. Einigen Aufgabenstellungen (etwa den Zahlenmauern und dem gegensinnigen Verändern) liegen dabei mehrere Variablen zugrunde. Der Schüler dürfte die dadurch implizit gegebenen Dimensionen der Verallgemeinerung häufig zunächst oder überhaupt nicht subjektiv realisieren. Möglicherweise gelangt der Schüler jedoch durch eine fortschreitende Verallgemeinerung der Behauptung zum beispielgebundenen Beweisen. Dabei können sich nach ↑ Abs. 1.4.4 die Behauptung als Konklusion, die Prämissen als Daten und oft auch die verwendeten Regeln ändern. Deshalb könnte der Schüler am betrachteten Beispiel die Grenzen der Allgemeinheit zunächst falsch einschätzen, zumal wenn er sich an der Front seines Wissens befindet.

- Wie gestaltet sich das beispielgebundene Beweisen bei nicht vollständiger oder zu weitgehender Verallgemeinerung der Behauptung?
- Wie lässt sich während der fortschreitenden Verallgemeinerung sicherstellen, um welchen Allgemeinheitsgrad es gerade im Prozess geht?

Beweisverständnis von Schülern

Was ein Beweis ist, wird im Mathematikunterricht der Schule selten explizit thematisiert. Häufig machen die Schüler im Mathematikunterricht selbst die Erfahrung, dass etwas trotz Bestätigung an nur wenigen Beispielen immer gilt, zumal sich innermathematisch nicht viele Beweisaufgaben finden lassen, die dieser Erfahrung widersprechen (zu Beispielen hierzu siehe ↑ Abs. 1.3.4). Und so ist es nicht verwunderlich, wenn Schüler die Aufforderung zum Beweisen ganz unterschiedlich auffassen und der eine darin mehr ein induktives Prüfen und die andere darin eher ein formales oder gar formelles Beweisen sieht. Auch kann selbst von Seiten der Schüler dann in Frage gestellt werden, ob das Beweisen an Beispielen überhaupt ein Beweisen ist, worüber sich letztlich auch die Forscher streiten.

- Prüft ein Schüler deshalb induktiv, weil sein Beweisverständnis ein anderes ist, weil er eine vorgelegte Behauptung für unfraglich hält oder weil er die Behauptung bloß anwendet und ihm dessen Prämisse als Begründung erscheint?
- Haben die Schüler selbst den Anspruch, über induktive Prüfungen hinaus eine Behauptung zu beweisen?
- Welche Maßnahmen des Experten resp. Lehrenden sind dazu geeignet, eine Behauptung als beweisbedürftig herauszustellen?

Interventionsmöglichkeiten von Lehrenden beim beispielgebundenen Beweisen

Interventionsmöglichkeiten und dialogische Mittel des Experten regen zum beispielgebundenen Beweisen an und dienen einer reflektierten Gesprächsführung (↑ Abs. 2.2.3). Etwa kann der Schüler gebeten werden, seinen vorgetragenen Beweis noch einmal einem fiktiven Mitschüler zu präsentieren. Damit Schüler ihr beispielgebundenes Beweisen mit passenden Begriffen unterlegen, können sprachliche Vorübungen dem eigentlichen beispielgebundenen Beweisen vorangestellt werden. Dabei kann auch eine inhaltliche Steuerung vorgenommen werden oder das beispielgebundene Beweisen als Interaktionsform vorab an einfachen Behauptungen eingeübt werden. Eine andere Möglichkeit bieten vorgelegte beispielgebundene Beweise allgemeingültiger Behauptungen, deren Beweisdarstellung im Beispiel gehalten sind.

- Gibt es allgemeine Merkmale von Aufgabenstellungen, die den Schülern das beispielgebundene Beweisen erleichtern?
- Wie sind die verschiedenen dialogischen Mittel (etwa Verhalten als *advocatus diaboli*, fiktiver Rollenwechsel, fehlendes Eingreifen) daraufhin zu beurteilen, dass sie den Schüler zum beispielgebundenen Beweis anregen?
- Welche Effekte können weitere Interventionen (etwa sprachlich-inhaltliche Vorübungen, Vorlage beispielgebundener Beweise, Entfernen von Taschenrechner/Messgeräten) auf das beispielgebundene Beweisen haben?

Damit sind die Forschungsfragen aus den eingangs genannten fünf Forschungsbereichen für die Einzelfallstudien in ↑ Teil 3 dieser Arbeit umrissen worden. Bevor in deren Vorfeld in ↑ Kap. 2.3 auf forschungspraktische Fragen eingegangen wird, erfolgt im nachstehenden ↑ Kap. 2.2 eine Reflexion über die in dieser Arbeit verwendeten Methodologien und Methoden.

2.2 Methodologie und Methoden

der Forscher in der Reflexion über seinen Forschungsprozess

An dieser Stelle sollen die verwendeten Methoden reflektiert und ihre Verwendung in der vorliegenden Arbeit begründet werden. Die Wahl der Forschungsmethoden und die Entwicklung einer Gegenstandsauffassung bedingen einander: Zum einen bestimmt die jeweilige Fragestellung an den theoretisch konzeptionalisierten Gegenstand den Einsatz der verwendeten Methoden. Zum anderen grenzt die Verwendung bestimmter empirischer Methoden im Forschungsprozess den Gegenstand ein. Der Forscher greift zur Präzisierung und Schärfung des Forschungsgegenstandes auf seine Felderfahrungen oder Befragungen zurück. Diese können den Forscher dann auch zuweilen zur Korrektur seiner theoretisch entwickelten Perspektiven veranlassen.

Forschungsinteresse und Forschungsfragen

Mit der Explikation der präzisierten Forschungsfragen im vorangegangenen ↑ Kap. 2.1 ist das Forschungsinteresse auf den theoretischen und empirischen Teil hin formuliert und systematisiert worden. Dies geschieht, um deutlich zu machen, wie die theoretische und die empirische Untersuchung des beispielgebundenen Beweisens ineinandergreifen. Die Fragestellungen nehmen dabei den Forschungsstand (↑ Kap. 1.1, 1.2) sowie die theoretische Fassung des Forschungsgegenstands (↑ Kap. 1.3, 1.4, 1.5) auf, geben Anlässe zum forschungspraktischen Vorgehen und bilden die Grundlage für die weitere empirische Untersuchung.

Orientierung der methodischen Reflexion an Jungwirth *(2003)*

Bei der nachstehenden methodischen Reflexion orientiert sich der Verfasser zum Teil an der Struktur des Übersichtsartikels "Interpretative Forschung in der Mathematikdidaktik – ein Überblick für Irrgäste, Teilzieher und Standvögel" von Jungwirth (2003) und prüft sein eigenes Vorgehen daran, ohne dass er eigenes neues Wissen generiert. Es wird damit wie folgt umgegangen: Zunächst wird die vorliegende Arbeit in den interpretativen Zweig der Mathematikdidaktik eingeordnet. Dazu wird das der interpretativen Mathematikdidaktik zugrundeliegende allgemeine Weltbild expliziert und in Beziehung zum eigenen Vorgehen gesetzt (↑ Abs. 2.2.1). Als relevanter Forschungsansatz sind in diesem Zusammenhang die so genannten Einzelfallstudien zu nennen (↑ Abs. 2.2.2). Im Rahmen von Einzelfallstudien können verschiedene Gesprächsformen zum Einsatz kommen, welche Auswirkungen auf den resultierenden Gesprächs- oder Interaktionstext haben (↑ Abs. 2.2.3). Anschließend werden für die entstandenen Texte mögliche Interpretationsansätze vorgestellt, wie sie sich auch in der interpretativen Mathematikdidaktik eingebürgert haben (↑ Abs. 2.2.4). Alsdann rechtfertigt der Verfasser seinen spezifischen theoretischen Zugriff dieser Arbeit, welcher vom Forschungsgegenstand des beispielgebundenen Beweisens her gedacht wird (↑ Abs. 2.2.5). Die Abduktion wird an dieser Stelle nicht als Schlussform in ihrer Charakterisierung mathematischen Entdeckens behandelt, sondern als der Interpretation von Texten dienendes forschungslogisches Vorgehen (↑ Abs. 2.2.6). Schließlich wird über das forschungspraktische Vorgehen reflektiert (↑ Abs. 2.2.7) und auf das Beweisen und Typisieren am Beispiel eingegangen (↑ Abs. 2.2.8).

theoretische und methodische Parallelen

Zusammenfassend werden im Folgenden an mehreren Stellen Parallelen zwischen dem theoretischen Zugriff und den verwendeten Forschungsmethoden gezogen (mit Kapitelverweis und jeweiliger Kapitelgliederung):

- Abduktion (↑ Abs. 2.2.6):

  Der Forscher vollzieht eine Abduktion an einem zu interpretierenden Text, indem er (auf der Basis seines bisherigen theoretischen und kontextuellen Wissens) eine Deutung dieses Texts eruiert und eine Deutungsregel assoziiert.

  Der Lernende vollzieht eine Abduktion an einem mathematischen Gegenstand, indem er ein (überraschendes) Resultat auf einen erklärenden Fall zurückführt und dabei ein Gesetz assoziiert, mit dem vom Fall auf das Resultat geschlossen werden kann.

- Objektive Hermeneutik (↑ Abs. 2.2.4, 2.2.7):

  Die Objektive Hermeneutik fungiert in ihrer Annahme der Sinnstrukturiertheit der Welt als Forschungsmethode zur Auslegung von Texten, welche latente Sinnstrukturen offenlegt.

  Die Mathematik ist sinnstrukturiert insofern, als dass mathematische Beweise latente Sinnstrukturen darstellen. Beim Forschungsgegenstand des beispielgebundenen Beweisens i.e.S. legt der Lernende den Beweis als Sinnstruktur offen, indem er diesen subjektiv realisiert und manifestiert.

- Beispielgebundenheit (↑ Abs. 2.2.8):

  Wenn der Forscher typisierende Darstellungen aus der Interpretation einzelner, besonderer empirischer Fälle zum Erkennen des Allgemeingültigen entwickelt, geht er beispielgebunden vor.

  Beim beispielgebundenen Beweisen versucht der Lernende, eine mathematische Behauptung am Beispiel zu beweisen, indem er am Beispiel das Allgemeingültige erkennt und versprachlicht.

2.2.1 Das interpretative Weltbild

interpretatives Paradigma

Die vorliegende Arbeit ist dem von Jungwirth (2003, 189) so genannten "interpretativen" Zweig deutschsprachiger Mathematikdidaktik zuzurechnen, welcher sich seit dem Ende der 1970er Jahre ausgebildet hat. Die interpretative Forschung setzt daran an, dass das scheinbar Gegebene und Selbstverständliche der sozialen Welt nicht *per se* vorhanden ist, sondern im wechselseitig interpretierenden Handeln der Mitglieder einer Gemeinschaft entsteht, vollzogen wird und daher auch Wandlungen unterworfen ist. Dem interpretativen Paradigma von Wilson (1973, 58ff.) zufolge sind gesellschaftliche Strukturen, Normen, Werte und Regeln und damit auch Rollen- und Statuszuschreibungen nicht determiniert, sondern werden im interpretierenden Austausch der Mitglieder einer Gemeinschaft resp. Gesellschaft ausgehandelt und geformt: im Interpretieren der gegebenen Dinge, im Orientieren an den Interpretationen Anderer und im Herstellen der sozialen Wirklichkeit als Ausdruck eigener Interpretation. Durch die Wahrnehmung, die Erwartung, die Deutung und den Vollzug von Handlungen wird die soziale Welt sinnhaft gestaltet. Das soziale Handeln kann sich dann an einem System von Symbolen und Mustern orientieren, welches das soziale Sinngefüge stabilisiert.

Theorien der interpretativen Soziologie

Jungwirth (2003, 190) umreißt in diesem Zusammenhang verschiedene theoretische Akzentuierungen der interpretativen Forschung, auf die sich auch die Mathematikdidaktik häufiger bezieht: So geht auf der einen Seite Schütz (1932, 12ff.) in seiner an Weber orientierten verstehenden Soziologie vom einzelnen Akteur aus, welcher sich durch so genannte Sinndeutungs- und Sinnsetzungsakte das Sinngefüge der sozialen Welt aufbaut, die dann auch zur sozialen Welt der Anderen wird. Blumer (1973, 80ff.) setzt im symbolischen Interaktionismus mehr eine soziale Vorstrukturierung des Handelns voraus und rückt die Interaktion ins Zentrum seines Interesses: Seiner Annahme nach wird das Handeln von Menschen Dingen gegenüber durch jene Bedeutungen bestimmt, die diesen Dingen zugeschrieben wird. Die soziale Interaktion verleiht den Dingen ihre Bedeutungen, welche die Menschen in ihrer interpretierenden Auseinandersetzung mit den Dingen wiederum verändern können. Damit stützt sich Blumer auf die Überlegungen von Mead (1973, 111, 316), nach denen die Interaktion über so genannte *signifikante Symbole* stattfindet, deren Sinn und Bedeutungen sozial geteilt wird. Auf der anderen Seite betont Garfinkel (1967, 10ff.) in der Ethnomethodologie die formalen Strukturen praktischer Handlungen zur Herstellung der sozialen Wirklichkeit. Dabei sieht er von subjektiven Intentionen der einzelnen Akteure und deren psychologischer Deutung ab. In der Interaktion interpretieren die Teilnehmer die indexikalen, d.h. die situations- und kontextabhängigen Ausdrücke der Anderen pragmatisch zwecks einer sogenannten sinnhaften Normalisierung der Interaktion, im Vertrauen darauf, dass die Anderen entsprechend interpretierend handeln.

interpretative Mathematikdidaktik

Die interpretative Mathematikdidaktik stellt in diesem Kontext einen Bezug zur Mathematik in ihrer sozial konstruierten Wirklichkeit her. Sie

> "befasst sich etwa mit Vorstellungen von mathematischen Begriffen oder Aufgabenlösungen, mit Sichtweisen von Mathematik und vom Unterrichten von Mathematik, mit der Verwendung von Mathematik im Alltag

> sowie insbesondere mit den Lehr- und Lernprozessen selbst, also mit fachbezogenen unterrichtlichen Interaktionen, Beteiligungsstrukturen und kollektiven Themen- und Interessensentwicklungen." (JUNGWIRTH, 2003, 190)

der interpretative Weltbezug dieser Arbeit

Auch die vorliegende Arbeit reiht sich in die bestehenden Forschungsarbeiten der interpretativen Mathematikdidaktik ein, deren jeweiliger methodischer Zugriff in seiner Spezifik von der theoretischen Untersuchung des Forschungsgegenstands und diesbezüglich getroffener Vorannahmen abhängt. Diese Arbeit erforscht das subjektiven Realisieren und das Manifestieren eines Beweises am Beispiel. Aus theoretischer Perspektive wird davon ausgegangen, dass ein Schüler den Beweis als latente Sinnstruktur oder einzelne seiner Teile subjektiv realisiert. Mit SCHÜTZ (1932, 149ff.) betrachtet, kann sich der Schüler gleichsam als einzelner Akteur den Beweis als objektiviertes Sinngefüge am betrachteten Beispiel konstruktivistisch aufbauen. Doch erst durch die sprachliche Manifestation seiner Sinnsetzungsakte kann sein als Beweis verstandenes Sinngefüge schließlich sozial geteilt werden und damit auch zur sozialen Welt der oder des Anderen werden, zunächst und zumal des interpretierenden Forschers.

Bevor nun in ↑ Abs. 2.2.4 grundlegende Interpretationsansätze sozialwissenschaftlicher Forschung behandelt werden, ist zu klären, welcher Forschungsansatz in der vorliegenden Arbeit vertreten wird, und welcher Techniken sich dieser Forschungsansatz bedient, um die für die Interpretation so wichtigen Texte zu generieren. Deshalb werden zunächst Einzelfallstudien und danach qualitative Interviews thematisiert. Bezogen werden diese theoretischen Ausführungen jeweils auf die vorliegende Arbeit.

2.2.2 Einzelfallstudien

die Einzelfallstudie als Forschungsansatz

Einzelfallstudien geben, anders als wenn etwa vom qualitativen Interview gesprochen wird, keine konkrete Erhebungstechnik vor. LAMNEK (2010, 272ff.) versteht unter einer Einzelfallstudie vielmehr einen *Forschungsansatz* bzw. einen *approach*, der sich grundlegend durch die *Methodenvielfalt*, durch die *Totalität* der Fälle und durch die alltagsnahe Untersuchungssituation charakterisieren lässt. Der Autor bemerkt zunächst zur *Methodenvielfalt*:

Methodenvielfalt

> "Die Einzelfallstudie ist (...) prinzipiell offen für alle Methoden und Techniken der empirischen Sozialforschung. Begreift man sie aber enger als dem interpretativen Paradigma und der qualitativen Sozialforschung zugehörig, so verbieten sich die standardisierten Methoden." (LAMNEK, 2010, 275)

Dass mehrere Erhebungsmethoden wie teilnehmende Beobachtung, Interview, Experiment, Fachgespräch u.a. zum Einsatz kommen können, besitzt den Vorteil, dass dadurch Methodenartefakte vermieden werden. Ein dadurch charakterisierter Forschungsansatz reguliert methodenbedingte Verzerrungen somit selbst. Der Fall wird gewissermaßen unter wechselndem methodischem Licht betrachtet. Dies trägt auch zur sogenannten *Totalität* des Falls bei:

Totalität des Falls

> "Eine gewichtige Besonderheit des Approachs Einzelfallstudie liegt darin, diese Fälle jeweils einzeln in ihrer Totalität zum Gegenstand einer Untersuchung zu machen. (...) Man begreift den Einzelnen nicht als ein eher unbedeutendes und prinzipiell austauschbares Mitglied einer Population oder Stichprobe, das nur Träger von durch den Forscher als wichtig definierten Merkmalen ist (...), sondern man betrachtet den Einzelnen als Fachmann für die Deutungen und Interpretationen seiner Alltagswelt." (LAMNEK, 2010, 274)

Mit GOODE & HATT (1956, 312) gesagt, "besteht also das Bestreben, aus jedem Einzelfall eine Untersuchung zu machen", statt eine Untersuchung über alle Einzelfälle hinweg zu führen. Dies bedeutet jedoch nicht, dass mit dem Einzelfall nur das Individuelle erfasst wird:

> "Man kann daher die Einzelfallstudie auch nicht als eine Methode betrachten, die das Einmalige erfaßt; sie versucht nur, die für das zu untersuchende wissenschaftliche Problem bedeutsame Kennzeichen als Einheit aufzufassen und zusammenzuhalten." (GOODE & HATT, 1956, 302)

Ziele der Einzelfallstudie

Eingeschränkt auf einen vornehmlich qualitativen Zugang verfolgt die Einzelfallstudie folgende Ziele:

> "Die Einzelfallstudie im qualitativen Paradigma strebt eine wissenschaftliche Rekonstruktion von Handlungsmustern auf der Grundlage von alltagsweltlichen, realen Handlungsfiguren an. Dabei versucht der Forscher nicht nur als alltagsweltlicher Handlungspartner, die Figuren nachzuvollziehen, sondern diese in den wissenschaftlichen Diskurs zu überführen und Handlungsmuster zu identifizieren, indem er allgemeinere Regelmäßigkeiten vermutet." (Lamnek, 2010, 285)

Alltagsbezug und Offenheit der Einzelfallstudie

Damit zeichnet sich die Einzelfallstudie zwar durch eine kommunikative Offenheit, durch lebensweltliche Nähe und durch eine Betonung des Individuellen aus. Allerdings fungiert der Forscher dabei gegenüber den Befragten oder Beobachteten in einer distanzierten Rolle als Rekonstrukteur der Wirklichkeit zu allgemeiner beschreibbaren Handlungsmustern. Seine Offenheit besteht darin, in der Entwicklung theoretischer Konzepte gegenüber den Deutungen aus der Alltagswelt empfänglich zu sein und nicht schon allein mit vorgegebenen Konzepten an den Einzelfall heranzutreten:

> "Durch den Approach der Einzelfallstudie wird die Stereotypisierung und vorschnelle Strukturierung der Daten vermieden, weil sehr konkret auf den individuellen Fall eingegangen werden kann und dessen Deutungen – ohne Prädetermination durch das hypothetische Raster des Forschers – erst zu interpretierenden Vermutungen führen." (Lamnek, 2010, 299)

Theoriebildung und Erfahrungen im Forschungsfeld

Zudem lassen sich Theoriebildung und die Erfahrungen im Forschungsfeld als wechselseitig befruchtender Prozess verstehen. In Einzelfallstudien bildet der Forscher Hypothesen nicht *a priori*, sofern er nicht auf bereits bestehende Einzelfallstudien oder Erkenntnisse zurückgreift, sondern in der fortwährenden Neuvermessung des Forschungsfelds am Befragten oder Beobachteten.

Einzelfallstudien in der vorliegenden Arbeit

Auch bei den in ↑ Teil 3 dieser Arbeit dargestellten Analysen handelt es sich um sogenannte Einzelfallstudien: Einzelne Schüler werden von einem Forscher dazu angeregt, beispielgebunden zu beweisen. Jeder Fall ist vom Ansatz her einer eigenen ausführlichen Untersuchung wert, um den Forschungsgegenstand, das beispielgebundene Beweisen, mit verschiedenen methodischen Ansätzen möglichst tiefgehend zu erschließen. Die Befragung der Schüler nimmt daher zeitweise den Charakter eines Lernexperiments, eines Fachgesprächs und eines Interviews an. Einschränkend muss gesagt werden, dass die Befragung zwar innerhalb der Schule als Lebenswelt der Schüler stattfindet, sich aber nicht mit den Routinen des Mathematikunterrichts deckt und damit für die meisten Schüler eher inhaltlich einen gewissen unterrichtlichen Bezug herstellt. Insofern können nur begrenzt Empfehlungen dazu gegeben werden, wie im Mathematikunterricht beispielgebunden bewiesen werden kann. Dass es sich nicht nur um ein unterrichtsnahes Fachgespräch handelt, sondern auch um ein Interview und um ein Lernexperiment, ist der oben genannten Methodenvielfalt geschuldet. Denn der Forschungsgegenstand soll durch die vorliegende Arbeit ja gerade auch explorativ untersucht werden. So ist es wünschenswert, dass die vorliegenden Einzelfallstudien auch einen gewissen Laborcharakter tragen.

Einzelfallstudien und qualitative Interviews

Wie eingangs gesagt, stellen Einzelfallstudien einen *Forschungsansatz* bzw. *approach* dar, während mit qualitativen Interviews eine unter mehreren möglichen Erhebungsmethoden auch im Rahmen einer Einzelfallstudie gewählt werden kann. Aufgrund dieser Einbettung sind Überschneidungen zwischen den methodologischen Aspekten von Einzelfallstudien und qualitativen Interviews feststellbar. Die bereits getroffenen Aussagen über die *Totalität* des Falls, über den anzustrebenden Alltagsbezug, über die kommunikative Offenheit von Einzelfallstudien und über die wechselseitige Bedingtheit zwischen Theoriebildung und Felderfahrung gelten auch bezüglich der Erhebungsmethode. Zudem zeichnen sich qualitative Interviews u.a. durch folgende Prinzipien aus:

ergänzende Prinzipien qualitativer Interviews

- ”Prinzip der Zurückhaltung durch den Forscher. Qualitative Interviews lassen den Befragten zu Wort kommen. Er ist nicht nur Datenlieferant, sondern er determiniert als Subjekt das Gespräch qualitativ und quantitativ.” (...)
- ”Prinzip der Flexibilität. In der Interviewsituation reagiert der Forscher variabel auf die Bedürfnisse des Befragten.”
- ”Prinzip der Prozesshaftigkeit. Das qualitative Interview ermittelt bevorzugt Deutungs- und Handlungsmuster der Befragten, die sich im Verlauf des Interviews entwickeln.”

(Lamnek, 2010, 320)

Wie diese Prinzipien methodisch-technisch umgesetzt werden können, ist Gegenstand des folgenden ↑ Abs. 2.2.3.

Es zeigt sich, dass die meisten in der Literatur genannten methodisch-technischen Aspekte (wie auch die vorstehenden methodologischen Aspekte) des qualitativen Interviews für dieses selbst weniger spezifisch sind. Da es sich bei den Analysen in ↑ Teil 3 vom weiteren Forschungsansatz her um Einzelfallstudien handelt, wird im Folgenden also nicht allein von qualitativen Interviews gesprochen, sondern auch von Befragungen oder Gesprächen. Diese sollen dem Forschungszweck dienen, dem Forschungsgegenstand gemäß zu interpretierbaren Texten zu gelangen.

2.2.3 Vom Gespräch zum interpretierbaren Text

Entstehung von Texten

Die aus Gesprächen und Beobachtungen im Forschungsfeld hervorgehenden Texte bilden eine unverzichtbare Grundlage von verschiedenen in der (mathematikdidaktischen) Forschung angewandten Interpretationsansätzen. Text wird hier eher in einem allgemeineren Sinne verwandt, etwa als Interaktionstext, der seine materiale Existenz durch Transkription in einem Dokument finden kann (vgl. ↑ Abs. 1.5.1 und ↑ Abs. 2.2.4). Im Unterschied zum vorangegangenen ↑ Abs. 2.2.2 über Einzelfallstudien als Forschungsansatz stellt sich nun eher die methodisch-technische Frage, wie die Entstehung der Texte von den Umständen, den Untersuchungspersonen und dem Forscher beeinflusst werden. Dabei ist von Interesse, von welchen Prinzipien sich der Forscher leiten lässt, um mit Blick auf seine Forschungsfragen zu interpretierbaren Texten zu gelangen. Beobachtet der Forscher etwa nur, wie in seinem Forschungsfeld interagiert wird? Oder begibt sich der Forscher als Akteur selbst in das Forschungsfeld, so dass er die Texte mitproduziert, welche er später interpretiert? Welche Gesprächsformen wählt er dann gegenüber den Personen in seinem Forschungsfeld aus? Welcher Gesprächstechniken kann er sich bedienen? Im Folgenden soll in gebotener Kürze über die Möglichkeiten reflektiert werden, welche Vorgehensweisen sich aus der Fülle der methodischen Zugänge eignen, um zu aussagekräftigen Texten zur empirischen Untersuchung des Forschungsgegenstands zu gelangen.

Bezugnahmen auf die vorliegende Arbeit

In der vorliegenden Arbeit geht es um die grundlegende Erforschung beispielgebundenen Beweisens, welche einerseits aus der theoretischen Fassung des Forschungsgegenstands, andererseits aus der Analyse von Texten befragter Schüler und aus der Reflexion hierüber an dieser Stelle besteht. Dass der Forschungsgegenstand vor dieser Untersuchung noch nicht umfassend theoretisch geklärt worden ist und somit das Terrain selbst noch untersucht werden muss, hat Auswirkungen auf die Rahmenbedingungen der Befragung, auf die Wahl der Gesprächsthemen, auf die Rollen des Forschers und des Befragten, auf die Gesprächsformen und auf die dabei eingesetzten Gesprächstechniken. Die genannten Aspekte sollen im Folgenden jeweils zunächst etwas theoretischer behandelt werden und dann in ihrer spezifischen Ausformung in der vorliegenden Arbeit erörtert und kritisch reflektiert werden.

- Rahmenbedingungen von Befragungen
- Gesprächsthemen
- Rollen der Gesprächsteilnehmer
- Gesprächsformen und Gesprächstechniken

Rahmenbedingungen von Befragungen

Unter Rahmenbedingungen von Befragungen lassen sich der Befragungsort, die Auswahl der Befragten, die Ausgestaltung der Gesprächssituation, die Dauer und Häufigkeit sowie der Zweck der Befragung fassen. All dies kann Auswirkungen auf den interpretierbaren Text haben, so dass an dieser Stelle diese Gesichtspunkte nacheinander genannt werden:

das Forschungsfeld als Ort der Befragung

Explizit thematisiert wird der Ort der Befragung als Forschungsfeld in der teilnehmenden Beobachtung. In der Literatur wird das Forschungsfeld nach WEIDMANN (1974, 12) als "Lebensraum einer Gruppe von Menschen" charakterisiert, welche den Forscher und sein Anliegen akzeptieren und ihm vertrauen müssen. Wie weiter unten beschrieben wird, kann der Forscher dabei verschiedene Rollen einnehmen. Im Feld verhält sich der Forscher eher rezeptiv (jedoch nicht passiv), sofern er bloß beobachtet. Er befragt das Feld dann gewissermaßen stumm. Je nachdem, wie (weit) sich der Forscher den Spielregeln seines Forschungsfelds anpasst, erhält er mehr oder weniger tiefe Einblicke in sein Forschungsfeld. Dabei wird er auch darauf achten, dass er die notwendige Distanz zu seinem Forschungsfeld wahrt.

Auswahl der Befragten

Unter den Befragten oder Beobachteten muss der Forscher eine Auswahl treffen. Dies hängt auch davon ab, in welcher Phase sich seine Untersuchung befindet. Steht er noch am Anfang, so wird er die befragten oder beobachteten Personen zunächt kennenlernen. LEGEWIE (1995, 192) empfiehlt, dass "der Feldforscher sich auf den Aufbau möglichst vielseitiger Kontakte konzentrieren" soll. Es macht Sinn, das Forschungsfeld auf diesem Wege in seiner Gänze zu vermessen und dann tiefergehende Untersuchungen durchzuführen, welche einen Auswahlprozess einleiten.

Ausgestaltung der Gesprächssituationen

Zur Ausgestaltung der Gesprächssituationen zählt die Anbahnung von Gesprächen in einer Vorbereitungsphase. Die Zugänglichkeit zu den Gesprächspartnern kann eingeschränkt sein. LEGEWIE (1995, 191) unterscheidet in diesem Zusammenhang zwischen offenen, halboffenen und geschlossenen Schauplätzen. Aber auch inhaltlich muss der Forscher vorab klären, welche Gesprächsform er wählt, wie er seine Gesprächsthemen den Befragten gegenüber vermittelt und wie er umgekehrt an bekannte und vertraute Dinge der Befragten anknüpft. Die Gesprächsteilnehmer müssen überdies zu einer gemeinsamen Sprachebene finden. Hierzu kann sich der Forscher je nach selbst gewählter Rolle bestimmter Gesprächstechniken bedienen, wie sie weiter unten beschrieben werden.

Dauer und Häufigkeit der Befragung

Dauer und Häufigkeit der Befragung hängen vom Zweck der Befragung ab. Kann oder soll die Begegnung zwischen dem Forscher und den Befragten resp. den Beobachteten nicht wiederholt werden, bleibt die Befragung einmalig. Je nach Forschungsansatz kann aber auch in Abständen wiederholt befragt werden, um Veränderungen oder Entwicklungen auf Seiten der Befragten feststellen zu können. Ebenso stark kann die Dauer von einzelnen Befragungen variieren. Diese ist auch abhängig vom Alter der Befragten, von den Gesprächsthemen oder von Auswahlkriterien, die der Forscher gegenüber den Befragten trifft.

Rahmenbedingungen der Befragungen in der vorliegenden Arbeit

Die Befragungen der Schüler in der vorliegenden Arbeit haben experimentellen Charakter in dem Sinne, dass der Forscher selbst noch den Untersuchungsgegenstand, das beispielgebundene Beweisen, exploriert. Um die Komplexität an Interaktion möglichst gering zu halten, werden die Befragungen mit einzelnen Schülern außerhalb des regulären Mathematikunterrichts durchgeführt. Damit wird in Kauf genommen, dass für die Vermittlung beispielgebundenen Beweisens im Mathematikunterricht allenfalls Empfehlungen ausgesprochen werden können. Dies geschieht aber aus einer zunächst grundlagentheoretischen Haltung gegenüber dem Forschungsgegenstand heraus.

Statt nun Schüler zu Hause zu befragen, wird als Befragungsort die Schule gewählt. So kann sich der Forscher in Vermittlung über den Lehrer einerseits über die alltägliche Lebenswelt der Schüler und andererseits über den Lernstand der Schüler informieren. Auch ist mit der Grundschule und dem Gymnasium eine Auswahl von Schülern verbunden, die dem Forschungsgegenstand insofern Rechnung trägt, als dass das Beweisen im Mathematikunterricht (noch) vornehmlich an Gymnasien praktiziert wird. Keine Einschränkung wird bei den Schülern jedoch hinsichtlich ihrer Fähigkeiten zum (beispielgebundenen) Beweisen gemacht. Denn durch die vorbereitende Diskussion in ↑ Abs. 1.1.1 ist eingangs intendiert worden, dass in der vorliegenden Forschungsarbeit keine Fähigkeitsniveaus im (beispielgebundenen) Beweisen bestimmt werden sollen, da dies auf eine Hierarchisierung des beispielgebundenen gegenüber dem formalen resp. formellen Beweisen hinauslaufen würde. Wie aus ↑ Kap. 1.5 hervorgeht, geht es der theoretischen Fassung beispielgebundenen Beweisens i.w.S. nach um den Prozess beispielgebundenen Beweisens in seinen möglichen Verlaufsformen.

Der Schüler wird in einem separaten Raum befragt. Forscher und Befragter machen sich einander kurz bekannt und finden über ein Sachthema zum Gespräch. Der Forscher nimmt während des Gesprächs verschiedene Rollen an, z.B. als Interviewer, Zuhörer, Lehrender, Mitschüler, *advocatus diaboli* usw.. Dies geschieht abhängig von der jeweils gewählten Gesprächsform, je nachdem ob situativ der Charakter eines Interviews, Experiments und Fachgesprächs dominiert. Die Interviewdauer sollte bei Grundschülern eine halbe Stunde nicht überschreiten. Da der Prozess des beispielgebundenen Beweisens untersucht werden soll, ist bei Schülern der Sekundarstufe die Dauer einer Schulstunde (45 Minuten) die Regel.

Gesprächsthemen

Die Gesprächsthemen bilden das inhaltliche Gerüst einer Befragung. Die Gesprächspartner argumentieren an Inhalten und Sachkontexten und formen auf dieser inhaltlichen Grundlage einen Interaktionstext. Welche Gewichtung dabei dem Inhalt selbst, und welche dem beobachtbaren Verhalten des Befragten damit zukommt, hängt von der jeweiligen Untersuchung ab. Der Forscher sollte sich als fachlicher Experte auskennen; ebenso sollte der Gesprächspartner einen Bezug zum Gesprächsthema haben oder finden. Der Forscher wählt die Gesprächsthemen zudem derart aus, dass sie ihm zur Untersuchung seiner Forschungsfragen verhelfen. Hierbei ist Sorgfalt geboten:

> "Mit der Entscheidung für eine konkrete Fragestellung ist jeweils auch eine *Reduktion* und damit Strukturierung verbunden: Bestimmte Aspekte werden in den Vordergrund gestellt, andere werden als weniger wesentlich (zumindest vorerst) in den Hintergrund gerückt bzw. ausgeschlossen. Insbesondere bei der Datenerhebung mit einmaligen Interviews fällt eine solche Entscheidung ins Gewicht, während ihre Konsequenzen bei der Konzipierung der Datenerhebung als Prozeß etwa mit teilnehmender Beobachtung oder mit wiederholten Befragungen leichter zu korrigieren sind." (Flick, 1995, 152, H.i.O.)

Gesprächsthemen in der vorliegenden Arbeit

Die Gesprächsthemen sind in der vorliegenden Arbeit relativ festgelegt. Es handelt sich um mathematisch analysierte und für das beispielgebundene Beweisen geeignet befundene Aufgabenstellungen. Auch dieser Auswahlprozess erfolgte zum Teil im Forschungsfeld selbst. Etwa hat sich das gegensinnige Verändern der Multiplikation für den Einsatz in der Grundschule als zu schwer erwiesen. Zudem gibt es Aufgabenstellungen wie den Winkelsummensatz im konvexen n-Eck oder Sätze über Potenzfunktionen, die sich zwar für Gymnasialschüler als geeignet herausgestellt haben, aber aus Umfangsgründen nicht in diese Arbeit aufgenommen wurden. Diese Entscheidungen haben sich im Laufe der etwa 100 Interviews mit Grundschülern und Schülern der Sekundarstufe I eingestellt. Die inhaltliche Zuordnung der behandelten Aufgabenstellung zum beispielgebundenen Beweisen erfolgte nach Klassenstufe derart, dass den Schülern die Beweisaufgaben zwar unbekannt, aber für sie im Prinzip lösbar gewesen sind. Zu einem kleinen Teil ist auch das Sprechen über das Beweisen selbst thematisiert worden. Dies hat sich zumal dann ergeben, wenn der Beweisende nachträglich über sein (beispielgebundenes) Beweisen reflektiert hat, wie es aus theoretischer Perspektive insbesondere bei den Zugängen des Entdeckens und Prüfens mit latenter Beweisidee absehbar ist.

Rollen der Gesprächsteilnehmer

teilnehmender Beobachter

Der Forscher kann im Forschungsfeld verschiedene Rollen annehmen, welche die jeweilige Gesprächsform, zum Beispiel teilnehmende Beobachtung oder ethnographisches Interview, mitbedingt und impliziert. Eine Möglichkeit besteht darin, dass der Forscher am Sozialleben der Untersuchungspersonen teilnimmt und deren Verhalten, deren Interaktionsmuster und deren Wertempfinden beobachtet. Der Forscher führt als Beobachtender gewissermaßen ein stummes Gespräch mit den Untersuchungspersonen, die sich sehr wohl untereinander austauschen können.

Beobachter und Akteur

Bleibt der Forscher nicht allein teilnehmender Beobachter, sondern begibt er sich auch als Akteur in das Forschungsfeld, nimmt er selbst an der Entwicklung des später zu interpretierenden Texts teil. Insofern beeinflusst er die Textproduktion. Andererseits ist es von Vorteil, den Forschungsgegenstand und dessen Träger ganz aus der Nähe zu beforschen. Die Doppelrolle aus Beobachter und Akteur ist nicht einfach anzunehmen, zumal der Forscher sein Rollenverständnis dem Befragten gegenüber deutlich machen muss und dies für den Forscher aktives und rezeptives Verhalten gleichermaßen erfordert.

weitere Rollen

Die Rolle des Akteurs kann weiter präzisiert werden. Der Forscher kann als Interviewender, Beratender, Lehrender oder selbst auch als Lernender agieren. Diese Rollen können während des Gesprächs fließend wechseln und gehen häufig auch aus der vom Forscher ins Auge gefassten Gesprächsstruktur hervor. Sie implizieren eine Hierarchie zum Interviewten, Beratenen und Lernenden in dem Sinne, dass der Interviewer, Beratende, Lehrende das Gespräch führt.

Interviewender und Interviewter

Der Interviewende ist nach Linke et al. (1994, 291) gegenüber dem Interviewten in dem Sinne bevorrechtigt, "initiierende Beiträge zu leisten, Fragen zu stellen, bestimmte Themen zur Sprache zu bringen und die Gesprächsbeiträge des Interviewten mit themenkontrollierenden Bemerkungen zu lenken". Der Autor weist in diesem Zusammenhang jedoch darauf hin, dass der Interviewte sich nicht automatisch mit seinem bloß antwortenden Status zufriedengeben muss, insbesondere dann nicht, wenn er sich gegenüber dem Interviewer selbst als Experte im jeweiligen Gesprächsthema sieht. Dann kann nach LINKE ET AL. (1994, 291) sogar in einem ”gesprächsweisen Machtkampf” zu zeitweisen Rollenkonflikten kommen. Dieser Kampf um die Vorherrschaft über die Gesprächsführung ist auch aus dem Alltag bekannt. Die Gesprächspartner bedienen sich dabei verschiedener Gesprächsmittel wie offener und geschlossener Fragen, Gegen- und Nachfragen, kurzer und ausführlicher Antwort, Appell, Bewertung und weiterem.

Rollen in der vorliegenden Arbeit

In der vorliegenden Arbeit nimmt der Forscher hauptsächlich die Rollen des Interviewenden, Dialogpartners und Lehrenden an. In etwaigen Vorübungen gibt der Interviewende dem Schüler die Möglichkeit, erste Erfahrungen im beispielgebundenen Beweisen zu sammeln und sich darin als selbstwirksam und motiviert zu erleben. Im weiteren Gesprächsverlauf übt sich der Forscher in Zurückhaltung, um seine Einflüsse auf das beispielgebundene Beweisen des Schülers möglichst gering zu halten. Der Schüler soll möglichst selbstständig zu seiner Rolle als Beweisführenden finden, und der Forscher moderiert hauptsächlich. Belehrend greift der Forscher nur dann ein, wenn zu erwarten steht, dass sich der Schüler in zu weitem Terrain verliert oder zu lange einen Irrweg beschreitet. Zeitweise kann der Forscher auch dialogisch agieren, etwa indem er in die Rolle eines fiktiven Mitschülers schlüpft oder den Schüler als *advocatus diaboli* zum Widerspruch herausfordert. Die beschriebenen Rollenwechsel haben den Sinn, die Entwicklung beispielgebundenen Beweisens beim Schüler voranzutreiben, etwa wenn der Schüler sein Beweisverhalten zu sehr verfestigt. Freilich mag dem Schüler eine solche Konfrontation mit einem wechselnden Rollenverständnis nicht ganz geläufig erscheinen. Insofern tut der Forscher zu Beginn des Gesprächs gut daran, dem Schüler zu vermitteln, dass es sich um ein Schülerexperiment handelt.

Gesprächsformen und Gesprächstechniken

Typen qualitativer Interviews

In der Literatur werden verschiedenste Gesprächsformen und Gesprächstechniken thematisiert, die hier nur ansatzweise genannt werden sollen. Je nachdem, wie das Forschungsinteresse gelagert ist, werden beispielsweise verschiedene Typen qualitativer Interviews empfohlen. So unterscheidet LAMNEK (2010, 326) zwischen narrativem, episodischem, problemzentriertem, fokussiertem, rezeptivem, Experten- und Tiefeninterview. Als Leitfadeninterview bezeichnet der Autor ein Interview, bei dem der Interviewer auf ein ”unterstützendes Element” wie zum Beispiel einen Fragebogen oder eine Liste zurückgreifen kann. KROMREY (2006, 388) gliedert die weiter gefasste Befragung in nicht standardisierte, teilstandardisierte und vollstandardisierte Formen, die sich jeweils wiederum mündlich und schriftlich durchführen lassen. Das Leitfadengespräch wird seiner Aufstellung nach als mündliche teilstandardisierte Befragung charakterisiert, während das Einzelinterview mündlich vollstandardisiert ist. Der Autor präzisiert sein Schema wie folgt:

Leitfaden-Interview

> ”Beim *teil-standardisierten Fragebogen* handelt es sich dagegen vor allem um ein Fragebogen*gerüst*: In der Hauptsache wird mit offenen Fragen gearbeitet; Sondierungsfragen sind zugelassen; die Interviewer haben

> die Möglichkeit, die Befragungssituation selbst mitzustrukturieren. Einzelinterviews mit Hilfe eines solchen Fragebogengerüsts oder Interview-Leitfadens werden *Leitfadengespräch* bzw. Intensiv- oder Tiefeninterview genannt. Diese Form der Befragung erlaubt es, zu bestimmten Themen genauer nachzufragen, Sachverhalte intensiver oder mehr in die Tiefe gehend zu erfassen. (...)" (Kromrey, 2006, 389, H.i.O.)

Gesprächsformen in der vorliegenden Arbeit

Die vorstehende Definition des Leitfadengesprächs resp. des Intensiv- oder Tiefeninterviews kommt dem Charakter der vorliegenden Gespräche mit einzelnen Schülern zum beispielgebundenen Beweisen nahe. Den im vorigen ↑ Abs. 2.2.3 genannten Rollen nach ließe sich von einer Mischform aus Interview, Experiment und Fachgespräch sprechen. Es wird ein leitfadenorientiertes Einzelinterview geführt, das für den Befragten den Charakter einer Beweisübung, eines dialogischen Lernexperiments und eines Fachgesprächs annehmen kann. Strukturiert wird das Gespräch durch den Interviewer auf Grundlage der gewählten Aufgabenstellung, sich situativ anbietender Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen und der bisherigen Erfahrung damit. Etwaige Vorübungen geben dem befragten Schüler an einfacher gehaltenen Beweisaufgaben zunächst eine Ahnung vom weiteren Gesprächsablauf und bereiten ihn inhaltlich auf das beispielgebundene Beweisen vor. Werden Zugänge des Entdeckens und Prüfens zum beispielgebundenen Beweisen i.e.S. erwogen, gewährt der befragende Forscher dem Schüler relativ große Freiheit und hinreichend viel Zeit, damit dieser die Behauptung möglichst selbstständig entdecken und prüfen kann. In diesen Suchprozess wird der Interviewer erst dann eingreifen, wenn sich der Schüler an der Front seines Wissens länger aufhält. Die sich dann wohlmöglich ergebende Frage, in wie weit eine durchgeführte Prüfung am Beispiel mit latenter Beweisidee schon einen Beweis konstituiert, kann zu einem dialogischen Gespräch im Sinne von Vollrath (1969, 1968, 1967) motivieren. Ist es dem Schüler beim beispielgebundenen Beweisen mit fortschreitender Verallgemeinerung gelungen, die fragliche Behauptung auf einer ersten Ebene der Verallgemeinerung zu beweisen, kann sich daraus ein Fachgespräch entwickeln, um wieviel weiter die Behauptung noch trägt. Darin kann der Schüler zunehmend als Experte auftreten, während der Interviewer es bei Nachfragen und weiterführenden Hinweisen belässt. Am wenigsten soll die Befragung den Charakter eines Lehrgesprächs annehmen, das den Schüler fragend-entwickelnd über das beispielgebundene Beweisen zum formalen resp. formellen Beweisen führt.

Fragetechniken

Während die Gesprächsformen den Charakter von Befragungen insgesamt thematisieren, dienen Gesprächstechniken eher als Rüstzeug für den Befragenden, konkrete Gesprächssituationen zu gestalten. Die Art der Fragen kann dabei grundsätzlich offen oder geschlossen gestellt werden. Bei geschlossenen Fragen werden Antwortalternativen implizit vorgegeben. Häufig geschieht dies dichotom im Sinne einer positiven Antwortmöglichkeit gegenüber einer negativen Antwortalternative. Offene oder vielmehr offen gehaltene Fragen geben dem Befragten ungleich größere Spielräume, seine Meinung, sein Verständnis oder sein Urteil in eigener Formulierung dem Befragenden gegenüber kundzutun. Dies erfordert bei dem Befragenden umgekehrt ein größeres Maß an Flexibilität, mit unterschiedlichsten Antworten des Befragten sinnvoll umzugehen. Die Intention besteht nun darin, dass der Befragte sich in der freien Formulierung seiner Gedanken so (sehr) offenbart, dass der Befragende daran sein Forschungsinteresse befriedigen kann. Offen gehaltene Fragen werden im qualitativen Interview insofern sehr viel häufiger gestellt.

Gesprächstechniken

Eine Reihe von Gesprächstechniken, die im Alltag zum Einsatz kommen, und zu denen eine Reihe von populären Ratgebern verfügbar ist, werden beim qualitativen Interview nur selten oder gar nicht angewandt, etwa weil manche Techniken in Hinblick auf die wissenschaftliche Auswertung kontraproduktiv sind. Der Befragende sollte grundsätzlich einen lenkenden, fragend-entwickelnden Gesprächsstil vermeiden. Verzichten sollte er auch auf eine Beurteilung dessen, was der Befragte sagt. Diesem Anspruch kann jedoch gar nicht so leicht entsprochen werden, wenn man schon allein an die nonverbalen Ausdrucksformen der Bestätigung oder Ablehnung im Alltag denkt. Als günstig hat es sich herausgestellt, dass der Befragte zur Formulierung seiner eigenen Gedanken ausdrücklich ermutigt wird, zumal da er im Interview keine nachteiligen sozialen Folgen befürchten muss. Um eine ggf. bestehende soziale Hierarchie zwischen Befragenden und Befragten zu mildern, kann der Befragende auch versuchen, in die Rolle eines fiktiven Anderen zu schlüpfen, dem der Befragte wohlmöglich eher geneigt ist, Auskunft zu geben. Antwortet ein Befragter auf den Feldern ausweichend oder unklar, welche den Forscher interessieren, sollte dieser fokussierend nachfragen, ohne dass sein Fragen auf den Befragten penetrant wirkt. Zeigt sich der Befragte in einer Meinung sicher und hinreichend überzeugt, kann der Befragende es wagen, diese Meinung als *advocatus diaboli* in Frage zu stellen. Dies hat den Zweck, den Befragten aus der Reserve zu locken, seine Meinung überdenken oder seine eigene Überzeugung begründet vertreten zu lassen.

besondere Gesprächstechniken in der vorliegenden Arbeit

Zur Befragung der Schüler in der vorliegenden Arbeit bieten sich die vorstehenden Empfehlungen an, um mit den Äußerungen der Schüler situationsadäquat umgehen zu können. Inhaltliche Besonderheiten ergeben sich etwa bei der Frage, wie allgemein der Schüler ein im Beispiel gehaltenes Argument sieht. Die darauf abzielende Frage "Gilt das immer?" präzisiert den Kontext nicht explizit und setzt schon voraus, dass Befragender und Befragter auf derselben Ebene von Allgemeinheit der fraglichen Behauptung sprechen. Dies ist aber gerade ein Gegenstand der Befragung. Insofern muss das, was mutmaßlich immer gilt, in der obigen Frage auch ausgesprochen werden.

Zu dem nicht erschöpfenden, mehr oder weniger Allgemeingut abbildenden Überblick auf die Rahmenbedingungen von Befragungen, die Gesprächsthemen von Befragungen, die Rollen von Gesprächsteilnehmern und einige Gesprächsformen und -techniken ist vorstehend das eigene Vorgehen bei der Befragung in Beziehung gesetzt worden. Es ist dabei deutlich geworden, dass diese Entstehungsbedingungen Auswirkungen auf die Art der Textproduktion zwischen Befragten und Befragenden hat. Bevor in ↑ Kap. 2.3 mehr auf die praktischen Erfordernisse der Einzelfallstudien in ↑ Teil 3 eingegangen wird, soll über die Interpretation der aus dem Gespräch mit dem Befragten hervorgehenden Texte methodisch reflektiert werden.

2.2.4 Grundlegende Interpretationsansätze

interpretative Positionen

JUNGWIRTH (2003, 191) zufolge ist es nicht das eigentliche Ziel interpretativer Forschung, die subjektiven Betrachtungsweisen und deren Zusammenwirken zu intersubjektiven Sichtweisen nachzuvollziehen und zu beschreiben. Vielmehr geht es um ein Überschreiten und Transzendieren der ursprünglichen Deutungen der Lebensäußerungen von Menschen – sofern Wissenschaft mit dem Anspruch auftritt, einer abduktiv verstandenen Forschungslogik nach Neues oder auch neuartig Auszulegendes zu entwickeln. In einer wissenschaftstheoretischen Skizze nennt die Autorin sodann drei für die interpretative Mathematikdidaktik relevante Positionen, die dieses wissenschaftliche Paradigma erfüllen können:

- Sinnkonstitution nach SCHÜTZ (1932)
- Texttheoretische Position nach RICŒUR (1972)
- Objektive Hermeneutik nach OEVERMANN ET AL. (1979)

Sinnkonstitution nach Schütz (1932)

Sinnschichten nach SCHÜTZ [1932]

SCHÜTZ (1932, 12ff.) versteht das Interpretieren als ein Verbinden mit Sinn, der sich über das soziale Handeln konstitutiert. In der kritischen Auseinandersetzung mit dem Sinnbegriff von WEBER diskutiert er fünf einander umfassende *Sinnschichten*:

1. Handeln besteht unabhängig von einem Anderen.

2. Soziales Handeln bezieht sich auf die Existenz eines Anderen.

3. Soziales Handeln bezieht sich auf das soziale Verhalten eines Anderen.

4. Soziales Handeln orientiert sich am sozialen Verhalten eines Anderen.

5. Soziales Handeln wird von außen, objektiv gedeutet.

Die vierte Schicht umgreift also einen subjektiv gedeuteten Sinnzusammenhang in einer wechselseitigen Verhaltensorientierung. Davon trennt SCHÜTZ (1932, 14) die äußere, fünfte Schicht als objektiv (von Anderen) gedeuteten Sinnzusammenhang, von der aus etwa auch der forschende Soziologe die Lebensäußerungen der Akteure interpretiert. Der Autor misst der Sprache als eines der Subjektivität der Menschen enthobenes, objektiviertes Sinnsystem eine bedeutende Rolle zu, weil sie als Gemeingut aller Menschen das ausgezeichnete Medium und Schema zur Vermittlung und Deutung von Sinn ist. Der obigen Einordnung dieser Arbeit folgend, kann der mathematikdidaktisch Forschende die sprachliche Manifestation eines Beweises als Sinngefüge durch den Schüler wenn nicht bereits als Akteur, so zumindestens in der Analyse annähernd objektiv deuten.

Texttheoretische Position nach Ricœur (1972)

Ricœur (1972) rekurriert eher auf den sich manifestierenden Text selbst, in welchem nach Jungwirth (2003, 191) ”der überdauernde, im System der Sprache grundgelegte Sinngehalt eines Sprechakts festgehalten ist”. In seiner als hermeneutisches Modell zu verstehenden Textauslegung lassen sich ”vier Grundzüge” ausmachen. Diese bestehen in

Grundzüge der Textauslegung nach Ricœur [1972]

> ”I. der Fixierung des Sinngehalts, 2. der Trennung von Sinngehalt und geistiger Intention des Autors, 3. der Entfaltung von nicht-ostentativen Bezügen, und 4. der unbegrenzten Reihe ihrer Adressaten. Diese vier Grundzüge zusammengenommen machen die ’Objektivität’ des Textes aus.”
> (Ricœur, 1972, 268)

Der Autor formuliert den dritten Aspekt bezogen auf das Handeln wie folgt:

> ”Unserem dritten Kriterium eines Textes folgend, können wir sagen, daß eine sinnhaft orientierte Handlung eine Handlung ist, deren Bedeutung ’über’ ihre Relevanz für die augenblickliche Situation hinausgeht. Dieser Grundzug ist ähnlich der Art und Weise, in der ein Text die Grenzen des Diskurses und aller seiner ostentativen Bezüge übersteigt. Als Ergebnis dieser Emanzipation vom situationalen Kontext kann der Diskurs nicht-ostentative Bezüge entwickeln, die wir eine ’Welt’ in dem Sinne nannten, wie wir von der griechischen ’Welt’ sprechen (also nicht im kosmologischen Sinn des Wortes, sondern in seiner ontologischen Bedeutung).”
> (Ricœur, 1972, 265)

Insofern kann auch der interpretierende Forscher einen Text sinnvoll deuten, wenn er die Intentionen des Akteurs und den situativen Kontext außen vorlässt und sich auf die tiefere Bedeutung (um mit Oevermann zu sprechen: auf die latente Sinnstruktur) des Textes einlässt. Damit ermöglicht die Interpretation, mehr ”als nur das Besondere der jeweiligen Situation zu rekonstruieren; sie bringt vielmehr auch das überdauernde, das Allgemeine daran hervor”, so Beck & Maier (1994a, 47). Der Text wird also gleichsam seiner beispielhaften Besonderheit entkleidet und dadurch seine innere Struktur sichtbar.

Objektive Hermeneutik nach Oevermann (1979)

Bei Oevermann et al. (1979, 378ff.) sind es – wie in ↑ Abs. 1.5.1 schon dargestellt – die *(Interaktions-)Texte* oder so genannte *Ausdrucksgestalten*, welche als Protokolle realer, symbolisch vermittelter sozialer Handlungen verschriftlicht oder visualisiert vorliegen, und mit deren Auslegung die Objektive Hermeneutik hinsichtlich der darin liegenden objektiven Sinngehalte, jenen latenten Sinnstrukturen, befasst ist. Der Beweis (in seiner Darstellung als beispielgebundenes Argumentgefüge) ist eine solche latente Sinnstruktur. Die Objektive Hermeneutik findet also ihre Anwendung – als Besonderheit der vorliegenden Arbeit – primär auf den Forschungsgegenstand selbst, und nur sekundär als eine Forschungsmethode: Der Beweis wird theoretisch als eine latente Sinnstruktur verstanden und davon ausgehend das beispielgebundene Beweisen i.e.S. und

Texte als Ausdrucksgestalten nach Oevermann [1979]

Objektive Hermeneutik als Bestandteil des Forschungsgegenstands i.w.S. als Forschungsgegenstand am einzelnen Schüler empirisch untersucht. Der Forscher tritt in wechselnden Rollen als Zuhörender, Nachfragender, *advocatus diaboli*, Lehrender, Interviewender und Spiegelnder des Schülers dazu auf, dass dieser während seines beispielgebundenen Beweisens zum subjektiven Realisieren und Manifestieren des Beweises als latenter Sinnstruktur gelangt, wie sie der Forscher als Experte schon kennt.

2.2.5 Rechtfertigung der theoretischen Fassung des Forschungsgegenstands

Theoretisch hat sich der Forschungsgegenstand des beispielgebundenen Beweisens i.e.S. nach ↑ Abs. 1.5.3 durch den auf die objektive Hermeneutik zurückgehenden Terminus der latenten Sinnstruktur fassen lassen, die ein Schüler aus Sicht des Experten als Beweis subjektiv realisieren und manifestieren kann.

latente Sinnstrukturen zur Fassung beispielgebundenen Beweisens

Dass sich nun der auf Oevermann et al. (1979) zurückgehende Begriff der latenten Sinnstruktur als geeignet erweist, das beispielgebundene Beweisen i.e.S. zu beschreiben, erfährt eine zunächst theoretische Rechtfertigung aus dem für die Mathematik als Wissenschaft spezifischen, sie konstituierenden Beweisbegriff (↑ Abs. 1.1.1): Beweise verschaffen der Mathematik ihren streng deduktiven Aufbau als Regelstruktur, die für den Lernenden teilweise latent sein kann. Mehr auf die Mathematikdidaktik bezogen liegt eine weitere theoretische Rechtfertigung in der Darstellungsmöglichkeit der latenten Sinnstruktur als beispielgebundenes Argumentgefüge, welche zugleich ganz im Beispiel und mehr oder weniger allgemeingültig gehaltene Argumente abbilden kann (↑ Abs. 1.4.4): Manifestiert der Schüler die Argumente fast ausschließlich im Beispiel, kann der Betrachter hierin ein Indiz dafür sehen, dass der Schüler den Beweis als latente Sinnstruktur in seiner Allgemeingültigkeit noch nicht subjektiv realisiert hat. Hält er die Argumente am Beispiel allgemeingültiger, dürfte dies für die subjektive Realisierung des Beweises sprechen (↑ Abs. 2.1.1). Der Begriff des beispielgebundenen Argument(gefüge)s kann als kompaktes, inhaltlich motiviertes Darstellungsmittel dazu verwendet werden, den Beweis als latente Sinnstruktur zu beschreiben. Hierzu eignet sich die Theorie der Struktur von Argumenten nach Toulmin.

beispielgebundenes Argumentgefüge

Struktur von Argumenten nach Toulmin

Schlussformen nach Peirce

Wie in ↑ Abs. 1.4.4 dargestellt, kann unter einer mehr logischen Perspektive auch das Schema der Deduktion im Sinne von Peirce als Charakteristikum des Beweisens i.e.S. verwendet werden. Auch ist das weitere Hinzuziehen der Schlussformen der Abduktion und der Induktion im Sinne von Peirce geeignet, um eine mehr prozesshafte Vorstellung vom beispielgebundenen Beweisen i.w.S. zu gewinnen. Ein zwischen zwischen induktivem Prüfen und formellem Beweisen changierender Prozess kann empirisch untersucht werden, unter Berücksichtigung von didaktisch produktiv einzuschätzenden Zugängen wie dem Entdecken resp. Prüfen mit latenter Beweisidee, welches sich zum beispielgebundenen Beweisen i.e.S. wandeln kann.

theoretische Fassung im Forschungsprozess

Die in ↑ Kap. 2.1 angeführten präzisierten Forschungsfragen sind nicht als zu operationalisierende Hypothesen über den Forschungsgegenstand zu verstehen, die nun zu überprüfen wären. Diese Fragen haben sich bei der empirischen Arbeit ergeben und dazu beigetragen, den Forschungsgegenstand theoretisch zu schärfen.

2.2.6 Abduktion als Forschungslogik

Abduktionen beim beispielgebundenen Beweisen

Die Abduktion gehört – als Charakteristikum des Entdeckens – zum Forschungsgegenstand, wenn auch nicht im engeren Sinne, da es sich beim beispielgebundenen Beweisen wie auch beim Beweisen primär um ein Vollziehen von Deduktionen handelt. Das (beispielgebundene) Beweisen kann gleichwohl durch das Entdecken der Behauptung auf eine sehr produktive Weise motiviert und befördert werden, wie der diskutierte Zugang des Entdeckens mit latenter Beweisidee in ↑ Abs. 1.3.3 zeigt. Der enge, in ↑ Abs. 1.3.5 diskutierte Zusammenhang zwischen dem Entdecken resp. Prüfen mit latenter Beweisidee und dem beispielgebundenem Beweisen i.e.S. rechtfertigt überdies den Einsatz der Theorie aller drei Schlussformen nach Peirce in dieser Arbeit. Damit stützt sich die Untersuchung beispielgebundenen Beweisens nicht allein auf die klassische Unterscheidung zwischen Induktion und Deduktion, wenngleich das induktive Prüfen im Beispiel und das formale resp. formelle Beweisen Grenzfälle darstellen, zwischen denen das beispielgebundene Beweisen als Prozess changieren kann.

Abduktionen beim Interpretieren

Meyer (2007) geht in seiner Arbeit über das Entdecken und Begründen nicht nur auf die Abduktion als Forschungsgegenstand, sondern auch auf die Abduktion als Teil des Forschungsprozesses ein. Der Forscher leistet bei der Rekonstruktion von Abduktionen (möglich etwa auch im Rahmen des beispielgebundenen Beweisens i.w.S.) in seinen Interpretation von Schüleräußerungen Meyer (2007, 109) zufolge "Abduktionen über Abduktionen" resp. "Abduktionen zweiten Grades". Bei Voigt (1984) heißt dies im Rückgriff auf Schütz:

> "Der Wissenschaftler bildet eigene Typisierungen über die Typisierungen des Akteurs aus, 'Typisierungen zweiter Art' (SCHÜTZ) oder anders gesagt 'Interpretationen von immer schon interpretierten Wirklichkeiten'." (Voigt, 1984, 80f., H.i.O.)

theoretisch gewonnene Interpretationskriterien

Bei der Interpretation soll nach Voigt (1984, 81ff.) Folgendes beachtet werden:

- *Kontextbezug*: Der Interpret stütze sich bei seiner Interpretation auf Kontextinformationen, etwa die Vorgeschichte einer Szene oder das Vorwissen über den Schüler, um interpretieren zu können. Denn der Kontextbezug trägt dazu bei, dass die Abduktionen des Forschers sich nicht zufällig einstellen, sondern ihn zur wissenschaftlich fundierten Erkenntnis über seinen Forschungsgegenstand verhelfen.
- *Kontrollierte Subjektivität*: Der Wissenschaftler bringe bei der Interpretation die eigene Subjektivität kontrolliert ein, d.h. er möge sich ihrer bewusst sein und sich gleichzeitig kritisch distanzieren können. Ansonsten würde seine Subjektivität Bestandteil der abduktiv gewonnenen Interpretation werden. Dazu gehört die Explikation von Kontextinformationen und von theoretischen Vorannahmen hinsichtlich der Interpretation.

- *Mehrdeutbarkeit*: Der Interpret wisse um die Mehrdeutigkeit der dokumentierten Phänomene und damit um die Unsichertheit seiner gewonnenen Interpretationen. Dies hängt mit dem prinzipiell unsicheren Charakter der Abduktion als Schlussform zusammen. Für ein überraschendes Phänomen kann es viele Erklärungen geben. Deshalb sind zur umfassenden Deutung einer Schüleräußerung mehrere unterschiedliche Abduktionen nötig.

Ein- und Mehrdeutigkeit von Interpretationen

Der letzte Aspekt steht im Widerspruch zur Konzentration auf eine einzige Lesart. Ob etwa ein Schüler den Beweis als Sinnstruktur wirklich subjektiv realisiert hat, lässt sich den in ↑ Kap. 2.1 entwickelten Forschungsfragen nach an mehr oder weniger eindeutigen Indizien auch nicht immer zweifelsfrei feststellen. Insofern kann eine Lesart auch deutungsoffen oder ambig bleiben.

Abduktion als formaler Weg zur Erkenntnis

Voigt (1984, 85) betont: "Die Theorie der Abduktion darf nicht als Anleitung für die Bildung von Hypothesen mißverstanden werden". Neue Deutungen werden also mit Hilfe des abduktiven Schlusses gewonnen und damit ggf. eine Regel gefunden, mit der sich ein möglicherweise überraschendes Phänomen erklären lässt. Jungwirth (2003, 193) fasst dies so auf: "Die Abduktion kennzeichnet formal den Weg der Generierung einer Deutungshypothese, sie ist aber keine Anleitung für das konkrete Tun". Wie und unter welchen Kriterien aus einem vorliegenden interpretierbaren Text schließlich eine Deutungshypothese unter mehreren Hypothesen erschlossen und ausgewählt wird, ist eine Frage der jeweiligen Herangehensweise.

2.2.7 Gedankliche und empirische Vergleiche

Texte als Grundlage interpretativer Forschung

Die interpretative Forschung geht von Texten aus, die einen dauerhaften Sinngehalt der sozialen Welt tragen. Bevor mit deren Analyse begonnen wird, müssen nichtschriftliche Daten (etwa Video- und Audioaufnahmen) transkribiert werden. Durch die deutende Analyse der Texte sollen Antworten auf bereits entwickelte Forschungsfragen gefunden werden. Dazu wird der Text in sogenannte Sinnabschnitte gegliedert, die aus theoretischen Erwägungen heraus als abgeschlossen gelten. JUNGWIRTH (2003, 193) macht diesbezüglich zwei grundlegende Methoden – der primär gedanklichen und der primär empirischen Vergleiche – in der interpretativen mathematikdidaktischen Forschung aus. Diese beiden sich mehr oder weniger spiegelnden (und insofern einander bedingenden) Methoden sollen nachfolgend kurz umrissen werden, um anschließend das eigene Vorgehen vor diesem Hintergrund zu beschreiben. Ein wichtiges Charakteristikum des ersten Verfahrens ist seine Sequentialität, während beim zweiten Verfahren eine frühe, systematische Auswahl von Sinnabschnitten zwecks Komparation relevant ist.

- ◦ Methode der primär gedanklichen Vergleiche
- ◦ Methode der primär empirischen Vergleiche
- ◦ Reflexion des eigenen methodischen Vorgehens

Methode der primär gedanklichen Vergleiche

Auswahl von Sinnabschnitten

Bei der Methode der primär gedanklichen Vergleiche können die Sinnabschnitte VOIGT (1984) zufolge nach den Kriterien der Krisenhaftigkeit (der oder die Sprecher verhalten sich atypisch) oder der Verständlichkeit (für den Interpreten) ausgewählt werden. Bevor die Analyse des Sinnabschnitts beginnt, verwendet der Interpret VOIGT (1984, 111) zufolge seinen "gesunden Menschenverstand" und macht sich seiner vorgefassten Einstellungen bewusst, um seine Subjektivität im weiteren Verlauf dosiert kontrollieren zu können (↑ Abs. 2.2.6). Im nächsten Schritt wird das erste Interakt des Sinnabschnitts extensiv interpretiert. Extensiv betont im Sinne der abduktiv verstandenen Forschungslogik jenes Überschreiten des subjektiven Sinnzusammenhangs der Akteure, um nach SCHÜTZ (1932) objektive Sinnzusammenhänge, nach RICŒUR (1972, 268) "nicht-ostentative Bezüge" und nach OEVERMANN ET AL. (1979) latente Sinnstrukturen in der jeweiligen Äußerung eines Akteurs auszumachen, je nach interpretativem Ansatz (↑ Abs. 2.2.4). Dazu eignet sich JUNGWIRTH (2003, 194) zufolge eine ethnographisch anmutende "Strategie der Befremdung". Auf der Seite des Interpretierenden lässt sich damit der Zweifel als ein Interpretationsprinzip erheben:

extensives Interpretieren

> "Prinzip der Interpretation ist der Zweifel. Der Interpret versucht, die Handlungen mit den Augen eines Fremden zu sehen und sich in seiner Vorstellung das Geschehen als Gedankenexperiment zu verfremden." (VOIGT, 1984, 112)

Konkret kann dies heißen:

> ”Der Interpret überlegt sich möglichst viele Alternativen zu der beobachteten Handlung, die unabhängig von dem situativen Kontext möglich wären, d.h. unabhängig von der Institution Schule, der Vorgeschichte, den unterstellten Absichten und unabhängig von der Sachlogik des behandelten Themas – und das letztere ist für einen als Mathematiker sozialisierten Interpreten besonders schwierig.” (Voigt, 1984, 112)

Gedankenexperimente beim beispielgebundenen Beweisens eines Schülers

Bezogen auf das beispielgebundene Beweisen könnte man einem Schüler, der eine vorgegebene Behauptung mittels zweier einfacher Beispiele lediglich induktiv geprüft hat, unterstellen, dass dieser auch bei einem dritten Beispiel ähnlich vorgehen würde und damit die Behauptung möglicherweise als bewiesen ansähe. Es kann aber auch sein, dass er diese Prozedur induktiven Prüfens ablehnt, da sie ihm nun schon geläufig ist, oder weil sie sein Beweisbedürfnis nicht hinreichend befriedigt. Im letzteren Fall könnte sich der Schüler ein schwierigeres Beispiel vornehmen, an dem er das Allgemeingültige wohlmöglich besser erkennen kann als an den beiden Eingangsbeispielen, um die vormals latente Sinnstruktur des Beweises subjektiv zu realisieren. Solcherlei mit Zweifeln behaftete Gedankenexperimente öffnen den Raum für mögliche Vorhersagen, die ein Interpret in Unkenntnis des weiteren Verlaufs an diesem oder jenem Interakt statuieren kann. Kontextuelle Informationen und Erfahrungen des Interpreten verhelfen dabei zu treffsicheren Hypothesen über den weiteren Verlauf, schränken dessen Variabilität aber auch ein.

Hypothesen bilden als Vorhersagen

Die abduktiv erschlossenen Hypothesen des Interpreten über den objektiven Sinnzusammenhang einer Eingangsäußerung erlauben also mit Unsicherheiten behaftete Vorhersagen über den weiteren Verlauf der Interaktion. Diese durch vorangegangene extensive Interpretation entwickelten Hypothesen können als Vorhersagen an den Folgeäußerungen überprüft werden. Daran kann der Interpret dann nun einerseits sehen, wie die Akteure selbst die Eingangsäußerungen subjektiv ausdeuten. Andererseits können die Bedeutungen der Eingangsäußerung nun mit dem Wissen der Folgeäußerung erschlossen werden und damit eine Unterscheidung zwischen zunächst vorhergesagten und retrospektiv zugeschriebenen Deutungen gelingen. Dieses Verfahren wird Voigt (1984, 113) zufolge als *turn-by-turn-Analyse* bezeichnet und entstammt der Konversationsanalyse.

Sequentialität der turn-by-turn-Analyse

Der beschriebene Wechselschritt wird in seiner Sequentialität bis zur Interpretation des gesamten Sinnabschnitts weitergeführt. Nach Jungwirth (2003, 194) ”liegen trotz der sukzessiven Schließung der Deutungsspielräume mehrere Interpretationen dafür vor”. Als Kriterien für die Auswahl einer Deutungshypothese lassen sich zum einen ihre Einfachheit und zum anderen ihr Erkenntnisreichtum hinsichtlich der Forschungsfragen anführen. Die Deutungshypothese kann Jungwirth (2003, 194) zufolge auf weitere Sinnabschnitte angewendet werden und dient damit als ausdifferenzierbare wie zu modifizierende ”Interpretationsfolie”.

Auswählen einer Deutungshypothese

Methode der primär empirischen Vergleiche

Kritik am sequentiellen Vorgehen

Die vorstehend beschriebene Methode der primär gedanklichen Vergleiche wird von Bohnsack (2000, 206) resp. Brandt & Krummheuer (2000) dahingehend kritisiert, dass durch die strenge Sequentialität nicht gleichzeitig mehrere

Sinnabschnitte in die Entwicklung der Deutungshypothese einfließen. Der Deutungsspielraum wird zwar im Wechsel von einer Äußerung zur Folgeäußerung durch gedankliche Verfremdung der Äußerung geöffnet und durch die Prüfung an der Folgeäußerung wieder geschlossen. Durch dieses abschnittsbezogene Wechselspiel wird die generierte Deutungshypothese jedoch auch an die Besonderheit des behandelten Sinnabschnitts gebunden, denn erst zuletzt wendet sich der Interpret weiteren Sinnabschnitten zu.

empirische Vergleiche zwischen Sinnabschnitten

Deshalb empfehlen Brandt & Krummheuer (2000) in ihrer Methode der komparativen Analyse das Führen empirischer Vergleiche zwischen Interpretationen mehrerer Sinnabschnitte. Diese werden zwecks Komparation ausgewählt, jedoch nicht nach Intuition, Interesse oder Zufall. Die Komparation wird als Voraussetzung für die Generierbarkeit von Deutungshypothesen und damit für die Theoriebildung gesehen. In ihren Worten heißt dies:

> ”Wir benötigen den Vergleich mit Intepretationen [sic!] von anderen Unterrichtsausschnitten, um überhaupt eine einzelne Szene oder Episode mit den [sic!] Anspruch einer gewissen theoretischen Sättigung zu verstehen. Dies ist in Bezug auf die zur Komparation ausgewählten Ausschnitte natürlich ein sich wechselseitiger befruchtender Prozeß. Somit ist der Ort der Komparation in unserem Vorgehen *vor* der Theoriegenese. Sie stellt eine *Bedingung* für letztere dar, die wir durch die quasi-experimentelle Erzeugung von spezifischen und möglichst auffälligen Kontrasten zu optimieren versuchen.” (Brandt & Krummheuer, 2000, 223, H.i.O.)

Bezug zum beispielgebundenen Beweisen

Bezogen auf das beispielgebundene Beweisen lassen sich unter ähnlichen oder leicht differierenden Ausgangsbedingungen etwa Szenen zweier Schüler bei ihren Beweisversuchen vergleichen, um Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den parallel gesetzten Sinnabschnitten auszudeuten. Innerhalb eines einzelnen Schülerexperiments können Sinnabschnitte, in denen der Schüler an Beispielen arbeitet, daraufhin gelesen werden, inwieweit der Schüler an den Beispielen das Allgemeingültige subjektiv realisiert. Bei diesem empirischen Vergleich geht die Sequentialität der Sinnabschnitte verdeckt ein, da sich der Schüler bei der Bearbeitung späterer Beispiele auf sein Vorwissen stützt.

Reflexion des eigenen methodischen Vorgehens

Interpretation beispielgebundenen Beweisens

Den Forschungsgegenstand des beispielgebundenen Beweisens untersucht der Forscher in der vorliegenden Arbeit ethnographisch als Akteur und Interpret zugleich dem an Beispielen beweisenden Schüler gegenüber (↑ Abs. 2.2.3). Das beispielgebundene Beweisen i.e.S. bezieht sich theoretisch auf die subjektive Realisierung und Manifestierung des Beweises als Sinnstruktur durch den Schüler und lässt sich im Gespräch mit dem Schüler am gewählten Aufgabenbeispiel als zwischen induktivem Prüfen und formalem (resp. formellem) Beweisen verlaufender Prozess beobachten. Das resultierende Dokument dürfte sich daher nicht leicht in passend kurze Sinnabschnitte gliedern lassen, um etwa verstreut aufzufindende Indizien für die subjektive Realisierung des Beweises durch den Schüler deutungsfähig zu machen. Dies gilt auch für die Ausdeutung des gesamten changierenden Prozesses beispielgebundenen Beweisens mit seiner jeweiligen inhaltlichen Fokussierung auf einzelne Aspekte (↑ Kap. 2.1).

Verzicht auf ein rein sequentielles Vorgehen

Aus Praktikabilitätsgründen kann ein extensiv durchgeführtes, rein sequentielles Verfahren, wie es der Methode des gedanklichen Vergleichs und auch dem forschungspraktischen Vorgehen der Objektiven Hermeneutik eigen ist, hier nur annähernd durchgeführt werden. Dies könnte SCHNEIDER (1994, 160) zufolge (zitiert nach JUNGWIRTH (2003, 195, H.i.O.)) zudem den Effekt haben, "daß Sinnstrukturen, die sich in *langen* und dabei sogar vielfach *unterbrochenen* Handlungsketten ausdrücken, in der objektiv-hermeneutischen Praxis kaum erfasst werden". In der Tat kann sich der Erkenntnisprozess des Schülers in seinem allmählichen subjektiven Realisieren des Allgemeingültigen an der Besonderheit des Beispiels in seiner empirischen Beobachtung zuweilen als besonders lang, unterbrochen und rückschlägig zeigen.

auch komparative Auswahl von Szenen

Im Folgenden sollen also auch größere Sinnabschnitte ohne Anwendung der strengen *turn-by-turn-Analyse* im Sinne von VOIGT (1984, 113) interpretiert werden. Der komparativen Methode von BRANDT & KRUMMHEUER (2000) nach wird dabei eine Auswahl von Sinnabschnitten (bezogen auch auf die gesamte Anzahl an transkribierten Texten aus den Schülerexperimenten) des Vergleichs wegen vorgenommen, um den empirisch untersuchten Forschungsgegenstand in seiner konstrast- und facettenreichen Breite zu zeigen. Diese bei JUNGWIRTH (2003, 195) genannte "Strategie der Maximierung von Unterschieden" kann dazu verhelfen, Deutungen auszudifferenzieren und ihren Allgemeinheitsgrad zu bestimmen. Umgekehrt kann die "Strategie der Minimierung von Unterschieden" bei vergleichbaren, sich durch einige wenige Merkmale unterscheidenden Texten die gefundenen Deutungen in ihrer Tiefe verfeinern helfen. Freilich kann dann nicht der Beweisprozess jedes Schülers extensiv nachvollzogen werden. Hier geht der Verfasser also insofern einen Kompromiss ein, als dass er den ausführlicheren Hauptanalysen weniger Schüler kürzere Konstrast- oder Vergleichsanalysen einiger Schüler gegenüberstellt. Gleichwohl sind die Verläufe beispielgebundenen Beweisens aller hier dargestellten Schüler im Begleitband jeweils fast vollständig nachvollziehbar.

Maximierung und Minimierung von Unterschieden

Vorstehend sind die Methoden der primär gedanklichen Vergleiche und der primär empirischen Vergleiche einander gegenübergestellt worden, um darüber das eigene forschungsmethodische Vorgehen zur Analyse der Einzelfallstudien in ↑ Teil 3 dieser Arbeit zu reflektieren. Beide Vorgehensweisen haben ihre Vorzüge, die komparative Methode nach BRANDT & KRUMMHEUER (2000) resp. die Strategie der Maximierung und Minimierung von Unterschieden nach JUNGWIRTH (2003) und die reine *turn-by-turn-Analyse* im Sinne von VOIGT (1984, 113). Insgesamt werden die beschriebenen Methoden und Strategien nun nicht in ihrer Strenge und Gänze angewandt, sondern der Art des Forschungsgegenstandes und der jeweiligen Fragestellung nach passend ausgewählt. Zum konkreten forschungspraktischen Vorgehen sei auf ↑ Kap. 2.3 verwiesen. Darin werden die Forschungsfragen aus ↑ Kap. 2.1 ihrer empirischen Untersuchung zugeführt.

2.2.8 Beweisen und Typisieren am Beispiel

Verallgemeinern beim beispielgebundenen Beweisen

In ↑ Abs. 2.2.6 wurde nicht nur auf die Abduktion im Rahmen des Forschungsgegenstandes, sondern auch auf die Abduktion als Forschungslogik eingegangen. Entsprechend kann man fragen, was dem Beweisen am Beispiel als Teil des Forschungsprozesses entsprechen würde. Beim beispielgebundenen Beweisen i.e.S. kann ein Lernender in der Besonderheit des Beispiels etwas Allgemeingültiges sehen, indem er den Beweis als Sinnstruktur subjektiv realisiert und ggf. manifestiert. Insofern verallgemeinert er von der Besonderheit des betrachteten Beispiels aus. Wie die präzisierten Forschungsfragen in ↑ Kap. 2.1 zeigen, hängen passende Verallgemeinerungen von einer Reihe von Faktoren, etwa der Wahl der Beispiele und des Allgemeinheitsgrads der betrachteten Behauptungen ab.

Verallgemeinern bei der Auswahl von Deutungshypothesen

Vor einer entsprechenden Problematik steht der interpretierende Forscher auch, was die Auswahl der Aufgaben, der Schüler, der dokumentierten Interviewauszüge und gerade auch der Hypothesen anbelangt. Die Deutungshypothesen sollen über die Daten, vermöge derer sie entwickelt wurden, im Sinne des interpretativen Paradigmas hinausweisen und etwas begründetermaßen Allgemeingültiges über den Forschungsgegenstand aussagen. Für die Entwicklung adäquater Deutungshypothesen ist unabdingbar,

> "daß der Interpret mit dem Untersuchungsfeld sachlich vertraut ist, im vorliegenden Fall mit dem Mathematikunterricht und mathematikdidaktisch relevanten Phänomenen im weitesten Sinn. Je größer sein unmittelbar relevantes Wissen ist, desto mehr und spezifischere Deutungshypothesen kann er entwickeln. (...) Zum zweiten kommt es darauf an, daß der Interpret fähig ist, die Perspektive der Textproduzenten (etwa der Lehrerin bzw. des Lehrers und der Schüler im Unterricht) zu teilen. Er muß in der Lage sein, die fixierten Sprechakte und Handlungen imaginativ nachzuvollziehen." (Beck & Maier, 1994b, 63)

Gültigkeit von Verallgemeinerungen

Die Gültigkeit von Verallgemeinerungen, die der Schüler beim beispielgebundenen Beweisen an der Front seines Wissens noch ohne präzise Kenntnis der Allgemeinheitsgrade der betrachteten Behauptung versuchsweise unternimmt, kann durch das Umfeld des Experten, des Lehrers und der Mitschüler ebenso sozial geteilt werden. Analog mag man die Gültigkeit von entwickelten Deutungshypothesen der interpretativen Mathematikdidaktik als das Ergebnis eines wissenschaftlichen Aushandlungsprozesses ansehen. Beck & Maier (1994b, 62) sprechen in diesem Zusammenhang von einer zu treffenden *Geltungsprüfung*. Zur Diskussion stehende Deutungshypothesen können *qua* Anerkennung durch ihre Rezipienten zum Allgemeingut der Fachdisziplin und in diesem Rahmen und Sinne allgemein gültig werden. Gleichwohl bedingt ihre Manifestation eine vorherige subjektive Realisierung durch den am einzelnen empirischen Fall forschenden Experten ebenso wie durch den am Beispiel beweisenden Schüler. Diesem hilft dabei etwa sein mathematisches Vorwissen, seine Vorstellungen von Mathematik und hierbei seine Erfahrung insbesondere zum Beweisen. Der Forscher stützt sich auf sein theoretisches Vorwissen vom Forschungsgegenstand, auf seine Vorstellungen von mathematikdidaktischer Forschung und auf seine Methodenkenntnisse. Insofern sind beide Prozesse der Verallgemeinerung mit der jeweiligen sozialen Umwelt verwoben.

Abgrenzung zu Typisierungen

Wo der Schüler beispielgebunden beweist, forscht der mathematikdidaktische Experte oft beispielgebunden. Dieser kann aber nicht in jener Denknotwendigkeit beweisen, die der Mathematik eigen ist. Trotzdem kann der Experte in den beispielhaften Besonderheiten empirischer Fälle etwas Allgemeineres erkennen, ohne gleich Typisierungen und idealtypisierenden Charakterisierungen vornehmen zu müssen. Letzteres ist in der sogenannten *Idealtypenbildung*, wie sie etwa bei Bikner-Ahsbahs (2003, 215) beschrieben wird, gängige Praxis. Dies wird in dieser Arbeit nicht unternommen, da das Ergebnis der nachfolgenden empirischen Einzelfallstudien keine idealtypische Klassifikation beispielgebundener Verläufe ist, welche eher an jene Einteilung in mehr induktive oder mehr deduktive Schülertypen aus den quantitativen Studien aus ↑ Kap. 1.1.2 erinnern würde. Dennoch wird ein theoretisches Argumentieren auf der empirischen Basis möglich sein: Wenn sich etwa ein Schüler zum beispielgebundenen Beweisen einer Behauptung an vielen Beispielen versucht, dürfte die Gefahr einer Algorithmisierung zum bloßen Ausrechnen, Messen oder Zeichnen bestehen und damit eine Beweisidee als latente Sinnstruktur möglicherweise verschüttet werden. Wenn also einem Schüler das Prüfen einer Behauptung durch die Vorgabe großer resp. kleiner Beispielzahlen (*big/small numbers*) schwer gemacht wird, da er damit zu lange rechnen müsste, wird er seinen Blick vielleicht eher auf die Struktur seiner Rechnung richten und darin vielleicht das latent Allgemeingültige erkennen. Insofern dient die empirische Basis nicht dem Erzeugen idealtypischer Verläufe beispielgebundenen Beweisens, sondern im Zusammenwirken mit der getroffenen theoretischen Fundierung einer facettenreichen Charakterisierung beispielgebundenen Beweisens. Da die Einzelfallstudien zudem nur mit einzelnen Schülern geführt werden, können zwar Hinweise, aber keine allgemeinen Leitlinien dafür gegeben werden, wie man mit Schülern im Mathematikunterricht beispielgebunden beweisen soll. Wie der Schüler sollte auch der Forscher um die Grenzen der Allgemeingültigkeit seiner Schritte wissen, damit die Aussagekraft seiner Studien gewahrt bleibt.

theoretisches Argumentieren auf empirischer Basis

begrenzte Allgemeinheit der Einzelfallstudien

Zusammenfassung

Im vorstehenden ↑ Kap. 2.2 sind die verwendeten Methoden und die für den Forschungsprozess hinzugezogene Methodologie zur theoretischen und empirischen Untersuchung des beispielgebundenen Beweisens reflektiert worden. Die vorliegende Arbeit ist dem interpretativen Zweig der Mathematikdidaktik zuzuordnen und stützt sich im empirischen Teil auf Einzelfallstudien, die den Charakter eines Interviews, Lernexperiments und Fachgesprächs zum Thema des beispielgebundenen Beweisens als Forschungsgegenstand annehmen. Dieser birgt – als Besonderheit dieser Arbeit – insofern selbst einen zentralen Begriff der Objektiven Hermeneutik, als dass der mathematische Beweis als latente Sinnstruktur angesehen werden kann. Als ein weiteres Bindeglied zwischen dem theoretischen Zugang und dem forschungslogischen Vorgehen in der Interpretation der erhaltenen Texte konnte die Abduktion ausgemacht werden. Aus der allmählichen Interpretation von Textstellen können Deutungshypothesen gewonnen werden, welche sich an weiteren Textbeispielen möglicherweise bekräftigen und teils verallgemeinern lassen. Gedankliche und komparative Vergleiche werden bei der Auswahl von Texten via Haupt- und Kontrast- resp. Vergleichsanalysen realisiert.

2.3 Forschungspraxis

Im Folgenden soll das konkrete, forschungspraktische Vorgehen der empirischen Studie dargestellt werden. Zunächst wird die Auswahl und die Entwicklung der verwendeten Aufgabenbeispiele motiviert (↑ Abs. 2.3.1). Anschließend wird der Ablauf der durchgeführten Schülerexperimente geschildert (↑ Abs. 2.3.2). Es wird ferner das Vorgehen bei der Auswahl der Szenen zur Analyse begründet und auf die Transkription der Szenen eingegangen (↑ Abs. 2.3.3). Schließlich wird das Vorgehen bei der Interpretation der Szenen besprochen (↑ Abs. 2.3.4). Diese nachstehenden Überlegungen zur Datenerhebung, -aufbereitung und -auswertung sind vorwiegend forschungspraktischer Natur. Zu ihrer methodischen Reflexion sei auf das vorangegangene ↑ Kap. 2.2 verwiesen.

2.3.1 Auswahl und Entwicklung der Aufgabenbeispiele

Inhaltliche Grundlage zur Untersuchung beispielgebundenen Beweisens sind Aufgabenstellungen, die Schülern das beispielgebundene Beweisen von Behauptungen ermöglichen. Diese Aufgabenstellungen haben selbst beispielhaften Charakter und sind während des Forschungsprozesses ausgewählt und entwickelt worden.

Kriterien für die Auswahl der Aufgaben

Ein erstes Kriterium für die Auswahl der Aufgabenstellungen sind die in den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz KMK (2003) und im Kernlehrplan MSJK (2007) für das Gymnasium – Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen niedergelegten Curricula für die jeweilige Klassenstufe gewesen. Anregungen für konkrete Aufgabenstellungen haben die einschlägigen Schulbücher (siehe etwa Griesel et al. (2004, 18)), die fachdidaktische Literatur zum Forschungsstand (↑ Kap. 1.1, 1.2) und auch die Kernlehrpläne der einzelnen Bundesländer für das Fach Mathematik selbst gegeben. So findet sich im Kernlehrplan MSJK (2004, 40) der Mathematik für die Realschule in Nordrhein-Westfalen etwa die Aufgabe, die Anzahl der Diagonalen in einem regelmäßigen Neuneck auf verschiedene Art und Weise zu bestimmen.

zugeordnete Klassenstufen und Wahl der Schulform

Die vorliegende empirische Studie soll Erkenntnisse über das beispielgebundene Beweisen von Schülern vornehmlich der Sekundarstufe I erbringen. Unter den fünf Aufgabenstellungen finden sich zudem zwei Aufgabenstellungen, die von Grundschülern der 4. Klasse bearbeitet werden. Die übrigen Aufgabenstellungen lassen sich der 7., 8. und 9. Klassenstufe nach dem Bildungsgang des neuen achtjährigen Gymnasiums zuordnen. Als weiterführende Schulform ist das Gymnasium gewählt worden, weil den Gymnasialschülern das Beweisen und ggf. darauf hinführende entdeckende Übungen im Mathematikunterricht geläufiger sind. Auch in Hinblick auf die weiter fortgeschrittene sprachliche Entwicklung der Schüler am Gymnasium erscheint die Wahl dieser Schulform ratsam. Letztlich liefert der Schüler in der sprachlichen Manifestation des subjektiv Realisierten dem Forscher das Material zur Untersuchung des beispielgebundenen Beweisens.

Unterrichtsbezug der Aufgaben

Die Aufgabenbeispiele sollen hinsichtlich ihres Beweischarakters für die Schüler neuartig, aber unterrichtsnah gehalten sein. Deshalb sind die Beweisaufgaben in der Sekundarstufe I bereits gestellt worden, bevor sie im Unterricht behandelt wurden. Sie sind so gewählt worden, dass sich die Schüler schnell auf sie einstellen konnten, da deren Grundlagen bereits im Unterricht gelegt wurden.

Aufgabenstellungen anderer Forscher

Überdies gelten für die Auswahl der Aufgabenbeispiele inhaltliche und forschungsbezogene Kriterien: Der in den ↑ Kap. 1.1 und 1.2 referierte Forschungsstand beinhaltet bereits Arbeiten, an denen einige Formen des Beweisens mittels verschiedener Aufgabenstellungen empirisch untersucht und daraus entsprechende Aussagen zum (beispielgebundenen) Beweisen abgeleitet wurden. Diese Erkenntnisse können in der vorliegenden empirischen Studie in ihrem Fokus auf das beispielgebundene Beweisen geprüft und genutzt werden. So wird das bei Goldberg (1992, 42) verwendete Aufgabenbeispiel des Mittelpunktswinkel-Umfangswinkelsatzes (resp. Außenwinkelsatzes) in die vorliegende Untersuchung auch deshalb einbezogen, da Goldberg daran Thesen zur "Methode des beispielgebundenen Begründens" formuliert (↑ Abs. 1.2.5). Von Balacheff (1988, 220f.) wird das Aufgabenbeispiel des vollständigen Graphen in modifizierter Form übernommen (↑ Abs. 1.2.2). Bei der theoretischen Fundierung des Forschungsgegenstands hat die zweite Potenzregel in leichter Variation zu Meyer & Voigt (2009b, 36ff.) als Leitbeispiel fungiert (↑ Kap. 1.3, 1.5). In der Verwendung gleicher oder ähnlicher Aufgabenformate können sich unter wechselnder Forschungsperspektive differierende Forschungsergebnisse einstellen und damit der Forschungsgegenstand des beispielgebundenen Beweisens empirisch ausgeschärft werden.

Eignung von Aufgaben zum beispielgebundenen Beweisen

Ferner müssen die jeweiligen Behauptungen beispielgebunden beweisbar sein, und insbesondere als beispielgebundenes Argumentgefüge nach ↑ Abs. 1.4.4 sinnvoll darstellbar sein. Die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ lässt sich auf rein symbolische Weise nur schwerlich beispielgebunden beweisen, weil Summen und Potenzen in Beispielzahlen zu leicht ausgerechnet werden können und das für den Beweis entscheidende Distributivgesetz dann nicht genutzt wird. Geometrisch ist dies jedoch sehr wohl beispielgebunden möglich. Bei der zweiten Potenzregel $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ mit der Wahl hinreichend großer Beispielzahlen $a, b, n \in \mathbb{N}$ werden hingegen im beispielgebundenen Argumentgefüge Kommutativ- und Assoziativgesetz sowie die allgemeine Potenzdefinition als Regeln verwendet, und die zweite Potenzregel kann mit latenter Beweisidee entdeckt werden (↑ Abs. 1.3.3). Der bekannte Satz von Pythagoras wurde als Themenstellung nicht gewählt, da er (etwa im Vergleich zum Außenwinkelsatz) nicht so viele Möglichkeiten der Verallgemeinerung bereithält.

gewählte Aufgabenstellungen

In einer groben Zuordnung von Klassenstufe und schulmathematischem Bereich (Geometrie, Arithmetik) wurden unter Maßgabe der vorstehend beschriebenen Kriterien folgende Themenstellungen gewählt (mit Angabe der Kapitel):

3.1	4	Gegensinniges Verändern	Arithmetik
3.2	4	Zahlenmauern	figurierte Arithmetik
3.3	7	Vollständiger Graph	Arithmetik / Geometrie
3.4	8	Außenwinkelsatz	Geometrie
3.5	9	Potenzregeln	Arithmetik

Neben den genannten Aufgabenbeispielen wurden noch weitere gestellt, etwa Aufgabenformate zur Winkelsumme im n-Eck und zu Potenzfunktionen sowie weitere Aufgabenbeispiele für die Grundschule. Nicht alle dieser Aufgabenbeispiele erwiesen sich als geeignet und zielführend, beispielgebundenes Beweisen durchzuführen oder zu untersuchen. Dies kann durch mehrere Faktoren bedingt sein, etwa objektive Schwierigkeit der Aufgabenstellung, zu stark oder zu gering ausgeprägte Vertrautheit der Schüler mit dem Themengebiet, aus dem das Aufgabenbeispiel stammt, zu geringe mathematische Durchleuchtung des Aufgabenbeispiels durch den Experten, objektiv schwierige Darstellbarkeit des Beweises oder Umfangsvorgaben für die vorliegende Arbeit.

Entwicklung der Aufgabenstellungen

Die einzelnen Aufgabenformate erfolgten unter nachstehenden Gesichtspunkten:

- *Mathematische Analyse.* Zunächst konstruiert der Forscher verschiedene Beweise für die Behauptung, indem er verschiedene Argumentgefüge nach ↑ Abs. 1.4.4 erstellt. An den Argumentgefügen kann der Forscher notwendige Voraussetzungen erkennen, die beim Schüler vorhanden sein müssen. Ebenso orientieren die Argumentgefüge den Forscher während des Schülerexperiments; z.B. kann er daran rasch Beweislücken erkennen.
- *Regelwissen.* Die Regeln des beispielgebundenen Argumentgefüges sollen dem Schüler bereits bekannt oder selbst leicht zu begründen sein, sonst kann er die fragliche Behauptung nicht oder nur teilweise beweisen. Beim Mittelpunktswinkel-/Umfangswinkelsatz resp. Außenwinkelsatz sind dies etwa Basiswinkelsatz, Winkelsummensatz und Nebenwinkelsatz.
- *Sprachmittel.* Der Schüler soll die in den Aufgabenstellungen auftretenden Objekte und Regeln (umgangs)sprachlich benennen können. Bei dem beispielgebundenen Beweisen der Potenzregeln kann dem Schüler etwa Potenz, Basis, Exponent, Umklammern und Vertauschen als Vokabular helfen.
- *Wahl des Zugangs.* Abhängig vom bereits gesichteten Forschungsstand und von bereits durchgeführten Schülerexperimenten wird *a priori* geklärt, welcher Zugang zum jeweiligen Aufgabenformat passen könnte. Soll dem Schüler etwa erst Gelegenheit zum Entdecken der Behauptung gegeben, oder ihm schon zu Beginn eine zu beweisende Behauptung oder sogar ein (vermeintlicher) beispielgebundener Beweis zum kritischen Nachvollzug vorgelegt werden? Legt die Wahl gewisser Beispielzahlen oder -figuren ein induktives Prüfen nahe oder nicht?

  Beim vollständigen Graphen etwa kann nach einem geeigneten Weg gesucht werden, um dem Schüler die Behauptung, ein regelmäßiges n-Eck habe $n \cdot (n-1)/2$ Verbindungslinien, direkt entdecken zu lassen: Durch einen auf das regelmäßige 5-Eck aufgelegten Stern soll vermieden werden, dass Schüler die näher liegende Summenformel $(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0$ entdecken, indem sie die jeweils verbleibenden Verbindungslinien des 5-Ecks von Ecke zu Ecke gehend zählen: $4+3+2+1+0=10$. Denn dann wäre das Ziel, die Kurzformel $n \cdot (n-1)/2$ beweisen zu lassen, nur über einen Umweg erreichbar (↑ Kap. 3.3).

Nach diesen Vorüberlegungen ließen sich die entwickelten Aufgabenstellungen dann praktisch bei den anstehenden Schülerexperimenten einsetzen.

2.3.2 Ablauf der Schülerexperimente

Umfang und Dauer der Studie

Die Schülerexperimente wurden in Schulen einer akademisch geprägten Stadt mit etwa 300.000 Einwohnern und aus deren Umland während der Unterrichtszeit durchgeführt. Die Schüler wurden einzeln für eine Unterrichtsstunde aus der Klasse geholt. Damit sich die jeweilige Aufgabenstellung nicht innerhalb der Klasse herumsprach, wurden die Schüler vor wechselnde Szenarien gestellt und darum gebeten, Inhalte des Experiments nicht ihren Mitschülern preiszugeben. Insgesamt wurden von 2007 bis 2010 etwa 100 Schülerexperimente von je 30 bis 45 Minuten Dauer durchgeführt; diese Anzahl schließt erste Interviewversuche, Erprobungen letztlich erfolgloser Aufgabenformate und nachgelagerte Schülerexperimente zur Klärung ergänzender Forschungsfragen ein. Auf die in obiger Tabelle genannten Aufgabenbeispiele entfallen unterschiedlich viele Experimente.

Zugang zum Forschungsfeld

Es wurden Experimente mit Schülern durchgeführt, deren Eltern sich schriftlich dazu bereit erklärten, dass ihr Kind interviewt und gefilmt wurde. Den Eltern und Schülern wurde zugesichert, dass die erhobenen Daten anonymisiert und – außer im Rahmen von Forschungszwecken – nicht an Dritte weitergegeben wurden. Die Schülerexperimente wurden alsdann durch Audio- und Videoaufnahmen dokumentiert. Schüler und Forscher saßen häufig an einem Tisch in einem separaten Raum der Schule und wurden in der Regel frontal aufgenommen, um auch Gestik und Mimik erfassen zu können. Die Kamera stand auf einem Stativ schräg über dem Tisch, so dass auch verfolgt werden konnte, was schriftlich notiert wurde. Manche der gewonnenen Aufnahmen wurden transkribiert.

Technische Vorbereitungen

Gesprächsführung

Wie in ↑ Abs. 2.2.3 geschildert wurde, handelt es sich bei den durchgeführten Schülerexperimenten um eine Kombination aus Interview, Lernexperiment und Fachgespräch. Nach beiderseits kurzem Kennenlernen wurden dem Schüler zuweilen inhaltliche Vorübungen gestellt, um sein Regelwissen zur jeweils gewählten Aufgabe aufzufrischen und ihn entsprechende Sprachmittel einüben zu lassen. Je nach Wahl des Zugangs zum beispielgebundenen Beweisen (etwa der Vorlage eines Beweises, der Vorgabe der Behauptung, der Anregung zum Entdecken einer Behauptung, ggf. mit latenter Beweisidee) ergaben sich für den Forscher verschiedentliche Herausforderungen in der Gesprächsführung. Ziel des Gesprächs sollte nicht sein, alle Schüler zum beispielgebundenen Beweisen zu führen, sondern vielmehr, den jeweiligen Schüler bei seinen Versuchen im beispielgebundenen Beweisen zu begleiten und darüber empirisches Material zu erheben. Dem Schüler sollten dabei nicht fragend-entwickelnd einzelne Beweisschritte entlockt werden, vielmehr sollte er nach entsprechenden Vorübungen zur sprachlichen Explikation seiner eigenen Ideen und Gedankengänge ermutigt werden. Es konnten dabei die in den ↑ Abs. 2.1.5 und ↑ Abs. 2.2.3 angesprochenen dialogischen Mittel und Interventionen eingesetzt werden. Etwa schlüpfte der Forscher zuweilen in die Rolle eines Mitschülers hinein, um den Schüler seinen Beweis noch einmal ausführlich und vollständig darstellen zu lassen. Der Forscher ist auch als *advocatus diaboli* aufgetreten oder hat zu weitgehende Verallgemeinerungen des Schülers durch Gegenbeispiele in Frage gestellt. Schließlich wurden dem Schüler auch genügend Pausen zum Nachdenken gegeben, um diesen den Beweis subjektiv realisieren zu lassen.

Ziel des Gesprächs

2.3.3 Szenenauswahl und Transkription

Kriterien der Szenenauswahl

Die Auswahl der Szenen zum Zweck der Analyse erfolgte teils nach Kriterien, über die in ↑ Abs. 2.2.7 und in ↑ Abs. 2.2.8 methodisch reflektiert wurde:

- typische Verläufe beispielgebundenen Beweisens, die sich häufig einstellen
- Kontrast zwischen zwei Beweisverläufen oder zwischen einzelnen Szenen ("Maximierung von Unterschieden" im Sinne von JUNGWIRTH (2003, 195))
- Ähnlichkeit zweier Beweisverläufe oder einzelner Szenen ("Minimierung von Unterschieden", *dto.*)

Die Auswahl der Szenen richtete sich nicht nach normativen Kriterien wie Richtigkeit, Allgemeingültigkeit und Vollständigkeit der explizierten Beweise. Analysiert wurden vielmehr auch Verläufe beispielgebundenen Beweisens, in denen der Schüler eine Behauptung bloß induktiv prüfte. Da die Analyse eines Beweisverlaufs nicht zu lang geraten sollte, wurden ggf. nur einzelne Szenen betrachtet und der jeweils fehlende Kontext kurz wiedergegeben. Längere Hauptanalysen weniger Schüler werden kürzeren Kontrast- resp. Vergleichsanalysen einiger Schüler gegenübergestellt.

Motivierung der Szenenauswahl

Die Auswahl der Szenen soll den Forschungsgegenstand in seiner Gesamtheit empirisch erfassen helfen und seinen Facettenreichtum widerspiegeln. Es sollen mögliche Antworten für die in ↑ Kap. 2.1 unter verschiedenen Perspektiven aufgeworfenen Forschungsfragen diskutiert werden sowie an der jeweiligen Szene und des Beweisverlaufs begründet oder in Frage gestellt werden. Die theoretische Kenntnis des Forschungsgegenstandes und die empirische Beobachtung sollen zusammenwirken, um zu klären, was beispielgebundenes Beweisen im Prinzip ist und in welcher Vielfalt es erscheinen kann. In die Darstellung der einzelnen Analysen in ↑ Teil 3 gehen aus Umfangsgründen nicht alle analysierten Szenen ein, sondern hauptsächlich solche, die für den Forschungsgegenstand im Sinne der Forschungsfragen besonders charakteristisch sind und interessante Beweisverläufe zeigen.

Transkription

Es werden die üblichen Transkriptionsregeln benutzt, wie sie sich in den einschlägigen Arbeiten der interpretativen Unterrichtsforschung finden lassen (vgl. etwa VOIGT (1984, 106f.), SCHWARZKOPF (2000, 264) und MEYER (2007, 118f.)). Zu den einzelnen Transkriptionsregeln sei auf den Anfang von ↑ Teil 3 oder direkt auf den Sonderband verwiesen.

interpretativer Charakter der Transkription

Der Text, der aus der Transkription einer Filmsequenz hervorgeht, ist seinerseits eine Interpretation derselben. Schließlich können nicht alle nonverbalen Schüleraktivitäten in Gestik und Mimik wiedergegeben werden. Auch was den Tonfall und die Sprechweise anbelangt, ist dessen Beschreibung dem Eindruck des Transkribenden geschuldet. Teils können undeutliche Äußerungen, Sprechpausen und gleichzeitig Gesagtes unterschiedlich gekennzeichnet werden. Insofern gibt es kein ideales Transkript, sondern nur interpretativ dokumentierte Annäherungen an die durch die Video- und Audiogeräte zuvor eingefangene Wirklichkeit. Den Transkriptionsausschnitten werden auch im Sonderband die schriftlichen Aufzeichnungen des Schülers beigefügt.

2.3.4 Analyse der Szenen und ihre Darstellung

Analyse des Transkripts

Zur Interpretation des beispielgebundenen Beweisens sind nach der theoretischen Darstellung in ↑ Kap. 1.5 sowohl der gesamte Beweisverlauf als auch die einzelne Szene relevant. Zeigen sich etwa an bestimmten Stellen des Transkripts Übergänge und Wechsel im Sinne eines Changierens zwischen induktivem Prüfen und formalem (resp. formellem) Beweisen, lohnt sich die Markierung entsprechender Sinnabschnitte und eine genaue Analyse. Dies kann teils extensiv, sequentiell und im Kreis der Fachkollegen geschehen, um entsprechend vielseitige Interpretationen und schließlich Deutungshypothesen zu gewinnen (↑ Abs. 2.2.7).

Weglassen von Szenen

Für die nachstehend dargestellten Einzelfallstudien sind einzelne Sequenzen durch Kontextinformationen über den bisherigen Verlauf des Schülerexperiments ersetzt worden. Die Kontextinformation stellt in ihrer verkürzenden Zusammenfassung jeweils selbst eine Interpretation dar. Dies ist aus Umfangsgründen notwendig. Auch dient dies zur Raffung des beispielgebundenen Beweisens eines Schülers, so dass der wesentliche Verlauf erkennbar wird und einzelne, inhaltlich besonders interessante Szenen in den Vordergrund treten.

Bestandteile und Schwerpunktsetzungen der Studien

In den Einzelfallstudien von ↑ Teil 3 werden einleitend zunächst übergeordnete Kontextinformationen wie Klassenstufe, fachliche Voraussetzungen des Schülers bzw. der zugehörigen Klasse, Inhalte der Vorübung und ggf. Wahl eines Szenariums wiedergegeben.

4	Gegensinniges Verändern	3.1	Beispielgebundenes Beweisen in fortschreitender Verallgemeinerung	I	III	IV
4	Zahlenmauern	3.2	Beispielgebundenes Beweisen als changierender Prozess	I	II	IV
7	Vollständiger Graph	3.3	Latente Beweisideen und beispielgebundenes Beweisen	I	III	IV
8	Außenwinkelsatz	3.4	Beispielgebundenes Beweisen und induktives Prüfen	I	II	V
9	Potenzregeln	3.5	Didaktische Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen	I	III	V

Hierbei werden die in ↑ Kap. 2.1 aufgeworfenen Perspektiven eingenommen:

2.1.1 / 4.1	I	Theoretische Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen i.e.S. (in Latenz, subjektiver Realisierung und Manifestierung des beispielgebundenen Beweises als Sinnstruktur)
2.1.2 / 4.2	II	Kategoriale Perspektive	Induktives Prüfen $\leftarrow \cdots \rightarrow$ formelles Beweisen (beispielgebundenes Beweisen im Changieren zwischen induktivem Prüfen und formalem resp. formellem Beweisen)
2.1.3 / 4.3	III	Praktische Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen i.w.S. (einschließlich von Zugängen zum beispielgebundenen Beweisen, etwa des Entdeckens und des Prüfens)
2.1.4 / 4.4	IV	Sprachliche Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen in Explikation des Allgemeingültigen am Besonderen (unter besonderer Berücksichtigung sprachlicher Aspekte)
2.1.5 / 4.5	V	Weitere Perspektiven	◦ Wahl und Anzahl der Beispiele ◦ Allgemeinheitsgrade von Behauptungen ◦ Beweisverständnis von Schülern ◦ Interventionsmöglichkeiten von Lehrenden

Bei der Rekonstruktion beispielgebundenen Beweisens können die Analyseschemata nach Peirce und Toulmin verwendet werden. Das Peirce-Schema eignet sich sowohl zur Nachzeichnung einzelner Schlüsse als auch zur Charakterisierung eines gewählten Zugangs wie etwa dem Entdecken oder Prüfen mit latenter Beweisidee. Das Toulmin-Schema kann dazu benutzt werden, um die vom Schüler vorgebrachten Argumente mit dem in der jeweiligen mathematischen Analyse entwickelten beispielgebundenen Argumentgefüge zu vergleichen.

Zusammenfassung der Analyse

Zudem erfolgt jeweils eine Zusammenfassung der Analyse, die sowohl die Besonderheiten des jeweiligen Falls als auch Deutungshypothesen in Bezug zu den jeweils relevanten Forschungsfragen setzt. Nachgelagerte Kontrastbeispiele können dazu dienen, Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Szenen und Verläufen beispielgebundenen Beweisens herauszuarbeiten.

Die nachstehenden Einzelfallstudien sind vorstehend den in ↑ Kap. 2.1 zusammengestellten Forschungsperspektiven I – V zugeordnet worden. Zur darüber hinausgehenden methodischen Reflexion sei auf ↑ Kap. 2.2 verwiesen.

Teil 3

Einzelfallstudien

Studienaufbau

Der Aufbau der nachfolgenden Einzelfallstudien orientiert sich jeweils am folgenden Muster:

Math. Analyse	In der mathematischen Analyse wird der mathematische Kern des gewählten Aufgabenbeispiels didaktisch reflektiert.
Forschungsperspektiven	Forschungsperspektiven, -bereiche und -fragen werden aufgabenbezogen akzentuiert.
Kontexte	Kontextschilderungen enthalten Informationen zu den befragten Schülern und zum Ablauf des Schülerexperiments.
Analysen	In den Analysen werden Interviewsequenzen dokumentiert und das Verhalten der Schüler beim Beweisen kommentiert.
Ergebnisse	Es werden schülerbezogene Ergebnisse aus den Analysen heraus zusammengefasst.
Resümé	Die durch die vorliegenden Analysen gewonnenen Ergebnisse werden in den Gesamtzusammenhang der Arbeit gestellt.

Studienthemen

Die nachstehenden fünf Einzelfallstudien bilden das empirische Fundament der vorliegenden Arbeit über das beispielgebundene Beweisen. Gestellt werden nach Klassenstufe ausgewählte Aufgabenbeispiele, denen jeweils ein Forschungsthema in einer Auswahl an Forschungsperspektiven (I – V, vgl. ↑ Kap. 2.1 und Abs. 2.3.4) zugeordnet sind:

4	Gegensinniges Verändern	3.1	Beispielgebundenes Beweisen in fortschreitender Verallgemeinerung	I	III	IV
		◦ Indizien subjektiver Realisierung bei Regelverbänden ◦ Prozess fortschreitender Verallgemeinerung ◦ Einsatz von Veranschaulichungsmitteln ◦ Begriffsbildung bei fortschreitender Verallgemeinerung				
4	Zahlenmauern	3.2	Beispielgebundenes Beweisen als changierender Prozess	I	II	IV
		◦ Indizien subjektiver Realisierung bei Regelverbänden ◦ Verläufe beispielgebundenen Beweisens ◦ Wandlung des sprachlichen Ausdrucks beim Beweisen ◦ Rolle von Beispielzahlen in Darstellungsmitteln				
7	Vollständiger Graph	3.3	Latente Beweisideen beim beispielgebundenen Beweisen	I	III	IV
		◦ Wandlung vom Entdecken und Prüfen zum beispielgebundenen Beweisen i.e.S. ◦ Rolle konkreter und bedingt vorstellbarer Beispiele ◦ Formalisierung von Behauptung und Beweis				
8	Außenwinkelsatz	3.4	Induktives Prüfen beim beispielgebundenen Beweisen	I	II	V
		◦ Überprüfung der Goldberg-These ◦ Wahl und Anzahl der Beispiele ◦ Beispielgebundenes Beweisen durch Lösen einer Berechnungsaufgabe				
9	Potenzregeln	3.5	Didaktische Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen	I	III	V
		◦ Entdecken mit latenter Beweisidee ◦ Umgang mit vorgelegten Behauptungen ◦ Beweisverständnis von Schülern ◦ Interventionsmöglichkeiten des Lehrenden				

Die Transkription der nachstehenden Interviews orientiert sich an einer Auswahl üblicher Transkriptionsregeln, wie sie etwa in Meyer (2007a, 118f.), Schwarzkopf (2000, 264) und Voigt (1984, 106ff.) zu finden sind. Der Lesbarkeit und des Umfangs wegen wurden mathematische Ausdrücke in der Regel nicht verbal ausgeschrieben. Auch auf eine Charakterisierung der Äußerungsreihenfolge bei gleichzeitigem Sprechen wurde verzichtet (vgl. ↑ Abs. 2.3.3).

Interakte

24:12	zum Zeitpunkt min:sec	auf dem jeweiligen Video
I 67	des Interviewers	Interaktnummer ungeradzahlig
Lu 112	eines Schülers	Interaktnummer geradzahlig
$\downarrow$	Interaktfortsetzung	zur Auswahl von Interaktteilen

Pausen

,	(1 sec)	kurzes Absetzen, Stocken
..	(2 sec)	kurze Pause
...	(3 sec)	mittlere Pause
(n sec)		Pause von n Sekunden

Auslassungen

'mal	am Wortanfang	Verschlucken von Anlauten
würd	am Wortende	Verschlucken von Auslauten
g'rade	im Wortinnern	Zusammenziehung einer Silbe
wär's	zwischen zwei Wörtern	Zusammenziehung von Worten
Str-	im Wort	Abbruch beim Aussprechen

Betonungen

immer'	nach einem Wort	Heben der Stimme, bei Fragen
<u>*immer*</u>	des Wortes	Aussprache mit Nachdruck

Interjektionen

mm-mmh, *nee* u.a.	häufig zu Beginn	Partikel der Bejahung, des Zweifels
ah, *ach* u.a.	häufig zu Beginn	Empfindungslaute
emm, *äh* u.a.	durchgängig	Verzögerungslaute

math. Ausdrücke

$+$, $-$, $\cdot$	:= *plus*, *minus*, *mal*	Abkürzungen
2^3 u.a.	:= *zwei hoch drei*	zur Verbesserung der Lesbarkeit
12° u.a.	:= *zwölf Grad*	

Kommentierungen

(schaut), (nickt) u.a.	des Nonverbalen	Mimik, Gestik
(laut), (leise) u.a.	der Sprechweise	Lautstärke, Tonfall
(lacht) u.a.	von Ausdrucksverhalten	soziale, emotionale Beteiligung
(deutet) u.a.	von Aktivität	häufig bezogen auf Arbeitsblätter
$\uparrow$ lu1, $\uparrow$ Abb. 3.50	im Verweisen	auf Abbildungen oder Teile davon

3.1 Beispielgebundenes Beweisen in fortschreitender Verallgemeinerung

Einleitung und Übersicht

In dieser ersten Analyse wird das beispielgebundene Beweisen in fortschreitender Verallgemeinerung anhand einer recht geläufigen Aufgabenstellung aus der Grundschule behandelt. Die Grundschüler sollen beweisen, dass sich das Dreifache einer Zahl ergibt, wenn diese zu ihrem Vorgänger und ihrem Nachfolger addiert wird. Im Folgenden wird zunächst eine mathematische Analyse zum gegensinnigen Verändern bezüglich der Addition geboten. Untersucht werden soll dann, welche Indizien für und gegen die subjektive Realisierung des gegensinnigen Veränderns und der Konstanz der Summe als Regeln des beispielgebundenen Argumentgefüges sprechen, wenn Grundschüler den zugehörigen Beweis in fortschreitender Verallgemeinerung der Behauptung entwickeln. Parallel dazu wird beobachtet, wie sich der sprachliche Ausdruck der Grundschüler verändert, wenn diese versuchen, die hinsichtlich Differenz, Anzahl und Reihenfolge der Summanden immer allgemeiner werdenden Behauptungen an Beispielen zu beweisen.

3.1.1	*Mathematische Analyse*	Kl. 4	Gegensinniges Verändern bezüglich der Addition
		Beh.	Wenn drei aufeinander folgende Zahlen miteinander addiert werden, dann ergibt sich das Dreifache der mittelgroßen Zahl.
3.1.2	*Forschungs*	I	◦ Indizien subjektiver Realisierung bei Regelverbänden
	-perspektiven	III	◦ Prozess fortschreitender Verallgemeinerung
	-bereiche	IV	◦ Einsatz von Darstellungsmitteln
	-fragen		◦ Begriffsbildung bei fortschreitender Verallgemeinerung
3.1.3	*Kontext*	Lu	Aufstellung der Behauptung durch Platzhalter
		Fr	Ikonische Darstellung der Behauptung
3.1.4	*Hauptanalyse*	Lu	Rasche Bildung einer Ausgleichsvorstellung
3.1.5	*Kontrastanalyse*	Fr	Induktives Prüfen in anschaulichen Beispielen
3.1.6	*Hauptanalyse*	Lu	Fortschreitende beispielgebundene Verallgemeinerung
3.1.7	*Vergleichsanalyse*	Lu/Fr	Operatorwechsel
3.1.8	*Ergebnisse*	Lu	Verlaufsbetrachtung
		Fr	Summarische Betrachtung
3.1.9	*Resümé*		zu den Forschungsperspektiven, -bereichen und -fragen

3.1.1 Mathematische Analyse: Gegensinniges Verändern, Konstanz der Summe

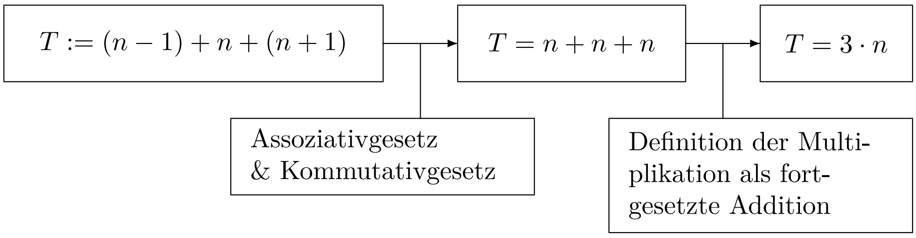
Behauptung

Der mathematische Gegenstand dieser Analyse ist das gegensinnige Verändern von Summanden. Dieses wurde an verschiedenen Stellen dieser Arbeit schon angesprochen (↑ Abs. 1.2.1, 1.2.2, 1.5.1). Es werde zunächst die nachstehende Behauptung über die Summe dreier aufeinander folgender (natürlicher) Zahlen betrachtet:

Behauptung	Wenn drei aufeinander folgende Zahlen addiert werden, dann ergibt sich das Dreifache der mittelgroßen Zahl.

formeller Beweis

Für einen formellen Beweis wird man das Assoziativ- und Kommutativgesetz der Addition sowie die Definition der Multiplikation als fortgesetzte Addition verwenden:



Schüler dürften keinen formellen Beweis erbringen, wenn sie mit dem algebraischen Kalkül noch nicht umgehen gelernt haben. Bei Verwendung von Beispielzahlen verkürzt sich zudem der erste Teil des vorliegenden Argumentgefüges: Wird nämlich etwa die Beispielzahl $n = 8$ gewählt und damit die Aufgabe $7 + 8 + 9$ zum Lösen gestellt, liegt für die Schüler der Ansatz $7 = 8 - 1$ und $9 = 8 + 1$ mit nachfolgender Anwendung des Assoziativ- und Kommutativgesetzes zum Beweis der Behauptung nicht auf der Hand. Eher dürften Schüler die Summe ausrechnen. Deshalb soll der Frage nachgegangen werden, wie die Behauptung in schülergerechter Weise beispielgebunden bewiesen werden kann. Hierzu wird ein etwas anderes Vorgehen als in der Aufgabenstellung *Add and Take* aus ↑ Abs. 1.2.1 und 1.2.2 gewählt.

gegensinniges Verändern

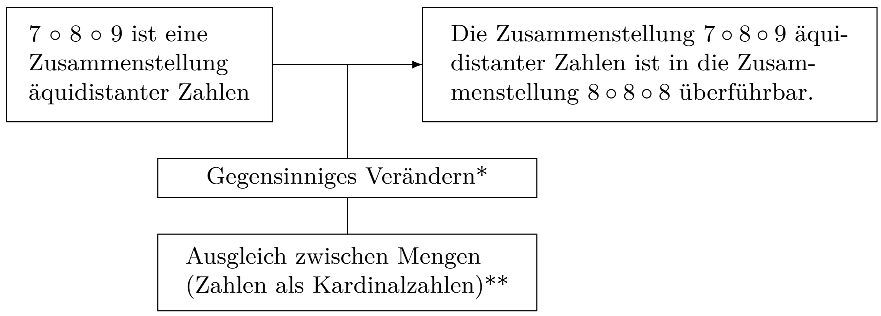
Ein für die Grundschule geeignetes Vorgehen zum Beweis der Behauptung lässt sich aus folgender Überlegung gewinnen: Es werde die Zusammenstellung $U := 7 \circ 8 \circ 9$ der aufeinander folgenden Beispielzahlen $7, 8$ und 9 mit einem Operator $\circ$ betrachtet. Durch gegensinniges Verändern kann die Zusammenstellung $U = 7 \circ 8 \circ 9$ in die Zusammenstellung $8 \circ 8 \circ 8$ mit drei gleichen Zahlen überführt werden. Dieser Überführung liegt eine Vorstellung vom Ausgleich zwischen Mengen zugrunde, deren Kardinalität die Beispielzahlen $7, 8$ und 9 angeben. Das gegensinnige Verändern zu drei gleichen Zahlen ist jedoch nur dann möglich, falls die Zusammenstellung U äquidistante Zahlen aufweist.

Konstanz der Summe

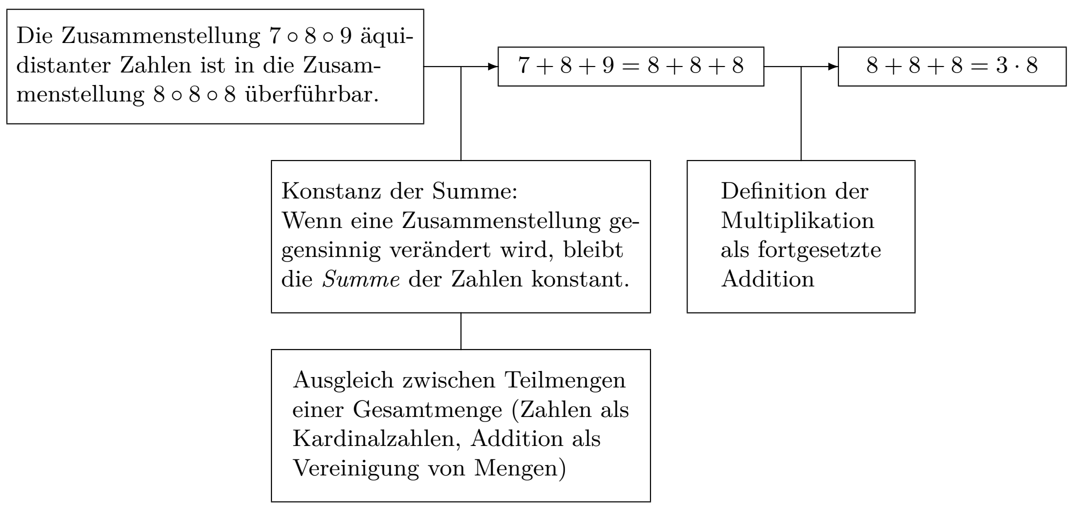
Mit dem für $\circ$ gewählten Operator $+$ bleibt die *Summe* $T = 7 + 8 + 9$ der Beispielzahlen $7, 8$ und 9 nach Überführung in $8+8+8$ konstant (Konstanz der Summe beim gegensinnigen Verändern zu drei gleichen Zahlen). Dem gegenüber bleibt mit dem für $\circ$ gewählten Operator $\cdot$ das *Produkt* $7 \cdot 8 \cdot 9$ der Beispielzahlen $7, 8$ und 9 nach Überführung in $8 \cdot 8 \cdot 8$ nicht konstant. Dies ist jedenfalls für den Experten nicht weiter verwunderlich, da sich die Vorstellung der *Summe* gegensinnig veränderter Zahlen durch den Ausgleich zwischen Teilmengen einer Gesamtmenge von Elementen stützen lässt, während die Multiplikation an ein anderes Operieren mit Mengen denken lässt.

beispielgebundenes Argumentgefüge

Insgesamt kann der Beweis als beispielgebundenes Argumentgefüge wie folgt dargestellt werden:



* Wenn eine Zusammenstellung aus 3, 5, 7 äquidistanten Zahlen mit einer Mittelzahl besteht, dann ist diese Zusammenstellung durch gegensinniges Verändern in eine Zusammenstellung von Mittelzahlen überführbar.
** z.B. im Verschieben eines oder mehrerer Kästchen von höheren zu niedrigeren Kästchentürmen



operatorunabhängige Betrachtung des gegensinnigen Veränderns

Es lassen sich also zum beispielgebundenen Beweis der obigen Behauptung drei Argumentregeln unterscheiden: das gegensinnige Verändern einer Zusammenstellung äquidistanter Zahlen, die Konstanz der Summe beim gegensinnigen Verändern und die Definition der Multiplikation als fortgesetzte Addition. Die analytische Trennung der beiden ersten Argumente mag künstlich und spitzfindig erscheinen; sie kann dadurch motiviert werden, dass viele Schüler die Möglichkeit gegensinnigen Veränderns (etwa in Sachkontexten wie bei der gerechten Umverteilung von Bonbons) zunächst als operatorunabhängig betrachten dürften.

Vorgabe falscher (Beispiel-)Aussagen

Um unterscheiden zu können, wo Grundschüler die Grenzen des gegensinnigen Veränderns sehen, können sie am *big number*-Beispiel (↑ Abs. 1.1.2) $7 \cdot 8 \cdot 9 \neq 8 \cdot 8 \cdot 8$ vor folgende falsche Behauptung gestellt werden:

(falsche) Behauptung	Wenn drei aufeinander folgende Zahlen multipliziert werden, dann ergibt sich die mittelgroße Zahl dreimal mit sich selbst multipliziert.

Gegebenenfalls muss hierzu den Grundschülern zunächst die fortgesetzte Multiplikation erklärt werden. Wenn die Grundschüler diese Behauptung am Beispiel bejahen und zur Begründung nur die Regel des gegensinnigen Veränderns angeben, machen sie zwischen der Konstanz der Summe und der Konstanz des Produkts offenbar keinen Unterschied. Insofern überschreiten sie die Grenzen der Allgemeingültigkeit der ursprünglichen Behauptung hinsichtlich des Operators. Die Anführung eines einfach zu berechnenden Gegenbeispiels wie $2 \cdot 3 \cdot 4 \neq 3 \cdot 3 \cdot 3$ kann dazu führen, dass die Schüler die Voraussetzungen der Behauptung präzisieren und die begrenzte Tragweite ihrer angeführten Regeln erkennen.

Beispielgebundenheit des Argumentgefüges

Das obige Argumentgefüge ist beispielgebunden hinsichtlich der

◦ Äquidistanz der Beispielzahlen
◦ Reihenfolge der Beispielzahlen
◦ ungeradzahligen Anzahl der Beispielzahlen

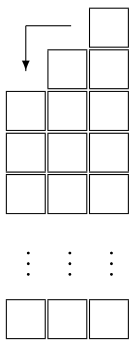
Hinsichtlich der Äquidistanz der Beispielzahlen können die konstant bleibenden Differenzen zwischen den aufeinander folgenden Zahlen variiert werden (z.B. zu 2 in $6 + 8 + 10$ o.ä.). Hinsichtlich der Reihenfolge können zudem Umordnungen der Beispielzahlen vorgenommen werden, so dass der Ausdruck Mittelzahl auf die kardinale und positionale Anordnung der Beispielzahlen hin präzisiert werden muss (z.B. $9+7+8$), etwa als in der Mitte der Zählreihe stehende Zahl und als mittelgroße Zahl. Überdies kann die Allgemeingültigkeit des Argumentgefüges auch bei Verwendung einer größeren, insbesondere ungeradzahligen Anzahl äquidistanter Zahlen gesichert werden. Schließlich wären noch Aufgabenstellungen wie $2 + 3 + 4 + 7 = 4 + 4 + 4 + 4$ denkbar, in denen zusätzlich asymmetrisch verändert wird. Letzteres wird in der folgenden Einzelfallstudie jedoch nicht thematisiert.

fortschreitende Verallgemeinerung im Regelverband

Aus der Gebundenheit an Äquidistanz, Reihenfolge und Anzahl der Beispielzahlen heraus kann die ursprüngliche Behauptung fortschreitend verallgemeinert und dabei die Grenzen der Allgemeingültigkeit (wie etwa der Wechsel des Operators) erprobt werden. Die jeweiligen Behauptungen variieren, sind z.T. Spezialfälle von allgemeineren Behauptungen, können allmählich entdeckt oder vorgegeben werden und bilden in ihrer Gesamtheit einen Regelverband. Das Sprechen über die einzelne Behauptung erfordert eine Verständigung über den jeweiligen Allgemeinheitsgrad und damit sprachliche Präzisierungen.

Einsatz von Platzhaltern

Statt die Behauptung vorzugegeben, kann diese mittels Platzhalter verschiedener Form – etwa eines Kästchens ($\square$) oder eines Herzens ($\heartsuit$) – für einen oder mehrere Summanden der Summe thematisiert werden. Die Platzhalter fungieren dabei grundschulgerecht als Variablenzeichen und ermöglichen es dem Schüler, in der Besonderheit der ermittelten Beispielaussagen das Allgemeingültige subjektiv zu realisieren. Etwa kann die ursprüngliche Aufgabe $7 + 8 + 9 = 3 \cdot 8$ durch die Modifikation $\square + 8 + \heartsuit = 3 \cdot 8$ ersetzt werden. In die Platzhalter $\square$ und $\heartsuit$ können dann auch andere Beispielzahlen wie 6 und 10 eingesetzt werden. Wenn ein Schüler dies erkennt, hat er in der für das gegensinnige Verändern vorausgesetzten Äquidistanz der Beispielzahlen einen wesentlichen Verallgemeinerungsgrad der Aufgabe erfasst.



ikonische Darstellung gegensinnigen Veränderns

In der Stützung der Regel des gegensinnigen Veränderns im beispielgebundenen Argumentgefüge wird auf die Möglichkeit einer Veranschaulichung hingewiesen: Drei äquidistante Beispielzahlen lassen sich durch drei Quadratstreifen resp. Kästchentürme mit konstant zunehmender Höhe darstellen (siehe nebenstehende Fig. für den jeweiligen Höhenunterschied von einem Quadrat resp. Kästchen). Die jeweilige Höhendifferenz lässt sich dann durch das Versetzen von Kästchen vom Turm mit den meisten Kästchen auf den Turm mit den wenigsten Kästchen einebnen. Wenn der Schüler durch Betrachtung der ikonischen Darstellung oder durch enaktive Handlung erkennt, dass dies unabhängig von der jeweiligen Höhe der Quadratstreifen resp. Kästchentürme möglich ist (in nebenstehender Fig. angedeutet durch Punkte), kann ihm dies zu einem beispielgebundenen Beweis der arithmetischen Behauptung verhelfen. Für das Erlernen der geometrischen Repräsentation einer arithmetischen Behauptung benötigt der Schüler jedoch auch Zeit und kann später zudem vor den in $\uparrow$ Abs. 1.2.4 genannten typischen Problemen von *visual proofs* stehen.

3.1.2 Forschungsperspektiven, -bereiche und -fragen

Forschungsperspektiven dieser Einzelfallstudie

Thema dieser Einzelfallstudie ist das beispielgebundene Beweisen in fortschreitender Verallgemeinerung bei selbst entdeckten Behauptungen in der Grundschule. Die Forschungsbereiche dieser Einzelfallstudie werden aus folgenden Perspektiven entwickelt (vgl. ↑ Kap. 2.1):

I	Theoretische Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen i.e.S. (in Latenz, subjektiver Realisierung und Manifestierung des beispielgebundenen Beweises als Sinnstruktur)
III	Praktische Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen i.w.S. (einschließlich von Zugängen zum beispielgebundenen Beweisen, etwa des Entdeckens und des Prüfens)
IV	Sprachliche Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen in Explikation des Allgemeingültigen am Besonderen (unter besonderer Berücksichtigung sprachlicher Aspekte)

Forschungsbereiche und Forschungsfragen

Von dieser Schwerpunktsetzung ausgehend, lassen sich mit Blick auf die Aufgabenstellungen nachstehende Fragen zu folgenden Forschungsbereichen stellen:

- Indizien subjektiver Realisierung bei Regelverbänden

  Welche Indizien sprechen dafür und dagegen, dass Schüler Regelverbände (hier: hinsichtlich Differenz, Reihenfolge und Anzahl der betrachteten Zahlzeichen und der Operation +) als verschieden allgemein zu betrachtende Argumentgefüge subjektiv realisiert? Welche Einzelargumente und Regeln (hier: gegensinniges Verändern, Konstanz der Summe, Definition der Multiplikation als fortgesetzte Addition) manifestieren Schüler in welchem Allgemeinheitsgrad, und welche bleiben latent?

- Prozess fortschreitender Verallgemeinerung

  Welche Vor- und Nachteile bietet die fortschreitende Verallgemeinerung in Bezug auf das beispielgebundene Beweisen, wenn der Schüler die ursprüngliche Behauptung des betrachteten Regelverbands selbst entdeckt?

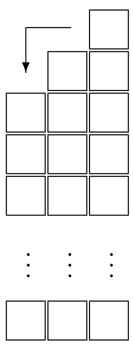
- Einsatz von Darstellungsmitteln

  Sind Darstellungsmittel und ikonische Darstellungen (wie Steckwürfel oder gezeichnete Kästchentürme) ein geeignetes Mittel, um das beispielgebundene Beweisen (wie hier beim gegensinnigen Verändern) zu befördern?

- Begriffsbildung bei fortschreitender Verallgemeinerung

  Wie wandelt sich die sprachliche Ausdrucksweise bei Schülern unter fortschreitender Verallgemeinerung? Welche Begriffe und Formulierungen verwendet der Schüler? Verhelfen dem Schüler präzisere Begriffe zum beispielgebundenen Beweisen verallgemeinerter Behauptungen?

3.1.3 Kontext (Ludwig, Frieda)



ikonische Darstellung gegensinnigen Veränderns

arithmetische Darstellung mit Platzhaltern:

$17 + 18 + \square = 3 \cdot 18$
$\square + 16 + \heartsuit = 3 \cdot 16$

Die Schülerin Frieda (Fr) und der Schüler Ludwig (Lu) gehen in die 4. Klasse einer Grundschule. Der Interviewer (I) möchte das gegensinniges Verändern bezüglich der Addition mit den Grundschülern behandeln. Die Grundschüler werden einzeln interviewt. In beiden Interviews wird von der folgenden Behauptung ausgegangen:

Behauptung	Wenn drei aufeinander folgende Zahlen addiert werden, dann ergibt sich das Dreifache der mittelgroßen Zahl.

Der Interviewer geht in den beiden Gesprächen methodisch verschieden vor:

- Der Schülerin Frieda legt er nahe, zur Veranschaulichung der Behauptung Kästchentürme (d.h. Quadratstreifen) zu zeichnen. Eine ikonische Darstellung wie in nebenstehender Fig. dient dazu, im gedanklichen Verschieben von Kästchen die Vorstellung eines Ausgleichs zwischen Mengen zu verankern. Wie oben ausgeführt, kann diese Ausgleichsvorstellung die Regel des gegensinnigen Veränderns im zugrunde liegenden Toulmin-Schema stützen.
- Beim Schüler Ludwig verwendet der Interviewer hingegen Platzhalter für die Summanden in Form von Kästchen ($\square$) oder Herzchen ($\heartsuit$) wie in den nebenstehenden Gleichungen. Auf eine geometrische Darstellung von Summen wird verzichtet.

Von der Erläuterung der ikonischen Darstellung gegenüber der Schülerin Frieda abgesehen, wurde ohne Vorübungen mit den Schülerexperimenten zum beispielgebundenen Beweisen der obigen Behauptung begonnen.

3.1.4 Hauptanalyse (Ludwig): Rasche Bildung einer Ausgleichsvorstellung

Schüler Ludwig berechnet die Einstiegsaufgaben mit gleichem Ergebnis

Der Schüler Ludwig berechnet zu Beginn des Gesprächs die Einstiegsaufgaben $7 + 8 + 9 = 24$ und $8 + 8 + 8 = 24$ (↑ lu1 und ↑ lu2 in ↑ Abb. 3.1).

lu1
lu2
lu3
lu4
lu5
lu6

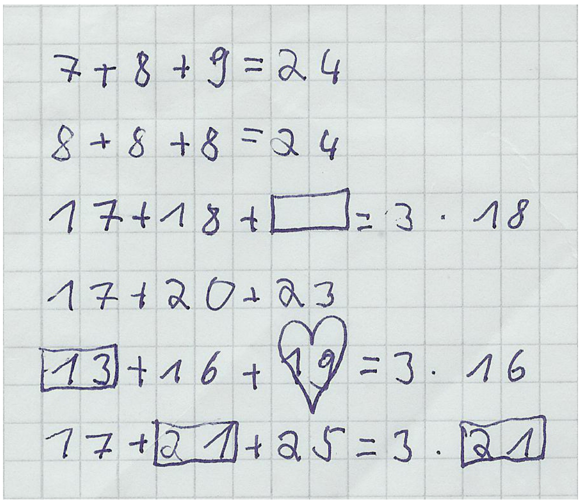


Abb. 3.1: Schüler Ludwigs erster Teil seiner Aufzeichnungen

Auf die merkwürdige Gleichheit der Ergebnisse angesprochen, erklärt er:

01:24	Lu	12	*hmm, ich glaub das kommt daher, weil, also hier* (deutet auf die 7 in ↑ lu1) *ist einer weniger als da* (deutet auf die 8 in ↑ lu2) *ist, und da* (deutet auf die 9 in ↑ lu1) *ist einer mehr als da* (deutet auf die 8 darunter, ↑ lu2) …
01:35	I	13	*müsst ihr hier hin* (Unterbrechung, da Schüler in den Raum treten, 8 sec) *kannst du noch 'mal sagen'*
01:45	Lu	14	*emm, also, emm, hier ist es ja so dass da* (deutet auf die 7 in ↑ lu1) *einer weniger als da ist* (deutet auf die 8 in ↑ lu2) *aber da* (deutet auf die 9 in ↑ lu1) *ist einer mehr als da* (deutet auf die 8 in ↑ lu2), *dann gleicht sich das eigentlich so aus, und weil hier ja auch* (deutet auf die 8 in der Mitte von ↑ lu1 und von ↑ lu2) *auch das Gleiche ist, so*
02:00	I	15	*mm-mmh*

Schüler Ludwig stellt eine Ausgleichsbeziehung her

Der Schüler Ludwig verwendet die Lokaladverbien *hier* und *da* schon zu Beginn als Bezeichnungen für Positionen ungenannt bleibender Beispielzahlen. Die Übereinstimmung in der Summe drückt er durch *das Gleiche* und *die gleiche Anzahl* aus. Als Erklärung dafür führt der Schüler Ludwig eine Ausgleichsbeziehung zwischen dem ersten und dritten Summanden in ↑ lu1 an. Diese Ausgleichsbeziehung beschreibt er in der Äußerung Lu 14 zunächst statisch (*hier ist es ja so dass da einer weniger als da ist aber da ist einer mehr als da, dann gleicht sich das eigentlich so aus*). Man kann die vorstehende Äußerungen des

Schülers Ludwig schon als erstes Indiz dafür ansehen, dass er am Beispiel etwas Allgemeineres erkennt, weil er zwar auf die konkreten Beispielzahlen deutet, seine Explikation aber abstrakt gehalten ist.

Im Anschluss daran führt der Schüler Ludwig aus:

02:10	Lu	16	*das ist ja dann praktisch die gleiche Anzahl .. ja, einfach, so .. emm,* (deutet auf die 7 in ↑ lu1) *ja einfach so .. emm, da* (deutet auf die 7 in ↑ lu1) *.. da* (deutet auf die 9 in ↑ lu1) *ist einer mehr als da* (deutet auf die 8 in ↑ lu1), *also wenn, wenn man hier* (deutet auf die 9 in ↑ lu1) *zum Beispiel einen wegtun würde und da* (deutet auf die 7 in ↑ lu1) *einen zutun würde, wär's ja eigentlich auch die gleiche Aufgabe ... wie da, praktisch*

Schüler Ludwig dynamisiert die betrachtete Ausgleichsbeziehung

Hier beschreibt der Schüler Ludwig nun dynamisch, wie er von der ersten Aufgabe 7 + 8 + 9 in ↑ lu1 zur zweiten Aufgabe 8 + 8 + 8 in ↑ lu2 kommt, bzw. wie er am Beispiel gegensinnig verändert.

Aus argumentativer Sicht greift der Schüler Ludwig in der Äußerung Lu 16 die Voraussetzung der Behauptung auf, dass die Summanden äquidistant sind. Dies geschieht zunächst noch im Beispiel (die Differenz zwischen den betrachteten Summanden beträgt 1), und es spricht an dieser Stelle nichts dafür, dass er sich größere Differenzen zwischen den Summanden überlegt. Ferner stellt er das gegensinnige Verändern bezüglich der Addition als mögliche Operation dar (*wenn man hier zum Beispiel einen wegtun würde und da einen zutun würde, ...* in Äußerung Lu 16), welche auf einer von ihm noch nicht präzisierten Vorstellung des Ausgleichs zwischen Mengen fußt (vgl. die mathematische Analyse in ↑ Abs. 3.1.1). Zwischen diesen Mengen werden Elemente übertragen (*wegtun*, *zutun* in Äußerung Lu 16), so dass gleichmächtige Mengen entstehen (*dann gleicht sich das eigentlich aus* in Äußerung Lu 14).

bisher implizit gebliebene Behauptung

Der die Position der Beispielzahlen und die Ausgleichsvorstellung thematisierende Ansatz des Schülers Ludwig erscheint für eine weiter fortschreitender Verallgemeinerung vielversprechend zu sein. Die Kehrseite davon, dass der Forscher den Schüler Ludwig die vorstehenden Beziehungen an den gestellten Beispielaufgaben selbst hat entdecken lassen, ist die fehlende Aufstellung der fraglichen Behauptung. Sie bleibt bisher implizit.

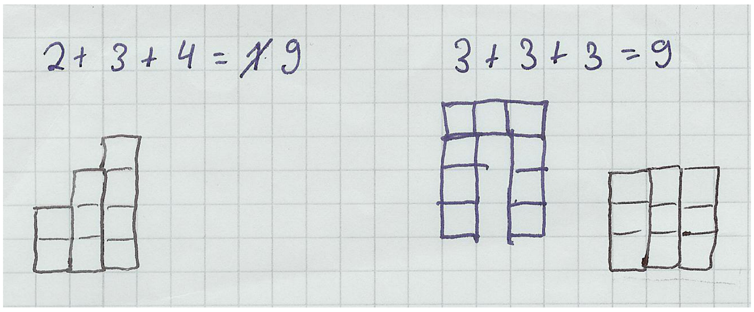
In der nachstehenden Kontrastanalyse zeigt die Schülerin Frieda ein ganz anderes Verhalten. Ihr soll über ikonische Darstellungen ähnlicher Rechenaufgaben der Weg zum beispielgebundenen Beweisen geebnet werden.

3.1.5 Kontrastanalyse (Frieda): Induktives Prüfen in anschaulichen Beispielen

Zu Beginn des Gesprächs bittet der Interviewer die Schülerin Frieda, die Additionsaufgabe 2 + 3 + 4 zu notieren und zu berechnen. Um einen *visual proof* im Sinne von ↑ Abs. 1.2.4 zu initiieren, zeichnet er unter diese Rechenaufgabe dann ein Bild einer Treppe aus Kästchentürmen (↑ fr1 in ↑ Abb. 3.2).

der Interviewer initiiert einen visual proof

fr1



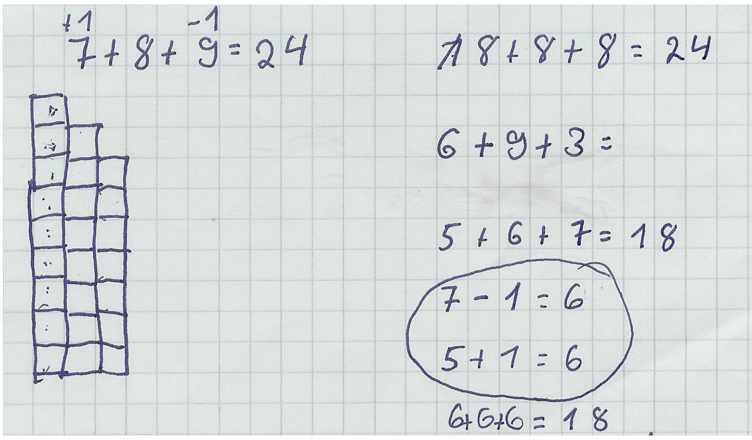
fr2

Abb. 3.2: Schülerin Friedas erster Teil ihrer Aufzeichnungen

Die Frage des Interviewers, was diese Zeichnung mit der notierten Aufgabe 2 + 3 + 4 = 9 zu tun habe, beantwortet die Schülerin Frieda in der frühen Äußerung Fr 10 wie folgt: *mmh, ja hier sind* 2 *Kästchen,* *<u>hier</u> sind* 3 *und <u>hier</u> sind* <u>4</u> (deutet jeweils auf die 2/3/4er-Kästchentürme in ↑ fr1). Damit übersetzt sie die Arithmetik der Zahlzeichen in eine ikonische Darstellung von Kästchentürmen. Ob Frieda die Kästchentürme auch als Darstellungsmittel für die Differenz der Beispielzahlen nutzt, also die Treppeneigenschaft der Kästchentürme beachtet und damit die Kästchentürme als auf- oder absteigend ansieht, bleibt fraglich. Denn nachdem sie der Aufforderung entsprochen hat, auch die Aufgabe 3 + 3 + 3 zu notieren und zu berechnen, zeichnet sie in ↑ fr2 ein Bild in der Form eines Tores auf. Der Interviewer hingegen zeichnet ein 3 × 3-Quadrat in ↑ fr2. Später veranschaulicht die Schülerin Frieda die nachfolgende Aufgabe 7 + 8 + 9 wie folgt (↑ fr3 in ↑ Abb. 3.3):

Schülerin Frieda übersetzt die Arithmetik der Zahlzeichen in die ikonische Darstellung

fr3



fr4

fr5

fr6

Abb. 3.3: Schülerin Friedas zweiter Teil ihrer Aufzeichnungen

04:34	I	25	*achso, ja, aha, emm, ja wir können ja 'mal den Fall annehmen .. stell dir 'mal vor,* $7+8+9$
04:46	Fr	26	*soll ich das aufschreiben'*
04:46	I	27	(nickt) *ja, kannst du 'mal aufschreiben*
04:48	Fr	28	(schreibt die Aufgabe $7+8+9$ in ↑ fr3 auf, 5 sec) *auch noch Ergebnis'*
04:56	I	29	*emm, ja kannst du mir gleich sagen, was rauskommt, wenn du, ohne zu rechnen, oder .. indem du <u>anders</u> rechnest'*
05:06	Fr	30	*mmh .. man könnte das jetzt auch einfach <u>so</u> machen* (beginnt zu zeichnen) *.. hier macht man jetzt* 9 *Kästchen* (zeichnet einen 9er-Turm in ↑ fr3, 10 sec) *hier macht man jetzt 9 Kästchen* (5 sec) *dann hier* 8 (zeichnet einen 8er-Turm in ↑ fr3 daneben, 10 sec) *.. und hier dann ..* 7 (zeichnet einen 7er-Kästchenturm in ↑ fr3 daneben, 10 sec) *und dann, wenn man <u>alle</u> Kästchen zusammenzählt, gibt das dann ..* 24
06:05	I	31	*ach warum <u>das</u> denn' .. warum denn* 24'
06:15	Fr	32	*.. mmh, weil, das ist die gleiche Aufgabe nur in Kästchen gezeigt, oder, man könnte dann auch, zum Beispiel diese* 9 *Kästchen + diese* 8 *Kästchen + diese* 7 *Kästchen* (deutet jeweils auf die absteigenden Kästchentürme in ↑ fr3) *das würde dann das Gleiche ergeben*

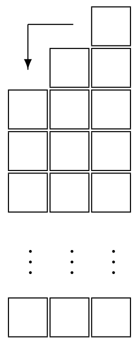
Schülerin Frieda versucht sich an einer weiteren Rechenaufgabe

Hier übersetzt die Schülerin Frieda die neue Rechenaufgabe in die ikonische Darstellung von Türmen, ohne auf deren Beziehung untereinander einzugehen. Ihre Beschreibungen *das ist die gleiche Aufgabe nur in Kästchen gezeigt* und *das würde dann das Gleiche ergeben* in Äußerung Fr 32 beziehen sich inhaltlich nicht auf die Übereinstimmung der Ergebnisse zweier Summen, sondern auf die Übertragung einer Summe in die betrachtete ikonische Darstellung. Die Schülerin identifiziert diese ikonische Darstellung gleichsam mit dem arithmetisch gestellten Sachverhalt. Daher fragt der Interviewer umgehend nach, warum beide Summenterme $7 + 8 + 9$ in ↑ fr3 und $8 + 8 + 8$ in ↑ fr4 vom Ergebnis her übereinstimmen:

07:00	I	37	*emm .. warum ergibt jetzt* $8 + 8 + 8$, *<u>auch</u>* 24'
07:22	Fr	38	*emm, ich kann den aufschreiben, also* (der Interviewer spricht mit) $8 + 8 + 8$ (schreibt die Aufgabe in ↑ fr4 auf) $8 + 8 + 8$ *.. sind wieder* 24, *weil, das ist ungefähr wieder so wie <u>hier</u>* (deutet auf den Summenterm $3 + 3 + 3$ in ↑ fr2), *<u>hier</u>* (deutet auf die Gleichung $2 + 3 + 4 = 9$ in ↑ fr1) *sind das alles verschiedene, und <u>hier</u>* (deutet auf den Summenterm $8 + 8 + 8$ in ↑ fr4) *sind das alles die <u>Gleichen</u> .. <u>da</u>* (deutet auf das Zahlzeichen 9 in der Gleichung $7 + 8 + 9 = 24$ in ↑ fr3) *einen wegnehmen, und <u>die</u> dazutun* (deutet auf das Zahlzeichen 7 im Summenterm $7 + 8 + 9$ in ↑ fr3)

Die vorgenommene Veranschaulichung als Treppe böte im Prinzip die Möglichkeit, von der Konkretheit der Zahlzeichen 7, 8 und 9 abzusehen und nur auf den oberen Teil der Treppe zu achten. Dort könnte man ein Kästchen vom höheren (resp. höchsten) auf den entsprechend niedrigeren (resp. niedrigsten) Turm umlegen. Daraus ließe sich für die Behauptung eine allgemeine Begründung ableiten, in der bloß die Stufenhöhe und die Anzahl der Kästchentürme relevant sind, nicht aber deren absolute Höhe und Reihenfolge (siehe nebenstehende Fig.). Die Schülerin Frieda nutzt diese Möglichkeit nicht, sondern führt den Analogieschluss, dass der Sachverhalt bei der Aufgabe $7 + 8 + 9 = 24$ in ↑ fr3 auch *ungefähr wieder so* gelagert sei wie bei der Aufgabe $2 + 3 + 4 = 9$ (Äußerung Fr 38 bezogen auf ↑ fr1). Sie differenziert dabei inhaltlich zunächst nur zwischen einer Verschiedenheit und einer Gleichheit von Summanden. Wählt sie schließlich einen eigenen Summenterm wie $6 + 9 + 3$ in ↑ fr5, dessen Summanden äquidistant sind, sieht die Schülerin Frieda die Aufeinanderfolge der Summanden des Ausgangsterms nicht als wesentlich an. Fraglich bleibt, ob sie sich bei der Wahl dieses Beispiels etwas Allgemeineres denkt. Dass die Schülerin Frieda aber die Behauptung durchaus mittels Beispielzahlen verbalisieren kann, zeigt die folgende Äußerung, wenngleich sie sich selbst zu keiner Begründung in der Lage sieht:

mögliche Umsetzung eines visual proof



Schülerin Frieda differenziert in Verschiedenheit und Gleichheit von Summanden

08:58	Fr	54	*mmh* (schaut wiederholt auf das Arbeitsblatt und hält den Stift in der Hand) *wenn man drei Zahlen die hintereinander folgen, nimmt, dann, und es dann zum Beispiel, wir nehmen so* 7, 8 *und* 9 .. *und das ergibt dann* 24 .. *wenn man dann die* 8, *emm, also die, wenn man die* 8, *dann dreimal nimmt, dann kommt immer dasselbe raus, ich weiß jetzt nicht ganz genau, wie ich das begründen soll*

Im weiteren Verlauf stellt der Interviewer der Schülerin Frieda die Frage, ob die thematisierte Behauptung für alle aufeinander folgenden Zahlentripel gelte. Die Schülerin Frieda wartet mit einem im Beispiel gehaltenen korrekten Algorithmus in ↑ fr6 auf:

der Interviewer fragt nach der Verallgemeinerbarkeit der Behauptung

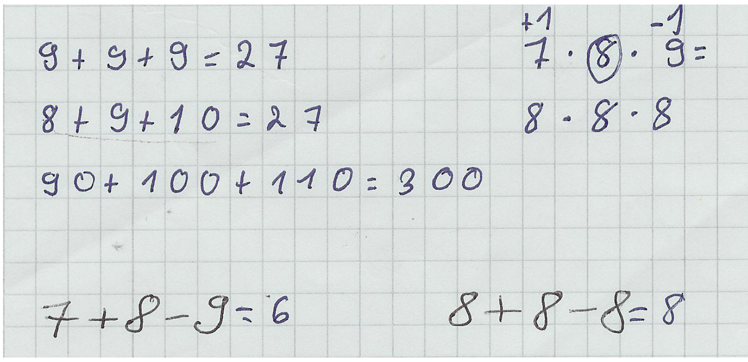
10:07	I	61	*aha und meinst du, dass das immer so ist, wenn drei äh, Zahlen aufeinander folgen'*
10:11	Fr	62	*na, ich mach jetzt 'mal,* $5 + 6 + 7$, *emm, das sind dann ... sind dann* 18 (schreibt die Gleichung $5 + 6 + 7 = 18$ in ↑ fr6 auf) .. *emm, und wenn ich dann hier von der* 7 (deutet auf die 7 in ↑ fr6), *also dann, ich kann auch 'mal den Rechenweg aufschreiben,* $7 - 1$, *emm, das sind dann ja* 6 (schreibt die Gleichung $7 - 1 = 6$ in ↑ fr6 auf), *und, emm, dann hab ich die* 1 *von der* 7 *ab-, da weggenommen, und dann* $5 + 1$ *das sind dann auch* 6 (schreibt die Gleichung $5 + 1 = 6$ in ↑ fr6 auf), *und dann macht man* $6 + 6 + 6$ .. *oah,* $6 + 6 + 6$ *das sind dann* 18 (schreibt die Gleichung $6 + 6 + 6 = 18$ in ↑ fr6 auf)

Schülerin Frieda stellt einen im Beispiel gehaltenen korrekten Algorithmus vor

Mit der Korrektheit des Rechenwegs im vorliegenden Beispiel rechtfertigt die Schülerin Frieda dessen Verwendung auch bei anderen Aufgaben. Da die Behauptung dabei stets bestätigt wird, sieht sie in ihrem entwickelten Vorgehen auch eine ausreichende Begründung für die Behauptung. So vermutet sie in ↑ fr7, dass die Aufgabe $8 + 9 + 10$ das Gleiche ergebe wie $9 + 9 + 9$, was sie anschließend durch das schrittweise Ausrechnen von $8 + 9 + 10 = 17 + 10 = 27$ bestätigt. Dadurch prüft sie induktiv die fragliche Behauptung.

fr7

fr8



fr9

Abb. 3.4: Schülerin Friedas dritter Teil ihrer Aufzeichnungen

Schülerin Frieda verbleibt im induktiven Prüfen

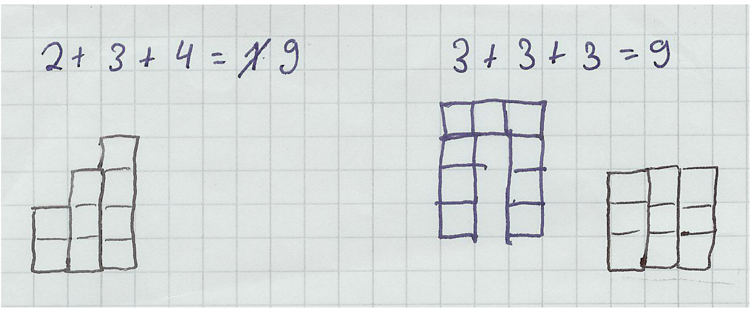
Die Schülerin Frieda bleibt auch im weiteren Verlauf im induktiven Prüfen der Behauptung verhaftet. Erst viel später versucht sie, die Behauptung auch ikonisch an den ihr bekannten Beispielen mit Hilfe von Kästchentürmen zu bestätigen:

19:36	I	101	*ja, okay, ich will aber wissen, warum das drei* 8*er, dreimal die* 8 *gleich* 24 ergibt, *kannst du mir das 'mal an der Figur* (deutet auf ↑ fr3) *begründen'*
19:45	Fr	102	*mmh, also wenn man dann hier, den hier, den Klotz* (deutet auf das oberste Kästchen des 9er-Turms in ↑ fr3), *sagen wir jetzt einfach, das sind alles zum Beispiel, jemand hat jetzt diese Türme gebaut* (deutet auf ↑ fr3), *jetzt will er aber* 8, *jetzt will er drei Gleiche haben, nimmt er den Klotz ab* (deutet auf das oberste Kästchen des 9er-Turms in ↑ fr3) *und stellt ihn da* (deutet auf das oberste Kästchen des 7er-Turms in ↑ fr3) *hin … dann sind das alles, dann sind es überall* 8
20:10	I	103	*aha .. und, meinst du, dass das immer geht, wenn wir hier auch andere Aufgaben haben mit den, Klötzen'*
20:19	Fr	104	*mmh, also hier zum Beispiel* (deutet auf das 3×3–Quadrat in ↑ fr2), *wenn man dann hier* $2 + 3 + 4$ *hätte* (deutet auf ↑ fr1), *dann könnte man ja hier* (deutet erneut auf ↑ fr1), *dann nimmt man hier auch wieder den Klotz ab* (deutet auf das oberste Kästchen des 4er-Turms in ↑ fr1) *und stellt ihn da hin* (deutet auf das oberste Kästchen des 2er-Turms in ↑ fr1) … *dann hat man wieder, drei, drei in der gleichen Höhe*

Schülerin Frieda algorithmisiert fortschreitend

Auch hier präsentiert die Schülerin Frieda ein Verfahren, mit dem sie die Behauptung im jeweiligen Beispiel bestätigt. Weder die rein arithmetische Betrachtung noch die Übertragung in die ikonische Darstellung bringt die Schülerin Frieda dazu, bewusst die ursprüngliche Behauptung am Beispiel zu beweisen. Vielmehr bietet sie einen Algorithmus an, mit dem sie die Behauptung induktiv an weiteren Beispielen bestätigt. Es sind keine Indizien dafür zu finden, dass die Schülerin Frieda einen Beweis subjektiv realisiert, so dass man vermuten kann, dass ihr der Beweis latent bleibt. Die Schülerin Frieda formuliert eher ihr Erfahrungswissen als Handlungsregeln, welche sie vermutlich bei jeder neuen Aufgabe unhinterfragt anwenden würde.

fr1



fr2

Abb. 3.5: Schülerin Friedas erster Teil ihrer Aufzeichnungen

Im Folgenden wird wieder an die Schilderung über die anfänglichen Beweisversuche des Schülers Ludwig in ↑ Abs. 3.1.4 angeknüpft.

3.1.6 Hauptanalyse (Ludwig): Fortschreitende beispielgebundene Verallgemeinerung

der Interviewer setzt Platzhalter ein

Die bisherigen Erläuterungen des Schülers Ludwig zur Gleichheit der Summen $7 + 8 + 9$ und $8 + 8 + 8$ sind noch an den geometrischen Ort der betrachteten Beispielzahlen gebunden. Der Interviewer verwendet daher in den nachfolgenden Aufgaben mit Kästchen (☐) oder Herzchen (♡) symbolisierte Platzhalter, um den Schüler Ludwig zu einer weiteren Darstellung seines Lösungsprozesses und ggf. zu Begründungen auf allgemeinerer Ebene anzuregen.

lu1
lu2
lu3
lu4
lu5
lu6

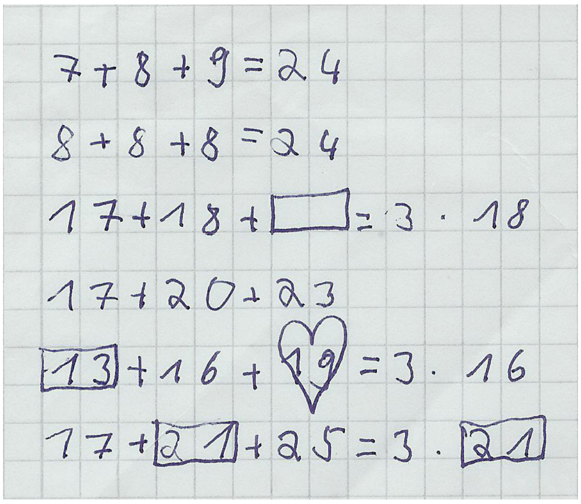


Abb. 3.6: Schüler Ludwigs erster Teil seiner Aufzeichnungen

Schüler Ludwig verweist zur Begründung auf bisherige Aufgaben

Zunächst begründet der Schüler Ludwig an der wenig modifizierten Aufgabenstellung $17+18+\square = 3 \cdot 18$ in ↑ lu3, warum das Zahlzeichen 19 in das Kästchen ☐ einzutragen ist, indem er auf die vorangegangenen Aufgaben verweist:

05:43	Lu	44	*emm, weil's genauso wie bei <u>da</u> ist* (deutet auf die Aufgabe $7 + 8 + 9$ in ↑ lu1) *.. dann, könnt man von der* 19 *<u>hier</u> einen wegnehmen* (deutet auf das Kästchen ☐ in ↑ lu3) *dann hätte man <u>hier</u>* 18 *und <u>da</u>* 18 (deutet auf das Kästchen ☐ und auf die 17 in ↑ lu3) *dann wär's ja* $3 \cdot 18$
05:55	I	45	*mm-mmh .. also das geht jetzt immer so' .. wenn ich, wenn ich <u>hier</u>* (deutet auf die Aufgabe $17+18+\square = 3\cdot 18$ in ↑ lu3) *emm, andere Zahlen nehme'*
06:02	Lu	46	*mmh .. ich, naja, also, wenn die, zusammenhängen, also, meinetwegen,* $5+6+$ *also* $15+16+17$, *wird's eigentlich, schon gehen,* (leise) *also wenn man, die* 16 *dann nimmt*

Führt Schüler Ludwig ein beispielgebundenes Argument?

Bezeichnend ist, dass der Schüler Ludwig das Zahlzeichen 19 nicht in das Kästchen ☐ einträgt. Da er keine induktive Prüfung führt, scheint er seinem früher gegebenen Argument des gegensinnigen Veränderns zu vertrauen. Auch benennt er mit der Bedingung *wenn die, zusammenhängen* in Äußerung Lu 46 eine wesentliche Voraussetzung des gegensinnigen Veränderns bezüglich der Addition.

Auf dem Arbeitsblatt hat der Schüler Ludwig in ↑ lu5 nun die Platzhalter $\square$ und $\heartsuit$ der Aufgabe mit 13 und 19 als ersten und dritten Summanden belegt.

11:08	I	79	*ja, also, emm ... jetzt hast du ja gesagt, das gilt dort* <u>*auch*</u> *.. ohne dass du jetzt ausgerechnet hast, was* $3 \cdot 16$ *ist und ohne dass du* $13 + 16 + 19$ *ausgerechnet hast .. emm ... meinst du da .. meinst du, da gibt es noch 'ne Lösung' ..*
11:31	Lu	80	*ja, emm,* 15, 16, 17, *es würd sicherlich auch* 17, 16, 15, *gehen, oder* 19, 16, 13, *hmm, wahrscheinlich würd auch .. emm ...* 10, 16, 22 *gehen*

Der Schüler Ludwig führt hier weitere Tripel von Beispielzahlen für die als Platzhalter $\square$ und $\heartsuit$ gekennzeichneten Summanden der Aufgabe $\square + 16 + \heartsuit = 3 \cdot 16$ an. Er hat damit die Behauptung aber noch nicht allgemein formuliert.

Schüler Ludwig gibt weitere Beispiele

Noch bevor der Schüler Ludwig die ursprüngliche Behauptung für drei aufeinander folgende Zahlen explizit aufgestellt hat, prüft er Aussagen größerer Allgemeingültigkeit: Wenn er drei aufsteigend angeordnete Beispielzahlen mit 3er/6er-Abstand schon als Lösungen der Aufgabe $\square + 16 + \heartsuit = 3 \cdot 16$ benennt, beschreibt er implizit mögliche Voraussetzungen dieser Aussagen als Daten im jeweiligen TOULMIN-Schema (vgl. ↑ Abs. 3.1.1). Der Einsatz der Platzhalter hat den Schüler Ludwig also dazu ermuntert, die Äquidistanz als Voraussetzung für die Allgemeingültigkeit der später aufgestellten Behauptung zu explizieren. Dass er gegenläufige Tripel von Beispielzahlen anführt, weist auf seine Vertrautheit mit dem Kommutativgesetz der Addition hin. So kommen die Tripel $(17, 16, 15)$ und $(19, 16, 13)$ als Lösungen der Aufgabe $\square + 16 + \heartsuit = 3 \cdot 16$ in Frage. Der Schüler Ludwig hält das gegensinnige Verändern der äußeren Summanden also in vielen äquidistanten Zahlentripeln für möglich. Deshalb fragt der Interviewer:

implizit bleibende Behauptung bei fortschreitender Verallgemeinerung

der Interviewer fragt, warum der Aufgabe so viele Beispielzahlen genügen

11:51	I	81	*mm-mmh, ah ja, interessant, emm .. warum* <u>*gilt*</u> *denn das immer'*
11:58	Lu	82	*emm, weil wenn die den gleichen Abstand haben, also wenn, zum Beispiel .. warte, es könnte auch* 0, *emm,* 16, *emm ..* 32 *zum Beispiel sein, also es muss nur immer eben einen regelmäßigen Abstand haben .. weil, also .. das heißt praktisch, emm .. dass man, emm, also dass man, also, dass jetzt* 10, 16, 17 *nicht gehen würde, aber* 10, 16, 22 *zum Beispiel, weil .. dann, wenn bei der Anfangszahl, da muss man eigentlich immer erst gucken, bei* <u>*dieser*</u> *Zahl, also* <u>*dieser*</u> *Zahl* (deutet auf die 16 in ↑ lu5), *die will man dreimal haben, dann muss man, dann eigentlich gucken, ob man bei* 10 *muss man dann, emm, eben halt gucken, aha, also dass praktisch .. und dann muss man gucken, dass* <u>*da*</u> *eben halt* (deutet auf die 19 in ↑ lu5) *mehr,* 6, 6 <u>*mehr*</u> *sind als, emm, weil mit der, Ergebnis, dass heißt dann,* <u>*hier*</u> 6 <u>*weniger*</u> (deutet auf die 13 in ↑ lu5), *bei* 16, *oder, also wenn man* 10 *haben will, am Anfang, und dann* 6 <u>*mehr*</u>, *dann hätte man* 62 [sic!]

Schüler Ludwig expliziert Beweisregeln an Beispielen

In Äußerung Lu 82 führt der Schüler Ludwig nun die Voraussetzung der Regel an, dass die Summierung dreier Zahlen mit dem *gleichen Abstand* bzw. *regelmäßigen Abstand* dreimal die mittlere Zahl ergibt. Die Regel selbst konkretisiert er an den Beispieltripeln $(0, 16, 32)$ und $(10, 16, 22)$. Dabei setzt der Schüler Ludwig das zweite Beispieltripel $(10, 16, 22)$ passend von einer fehlerhaften Lösung wie $(10, 16, 17)$ ab.

Schüler Ludwig führt ein paradigmatisches Beispiel ins Feld

Das Tripel $(10, 16, 22)$ fungiert in Lu 82 als paradigmatisches Beispiel im Sinne FREUDENTHALS (↑ Abs. 1.2.1) zur Erläuterung des eigenen Vorgehens. Schriftlich niedergelegt ist die Ursprungsaufgabe $\square + 16 + \heartsuit = 3 \cdot 16$ mit den in ↑ lu5 vorgenommenen Eintragungen von 13 im Platzhalter $\square$ und 19 im Platzhalter $\heartsuit$. Deren teilweise Abweichung zum nunmehr gewählten Tripel $(10, 16, 22)$ hat den Effekt, dass der Schüler Ludwig nun nicht mehr allein in Zahlen gebunden sprechen kann. Mit der Bezeichnung *Anfangszahl* benennt er in Äußerung Lu 82 den ersten Summanden als Platzhalter, ebenso die weiteren zu Zahlenplätzen *hier*, *da*, *bei dieser Zahl* abstrahierten, indefinit gehaltenen Beispielzahlen.

der Interviewer fragt nach der Allgemeingültigkeit paradigmatisch formulierter Regeln

Der Schüler Ludwig hat in Lu 82 die Regel paradigmatisch formuliert und ihre Herleitung am Beispieltripel $(10, 16, 22)$ plausibel gemacht. Da dieser die behauptete Regel nicht in voller Allgemeinheit erklärt hat, stellt der Interviewer dem Schüler Ludwig mit Blick auf dessen Aufzeichnungen in ↑ lu5 die Frage nach der Allgemeingültigkeit seiner paradigmatisch formulierten Regel:

13:29	I	83	*ja jetzt hast du das aber nur für das Beispiel gesagt, mit der* 10, 16 *und* 22, *gilt das denn immer'*
13:34	Lu	84	*mmh ... phh .. bei Plusaufgaben .. eigentlich schon ...*
13:51	I	85	*aha ... und, äh, ist das jetzt wirklich egal, welche Zahl wir hier in das Kästchen und in das Herz schreiben'*
14:00	Lu	86	*ja, also man muss schon immer gucken, wie die Zahlen zusammenhängen, ja, also dass, ja ...* (Räuspern), *dass so, dass das da* -3 *und dann da eben halt* $+3$ *ist, auch bei* 55 *meinetwegen, dass dann hier* -10 *und da* $+10$ *sind, und na ja* (deutet auf das Arbeitsblatt)
14:22	I	87	*mm-mmh, und dann gilt's', gilt's immer', gilt's immer'*
14:27	Lu	88	*ja, fast immer*

Schüler Ludwig bezieht seine behauptete Regel auf Summen

Der Schüler Ludwig bezieht seine behauptete Regel in Äußerung Lu 84 auf Summen. Aus anderen Schülerexperimenten – wie etwa bei der Schülerin Frieda – ist bekannt, dass diese Bedingung Schülern im Allgemeinen nicht wesentlich erscheint (siehe hierzu ↑ Abs. 3.1.7). In der Äußerung Lu 86 nennt der Schüler Ludwig die Operationen -3 und $+3$ für $13 + 16 + 19$ sowie -10 und $+10$ für die ungenannt bleibende Summe $45 + 55 + 65$. Dieses beidseits der jeweils gewählten Beispielzahl vorgenommene Operieren im Sinne WITTMANNS (↑ Abs. 1.2.3) spricht er in Äußerung Lu 86 an: *also man muss schon immer gucken, wie die Zahlen zusammenhängen*. Damit präzisiert der Schüler Ludwig die Voraussetzungen für die bereits aufgestellte Behauptung insofern, als dass er eine Möglichkeit für die Konstruktion passender Tripel angibt.

Der Schüler Ludwig soll die Gültigkeit der Behauptung an der Aufgabe $17 + \square + 25 = 3 \cdot \square$ in ↑ lu6 mit dem zweiten Summanden als Platzhalter $\square$ zeigen:

14:30	I	89	*aha, fast immer .. okay, dann, haben wir noch etwas anderes' .. ah ja, genau, da ist noch was, emm, kannst ja <u>noch 'mal</u> aufschreiben, äh* 17 + *.. emm,* + *so'n Kästchen ... und jetzt* + 25 *.. emm,* = 3 · *das Kästchen ... so kannst du das 'mal erklären* (der Schüler hat die Aufgabe $17+\square+25 = 3\cdot\square$ während dessen in ↑ lu6 aufgeschrieben)
15:09	Lu	90	*.. gut, emm, da kann man, dann ja praktisch, sehen, dass ich, der Unterschied von* 17 *zu, emm,* 25 *..* 8 *beträgt, und dann, und dann, teilt man das einfach durch* 2, *und dann hat man* 4, *das heißt <u>hier</u> muss man* (deutet auf die 17 in ↑ lu6), *da muss man* 4 *hinzurechnen und, das heißt dann* 21 (schreibt die 21 in das erste Kästchen in ↑ lu6) *und wenn man dann <u>hier</u> nämlich* 4 *wegnehmen würde* (deutet auf die 25 in ↑ lu6), *dann <u>hier</u>* (deutet auf die 25 in ↑ lu6) *auch* 21 *und <u>da</u>* (deutet auf die 17 in ↑ lu6) *auch* 21, *und dann <u>da</u>* $3 \cdot 21$ (schreibt die 21 in das zweite Kästchen in ↑ lu6)

In der vorangegangenen Äußerung Lu 90 stellt der Schüler Ludwig seinen Gedankengang zur Lösung der betrachteten Aufgabe dar. Er bildet die Hälfte $4 = 8 : 2$ der Differenz $8 = 25 - 17$ der beiden äußeren Summanden und mithin den *Unterschied* zwischen benachbarten Summanden. Die Verwendung des Konjunktivs sowie der Wörter *hinzurechnen* und *wegnehmen* in der Äußerung Lu 90 lässt vermuten, dass der Schüler Ludwig die Strategie des gegensinnigen Veränderns verstanden hat. Jedoch bleibt fraglich, ob der Schüler nicht lediglich die behauptete Regel anwendet, oder ob er deren Allgemeingültigkeit begründen will.

Schüler Ludwig entwickelt eine Lösungsstrategie bei neuartigen Aufgaben

Kann der Schüler Ludwig also begründen, warum die behauptete Regel allgemeingültig ist hinsichtlich Äquidistanz, Reihenfolge und Anzahl der Summanden? Der Interviewer erweitert die Aufgabenstellung dazu noch auf fünf statt drei Summanden, deren Differenz jeweils 1 beträgt (siehe ↑ lu7 in ↑ Abb. 3.7).

Verallgemeinerung der Behauptung auf fünf Summanden

lu7
lu8
lu9

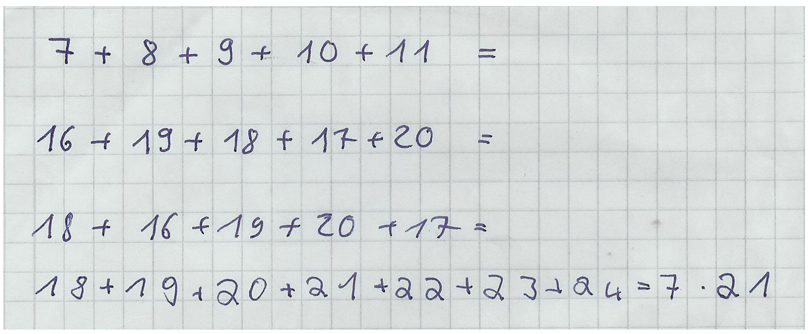


Abb. 3.7: Schüler Ludwigs zweiter Teil seiner Aufzeichnungen

Der Interviewer bittet den Schüler Ludwig zunächst um Vereinfachung des betrachteten Summenterms $7 + 8 + 9 + 10 + 11$:

16:09	I	97	*emm .. ja, was ist denn zum Beispiel ...* (10 sec, schreibt den Summenterm $7 + 8 + 9 + 10 + 11$ in ↑ lu7 auf), *was wäre denn das zum Beispiel, wenn du das jetzt nicht ausrechnest .. kannst du mir das irgendwie kürzer sagen'*
16:42	Lu	98	*ja, eigentlich, könnte man das, so sehen, praktisch* $5 \cdot 9$
16:50	I	99	*ah, könnte man, ja, erklär mir das 'mal, warum das so ist*
16:55	Lu	100	*das ist jetzt hier wie bei den anderen, hier* (deutet auf die 9 in ↑ lu7) *ist die Mittelzahl, und wenn man von der einen abzieht* (deutet auf die 8 in ↑ lu7), *und hier einen plusnimmt* (deutet auf die 10 in ↑ lu7), *dann sind die* 3 *hier schon 'mal alle* 9, *und hier* (deutet auf die 11 in ↑ lu7) *nimmt man zwei und tut sie hier zu* (deutet auf die 7 in ↑ lu7) *und dann sind eben halt alle fünf* 9

Schüler Ludwig betrachtet die Aufgabenstellung strukturell

Der Schüler Ludwig rechnet den Summenterm $7 + 8 + 9 + 10 + 11$ bezeichnenderweise nicht aus. Statt dessen bedient er sich einer schon eingeübten, eher strukturellen Sichtweise auf die Aufgabe. In der Begründung dafür, warum das Ergebnis der betrachteten Summe $5 \cdot 9$ ist, stellt sich bei ihm nachfolgend erneut eine variablenhaltige Ausdrucksweise ein, die jener in früheren Äußerungen ähnlich ist. So bezeichnet er das Zahlzeichen 9 in Äußerung Lu 100 als *Mittelzahl* und betont damit ihre herausgehobene Stellung in der betrachteten Aufgabe.

Schüler Ludwig drückt sich enaktiv aus

Zudem entwickelt der Schüler Ludwig eine gleichsam enaktiv konnotierte Sprechweise. In Äußerung Lu 100 beschreibt er das Umlegen von Kästchen als Differenzen von Summanden mit den Worten *wenn man von der einen abzieht, und hier einen plusnimmt* und *und hier nimmt man zwei und tut sie hier zu.* Durch dieses Operieren überführt der Schüler Ludwig den Term $7 + \ldots + 11$ in den Term $9 + \ldots + 9$. Nicht ganz so explizit wird dabei, dass die Summe im Ergebnis unverändert bleibt. Er thematisiert in den Äußerungen Lu 98 und Lu 100 hingegen schon die Multiplikation als fortgesetzte Addition.

17:15	I	101	*und emm .. glaubst, dass das da auch so immer ist', oder jetzt haben wir fünf Zahlen, bisschen mehr, oder'*
17:20	Lu	102	*ja*
17:20	I	103	*komplizierter, oder'*
17:22	Lu	104	*.. ja eigentlich, wenn's wieder, so, im gleichmäßigen Abstand ist, dann, eigentlich schon*
17:29	I	105	*aha, also, ich mein, aber man kann ja auch 'mal sowas machen, also* (schreibt die Aufgabe $16 + 19 + 18 + 17 + 20$ in ↑ lu8 auf, 20 sec, lacht) *wie ist das denn dann'*
17:55	Lu	106	*mmh, dann*
17:56	I	107	*hast du ja jetzt gesagt, es gilt immer, und jetzt, äh*
18:01	Lu	108	*ah .. ja, emm, da gilt's eigentlich auch*

18:04	I	109	*ach, warum das'*
18:05	Lu	110	*weil hier ist praktisch auch* (deutet auf ↑ lu8) *nur dass es hier nicht so steht, da ist ja auch* 16, 17, 18, 19, 20, *dass heisst praktisch .. emm, wir nehmen dann meinetwegen, die* 18, *jetzt, die wir haben wollen, und dann von der* 20 (deutet auf das Zahlzeichen 20) *ziehen wir* 2 *ab, und dann .. und die tun wir hier dazu* (deutet auf das Zahlzeichen 16), *dann gibt's auch wieder* 18, *und hier, von* (deutet zunächst auf das Zahlzeichen 17, dann auf das Zahlzeichen 19) *halt einen wegtun, also einen abziehen, und hier einen dazurechnen und dann sind's auch wieder alle* 18, *das heißt dann,* $5 \cdot 18$

In dieser Szene wird die Allgemeingültigkeit der Behauptung mit Blick auf die Reihenfolge mehrerer Summanden thematisiert. Zunächst bemerkt der Schüler Ludwig an der Aufgabenstellung $16 + 17 + 18 + 19 + 20$ in Äußerung Lu 104, dass die Summanden *im gleichmäßigen Abstand* zueinander stehen. Damit hat er wiederum die wesentliche Voraussetzung der Behauptung unabhängig von der (ungeradzahligen) Anzahl an Summanden benannt. Mit der Äußerung Lu 110 zur Reihenfolge der fünf Summanden in der modifizierten Aufgabenstellung $16 + 19 + 18 + 17 + 20$ signalisiert der Schüler Ludwig zudem, dass er das Kommutativgesetz in seine Überlegungen einbezieht.

Schüler Ludwig geht mit Beispielzahlen in anderer Reihenfolge um

Wie auch schon in Äußerung Lu 100 nennt der Schüler Ludwig den Beweisschritt des gegensinnigen Veränderns, und zwar beispielgebunden durch die Übertragung des Zahlwerts 2 von 20 auf 16 sowie des Zahlwerts 1 von 19 auf 17, so dass sich wieder mehrmals die 18 ergibt. Auch den Beweisschritt der fortgesetzten Addition liefert der Schüler Ludwig beispielgebunden, wenn er am Ende von Äußerung Lu 110 für *alle* 18 sagt, dies hieße $5 \cdot 18$.

Schüler Ludwig nennt wesentliche Schritte des Beweises

18:46	I	111	*mm-mmh, ja, und woran liegt das denn, dass das, scheint nun ja immer zu gehen, woran liegt das noch 'mal also, emm .. dass das immer, gilt'*
19:00	Lu	112	*wenn man die Zahlen, also praktisch, immer so, daraus abziehen kann, dass dann hier* (deutet auf das Zahlzeichen 20 in ↑ lu8) *so viel wie da* (deutet auf das Zahlzeichen 18 in ↑ lu8) *in der Mitte, steht dann so, ist und, emm, hier* (deutet auf das Zahlzeichen 20 in ↑ lu8) *dann eben halt auch so viel wie hier* (deutet auf das Zahlzeichen 16 in ↑ lu8) *dann kann man das dann dazurechnen*

In Äußerung Lu 112 bedient sich der Schüler Ludwig einer vollständig von den Beispielzahlen abgelösten, zu Variablen als Zahlenplätzen tendierenden Ausdrucksweise, verstärkt durch das Allgemeingültigkeit kennzeichnende *immer*. Der Schüler argumentiert allgemein, indem er die Beispielzahlen ihrer Konkretion enthebt und nur noch mit den stellvertretenden Platzhaltern am betrachteten

Schüler Ludwig löst seine Ausdrucksweise von Beispielzahlen

Term operiert. Selbst ohne seine Kompetenz, die formell-algebraische Sprache zu verwenden, ist es dem Grundschüler Ludwig weitgehend gelungen, vermöge der als Variablenzeichen fungierenden Platzhalter formal zu beweisen (vgl. ↑ Abs. 1.1.1).

Schüler Ludwig präzisiert den Gebrauch seiner Bezeichnung Mittelzahl

Der Interviewer problematisiert schließlich noch die Position der Zahl 18. Der Schüler Ludwig deutet im Folgenden in ↑ lu9 (s.o.) auf diese Beispielzahl und bringt nach Äußerung Lu 100 wieder die Bezeichnung *Mittelzahl* ins Spiel, welche eine Bedeutungsveränderung erfährt:

19:18	I	115	*aha, dass* 18 *wie das in der Mitte steht, emm, wie ist das denn jetzt hier bei, emm* (schreibt den nächsten Summenterm 18 + 16 + 19 + 20 + 17 in ↑ lu9 auf), *wenn die* 18 *hier <u>vorne</u> steht' .. so, ist das da auch so' ... steht die* 18 *ja jetzt <u>vorn</u>, nicht in der <u>Mitte</u>*
19:36	Lu	116	*mmh, na gut, also eigentlich die Mittelzahl eher, so*
19:44	I	117	(laut) *ach so, die Mittelzahl eher, ah*
19:50	Lu	118	*emm, das heißt, also <u>hier</u>* (deutet auf ↑ lu9) *würd's dann nämlich auch wieder nicht gehen, wenn man hier von der* 17 *äh, von der* 18 *wieder was abzieht, dann würd es höchstens, na es würde auch nicht hinkommen*
19:57	I	119	*ach <u>hier</u> kommt's <u>nicht</u> hin'*
20:00	Lu	120	*nee, also man muss <u>immer</u> die Mittelzahl, also bei* 16, 17 .. 18, 19, 20 (zählt die Zahlzeichen im Summenterm 18 + 16 + 19 + 20 + 17 in ↑ lu9 aufsteigend), *das sind ja fünf Zahlen, und davon immer dann die Zahl, die in der Mitte ist*
20:11	I	121	*aha*
20:11	Lu	122	*mmh, kann man dann, ja eben halt, von* 18 *zum Beispiel, ja, also dass man die eben fünfmal hat, das heißt*
20:23	I	123	*äh, also was, was käme jetzt heraus'*
20:24	Lu	124	*na ja also,* $5 \cdot 18$
20:25	I	125	*ach so, also* $5 \cdot$ *die, äh*
20:32	Lu	126	*die Zahl die immer in der Mitte ist, also zwischen den ganzen Zahlen*

Mit dem Ausdruck *Mittelzahl* bezeichnet der Schüler Ludwig somit nicht mehr die Position in der vorgegebenen Abfolge der Summanden, sondern den Median als mittelgroße Zahl. So gelingt es dem Schüler zusammen mit dem Interviewer in den letzten Äußerungen, den Summenterm $18+16+19+20+17$ nach Überführung in den Summenterm $18 + 18 + 18 + 18 + 18$ als $5 \cdot 18$, also als $5 \cdot$ (...) *die Zahl die immer in der Mitte ist* darzustellen.

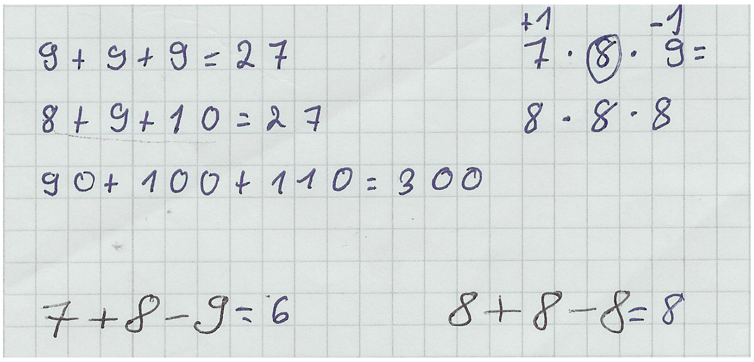
3.1.7 Vergleichsanalyse (Ludwig, Frieda): Operatorwechsel

Schülerin und Schüler testen die Behauptung für andere Operationen

In wie weit sind dem Schüler Ludwig und der Schülerin Frieda die Grenzen des explizierten gegensinnigen Veränderns bewusst? Der Schülerin Frieda wurde zwischenzeitlich folgende Aufgabe gestellt:

20:41	I	105	*ja, na, Fr., jetzt hab ich mich da noch gefragt, emm, was ist denn, wenn ich jetzt hier* (beginnt zu schreiben), *jetzt haben wir ja* $7 + 8 + 9$, *emm, was ist denn, wenn wir jetzt* $7 + 8 - 9$ *rechnen, und, wenn wir* $8 + 8 - 8$ *rechnen'* (schreibt die beiden Aufgaben in ↑ fr9 nebeneinander)
21:05	Fr	106	*ja dann ergibt das wieder das Gleiche*

fr7 fr8



fr9

Abb. 3.8: Schülerin Friedas dritter Teil ihrer Aufzeichnungen

Schülerin Frieda überträgt ihr gegensinniges Verändern unkritisch

Dem Anschein nach wirkt die operatorunabhängige Ausgleichsvorstellung des gegensinnigen Veränderns als Überführen von Tripeln ineinander so stark nach, dass die Schülerin Frieda diese Vorstellung auch auf Fälle mit anderen Operationen anwendet und nicht auf die Konstanz der Summe fokussiert. Dies zeigt sich insbesondere an ihrer Darstellung in ↑ fr8 und ↑ fr9. Anschließend widerlegt die Schülerin Frieda in ↑ fr9 bei den Aufgaben $7+8-9$ und $8+8-8$ die vermutete Gleichheit allein durch Ausrechnen.

Schaut man sich weiter die Dokumentation der Schülerin Frieda an, so erscheinen im unteren Teil ihres Arbeitsblatts die Beispielzahlen durch Quadratstreifen (bzw. Kästchentürme) ersetzt unter Verknüpfung durch die Operatorenzeichen $+$, $-$ und $\cdot$ (↑ Abb. 3.9). Dabei bildet die Schülerin Frieda die symbolische Darstellung $3 \cdot 4 \cdot 5$ im Ersetzen der Zahlen durch Kästchentürme ikonisch ab.

Schülerin Frieda repräsentiert die Beispielzahlen bloß ikonisch fr10

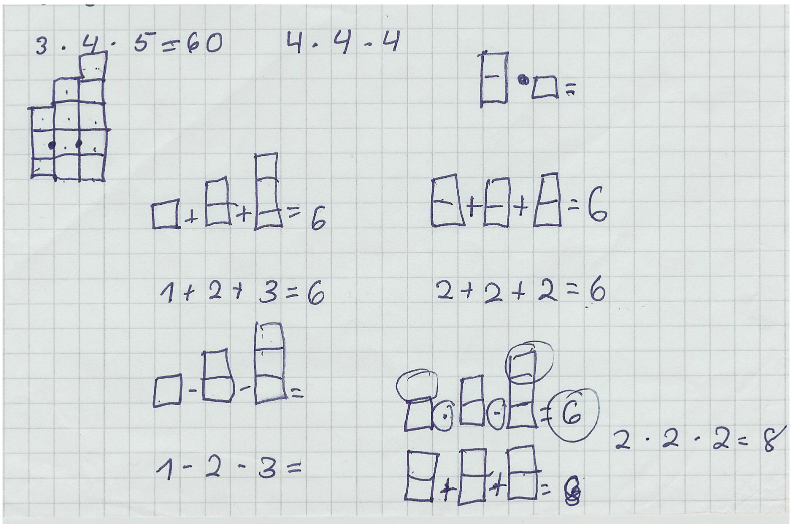


Abb. 3.9: Schülerin Friedas vierter Teil ihrer Aufzeichnungen

24:36	I	133	*und wie würdest du das begründen' .. wie begründest du das, dass du, dass dasselbe rauskommt'*
24:41	Fr	134	*mmh* (5 sec) *also, ich weiß nicht, ich würd immer dieses* – (kreist den Rechenweg oben in ↑ fr6 ein) *und dann, erst hier, also hier, erst* −1, *und* <u>*die*</u> *dann dazutun* (deutet auf die Aufgabe $8 + 9 + 10$ in ↑ fr7), *so würd ich das dann auch* <u>*hier*</u> (deutet auf die Malaufgabe $3 \cdot 4 \cdot 5$ in ↑ fr10), *also* <u>*hier*</u> *eine minusrechnen* (deutet auf die 5 in ↑ fr10) *und dann* <u>*da*</u> (deutet auf die 3 in ↑ fr10) *zutun*

Schülerin Frieda reflektiert ihr Vorgehen metasprachlich

Dies bestätigt erneut die These der Identifizierung der ikonischen Darstellung mit den Beispielzahlen. In metasprachlicher Reflexion erklärt die Schülerin Frieda mit Blick auf die Aufgabe $3 \cdot 4 \cdot 5$ und deren Veranschaulichung als Treppe mit zwischengesetzten Malpunkten ihre entwickelte Fehlvorstellung:

25:45	Fr	142	*mmh .. da man, achtet, beim Zeichnen achtet man nicht auf die, emm, auf die* <u>*Zeichen*</u>, *man achtet nur auf die* <u>*Zahlen*</u> *beim Zeichnen*

Offenbar hat die Schülerin Frieda das Zeichnen wirklich bloß als ikonisches Ersetzen von Beispielzahlen durch Kästchentürme aufgefasst, ohne dass sich in deren Darstellung für sie damit gleichzeitig die *Summe* aufeinander folgender Beispielzahlen abbildet. So ist es nicht verwunderlich, dass die Schülerin Frieda das Operatorzeichen · zwischen die einzelnen Kästchentürme in ↑ fr10 setzt.

lu10

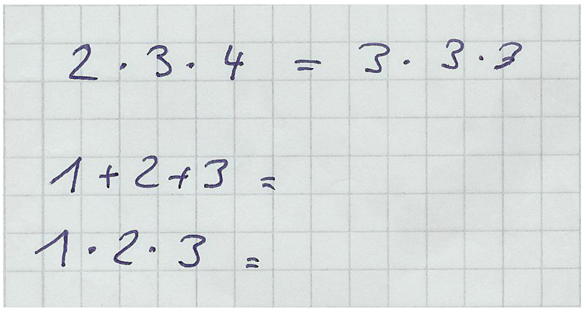


Abb. 3.10: Schüler Ludwigs dritter Teil seiner Aufzeichnungen

Schüler Ludwig widerlegt die modifizierte Behauptung durch Ausrechnen

Der Schüler Ludwig versucht sich noch an den Aufgaben $2 \cdot 3 \cdot 4$ und $3 \cdot 3 \cdot 3$ (↑ lu10 in ↑ Abb. 3.10), berechnet diese aber zunächst falsch, weil ihm die Definition der Multiplikation mehrerer Faktoren nicht geläufig ist. Mit Hilfe des Interviewers kommt er dann auf die differierenden Ergebnisse 24 und 27 und stellt dadurch fest, dass die Behauptung nur für die Addition gilt. Damit bleibt also letzlich unklar, ob er die Regel der Konstanz der Summe wirklich subjektiv realisiert hat. Dieser Eindruck verstärkt sich noch bei der anschließenden Behandlung des Aufgabenpaars $1 + 2 + 3$ und $1 \cdot 2 \cdot 3$:

25:36	Lu	160	*hmm .. bei Plusaufgaben wär's so, aber ich glaub, bei den Malaufgaben ist es nicht so* (schaut den Interviewer an)
25:43	I	161	*ach so, okay .. ja, ich mein, ich hab ja natürlich auch so* (nimmt den Stift und schreibt zwei weitere Aufgaben in ↑ lu10 auf) *.. ah, da geht's auch nicht,* $1 + 2 + 3$ (fügt = an) *und* $1 \cdot 2 \cdot 3$ (fügt erneut = an) *wie ist es denn da'*
26:03	Lu	162	(nimmt den Stift wieder in die Hand) *also* $1 \cdot 2$*, das ist* 2 *und* $2 \cdot 3$ *ist* 6*, emm .. ich denk 'mal, da würd's dann, bei diesen kleinen Zahlen auch gehen, so*
26:16	I	163	*mm-mmh*
26:18	Lu	164	*ja .. ja, aber jetzt nicht bei ..* (deutet vorübergehend auf den Term $1 \cdot 2 \cdot 3$) $2\ \cdot$*, also* $2 \cdot 3$*, mmh,* $\cdot\ 4$*, zum Beispiel* (schaut den Interviewer an)

3.1.8 Ergebnisse

Die Analysen über das beispielgebundene Beweisen des Schülers Ludwig und der Schülerin Frieda bilden in ihrem arithmetischen und ikonischen Zugang zum gegensinnigen Verändern einen Kontrast (↑ Abs. 3.1.3). Insgesamt gesehen erfolgten die eingangs gestellten Forschungsfragen aus vornehmlich theoretischer, praktischer und sprachlicher Perspektive (I, III, IV) und konzentrierten sich auf folgende Forschungsbereiche (vgl. ↑ Abs. 3.1.2):

- Indizien subjektiver Realisierung bei Regelverbänden
- Prozess fortschreitender Verallgemeinerung
- Einsatz von Darstellungsmitteln
- Begriffsbildung bei fortschreitender Verallgemeinerung

Die Analyseergebnisse hierzu werden im Folgenden zunächst schülerbezogen dargestellt. Im Resümé wird davon in Hinblick auf den Gesamtzusammenhang der Arbeit abstrahiert (↑ Abs. 3.1.9).

Hauptanalyse (Ludwig)

sprachlich-begriffliche Präzisierung bei argumentativer Ausdifferenzierung

Das beispielgebundene Beweisen zeigt sich bei dem Schüler Ludwig in fortschreitender Verallgemeinerung. Dieser Prozess geht auf Seiten des Schülers mit einer sprachlich-begrifflichen Präzisierung und argumentativer Ausdifferenzierung einher, während der Interviewer dies durch schrittweise verallgemeinerte Aufgabenstellungen forciert. Es kann beobachtet werden, dass die Sprache des Schülers Ludwig der jeweiligen Verallgemeinerungsebene des beispielgebundenen Argumentgefüges folgt. Dadurch gelingt ihm aber auch inhaltlich eine allmähliche subjektive Realisierung und Manifestierung des Beweises. Dessen Idee bleibt dem Schüler Ludwig anfangs wohl noch deshalb latent, da die jeweilige Behauptung des Regelverbands während seiner zahlreichen Entdeckungen noch nicht im Raum steht. Da sich die beiden Gesprächspartner jeweils konkret auf vorliegende Aufgaben beziehen, ist die Gefahr im weiteren Verlauf aber gering, dass sie sich hinsichtlich der mehr oder weniger explizierten Behauptungen missverstehen. Fraglich bleibt jedoch, ob der Schüler das Teilargument der Konstanz der Summe subjektiv realisiert hat.

größerenteils subjektive Realisierung des Beweises

Der Verlauf des Gesprächs mit dem Schüler Ludwig stützt diese Einschätzung:

subjektive Realisierung des gegensinnigen Veränderns

teils mathematiknahe, dynamische Sprechweise

implizit bleibende Behauptung

- Die fortschreitende Verallgemeinerung wird durch die rasche Bildung einer Ausgleichsvorstellung initiiert (↑ Abs. 3.1.4): Von dem überraschenden Resultat der Gleichheit ausgehend, schließt der Schüler Ludwig abduktiv auf die Regel des gegensinnigen Veränderns. Zum Beschreiben dieser Regel wählt er beispielsweise mathematiknahe Sprechweisen (*dann* . . . (...) *wenn* . . . in Äußerung Lu 16), drückt Handlungen aus (*wegtun*, *zutun* in Äußerung Lu 16) und formuliert Ergebnisse (*dann gleicht sich das eigentlich so aus* in Lu 14) inhaltlich. Wenn er dabei auf die konkreten Beispielzahlen deutet, benennt er oft bloß deren Position (*hier*, *da* ab Äußerung Lu 12), nicht die Beispielzahlen selbst. Der Schüler Ludwig entdeckt also zunächst mit latenter Beweisidee, indem er das gegensinnige Verändern als einen Teil des Argumentgefüges ansieht, ohne dass er die eigentliche Behauptung explizit aufgestellt hat.

lu1
lu2
lu3
lu4
lu5
lu6

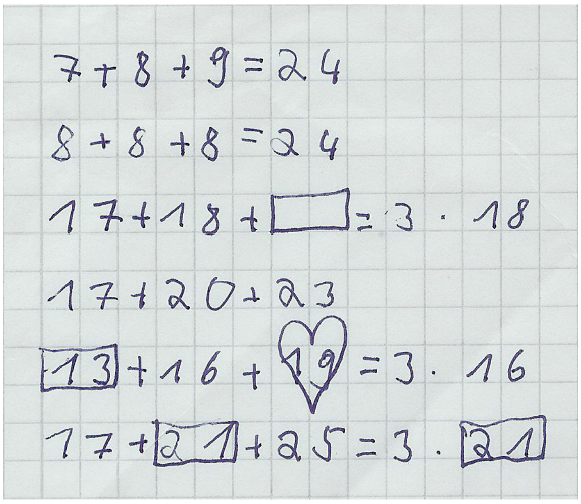


Abb. 3.11: Schüler Ludwigs erster Teil seiner Aufzeichnungen

Entdecken mit latenter Beweisidee unter fortschreitender Verallgemeinerung

- Anschließend erhält der Schüler Ludwig mit den als Variablenzeichen fungierenden Platzhaltern ☐ und ♡ die Möglichkeit, seine Ausgleichsvorstellung an weiteren Beispielen zu festigen, welche (etwa hinsichtlich der Äquidistanz oder der Reihenfolge) über die ursprüngliche, nicht explizierte Behauptung für die Summe dreier aufeinander folgender Zahlen hinausgehen (↑ Abs. 3.1.6). Er führt weiterhin Entdeckungen mit latenter Beweisidee, diese haben aber bereits einen größeren Allgemeinheitsgrad.

paradigmatisches Beschreiben und Beweisen von Behauptungen

- Ausgehend von der jeweils vorgegebenen Aufgabenstellung, beschreibt und beweist der Schüler Ludwig die verallgemeinerten Behauptungen im weiteren Verlauf paradigmatisch. Auf die Fragen nach der Allgemeingültigkeit der paradigmatisch formulierten Behauptung für drei äquidistante Zahlen in den Äußerungen I 81, I 83 und I 85 hin präzisiert der Schüler Ludwig Voraussetzungen der Behauptung (*bei Plusaufgaben, und man muss schon immer gucken, wie die Zahlen zusammenhängen* in den Äußerungen Lu 84 und Lu 86). Diese Präzisierung kann als Indiz dafür angesehen werden, dass der Schüler Ludwig den Beweis in seiner Tragweite hinsichtlich Äquidistanz, Reihenfolge und Anzahl der Summanden zunehmend subjektiv realisiert. Auch bietet er ein Verfahren an, wie die mittelgroße Zahl bei Vorgabe der kleineren und größeren Zahl zu ermitteln ist, um die verallgemeinerte Behauptung an konkreten Beispielzahlen zu prüfen.

Entwicklung eines Verfahrens zur Ermittlung fehlender Summanden

weitere Ausdifferenzierung der Sprechweise

- Die fortschreitende Verallgemeinerung auf fünf Summanden bereitet dem Schüler Ludwig keinerlei Schwierigkeiten. Auch hier kommt es zu einer Ausdifferenzierung seiner Sprechweise beim Beweisen (*Mittelzahl, und Zahl, die in der Mitte ist* in Äußerung Lu 120), um der allgemeiner werdenden Behauptung und deren Beweis Rechnung zu tragen. Fraglich bleibt, ob der Schüler Ludwig die Regel der Konstanz der Summe wirklich subjektiv realisiert hat. Seine reichhaltige, die Addition vermittelnde Ausdrucksweise (*wegtun*, *nehmen* bzw. *abziehen* und *hinzutun*, *plusnehmen* bzw. *dazurechnen* in verschiedenen Äußerungen aus ↑ Abs. 3.1.6) ist dafür nur ein Indiz.

fraglich bleibende subjektive Realisierung der Konstanz der Summe

- ◦ Ob der Schüler Ludwig das Argument der Konstanz der Summe wirklich subjektiv realisiert hat, lässt sich auch am versuchten, die ursprüngliche Behauptung modifizierenden Operatorwechsel von + zu · nicht erkennen (↑ Abs. 3.1.7). Dem Schüler Ludwig ist nämlich die fortgesetzte Multiplikation nicht geläufig gewesen. Er kommt zu dem ohne Überzeugung vorgetragenen Ergebnis *bei Plusaufgaben wär's so, aber ich glaub, bei den Malaufgaben ist es nicht so* in Äußerung Lu 160. Hier hätte der Interviewer durchaus geschickter verfahren können.

Kontrastanalyse (Frieda)

fragwürdiger Einsatz der Veranschaulichung

Identifizierung von arithmetischer mit ikonischer Darstellung

Ausblendung der Additivität der Behauptung

Der Interviewer verwendet von Beginn an das Darstellungsmittel der Kästchentürme, um die arithmetische Behauptung geometrisch zu veranschaulichen (↑ Abs. 3.1.5). Dessen Einsatz misslingt insofern, als dass es der Schülerin Frieda zwar das gegensinnige Verändern begreiflich macht, sich jedoch für sie als bloßer Ersatz für Beispielzahlen herausstellt. Die Aufmerksamkeit der leicht aufgeregten Schülerin Frieda richtet sich somit hauptsächlich darauf, die Beispielzahlen schematisch in Kästchentürme zu überführen und beides miteinander zu identifizieren. Dies zeigen die gesetzten Malpunkte zwischen den aufgezeichneten Kästchentürme im vierten Teil ihrer Aufzeichnungen (↑ Abb. 3.9) und ihre abschließende, überraschend reflektierte Bemerkung (*mmh .. da man, achtet, beim Zeichnen achtet man nicht auf die, emm, auf die <u>Zeichen</u>, man achtet nur auf die <u>Zahlen</u> beim Zeichnen* in Äußerung Fr 142). Die frühe Visualisierung könnte die Schülerin Frieda also auch am Wahrnehmen daran gehindert haben, dass es sich bei der Behauptung um eine additive Aussage handelt.

kaum fortschreitende Verallgemeinerung der Behauptung

Entwicklung eines Algorithmus zum gegensinnigen Verändern

Eine fortschreitende Verallgemeinerung der geometrisch veranschaulichten Behauptung findet kaum statt. Bei der Durchsicht des gesamten Transkripts fällt auf, dass die Schülerin Frieda zwar stets viele weitere Zahlentripel nennen kann, dabei aber den Bezug zur jeweils fraglichen Behauptung vermissen lässt. Sie weiß zunächst nicht, wie die ursprüngliche Behauptung am Zahlentripel (7, 8, 9) zu begründen ist. Dann bietet sie jedoch einen korrekten Algorithmus zum gegensinnigen Verändern dreier aufeinander folgenden Summanden an und überführt diesen in den geometrischen Kontext. Dieses Rechenverfahren hält die Schülerin Frieda für die Begründung der Allgemeingültigkeit der Behauptung an weiteren Beispielzahlen. Insofern hat die Schülerin immerhin ein Rechenverfahren gefunden, mit dem sie die Gültigkeit der Behauptung für weitere Beispielzahlen bestätigen und geometrisch deuten kann.

3.1.9 Resümé

Mit den schülerbezogenen Ergebnissen im Hintergrund sollen nun die Forschungsfragen aus ↑ Abs. 3.1.2 soweit als möglich beantwortet werden.

- Indizien subjektiver Realisierung bei Regelverbänden

  Welche Indizien sprechen dafür und dagegen, dass Schüler Regelverbände (hier: hinsichtlich Differenz, Reihenfolge und Anzahl der betrachteten Zahlzeichen und der Operation +) als verschieden allgemein zu betrachtende Argumentgefüge subjektiv realisieren? Welche Einzelargumente und Regeln (hier: gegensinniges Verändern, Konstanz der Summe, Definition der Multiplikation als fortgesetzte Addition) manifestieren Schüler in welchem Allgemeinheitsgrad, und welche bleiben latent?

Beweisen an (selbst gewählten) qualitativ verschiedenen Beispielen

Der Experte prüft die Frage, ob ein Schüler das je Allgemeingültige eines Teilarguments subjektiv realisiert hat, auf der Grundlage der Manifestationen des Schülers selbst induktiv. Begründet der Schüler alle Regeln des Regelverbands an qualitativ verschiedenen Beispielen, so ist dies zunächst einmal ein Zeichen für dessen weitgehende subjektive Realisierung. Fallen Begründungen für Teilargumente zunehmend kürzer oder ganz aus, so kann dies an der Ähnlichkeit der verwandten Teilargumente liegen. In diesem Fall kann der Allgemeinheitsgrad variiert werden, um festzustellen, ob der Schüler bloß das wiederkehrende Argument nicht noch einmal nennt, oder ob er zur Begründung des je Allgemeineren es nicht zu modifizieren fähig ist, und es in diesem Sinne latent wird. Wählt der Schüler regel- und allgemeinheitsbezogen selbst weitere passende Beispiele aus, um die zugehörige Behauptung an weiteren Beispielen zu begründen, deutet dies auf dessen Erkennen des je Allgemeineren im Besonderen hin.

- Prozess fortschreitender Verallgemeinerung

  Welche Vor- und Nachteile bietet die fortschreitende Verallgemeinerung in Bezug auf das beispielgebundene Beweisen, wenn der Schüler die ursprüngliche Behauptung des betrachteten Regelverbands selbst entdeckt?

fraglicher Allgemeinheitsgrad

Eine Schwierigkeit besteht bei fortschreitender Verallgemeinerung in der Unsicherheit der jeweils im Raum stehenden Behauptung, da das beispielgebundene Argumentgefüge mehrere Verallgemeinerungsebenen aufweist. Dies ließe auf die damit unspezifisch gewordenen Frage *Gilt das immer?* des Lehrenden die unausgesprochene Gegenfrage *Was gilt immer?* provozieren, wenn nicht der jeweilige sozial geteilte Kontext die Gesprächspartner an eine Verallgemeinerungsebene mehr oder weniger bindet. Eine Möglichkeit, diesem Problem zu begegnen, liegt in der groben Zuordnung von Aufgabenstellungen zu einer Verallgemeinerungsebene.

Formulierung der Behauptung

Im vorgenannten Zusammenhang steht auch das Entdecken mit latenter Beweisidee, welches sich ebenso über mehrere Verallgemeinerungsebenen erstrekken kann, bevor die eigentliche Behauptung formuliert wird. Dabei besteht einerseits die Gefahr bloß unsystematisch geführter Entdeckungen beliebiger Behauptungen. Andererseits können Behauptungen durch Entdeckungen unterschiedlichen Allgemeinheitsgrads präzisiert werden. Durch rechtzeitig eingeforderte Versprachlichung der jeweils betrachteten Behauptung kann der Lehrende den Prozess fortschreitender Verallgemeinerung hinsichtlich des beispielgebundenen Beweisens rahmend begleiten.

- Einsatz von Darstellungsmitteln

  Sind Darstellungsmittel und ikonische Darstellungen (wie Steckwürfel oder gezeichnete Kästchentürme) ein geeignetes Mittel, um das beispielgebundene Beweisen (wie hier beim gegensinnigen Verändern) zu befördern?

Problematik von visual proofs

Auch wenn fraglich ist, ob die beiden vorstehenden Analysen als typisch gelten können, kann vermutet werden, dass etwa bei der vorhandenen Aufgabenstellung der Einsatz von Platzhaltern hinsichtlich des beispielgebundenen Beweisens wohlmöglich mehr Erfolg verspricht als die unterstützende geometrische Darstellung. Theoretisch kann diese These dadurch untermauert werden, dass Schüler zum Führen von *visual proofs* (↑ Abs. 1.2.4) die Übertragung zwischen arithmetischen und geometrischen Kontexten erst erlernen müssen und darüber möglicherweise weniger Aufmerksamkeit auf das eigentliche beispielgebundene Beweisen richten. Aus mathematischer Sicht stellt sich zumal bei fortschreitender Verallgemeinerung auch bei anderen Aufgabenbeispielen die Frage, in wie weit geometrische Anschauungen mit allgemeiner werdenden Behauptungen Schritt halten können.

- Begriffsbildung bei fortschreitender Verallgemeinerung

  Wie wandelt sich die sprachliche Ausdrucksweise bei Schülern unter fortschreitender Verallgemeinerung? Welche Begriffe und Formulierungen verwendet der Schüler? Verhelfen dem Schüler präzisere Begriffe zum beispielgebundenen Beweisen verallgemeinerter Behauptungen?

subjektive Realisierung und sprachlich-begriffliche Präzisierung

Die subjektive Realisierung und Manifestierung des Beweises kann bei fortschreitender Verallgemeinerung der Behauptung dadurch gelingen, dass der Experte an den jeweiligen Verallgemeinerungsgrad angepasste Beispiele konstruiert und dem Schüler dadurch die Tragweite der jeweiligen Behauptung zu erkennen ermöglicht. Dies kann eine entsprechend sprachlich-begriffliche Präzisierung auf Seiten des Schülers hervorrufen. Beispielgebundenem Beweisen scheint also eine Verschränkung von inhaltlicher Verallgemeinerung und Begriffsbildung besonders förderlich zu sein.

3.2 Beispielgebundenes Beweisen als changierender Prozess

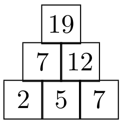
Einleitung und Übersicht

In dieser zweiten Analyse steht der changierende Charakter beispielgebundenen Beweisens im Vordergrund. Mit den Zahlen- oder Rechenmauern wird ein übliches, in allen Klassenstufen der Grundschule anzutreffendes Darstellungsmittel für die Addition (resp. Subtraktion) gewählt. Im Folgenden wird zunächst eine mathematische Analyse zum beispielgebundenen Beweisen eines Regelverbands an Zahlenmauern geboten. Dies dient der Vorbereitung der Interviews mit drei Grundschülerinnen. In der sich anschließenden Analyse der Schülerexperimente soll nicht nur gezeigt werden, welche Indizien für und gegen die subjektive Realisierung des Beweises als beispielgebundenes Argumentgefüge sprechen, sondern auch, wie unterschiedlich der Prozess beispielgebundenen Beweisens zwischen induktivem Prüfen und formalem Beweisen bei verschiedenen Schülerinnen verlaufen kann. Ferner wird untersucht, wie sich dabei deren sprachliche Ausdrucksmöglichkeiten zur Darstellung des Allgemeingültigen entwickeln.

3.2.1	*Mathematische Analyse*	Kl. 4	Zahlenmauern
		Beh.	Wenn bei einer Dreier-Zahlenmauer der Mittelstein um den Wert 1 erhöht wird, dann erhöht sich der Deckstein um den Wert 2.
3.2.2	*Forschungs* *-perspektiven* *-bereiche* *-fragen*	I II IV	○ Indizien subjektiver Realisierung bei Regelverbänden ○ Verläufe beispielgebundenen Beweisens ○ Wandlung des sprachlichen Ausdrucks beim Beweisen ○ Rolle von Beispielzahlen in Darstellungsmitteln
3.2.3	*Kontext*	Za/So/Ay	Einübung der additiven Grundregel, Benennung von Dreier-Zahlenmauern, Erhöhung von Ecksteinen
3.2.4	*Hauptanalyse*	Za	Changieren beispielgebundenen Beweisens: ○ Schwanken zwischen Phänomen und logischer Erklärung ○ Deutungsoffenheit bezüglich subjektiver Realisierung ○ Abstrakter werdende Sprechweise bei Punktnotation ○ Interpretation changierenden doppeldeutigen Beweisverhaltens
3.2.5	*Kontrastanalyse*	So	Stetiges Abstrahieren
3.2.6	*Kontrastanalyse*	Ay	Abstrakt gehaltene Sprache
3.2.7	*Ergebnisse*	Za So/Ay	Verlaufsbetrachtung Summarische Betrachtung
3.2.8	*Resümé*		zu den Forschungsperspektiven, -bereichen und -fragen

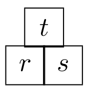
3.2.1 Mathematische Analyse: Zahlenmauern

Diese Analyse ist relativ technisch gehalten und dient der mathematischen und didaktischen Vorbereitung auf die nachstehenden Interviews. Sie soll von der Reichhaltigkeit eines Regelverbands von Behauptungen an Zahlenmauern Kenntnis geben.



Beispiel einer Zahlenmauer

Der mathematische Gegenstand dieser Analyse sind Behauptungen an Zahlenmauern hinsichtlich der Erhöhung einzelner Grundsteine. Dabei wird der Kürze halber auch im Folgenden von der Erhöhung von Steinen statt von der Erhöhung von Beispielzahlen in Platzhaltern gesprochen, welche als Steine ikonisch dargestellt sind (siehe nebenstehende Fig.). Eine Zahlenmauer der Höhe n ist definitionsgemäß ein dreieckiges Schema aus $n \cdot (n+1)/2$ Steinen, dessen längste Zeile aus n Grundsteinen bestehen, und dessen kürzeste Zeile lediglich den Deckstein aufweist (die genauen Bezeichnungen der Steine können variieren). Die Steine fungieren dabei als Platzhalter für beliebige Beispielzahlen, welche sukzessive nach einer operativen Grundregel errechnet werden. Die nachstehenden Fig. zeigen etwa Zweier-, Dreier- und Vierer-Zahlenmauern. Von Belang sind im Folgenden nur nach oben zulaufende Zahlenmauern der Addition, deren Grundsteine sich unten befinden.



additive Grundregel (GR)

Zweier-Zahlenmauern sind in allen Zahlenmauern der Höhe $n > 1$ enthalten. Anhand der Zweier-Zahlenmauer (r, s, t) in der vorstehenden Abb. lässt sich die additive Grundregel (GR) einer jeden Zahlenmauer definieren: Man ermittelt den Wert t eines Steins (des Decksteins) für zwei andere Steine (die beiden Grundsteine, hier zugleich Ecksteine) mit den Werten r und s, indem man deren Werte addiert: $t := r + s$. Diese additive Grundregel muss in einem Schülergespräch zu Beginn als Definition vereinbart werden, da im Prinzip etwa auch multiplikative Zahlenmauern denkbar wären.

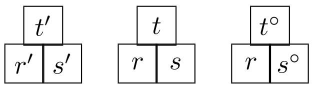
Zweier-Zahlenmauern

Erhöhung eines Grundsteins

In Vorbereitung auf weitere Behauptungen des Regelverbands an Zahlenmauern wird zunächst eine elementare Behauptung zur Erhöhung eines Grundsteins einer Zweier-Zahlenmauer betrachtet:

Erste Behauptung	Wenn bei einer Zweier-Zahlenmauer genau ein Grundstein um den Wert 1 erhöht wird, dann erhöht sich auch der Deckstein um den Wert 1.

Für einen formellen Beweis wird die Definition der Erhöhung (DE) eines Steins x um den Wert 1 durch $x^\circ := x + 1$ verwendet.



In den vorstehenden Zahlenmauern wird von der mittleren Zahlenmauer (r, s, t) ausgegangen. Durch die Termersetzungen (TE) $r' := r, s' := s^\circ$ sind die Voraussetzungen der ersten Behauptung in der Weise erfüllt, dass nur der rechte Grundstein s' der linken Zahlenmauer (r', s', t') um den Wert 1 erhöht wird. Es soll bewiesen werden, dass $t' = t^\circ$ gilt, m.a.W., dass die linke Zahlenmauer mit der rechten Zahlenmauer übereinstimmt. Ein formeller Beweis dafür ist gegeben durch

$$t' \overset{\mathrm{GR}}{=} r' + s' \overset{\mathrm{TE}}{=} r + s^\circ \overset{\mathrm{DE}}{=} r + (s+1) \overset{\mathrm{AG}}{=} (r+s) + 1 \overset{\mathrm{GR}}{=} t + 1 \overset{\mathrm{DE}}{=} t^\circ$$

Dabei wird von der additiven Grundregel (GR), den Termersetzungen (TE), der Definition der Erhöhung (DE) und dem allgemein bekannten Assoziativgesetz (AG) Gebrauch gemacht.

Bezug zum operativen Beweisen nach Wittmann [1985]

Wittmann (1985) dürfte bei der vorstehend bewiesenen Behauptung von einer Operation sprechen, welche nach deren elementarem Beweis nun zu operativen Beweisen von Behauptungen an komplizierteren Zahlenmauern sukzessive eingesetzt werden kann. In der Tat lassen sich operative Beweise nach ↑ Abs. 1.2.3 als Sonderfälle beispielgebundener Beweise auffassen, die zu formalen Beweisen entwickelt werden können. Als Argumentgefüge ergibt sich für die Operation der Erhöhung des rechten Grundsteins um den Wert 1 das folgende Toulmin-Schema:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{t' := r' + s'} \arrow[r, "\boxed{\mathrm{TE}}"'] & \boxed{t' = r + s^\circ} \arrow[r, "\boxed{\mathrm{DE}}"'] & \boxed{t' = r + (s+1)} \arrow[r, "\boxed{\mathrm{AG}}"'] & \boxed{t' = (r+s) + 1} \arrow[r, "\boxed{\mathrm{GR}}"'] & \boxed{t' = t + 1} \arrow[r, "\boxed{\mathrm{DE}}"'] & \boxed{t' = t^\circ}
\end{tikzcd}$$

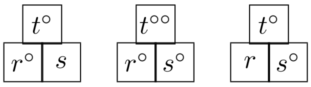
oder als verkürzte Darstellung (Regelverbund nach ↑ Abs. 1.4.2)

$$\begin{tikzcd}
\boxed{t' := r' + s'} \arrow[r, "\boxed{\mathrm{GR, TE, DE, AG}}"'] & \boxed{t' = t^\circ}
\end{tikzcd}$$

In der obigen Fig. der drei Zahlenmauern kann die rechte Zweier-Zahlenmauer als graphische Darstellung der Erhöhungsoperation im Sinne der obigen Behauptung angesehen werden.

Erhöhung zweier Grundsteine

Ähnliche Ausführungen gelten für alle drei elementaren Erhöhungsoperationen:



Dabei ist $t^{\circ\circ} := (t^\circ)^\circ$ sukzessive definiert, so dass $t^{\circ\circ} = (t+1)+1 = t+2$. Entsprechend kann bewiesen werden:

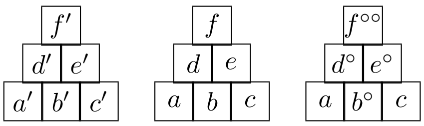
Zweite Behauptung	Wenn bei einer Zweier-Zahlenmauer beide Grundsteine um den Wert 1 erhöht werden, dann erhöht sich der Deckstein um den Wert 2.

Im zugehörigen formellen Beweis wird beim Übergang von $t' = (r+1)+(s+1)$ zu $t' = (r+s)+2$ zusätzlich zum Assoziativgesetz das Kommutativgesetz (KG) verwendet.

Dreier-Zahlenmauern

Erhöhung des Mittelsteins

Bei den Dreier-Zahlenmauern könnten die einzelnen Steine zu Beweiszwecken wie in der nachstehenden Fig. bezeichnet werden. Diese Anordnung wird auch in den folgenden Einzelfallstudien benutzt, jedoch werden dann Beispielzahlen anstelle von Variablenzeichen eingetragen. Umgangssprachlich kann von den Ecksteinen a und c, vom Mittelstein b, vom linken und rechten Mittelstein d und e sowie vom Deckstein f gesprochen werden.



Es lässt sich folgende Behauptung zur Erhöhung des Mittelsteins beweisen:

Dritte Behauptung	Wenn bei einer Dreier-Zahlenmauer der Mittelstein um den Wert 1 erhöht wird, dann erhöht sich der Deckstein um den Wert 2.

Dem Beweis dient ein operatives Argumentgefüge, dessen elementare Argumente aus einer als Kompositum von Zweier-Zahlenmauern begriffenen Dreierzahlenmauer resultieren:

$$\begin{array}{c} \boxed{f^{\circ\circ}} \\ \boxed{d^\circ}\boxed{e^\circ} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{d^\circ} \\ \boxed{a}\boxed{b^\circ} \end{array} \quad \perp \quad \begin{array}{c} \boxed{e^\circ} \\ \boxed{b^\circ}\boxed{c} \end{array}$$

Zusammengenommen finden sich diese Zweier-Zahlenmauern als rechte Dreier-Zahlenmauer in der Fig. weiter oben wieder. Durch eine entsprechende Darstellung kann die Erhöhung genau eines Ecksteins bei Dreier-Zahlenmauern wie folgt gefasst werden:

$$\begin{array}{c} \boxed{f^\circ} \\ \boxed{d^\circ}\boxed{e} \\ \boxed{a^\circ}\boxed{b}\boxed{c} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \boxed{f^\circ} \\ \boxed{d}\boxed{e^\circ} \\ \boxed{a}\boxed{b}\boxed{c^\circ} \end{array}$$

Die zugehörige Behauptung lautet wiederum:

Vierte Behauptung	Wenn bei einer Dreier-Zahlenmauer genau ein Eckstein um den Wert 1 erhöht wird, dann erhöht sich auch der Deckstein um den Wert 1.

Der Beweis ergibt sich wiederum durch sukzessive Anwendung der ersten Behauptung für Zweier-Zahlenmauern.

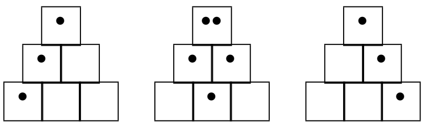
Erhöhungen eines Grundsteins um den Wert m

Erhöhung des Grundsteins um einen beliebigen Wert

Wird bei den betrachteten Zahlenmauern die Erhöhung eines Grundsteins allgemeiner mit $x^\bullet := x + m$ um den Wert m definiert, so können die folgenden Behauptungen ganz ähnlich bewiesen werden, wenn überall 1 durch m bzw. $^\circ$ durch $^\bullet$ ersetzt wird:

Erste Behauptung	Wenn bei einer Zweier-Zahlenmauer genau ein Eckstein um den Wert m erhöht wird, dann erhöht sich auch der Deckstein um den Wert m.
Zweite Behauptung	Wenn bei einer Zweier-Zahlenmauer beide Grundsteine um den Wert m erhöht werden, dann erhöht sich der Deckstein um den Wert $2m$.
Dritte Behauptung	Wenn bei einer Dreier-Zahlenmauer der Mittelstein um den Wert m erhöht wird, dann erhöht sich der Deckstein um den Wert $2m$.
Vierte Behauptung	Wenn bei einer Dreier-Zahlenmauer genau einen Eckstein um den Wert m erhöht wird, dann erhöht sich auch der Deckstein um den Wert m.

Graphisch lassen sich die Behauptungen für Dreier-Zahlenmauern ganz ähnlich wie oben veranschaulichen und schließlich als Beweismittel einsetzen. Dabei können Variablenzeichen weggelassen werden:



Grundschüler dürften mit solchen Zahlenmauern in reiner Punktnotation nicht leicht zurechtkommen.

Höhe der Zahlenmauern

Variation der Höhe der Zahlenmauern

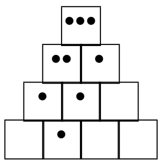
Schließlich kann noch die Höhe der Zahlenmauer variiert werden. Die erste Behauptung lässt sich weiter verallgemeinern und leicht beweisen:

Erste Behauptung	Wenn bei einer Zahlenmauer der Höhe m genau ein Eckstein um den Wert n erhöht wird, dann erhöht sich der Deckstein um den Wert n.

Die volle Allgemeinheit hinsichtlich der Erhöhung eines einzigen Grundsteins liefert die

Allgemeine Behauptung	Wenn bei einer Zahlenmauer der Höhe n der $k$te Grundstein um den Wert m erhöht wird, dann erhöht sich der Deckstein um den Wert $\binom{n-1}{k-1}m$.

Dabei ist $k \in \{1, ..., n\}$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Etwa erhöht sich bei einer Vierer-Zahlenmauer ($n = 4$) der Deckstein um den Wert $3m$, wenn genau einer der mittleren Grundsteine ($k = 2$ oder $k = 3$) um m erhöht wird. Ikonisch kann dies wie folgt dargestellt werden:



Entsprechend erhöht sich der Deckstein einer Fünfer-Zahlenmauer um $\binom{5-1}{3-1}m = \binom{4}{2}m = 6m$, wenn der mittlere Grundstein ($k = 3$) um den Wert m erhöht wird. Die obige ikonische Darstellung der Vierer-Zahlenmauer lässt sich links entsprechend um eine Treppe zu einer Fünfer-Zahlenmauer derart ergänzen, dass die Punkte $\bullet$ symmetrisch angeordnet sind und der Deckstein in der fünften Zeile 6 Punkte trägt.

3.2.2 Forschungsperspektiven, -bereiche und -fragen

Forschungsperspektiven dieser Einzelfallstudie

Thema dieser Einzelfallstudie ist der changierende Charakter beispielgebundenen Beweisens. Die Forschungsbereiche dieser Einzelfallstudie werden aus folgenden Perspektiven entwickelt (vgl. ↑ Kap. 2.1):

I	Theoretische Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen i.e.S. (in Latenz, subjektiver Realisierung und Manifestierung des beispielgebundenen Beweises als Sinnstruktur)
II	Kategoriale Perspektive	Induktives Prüfen $\leftarrow \cdots \rightarrow$ formelles Beweisen (beispielgebundenes Beweisen im Changieren zw. induktivem Prüfen und formalem resp. formellem Beweisen)
IV	Sprachliche Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen in Explikation des Allgemeingültigen am Besonderen (unter besonderer Berücksichtigung sprachlicher Aspekte)

Forschungsbereiche und Forschungsfragen

Von dieser Schwerpunktsetzung ausgehend, lassen sich mit Blick auf die Aufgabenstellungen nachstehende Fragen zu folgenden Forschungsbereichen stellen:

- Indizien subjektiver Realisierung bei Regelverbänden

  Welche Indizien sprechen dafür und dagegen, dass eine Schülerin den hier thematisierten Regelverband (hinsichtlich der Position der Erhöhung, der Größe der Erhöhung und der Höhe der Zahlenmauer) als verschieden allgemein zu betrachtendes Argumentgefüge subjektiv realisiert hat? Reicht schon die begründete Kenntnis einer Grundregel (nach Wittmann, ↑ Abs. 1.2.3 eine Operation) aus, um einen Regelverband zu überblicken?

- Verläufe beispielgebundenen Beweisens

  Wie kann beispielgebundenes Beweisen von Schülern zwischen Latenz und subjektiver Realisierung des Beweises (resp. zwischen induktivem Prüfen und formalem Beweisen) konkret verlaufen? Stellt sich dies hauptsächlich als ein kontinuierlicher Prozess allmählicher Ablösung von den betrachteten Beispielen dar, welche mit der schrittweisen Verallgemeinerung der Behauptung im betrachteten Regelverband einhergeht? Oder sind Brüche oder Rückschritte im jeweiligen Erkenntnisweg feststellbar?

- Wandlung des sprachlichen Ausdrucks beim Beweisen

  Wie ändert sich die Sprache von Schülern während ihres beispielgebundenen Beweisens (an den Zahlenmauern)? Inwiefern kommt darin der changierende Charakter beispielgebundenen Beweisens zum Ausdruck? Welche Bezeichnungen und Formulierungen verwenden oder übernehmen Schüler, um das bald konkreter, bald allgemeiner Werdende (an den Zahlenmauern) auszudrücken? Wie wandelt sich die sprachliche Ausdrucksweise von Schülern wiederum bei weiter fortschreitender Verallgemeinerung im betrachteten Regelverband?

- Rolle von Beispielzahlen in Darstellungsmitteln

  Von welcher Art sind die gewählten Zahlenmauern bei changierenden Übergängen zwischen Latenz und subjektiver Realisierung des Beweises? Ist es den Schülern möglich, sich die Beispielzahlen in den Steinen der Zahlenmauern in dem Sinne wegzudenken, dass sie darin beliebige (natürliche) Beispielzahlen erkennen? Werden die Zahlenmauern benutzt, um die Behauptung durch Ausrechnen induktiv zu bestätigen, oder um sie deduktiv zu begründen? Bedürfen die Schüler nach ihrer Darstellung des Beweises in formaler Sprache noch weiterer Zahlenmauern?

3.2.3 Kontext (Zaida, Sonja, Aya)

Aufbau des Interviews

Die Schülerinnen Zaida (Za), Sonja (So) und Aya (Ay) gehen in die 4. Klasse einer Grundschule. Der Interviewer (I) möchte mit ihnen die Zahlenmauern behandeln. Dabei geht er anhand der Vorlage (↑ Abb. 3.12) jeweils wie folgt vor:

- Einübung der additiven Grundregel (GR) und deren Begründung anhand der Zweier-Zahlenmauern im oberen Teil der Vorlage
- Benennung der Dreier-Zahlenmauern im mittleren Teil der Vorlage rechts
- Entdecken, Prüfen und Begründen der ersten Behauptung im unteren Teil der Vorlage sowie deren Formulierung im mittleren Teil der Vorlage links
- ggf. fortschreitendes Verallgemeinern der Behauptung bei Erhöhung eines Mittelsteins um einen Wert mittels einer weiteren Vorlage
- ggf. fortschreitendes Verallgemeinern der Behauptung bei höheren Zahlenmauern mittels eines weiteren Arbeitsblatts (s.u.)

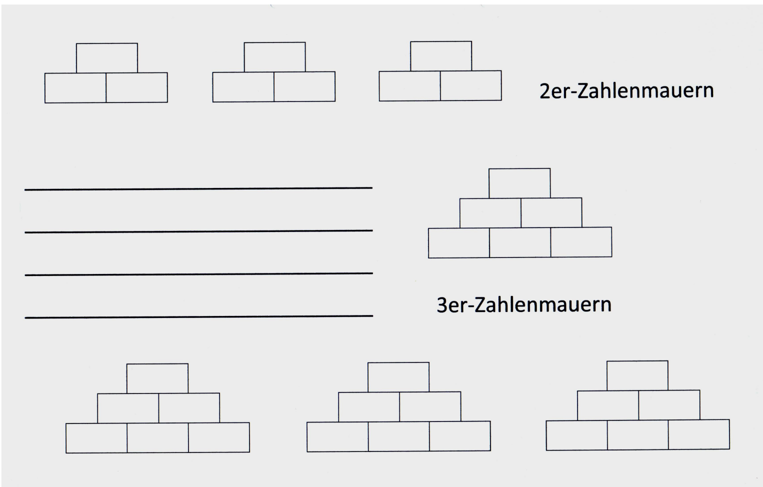
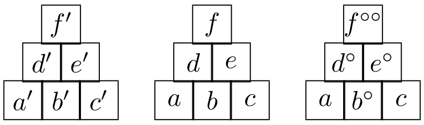


Abb. 3.12: Leere Vorlage

linke, mittlere und rechte Zahlenmauern

Hinsichtlich der Anordnung der Zahlenmauern geht der Interviewer ähnlich wie in der vorausgehenden mathematischen Analyse vor: Zunächst wird die jeweils mittlere Zahlenmauer unter Beachtung der bekannten Grundregel (GR) mit Beispielzahlen gefüllt. Anschließend wird in der linken Zahlenmauer ein Grundstein um einen jeweils festgelegten, aber beliebigen Wert erhöht und das resultierende Ergebnis beider Decksteine miteinander verglichen. Die rechte Zahlenmauer soll die linke Zahlenmauer mittels Punktnotation abbilden, so dass den Schülerinnen ein Vergleich zwischen mittlerer und rechter Zahlenmauer möglich ist:



Einführung der Punktnotation

Während den Schülerinnen die Grundregel (GR) an Beispielzahlen schon geläufig ist, dürfte ihnen deren Darstellung mittels der Punktnotation schwerer fallen. Der Interviewer erklärt den Schülerinnen daher zunächst, dass der Punkt eine Erhöhung eines Grundsteins um einen festgelegten Wert, zum Beispiel um 1, definiert. Nachdem die Schülerinnen die Grundregel (GR) als Operation vermöge der Punktnotation an den Zweier-Zahlenmauern eingeübt und verstanden haben, ist es an ihnen, deren Übertragbarkeit und Anwendung auf Dreier-Zahlenmauern zu untersuchen.

Themen der Interviewsequenzen

Im Folgenden wird das Interview der Schülerin Zaida hinsichtlich des changierenden Charakters beispielgebundenen Beweisens ausführlicher behandelt. Dies geschieht anhand der dritten Behauptung aus der mathematischen Analyse für $m = 1$ und für $m > 1$:

Dritte Behauptung	Wenn bei einer Dreier-Zahlenmauer der Mittelstein um den Wert m erhöht wird, dann erhöht sich der Deckstein um den Wert $2m$.

In den Interviewauszügen der Schülerinnen Sonja und Aya interessieren dann mehr die sprachlichen Aspekte beispielgebundenen Beweisens. Hierzu eignet sich die dritte Behauptung für $m > 1$ und ihre weitere Verallgemeinerung:

Allgemeine Behauptung	Wenn bei einer Zahlenmauer der Höhe n der $k$te Grundstein um den Wert m erhöht wird, dann erhöht sich der Deckstein um den Wert $\binom{n-1}{k-1}m$.

Dabei ist $k \in \{1, ..., n\}$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Für die Grundschule eignet sich neben der obigen Vierer-Zahlenmauer ($n = 4$) mit der Erhöhung eines Mittelsteins ($k = 2$ resp. $k = 3$) auch eine Zahlenmauer beliebiger Höhe n in Erhöhung eines Ecksteins ($k = 1$ resp. $k = n$).

3.2.4 Hauptanalyse (Zaida): Changieren beispielgebundenen Beweisens

Diese Hauptanalyse gliedert sich in mehrere Teile: Eingangs ist sich die Schülerin Zaida unsicher, ob die dritte Behauptung wirklich richtig ist, und sucht nach einer Erklärung. Dabei spricht sie die Behauptung nicht aus. In der Analyse bleibt auch deshalb offen, ob sie den Beweis der dritten Behauptung wirklich subjektiv realisiert hat. Im weiteren Verlauf wird die Punktnotation eingeführt. Dabei wird die Sprache der Schülerin Zaida allmählich abstrakter. Die Interpretation ihres Beweisverhaltens bleibt weiterhin unsicher. Schließlich äußert die Schülerin Zaida selbst Zweifel daran, ob sie die dritte Behauptung mit der Erhöhung des Mittelsteins um m anhand der Beispielzahlen 3 und um 10 wirklich bewiesen hat oder nicht.

Schwanken zwischen Phänomen und logischer Erklärung

Schülerin Zaida entdeckt eine falsche Behauptung

Nach Abschluss der Vorübung an den Zweier-Zahlenmauern und der Benennung der Steine in der Dreier-Zahlenmauer hat die Schülerin Zaida die Beispielzahlen 2, 4 und 7 in die untere Zeile der mittleren Dreier-Zahlenmauern auf dem ersten Arbeitsblatt eingetragen (↑ Abb. 3.13). Sie berechnet den linken und rechten Mittelstein zu 6 und 11 sowie den Deckstein zu 17. Den Interviewer interessiert nun die Erhöhung des Mittelsteins um den Wert $m = 1$ gemäß der dritten Behauptung aus der mathematischen Analyse.

07:17	I	49	*mmh, okay, emm, jetzt frag ich dich 'mal zuerst .. was ist, wenn du jetzt, emm, <u>hier</u> zum Beispiel* (deutet auf die unterste Reihe der linken Dreier-Zahlenmauer) 2, 5, 7 *hast, was ist dann mit dem Deckstein'*
07:32	Za	50	*der Deckstein würde sich wieder um einen erhöhen, so wie das Ergebnis <u>hier</u>* (deutet auf die mittlere Reihe in der mittleren Dreier-Zahlenmauer) *.. das würde sich dann auch um einen erhöhen*
07:40	I	51	*mm-mmh*
07:40	Za	52	*nee, warte, wenn <u>hier</u> aber 'ne* 5 *wäre* (deutet auf den Mittelstein der mittleren Dreier-Zahlenmauer), *müsste sich das Ergebnis <u>hier</u> auch um einen erhöhen* (deutet auf die Steine der mittleren Dreier-Zahlenmauer) *und der Deckstein eigentlich um <u>2</u>* (lächelt, lacht)
07:49	I	53	*aha, ja, und das ist .. ist das jetzt um <u>1</u> oder um <u>2</u>'*
07:52	Za	54	(schmunzelt) *um <u>2</u> insgesamt*

Schülerin Zaida korrigiert ihre Behauptung

Den vorstehenden Äußerungen der Schülerin Zaida lässt sich entnehmen, dass sie ihre Vermutung, der Wert des Decksteins würde sich bei Erhöhung des Grundsteins auch nur um 1 erhöhen, schnell verworfen hat: Zunächst scheint sie sich in Äußerung Za 52 auf ihre Erfahrung mit der in den Vorübungen einstudierten Grundregel zu beziehen. Schnell wird ihr jedoch klar, dass sie diese Grundregel im oberen Teil der Dreier-Zahlenmauer zweimal anzuwenden hat, und sich der Deckstein damit um den Wert 2 erhöht.

Schülerin Zaida scheint eine Behauptung entdeckt zu haben

Die Schülerin Zaida scheint die dritte Behauptung am vorliegenden Beispiel entdeckt zu haben, nach der sich der Deckstein um den Wert 2 erhöht, wenn der mittlere Grundstein um den Wert 1 erhöht wurde. Diese Behauptung hat sie in ihrer Allgemeinheit hinsichtlich beliebiger Einträge in den Grundsteinen der Dreier-Zahlenmauern aber weder formuliert noch bewiesen, sie ist noch im Beispiel gehalten. Insofern wäre es zu früh, der Sprechweise von ↑ Abs. 1.3.4 zu folgen, die Schülerin habe die Behauptung mit latenter Beweisidee entdeckt. Die Schülerin hat jedoch ihre frühere Behauptung korrigiert.

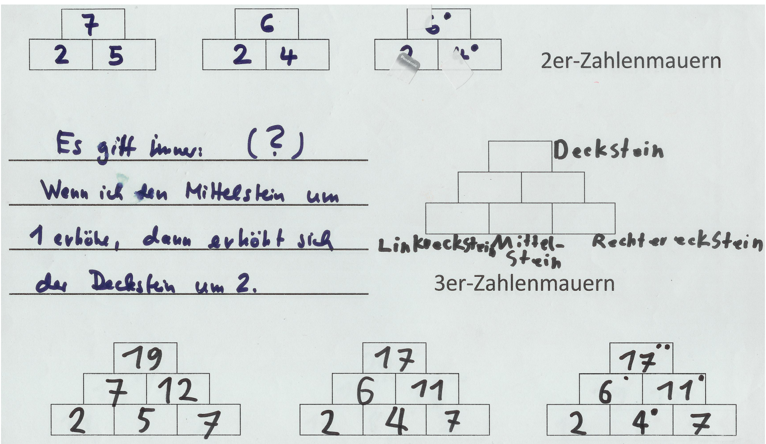


Abb. 3.13: Erstes Arbeitsblatt der Schülerin Zaida

Nun folgt keine Formulierung der Behauptung, sondern zunächst eine induktive Prüfung im gewählten Beispiel (linke Dreier-Zahlenmauer in ↑ Abb. 3.13). Daran anschließend reflektiert die Schülerin Zaida ihr bisheriges Vorgehen:

08:22	Za	62	*also es ist richtig*
08:24	I	63	*also, äh, ist <u>was</u> richtig'*
08:25	Za	64	*das, was ich gesagt habe, dass, wenn das <u>hier</u> 'ne* 5 *wäre* (deutet auf den Mittelstein der mittleren Dreier-Zahlenmauer), *dass sich <u>das</u> Ergebnis um* 1 *erhöht, und <u>das</u>* (deutet auf beide Steine in der mittleren Mauer), *und dass der Deckstein um* 2 *erhöht ist*
08:35	I	65	*mm-mmh, okay, emm .. mm-mmh, so, also ist es jetzt überraschend, dass <u>das</u> jetzt hier* 2 *mehr sind, oder'* (deutet auf die beiden eingetragenen Decksteine) *.. oder' ...* (lacht)
08:53	Za	66	*also etwas komisch find ich das schon, weil das <u>hier</u> ja* (deutet auf die mittlere Reihe der linken Dreier-Zahlenmauer) *nur <u>einer</u> mehr ist, aber logisch find ich's auch, weil man, emm, ja, den Mittelstein mit, an beiden Seiten zusammenrechnet mit dem rechten Mittelstein und mit Mittel-, emm, dem linken Mittelstein* (deutet jeweils auf die besagten Steine in der linken Zahlenmauer)

Hat Schülerin Zaida den Beweis subjektiv realisiert?

In Äußerung Za 64 formuliert die Schülerin Zaida die dritte Behauptung an einem weiteren Beispiel. Wenn sie dabei auf die beiden Steine in der zweiten Reihe der mittleren Zahlenmauer deutet und mit ihrer Kommentierung *dass sich das Ergebnis um* 1 *erhöht, und das* unterlegt, deutet dies darauf hin, dass sie subjektiv realisiert hat, warum sich der Deckstein um 2 erhöht. Auf die Nachfrage des Interviewers hin belegt die Schülerin Zaida in Äußerung Za 66 ihre Entdeckung mit zwei ambivalenten Eindrücken: *komisch* und *logisch*. Dass die neu entdeckte Behauptung an Dreier-Zahlenmauern von der an Zweier-Zahlenmauern eingeführten Grundregel abweicht, erscheint der Schülerin Zaida komisch im Sinne eines für Entdeckungen typischerweise überraschenden Phänomens (↑ Abs. 1.3.3). Logisch mag die neu entdeckte Behauptung für die Schülerin Zaida dann zugleich deshalb sein, weil sie deren Beweis als Sinnstruktur wohlmöglich bereits subjektiv realisiert hat. In Äußerung Za 66 spricht sie dann noch davon, dass *man, emm, ja, den Mittelstein mit, an beiden Seiten zusammenrechnet mit dem rechten Mittelstein und mit Mittel-, emm, dem linken Mittelstein.* Insofern zeigt sich hier auch in der Interpretation, dass das beispielgebundene Beweisen ein offener Prozess ist.

Deutungsoffenheit bezüglich subjektiver Realisierung

bisheriger Verlauf des beispielgebundenen Beweisens der Schülerin Zaida

Das beispielgebundene Beweisen nimmt in den vorangegangenen Äußerungen folgenden Verlauf: Die in Äußerung Za 52 am Beispiel mehr oder weniger entdeckte Behauptung korrigiert die Schülerin Zaida in Äußerung Za 54 zunächst. Dann formuliert, bekräftigt und begründet sie die Behauptung an einem zweiten Beispiel in Äußerung Za 64. Die Schülerin Zaida begründet die Behauptung schon in Äußerung Za 66 nicht mehr explizit durch mehrfache Anwendung der Grundregel, sondern belässt es bei der Bemerkung, dass sich der Mittelstein sowohl auf den linken als auch auf den rechten Mittelstein rechnerisch auswirkt. Die Schülerin Zaida spricht dies am Beispiel der konkret vorliegenden Zahlenmauer aus, indem sie die Bezeichnungen aus der Vorübung verwendet, ohne aber die eingetragenen Beispielzahlen zu nennen. Hat sie insgesamt gesehen die Tragweite der Behauptung (und ihres Beweises) hinsichtlich beliebig gewählter Grundsteine erfasst? Der Schülerin Zaida mag man zugute halten, dass sie beispielgebunden in dem Sinne beweist, dass sie die Behauptung am Beispiel zunächst entdeckt und vermöge der Grundregel als allgemein versprachlichte Operation am vorliegenden Beispiel sukzessive bestätigt.

Dreischritt Entdeckung – Prüfung – Begründung

Handelt es sich hierbei um eine Entdeckung mit latenter Beweisidee? Feststellen lässt sich ein relativ rascher, sprachlich erkennbarer Übergang vom Entdecken (*komisch*, Äußerung Za 66) und vom Prüfen (*also es ist richtig*, Äußerung Za 62) zum Begründen (*logisch*, Äußerung Za 66). Die zwischenzeitliche induktive Prüfung in Äußerung Za 64 scheint einerseits als Bestätigung der am vorigen Beispiel korrigierten Behauptung und andererseits als deren Begründung zu fungieren. Die in Äußerung Za 66 durch die Schülerin Zaida vorgenommene Reflexion kann über die subjektive Realisierung des Allgemeingültigen der Behauptung hinwegtäuschen. Der Hinweis des Interviewers auf die Beispielhaftigkeit der betrachteten Zahlenmauer und die durch den Interviewer dokumentierte Behauptung nimmt nämlich folgende Wendung:

09:09	I	67	*mmh, okay, jetzt frag ich dich jetzt, haben wir ja diese Zahlenmauern nur betrachtet* (deutet auf die linke und mittlere Dreier-Zahlenmauer) *.. ich stell jetzt die Behauptung auf, mmh, ich schreib die 'mal hier auf* (dreht das Blatt zu sich, nimmt einen Stift zur Hand und schreibt) *… wenn ich .. den Mittelstein … um* 1 *erhöhe … dann .. erhöht sich .. der Deckstein … um* 2 *.. also, und das gilt immer, also es gilt immer ..* (schreibt und setzt ein Fragezeichen in Klammern dahinter) *.. das ist jetzt, es gilt immer', das ist jetzt meine Behauptung, stimmt das' .. oder, also gilt das immer'* (fügt in die geschriebene Behauptung das Wort *immer* ein)
10:13	Za	68	*also ich würd sagen ja ..*
10:15	I	69	*mm-mmh*
10:15	Za	70	*für mich wirkt's jetzt ganz unlogisch*

die kritische Frage nach dem Allgemeingültigen der Behauptung

Die Schülerin Zaida stimmt der aufgeschriebenen Behauptung zwar zu, belegt diese aber in Äußerung Za 70 gleichzeitig mit dem Kommentar *unlogisch*. In Zusammenschau mit der Äußerung Za 66 kann dies darauf hindeuten, dass der Schülerin Zaida die Einsicht in eine Begründung für eine beliebige Dreier-Zahlenmauer doch schwerer fällt als angenommen, oder sie nicht genau weiß, wie das in Äußerung I 67 vom Interviewer mehrfach betonte *immer* zu verstehen ist. Da das nicht leicht fassbare Allgemeine zumal in Regelverbänden Mehrdeutigkeit (und damit Missverstehen) bergen kann, wäre die Frage nach dem Allgemeingültigen von dem Interviewer an dieser Stelle präziser zu stellen. Möglicherweise reicht der anfängliche Hinweis des Interviewers auf die Beispielhaftigkeit der betrachteten Zahlenmauer nicht aus. Der entsprechende Rahmen (Erhöhung des mittleren Grundsteins um den Wert 1 einer Dreier-Zahlenmauer bei Vorlage beliebiger natürlicher Zahlen als Grundsteine) scheint der Schülerin Zaida nicht hinreichend präsent zu sein. Hat sie wohlmöglich nur am Beispiel allgemein gesprochen und dabei die allgemeine Verwendbarkeit der Grundregel erprobt, ohne dass sie den Beweis in seiner Allgemeingültigkeit für beliebige Beispielzahlen subjektiv realisiert hat?

Abstrakter werdende Sprechweise bei Punktnotation

der Interviewer führt die Punktnotation wieder ein

Um die Schülerin nun zur weiteren Beschäftigung mit der Behauptung zu ermuntern, schlägt der Interviewer den Gebrauch der schon bei den Zweier-Zahlenmauern verwendeten Punktnotation vor. Hierzu dient die dritte Dreier-Zahlenmauer rechts, in welche die Schülerin die Zahlen der mittleren Dreier-Zahlenmauer überträgt (↑ Abb. 3.12).

12:35	Za	80	*ja da setz ich hier auf jeden Fall einen Punkt hin* (setzt einen Punkt an den Mittelstein der rechten Dreier-Zahlenmauer) *.. das wär dann ja die* 5 (deutet auf den Mittelstein der rechten Dreier-Zahlenmauer)
12:37	I	81	*ja, kannst ja 'mal machen und dann, und dann überlegen jetzt, mm-mmh*
12:40	Za	82	*und damit, damit ich nicht die Zahl durchstreichen muss, müsste ich hier wieder 'nen Punkt, da ein'n Punkt und da ein'n Punkt* (setzt nur einen Punkt in den Deckstein) ...
12:53	I	83	*äh, du sagst, hier käm dann wieder ein Punkt'* (deutet auf den Deckstein)
12:59	Za	84	*nee, dann wären da zwei Punkte*
13:00	I	85	*achso, mm-mmh*
13:01	Za	86	*hier, hier einer, hier einer, und hier zwei* (zieht die Punkte nochmals nach)

Schülerin Zaida bleibt der Beweis latent

Ähnlich wie in den Äußerungen Za 52 und Za 54 geht die Schülerin Zaida mit dem Setzen von nur einem Punkt in den Deckstein zunächst fehl. In Äußerung Za 82 zeigt sich erneut kurzzeitig die Unsicherheit der Schülerin Zaida, die neu entdeckte Behauptung mittels bekannter Regeln zu begründen. Jedenfalls wird der Beweis durch eine mechanische Ausführung der bekannten Grundregel (oder der Handlungsregel, einen Punkt zu setzen) verdeckt. Die Frage nach dem Allgemeingültigen in dem Sinne, dass die Einträge in der Zahlenmauer beliebige sein können, steht nicht im Zentrum. Es kann an dieser Stelle also bloß gesagt werden, dass die Schülerin Zaida mit der Punktnotation unter Anwendung der Grundregel sachgerecht umgehen kann. Die Verwendung der Punktnotation beansprucht möglicherweise noch die volle Aufmerksamkeit der Schülerin Zaida, so dass die Beweisidee hinter dem Kalkül wieder zurücktritt.

Schülerin Zaida manifestiert den Beweis

Im Anschluss daran beweist die Schülerin Zaida die Behauptung an der Dreier-Zahlenmauer rechts mittels der Punktnotation. Dabei spricht sie wiederum allgemein in dem Sinne, dass sie die Beispielzahlen als Einträge in den Zahlenmauern nicht nennt, jedoch auf sie deutet:

13:53	I	91	*okay, ja, dann frag ich ein bisschen, emm, warum ist jetzt hier ein Punkt, und da auch nur ein Punkt* (deutet auf die mittlere Reihe der rechten Dreier-Zahlenmauer)
14:03	Za	92	*weil sich beides um genau* 1 *erhöht .. wenn man, wenn sich das, der Mittelstein um einen erhöht, erhöhen sich auch die beiden Ergebnisse in der Mitte* (deutet auf die mittlere Reihe der rechten Dreier-Zahlenmauer)
14:16	I	93	*mm-mmh, um* 1
14:16	Za	94	(nickt) *genau*
14:17	I	95	*und*
14:18	Za	96	*das Ergebnis insgesamt um* 2
14:21	I	97	*aha, und warum ist das Ergebnis jetzt insgesamt um* 2'
14:26	Za	98	*weil,* 2 *Steine um einen erhöht werden* (deutet auf die mittlere Reihe der rechten Dreier-Zahlenmauer)
14:29	I	99	*ah ja*
14:29	Za	100	*also wird's insgesamt* 2 *mehr*

Gefahr mechanischer Anwendung eines Kalküls

Kritik an GOLDBERG-*These*

Gegenüber den anfänglichen Beweisversuchen in den Äußerungen Za 64 und Za 66 scheint der Einsatz der Punktnotation die Manifestation des Beweises für beliebige Dreier-Zahlenmauern zu erleichtern. Offen bleibt weiterhin, in wie weit sich die Schülerin Zaida wirklich von der betrachteten Zahlenmauer gelöst hat, obwohl sie keine Beispielzahlen nennt. Denn wie induktive Prüfungen bergen auch Operationen (hier als Kalkül der Punktnotation) prinzipiell die Gefahr, bloß mechanisch angewendet zu werden, so dass der Beweis ebenso latent bleiben oder wieder latent werden kann. (Um die hier erhobene Kritik an einem bloß vordergründigen Beweisen am Beispiel zu untermauern, wird im ↑ Kap. 3.4 das beispielgebundene Beweisen von Schülern an der Aufgabenstellung von GOLDBERG (1992, 43) weiter untersucht. Die Autorin vertritt in ↑ Abs. 1.2.5 die These, dass die Schüler ihrer Beobachtung nach alle den Beweis an Beispielen verstanden haben – deren nötige Anzahl sei freilich individuell verschieden.)

Interpretation changierenden/doppeldeutigen Beweisverhaltens

Schülerin Zaida möchte weiter induktiv prüfen

Um die Schülerin Zaida zu einer Reflexion über das Allgemeingültige der Behauptung zu motivieren, merkt der Interviewer an, dass bisher nur eine Zahlenmauer betrachtet wurde. Die Schülerin Zaida entgegnet, dass *man's mit noch 'mal anderen Zahlen ausprobieren* (Äußerung Za 104) könne, und macht sich auf eigenem Wunsch die Arbeit, auf einer zweiten Vorlage mit etwas größeren Beispielzahlen zu operieren (↑ Abb. 3.14). Man kann darin ein Indiz dafür sehen, dass die Schülerin Zaida den Beweis noch nicht hinreichend subjektiv realisiert hat.

Schülerin Zaida prüft die Behauptung an einem weiteren Beispiel induktiv

Bei ihrem neuen Beispiel richtet die Schülerin Zaida ihre Aufmerksamkeit dann wieder auf das korrekte Ausrechnen der Beispielzahlen bzw. auf den korrekten Umgang mit der Punktnotation. Sie bestätigt die Behauptung mit diesen beiden Verfahren wiederum an der nun vorliegenden Zahlenmauer. Eine Sprechweise der Schülerin Zaida (*also hier funktioniert's auch*, Za 114) unmittelbar aufgreifend, stellt der Interviewer ihr die folgende Frage:

16:38	I	115	*hier funktionierts auch, emm, aber warum gilt das jetzt immer'* (5 sec)
16:51	Za	116	*das ist, wie hier* (schaut auf die beiden nebeneinanderliegenden Vorlagen ↑ Abb. 3.13 und ↑ Abb. 3.14) *.. hier erhöht man um einen, also erhöht sich das beides um einen und dann insgesamt ist es dann wieder* 2 (deutet mehrfach auf die linke Dreier-Zahlenmauer in der zweiten Vorlage, ↑ Abb. 3.14)
17:00	I	117	*okay, kannst du das jetzt noch 'mal wiederholen mit unseren, emm, Ausdrucksweisen* (deutet auf die benannte Dreier-Zahlenmauer in der ersten Vorlage, ↑ Abb. 3.13), *also warum erhöhe ich, warum erhöht sich der Deckstein um* 2, *wenn immer ich den, emm, Mittelstein hier unten um* 1 *erhöhe'* (deutet auf die linke Zahlenmauer der zweiten Vorlage, ↑ Abb. 3.14)
17:12	Za	118	*wenn der Mittelstein halt um* 1 *erhöht wird, erhöhen sich ja die beiden mittleren auch um* 1 *.. und dann .. erhöht sich der Deckstein ja um* 2
17:26	I	119	*mm-mmh*
17:26	Za	120	*weil* 1 *und* 1 2 *ist*

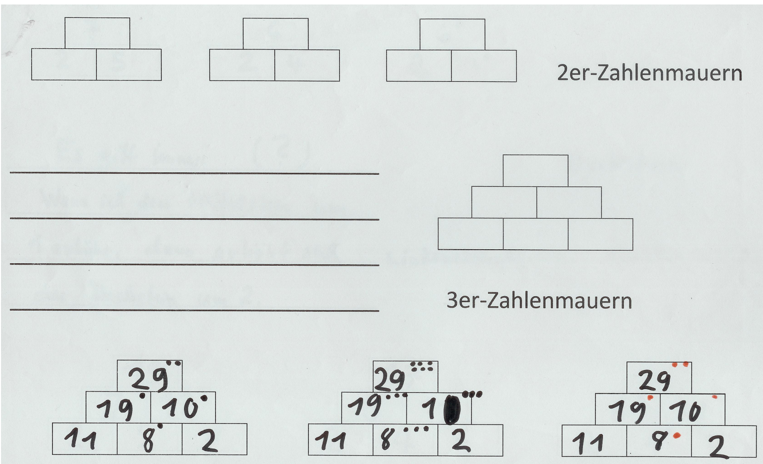


Abb. 3.14: Zweites Arbeitsblatt der Schülerin Zaida

Schülerin Zaida löst ihre Sprechweise vom Konkreten

Bei dem vorstehenden Beweisversuch verwendet die Schülerin Zaida eine allgemein gehaltene Umgangssprache, indem sie sich der in der Vorübung einstudierten Bezeichnungen bedient. Expliziert wird insbesondere die Summierung $1 + 1 = 2$ der einzelnen additiven Erhöhungen. Daran zeigt sich, dass sich die Schülerin Zaida gedanklich von einer konkreten Zahlenmauer gelöst hat, wobei sie noch immer auf die vorliegenden Zahlenmauern deutet. Dass sich die Schülerin Zaida einer variablenhaltigen Sprechweise annähert, zeigt sich auch im weiteren Gesprächsverlauf, bis sie schließlich hinreichend überzeugt wirkt, dass man in die Grundsteine beliebige (natürliche) Zahlen einsetzen könne.

Facettenreichtum des Allgemeingültigen

An dieser Stelle kann jedoch nicht mit letzter Sicherheit gesagt werden, dass der Beweis vollständig der Latenz enthoben wurde. Die verschiedenen Facetten der Allgemeingültigkeit der Behauptung werden von der Schülerin Zaida hinsichtlich der festzulegenden Erhöhung eines zu wählenden Grundsteins in einer mehrstufigen Zahlenmauer noch nicht ausgeleuchtet. Sie schwankt zwischen induktivem Prüfen und deduktiven, in allgemeiner Umgangssprache gehaltenen Begründungen. Doch nicht nur das beispielgebundene Beweisen der Schülerin Zaida changiert zwischen Latenz, subjektiver Realisierung und Manifestation. Auch in der Deutung lassen sich aus Expertensicht verschiedene Perspektiven einnehmen. Streng genommen ließe sich nämlich nur von zwei induktiven Prüfungen mit latenter Beweisidee sprechen, obwohl die Schülerin eine recht allgemeine Sprechweise an den Tag legt und bloß auf die konkreten Zahlenmauern deutet. Diese Diskrepanz zwischen enaktivem und kognitivem Deuten kann als ein Phänomen bei *visual proofs* (↑ Abs. 1.2.4) auftreten, welches auf den beobachtenden Experten doppeldeutig wirkt.

Changieren des beispielgebundenen Beweisens

Schülerin Zaida verhält sich doppeldeutig

Kritik am eigenen Beweisverhalten

Schülerin Zaida verallgemeinert die Behauptung

Die vorstehend entwickelte Behauptung wird nun anhand der mittleren Zahlenmauer hinsichtlich der Größe der Erhöhung des Mittelsteins weiter verallgemeinert. Die Schülerin Zaida gibt zunächst an der Erhöhung des Mittelsteins um den Wert 3 zu verstehen, dass ihr Vorgehen unabhängig von der gewählten Erhöhung sei. Diese vergleicht sie mit der früheren Erhöhung des Mittelsteins um den Wert 1 und extrapoliert dies auf eine bloß vorgestellte Erhöhung des Mittelsteins um den Wert 10:

22:53	Za	168	*mmh, und wenn ich's <u>hier</u> um* 3 (deutet auf die mittlere Dreier-Zahlenmauer der zweiten Vorlage, ↑ Abb. 3.14), *also im Prinzip, wenn man <u>hier</u> um einen erhöht, ist das Ergebnis* (deutet auf die rechte Dreier-Zahlenmauer der ersten Vorlage, ↑ Abb. 3.13) *genau das Doppelte, was man erhöht hat, <u>hier</u>* (deutet auf den Deckstein der rechten Dreier-Zahlenmauer der ersten Vorlage, ↑ Abb. 3.13)
23:04	I	169	*aah .. aha, das ist ja interessant … ja, jetzt hast du das aber … äh, <u>egal</u> wie viele Punkte da sind, oder' .. also <u>egal</u> wie groß die Erhöhung ist'*
23:07	Za	170	*ja, also, ich könnte jetzt <u>hier</u> im Prinzip auch* (deutet wieder auf die mittlere Dreier-Zahlenmauer der zweiten Vorlage, ↑ Abb. 3.14) *um* 10 *erhöhen, also dann müsste das Ergebnis hier <u>auch</u>* (deutet auf den Deckstein darüber) *eigentlich um* 20 *erhöht sein*

Schülerin Zaida geht vom Besonderen zum Allgemeinen über

Schließlich erkennt die Schülerin Zaida bei dem Beweis der Behauptung für die bloß vorgestellte Erhöhung des Mittelsteins um den Wert 10 das allgemeine Prinzip, welches die jeweiligen Beispielzahlen als Einträge in den Zahlenmauern selbst nicht tangiert. Sie löst sich unmerklich von den Beispielzahlen als Einträgen in den Zahlenmauern und von den beispielhaft vorgenommenen Erhöhungen des Mittelsteins. Statt den Stein um 3 zu erhöhen, erhöht sie ihn um 10.

25:21	Za	182	*also wenn wir zum Beispiel um die* 10 *erhöhen, dann wäre das, hier* 10 *mehr, und hier* 10 *mehr* (deutet auf die mittlere Reihe der mittleren Dreier-Zahlenmauer der zweiten Vorlage, ↑ Abb. 3.14) *und insgesamt sind's* 20 *mehr*
25:29	I	183	*kannst du noch 'mal sagen, warum das hier* (deutet auf die mittlere Reihe der mittleren Dreier-Zahlenmauer) 10 *mehr werden'*
25:36	Za	184	*weil, wenn man den Mittelstein erhöht .. dann rechne ich ja* 10, *das wäre dann* 18, *denn man rechnet ja den Mittelstein, mit den Ecksteinen zusammen*
25:45	I	185	*mm-mmh, okay* (nickt)
25:50	Za	186	*also wird das Ergebnis von den Ecksteinen auch immer um die Zahl, die man hier erhöht* (deutet auf den Mittelstein der mittleren Dreier-Zahlenmauer), *da erhöht* (deutet auf die mittlere Reihe)
25:54	I	187	*okay, und wie ist es dann hier'* (deutet auf die mittlere Reihe der mittleren Dreier-Zahlenmauer)
25:59	Za	188	*da kann man, im Prinzip bräuchte man das gar nicht mehr rechnen, wenn man die Zahlen hier hat* (deutet auf die Einträge der mittleren Dreier-Zahlenmauer), *kann man einfach die Punkte alle zusammenzählen und die Punkte da oben hinmachen* (deutet auf den Deckstein), *da kann man sich Arbeit sparen* (lächelt)

Die Schülerin scheint die verallgemeinerte Behauptung an den Beispielzahlen 3 und 10 für die Erhöhung des Mittelsteins schließlich subjektiv beispielgebunden und allgemein bewiesen zu haben. Anders als früher bemerkt sie in Äußerung Za 188: *im Prinzip bräuchte man das gar nicht mehr rechnen* und und *da kann man sich Arbeit sparen*. Überraschenderweise begegnet sie der Aussagekraft ihrer beispielgebundenen Vorgehensweise jedoch in doppelter Hinsicht mit Skepsis:

Schülerin Zaida zweifelt an ihrem beispielgebundenen Beweisen

26:38	I	193	*und, emm, jetzt hast du's mit* 10 *gesagt, äh .. hab ich <u>hier</u> dann <u>immer</u>* (deutet auf den Deckstein der mittleren Dreier-Zahlenmauer) *die doppelte Erhöhung .. von <u>dem</u>, mit <u>dem</u> ich hier im <u>Mittel</u>stein erhöht habe'* (deutet auf den Mittelstein der mittleren Dreier-Zahlenmauer)
26:50	Za	194	*ja, würd ich 'mal so sagen, also für mich wäre das dann logisch*
26:55	I	195	*aha, bist du da überzeugt, dass das <u>immer</u> so ist'*
27:00	Za	196	*daran hab ich wieder meinen Zweifel*
27:03	I	197	*ah, daran hast du immer noch deinen Zweifel .. aber du hast dir das doch mit der Erhöhung um <u>10</u> und mit der Erhöhung um <u>3</u>, begründet .. denkst du, dass das auch für andere Erhöhungen, richtig ist, und*
27:14	Za	198	*das wäre möglich*
27:14	I	199	*wäre möglich'*
27:15	Za	200	*vielleicht, sogar <u>gut</u>*
27:17	I	201	*sogar <u>gut</u>'*
27:20	Za	202	*es wäre möglich, weil's bei <u>dem</u> geklappt hat und <u>hier</u>* (deutet auf die linke und mittlere Dreier-Zahlenmauer der zweiten Vorlage) *es hat jetzt überall geklappt, also müsste es eigentlich also noch 'mal klappen*
27:30	I	203	*mm-mmh .. meinst du, was zweimal gilt, gilt <u>immer</u>' ...*
27:35	Za	204	*daran hab ich meinen Zweifel* (lacht)

Schülerin Zaida spürt die Ambivalenz beispielgebundenen Beweisen

beispielgebundenes Beweisen als changierender, mehrdeutiger Erkenntnisprozess

An den Formulierungen der Schülerin lässt sich folgende Ambivalenz ablesen: Einerseits äußert die Schülerin daran Zweifel, dass ihr beispielgebundener Beweis für den allgemeinen Beweis stehe; andererseits sieht sie ihren beispielgebundenen Beweis auch nicht als induktives Prüfen an, dessen Beweiskraft sie eine Absage erteilt. Die Schülerin schlüpft hier zum Teil selbst die Rolle einer *advocata diaboli*. Letztlich manifestiert sich im changierenden, teils von Selbstzweifeln geprägten Erkenntnisprozess der Schülerin Zaida jene Spannung, um die es in dieser Analyse und in dieser Forschungsarbeit geht: wie sich das beispielgebundene Beweisen einer Schülerin zwischen induktivem Prüfen und formalem (resp. formellem) Beweisen wandeln, wie verschieden es gedeutet werden kann, und in welchen Übergängen dabei der Beweis als Sinnstruktur vermutlich latent bleibt oder ihn subjektiv zu realisieren und zu manifestieren gelingt.

3.2.5 Kontrastanalyse (Sonja): Stetiges Abstrahieren

Besonderheiten bei der Schülerin Sonja

Nachstehend seien in Kontrastierung des changierenden Erkenntnisprozesses der Schülerin Zaida drei Interviewauszüge der Schülerin Sonja angeführt. Sie löst sich sichtbarer von den Zahlenmauern ab und thematisiert in ihren Äußerungen selbst die Allgemeinheit der Behauptung. Ferner lässt sie keinen Zweifel daran, dass sie in der Besonderheit der Erhöhung eines Steines um einen festgelegten Wert auch das Allgemeine sieht und beweisen kann.

ergänzender Kontext

Die Vorübungen an den Zweier-Zahlenmauern verlaufen bei der Schülerin Sonja ähnlich wie bei der Schülerin Zaida. Für die Steine der Dreier-Zahlenmauern schlägt die Schülerin Sonja folgende Bezeichnungen vor: Zielstein (statt Deckstein), Seitensteine (statt Ecksteine) und Mittelstein. Wie die Schülerin Zaida vermutet sie bei Erhöhung des Mittelsteins um den Wert 1 zunächst, dass sich dann auch der Deckstein bloß um den Wert 1 erhöhe. Die Schülerin Sonja korrigiert ihre Behauptung aber ebenso schnell. Im Unterschied zur Schülerin Zaida differenziert sie aber zwischen der Erhöhung des Mittelsteins und der Erhöhung eines der Ecksteine. Den Beweis der dritten Behauptung hinsichtlich der Erhöhung eines Mittelsteins (↑ Abs. 3.2.1) manifestiert sie auf eine entsprechende Frage des Interviewers hin schon bald in allgemein gehaltener Sprache:

45:03	So	124	*äh, weil, wenn man den Mittelstein, einmal den Mittelstein, weil man den Mittelstein ja zweimal addiert, dann, wird .. dann wird der Zielstein halt .. um 2 er<u>höht</u>*
45:17	I	125	*mm-mmh, warum addiert man den um, den <u>zwei</u>mal', den Mittelstein'*
45:21	So	126	*weil man einmal den <u>linken</u>, mit dem <u>linken</u> und den Mittelstein addiert, und einmal den <u>rechten</u> und den Mittelstein addiert*
45:28	I	127	*mm-mmh, und was passiert dann'*
45:30	So	128	*dann, äh, dann wird der Zielstein, um 2 er<u>höht</u>*

Schülerin Sonja möchte nicht mit der Punktnotation umgehen

Dabei deutet die Schülerin Sonja seltener auf die vorliegende Zahlenmauer (↑ Abb. 3.15) als sonst und lässt sich im Anschluss daran auch nicht gerne auf das beispielgebundene Beweisen mittels der Punktnotation ein. Vertieft man sich genauer in ihre Ausführungen, gewinnt man den Eindruck, dass ihr die Punktnotation als ein aufgesetztes Kalkül erscheint. Möglicherweise liegt dies auch daran, dass sie den Beweis als Sinnstruktur schon subjektiv realisiert und in allgemeiner Sprache manifestiert hat.

Schülerin Sonja weiß um die Allgemeinheit der Behauptung

Einen weiteren Unterschied zur Schülerin Zaida im beispielgebundenen Beweisen markiert die Frage nach der Allgemeingültigkeit der Behauptung. Nach Einführung der Punktnotation weiß die Schülerin Sonja um die Allgemeinheit der Behauptung unabhängig von den gewählten Beispielzahlen in der vorliegenden Zahlenmauer:

56:53	I	217	*mm-mmh, okay, meinst du, dass diese Behauptung jetzt immer gilt'*
56:59	So	218	*ja*
57:00	I	219	*für die Dreier-Zahlenmauer'*
57:01	So	220	*mm-mmh*
57:02	I	221	*warum denkst du, dass die immer gilt'*
57:04	So	222	*weil, egal welche Zahlen dort stehen, wenn im, beim Mittelstein, ein Punkt ist .. also ein Punkt ist, dann wird der verdoppelt, der Punkt, und sind, dann sind's 2 .. äh, dann sind's halt 2 Punkte, die, dann oben beim Zielstein dazuaddiert werden*
57:28	I	223	*hmm, und warum sind das dann oben da 2 Punkte', sag das noch 'mal*
57:34	So	224	*weil unten, beim Mittelstein, der Punkt verdoppelt wird, durch das zweimalige Addieren*

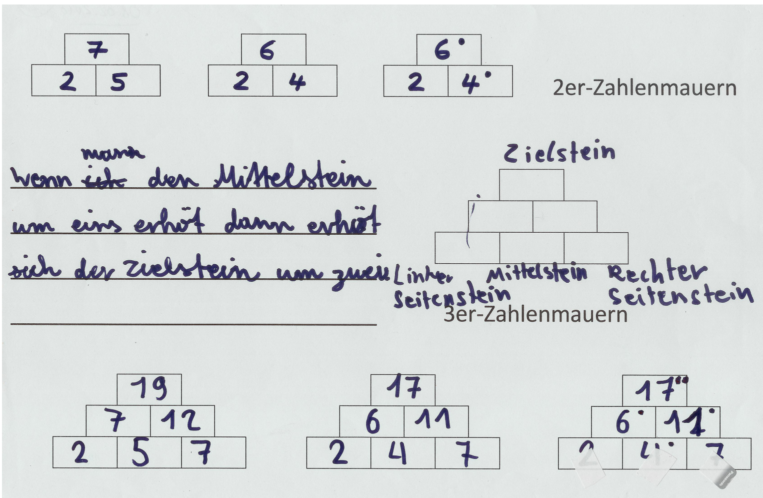


Abb. 3.15: Erstes Arbeitsblatt der Schülerin Sonja

Schülerin Sonja erhöht den Mittelsteins um einen festgelegten Wert

Im Interview mit der Schülerin Sonja lässt der Interviewer die Behauptung hinsichtlich der Erhöhung des Mittelsteins um einen beliebigen Wert mittels eines Malkreuzes symbolisieren (↑ Abb. 3.16). Nachdem die Schülerin Sonja sich an den beispielhaften Erhöhungen des Mittelsteins um die Werte 3 und 10 versucht hat, stabilisiert sie ihre allgemeinsprachliche Begründung zunehmend, bis sie keiner Beispiele mehr bedarf:

00:05	I	275	*also, emm, genau, ich sag noch 'mal, emm, also wenn ich jetzt den Mittelstein um irgendwas erhöhe, dann erhöht sich der Zielstein* (deutet auf den Deckstein der linken Dreier-Zahlenmauer)
00:18	So	276	*um das Doppelte, um das Doppelte vom Mittelstein*

00:22	I	277	*von der Erhöhung im Mittelstein*
00:24	So	278	*ja, genau*
00:24	I	279	*genau, und sag jetzt noch 'mal, <u>warum</u> das so ist*
00:28	So	280	*weil der Doppelstein, also weil der Mittelstein .. <u>zweimal</u> addiert wird, mit, zweimal mit, zweimal mit, einer Zahl zusammenaddiert wird, und, dann, wird .. der, das Kreuz, dann, doppelt, also <u>das</u> ist 'ne 3 jetzt, in, oder irgendwas, ne' .. dann haben wir also <u>zwei</u> <u>diese</u> Zahlen, zwei Kreuze, und diese zwei Kreuze, die <u>bleiben</u> dann, und die <u>kommen</u> dann beim Ergebnis, <u>dazu</u>* (deutet dabei auf die linke Zahlenmauer in ↑ Abb. 3.16)

In Äußerung So 280 fällt die Neubezeichnung *Doppelstein* auf, womit die Schülerin Sonja (wie auch schon in einer früheren Äußerung) das zweimalige Addieren des Eintrags im Mittelstein prägnant bezeichnet. Ferner lässt sich in Äußerung So 280 auch der Übergang von einer beispielhaften Erhöhung um den Wert 3 hin zu einer beliebigen Erhöhung des Mittelsteins beobachten.

Schülerin Sonja wählt die Bezeichnung Doppelstein

Insgesamt zeigen diese ergänzenden Interviewauszüge exemplarisch, dass die Schülerin Sonja den jeweiligen Allgemeinheitsgrad der Behauptungen besser einzuschätzen vermag als die Schülerin Zaida. Die Übergänge vom Besonderen hin zum Allgemeingültigen fallen ihr leichter, und sie versteht das Kalkül der Punkt- resp. Kreuznotation trotz anfänglicher Reserve effektiv einzusetzen. Dass sie den Mittelstein aus freien Stücken mit *Doppelstein* bezeichnet, kann schon als ein Indiz dafür gewertet werden, dass sie den Beweis der Behauptung subjektiv realisiert.

Schülerin Sonja fallen die Übergänge zum Allgemeingültigen leichter

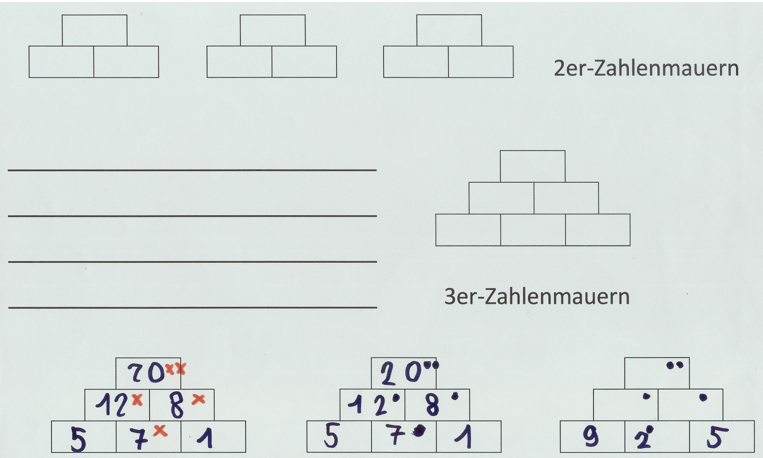


Abb. 3.16: Zweites Arbeitsblatt der Schülerin Sonja

3.2.6 Kontrastanalyse (Aya): Abstrakt gehaltene Sprache

ergänzender Kontext

Als weitere Kontrastierung zum changierenden Erkenntnisprozess der Schülerin Zaida seien zwei Interviewauszüge der Schülerin Aya angeführt, die sich einer immer abstrakter werdenden Sprache bedient. Die Vorübungen an den Zweier-Zahlenmauern verlaufen bei der Schülerin Aya ähnlich wie bei ihren Mitschülerinnen. Für die Dreier-Zahlenmauern schlägt die Schülerin Aya folgende Bezeichnungen vor: Deckstein, Ecksteine und mittlerer Bodenstein. Anders als ihre beiden Mitschülerinnen Zaida und Sonja vermutet die Schülerin Zaida die Behauptung auf Anhieb richtig. Sie ist auch die einzige Schülerin, die Überlegungen zur Erhöhung eines Mittelsteins bei einer Vierer-Zahlenmauer und zur Erhöhung eines Ecksteins bei einer Zahlenmauer von beliebiger Höhe anstellt.

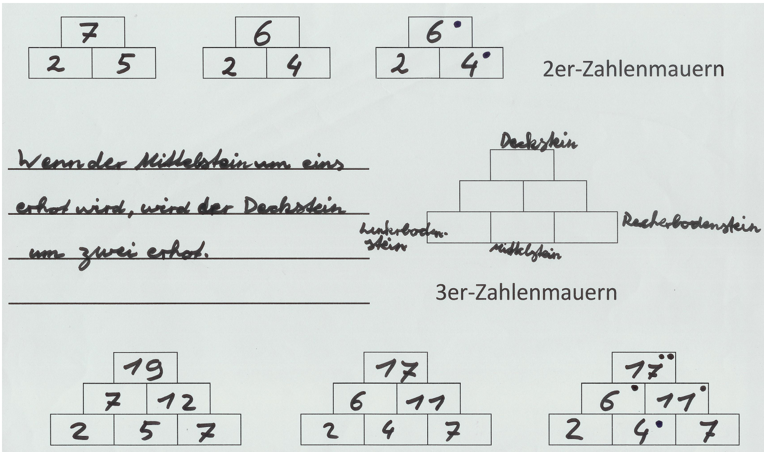


Abb. 3.17: Erstes Arbeitsblatt der Schülerin Aya

Sprachspiel zur Kennzeichnung der beliebigen Erhöhung eines Bodensteins

Sprachlich interessant ist die Einführung der Bezeichnung *irgendwas* zur Kennzeichnung der beliebigen Erhöhung eines Bodensteins. Die Schülerin Aya lässt sich auf dieses vom Interviewer initiierte Sprachspiel ein:

16:57	I	133	*auch gut, okay, emm .. dann, emm .. schreib ich hier noch 'mal 'ne andere Behauptung jetzt hin, äh .. die ich mir jetzt ausgedacht hab,* (schreibt die neue Behauptung auf die zweite Vorlage, ↑ Abb. 3.18) *wenn, der Mittelstein … um … äh, irgendwas … erhöht wird … äh, wird … der Deckstein … um .. ja, was denkst du'*
17:43	Ay	134	(lacht) *also*
17:45	I	135	*also, emm*
17:45	Ay	136	*um das Doppelte von irgendwas erhöht*

Schülerin Aya belegt Steine nicht mit Beispielzahlen, sondern mit abstrakten Bezeichnungen

Anders als die beiden Mitschülerinnen Sonja und Zaida braucht die Schülerin Aya sich nicht konkrete Beispielzahlen als Einträge der Zahlenmauern vorstellen. Nachdem der Interviewer nur die Steine der Zahlenmauer bezeichnet, aber nicht mit Einträgen belegt hat, argumentiert die Schülerin Aya an dieser Stelle ganz allgemein und deutet nur auf die Struktur der Zahlenmauer. In Fortführung des Sprachspiels mit der Erhöhung um *irgendwas* führt die Schülerin Aya schließlich einen rein formalen (allgemeinen) Beweis:

Schülerin Aya beweist formal

25:52	I	183	*okay, emm, jetzt hast du nen zweites Beispiel für diese, unteren Zahlen gegeben, emm, ich nenn jetzt 'mal diese Zahlen hier unten* (deutet auf die Mittel- und Ecksteine der rechten Dreier-Zahlenmauer der zweiten Vorlage, ↑ Abb. 3.18), *die nenn ich so, wie wir gesagt haben* (deutet kurz auf die Benennungen der Zahlenmauer auf der ersten Vorlage, ↑ Abb. 3.17) *also emm, linker Bodenstein, weiß ich jetzt auch nicht, was das ist, Mittelstein, weiß ich auch nicht, was es ist, und, emm, rechter Bodenstein* (deutet jeweils auf die bezeichneten Felder in der rechten Dreier-Zahlenmauer der zweiten Vorlage, ↑ Abb. 3.18), *werden um irgendwas, also um das Kreuz erhöht, kannst du das jetzt noch 'mal, emm, formulieren', warum dann der Deckstein um, zweimal irgendwas, äh, erhöht wird ..*
26:27	Ay	184	*emm, da .. diese Zahl, die dann hier steht* (deutet auf die rechte Dreier-Zahlenmauer der zweiten Vorlage, ↑ Abb. 3.18)
26:33	I	185	*wo, wo steht die'*
26:35	Ay	186	*emm, im Mittelstein, die wird dann ja, um irgendwas erhöht, und wenn diese Zahl hier im rechten Bodenstein steht, emm, wenn man die mit dem, mit der Zahl, die im Mittelstein steht, ergibt dann halt .. das, was dann hier oben steht und dann + irgendwas .. emm, sind dann halt, das Irgendwas, was dann rauskommt* (lacht auf) *.. und, wenn man diese Zahl mit dieser Zahl zusammenzieht* (deutet auf den linken und rechten Mittelstein der rechten Dreier-Zahlenmauer in der zweiten Vorlage, ↑ Abb. 3.18), *dann gibt dann sowas, das hier oben steht'*
27:11	I	187	*mm-mmh, also wenn man was jetzt mit was nimmt'*
27:14	Ay	188	*wenn man den Mittelstein mit dem linken, Bodenstein zusammenzieht, dann ergibt das halt das, was dann da rauskommt, + das Irgendwas, sind, diese Zahl, die da steht* (deutet mehrfach auf den unteren Teil der rechten Dreier-Zahlenmauer der zweiten Vorlage, ↑ Abb. 3.18), *und, wenn man dann hier, diese zwei Zahlen stehen hat, dann ergibt das halt hier oben irgendwas, und wenn man dann die beiden Irgendwasses zusammenzieht* (lacht), *dann ergibt das 2 ·, + das Irgendwas, und, diese Irgendwas, emm, wird dann mit den Irgendwasses zusammenvermischt* (faltet die Hände), *dann ergibt das Irgendwas, was dann hinterher rauskommt* (deutet mehrfach auf den oberen Teil der rechten Dreier-Zahlenmauer der zweiten Vorlage, ↑ Abb. 3.18, lacht)

Der rein formale Beweis der Schülerin Aya lässt das oben initiierte Sprachspiel in der Dualbildung eines *irgendwas*' über *das Irgendwas* zu den *beiden*

Dualbildung eines irgendwas' zu zwei Irgendwasses

Irgendwasses der beliebigen Erhöhung des Mittelsteins gipfeln (Mitte der Äußerung Ay 188). Obwohl zum Teil schwer verständlich, kann in dieser formalen Manifestation davon ausgegangen werden, dass die Schülerin Aya den Beweis als Sinnstruktur vollständig subjektiv realisiert hat. Die Schülerin Aya dringt schließlich noch zur allgemeinen Behauptung bei Erhöhung eines Mittelsteins an der Vierer-Zahlenmauer sowie bei Erhöhung eines Ecksteins an einer Zahlenmauer beliebiger Größe vor und beweist diese mit Hilfe der Punktnotation formal (in allgemeiner Umgangssprache) (↑ Abb. 3.19).

weitgehende Verallgemeinerung der Behauptung und Manifestierung des formalen Beweises

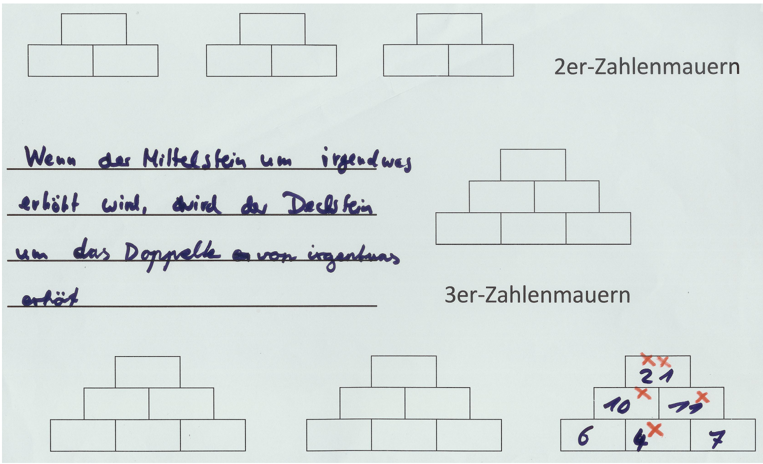


Abb. 3.18: Zweites Arbeitsblatt der Schülerin Aya

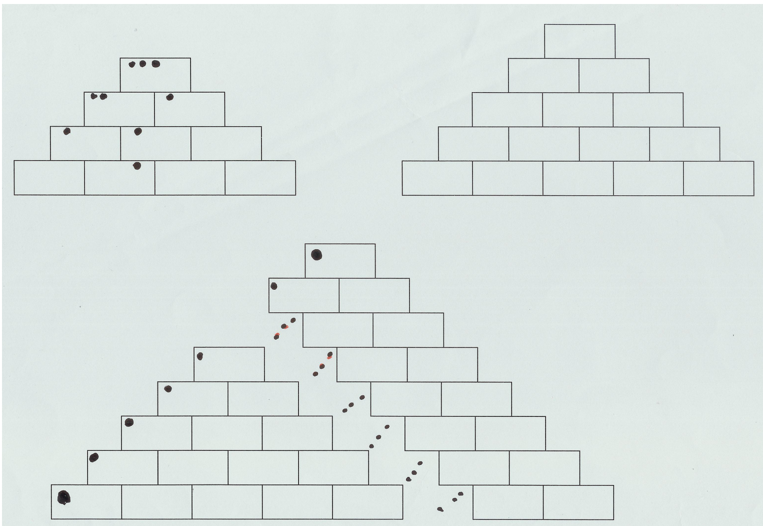


Abb. 3.19: Drittes Arbeitsblatt der Schülerin Aya

3.2.7 Ergebnisse

Die Analysen über das beispielgebundene Beweisen der Schülerinnen Zaida, Sonja und Aya lassen unterschiedlichste Beweisverläufe erkennen. Insgesamt gesehen erfolgten die eingangs gestellten Forschungsfragen aus vornehmlich theoretischer, kategorialer und sprachlicher Perspektive (I, II, IV) und konzentrierten sich auf folgende Forschungsbereiche (vgl. ↑ Abs. 3.2.2):

○ Indizien subjektiver Realisierung bei Regelverbänden
○ Verläufe beispielgebundenen Beweisens
○ Wandlung des sprachlichen Ausdrucks beim Beweisen
○ Rolle von Beispielzahlen in Darstellungsmitteln

Die Analyseergebnisse hierzu werden im Folgenden wiederum zunächst schülerbezogen dargestellt. Im Resümé wird davon in Hinblick auf den Gesamtzusammenhang der Arbeit abstrahiert (↑ Abs. 3.2.8).

Hauptanalyse (Zaida)

changierendes beispielgebundenes Beweisen bei der Schülerin Zaida

Das beispielgebundene Beweisen zeigt sich bei der Schülerin Zaida als changierender Prozess zwischen Latenz und subjektiver Realisierung des Beweises. Zu Beginn hat die Schülerin Zaida die Behauptung mit latenter Beweisidee entdeckt. Dabei bleiben die Dimensionen der Allgemeingültigkeit jedoch für längere Zeit im Vagen, wodurch auch mehrere Deutungen hinsichtlich der subjektiven Realisierung des Beweises möglich werden (↑ Abs. 2.2.7).

fragliche subjektive Realisierung des Beweises

- Für eine frühzeitige subjektive Realisierung des Beweises spricht zum einen die mehrmalige, vollständige und ausführliche Beweisführung der Schülerin Zaida, zum anderen ihre schon bald recht allgemein gehaltene Sprache. Dagegen spricht, dass der Schülerin Zaida die graduell gestufte Allgemeinheit der Behauptungen nur allmählich präsent wird und später wieder aus dem Blick gerät. Letzteres geschieht zumal dann, wenn die Schülerin Zaida ihre Aufmerksamkeit auf das Operieren mit der Grundregel mit oder ohne Punktnotation verliert. Die ersten Beweisversuche der Schülerin Zaida machen auch deutlich, dass die bloße Kenntnis der Grundregel (der Operation im Sinne von Wittmann, ↑ Abs. 1.2.3) und deren Anwendung nicht ausreicht, um die Tragweite einer entsprechenden verallgemeinerten Behauptung und deren Beweis zu erfassen. Insofern kann sich das Operieren mit der Grundregel wie das rein induktive Prüfen zu einem bloßen Kalkül wandeln und damit dem subjektiven Realisieren des Beweises wieder entgegenstehen. Diese Problematik findet sich auch bei Goldberg (1992) wieder (vgl. hierzu die theoretischen Ausführungen aus ↑ Abs. 1.2.5 und die Einzelfallstudie in ↑ Kap. 3.4).

Changieren beispielgebundenen Beweisens

- Während ihres beispielgebundenen Beweisens deutet die Schülerin Zaida häufig auf eine konkret vorliegende Zahlenmauer, bleibt aber in ihrer Sprechweise allgemein. Dieser Umstand verstärkt auf Seiten des Experten die Ambivalenz hinsichtlich der Einschätzung, ob eine solche Ausdrucksform der Schülerin Zaida als induktives Prüfen oder formales Beweisen aufzufassen ist. Begünstigt wird diese mehrdeutige Betrachtungsweise auch durch die leichte Operationalisierbarkeit der Grundregel zu einem Kalkül und durch die sprachlichen Vorübungen. Qualitativ führt die fortschreitende Verallgemeinerung der Behauptung durchaus zu einer erweiterten subjektiven Realisierung des Beweises und auch zu einer Reflexion über das beispielgebundene Beweisen an sich. Überraschend ist nämlich in der Analyse, dass die Schülerin Zaida – ihrem Verhalten nach ganz konsequent – zum Ende des Interviews zweierlei bezweifelt: einerseits, dass ihr beispielgebundenes Beweisen für das allgemeine (formale) Beweisen stehe, andererseits, dass ihr beispielgebundenes Beweisen bloß induktives Prüfen sei, dem sie eine Absage erteilt. Die Schülerin ist auf dieser Metaebene gewissermaßen ihre eigene selbstkorrigierende *advocata diaboli*. Letztlich manifestiert sich also im changierenden, teils von Selbstzweifeln geprägten Erkenntnisprozess der Schülerin Zaida gerade jene Spannung, die das beispielgebundene Beweisen selbst ausmacht.

Schülerin Zaida als eigene advocata diaboli

zunehmend formal gehaltene Sprache

- Die rein abstrakte Versprachlichung des Beweises kann kein alleiniges Kriterium für die erfolgte subjektive Realisierung des Beweises sein. Sie kann auch bloß mechanisch der Beschreibung durchgeführter Operationen dienen, zumal wenn sie wie in dieser Hauptanalyse durch entsprechende Vorübungen mitgeprägt und damit teilweise normiert wurde. Bei der Schülerin Zaida lassen sich im späteren Teil des Interviews Übergänge von konkret genannten Beispielen zu allgemeinen Zusammenhängen in dem Sinne ablesen, dass sich ihre Sprache vom Beispielhaften löst.

Beweiskraft imaginierter Beispiele

- Zudem zeigt sich die beweisevozierende Kraft bloß vorgestellter (imaginierter) Beispiele (wie der Erhöhung des Mittelsteins um den Wert 10), welche die Schülerin Zaida zu einem zwar noch am Beispiel gebundenen, der konkreten Anschaulichkeit aber enthobenen Beweis anregen. Wie weitere Untersuchungen am Transkript zeigen, ist die Schülerin Zaida jedoch nicht dazu in der Lage, sich die Einträge in den Zahlenmauern vollständig wegzudenken. Insofern abstrahiert die Schülerin Zaida nicht vollständig auf die Struktur der Zahlenmauer hin.

Frage nach der Allgemeingültigkeit der Behauptung

- Auf Seiten des Interviewers hätte das *das* in der Frage *Gilt das immer?* derart präzisiert werden müssen, dass besser nachvollziehbar ist, auf welcher Ebene von Allgemeinheit der Behauptung er sich mit der Schülerin Zaida verständigen möchte. Dies erleichtert dann auch die Analyse, ob und in wie weit die Schülerin Zaida mit oder ohne latente(r) Beweisidee entdeckt oder geprüft und den Beweis subjektiv realisiert hat. Es stellt sich jedoch die Frage, ob ein zu genaues Präzisieren des Kontexts einer Behauptung nicht bereits eine Lenkung des Schülers darstellt, m.a.W. ob das Ungefähr-Lassen einer Behauptung der Realität des beispielgebundenen Beweisprozesses nicht näher kommt.

Kontrastanalysen (Sonja, Aya)

Tendenz zum formalem Beweisen bei den Schülerinnen Sonja und Aya

Im Vergleich zum beispielgebundenen Beweisen der Schülerin Zaida nähern sich die Beweisverläufe der Schülerinnen Sonja und Aya eher schneller dem formalen Beweisen an. Größere Unterschiede zeigen sich bei ihnen in der subjektiven Realisierung der fortschreitend verallgemeinerten Behauptungen und in der sprachlichen Explikation ihrer Beweise:

- Die beiden Schülerinnen Sonja und Aya realisieren den Beweis schon sehr viel früher als die Schülerin Zaida. Dafür spricht nicht nur die teilweise am Beispiel, teilweise allgemein gehaltene Sprache. Ein Indiz ist auch die explizitere Thematisierung des Kontexts der jeweiligen Behauptung, in dem sich die Schülerinnen bewegen. Der Schülerin Sonja mag die Punktnotation zunächst als aufgesetztes Kalkül erscheinen, was wohl daran liegt, dass sie den Beweis der Behauptung und ihre Tragweite schon subjektiv realisiert hat. Die Schülerin Aya benutzt die Punktnotation dagegen als Mittel zum Beweis komplexerer Behauptungen, ohne dabei jedoch wie die Schülerin Zaida deren jeweiligen Allgemeinheitsgrad aus dem Blick zu verlieren.

subjektive Realisierung des Beweises

- Die beiden Interviews der Schülerinnen Sonja und Aya zeigen keinen so changierenden Verlauf beispielgebundenen Beweisens wie das Interview der Schülerin Zaida. Es ist eher von kontinuierlichen Verläufen beispielgebundenen Beweisens hin zu formalen Beweisen zu sprechen, wie sich dies insbesondere bei der Schülerin Aya beobachten lässt. Dieser gelingt es, ganz von den Beispieleinträgen in den Zahlenmauern zu abstrahieren und die bloße Struktur der Zahlenmauer ihrem formalen Beweisen zugrunde zu legen.

eher kontinuierlicher Verlauf beispielgebundenen Beweisens

- Sprachlich gehen die beiden Schülerinnen Sonja und Aya in der Explikation des Beweises als Sinnstruktur versierter vor. Mit der Wortbildung *Doppelstein* (So 280) zeigt die Schülerin Sonja ein tiefergehendes Beweisverständnis an. Von sich aus betont sie bei einem Beweis die Unabhängigkeit von den jeweiligen Beispielzahlen und gebraucht zu dessen Untermauerung den Terminus *zweimaliges Addieren* (So 124, So 224). Der rein formale, aus dem Sprachspiel mit dem *Irgendwas* (Ay 188) hervorgehende Beweis der Schülerin Aya stellt vor Augen, auf welch hohem Abstraktionsniveau sich Grundschüler der 4. Klasse schon bewegen können, noch ohne formeller Sprache mächtig zu sein. Dies bringt die Schülerin Aya schließlich auch dazu, Teile der allgemeinen Behauptung an der Vierer-Zahlenmauer und bei der Zahlenmauer beliebiger Höhe zu beweisen. Dabei verwendet sie hauptsächlich ihre eigene statt die aufgesetzte Sprache formeller Beweise. Hieran wird deutlich, dass Sprache nicht nur zur Darstellung des Gedachten, sondern auch als Denkmittel verwandt wird.

versierte Manifestierung des Beweises

3.2.8 Resümé

Mit den schülerbezogenen Ergebnissen im Hintergrund sollen nun auch die Forschungsfragen aus ↑ Abs. 3.2.2 soweit als möglich beantwortet werden.

> ○ Indizien subjektiver Realisierung bei Regelverbänden
>
> Welche Indizien sprechen dafür und dagegen, dass eine Schülerin den hier thematisierten Regelverband (hinsichtlich der Position der Erhöhung, der Größe der Erhöhung und der Höhe der Zahlenmauer) als verschieden allgemein zu betrachtendes Argumentgefüge subjektiv realisiert hat? Reicht schon die begründete Kenntnis einer Grundregel (nach Wittmann, ↑ Abs. 1.2.3 eine Operation) aus, um einen Regelverband zu überblicken?

Kenntnis von Regeln

Die Kenntnis von für einen Regelverband grundlegenden Regeln kann ausreichen, um einen beispielgebundenen Beweis zu führen. Nehmen anfänglich begründete Regeln dabei den Charakter von Operationen an, deren Anwendbarkeit nicht jedes Mal hinterfragt wird, kann die Gültigkeit von Teilargumenten des Regelverbands wieder latent werden. Gerade das formelle Beweisen bringt die Gefahr des bloßen Verschiebens von Variablenzeichen (resp. von Punkten) mit sich. Das daraus entwickelte Kalkül kann die eigentliche Beweisidee wieder verdecken – einer Schülerin kann es passieren, dass sie auf diesem Wege zwar bewiesen hat, *dass* die Behauptung gilt, aber nach Abschluss des Beweises nicht mehr sagen kann, *warum* diese gilt (vgl. Hanna (1990) in ↑ Abs. 1.1.1 und Goldberg (1992) in ↑ Abs. 1.2.5). Thematisiert eine Schülerin hingegen die unterschiedlichen Voraussetzungen und die Tragweite der Behauptungen im Regelverband, und prägt sie ihre eigene Sprechweisen, um leicht differierende Beweisgänge darzustellen, spricht dies für eine hinreichende subjektive Realisierung der betrachteten Argumente.

Thematisierung unterschiedlicher Voraussetzungen und Beweisgänge

> ○ Verläufe beispielgebundenen Beweisens
>
> Wie kann beispielgebundenes Beweisen von Schülern zwischen Latenz und subjektiver Realisierung des Beweises (resp. zwischen induktivem Prüfen und formalem Beweisen) konkret verlaufen? Stellt sich dies hauptsächlich als ein kontinuierlicher Prozess allmählicher Ablösung von den betrachteten Beispielen dar, welche mit der schrittweisen Verallgemeinerung der Behauptung im betrachteten Regelverband einhergeht? Oder sind Brüche oder Rückschritte im jeweiligen Erkenntnisweg feststellbar?

langsame, changierende Beweisverläufe

An den vorstehenden Analysen konnte das Changieren beispielgebundenen Beweisens sowohl in fortschreitender Verallgemeinerung einer Behauptung als auch beim Beweisen einer spezifischen Behauptung des Regelverbands beobachtet werden. Es hat sich gezeigt, dass ein langsamerer, changierender Verlauf beispielgebundenen Beweisens mehr Möglichkeiten bieten kann, auch über das beispielgebundene Beweisen selbst und seinen Polen induktiven Prüfens und formalen Beweisens zu reflektieren – sowohl für Lernende als auch für Lehrende. Möglicherweise liegt hier ein größerer didaktischer Gewinn als bei einem schnellen Fortschreiten hin zu abstrakt versprachlichten formalen (allgemeinen) Beweisen. Brüche im Erkenntnisweg stellen sich häufig dann ein, wenn Schüler auf ein bereits begründetes Argument so sehr vertrauen, dass es bei erneuter Anwendung in einem allgemeineren Kontext nicht mehr ohne weiteres gültig ist. Dies kann dann aber mittelbar zur Erfassung veränderter Voraussetzungen und Beweiswege in allgemeineren Kontexten beitragen, eine weitergehende Differenzierung ermöglichen und damit dem beispielgebundenen Beweisen wiederum dienen.

Brüche im Erkenntnisweg

- Wandlung des sprachlichen Ausdrucks beim Beweisen

  Wie ändert sich die Sprache von Schülern während ihres beispielgebundenen Beweisens (an den Zahlenmauern)? Inwiefern kommt darin der changierende Charakter beispielgebundenen Beweisens zum Ausdruck? Welche Bezeichnungen und Formulierungen verwenden oder übernehmen Schüler, um das bald konkreter, bald allgemeiner Werdende (an den Zahlenmauern) auszudrücken? Wie wandelt sich die sprachliche Ausdrucksweise von Schülern wiederum bei weiter fortschreitender Verallgemeinerung im betrachteten Regelverband?

Der versierte Einsatz anfangs vorgegebener oder selbst geprägter sprachlicher Mittel trägt zur subjektiven Realisierung des Beweises entscheidend bei. Dabei handelt es sich häufig um ein Wechselspiel zwischen fortschreitender Erkenntnis des Allgemeingültigen und dessen sprachlicher Vermittlung gegenüber dem Experten und sich selbst. Zur sprachlichen Differenzierung geben somit einerseits die Entdeckungen der Schüler selbst Anlass, andererseits kann der Experte darauf hinwirken. Der günstigste Fall stellt sich dann ein, wenn der Schüler seine Sprachspiele am betrachteten Beispiel allmählich selbst entwickelt und dabei beispielgebunden beweist. Gleichwohl benennen Schüler häufig nicht die modifizierten Voraussetzungen von Behauptungen bei fortschreitender Verallgemeinerung.

sprachliche Mittel zwecks Gewinnung von Erkenntnis

selbst entwickelte Sprachspiele

- Rolle von Beispielzahlen in Darstellungsmitteln

  Von welcher Art sind die gewählten Zahlenmauern bei changierenden Übergängen zwischen Latenz und subjektiver Realisierung des Beweises? Ist es den Schülern möglich, sich die Beispielzahlen in den Steinen der Zahlenmauern in dem Sinne wegzudenken, dass sie darin beliebige (natürliche) Beispielzahlen erkennen? Werden die Zahlenmauern benutzt, um die Behauptung durch Ausrechnen induktiv zu bestätigen, oder um sie deduktiv zu begründen? Bedürfen die Schüler nach ihrer Darstellung des Beweises in formaler Sprache noch weiterer Zahlenmauern?

Die Zahlenmauern können zusammen mit der verwendeten Punktnotation als Darstellungsmittel komplexer Additionsaufgaben angesehen werden, die unterschiedlichen Voraussetzungen genügen und verschiedene Vergleichsmöglichkeiten eröffnen. Ihre geometrische Form lässt die Beweise der aufgestellten Be-

Zahlenmauern als Darstellungsmittel von Additionsaufgaben hauptungen auch als *visual proofs* erscheinen (↑ Kap. 1.2.4). Deshalb können daraus auch die in der Literatur angeführten Schwierigkeiten hinsichtlich des beispielgebundenen Beweisens in dem Sinne erwachsen, dass das Allgemeingültige nicht nur rein arithmetisch subjektiv realisiert werden muss, sondern auch stets seiner geometrischen Übertragung bedarf. Grundschüler sind in der Regel nicht in der Lage, die Behauptungen an den Zahlenmauern losgelöst ohne Eintragung von Beispielzahlen zu beweisen. Hierzu bedarf es des Hilfsmittels der Punktnotation, mit der die Konstruktion imaginierter Beispiele ermöglicht wird. Doch prüfen die Schüler bereits begründete Behauptungen gerne auch weiterhin mit neuen Beispielzahlen, wenn ihnen die Punktnotation zu abstrakt erscheint.

Punktnotation zur Konstruktion imaginierter Beispiele

3.3 Latente Beweisideen beim beispielgebundenen Beweisen

Einleitung und Übersicht

In dieser dritten Analyse wird untersucht, wie sich das Entdecken und Prüfen mit latenter Beweisidee zum beispielgebundenen Beweisen i.e.S. wandeln kann, und welche Rolle dabei konkrete und bedingt vorstellbare Beispiele einnehmen. Analysiert werden soll zudem, wie Schüler ihre anfangs entdeckte Behauptung während oder nach ihrem beispielgebundenen Beweisen in eine formelle Darstellung überführen. In einem primär geometrischen Aufgabenkontext gehen drei Schüler einzeln der Frage nach, wie viele Verbindungen zwischen den Ecken eines vollständigen Graphen bestehen.

3.3.1	*Mathematische Analyse*	Kl. 7	Vollständiger Graph
		Beh.	Wenn ein vollständiger Graph n Ecken hat, dann bestehen $n \cdot (n-1)/2$ Verbindungen zwischen diesen Ecken.
3.3.2	*Forschungs -perspektiven -bereiche -fragen*	I III IV	○ Wandlung vom Entdecken und Prüfen zum beispielgebundenen Beweisen i.e.S. ○ Rolle konkreter und bedingt vorstellbarer Beispiele ○ Formalisierung von Behauptung und Beweis
3.3.3	*Kontext*	Mo/Sö/Al	Darstellung des Problems, die Anzahl der Verbindungen in einem vollständigen Graphen zu bestimmen
3.3.4	*Hauptanalyse*	Mo	Zählverfahren Reihe aufwärts
3.3.5	*Hauptanalyse*	Mo	Zählverfahren Multiplikation
3.3.6	*Kontrastanalyse*	Sö/Al	Latente Beweisideen an bedingt vorstellbaren Beispielen
3.3.7	*Vergleichsanalyse*	Mo/Sö/Al	Formalisierungen von Behauptung und Beweis
3.3.8	*Ergebnisse*	Mo Sö/Al	Verlaufsbetrachtung Summarische Betrachtung
3.3.9	*Resümé*		zu den Forschungsperspektiven, -bereichen und -fragen

3.3.1 Mathematische Analyse: Vollständiger Graph

Gegeben sei ein vollständiger Graph, d.h. eine Menge von Ecken, die jeweils mit allen anderen Ecken außer mit sich selbst genau einmal verbunden sind. Der mathematische Gegenstand dieser Analyse ist die folgende

schulgemäß formulierte Behauptung

Behauptung	Wenn ein vollständiger Graph n Ecken hat, dann bestehen $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Verbindungen zwischen diesen Ecken.

Die nachstehende ↑ Abb. 3.20 zeigt einen vollständigen Graphen mit 5 Ecken und 10 Verbindungen (vgl. ↑ Abs. 1.5.1, 1.5.3):

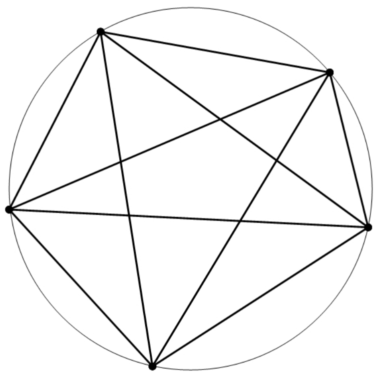


Abb. 3.20: vollständiger Graph mit 5 Ecken

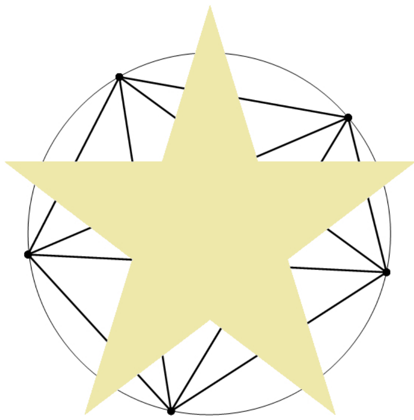


Abb. 3.21: vollständiger Graph mit 5 Ecken, aufgelegter Stern

Abstrakter formuliert, handelt es sich um die folgende Behauptung:

abstrakt formulierte Behauptung

Behauptung	$\lvert K(V_n)\rvert = \binom{n}{2}$ für alle vollständigen Graphen V_n.

Dabei gibt $K(V_n)$ die Kantenmenge an, d.h. die Menge aller Verbindungen des vollständigen Graphen V_n. Da sich die Kantenmenge $K(V_n)$ als Menge von Tupeln (i, j) mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $i \neq j$ definieren lässt, ist deren Mächtigkeit gleich der Anzahl aller (elementverschiedener) zweielementiger Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Verfahren zum Abzählen

Im Folgenden werden einige Verfahren zum Abzählen der Verbindungen eines vollständigen Graphen genannt, welche für Schüler der 7. Klasse in Frage kommen. Dies geschieht am Beispiel des obigen vollständigen Graphen mit 5 Ecken. Die ersten drei Verfahren sind additiv, das vierte multiplikativ:

1. *Unsystematisches Zählverfahren von Hand*

   Zählverfahren von Hand

   Die Verbindungen des vollständigen Graphen werden von Hand gezählt und ggf. abgestrichen, um doppeltes oder ausgelassenes Zählen zu vermeiden. Sofern richtig gezählt wurde, erhält man insgesamt 10 Verbindungen. Das *Zählverfahren von Hand* gestaltet sich für vollständige Graphen mit mehr Ecken deutlich schwieriger. Für das induktive Prüfen ist dieses unsystematische Zählverfahren brauchbar. Zur abduktiven Erschließung einer Formel ist es wenig geeignet, so dass sich daraus auch nur schwerlich eine Beweisidee ergeben kann.

2. *Zählverfahren Reihe abwärts*

   Zählverfahren Reihe abwärts

   Naheliegend ist das Abzählen der Verbindungen reihum abwärts: Von der ersten betrachteten Ecke gehen 4 Verbindungen zu den übrigen Ecken aus. Diese werden abgestrichen. Von der zweiten, benachbarten Ecke gehen noch 3 ungestrichene Verbindungen zu den übrigen Ecken. Von der dritten Ecke gehen noch 2 ungestrichene Verbindungen und von der vierten Ecke nur noch eine ungestrichene Verbindung aus. Bei der fünften Ecke angelangt, sind alle Verbindungen schon abgestrichen, so dass ihre Anzahl insgesamt $4+3+2+1+0=10$ beträgt. Das *Zählverfahren Reihe abwärts* ist leicht einzusehen, hat jedoch den Nachteil, dass daraus mit der Summierung der ersten $n-1$ natürlichen Zahlen ein arithmetisches Problem erwächst: Es bedarf eines zusätzlichen Schritts zu einer Kurzformel für n Ecken, d.h. eines Schritts von der Summe zum Produkt, etwa mittels der Summenformel nach Gauss.

3. *Zählverfahren Reihe aufwärts*

   Zählverfahren Reihe aufwärts

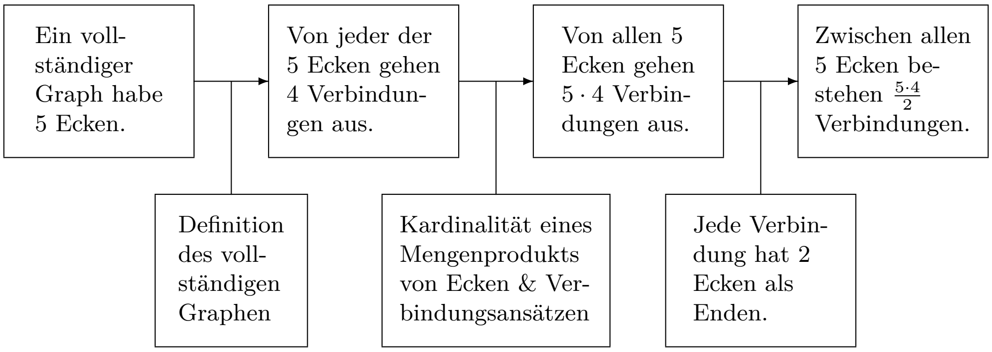
   In einer Umkehrung des *Zählverfahrens Reihe abwärts* wird der vollständige Graph mit $n=5$ Ecken sukzessive aufgebaut. Eine Ecke ist der Definition nach nicht mit sich selbst verbunden. Zwischen zwei Ecken besteht eine Verbindung. Kommt eine dritte Ecke dazu, so auch zwei Verbindungen, die zu den beiden bereits bestehenden Ecken gehen. Mit jeder neuen Ecke kommen so viele Verbindungen hinzu, wie an Ecken schon vorhanden sind. Insgesamt beträgt ihre Anzahl $0+1+2+3+4=10$ resp. $0+1+2+...+n-1$. Das *Zählverfahren Reihe aufwärts* ist gegenüber dem *Zählverfahren Reihe abwärts* besser zu einer vollständigen Induktion fortsetzbar. Als Nachteil bleibt im Grunde jedoch dasselbe arithmetische Problem wie beim *Zählverfahren Reihe abwärts* bestehen.

4. *Zählverfahren Multiplikation*

   Zählverfahren Multiplikation

   Definitionsgemäß ist jede Ecke mit allen anderen Ecken außer mit sich selbst verbunden. Da von jeder Ecke eines vollständigen Graphen mit 5 Ecken somit jeweils $4=5-1$ Verbindungen zu allen jeweils anderen 4 Ecken ausgehen, gibt es insgesamt $5 \cdot 4$ von allen 5 Ecken ausgehende Verbindungen. Zwei ausgehende Verbindungen verschmelzen jeweils zu einer Verbindung zwischen zwei Ecken, so dass die Anzahl $5 \cdot 4$ zu $5 \cdot 4/2=10$ halbiert werden muss. Diese Überlegung erfolgt vordergründig am 5-Eck, sie kann jedoch auch an einen beliebigen vollständigen Graphen mit n Ecken geführt werden, so dass die Behauptung, ein vollständiger Graph habe $n \cdot (n-1)/2$ Verbindungen, beispielgebunden bewiesen werden kann.

Das *Zählverfahren Multiplikation* lässt sich um so leichter einsehen, wenn dabei Terme wie $5 \cdot 4$ und $5 \cdot 4/2$ nicht sofort ausgerechnet werden. Der entsprechende Beweis kann als mehrgliedriges (beispielgebundenes) Argumentgefüge wie folgt dargestellt werden (vgl. ↑ Abs. 1.5.1):



In ↑ Abs. 1.5.2 wurden für die Aufgabenstellung am vollständigen Graphen fiktive Beispiele für die subjektive Realisierung und Manifestierung des Beweises als Sinnstruktur gegeben. Dass Schüler nicht alle Teilargumente auf Anhieb subjektiv realisieren dürften, hängt auch damit zusammen, dass das *Zählverfahren Multiplikation* ein analytischer Weg zu einer mehr strukturellen Betrachtung des vollständigen Graphen ist.

Dadurch, dass die Bindung beim *Zählverfahren Multiplikation* am geometrischen Kontext erhalten bleibt, erschließt sich dem Schüler die Behauptung ohne additiven Umweg möglicherweise schneller. Gleichwohl ist sie kognitiv anspruchsvoller, so dass der Lernende zunächst zu den beiden additiven *Zählverfahren Reihe aufwärts/abwärts* greifen dürfte. Diese lassen sich als (de)konstruktive Wege in einem schrittweisen Auf- oder Abbauen des Graphen verstehen. Um einer damit verbundenen Tendenz zum induktiven Prüfen zu begegnen, kann der Lehrende den Lernenden zum Auflegen und Wegnehmen eines Sterns anregen und diesen damit wohlmöglich eher zum *Zählverfahren Multiplikation* veranlassen (↑ Abb. 3.21, 3.25).

didaktische Implikationen

Ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit können die Ecken des vollständigen Graphen zum Schülergespräch auf einer Kreislinie angeordnet werden. Um Verwechslungen mit den Verbindungen des einbeschriebenen vollständigen Graphen zu vermeiden, kann die Kreislinie dicker oder dünner aufgetragen werden. Mit einem aufgelegten, schwach durchscheinenden Stern ist der Beweis der Behauptung bei entsprechend farblicher Gestaltung auch als *visual proof* darstellbar. Überdies kann dem Lernenden die Behauptung vorgegeben oder ein beispielgebundener Beweis vorgelegt werden. In der nachfolgenden Untersuchung wurde das Vorgehen gewählt, die Schüler die Behauptung entdecken zu lassen. Diese Vorentscheidung ist durch die Art der Forschungsfragen bedingt.

3.3.2 Forschungsperspektiven, -bereiche und -fragen

Forschungsperspektiven dieser Einzelfallstudie

Thema dieser Analyse ist das Entdecken und das Prüfen einer Behauptung mit latenter Beweisidee an konkreten und bedingt vorstellbaren Beispielen sowie die Formalisierung beispielgebundenen Beweisens. Die Forschungsbereiche dieser Einzelfallstudie werden aus folgenden Perspektiven entwickelt (vgl. ↑ Kap. 2.1):

I	Theoretische Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen i.e.S. (in Latenz, subjektiver Realisierung und Manifestierung des beispielgebundenen Beweises als Sinnstruktur)
III	Praktische Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen i.w.S. (einschließlich von Zugängen zum beispielgebundenen Beweisen, etwa des Entdeckens und des Prüfens)
IV	Sprachliche Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen in Explikation des Allgemeingültigen am Besonderen (unter besonderer Berücksichtigung sprachlicher Aspekte)

Forschungsbereiche und Forschungsfragen

Von dieser Schwerpunktsetzung ausgehend, lassen sich mit Blick auf die Aufgabenstellungen nachstehende Fragen zu folgenden Forschungsbereichen stellen:

- Wandlung vom Entdecken und Prüfen zum beispielgebundenen Beweisen i.e.S.

  Wie verhält sich ein Schüler beim Entdecken und Prüfen von Behauptungen mit oder ohne latente(r) Beweisidee an der Front seines Wissens? (Der Schüler kann die Verbindungen in einem oder mehreren vollständigen Graphen auf verschiedene Art und Weise abzählen und darüber zu Behauptungen gelangen, welche sich nicht unbedingt als richtig erweisen müssen. Hat ein Schüler die Summendarstellung für die Anzahl der Verbindungen in einem vollständigen Graphen entdeckt, stellt sich die Frage, wie er von dieser additiv formulierten Behauptung zur multiplikativ formulierten Behauptung gelangt. Denn die zugrunde liegende Beweisstruktur des *Zählverfahrens Multiplikation* stellt sich als relativ komplex dar. Es ist somit von besonderem Interesse, ob und in welchem Umfang der Schüler den Beweis der Behauptung am betrachteten vollständigen Graphen schon unwissentlich vorwegnimmt, ehe er die latente Beweisidee dann schließlich subjektiv realisiert.)

- Rolle konkreter und bedingt vorstellbarer Beispiele

  Welche Rolle spielt das konkrete und das bedingt vorstellbare Beispiel (eines vollständigen Graphen) bei der subjektiven Realisierung der latenten Beweisidee? Dient es als bloßes Darstellungsmittel, als vorübergehende gedankliche Stütze oder als Projektionsfläche zur Entwicklung des Beweises? Es ist untersuchenswert, welche Instanzen (des vollständigen Graphen) ein Schüler als Beispiele heranzieht, um zur allgemeinen Behauptung und deren Beweis vorzudringen. Reichen hierbei allein konkret fassbare oder zudem bedingt vorstellbare Beispiele aus, um Teilargumente des Beweises subjektiv zu realisieren?

- Formalisierung von Behauptung und Beweis

  Wie leicht fällt es Schülern einer 7. Klasse, eine Behauptung in eine formelle Darstellung zu bringen, d.h. zu formalisieren? Die betrachtete Behauptung kann mittels des Variablenzeichens n für die Anzahl der Ecken eines vollständigen Graphen formalisiert werden. Welche Wege beschreiten die Schüler, um vom beispielgebundenen oder formalen Beweisen zum formellen Beweisen zu gelangen? Wie schätzen sie ihr formelles Beweisen gegenüber dem beispielgebundenen oder formalen Beweisen rückblickend ein?

3.3.3 Kontext

Ausgangslage

Die Schüler Moritz (Mo), Sören (Sö) und Ali (Al) gehen jeweils in die 7. Klasse eines Gymnasiums. In einzelnen Gesprächen stellt der Interviewer den Schülern die Aufgabe, die Anzahl der Verbindungen zwischen markierten Ecken auf einer Kreislinie zu bestimmen, die alle jeweils miteinander genau einmal, aber nicht mit sich selbst verbunden sind.

Vorgehen im Interview

Die Schüler suchen nach einem passenden Zählverfahren, durch das sie die Anzahl der Verbindungen in einem von ihnen aufgezeichneten vollständigen Graphen bestimmen können. Wie in ↑ Abs. 3.3.1 geschildert, kommen dafür mehrere Zählverfahren (*per Hand*, *Reihe abwärts*, *Reihe aufwärts*, *Multiplikation*) in Betracht. Der Interviewer vermeidet es, die Behauptung $|K(V_n)| = n \cdot (n-1)/2$ allzu früh ins Spiel zu bringen, um die Schüler an der Front ihres Wissens zu beobachten. Da sich die beiden Reihenverfahren in Voruntersuchungen mit anderen Schülern der 7. Klasse jedoch als naheliegender herausgestellt haben, greift der Interviewer ein, sobald sich die Schüler zu sehr darin verlieren.

3.3.4 Hauptanalyse (Moritz): Zählverfahren Reihe aufwärts

Zu Beginn des Gesprächs zeichnet der Schüler Moritz 5 Ecken auf die Kreislinie des ersten Arbeitsblatts (↑ Abb. 3.22, s.u.). Mit dem bereitgestellten Geodreieck zieht er zunächst nur einige Verbindungen zwischen den Ecken. Während dessen behauptet er, dass der entstandene vollständige Graph insgesamt 20 Verbindungen habe, weil jeder der 5 Ecken 4 Verbindungen aufweise. Dabei spricht der Schüler die Übereinkunft, dass jede Ecke zwar mit allen anderen Ecken, aber nicht mit sich selbst verbunden ist, nicht aus. Er bemerkt jedoch schnell, dass seine Behauptung nicht richtig ist, zumal er nach dem Zeichnen insgesamt bloß 10 statt 20 Verbindungen zählt.

Schüler Moritz behauptet: $|K(V_n)| = n \cdot (n-1)$ *für* $n = 5$

Im Weiteren vermutet der Schüler Moritz, dass ein vollständiger Graph mit 4 Ecken 8 Verbindungen hätte. Rechtfertigen kann er seine Vermutung nicht, so dass man ihm ein Raten unterstellen kann. Er sieht jedoch einen Begründungsbedarf, so dass er auf der Kreislinie eines zweiten Arbeitsblatts (↑ Abb. 3.23, s.u.) zunächst 4 Ecken einzeichnet und miteinander verbindet. Ihn überrascht, dass jedoch nur 6 statt der vermuteten 8 Verbindungen zu zählen sind.

Schüler Moritz vermutet: $|K(V_n)| = 2n$ *für* $n = 4$

In diesem frühen Stadium führt der Schüler Moritz jeweils eine Abduktion zur Vorhersage eines Gesetzes:

(Falsche) Behauptung	Wenn ein vollständiger Graph n Ecken hat, dann besitzt dieser $n \cdot (n-1)$ resp. $2n$ Verbindungen.

Der Schüler Moritz möchte die im Beispiel $n = 5$ (↑ Abb. 3.22) resp. $n = 4$ (↑ Abb. 3.23) getroffene Vorhersage des Gesetzes jeweils induktiv bestätigen. Er widerlegt jedoch sein jeweils vorhergesagtes Gesetz durch Zeichnen und Abzählen der Verbindungen auf beiden Arbeitsblättern. Eine Abfolge von Abduktionen, Induktionen und Deduktionen, die die logischen Schlüsse des Schülers Moritz kennzeichnen, ließe sich mit den Schemata nach Peirce darstellen (↑ Kap. 1.3).

Auf eine Nachfrage des Interviewers hin erscheint dem Schüler Moritz das zeichnerische Prüfen der jeweiligen Behauptung für weitere Vielecke nicht praktikabel zu sein. Statt dessen betrachtet er den vollständigen Graphen mit 4 Ecken auf dem zweiten Arbeitsblatt (↑ Abb. 3.23) und formuliert folgendes Aufbauprinzip zum Viereck, Fünfeck und Sechseck:

07:22	Mo	36	*das* (7 sec) *also* 3 *Punkte haben erst einmal* 3 *Strecken .. und, sobald ein vierter dazu kommt, kommen, müssen* 3 *Strecken immer dazu kommen, dass heißt* 3, 4 (deutet auf Ecken der Kreislinie) *wenn's e'n fünfter dazukommt, müssten noch 'mal* 3 *Strecken dazu kommen ... wenn ich jetzt hier einen fünften hinzeichnen würde .. eins .. nee, würden ja mehr hinzukommen .. eine Strecke* 2 *Strecken,* 3 *Strecken,* 4 *Strecken .. es kommt immer die Anzahl zu, die .. an Punkten schon da ist .. wenn ich einen sechsten dazu mache dann müssten noch 'mal* 5 *Strecken dazukommen* (8 sec) *also bei* 3 *Punkten* 3 *Strecken, bei* 4 6, *bei* 5 *Punkten dann* 6 + 4 *sind* 10, *bei* 6 *müssten das dann* (5 sec) *müssten das dann* 20 *sein ... bei* 7, *äh* 40
08:43	I	37	*mm-mmh*
08:45	Mo	38	*also immer verdoppeln, sobald ein Punkt noch dazukommt*

Schüler Moritz behauptet für $n = 3, 4, 5$ zugleich $|K(V_n)| = 3 \cdot (n-2)$, $|K(V_n)| = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n-1)$ und $|K(V_n)| = 2 \cdot |K(V_{n-1})|$

Der Schüler Moritz formuliert in diesen beiden Äußerungen ein gemischtes Aufbauprinzip an dem sichtbaren Viereck des zweiten Arbeitsblatts (↑ Abb. 3.23). Dabei hat er die fünfte und sechste Ecke zu diesem Zeitpunkt noch nicht durch eine Zeichnung, sondern nur in Gedanken ergänzt. Nach Statuierung der falschen Behauptung $|K(V_n)| = 3 \cdot (n-2)$ trifft der Schüler Moritz das richtige Aufbauprinzip in seiner allgemeinen Form zunächst im mittleren Teil der Äußerung Mo 36: *es kommt immer die Anzahl* [sc. an Verbindungen hin]*zu, die .. an Punkten schon da ist.* Daraus wird schließlich in Äußerung Mo 38 ein Verdopplungsprinzip: *also immer verdoppeln, sobald ein Punkt noch dazukommt.* Dass der Schüler zum Ende seiner Äußerung Mo 36 von einem zum anderen Aufbauprinzip übergeht, kann daran liegen, dass er zwischen Ecken und Verbindungen noch nicht hinreichend differenziert hat. Jedoch ist dies vielleicht auch dem Zufall geschuldet, dass sich die Anzahl an Verbindungen von einem Dreieck zu einem Viereck von 3 auf 6 Verbindungen verdoppelt bzw. um 3 erhöht.

Schüler Moritz prüft induktiv und widerlegt seine Vorhersagen

Zum induktiven Prüfen seiner Vorhersagen ergänzt der Schüler Moritz das Viereck auf dem zweiten Arbeitsblatt (↑ Abb. 3.23) zunächst zu einem Fünfeck. Dies verhilft ihm dazu, die Rolle von Ecken und Verbindungen genauer zu untersuchen. Der Schüler Moritz nimmt dann von seinem Zählverfahren der sukzessiven Erhöhung um 3 und seinem Zählverfahren der Verdopplung Abstand und favorisiert das *Zählverfahren Reihe aufwärts.* Er trifft im Gegensatz zur Äußerung Mo 36 nunmehr die Vorhersage, dass ein vollständiger Graph mit 6 Ecken bloß 15 statt 20 Verbindungen habe. Diese Behauptung beginnt er zu prüfen, indem er auf dem zweiten Arbeitsblatt (↑ Abb. 3.23) eine sechste Ecke auf die Kreislinie zeichnet. Er verifiziert seine neue Vorhersage bei diesem zweiten Zählen, dem *Zählverfahren von Hand*, indem er bereits gezählte Verbindungen nummeriert.

Konsolidierung des Zählverfahrens Reihe aufwärts

Der Interviewer gibt nun vor, ein Mitschüler wolle wissen, wie viele Verbindungen man bei dem vollständigen Graphen eines Siebenecks zähle. Der Schüler

Moritz antwortet, dass es dann 21 Verbindungen gäbe. Er scheint von seiner *Theorie*, wie er in Äußerung Mo 70 kundtut, überzeugt zu sein:

14:12	Mo	72	*ja, das ist jetzt noch, also .. man ... angenommen, man hat ein Dreieck als Grundform .. dann jeder weitere Punkt, bringt halt immer die Anzahl der vorherigen Punkte dazu, die Anzahl der Punkte als Strecken hinzu, also wenn ich jetzt den vierten Punkt hier mach dann bringt das 3 Strecken hinzu, weil 3 Punkte schon da, beim fünften bringt es 4 Strecken, dazu, weil 4 Punkte schon vorher da waren, beim sechsten bringt es 5 Strecken dazu, weil es 5 Punkte schon vorher da waren, beim siebten müssten es dann 6 Strecken vorher da hinzufügen, weil es ja schon, 6 Punkte vorher da waren*

Der Schüler Moritz lässt durch das in der Äußerung Mo 72 selbst formulierte *Zählverfahren Reihe aufwärts* erkennen, wie er die Anzahl der Verbindungsstrecken in einem vollständigen Graphen mit n Ecken bestimmen kann: Ausgehend von einem *Dreieck als Grundform*, ergibt sich die Anzahl der Verbindungen in einem vollständigen Graphen mit n Ecken als Summe der Zahl 3 und aller ihrer Nachfolger bis zur Zahl $n-1$. Dieses Aufbauprinzip präzisiert er an dieser Stelle nun so: *dann jeder weitere Punkt, bringt halt immer die Anzahl der vorherigen Punkte dazu, die Anzahl der Punkte als Strecken hinzu.* Logisch gesehen formuliert der Schüler Moritz in Äußerung Mo 72 also den Induktionsschritt, ohne den (ihm vielleicht banal erscheinenden) Induktionsanfang von dem *Dreieck als Grundform* noch einmal wie zu Beginn der Äußerung Mo 36 erneut anzuführen.

Unterscheidung zwischen empirischer und theoretischer Erkenntnis

Auf die Nachfrage des Interviewers, wie viele Verbindungen denn ein Zehneck habe, kommt der Schüler Moritz nach einem vorübergehenden Rechenfehler auf das richtige Ergebnis von 45 Verbindungen. Für ein Hunderteck gibt es seiner Vermutung nach eine Formel. Der Schüler Moritz zeigt sich von seinem Aufbauprinzip auch deshalb überzeugt, da er dieses schon an mehreren Beispielen bestätigt gesehen hat, so dass er eine Veränderung nicht erwartet. Dennoch sieht er das induktive Prüfen prinzipiell nicht als mathematisches Begründen an.

additive Formulierung der Behauptung

Der Schüler Moritz hat bis jetzt allgemeine Vorhersagen über die tatsächliche Anzahl an Verbindungen in vollständigen Graphen mit n Ecken getroffen und an gegebenen oder vorgestellten Beispielen bestätigt oder widerlegt. Er favorisiert nunmehr das *Zählverfahren Reihe aufwärts* und formuliert das vermutete Gesetz $|K(V_n)| = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1)$ mit Beispielzahlen wie $n = 4, 5, 10$. Mit Hilfe des Interviewers notiert er etwa die Anzahl an Verbindungen in einem Zehneck zu $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ auf dem zweiten Arbeitsblatt (↑ Abb. 3.23). Für ein Hunderteck würde er das Zählverfahren aus praktischen Erwägungen heraus nicht wählen. Da es dem Schüler Moritz nicht leicht fällt, die arithmetische Formel auf den geometrischen Kontext zu beziehen, und er überdies nach einer kürzeren Formel sucht, regt der Interviewer ihn deshalb zu einer anderen Betrachtungsweise des vollständigen Graphen an.

3.3.5 Hauptanalyse (Moritz): Zählverfahren Multiplikation

Schüler Moritz wechselt die Perspektive vom additiven zum multiplikativen Zählverfahren

Der Schüler Moritz hat nun beide Arbeitsblätter vor sich liegen. Auf dem zweiten Arbeitsblatt (↑ Abb. 3.23) ist nunmehr ein Sechseck zu sehen. Zunächst betrachtet der Schüler Moritz jedoch das Fünfeck auf dem ersten Arbeitsblatt (↑ Abb. 3.22). Der Interviewer nimmt einen Rollenwechsel vor und verweist nachfolgend jeweils auf das Vorgehen eines fiktiven Mitschülers:

24:58	I	137	*ja, also, mmh, beim Fünfeck .. da hat er jetzt noch bisschen <u>anders</u> gezählt .. mmh ... äh, äh, er wusste jetzt nicht genau, wie viel Strecken gehen jetzt von jedem Punkt aus' ...* (deutet auf eine Ecke des ersten Arbeitsblatts, ↑ Abb. 3.22)
25:18	Mo	138	*also von <u>jedem</u> Punkt gehen, eigentlich* 4 *Strecken aus, also die sind dann natürlich auch doppelt weil, die <u>Strecke</u> geht von <u>dem</u> Punkt aus* (deutet auf eine Ecke des ersten Arbeitsblatts, ↑ Abb. 3.22) *und von <u>dem</u> Punkt aus* (deutet auf eine benachbarte Ecke)
25:30	I	139	*<u>aah</u>, warum sind die denn <u>doppelt</u>' ..*

Der Schüler Moritz erkennt in Äußerung Mo 138, dass die einer Ecke jeweils zugeordneten vier Verbindungen *doppelt* in dem Sinne sind, dass eine gewählte Verbindung von je zwei Ecken ausgeht. Die eigene Verwendung der Bezeichnung *doppelt* erleichtert es dem Schüler Moritz offenbar, am betrachteten Beispiel des Fünfecks und am vorgestellten Beispiel des Zehnecks zu einer Behauptung zu gelangen:

25:35	Mo	140	*ja weil es bei den Punkten die sich* (12 sec, schaut während dessen konzentriert auf das zweite Arbeitsblatt, ↑ Abb. 3.23), *<u>ah</u>, man kann das glaub ich so ausrechnen, wenn man, die Punkte,* $\cdot$ 4, *also jetzt x gleich Anzahl der Punkte,* $\cdot$ 4, *geteilt durch* 2 (schreibt $x \cdot 4 : 2$ auf das zweite Arbeitsblatt, ↑ Abb. 3.23) *also, beim Zehneck,* $10 \cdot 4$ *geteilt durch* 2 (schreibt $10 \cdot 4 : 2$ darunter) *äh das sind, ach,* 20 *.. ja das stimmt ja nicht*

Akt der Entdeckung

Schüler Moritz verallgemeinert die Behauptung, geht dabei aber nicht weit genug

Der Schüler Moritz geht nicht mehr auf die in Äußerung I 139 gestellte Nachfrage *warum sind die denn <u>doppelt</u>'* des Interviewers ein. Nach der längeren Pause in Äußerung Mo 140 manifestiert sich im Ausruf *<u>ah</u>* hingegen der Akt einer Entdeckung: Der Schüler Moritz trifft am vorliegenden Fünfeck die beispielgebunden (aber zugleich fehlerhaft) gehaltene Voraussage, der vollständige Graph des vorgestellten Zehnecks habe $10 \cdot 4 : 2$ Verbindungen. Damit führt der Schüler Moritz eine Entdeckung mit latenter Beweisidee, wie er sie in Äußerung Mo 138 am Fünfeck formuliert hatte. Bemerkenswert ist hierbei die Einführung der Variablen x zu seiner versuchten formellen Darstellung $|K(V_x)| = x \cdot 4/2$ der allgemeingültigen Behauptung $|K(V_x)| = x \cdot (x-1)/2$. Der Schüler Moritz betrachtet den zweiten Faktor noch nicht allgemein unabhängig, sondern bezieht ihn auf das vorliegende Fünfeck. Dem Schüler dürfte der früher in Äußerung Mo 36 bei der Genese des *Zählverfahrens Reihe aufwärts* genannte Zusammenhang *es kommt immer die Anzahl zu, die .. an Punkten schon da ist* zwischen der Anzahl an Ecken und der von ihnen jeweils ausgehenden Verbindungen verloren gegangen sein. Und so spezifiziert er in Äußerung Mo 140 seine nicht allgemeingültige Formel an der bloß vorgestellten Instanz eines Zehnecks zu $10 \cdot 4 : 2$ und widerlegt sie in Anbetracht des Ergebnisses 20 – möglicherweise, weil er abschätzen kann, dass 20 Verbindungen für ein Zehneck zu wenig sind, oder weil er am Ende der Äußerung Mo 36 für ein Sechseck 20 Verbindungen ansetzte.

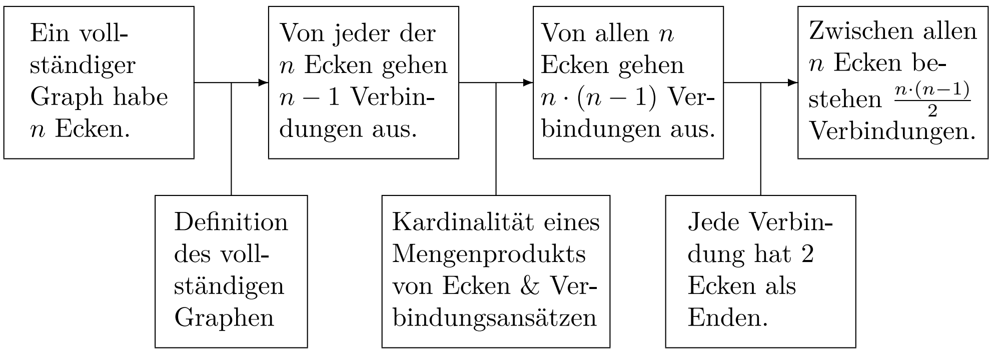
Schüler Moritz spezifiziert seine Behauptung am bedingt vorstellbaren Zehneck

Die allgemeingültige Behauptung lautet nach ↑ Abs. 3.3.1 wie folgt:

Behauptung	Wenn ein vollständiger Graph n Ecken hat, dann bestehen $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Verbindungen zwischen diesen Ecken.

Der zugehörige Beweis der Behauptung lässt sich als Sinnstruktur nach ↑ Abs. 1.5.1 in einem mehrgliedrigen Argumentgefüge so darstellen:

latente Sinnstruktur des Beweises



Die relativ früh manifestierte, allgemein gehaltene Regel *es kommt immer die Anzahl zu, die .. an Punkten schon da ist* aus Äußerung Mo 36 ist vom Schüler Moritz derzeit noch nicht in Deckung zu bringen mit der Aussage *von jeder der n Ecken gehen* $n-1$ *Verbindungen aus* des obigen Argumentgefüges. Ein Grund dafür liegt möglicherweise darin, dass der Schüler Moritz das multiplikative anstelle eines additiven Zählverfahren verfolgt. In den Äußerungen Mo 138 und Mo 140 hat der Schüler jedoch nunmehr die mittlere und die rechte Regel des mehrgliedrigen Argumentgefüges benannt und damit seine Konklusionen begründet.

Den Übergang von der Betrachtung einer als *doppelt* zu zählenden Verbindung in Äußerung Mo 138 hin zu einer allgemein versuchten Darstellung der Behauptung in Äußerung Mo 140 vollzieht der Schüler Moritz an dem betrachteten und vorgestellten Beispiel also recht plötzlich. Ihm misslingt zwar seine nicht hinreichend weitgehende Verallgemeinerung zu $x \cdot 4 : 2$ resp. $10 \cdot 4 : 2$ Verbin-

Schüler Moritz vollzieht den Übergang vom Besonderen zum Allgemeinen plötzlich dungen, sie birgt aber auch das Potential, auch noch einmal auf die Definition des vollständigen Graphen als Regel des ersten Teilarguments zurückzukommen (↑ Abb. 3.22). Diese Regel scheint dem Schüler Moritz nämlich nur kurzzeitig latent geworden zu sein:

26:16	I	141	*äh, warum nimmst du denn* · 4*'*
26:18	Mo	142	*jeder Punkt* (greift sich an den Kopf) *ach das das geht ja nur bei dem Fünfeck das ist ja Quatsch .. das wär ja nur für ein Fünfeck* (4 sec) *also wenn man, man müsste von jedem an* 9 *machen, immer .. ein Punkt, also eine Zahl weniger als man Punkte angeben will, also müsste man bei* 100, 100 · 99 *geteilt durch* 2 *rechnen* (schreibt 100 · 99 : 2 auf das zweite Arbeitsblatt) *.. emm, dann käm man glaub ich auf die Anzahl der Strecken* (8 sec, schreibt 990 : 2 = 495 und unterstreicht die Zahl 495 doppelt) *ja .. dann mein ich jetzt dass beim Hunderteck* 495 *Strecken gibt*

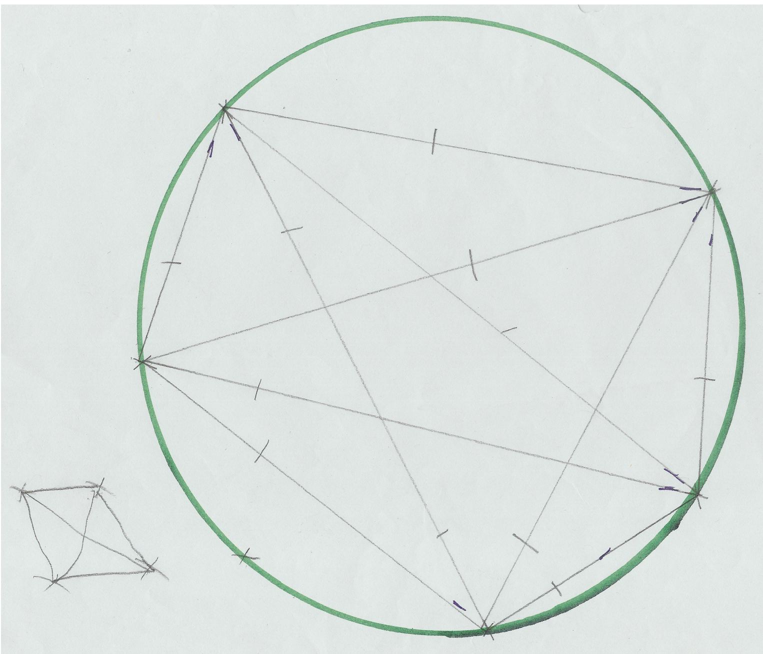


Abb. 3.22: Erstes Arbeitsblatt des Schülers Moritz

Auf die Nachfrage des Interviewers in Äußerung Mo 141 hin erkennt also der Schüler Moritz, dass sich der Faktor 4 bloß auf die Anzahl der von jedem Punkt ausgehenden Verbindungen in dem betrachteten Fünfeck bezieht. Die Folgeaussage *also wenn man, man müsste von jedem an* 9 *machen* in Äußerung Mo 142 bezieht der Schüler Moritz dann schon auf das vorgestellte Beispiel des Zehnecks.

Seine anschließende Aussage *immer .. ein Punkt, also eine Zahl weniger als man Punkte angeben will* ist nunmehr allgemein gehalten und lässt einen Schritt zur Algebraisierung erkennen. Dieser Abstraktionsprozess erlaubt es dem Schüler Moritz schließlich, in einem vollständigen Graphen mit 100 Ecken eine Anzahl von 495 Verbindungen zu berechnen. Dies geschieht fälschlicherweise unter Weglassen einer Null, was Interviewer und Schüler beide jedoch nicht bemerken.

Schüler Moritz stellt sich einen vollständigen Graphen mit 100 *Ecken vor*

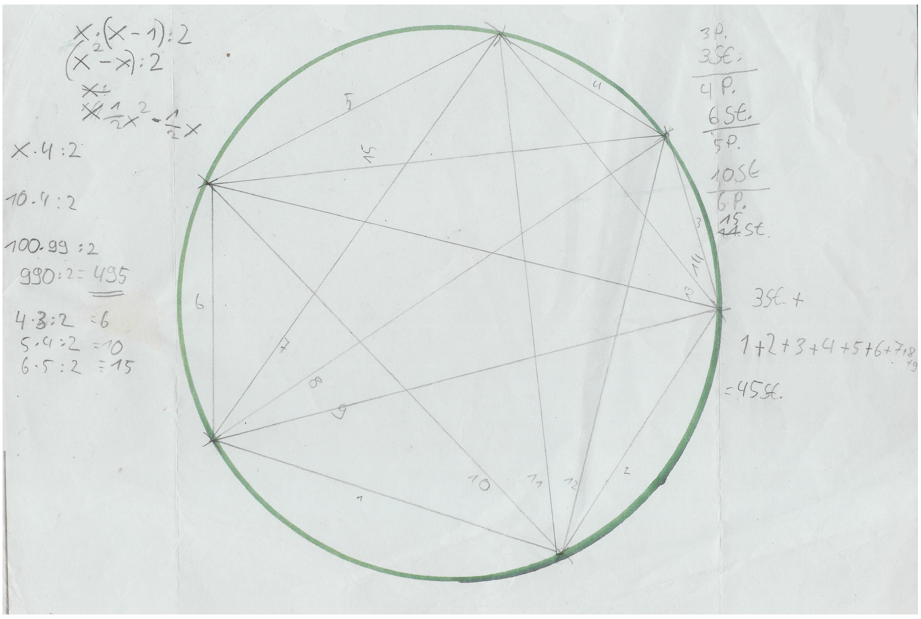


Abb. 3.23: Zweites Arbeitsblatt des Schülers Moritz

Die Richtigkeit des *Zählverfahrens Multiplikation* bestätigt der Schüler Moritz nun an den vertrauten Beispielinstanzen $n = 4, 5, 6$ und formuliert daran anschließend die Behauptung wie folgt:

Schüler Moritz bestätigt die Behauptung an weiteren Beispielen

28:26	Mo	144	*also meine ich schon wenn man das so ausrechnet, dass man die Punkte −, also die Punkte · .. die Punkte −1, geteilt durch* 2

Mit der expliziten Formulierung der Behauptung stellt sich aber zudem die Frage nach ihrem Beweis im Sinne einer nicht nur empirischen, sondern auch theoretischen Absicherung der Behauptung. Der Schüler Moritz soll deshalb seinem fiktiven Mitschüler den Beweis an einem beliebigen Vieleck erklären:

Schüler Moritz' Beweisversuch an vollständigen Graphen mit beliebiger Eckenanzahl

28:48	I	149	*er wollte das jetzt noch 'mal erklärt haben*
28:51	Mo	150	*also jetzt so allgemein'*
28:52	I	151	*ja, also er möchte das jetzt noch 'mal wissen von dir*
28:57	Mo	152	*also er weiß die Anzahl der Punkte, die, wie viel, mit wie viel Punkten das Vieleck haben soll'*
29:02	I	153	*mm-mmh*
29:03	Mo	154	*rechnet er diese Punkte,* $\cdot$*, die Punkte* -1
29:07	I	155	*warum, warum, das will er wissen, warum*
29:11	Mo	156	*weil jeder Punkt ja soviel an, weil, wenn man ein'n Punkt nimmt dann hat der ja so viel Punkte, also jetzt bei mir zum Beispiel beim Beispiel* (deutet auf das das erste Arbeitsblatt, ↑ Abb. 3.22) *das sind ja* 6 *Punkte, oder' .. ach* 5
29:20	I	157	*ja'*
29:21	Mo	158	*dann müsste man ja* $5 \cdot 4$ *rechnen weil jeder Punkt ..* 4 *andere Punkte, ehm, also* 4*, andere Punkte hat wo, die eine Strecke verbinden kann* (deutet auf das erste Arbeitsblatt, ↑ Abb. 3.22)
29:31	I	159	*ja* (nickt), *mm-mmh*
29:32	Mo	160	*beim Sechseck wären das dann ja* 5 *Punkte weil .. der hätte ja dann* (deutet auf eine Ecke des zweiten Arbeitsblatts, ↑ Abb. 3.23) *die* 1, 2, 3, 4, 5 *Punkte* (deutet auf die übrigen Ecken des ersten Arbeitsblatts, ↑ Abb. 3.22)
29:38	I	161	*mm-mmh*
29:39	Mo	162	*.. mit diesen* 5 *Punkten, kann er jeweils nur eine Strekke, verbinden*
29:43	I	163	*mm-mmh, ja, okay* (nickt)

Schüler Moritz beweist Teilbehauptungen beispielgebunden: Kardinalität $n \cdot (n-1)$

Der Schüler Moritz hat hier an den Beispielen $n = 5$ und $n = 6$ begründet, warum das Produkt $n \cdot (n-1)$ die Anzahl der von allen n Ecken ausgehenden Verbindungen ist. Als erstes Argument führt er dabei anhand dieser Beispiele an, dass von einer betrachteten Ecke genau $n-1$ Verbindungen zu allen anderen Ecken ausgehen. Er betont in Äußerung Mo 158 wiederum beispielgebunden, dass dies für jede der n Ecken gilt. Dadurch bestimmt er die Kardinalität $n \cdot (n-1)$ aller von allen Ecken ausgehenden Verbindungen beispielgebunden.

29:44	Mo	164	*dadurch dass er dann bei jedem, dass die Punkte dann immer doppelt sind .. äh die Str-, bei den Punkten die Strecken, doppelt sind, bei den* 4 (deutet auf eine Ecke des erstens Arbeitsblatts ↑ Abb. 3.22), *hat der ja auch* 4 (deutet auf einen benachbarten Ecke), *aber die Strecke ist doppelt* (deutet auf die Strecke zwischen den beiden Punkten), *also kann man die ja nicht doppelt zählen*

Schüler Moritz beweist Teilbehauptungen beispielgebunden: Termhalbierung $n \cdot (n-1)/2$

Schließlich hat der Schüler Moritz die Halbierung des Terms $n \cdot (n-1)$ am Beispiel der Verbindungen im Fünfeck durch das Argument bewiesen, dass jede

Strecke bei der vorausgehenden Multiplikation doppelt gezählt werde. Wie und warum im Einzelnen doppelt gezählt wird, führt er (als Beispiel im Beispiel) an einer konkreten Verbindung zweier benachbarter Ecken im betrachteten Fünfeck aus. Er lässt erkennen, dass diese Begründung am Beispiel für jede Verbindung in dem betrachteten Fünfeck gilt. Optimistisch gedeutet, hat er subjektiv realisiert, dass dies unabhängig von der Anzahl der Ecken eines vollständigen Graphen gilt, d.h. für jede Verbindung in jedem beliebigen vollständigen Graphen:

Beweis am Beispiel im Beispiel

29:57	Mo	166	*deshalb muss man die* (deutet auf das erste Arbeitsblatt, ↑ Abb. 3.22) *noch 'mal geteilt durch* 2, *rechnen und dann hat jeder Punkt nur* 2 *<u>Strecken</u>, <u>der</u>* (deutet auf eine Ecke des ersten Arbeitsblatts, ↑ Abb. 3.22) *hat meinetwegen, <u>diese</u> beiden hier* (zeigt auf zwei Verbindungen des vollständigen Graphen auf dem ersten Arbeitsblatt, ↑ Abb. 3.22, und streicht diese und weitere mit einem Querstrich ab) *.. der hat meinetwegen, <u>diese</u> beiden .. <u>der</u> hat meinetwegen <u>diese</u> beiden .. <u>der</u> hat meinetwegen, hier <u>die</u> .. <u>der</u> hat <u>die</u> und <u>die</u>, und, <u>der</u> hat .. <u>die</u>*

Insgesamt hat der Schüler Moritz fast alle Regeln des mehrgliedrigen (beispielgebundenen) Argumentgefüges genannt und damit die Struktur des Beweises manifestiert. Dass im vollständigen Graphen jede Ecke mit jeder anderen außer mit sich selbst verbunden ist, wurde bei den Vorübungen als selbstverständliche Voraussetzung angenommen.

Schüler Moritz manifestiert die latente Sinnstruktur

Dem Schüler Moritz ist es nach mehreren induktiven Prüfungen gelungen, die Behauptung allgemein zu formulieren und beispielgebunden zu beweisen. Nach der jeweiligen Phase beispielgebundenen Beweisens mit der Angabe der zugrunde liegenden Regeln versichert sich der Schüler Moritz seiner Behauptungen noch durch induktives Prüfen. Möglicherweise sucht er jeweils nach einer noch kompakteren Formel. Obwohl er jeweils zu keinen neuen Erkenntnissen gelangt, scheinen seine induktiven Bestätigungen sein Gefühl des Überzeugtseins zu stärken im Sinne eines *need for further checks* (↑ Abs. 1.1.2). Dabei lösen sich seine Ausführungen wieder vom geometrischen Kontext. In der arithmetischen Betrachtung (etwa von Zahlenreihen wie $1 + 2 + 3 + 4$ beim Fünfeck oder von Durchschnittswerten wie $49,5$ Verbindungen pro Ecke beim Hunderteck) steht der Schüler Moritz in Gefahr, die Geometrie des vollständigen Graphen aus den Augen zu verlieren. Hier schreitet der Interviewer jeweils ein, um einen Rückbezug auf den ursprünglich geometrischen Kontext zu gewährleisten.

Schüler Moritz sichert sich durch induktive Prüfungen ab

3.3.6 Kontrastanalyse (Sören, Ali): Latente Beweisideen an bedingt vorstellbaren Beispielen

der Interviewer lässt die Schüler Sören und Ali den vollständigen Graphen teilweise abdecken

In den Einzelgesprächen mit den Siebtklässlern Sören und Ali verfolgt der Interviewer die Intention, die Schüler von den *Zählverfahren Reihe abwärts / aufwärts* beschleunigt zum *Zählverfahren Multiplikation* zu bringen. Deshalb regt der Interviewer die Schüler jeweils dazu an, die Mitte des vollständigen Graphen mittels Papierschnitzel oder durch einen aufliegenden Stern abzudecken, so dass nur noch die Ansätze der Verbindungen des vollständigen Graphen sichtbar bleiben (↑ Abb. 3.21, 3.25). Das enaktive Moment, den Stern aufzulegen oder wegzunehmen, mag somit zu einer sprachlichen Differenzierung zwischen den Verbindungen und deren an den Ecken liegenden Ansätzen verhelfen. Besitzt der Stern auf dem konkret vorliegenden Fünf- oder Siebeneck noch die Funktion, die Aufmerksamkeit auf die Verbindungsansätze zu richten, können die Schüler vermöge dieser Idee des Auflegens und des Wegnehmens des Sterns möglicherweise rascher abstrahieren und zu einem Beweis der Kurzformel $|K(V_n)| = n \cdot (n-1)/2$ vordringen.

Schüler Sörens Zählverfahren Reihe abwärts

Obwohl der Schüler Sören zu Beginn des Gesprächs die Papierschnitzel in die Mitte des vollständigen Graphen mit 5 Ecken gelegt hat, formuliert er zunächst dennoch das *Zählverfahren Reihe abwärts*, indem er reihum auf die entsprechenden Ecken deutet:

04:15	Sö	16	*ja, erst 'mal hab ich, hier sind ja 4 Verbindungsstrecken, gehen von dem Punkt aus, emm, dann, bei dem sind nur noch 3, weil, eine Verbindungsstrecke ich schon hier mitgezählt hab, an dem Punkt sind dann nur noch* 2, *weil ich von da und da schon zwei Verbindungsstrecken mitgezählt hab, hier dann nur noch eine, und da dann gar keine mehr* (deutet dabei reihum auf die Eckpunkte)

der Interviewer regt zur Differenzierung zwischen Verbindungen und Verbindungsansätzen an

Ein anderes Zählverfahren kommt dem Schüler Sören nach längerer Überlegung nicht in den Sinn. Daher suggeriert der Interviewer dem Schüler nun eine Alternative: Zunächst spricht der Interviewer den Schüler Sören auf die *Striche* als Ansätze der verdeckten Verbindungen an. Am betrachteten Fünfeck hat der Schüler Sören wenig später 20 *Striche* ermittelt.

09:40	I	39	*äh, und wie bist du auf* 20 *jetzt gekommen'*
09:42	Sö	40	*weil von jedem, weil* (räuspert sich) *.. weil man bei jedem Punkt* 4 *Striche sieht*
09:48	I	41	*aha, okay, und warum sind es 4 bei jedem Punkt'* (15 sec) *hast du glaub ich schon gesagt, oder'*
10:11	Sö	42	20 *Striche, mit jedem anderen Punkt halt verbunden*
10:20	I	43	*also jetzt siehst du, 20*
10:21	Sö	44	*ja*
10:21	I	45	*Striche*
10:22	Sö	46	*warum', ach so, 10, weil einige Striche ja einer sind*

Hier zeigt sich, dass der Schüler Sören dem Beispiel des Fünfecks noch verhaftet ist. Es mag sich in den vorstehenden Äußerungen am konkreten Beispiel schon eine Beweisidee der noch nicht ausgesprochenen allgemeinen Behauptung andeuten, dass ein vollständiger Graph mit n Ecken $n \cdot (n-1)/2$ Verbindungen hat. Zunächst hakt der Interviewer wegen der paradoxen Aussage *weil einige Striche ja einer sind* in Äußerung Sö 46 nach:

10:26	I	47	*äh wie'*
10:28	Sö	48	*weil, zum Beispiel diese* 2 *Strich, Striche* (deutet auf 2 aufeinander zulaufende Striche an 2 Eckpunkten) *sind ja ein, einzig*
10:34	I	49	*ach so, aha, und was ist mit den anderen'*
10:37	Sö	50	*äh, 's, bei den beiden hier* (deutet erneut auf je 2 Eckpunkte), *bei den*
10:45	I	51	*ist es bei einigen so'*
10:48	Sö	52	*nein, bei .. allen, glaub ich*
10:49	I	53	*bei allen .. aha* (10 sec)
11:03	Sö	54	*also müsst das vielleicht gehen, wenn man bei, von .. allen Punkten die Striche, die da sind, zählt, und das dann, geteilt durch* 2 *rechnet*

Schüler Sören formuliert Argumente bei der Suche nach der Behauptung

Man kann die vorstehenden Äußerungen des Schülers Sören so deuten, dass er bereits Argumente formuliert, während er noch nach der passenden Behauptung sucht. Ihm scheint es darum zu gehen, wie er von der Anzahl an Ecken des betrachteten vollständigen Graphen zu dessen Anzahl an Verbindungen gelangt. Das dabei gewonnene Halbierungsargument verwendet er nun zur Bestätigung seines *Zählverfahrens Multiplikation* am bedingt vorstellbaren Zehneck:

11:20	I	55	*kannst mir das noch 'mal sagen vielleicht an einem Beispiel ..* 10 *Punkten oder* 100 *Punkten'*
11:24	Sö	56	*mit* 10 *würden's dann, an jeden* 9, 9, 18, 9 · 5, *sind* 45 *.. und, nee, Quatsch, nicht* 9 · 5 (4 sec) 9 · … 10, *das wären* 90
11:50	I	57	*warum hast du das jetzt,* 90*', warum'*
11:53	Sö	58	*weil es dann,* 10 *Punkte sind*
11:55	I	59	*ach so, mm-mmh, ja, also was ist jetzt, äh,* 90, *was meinst, was ist jetzt* 90*'*
12:02	Sö	60	90 *emm, Striche sieht man, aber* 2, *davon sind ja immer verbunden, also müssten das insgesamt* 45 *Striche sein*
12:10	I	61	*äh, wie bist du jetzt auf* 45 *gekommen'*
12:13	Sö	62	*ja weil ich das dann noch geteilt durch* 2 *gerechnet hab*
12:14	I	63	*ach so, und warum hast du das durch* 2 *geteilt'*
12:18	Sö	64	*weil ..* 2 *Striche, immer einer sind*
12:22	I	65	*ach so,* 2 *Striche sind immer*
12:24	Sö	66	*ja*
12:25	I	67	*eins*
12:26	Sö	68	*man sieht zwar* 2, *aber, die sind ja verb-, einer*

Schüler Sören hat nicht die Behauptung, aber deren Beweis an Beispielen entäußert

Der Schüler Sören hat bisher die Behauptung in ihrer Allgemeinheit noch nicht formuliert. Er begründet jedoch am konkreten Beispiel des Fünfecks und am bedingt vorstellbaren Beispiel des Zehnecks, wie er auf die Anzahl an Verbindungen eines vollständigen Graphen (und damit zur Behauptung) gelangt. Die dabei angeführten Regeln sind nicht immer nur am Beispiel gebunden, sondern teilweise auch allgemein gehalten.

Schüler Alis Entdeckung der Behauptung an aufgelegten Papiersternen

Im Vergleich dazu betrachtet ein anderer Schüler, Ali, sowohl ein Fünf- als auch ein Siebeneck, an der er die Behauptung entdeckt und induktiv prüft: Er verwendet hierzu Papiersterne, die er auf die beiden vollständigen Graphen legt (↑ Abb. 3.21, 3.25). Wie der Schüler Sören entwickelt auch der Schüler Ali das *Zählverfahren Multiplikation* für das bloß vorgestellte Zehneck:

14:02	Al	78	*ja ich überleg gerade, bei den 10 Punkten, da gehen ja immer, will man von den, sozusagen, zehnten Punkt', an allen anderen, an den 9, an den anderen 9 Punkten Striche verteilen, sind es ja immer 9, dann, würde man es für jeden Punkt, also allen 10 Punkten machen, wären das ja 90, Striche .. und, emm .. also 90 sozusagen Anfänge, und würde man den Stern dann wegnehmen, wären's dann, emm* (5 sec) *wären's ja nicht mehr so, An-, also nicht mehr halbe Striche .. sondern ganze, die muss man dann durch 2 teilen, und das bei, allen ander'n so, bei dem hier* (schaut auf das Siebeneck) *glaub ich auch*
14:54	I	79	*äh, und, wie war jetzt bei 10 Punkten, was, wie viel Linien, durchgezogene Linien hab ich dann'*
15:00	Al	80	45
15:00	I	81	*und wie bist du jetzt, darauf gekommen'*
15:05	Al	82	*weil ich, ehm, wenn man Stern, wenn man den Stern immer drauftut, muss man ja mal-, emm, die, äh, die Summe, der Striche malnehmen, weil ja das ja doppelt viele werden, weil die ja immer anfangen und, äh, den Stern .. wegnehmen muss man, geteilt äh, also die Summe geteilt durch, äh durch 2 teilen, weil das ja, ehm .. weil das ja, ganze Striche sind, nicht mehr so, abgebrochen, ne'*

Schüler Alis beispielgebundenes Beweisen am bedingt vorstellbaren Zehneck

Beim Schüler Ali sticht vor allem das enaktive Moment vom Auflegen und Wegnehmen des Sterns hervor. Er scheint etwas Allgemeingültiges am nicht sichtbaren Beispiel des Zehnecks herausgearbeitet zu haben. Zu Beginn seiner Äußerung Al 78 spricht er die Kardinalität $n \cdot (n-1)$ aller von allen Ecken ausgehenden Verbindungsansätze an. Im weiteren Verlauf schildert der Schüler Ali, wie die Anzahl der bereits gezählten Verbindungsansätze, welche er *Anfänge* oder *abgebrochene Striche* nennt, zur gesuchten Anzahl an *Strichen* halbiert wird. Man kann dem Schüler Ali unterstellen, dass er das Halbierungsargument subjektiv realisiert hat: Denn er hat die Wirkung vom *Drauftun* und *Wegnehmen* des Sterns nicht nur am vorgestellten Zehneck erläutert, sondern auch an sich thematisiert. Mit dem Auflegen und dem Wegnehmen eines konkreten Sterns greift er zu einem enaktiven Mittel, um das Halbieren der Anzahl sichtbarer

Streckenansätze als Umkehrung des Verdoppelns der Anzahl von Verbindungen zu begreifen. In seiner Äußerung Al 82 schildert er dann, wie er einen gleichsam imaginierten Stern verwendet, um auf die Anzahl von 45 Verbindungen in einem vollständigen Graphen mit 10 Ecken zu kommen. Der Stern ist zu einem funktional beschriebenen und auf seine geometrische Bedeutung reduzierten, der Konkretion enthobenen Hilfsmittel geworden.

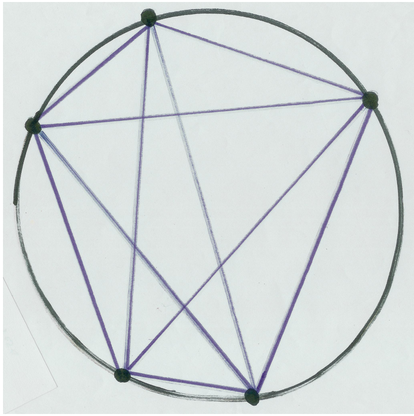


Abb. 3.24: Sörens / Alis vollständiger Graph mit 5 Ecken

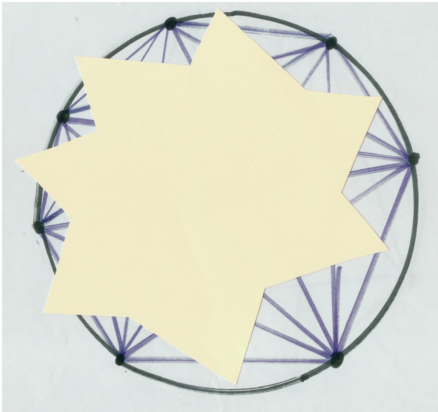


Abb. 3.25: Sörens / Alis vollständiger Graph mit 7 Ecken, aufgelegter Stern

3.3.7 Vergleichsanalyse (Schüler Moritz, Sören, Ali): Formalisierungen von Behauptung und Beweis

unterschiedlicher Verlauf und Ausprägung der Formalisierung

Bei den drei interviewten Schülern Moritz, Sören und Ali verläuft die Statuierung und die Formalisierung der Behauptung und deren Beweis jeweils unterschiedlich. Dass die allgemeine Behauptung in allen drei Fällen recht spät explizit gemacht wird, ist der Anlage dieser drei Interviews geschuldet: Einerseits sollte untersucht werden, in wie weit die Schüler an konkreten und bedingt vorstellbaren Beispielen das (*a priori* noch nicht feststellbare) Allgemeine und Allgemeingültige erkennen können, damit der Forscher auf Phänomene von nicht hinreichend weitgehenden Verallgemeinerungen stoßen kann. Andererseits sollte geklärt werden, wie sich induktives Prüfen mit latenter Beweisidee zum beispielgebundenen Beweisen wandeln kann.

Schüler Moritz formalisiert unkompliziert

Bei dem Schüler Moritz deutet sich eine Algebraisierung schon während der Entdeckung der Behauptung in Äußerung Mo 140 an, als er die Variable x einführt und seine noch nicht allgemeingültige Formel $x \cdot 4 : 2$ auf das zweite Arbeitsblatt schreibt (↑ Abb. 3.23). In allgemeiner Umgangssprache formuliert der Schüler Moritz die Behauptung dann in seiner Äußerung Mo 144 so: *also die Punkte* $\cdot$ *.. die Punkte* -1, *geteilt durch* 2. Allerdings verwendet der Schüler Moritz viel Zeit darauf, um nach der Statuierung der Behauptung diese an weiteren Beispielen induktiv zu bestätigen und beispielgebunden zu beweisen. Schließlich bildet der Schüler Moritz die Summenformel $x \cdot (x-1)/2$ noch formell nach und versucht diese weiter zu vereinfachen (↑ Abb. 3.23). Er hat bereits in seinen vorangegangenen Äußerungen Mo 142, Mo 158 und Mo 160 den geometrischen Bezug zwischen der Anzahl an Ecken als erstem Faktor x und der jeweiligen Anzahl ausgehender Verbindungen als zweitem Faktor $x - 1$ hergestellt. Deshalb fällt ihm die formelle Darstellung der Behauptung und der erneute, daran orientierte Beweis der Behauptung nicht weiter schwer.

Schüler Sören formalisiert schematisch-gelenkt

Bei dem Schüler Sören zeigt sich eher eine schematische Übertragung der einzelnen Strukturelemente (Ecken bzw. Punkte und Verbindungen bzw. Striche durch das Auflegen der Papierschnitzel) in die Formel $|K(V_n)| = n \cdot (n-1)/2$. Da der Interviewer in dieser Situation fragend-entwickelnd vorgeht, ist nicht sicher festzustellen, ob der Schüler Sören während seiner Formalisierung die multiplikative Verknüpfung der Anzahl n an Ecken mit der Anzahl $n - 1$ der davon jeweils ausgehenden Verbindungen wirklich anstrebt, zumal er in Äußerung Sö 90 zunächst mitteilt: *nee ich wollt eigentlich plusrechnen, glaub ich.* Ohne dass es jedoch weiterer induktiver Prüfungen an neuen Beispielen bedarf, äußert sich der Schüler Sören wenig später wie folgt:

17:36	Sö	102	*emm, wenn man dann,* $n \cdot (n-1)$ *… dann hat man, emm, wie viele Striche insgesamt von den Punkten abgehen*
17:46	I	103	*mm-mmh ..*
17:50	Sö	104	*dann muss man das, <u>nur</u> noch geteilt durch* 2 *rechnen, weil, ich ja immer <u>2</u> Striche zu <u>einem</u> verbinde*

Schüler Sören scheint formal zu beweisen

Allerdings schreibt der Schüler Sören die Formel $n \cdot (n-1)/2$ nicht explizit auf.

Statt dessen überprüft er die Richtigkeit der Behauptung rechnerisch und zeichnerisch – beim Nachzählen folgt er seinem ursprünglichen *Zählverfahren Reihe abwärts*. Dies zeigt, dass die theoretische Erkenntnissicherung durch beispielgebundene und formale Teilargumente dem Schüler Sören noch keine subjektive Sicherheit hinsichtlich der Allgemeingültigkeit der Behauptung gibt. Es bedarf zwischenzeitlich zusätzlicher induktiver Prüfungen, so dass man bei ihm von einer induktiv durchbrochenen Kontinuität beispielgebundenen Beweisens sprechen kann. Die Sinnstruktur des Beweises wird erst in den Äußerungen Sö 102 und Sö 104 manifest und wenig später vollständig entäußert, als der Interviewer den Schüler Sören bittet, den Beweis seinem scheinbar anwesenden Lehrer gegenüber zu schildern:

24:37	Sö	142	*weil, von jedem, Punkt gehen … die Zahl der Punkte* −1 *Striche ab*
24:46	I	143	*mm-mmh*
24:46	Sö	144	*weil der sich <u>nicht</u> mit sich <u>selbst</u> verbinden kann, aber mit allen <u>anderen</u> Punkten … und, emm … das, dann · jedem Punkt, in <u>jedem</u> Punkt ist das dann so*
25:02	I	145	*mm-mmh*
25:02	Sö	146	*aber, dann käm man auf zu viel, weil, immer 2 Linien, die man dann sieht, sind eigentlich <u>eine</u>, deswegen muss man das dann noch durch 2 teilen*

Schüler Alis zu weitgehende Verallgemeinerung

Abschließend sollen noch kurz die Formalisierungsbemühungen des Schülers Ali betrachtet werden. Das Auflegen und Wegnehmen des Sterns hat ihm einen eleganten Zugang zum beispielgebundenen Beweisen eröffnet. Dabei fungiert neben dem betrachteten Fünfeck und Siebeneck das Zehneck als eine lediglich nur noch vorgestellte Instanz, deren Besonderheit sich bezogen auf das Halbierungsargument in der reinen Funktionalität des Sterns auflöst. Die Äußerungen Al 78 und Al 82 des Schülers Ali legen zunächst nahe, dass er die Sinnstruktur des Beweises vollständig subjektiv realisiert hat. Überraschend ist, dass es dem Schüler Ali im weiteren Verlauf nur mühsam gelingt, die Behauptung und ihren Beweis formell darzustellen. Erst nach einiger Zeit stellt er etwa die Formel $x \cdot y : 2$ auf, die den eigentlich bereits subjektiv realisierten Zusammenhang zwischen Anzahl der Ecken x und der Anzahl der von ihnen ausgehenden Verbindungen y noch nicht wiedergibt. Entweder ist dem Schüler Ali dieser Zusammenhang also wieder latent geworden, oder es liegt an seiner Unvertrautheit mit der formalisierten Sprache. Letzteres dürfte die These untermauern, dass das beispielgebundene Beweisen gerade auch dann zu einer theoretischen Erkenntnis beitragen kann, wenn die formalisierte Sprache noch nicht weit genug entwickelt ist oder fehlt.

3.3.8 Ergebnisse

Thema dieser Analyse war das Entdecken und das Prüfen einer Behauptung mit latenter Beweisidee an konkreten und bedingt vorstellbaren Beispielen sowie die Formalisierung von Behauptung und Beweis. Insgesamt gesehen erfolgten die eingangs gestellten Forschungsfragen aus vornehmlich theoretischer, praktischer und sprachlicher Perspektive (I, III, IV) und konzentrierten sich auf folgende Forschungsbereiche (↑ Abs. 3.3.2):

∘ Wandlung vom Entdecken und Prüfen zum beispielgebundenen Beweisen i.e.S.
∘ Rolle konkreter und bedingt vorstellbarer Beispiele
∘ Formalisierung von Behauptung und Beweis

Die Analyseergebnisse hierzu werden im Folgenden erneut zunächst schülerbezogen dargestellt. Im Resümé wird davon in Hinblick auf den Gesamtzusammenhang der Arbeit abstrahiert (↑ Abs. 3.3.9).

Hauptanalyse (Moritz)

mehrere Zählverfahren analysierender Schüler Moritz

Insgesamt gesehen, hat der Schüler Moritz die additiv und multiplikativ dargestellte Behauptung, ein vollständiger Graph mit n Ecken habe $1+2+\cdots+(n-1)$ bzw. $n \cdot (n-1)/2$ Verbindungen, jeweils an den aufgezeichneten geometrischen Beispielen ($n = 5, 6$) bewiesen. Um die passende Behauptung und deren Beweis zu entwickeln, hat er einige Hürden überwinden müssen:

mehrere abduktiv entwickelte Formeln

- Der Schüler Moritz bewegt sich während seiner anfänglichen Abduktionen an der Front seines Wissens. Ausgehend von einzelnen Beispielen, behauptet er für die Anzahl $|K(V_n)|$ der Verbindungen eines vollständigen Graphen mit n Ecken umgangssprachlich in rascher Folge, dass

  $|K(V_n)| = n \cdot (n-1)$
  $|K(V_n)| = 2n$
  $|K(V_n)| = 3 \cdot (n-2)$
  $|K(V_n)| = 1+2+3+4+\cdots+(n-1)$
  $|K(V_n)| = 2 \cdot |K(V_{n-1})|$

  Besonders eindrücklich zeigt sich die Unsicherheit von Abduktionen an seinem Übergang von der dritten über die vierte zur fünften Behauptung in Äußerung Mo 36. Bis auf die vierte Behauptung werden sich die genannten Behauptungen außer für das jeweils betrachtete Beispiel als nicht allgemeingültig erweisen (vgl. ↑ Abb. 2.2.2 und Balacheff (1988, 221)). Dies stellt der Schüler Moritz jeweils durch induktive Prüfungen anhand einfacher Beispiele ($n = 3$, 4, 5, 6) fest.

Zählverfahren Reihe aufwärts

- Im weiteren Verlauf favorisiert der Schüler die dritte Behauptung und entwickelt in Äußerung Mo 72 sein *Zählverfahren Reihe aufwärts.* Dabei geht er von einem *Dreieck als Grundform* mit $1 + 2$ Verbindungen aus und addiert jeweils $m - 1$ Verbindungen jeder m. Ecke sukzessive hinzu ($m = 4, 5, 6, \ldots$). In seiner Ausdrucksweise liest sich Letzteres wie folgt: *dann jeder weitere <u>Punkt</u>, bringt halt immer die Anzahl der vorherigen*

Punkte dazu, die <u>*Anzahl*</u> *der Punkte als Strecken hinzu.* Damit gibt er gleichsam den Induktionsschritt in einer vollständigen Induktion wieder.

- Der Schüler Moritz erhält für das bedingt vorstellbare Zehneck $|K(V_{10})| = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$ Verbindungen. Damit hat er das vermutete Gesetz $|K(V_n)| = 1+2+3+4+\cdots+(n-1)$ also auch für $n = 10$ formuliert und durch sein *Zählverfahren Reihe aufwärts* plausibel gemacht. Der Schüler Moritz hält dieses Zählverfahren für $n = 100$ freilich wenig praktikabel.

  Problematisierung an imaginierten Beispielen

- Auf Anregung des Interviewers betrachtet der Schüler Moritz seine aufgezeichneten vollständigen Graphen ($n = 5, 6$) und gelangt zu der Erkenntnis, dass Strecken in dem Sinne *doppelt* (zählbar) sind, als dass sie von zwei Ecken ausgehen. Am aufgezeichneten Fünfeck entwickelt er in Äußerung Mo 140 nun den multiplikativen Term $x \cdot 4 : 2$ und falsifiziert diesen sogleich am vorgestellten Beispiel des Zehnecks. Er bemerkt recht schnell, dass er sich hinsichtlich des zweiten Faktors noch vom Fünfeck lösen muss, und statuiert die richtige Behauptung in Äußerung Mo 144: *also die Punkte* $\cdot$ .. *die Punkte* -1, *geteilt durch* 2. Er begründet die Behauptung anschließend an seinen aufgezeichneten vollständigen Graphen ($n = 5, 6$) und nennt dabei fast alle Regeln des mehrgliedrigen (beispielgebundenen) Argumentgefüges. Diese Episode zeigt, wie der Schüler Moritz im *Zählverfahren Multiplikation* eine neue Beweisidee entdeckt, weiter verfolgt und sie allmählich ihrer Latenz enthebt.

  Entwicklung des Zählverfahrens Multiplikation

  Lösung vom Beispielhaften

  Begründung des Zählverfahrens Multiplikation

Kontrastanalysen (Sören, Ali)

Durch das didaktische Hilfsmittel der Papierschnitzel bzw. des Sterns wurde versucht, den Schülern Sören und Ali den Übergang vom *Zählverfahren Reihe aufwärts/abwärts* zum *Zählverfahren Multiplikation* zu erleichtern und sie darüber die Behauptung formalisieren zu lassen. Dies ist nur bedingt gelungen:

- Der Schüler Sören formuliert die allgemeingültige Behauptung $|K(V_n)| = n \cdot (n-1)/2$ nicht explizit, sondern entäußert den Beweis am konkreten Beispiel des Fünfecks und am bedingt vorstellbaren Beispiel des Zehnecks. Er formalisiert anschließend schematisch-gelenkt, indem er die geometrischen Strukturelemente einzeln überträgt, begleitet von Nachfragen des Interviewers. Man kann dem Schüler Sören also unterstellen, dass er den Beweis zunächst nur teilweise subjektiv realisiert hat, zumal er stets zusätzliche induktive Prüfungen durchführt. Letztlich führt er den Beweis erst ab Äußerung Sö 102 vollständig und allgemeingültig in formaler Sprache.

  schematisch-gelenkte Formalisierung beim Schüler Sören

- Der Schüler Ali spricht auf das enaktive Moment des aufgelegten Sterns recht schnell an. Er kann damit in den Äußerungen Al 78 und Al 82 den Beweis am vorgestellten Beispiel des Zehnecks führen. Es fällt ihm jedoch schwer, die allgemeingültige Behauptung auf $|K(V_n)| = n\cdot(n-1)/2$ zu formalisieren. Relativ spät stellt er den Term $x \cdot y : 2$ auf, der den zuvor subjektiv realisierten Zusammenhang zwischen Eckpunkten und von diesen ausgehenden Verbindungsansätzen noch nicht berücksichtigt. Dies zeigt, dass das beispielgebundene Beweisen schon vor einer Formalisierung zur theoretischen Erkenntnissicherung beitragen kann.

  schnelle Realisierung durch aufgelegten Stern

  schleppende Formalisierung beim Schüler Ali

3.3.9 Resümé

Mit den schülerbezogenen Ergebnissen im Hintergrund sollen nun auch die Forschungsfragen aus ↑ Abs. 3.2.2 soweit als möglich beantwortet werden.

- Wandlung vom Entdecken und Prüfen zum beispielgeb. Beweisen i.e.S.

  Wie verhält sich ein Schüler beim Entdecken und Prüfen von Behauptungen mit oder ohne latente(r) Beweisidee an der Front seines Wissens?

Vor- und Nachteile des Entdeckens der Behauptung

Das Entdecken einer Behauptung ist didaktisch insofern produktiv, als dass der Schüler sich auf diesem Wege seine Behauptung zu eigen machen kann und damit hinreichend motiviert sein dürfte, Grenzen ihrer Allgemeingültigkeit zu prüfen. Die abduktiv gewonnenen Behauptungen können falsch sein und einerseits zur weiteren Suche nach der richtigen und hinreichend allgemein gefassten Behauptung anregen. Andererseits kann – wenn der floride Entdeckungsprozess länger andauert, erschöpft oder in Erfolglosigkeit mündet – der Schüler vorab entmutigt oder vom eigentlichen beispielgebundenen Beweisen abgehalten werden. Die Entdeckung einer Behauptung soll dem Schüler lediglich einen Zugang zum beispielgebundenen Beweisen ebnen und dieses nicht ersetzen oder verhindern.

abduktiv erschlossene Behauptungen

Wie die Analysen nahelegen, lässt sich schon während der entdeckenden Zugangsphase logisch gesehen eine Abfolge der Schlussformen Abduktion, Induktion und Deduktion ausmachen. Dadurch, dass die Schüler nach der passenden Behauptung noch suchen und ihnen diese nicht fassbar ist, müssen abduktiv erschlossene, zu Vorhersagen statuierte Behauptungen im Sinne des PEIRCEschen Dreischritts an weiteren Beispielen induktiv bestätigt oder widerlegt werden. Es ist vom Lehrenden abzuwägen, wann die Schüler zur Formulierung der Behauptung (und ggf. der Grenzen ihrer Allgemeingültigkeit) bewegt werden sollen.

Auswahl von Behauptungen beim Entdecken

Argumenttheoretisch lässt sich das Suchen nach passenden Formeln (wie x + ... + 2 + 1 + 0 oder $x \cdot 4$ / 2 oder $x \cdot y$ / 2 oder x ($x - 1$) / 2 für die Anzahl der Verbindungen in einem vollständigen Graphen eines x-Ecks) als Auswählen einer behaupteten, zu beweisenden Konklusion ansehen. Allerdings schränken Voraussetzungen und Rahmenbedingungen, die mit der vorgegebenen Aufgabenstellung zusammenhängen (hier etwa ein konkret vorliegender vollständiger Graph mit 5 Ecken mit einer überschaubaren Menge an geeigneten Zählverfahren), diese Auswahl an möglichen Behauptungen beträchtlich ein. Auch können sich die latenten Beweisideen in Teilargumenten, mit denen sich diese Behauptungen beweisen lassen, strukturell gleichen oder voneinander unterscheiden. Dadurch ist erklärbar, dass die Beweisidee einer noch nicht statuierten Behauptung im relativ unsteten beispielgebundenen Entdeckungs- und Prüfprozess in Teilen schon angelegt sein kann, die Schüler also bereits beispielgebunden beweisen, noch ohne dass sie die richtige Behauptung aufgestellt haben.

Bei manchen Schülern regt sich schon während des Akts der Entdeckung der Wunsch, die Behauptung allgemein formulieren zu wollen. Dies kann als ein

Indiz dafür angesehen werden, dass Schüler bereits während ihrer jeweiligen Entdeckung etwas als allgemeingültig erkannt haben. Auch wenn es ihnen dann gelingen mag, die Behauptung in allgemeiner Umgangssprache oder mittels Variablenzeichen zu formulieren, verhilft ihnen dies noch nicht automatisch zum (beispielgebundenen) Beweisen. Denn die eigentliche Beweisidee der (gleichwohl noch fraglichen) Behauptung muss ihrer Latenz noch enthoben werden. Mittels induktiver Prüfungen kann dann nicht nur geprüft werden, ob die Behauptung vom Ergebnis her bestätigt wird, sondern auch, ob sich die Beweisidee erhärtet. Ein solcher Prüfprozess hat manchmal zur Folge, dass Schüler ihre (beispielgebundenen) Argumente und die Behauptung als Konklusion ihrer Argumente präzisieren und damit (beispielgebunden) beweisen. Damit geht das Entdecken und das Prüfen mit latenter Beweisidee in das beispielgebundene Beweisen i.e.S. über. Die betrachteten Analysen lassen an dieser günstigen Verlaufsprognose aber auch Zweifel aufkommen. Denn vormals subjektiv realisierte Teilargumente können wieder latent werden, wenn der induktive Prüfprozess zu lange andauert oder in Einzelbeispielen steckenbleibt, deren Besonderheiten dann vielleicht wiederum zu deutlich hervortreten.

zwischen latenter Beweisidee und subjektiv realisiertem Beweis

- Rolle konkreter und bedingt vorstellbarer Beispiele

  Welche Rolle spielt das konkrete und das bedingt vorstellbare Beispiel (eines vollständigen Graphen) bei der subjektiven Realisierung der latenten Beweisidee? Dient es als bloßes Darstellungsmittel, als vorübergehende gedankliche Stütze oder als Projektionsfläche zur Entwicklung des Beweises? Es ist untersuchenswert, welche Instanzen (des vollständigen Graphen) ein Schüler als Beispiele heranzieht, um zur allgemeinen Behauptung und deren Beweis vorzudringen. Reichen hierbei allein konkret fassbare oder zudem bedingt vorstellbare Beispiele aus, um Teilargumente des Beweises subjektiv zu realisieren?

konkrete Beispiele

Wie die Anlage und die Durchführung der Interviews dieser Studie zeigen, tragen sowohl konkret fassbare als auch bedingt vorstellbare Beispiele dazu bei, dass die Schüler die latente Beweisidee subjektiv realisieren und manifestieren. Das konkrete Beispiel dient primär dem Entdecken und dem direkten Prüfen einer Behauptung, kann gleichwohl auch paradigmatischen Charakter annehmen. Hierbei muss der Schüler zwischen dem Besonderen und dem Allgemeinen am konkret fassbaren Beispiel unterscheiden lernen. Dies kann selbst dann noch Schwierigkeiten bereiten, wenn man meint, der Schüler habe die Beweisstruktur hinreichend subjektiv realisiert.

bedingt vorstellbare Beispiele

Bedingt vorstellbare Beispiele (z.B. ein Hunderteck) schaffen als imaginierte oder mögliche Instanzen gegenüber konkret fassbaren Beispielen insofern Erleichterung, als dass sie Schüler zwischen Besonderem und Allgemeingültigem besser differenzieren lassen. Auch können sie dazu beitragen, das einfache Ausrechnen oder Zeichnen (hier: das unsystematische Zählen) zu überwinden. Durch die kognitiv fordernde Ablösung vom Besonderen muss der Schüler mehr die strukturellen Eigenschaften vieler und schließlich aller möglichen Beispiele in den Blick nehmen. Mit steigender Abstraktion können manche Struktureigenschaften verschwinden oder erweisen sich nur noch für eine zu bestimmende Klasse von Beispielen gültig. Hier testen Schüler einerseits die Grenzen ihrer Vorstellungskraft und andererseits die strukturellen Grenzen der betrachteten Beispiele aus. Bedingt vorstellbare Beispiele können also zur subjektiven Realisierung einiger Teilargumente des Beweises als Sinnstruktur beitragen, und zwar nicht nur inhaltlich, sondern auch in Hinblick auf eine mögliche formelle Darstellung von Behauptung und Beweis. Sie nehmen zwischen dem Konkretismus der fassbaren Beispiele und der nicht mehr fassbaren Abstraktion eine ähnliche Rolle ein wie das beispielgebundene Beweisen zwischen seinen Polen des induktiven Prüfens und des formalen (ggf. formell dargestellten) Beweisens selbst.

- Formalisierung von Behauptung und Beweis

  Wie leicht fällt es Schülern einer 7. Klasse, eine Behauptung in eine formelle Darstellung zu bringen, d.h. zu formalisieren? Die betrachtete Behauptung kann mittels des Variablenzeichens n für die Anzahl der Ecken eines vollständigen Graphen formalisiert werden. Welche Wege beschreiten die Schüler, um vom beispielgebundenen oder formalen Beweisen zum formellen Beweisen zu gelangen? Wie schätzen sie ihr formelles Beweisen gegenüber dem beispielgebundenen oder formalen Beweisen rückblickend ein?

nicht hinreichend und zu weitgehende Verallgemeinerungen

Welches Beispiel gewählt wird, sagt noch nichts darüber aus, ob und in wie weit der Schüler eine daran geknüpfte Sinnstruktur subjektiv realisiert hat. An einem bedingt vorstellbaren Beispiel (wie dem Zehneck) entwickelte Formeln (wie $x \cdot 4/2$ und $x \cdot y/2$ für die Anzahl aller Verbindungen zwischen den Ecken) können zum betrachteten Beispiel (wie dem Fünfeck) in Beziehung gesetzt werden. Möglicherweise verhilft das gleichzeitige Betrachten eines konkret fassbaren Beispiels (wie des Fünfecks) und eines bedingt vorstellbaren Beispiels (wie des Zehnecks) also zur besseren Differenzierung zwischen Besonderem und Allgemeinem. Gleichwohl lassen sich bei den Schülern bisweilen nicht hinreichend weitgehende Verallgemeinerungen (wie $x \cdot 4/2$) oder inkorrekte, weil zu weitgehende Verallgemeinerungen der Behauptung (wie $x \cdot y/2$) beobachten.

enaktive Hilfsmittel zur Abstraktion

Paradoxerweise zeigen enaktive Hilfsmittel (wie das Auflegen und Wegnehmen des Sterns) zuweilen, dass dem Konkretismus eines Beispiels auch anders begegnet werden kann als durch den Übergang auf ein bedingt vorstellbares Beispiel oder durch formelle Abstraktion. Wird nämlich durch derartige enaktive Hilfsmittel mit strukturierendem Fokus das in die Nähe der Induktion führende Rechnen, Zählen oder Zeichnen unterbunden, fördert dies häufig das beispielgebundene Beweisen. Eine solche aufgabenabhängige Modifikation mag sich zumal für solche Schüler eignen, die sich immer neue Beispiele vornehmen, zwischen wesentlichen und unwesentlichen Aspekten eines Beispiels nicht unterscheiden können, das Allgemeingültige nicht subjektiv realisieren oder sich mit der formalisierten mathematischen Sprache noch nicht hinreichend vertraut gemacht haben.

3.4 Induktives Prüfen beim beispielgebundenen Beweisen

Einleitung und Übersicht

In dieser vierten Einzelfallstudie soll das induktive Prüfen und dessen Verlauf im Rahmen des beispielgebundenen Beweisens eingehender thematisiert werden. Dabei soll geklärt werden, in wie weit die These von GOLDBERG (1992) zu halten ist, nach der zum beispielgebundenen Begründen ein Bearbeiten individuell verschieden vieler Beispiele ausreiche (↑ Abs. 1.2.5). Ebenfalls wird von der Autorin die Anregung aufgegriffen, Schüler rückwärts arbeiten zu lassen, um im Voraus vom induktiven Prüfen abzuhalten. Im Folgenden wird mit dem Umfangswinkel-Mittelpunktswinkelsatz dieselbe Aufgabenstellung verwendet, an der auch GOLDBERG (1992) resp. GOLDBERG (1984) ihre Untersuchungen durchgeführt hat.

3.4.1	*Mathematische Analyse*	Kl. 8	Umfangswinkel-Mittelpunktswinkelsatz (Außenwinkelsatz)
		Beh.	Wenn δ der Mittelpunktswinkel zum Umfangswinkel α ist, dann gilt $\delta = 2\alpha$ (mit einem ersten und zweiten Beweis).
3.4.2	*Forschungs -perspektiven -bereiche -fragen*	I II V	∘ Überprüfung der GOLDBERG-These ∘ Wahl und Anzahl der Beispiele ∘ Beispielgebundenes Beweisen durch Lösen einer Berechnungsaufgabe
3.4.3	*Kontext*	Fa/Ma	Angebot an Vorübungen und Stellung der Behauptung als Berechnungsproblem
3.4.4	*Hauptanalyse*	Fa	Regeln zur Berechnung des Mittelpunktswinkels δ
3.4.5	*Hauptanalyse*	Fa	Induktive Prüfungen der Behauptung $\delta = 2\alpha$
3.4.6	*Hauptanalyse*	Fa	Versuchte Begründung der Basiswinkelgleichheit
3.4.7	*Hauptanalyse*	Fa	Lückenhaftes Argumentgefüge
3.4.8	*Hauptanalyse*	Fa	Rechenweg für das Beispiel $\alpha = (1/10)^\circ$
3.4.9	*Kontext*	Ma	Durchführung der Vorübungen
3.4.10	*Kontrastanalyse*	Ma	Rückwärtsarbeiten
3.4.11	*Kontrastanalyse*	Ma	Beweis des Außenwinkelsatzes
3.4.12	*Ergebnisse*	Fa Ma	Verlaufsbetrachtung Vergleichsbetrachtung
3.4.13	*Resümé*		zu den Forschungsperspektiven, -bereichen und -fragen

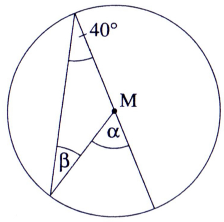
3.4.1 Mathematische Analyse: Außenwinkelsatz

Behauptung nach GOLDBERG [1992]

Gegenstand der nachfolgenden Analyse ist der von GOLDBERG (1992, 43) so genannte *Peripherie-Zentriwinkelsatz* mit der Behauptung $\delta = 2\alpha$ als spezielle Form des Umfangswinkel-Mittelpunktswinkelsatzes resp. des Außenwinkelsatzes (↑ Abs. 1.2.5):

Unterrichtsgespräch.
Lehrer: Wie groß ist α, wenn der Peripheriewinkel 60° (30°, 10°, 22°, ...) groß ist? Begründe!

Nach einer gewissen – von der jeweiligen Klassensituation abhängigen – Zahl solcher Aufgaben erkennen die Schüler: α (der Zentriwinkel) ist immer doppelt so groß wie der zugehörige Peripheriewinkel.



Lehrer: Glaubt ihr wirklich, daß das für *alle* möglichen Größen des Peripheriewinkels gilt, z. B. auch wenn dieser ganz klein, etwa $\frac{1}{1000}^{\circ}$, ist?
Schüler: Ja, denn dann ist auch β $\frac{1}{1000}^{\circ}$, »weil es Basiswinkel sind«, und dann ist $\alpha = 2 \cdot \frac{1}{1000}^{\circ}$, weil »ein Außenwinkel eines Dreiecks immer so groß ist wie die beiden Innenwinkel zusammen«.
Lehrer: Und wenn wir gar nicht wissen, wie groß der Peripheriewinkel ist, wenn seine Größe z. B. x° beträgt?
Schüler: Dann ist auch $\beta = x°$, »weil es Basiswinkel sind«, und dann ist $\alpha = 2 \cdot x°$, weil . . .

Abb. 3.26: Reales Unterrichtsgespräch nach GOLDBERG (1992, 43)

Behauptung unter veränderten Bezeichungen

Seit geraumer Zeit wird statt des Peripheriewinkels vom Umfangswinkel und statt des Zentriwinkels vom Mittelpunktswinkel gesprochen. Mit einem Wechsel der Bezeichnungen gemäß der untenstehenden ↑ Abb. 3.27 ergibt sich folgende Behauptung:

Behauptung Wenn δ der Mittelpunktswinkel zum Umfangswinkel α ist, dann gilt $\delta = 2\alpha$.

Diese Behauptung lässt sich auf unterschiedliche Art und Weise beweisen. Zumal als Interviewer kann man von dem Einfallsreichtum der Schüler bezüglich ihrer Beweisideen und -variationen überrascht werden. Nachstehend werden zwei verschiedene Beweiswege angeführt, um abwägen zu können, welcher für das Schülerexperiment wohl geeigneter ist. Im Prinzip lassen sich die nachfolgenden Argumentgefüge durch Einfügen weiterer Argumente noch ausdifferenzieren. Dies unterbleibt hier, um den Überblick zu behalten.

Erster Beweis der Behauptung

Beweis mittels des Stufen- und Wechselwinkelsatzes

In der linken Planskizze von ↑ Abb. 3.27 werden die Dreiecksseiten zu Geraden f, f', g verlängert und eine zu g parallele Hilfsgerade h durch den Mittelpunkt M eingeführt, an dem die Winkel α' und β' liegen, welche sich zum Mittelpunktswinkel $\delta := \alpha' + \beta'$ ergänzen. Die ↑ Abb. 3.31 gibt ein mögliches Argumentgefüge zum Beweis der Behauptung $\delta = 2\alpha$ wieder: Mittels des Stufenwinkelsatzes (↑ Abb. 3.29) wird die Gleichheit $\alpha' = \alpha$ der Stufenwinkel α' und α sowie mittels des Wechselwinkelsatzes (↑ Abb. 3.30) die Gleichheit $\beta' = \beta$ der Wechselwinkel β' und β bewiesen. Aus der durch die Kreisgeometrie begründeten Gleichschenkligkeit des Dreiecks wird mittels des Basiswinkelsatzes (↑ Abb. 3.28) auf die Gleichheit $\beta = \alpha$ der Basiswinkel geschlossen. Mittels algebraischer Regeln (AR) für Terme und Gleichungen folgert man aus der Definition $\delta := \alpha' + \beta'$ schließlich die Behauptung $\delta = 2\alpha$.

Es handelt sich um ein mehrschichtig-mehrgliedriges Argumentgefüge, in das neben dem Stufen- und Wechselwinkelsatz auch der Basiswinkelsatz Eingang findet. Natürlich kann der benutzte Wechselwinkelsatz seinerseits wiederum durch den Scheitelwinkel- und Stufenwinkelsatz bewiesen werden und diese Sätze wiederum ihrerseits, so dass das Argumentgefüge entsprechend weiter entfaltet werden kann.

Zweiter Beweis der Behauptung

Beweis mittels des Winkelsummensatzes für Dreiecke

Zum Beweis der Behauptung mittels des Winkelsummensatzes für Dreiecke wird der dritte Innenwinkel in der rechten Planskizze von ↑ Abb. 3.27 mit γ bezeichnet. Die ↑ Abb. 3.34 gibt ein mögliches Argumentgefüge zum Beweis der Behauptung $\delta = 2\alpha$ wieder. Arbeitet man rückwärts, so ergibt sich mittels des Nebenwinkelsatzes (↑ Abb. 3.32) der Mittelpunktswinkel δ als Nebenwinkel des Dreieckswinkels γ zu $\delta = 180° - \gamma$. Der Dreieckswinkel γ ergibt sich wiederum mittels des Winkelsummensatzes für Dreiecke (↑ Abb. 3.33) zu $\gamma = 180° - \alpha - \beta$. Wie in der ersten Argumentkette wird aus der durch die Kreisgeometrie begründeten Gleichschenkligkeit des Dreiecks mittels des Basiswinkelsatzes (↑ Abb. 3.28) auf die Gleichheit $\beta = \alpha$ der Basiswinkel β und α geschlossen. Mittels algebraischer Regeln (AR) für Terme und Gleichungen ergibt sich wiederum sukzessive die Behauptung $\delta = 2\alpha$, dabei heben sich die Winkelsumme von 180° und der Halbwinkel 180° gegeneinander auf. Wiederum handelt es sich um ein mehrschichtig-mehrgliedriges Argumentgefüge, in das neben dem Winkelsummensatz für Dreiecke auch der Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke und der Nebenwinkelsatz eingehen. Wie oben können die benutzten Sätze wiederum ihrerseits elementar bewiesen werden, so dass auch dieses Argumentgefüge weiter entfaltet werden kann.

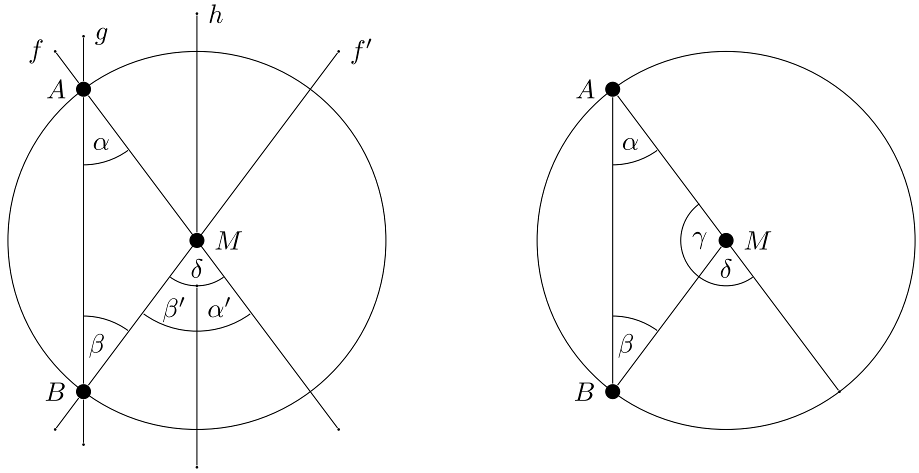


Abb. 3.27: Planskizzen zum Beweis der Behauptung
∘ durch Basiswinkel-, Stufenwinkel- und Wechselwinkelsatz (links)
∘ durch Basiswinkel-, Winkelsummen- und Nebenwinkelsatz (rechts)

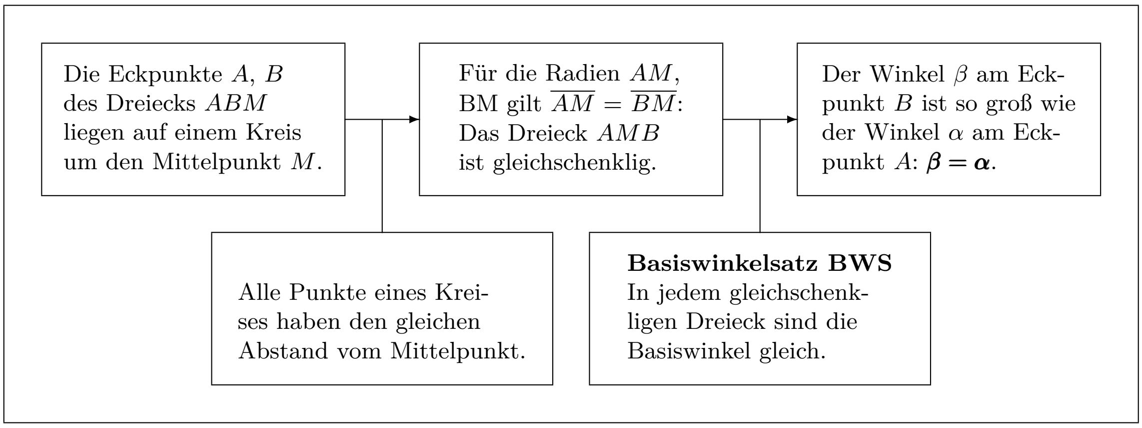


Abb. 3.28: Teil-Argumentgefüge des Basiswinkelsatzes BWS

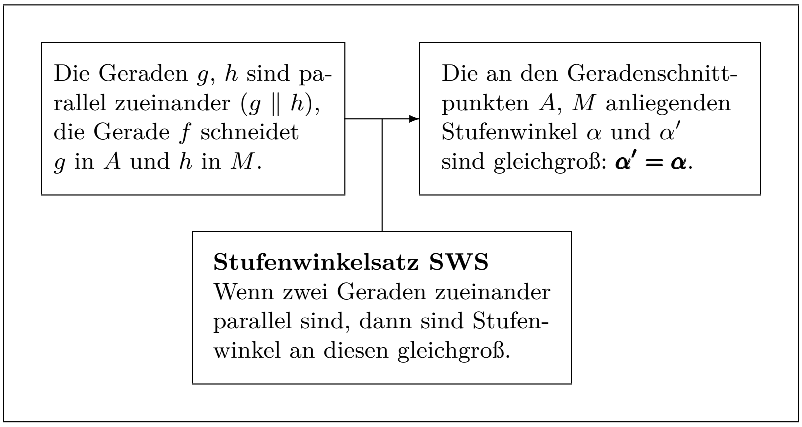


Abb. 3.29: Teil-Argument des Stufenwinkelsatzes SWS

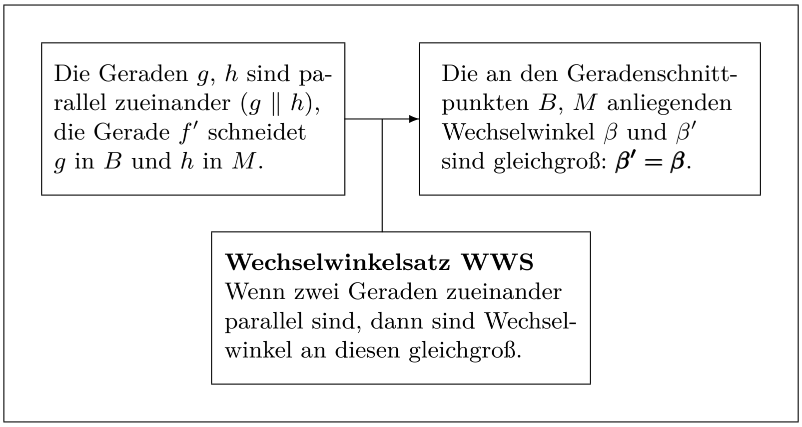


Abb. 3.30: Teil-Argument des Wechselwinkelsatzes WWS

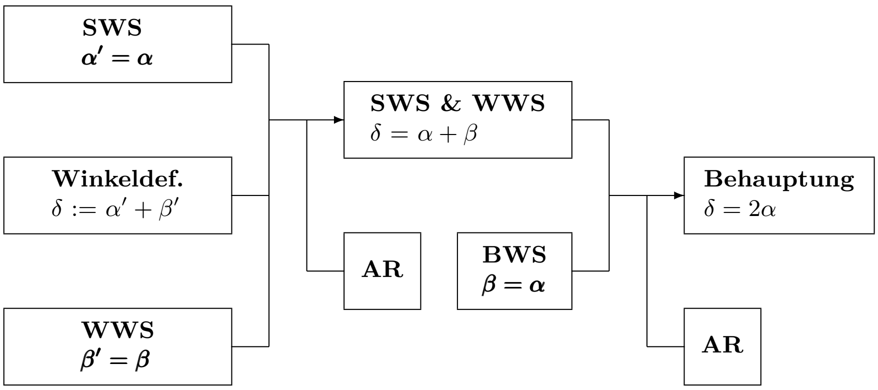


Abb. 3.31: Argumentgefüge für den ersten Beweis der Behauptung $\delta = 2\alpha$

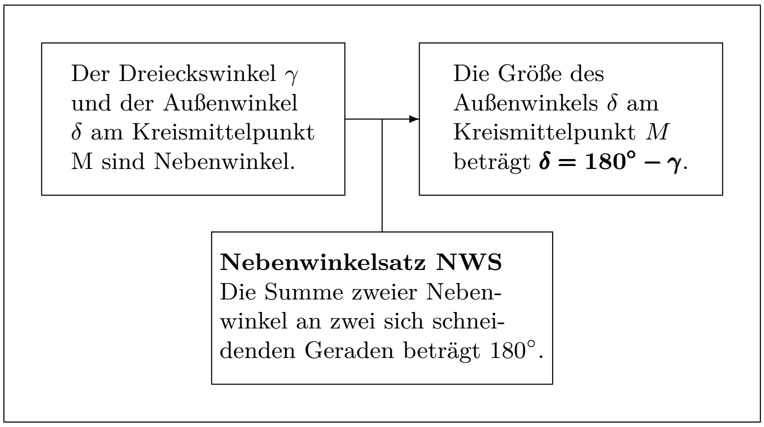


Abb. 3.32: Teil-Argument des Nebenwinkelsatzes NWS

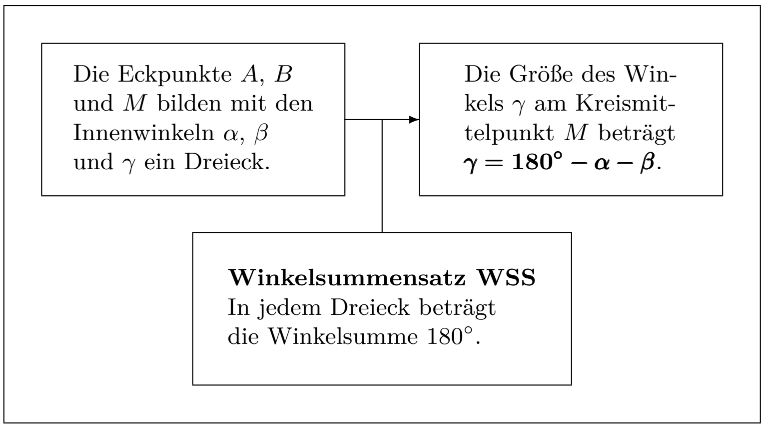


Abb. 3.33: Teil-Argument des Winkelsummensatzes WSS für Dreiecke

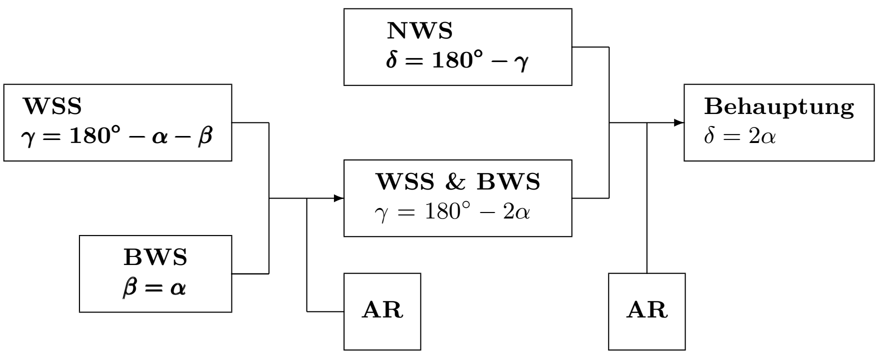


Abb. 3.34: Argumentgefüge für den zweiten Beweis der Behauptung $\delta = 2\alpha$

Diskussion beider Beweiswege

Vor- und Nachteile beider Beweise

Im Folgenden soll abgewogen werden, welche der beiden vorstehenden Argumentstrukturen sich als Folie eher dazu eignen, Schüler den Umfangswinkel-Mittelpunktswinkelsatzes beweisen zu lassen. Geht es um das Entdecken der Behauptung, scheint das zweite Argumentgefüge (↑ Abb. 3.34) näher zu liegen, da keine zusätzliche Hilfslinie hinzugedacht werden muss. Gleichwohl ist dabei die Kette von Argumenten durch die Aufhebung der Halbwinkelsumme 180° und der Dreieckswinkelsumme 180° sowohl auf arithmetischer als auch auf ikonischer Ebene schwerer zu führen. Ein Vorteil des ersten Argumentgefüges (↑ Abb. 3.31) besteht darin, dass die Gleichheit von Stufen- und Wechselwinkel ins Auge springt. Auch läuft man nicht Gefahr, konkrete Winkelzahlen miteinander zu verrechnen, wie dies im Eingangsbeispiel von Goldberg (1992, 43) nahegelegt wird. Jedoch erscheint der Übergang von den konkreten zu beliebigen Winkeln aufgrund der Gleichheit von Stufen- und Wechselwinkeln eher trivial, während dieser Übergang gerade bei der zweiten Argumentstruktur Begründungsbedarf weckt.

Vorübungen zur Beweisförderung

Der Lehrer resp. Interviewer kann durch entsprechende Vorübungen, wie sie auch bei Goldberg (1992, 40) zu finden sind, den Schülern eine Beweismöglichkeit nahelegen und sie zum beispielgebundenen Beweisen der Behauptung anregen. In den Vorübungen können die beim späteren beispielgebundenen Beweisen verwendeten Sätze (Basiswinkel-, Stufenwinkel-, Wechselwinkelsatz resp. Basiswinkel-, Winkelsummen-, Nebenwinkelsatz) thematisiert werden. Dies ist ratsam, damit sich die Schüler inhaltlich und sprachlich auf das beispielgebundene Beweisen der Behauptung einstellen können.

Außenwinkelsatz

Beide Argumente lassen sich modifizieren, um den Außenwinkelsatz (bei nicht-notwendiger Gleichheit der Dreieckswinkel α und β unter Fortlassen der Kreislinie) zu beweisen. Dabei fällt der untere Argumentteil der Basiswinkelgleichheit jeweils weg, d.h. die Argumente werden strukturell gesehen einfacher. Es müssen dann jeweils zwei voneinander unabhängige Variable α und β berücksichtigt werden (↑ Abb. 3.31 und ↑ Abb. 3.34): Bei dem ersten Argumentgefüge sind nun Stufen- und Wechselwinkel verschieden, die Winkelgleichheit ergibt sich nun nicht mehr so elementar. Beim zweiten Argumentgefüge fällt das Vorwärtsarbeiten schwerer, es muss gleich der Winkelsummensatz verwendet werden.

Präferenz für den zweiten Beweis

Vorab soll gesagt werden, dass in den eigenen empirischen Untersuchungen die Schüler höchstens dann gemäß des ersten Argumentgefüges bewiesen, wenn ihnen die Hilfsgerade g vorgegeben wurde. Da dann der beschriebene Übergang von konkreten zu beliebigen, variablen Winkeln nicht allzu schwer war, konnte der Prozess des beispielgebundenen Beweisens nicht in seinem Aspektreichtum nachgezeichnet werden, anders als dies bei den interviewten Schülern für das zweite Argumentgefüge der Fall war. Obwohl strukturell gesehen einfacher, erfordert der (beispielgebundene) Beweis des Außenwinkelsatzes ein höheres Maß an Abstraktionsfähigkeit. Um das beispielgebundene Beweisen empirisch zu untersuchen, wurde in dieser Arbeit also das Aufgabenbeispiel des speziellen Umfangswinkel-Mittelpunktswinkelsatzes mit Nahelegen des zweiten Argumentgefüges (↑ Abb. 3.34) präferiert.

3.4.2 Forschungsperspektiven, -bereiche und -fragen

Forschungsperspektiven dieser Einzelfallstudie

Thema dieser Einzelfallstudie ist die Rolle des induktiven Prüfens beim beispielgebundenen Beweisen. In ↑ Abs. 1.2.5 wurde die Methode des beispielgebundenen Beweisens nach GOLDBERG (1992) bzw. GOLDBERG (1984) kritisch diskutiert und ihre verwendete Aufgabenstellung des *Peripheriewinkel-Zentriwinkelsatzes* (Umfangswinkel-Mittelpunktswinkelsatz) vorgestellt. Im vorangegangenen ↑ Abs. 3.4.1 wurden hierzu zwei Beweismöglichkeiten mit Hilfe des TOULMIN-Schemas als mehrschichtig-mehrgliedrige Argumentgefüge analysiert. Die Forschungsbereiche dieser Einzelfallstudie werden aus folgenden Perspektiven entwickelt (vgl. ↑ Kap. 2.1):

I	Theoretische Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen i.e.S. (in Latenz, subjektiver Realisierung und Manifestierung des beispielgebundenen Beweises als Sinnstruktur)
II	Kategoriale Perspektive	Induktives Prüfen $\leftarrow \cdots \rightarrow$ formelles Beweisen (beispielgebundenes Beweisen im Changieren zwischen induktivem Prüfen und formalem resp. formellem Beweisen)
V	Weitere Perspektiven	◦ Wahl und Anzahl der Beispiele

Forschungsbereiche und Forschungsfragen

Von dieser Schwerpunktsetzung ausgehend, lassen sich mit Blick auf die Aufgabenstellungen nachstehende Fragen zu folgenden Forschungsbereichen stellen:

- Überprüfung der GOLDBERG-These

  Nach (GOLDBERG, 1992, 42) "wird durch das Bearbeiten vieler (die nötige Anzahl ist individuell verschieden) Beispiele (...) der Beweisgedanke vorbereitet". Kann die These GOLDBERGs bestätigt werden, dass Schüler nach entsprechender Vorübung und der Arbeit an mehreren Beispielen beispielgebunden begründen können? Erhalten Schüler durch die Aufforderung, an vielen Beispielen zu arbeiten, nicht eher den Eindruck, eine empirische Erkenntnissicherung reiche aus, die Allgemeingültigkeit von Behauptungen festzustellen? Erweist sich das von GOLDBERG vorgeschlagene Vorgehen nicht insofern als eher kontraproduktiv?

- Wahl und Anzahl der Beispiele

  Welchen Effekt hat die Wahl von trivialen oder zu speziellen Beispielen auf das beispielgebundene Beweisen eines Schülers? Inwiefern eignet sich die Vorgabe komplizierter oder schwer vorstellbarer Beispiele (Stichwort *big/small number*) zum beispielgebundenen Beweisen? Welche Funktion besitzt das jeweilige Beispiel für den Schüler? Benutzt er es, um die Behauptung darin zu bestätigen, oder um diese daran zu beweisen?

- Beispielgebundenes Beweisen durch Lösen einer Berechnungsaufgabe

  Man kann das beabsichtigte Vorgehen im Interview nach HOLLAND (2007, 152) auch als *Satz- bzw. Beweisfindung durch Lösung einer Berechnungsaufgabe* ansehen. (Dabei besteht die *Berechnungsaufgabe* darin, den Mittelpunktswinkel δ nach Vorgabe eines konkreten Basiswinkels α, z.B. $\alpha = 40°$, zu ermitteln. Dadurch kann die behauptete Formel $\delta = 2\alpha$ als Satz gefunden werden.) Wie kann sich nun der Verlauf vom Aufstellen der Behauptung bis zu ihrem Beweis am Beispiel gestalten?

3.4.3 Kontext (Fabian, Manuela)

praktisches Vorgehen

Aus der Diskussion des Unterrichtsgesprächs in ↑ Abs. 3.4.1 mit der ↑ Abb. 3.26 aus GOLDBERG (1992, 43) ging hervor, dass die dort behauptete Formel $\alpha = 2 \cdot x°$ (hier $\delta = 2\alpha$) durch die Eingangsfrage des Lehrers noch nicht im Raum stand, es sich also zunächst um ein *Berechnungsproblem* im Sinne von HOLLAND (2007) handelte. In der Terminologie von MEYER & VOIGT (2009a) stehen die Schüler also zunächst vor der Aufgabe, die Behauptung zu entdecken und nach deren Formulierung diese ggf. an weiteren Beispielen induktiv zu prüfen und beispielgebunden oder formal zu beweisen. Dieses Vorgehen ist in den beiden nachfolgenden Interviews gewählt worden, um Vergleiche zu den theoretischen Ausführungen von HOLLAND (2007, 152) und zum praktischen Vorgehen von GOLDBERG (1992, 43) ziehen zu können.

angebotene Vorübungen

Den beiden Achtklässlern Fabian und Manuela wurden zunächst – ähnlich wie es GOLDBERG (1992, 40) empfohlen hat – vorbereitende Übungen zum Basiswinkelsatz, zum Winkelsummensatz und zum Nebenwinkelsatz angeboten. Im Gegensatz zur Schülerin Manuela hielt der Schüler Fabian dies nicht für nötig. So wird nun mit den längeren Interviewauszügen des Schülers Fabian zunächst begonnen, während die Darstellung der Vorübungen erst im Rahmen der Interpretation des späteren Interviews von Manuela erfolgt (↑ Abs. 3.4.8).

orientierende Vorausschau

Da sich die Analyse etwas länger gestaltet, ist an dieser Stelle eine Vorausschau zur Orientierung angebracht: Es wird sich zeigen, dass sich mit einem GOLDBERG (1992) entsprechenden Vorgehen die Beispielbindung beim Schüler Fabian soweit verfestigt und dieser somit sein induktives Prüfen zunehmend algorithmisiert. Im Kontrast dazu arbeitet die Schülerin Manuela rückwärts, was sie von induktiven Prüfungen an immer neuen Beispielen abhält, und ihr durch den abstrakteren Ansatz auch zu einem formalen Beweis des Außenwinkelsatzes verhilft.

3.4.4 Hauptanalyse (Fabian): Regeln zur Berechnung des Mittelpunktswinkels δ

Schüler Fabian zeichnet eine erste Planskizze

Zu Beginn des Interviews hat der Schüler Fabian ein Dreieck in einen Kreis gezeichnet. Zwei Eckpunkte des Dreiecks liegen auf der Kreisline, der dritte Eckpunkt liegt im Mittelpunkt des Kreises (↑ Abb. 3.35). Fabian hat den Winkel α mit 40° gemessen und wird nun zur Größe des Mittelpunktswinkels δ befragt. Die Behauptung $\delta = 2\alpha$ steht zu diesem Zeitpunkt noch nicht im Raum. Der Schüler Fabian erhält die Möglichkeit, diese Behauptung durch Lösung des *Berechnungsproblems*, wie groß der Mittelpunktswinkel δ sei, zu entdecken – hoffend, dass sich bei ihm ein Beweisbedürfnis einstellt.

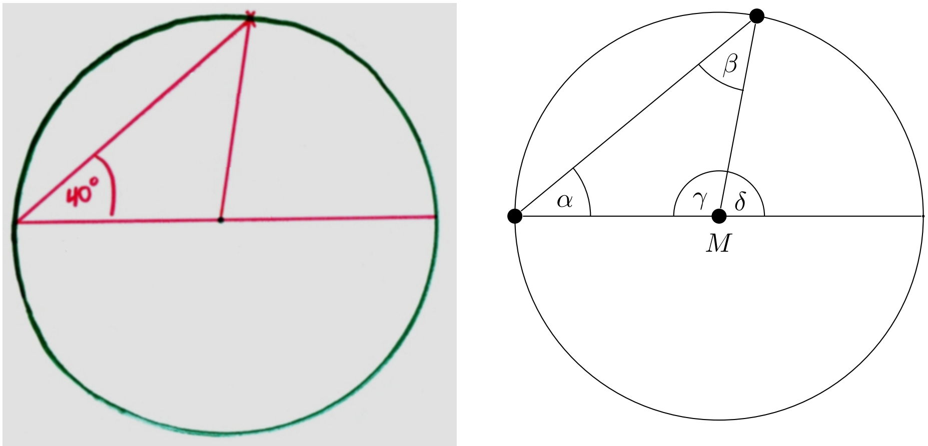


Abb. 3.35: Schüler Fabians angefangene erste Planskizze mit Vorgabe des Basiswinkels $\alpha = 40°$ und dazu passende Bezeichnungen

06:00	I	25	*ja, emm, ich würde jetzt gerne wissen .. wie groß dieser Winkel ist* (deutet auf den Mittelpunktswinkel δ) *.. hast jetzt bisschen Zeit, kannst dir überlegen* (20 sec)
06:43	Fa	26	*80° würde ich sagen, müsste der sein*
06:46	I	27	*aha, wie bist du denn darauf gekommen, Fa.'*
06:50	Fa	28	*ja also ich hab hier, erst 'mal geguckt, der ist ja, das ist ja der Gleiche wie der* (deutet auf die Basiswinkel α und β)
06:55	I	29	*warum'*
06:56	Fa	30	*weil, das, weil dieser Punkt* (deutet auf den Mittelpunkt M) *genau in der Mitte von, dem liegt* (deutet in die Mitte der Dreiecksseite an den Basiswinkeln α und β) *.. und das ist dann, ein, glaub, gleichschenkliges, Dreieck, und dass dieser Winkel genauso wie der* (deutet auf die Basiswinkel β und α), *also auch 40°, und ein Dreieck hat, 180° immer, also muss der* (deutet auf den Mittelpunktswinkel γ) *100° sein, und diese Linie* (deutet auf den Durchmesser) *ist ja g'rade, deshalb muss, der gesamte Winkel auch 180° sein, und da der* (deutet auf den Mittelpunktswinkel γ) *100 ist, muss der* (deutet auf den Mittelpunktswinkel δ) *dann halt 80 sein, würd ich sagen*

Schüler Fabian nennt Regeln: Basiswinkelsatz, Winkelsummensatz, Nebenwinkelsatz

Bis hierhin hat der Schüler Fabian bei seinem Vorwärtsarbeiten schon jene drei Regeln (Basiswinkelsatz, Winkelsummensatz, Nebenwinkelsatz) mehr oder weniger angesprochen, die ein Experte aus argumentativer Sicht für einen möglichen Beweis der Behauptung $\delta = 2\alpha$ als wesentlich ansieht. Die drei Regeln finden sich im mehrgliedrigen Argumentgefüge der ↑ Abb. 3.34 aus ↑ Abs. 3.4.1 wieder. Der Schüler Fabian selbst begründet zu Beginn seiner Ausführungen in

Äußerung Fa 30 die Gleichschenkligkeit des betrachteten Dreiecks damit, dass dieses achsensymmetrisch sei. Es ist allerdings fraglich, ob der Schüler Fabian seine Argumente schon als Teile eines Beweises versteht, d.h. ob er – unter Anwendung der drei Regeln im betrachteten Beispiel – die latente Sinnstruktur als Beweis der Behauptung $\delta = 2\alpha$ subjektiv realisiert hat. Denn diese allgemeine Behauptung ist noch gar nicht thematisiert worden. Stünde die Behauptung $\delta = 2\alpha$ hingegen schon im Raum, könnte man in der Äußerung Fa 30 des Schülers Fabian durchaus eine Prüfung mit latenter Beweisidee sehen. Im betrachteten Kontext manifestiert sich jedoch nur eine Begründung für die Richtigkeit der speziellen Lösung von 80° für den Winkel δ. Der Ausdrucksweise von Holland (2007, 152, 161) folgend, hat der Schüler durch die Lösung des *Berechnungsproblems* noch nicht erkennbar zu Satz und Beweis gefunden. Die Behauptung, dass $\delta = 2\alpha$ sei, hat der Schüler Fabian noch nicht geäußert.

Schüler Fabian hat ein Berechnungsproblem gelöst

07:32	I	31	*mm-mmh, glaubst du, dass das <u>immer</u> so ist' .. also wenn wir hier* (deutet auf die Basiswinkel α und β) *einen <u>anderen</u> Winkel haben, zum Beispiel <u>10°</u> .. oder* 1° (4 sec) *beziehungsweise du hast gesagt, es sind* 80° *.. ich stell jetzt die Behauptung auf, <u>der</u> Winkel* (deutet auf den Mittelpunktswinkel δ) *ist jetzt doppelt so groß wie <u>der</u>' ...* (deutet auf den Basiswinkel α)
08:02	Fa	32	*<u>nö</u>, nicht <u>immer</u> .. würd ich sagen ...*
08:07	I	33	*ja, kannst ja vielleicht 'mal untersuchen ... kannst ja noch andere Dreiecke zeichnen, wenn du willst ..*

Der Interviewer knüpft an das Eingangsbeispiel $\alpha = 40°$ an, indem er den Schüler Fabian dazu anregt, unter Variation des Basiswinkels α seine vorangegangenen Argumente aus Äußerung Fa 30 allgemeiner zu denken und zu überlegen, ob – wie der Interviewer in Äußerung I 31 zunächst unscharf formuliert – *das <u>immer</u> so ist.* Anhand möglicher Beispielwinkel wie $\alpha = 10°$ oder $\alpha = 1°$ bringt der Interviewer die allgemeine Behauptung $\delta = 2\alpha$ ins Gespräch. Dass der Schüler Fabian dies umgehend verneint, indiziert, dass er seine in Äußerung Fa 30 vorgetragenen Regeln in der Tat nicht als Teilbegründungen zum Beweis der allgemeinen Behauptung $\delta = 2\alpha$ gesehen hat, sondern allein zur Rechtfertigung seines konkreten Rechenwegs am Beispiel $\alpha = 40°$ einsetzte. Seine Äußerung Fa 30 hat insofern nur der Begründung seines vorher statuierten Ergebnisses $\delta = 80°$ gedient. Den Beweis der nun im Raum stehenden allgemeinen Behauptung hat er jedoch nicht subjektiv realisiert.

der Interviewer stellt die Behauptung $\delta = 2\alpha$ auf

3.4.5 Hauptanalyse (Fabian): Induktive Prüfungen der Behauptung $\delta = 2\alpha$

der Interviewer folgt dem Vorgehen von Goldberg [1992]

Der Interviewer folgt nun mit seinem Vorschlag, weitere Beispiele zu untersuchen, der oben zitierten Empfehlung von Goldberg (1992, 43): Unter Betrachtung vieler Beispiele und Herausarbeitung dessen, was diesen strukturell gemein sei, gelange der Schüler zu einem beispielgebundenen Beweis. Dazu lässt der Interviewer den Schüler Fabian eine zweite Planskizze anfertigen (↑ Abb. 3.36).

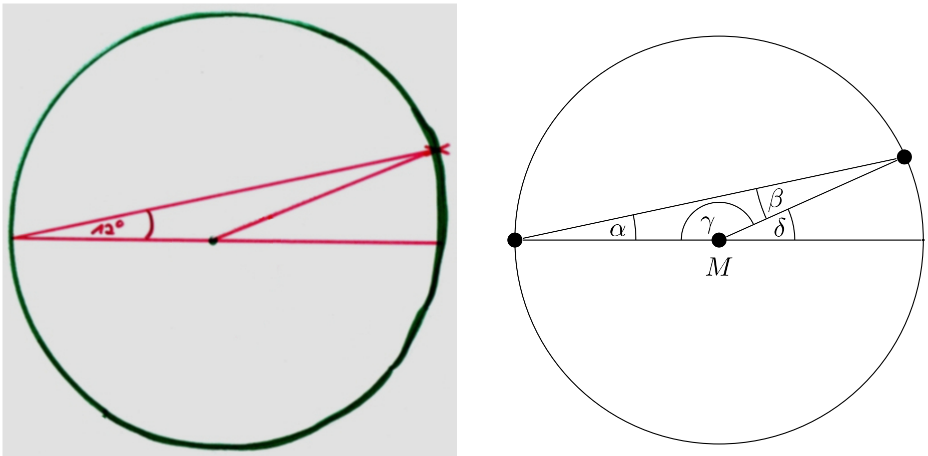


Abb. 3.36: Schüler Fabians angefangene zweite Planskizze mit Vorgabe der weiteren Basiswinkel $\alpha = 12°, \frac{1}{10}°, \frac{1}{1000}°, x°$ und dazu passende Bezeichnungen

08:17	Fa	34	*das jetzt, noch 'mal so* (beginnt die zweite Planskizze zu zeichnen, ↑ Abb. 3.36, 30 sec) *ja dann, sieht das doch wohl so aus, als wenn die .. gleich groß wär'n*
08:58	I	35	*äh, dass was gleich groß ist'*
09:00	Fa	36	*äh, dass der doppelt so groß ist, wie der* (deutet zunächst auf den Mittelpunktswinkel δ und dann auf den Basiswinkel α, ohne dass diese Winkel bereits bezeichnet sind)
09:04	I	37	*aha, sieht so aus .. haben wir ja nicht gemessen*
09:08	Fa	38	(spricht gleichzeitig) *mit dem kann ich dass nicht messen*

Der Schüler Fabian begreift die Untersuchung am neu gezeichneten Beispiel in Äußerung Fa 34 als eine zu wiederholende Aufgabe. Die Regeln aus der Äußerung Fa 30 führt der Schüler Fabian hier vermutlich deswegen nicht an, weil sich das neue Beispiel ohne Vorgabe einer Gradzahl für den Basiswinkel α nicht als Berechnungsaufgabe für ihn darstellt. Er verlässt sich somit zunächst auf seine Wahrnehmung und möchte seinen visuellen Eindruck, dem gemäß der Mittelpunktswinkel δ das Doppelte des Basiswinkels α sei, nun durch das Messen der beiden Winkel bekräftigt wissen. Sein experimentell-induktiver Impetus des Messens erinnert an die bei Wittmann & Müller (1988) genannten *experimentellen 'Beweise'* (↑ Abs. 1.2.3). Damit werden gerade jene Regeln verdrängt,

Schüler Fabian möchte Winkel messen und vergisst darüber seine Argumente die Fabian vorher zur Berechnung nutzte und nun bei seiner Planskizze zur Begründung der allgemeinen Aussage $\delta = 2\alpha$ hätte verwenden können.

09:10	I	39	*mm-mmh, ja, gut, also der* (deutet in der zweiten Planskizze auf den Basiswinkel α, ↑ Abb. 3.36) *.. was wird der sein' .. der wird vielleicht so ...* 10° *sein' ...*
09:25	Fa	40	*nee, der ist doch 'n bisschen größer hier glaub ich als* 20° (10 sec)
09:40	I	41	*also da* (deutet auf die erste Planskizze in ↑ Abb. 3.35) *hast du jetzt ausgerechnet,* 80°
09:43	Fa	42	*ja ..*
09:46	I	43	*doppelt so groß wie* 40° *.. ist das hier jetzt auch so'* (deutet auf die zweite Planskizze in ↑ Abb. 3.36)
09:53	Fa	44	*nee, ich würd sagen dass der größer ist* (deutet dagegen auf den Mittelpunktswinkel δ), *also mehr als doppelt so groß*

Der Schüler Fabian rätselt, ob der Mittelpunktswinkel δ in der neu gezeichneten Skizze mehr als doppelt so groß wie der Basiswinkel α sei. Da der Interviewer dem Schüler das Messwerkzeug des Weiteren nicht mehr zur Verfügung stellen möchte, setzt er den Basiswinkel nun mit $\alpha = 12°$ an:

Schüler Fabian rätselt über die Größe des Mittelpunktswinkels

09:57	I	45	*mm-mmh .. mm-mmh .. mm-mmh* (Räuspern) *na nehmen wir an, das ist hier* (deutet auf den Basiswinkel α) *jetzt so,* 12° (4 sec)
10:10	Fa	46	12° (bezeichnet den Basiswinkel α) *.. dann, dann ist der auch* 12 (deutet auf den Basiswinkel β)
10:20	I	47	*warum', kannst du's noch 'mal sagen'*
10:22	Fa	48	*ja das ist, ja das ist genauso wie bei diesem* (zeigt auf seine erste Planskizze in ↑ Abb. 3.35), *dass das, dass der dann genauso groß ist wie der* (deutet auf die Basiswinkel α und β in seiner zweiten Planskizze in ↑ Abb. 3.36)
10:31	I	49	*mmh, ja warum'*
10:35	Fa	50	*ähm* (5 sec) *ja, weil das* (4 sec) *weil das Dreieck gleichschenklig ist, und, dann muss der hier* (deutet auf den Basiswinkel β), *das sind dann* 24°, *das muss dann* 100 (deutet auf den Mittelpunktswinkel γ, langsam) *...* 156 *sein,* 156*, und das müsste dann ... ja, dann müsste ja dann .. doch* 24° *sein*
11:21	I	51	*mm-hmm* (6 sec) 24°
11:29	Fa	52	*das wär ja dann doch doppelt so groß*

Seine vormals visuell bestimmte Voraussage aus Äußerung Fa 44, der zufolge der Mittelpunktswinkel δ mehr als doppelt so groß wie der Basiswinkel $\alpha = 12°$ sei, widerlegt der Schüler Fabian an dem gewählten Beispiel selbst – er bestätigt somit die Behauptung $\delta = 2\alpha$ induktiv. Diese Prüfung fällt für $\alpha = 12°$ sehr

Schüler Fabian prüft die Behauptung $\delta = 2\alpha$ induktiv ohne Nennung von Regeln viel kürzer aus als im Vergleichsbeispiel seiner ersten Planskizze in ↑ Abb. 3.35 für $\alpha = 40°$, so dass man annehmen kann, dass der Schüler Fabian den Rechenweg zum Mittelpunktswinkel δ nun schneller gehen kann. Er nennt auch nicht mehr den Winkelsummensatz im Dreieck als Regel und kommt auch nicht mehr auf den Nebenwinkelsatz zu sprechen. Überdies gibt es auch keinen direkten Hinweis in den Äußerungen des Schülers Fabian darauf, warum die Summe 24° der Basiswinkel α und β mit der Größe des errechneten Mittelpunktswinkels $\delta = 24°$ übereinstimmt.

GOLDBERG*s These erscheint fraglich*

Dies zusammengenommen lässt die These GOLDBERGs, nach der das Bearbeiten mehrerer Beispiele das beispielgebundene Beweisen im Sinne einer strukturellen Erkenntnis am Beispiel fördere, fraglich erscheinen. Es steht auch zu befürchten, dass die Übertragung des technischen Vorgehens von einem auf das andere Beispiel unter Absehung strukturell-mathematischer Aspekte als empirische Begründung der Behauptung aufgefasst wird und sich so ein induktives Beweisverständnis aufbaut.

11:31	I	53	*mm-mmh .. meinst du dass das immer so ist oder nicht'*
11:37	Fa	54	*ja dann würd ich sagen, also wenn wir jetzt schon 2 Beispiele haben, wo's genau, so ist, dann würde ich schon sagen, dass das ..*
11:47	I	55	*na ja*
11:48	Fa	56	*bei, ja vielleicht gibt es irgendwo 'ne Ausnahme, 's*

Motto des Schülers Fabian: 'Was zweimal gilt, gilt immer'

Schüler Fabian sucht nach Ausnahmen von der Regel

Die Äußerung Fa 54 des Schülers Fabian kann man so verstehen, dass für ihn in der Tat schon zwei Beispiele ausreichen, um der Allgemeingültigkeit der fraglichen Behauptung $\delta = 2\alpha$ hinreichend großes Vertrauen zu schenken. Die skeptische Reaktion des Interviewers in Äußerung I 55 veranlasst den Schüler Fabian in Äußerung Fa 56 zu einer Relativierung in dem Sinne, dass es eine *Ausnahme* geben könnte. Es gibt also kein Indiz, dass der Schüler Fabian einen Beweisbedarf im Sinne eines theoretischen Erkenntniswegs nach MEYER (2007, 76f.) sieht. Dass der Schüler Fabian nach einer Ausnahme sucht, und nicht etwa nach einem Beweis, ist bezeichnend.

der Interviewer gibt ein drittes Beispiel vor

Im Folgenden gibt der Interviewer mit $\alpha = 1°$ im Sinne eines *small number* (↑ Abs. 1.1.2) ein drittes Beispiel vor. Mit dieser kleinen Winkelzahl lässt sich die Behauptung nicht mehr visuell prüfen, da dies nur noch bedingt vorstellbar ist. Zugleich ist das Beispiel aber auch so einfach gehalten, dass der Rechenaufwand zur Bestätigung der Behauptung gering und vielleicht auch deshalb einer strukturellen Betrachtung förderlich ist.

11:50	I	57	*ja, aber was ist denn, wenn es* <u>1°</u> *sind' .. wenn der* <u>1°</u> *ist, haben wir jetzt nicht gezeichnet*
12:03	Fa	58	(leise) 1°*, dann wär das auch* 1°*, dann wär das* 199 (laut) *ja dann wär das, dann wär'n das, ja dann wär's nur* <u>1°</u>*,* <u>*dieser*</u> *Winkel* <u>*auch*</u> (deutet auf den Mittelpunktswinkel δ)
12:09	I	59	<u>*der*</u> *Winkel wär auch* <u>1°</u>' (deutet auf den Mittelpunktswinkel δ)
12:10	Fa	60	<u>*nee*</u>*, der wär, der Winkel wären* <u>2°</u>
12:15	I	61	<u>*warum*</u>*'*
12:14	Fa	62	*weil,* <u>*der*</u> *ist* 1° (deutet auf den Basiswinkel α), <u>*der*</u> *ist* 1° (deutet auf den Basiswinkel β), <u>*der*</u> 198 (deutet auf den Mittelpunktswinkel γ) *..*
12:18	I	63	*äh,* 178*, oder'*
12:20	Fa	64	*äh,* 178*, ja*
12:20	I	65	*ja, und* <u>*der*</u>*'* (deutet auf den Mittelpunktswinkel δ)
12:21	Fa	66	*ja, und der müsste dann, äh da* <u>*das*</u> *ja* 180° *sind,* <u>*2*</u> *sein*

Schüler Fabian perfektioniert seinen Rechenweg zu einem Algorithmus

Gegenüber der Äußerung Fa 50, in welcher der Schüler Fabian die Behauptung $\delta = 2\alpha$ am Beispiel des Basiswinkels $\alpha = 12°$ untersuchte, reduziert sich der Rechenweg des Schülers Fabian in den vorstehenden Äußerungen noch einmal deutlich. Am Beispiel des Basiswinkels $\alpha = 1°$ nennt der Schüler Fabian hier nicht mehr die Gleichschenkligkeit des Dreiecks als Grund für die Gleichheit der Basiswinkel α und β. Dies stützt die These, dass er in der Betrachtung der Beispiele sein Vorgehen zunehmend algorithmisiert, welches auf prozedurale Effizienz im Sinne vieler Rechnungen in immer kürzerer Zeit ausgerichtet ist. Es ist hier nicht zu erkennen, dass der Schüler Fabian eine Reflexion dessen anstrebt, was allen vorstehenden Beispielen in ihrer Beweisstruktur gemein ist. Sein Vorgehen beschränkt sich nur noch auf die bloße Berechnung des Mittelpunktswinkels δ und auf induktiv erworbene Analogien von einem Aufgabenbeispiel auf das andere, wie dies etwa in seiner früheren Äußerung Fa 48 gut zum Ausdruck kommt. Der Beweis als argumentative Begründung der allgemeinen Behauptung $\delta = 2\alpha$ wird eher noch latenter.

12:25	I	67	*aha, ja, gut, emm .. 2 bis 3 Beispiele haben wir jetzt gemacht, emm, der Mathematiker will natürlich wissen, warum das so ist … oder, willst du noch 'n Beispiel machen'* (wendet das Papier für ein neues Beispiel) *.. noch was ..*
12:47	Fa	68	*nehmen wir jetzt 'mal .. ziemlich großen* (zeichnet eine dritte Planskizze in ↑ Abb. 3.37, 35 sec) *so, würde ich jetzt sagen, dass der,* 75° *ist, das könnte ja*
13:35	I	69	*mmh, ja*
13:36	Fa	70	*ungefähr so sein* (bezeichnet den Basiswinkel α, 5 sec) *mmh, dann ist der auch hier* (deutet auf den Basiswinkel β) *genauso groß*
13:43	I	71	*warum'*
13:44	Fa	72	*auch wieder, weil der, gleichschenklig ist und dann .. müsste der* (deutet auf den Basiswinkel β) *.. das sind dann* 150 *.. und der* (deutet auf den Mittelpunktswinkel γ) *..* 30° *sein … aha* (4 sec) *und der* (deutet auf den Mittelpunktswinkel δ) *.. ja, das sind dann auch wieder* 150 *… das, ist immer so, jetzt ist nur die Frage, warum ist das immer so, da wird's dann natürlich schwieriger*

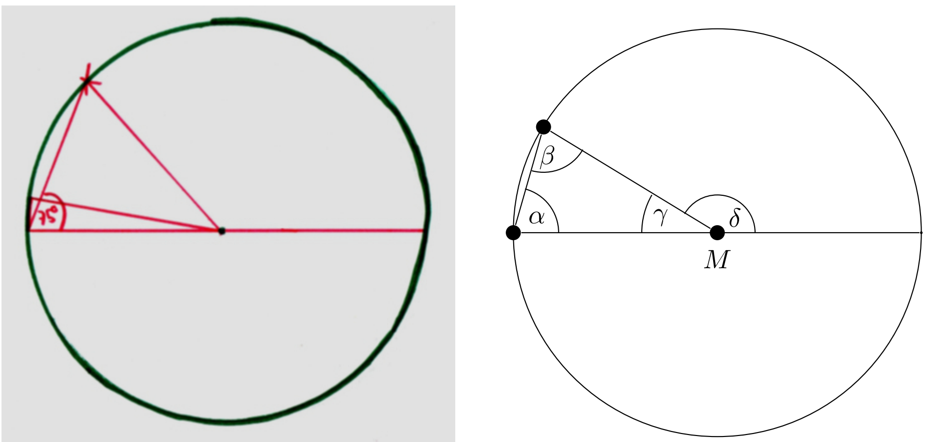


Abb. 3.37: Schüler Fabians dritte Planskizze mit Vorgabe der Basiswinkel $\alpha = 75°$ und $\alpha \approx 90°$ und dazu passende Bezeichnungen

Der Schüler Fabian hat vom Interviewer in dessen Äußerung I 67 den Hinweis erhalten, eine allgemeine Begründung für die Behauptung $\delta = 2\alpha$ in Betracht zu ziehen. Der Schüler Fabian greift aber lieber das Angebot auf, ein viertes Beispiel (mit dem Basiswinkel $\alpha = 75°$) zu betrachten. Dabei bemerkt er in der Äußerung Fa 72, dass die Summe der Basiswinkel $\alpha + \beta = 150°$ erneut mit dem Winkel $\delta = 150°$ übereinstimmt, und schließt daraus wiederum induktiv, dass dies immer so sei. Die frühere Frage des Interviewers nach einer allgemeinen Begründung dafür bezeichnet der Schüler Fabian als *natürlich schwieriger*. Er unterscheidet also die induktive Prüfung durchaus deutlich von der für schwie-

Schüler Fabian erkennt einen Beweisbedarf riger befundenen Begründung der (leicht modifizierten) Behauptung $\delta = \alpha + \beta$. Zuvor scheint ihm also aufgegangen zu sein, dass die Summe der Basiswinkel mit dem Mittelpunktswinkel übereinstimmt. Dieses Moment der Überraschung lässt erkennen, dass der Schüler Fabian die latente Beweisidee durch seine Rechnungen wohl nicht subjektiv realisiert hat.

14:16	I	73	*mm-mmh, ja, emm, reichen dir die Beispiele als Begründung aus'*
14:23	Fa	74	*ich würd jetzt 'mal einfach so sagen, joa*
14:25	I	75	*mmh, mm-mmh .. gut, emm, du hast ja auch einige, Argumente da genannt, was hattest du denn da gesagt' ... wie bist du denn auf die,* 150 *gekommen'*
14:41	Fa	76	*ja, dass, dass der halt .. genauso groß ist, weil das .. meiner Meinung nach, doch gleichschenklig ist, wenn ich mich da jetzt nicht vertu, und .. der ist dann auch* 75° *und der dann* 30, *der müsste dann* 150 .. ° *sein*
15:06	I	77	*mm-mmh .. ja meinst du, das ist jetzt immer so oder gibt es da Ausnahmen'* (4 sec)
15:16	Fa	78	*also ich würd sagen, das ist immer so* (6 sec) *ja* (wendet das Blatt mit der dritten Planskizze in ↑ Abb. 3.37)

Schüler Fabian zeigt sich von der Allgemeingültigkeit der Behauptung überzeugt

Dem Schüler Fabian reichen seiner Äußerung Fa 74 nach die vorstehenden Beispiele als Begründung für die allgemeine Behauptung $\delta = 2\alpha$ aus. Auf eine nochmals erneuerte Nachfrage des Interviewers in I 75, wie sich dies im vierten Beispiel (mit dem Basiswinkel $\alpha = 75°$ in ↑ Abb. 3.37) begründen lässt, ermittelt der Schüler Fabian in Fa 76 noch einmal das richtige Ergebnis $\delta = 150°$. Von der ausnahmslosen Richtigkeit der Behauptung $\delta = 2\alpha$ scheint er in Fa 78 schließlich überzeugt zu sein, zumal er diese an nunmehr vier Beispielen bestätigt hat.

Schüler Fabian prüft induktiv

Anders als Goldberg (1992) prognostiziert hat, ist es dem Schüler Fabian bisher nicht gelungen, die Allgemeingültigkeit der bisher nur an Beispielen bestätigten Behauptung $\delta = 2\alpha$ zu erweisen. Die Beispiele dienen dem Schüler Fabian nicht etwa dazu, an ihnen etwas Allgemeingültiges zu erkennen und beispielgebunden oder allgemein zu beweisen, sondern in ihnen jeweils die Behauptung induktiv zu bestätigen und daraus einen Algorithmus zu generieren. Dem Schüler Fabian kann man jedoch zugute halten, dass er durchaus einen Beweisbedarf für die Behauptung $\delta = 2\alpha$ erkannt hat und eingangs auch auf Regeln verwiesen hat, die bei einem Beweis am Beispiel zum Tragen kommen können.

3.4.6 Hauptanalyse (Fabian): Versuchte Begründung der Basiswinkelgleichheit

Schüler Fabian untersucht den Grenzfall $\alpha \approx 90°$

Der Schüler Fabian untersucht nun von sich aus den Grenzfall $\alpha \approx 90°$, indem er in ↑ Abb. 3.37 ein zusätzliches Dreieck mit nahezu 90° als Basiswinkel einzeichnet. Rechnerisch kommt er auf das Ergebnis $\delta = 180°$ und gerät damit in Hinblick auf seine zuvor angefertigte Planskizze in einen kognitiven Konflikt. Er schätzt, dass der eine Basiswinkel etwas kleiner als 90° und der andere Winkel – *und dass der dann .. genauso groß wie der* sein müsste, weil dies bei den früheren Beispielen auch so gewesen sei (Fa 98, 100, 102, ↑ Sonderband). Er begründet dies in Hinblick auf das Dreieck mit $\alpha \approx 90°$ in ↑ Abb. 3.37 wie folgt: *ja, weil das, weil das Dreieck gleichschenklig ist* (Fa 106). Auf die Nachfrage, warum dies so sei, und ob dies vielleicht Zufall sei, antwortet er in Äußerung Fa 112: *ja, aber, dass die dann, alle Dreiecke gleichschenklig sind, das wär ja ein ganz schön großer Zufall ….* Durch den induktiven Gewöhnungseffekt und seine Analogien von einem auf das nächste Beispiel mag dem Schüler Fabian die Gleichschenkligkeit des Dreiecks nun als unhinterfragbare und nicht zu begründende Tatsache erscheinen. Deshalb befragt ihn der Interviewer hinsichtlich der Gleichschenkligkeit, zumal er in seiner anfänglichen Äußerung Fa 30 auch schon einmal darauf zu sprechen gekommen war.

02:54	I	113	*hmm* (10 sec) *hattet ihr da 'mal 'ne Definition, was gleichschenklig ist, oder was man darunter versteht' …*
03:14	Fa	114	*ah das hatten wir bestimmt*
03:19	I	115	(grinst) *gleichschenklig, hmm, was heißt das'*
03:20	Fa	116	*ja dass die Schenkel gleich sind, jetzt müsste man*
03:23	I	117	*ach so, ja* (schaut wie der Schüler auf die dritte Planskizze, ↑ Abb. 3.37)
03:23	Fa	118	*wissen, ob die gleich lang sind oder ..*
03:30	I	119	*joa, sind die gleich lang'*
03:32	Fa	120	*ja bei diesem* (nimmt das Lineal, um die Seitenlängen des Dreiecks mit den Basiswinkeln $\alpha = \beta = 75°$ zu messen, 10 sec) *schon 'mal, nicht … sind alle, unterschiedlich, bis auf, nee, die beiden sind gleich*
03:55	I	121	*mm-mmh, mm-mmh .. mmh, warum sind die gleich'* (10 sec)
04:09	Fa	122	(gedehnt) *weil, äh* (10 sec) *weil die beiden Winkel* (deutet nacheinander auf die Basiswinkel α und β) *hier gleich sind*
04:25	I	123	(lacht) *nee jetzt, ah, du hattest ja gesagt die Winkel sind gleich, weil's 'n gleichschenkliges Dreieck ist*

Schüler Fabian begeht einen Zirkelschluss

In den vorstehenden Äußerungen des Schülers Fabian ist noch einmal deutlich spürbar, dass sich dieser im Sinne eines empirischen Verständnisses von Mathematik primär auf sein Messen und seine visuelle Wahrnehmung verlässt, ehe er zu Begründungsschritten ansetzt. Wie der Interviewer in der Äußerung I 123 andeutet, schließt der Schüler Fabian in seiner Äußerung Fa 122 umgekehrt von der Gleichheit der Basiswinkel als Konklusion zurück auf die Gleichschenkligkeit des Dreiecks als Datum (vgl. ↑ Abb. 3.28). In seiner früheren Begründung in Äußerung Fa 30 schien der Schüler Fabian die Gleichschenkligkeit noch auf die Achsensymmetrie des Dreiecks zurückzuführen. Diese Eigenschaft des Dreiecks wird jetzt nicht angesprochen. Sein hier vollzogener Schluss ist gleichwohl aufgrund der Äquivalenz zwischen Basiswinkelgleichheit und Gleichschenkligkeit des Dreiecks verständlich. Auch gelingt es dem Schüler Fabian schließlich nach Verweis auf den skizzierten Kreis um den Mittelpunkt herum die Schenkel des betrachteten Dreiecks als Radien des umschriebenen Kreises anzusehen und somit die erwartete Begründung für die Gleichschenkligkeit des betrachteten Dreiecks doch noch zu liefern:

05:02	I	129	*ah, ach das ist nen Mittelpunkt, ach so, mm-mmh .. äh, und warum ist das jetzt, warum sind die Schenkel jetzt gleich'* (deutet auf die dritte Planskizze, ↑ Abb. 3.37)
05:06	Fa	130	*ach so, ja weil die beiden vom .. Kreis, -rand, sag ich jetzt 'mal, zum, Mittelpunkt gehen, und dann müssen die gleich sein, weil das die gleiche Strecke, überall ist*

Schüler Fabians Begründung der Gleichschenkligkeit

In der Äußerung Fa 130 lässt Fabian erkennen, dass er die Schenkel des Dreiecks als Radien des Kreises ansieht. Insofern kann man hier von einer Begründung der Gleichschenkligkeit sprechen, die wiederum die Gleichheit der Basiswinkel α und β impliziert. Optimistisch gesehen, ließe sich der untere Teil des mehrgliedrigen Arguments aus ↑ Abb. 3.34 rekonstruieren, jedoch bleibt fraglich, ob Fabian im Schluss auf die Basiswinkelgleichheit mittels des Basiswinkelsatzes allgemein und denknotwendig gedacht hat.

3.4.7 Hauptanalyse (Fabian): Lückenhaftes Argumentgefüge

Der Interviewer kommt nun auf das Eingangsbeispiel $\alpha = 40°$ zurück. Nachdem der Schüler Fabian die fehlenden Beispielwinkel in seine erste Planskizze in ↑ Abb. 3.38 eingezeichnet hat, spricht der Interviewer noch einmal die allgemeine Behauptung $\delta = 2\alpha$ an:

05:59	I	133	*also, ich hab ja behauptet, der Winkel* (deutet auf den Mittelpunktswinkel δ) *ist jetzt doppelt so groß wie der* (deutet auf den Basiswinkel α)
06:03	Fa	134	*ja*
06:03	I	135	*emm*
06:05	Fa	136	*das stimmt ja, also in diesem Fall haben wir jetzt 'mal*

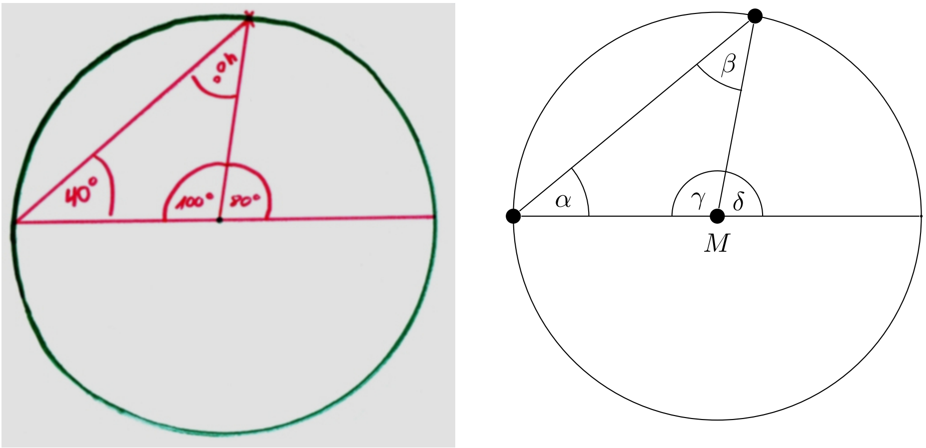


Abb. 3.38: Schüler Fabians ergänzte erste Planskizze mit Vorgabe des Basiswinkels $\alpha = 40°$ und dazu passende Bezeichnungen

06:08	I	137	*.. ja, und, emm, gilt das denn jetzt immer'* (18 sec)
06:28	Fa	138	*ja, weil die beiden Seiten immer, gleich lang sind* (deutet abwechselnd auf die beiden Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks), *und die können ja dann irgendwie* (deutet verschiedene Radien des Kreises an sowie wieder auf die Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks) *da hingehen* (deutet auf den Mittelpunkt), *der* (deutet auf den Mittelpunktswinkel δ) *ist ja dann, immer doppelt so groß wie der* (deutet auf den Basiswinkel α)
06:38	I	139	*ja und warum ist das so'* (10 sec) *kannst ja 'mal überlegen* (38 sec)
07:33	Fa	140	*ja warum ist das so'*

Schüler Fabian stellt keinen Zusammenhang zwischen seinen Argumenten und der Behauptung her

In der Äußerung Fa 136 des Schülers Fabian deutet sich an, dass er sich speziell *in diesem Fall* (mit dem Basiswinkel $\alpha = 40°$) kundig machen will. Das Interesse des Interviewers zielt jedoch darauf ab, dass Fabian die Allgemeingültigkeit der Behauptung $\delta = 2\alpha$ am Beispiel $\alpha = 40°$ begründet. Die Begründung *ja, weil die beiden Seiten immer, gleich lang sind* in der Äußerung Fa 138 bezieht sich auf die Gleichschenkligkeit des Dreieicks in Äußerung Fa 130 als Begründung für die Gleichheit der Basiswinkel α und β. Schüler Fabians Gestik während seiner Äußerung Fa 138 kann damit als Indiz dafür angesehen werden, dass er die Gleichschenkligkeit des Dreiecks beispielgebunden bewiesen hat. Allerdings gibt sein Nachsatz *der ist ja dann, immer doppelt so groß wie der* aus Äußerung Fa 138 bloß die allgemeine Behauptung wieder, ohne dass ein logischer Zusammenhang zur begründeten Gleichschenkligkeit erkennbar wäre. Der Schüler Fabian vermag auch nach längerem Nachdenken keinen stringenten Beweis für die Allgemeingültigkeit der Behauptung angeben.

3.4.8 Hauptanalyse (Fabian): Rechenweg für das Beispiel $\alpha = \frac{1}{10}^\circ$

Um dem Schüler Fabian eine weitere Möglichkeit zu geben, die Behauptung $\delta = 2\alpha$ beispielgebunden zu beweisen, wählt der Interviewer als fünftes Beispiel den Basiswinkel $\alpha = \frac{1}{10}^\circ$ und als sechstes Beispiel später noch $\alpha = \frac{1}{1000}^\circ$ im Sinne von *small numbers* (↑ Abs. 1.1.2). Diese Beispielwinkel lassen sich nicht mehr zeichnen und kaum noch vorstellen. Der Interviewer folgt damit erneut dem Vorgehen von Goldberg (1992, 43), ein nur noch bedingt vorstellbares Beispiel *quasi* in der Form eines Variablenzeichens x° zu wählen, in der Hoffnung, der Schüler werde zur *Gewinnstrategie* Goldbergs greifen, dem aufwändigen Rechenweg eine beispielgebundene Begründung vorzuziehen.

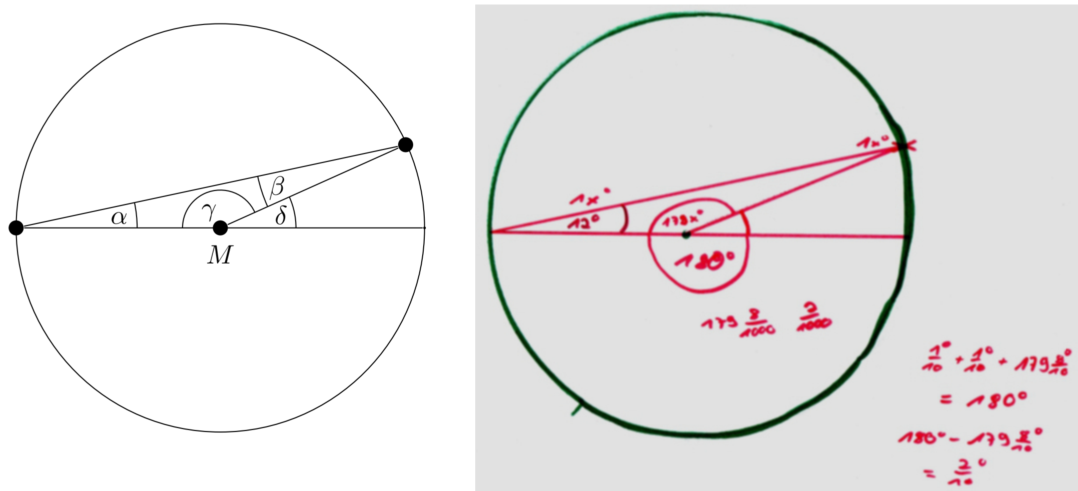


Abb. 3.39: Schüler Fabians ergänzte zweite Planskizze mit Vorgabe der weiteren Basiswinkel $\alpha = 12^\circ, \frac{1}{10}^\circ, \frac{1}{1000}^\circ, x^\circ$ und dazu passende Bezeichnungen

Zunächst fordert der Interviewer den Schüler Fabian auf, für das Beispiel $\alpha = \frac{1}{10}^\circ$ noch den Mittelpunktswinkel δ zu berechnen. Der Schüler Fabian schreibt seine Berechnung des Mittelpunktswinkels zu δ ausführlich auf (↑ Abb. 3.39):

Schüler Fabian perfektioniert sein Rechnen

$\frac{1}{10}^\circ + \frac{1}{10}^\circ + 179\frac{8}{10}^\circ = 180^\circ$

$180^\circ - 179\frac{8}{10}^\circ = \frac{2}{10}^\circ$

Anschließend fordert der Interviewer den Schüler Fabian auf, anhand der dokumentierten Rechnungen die Bedeutung des Winkels 180° darzustellen. Den Winkel 180° sowohl als Winkelsumme des Dreiecks als auch als Halbwinkel zu deuten, verhilft dem Schüler Fabian möglicherweise zum Beweisen:

der Interviewer lässt den Schüler Fabian die doppelte Bedeutung des Winkels 180° klären

09:46	I	151	*ah ja ... ja .. was macht man denn jetzt hier', hier kommt ja zweimal* 180° *vor* (4 sec)
10:05	Fa	152	*ja das ist einmal, das sind die* 180°, *das ganze Dreieck halt* (deutet auf das Dreieck in ↑ Abb. 3.39) .. *und das sind die* 180° *hier von dem* (deutet auf den gestreckten Winkel)
10:16	I	153	*mm-mmh, ah ja, okay ...*
10:18	Fa	154	*mit dem, von dem Durchschnitt*
10:22	I	155	*ist jetzt das hier* (deutet auf den Mittelpunktswinkel δ) *immer das Doppelte von dem'* (deutet auf den Basiswinkel α, 20 sec)
10:45	Fa	156	*ja also nach, diesen Angaben, die ich da überall jetzt hab, wenn das, so ist, dann .. ja*
10:54	I	157	*ja das waren ja nur Beispiele*
10:56	Fa	158	*ja aber trotzdem, die waren ja alle, wenn das jetzt zum Beispiel so wäre, dann müsste, dass das ja überall, das sind ja* 80° *ist das Doppelte von* 40, *mmh, das ist ja auch überall das Doppelte,* 75 *das war* 150

Schüler Fabian erkennt die doppelte Bedeutung des Winkels 180°, *prüft aber weiterhin induktiv*

Der Schüler Fabian misst in Äußerung Fa 152 dem Winkel 180° in der ersten und zweiten Gleichung seine doppelte Bedeutung als Winkelsumme im Dreieck und als Halbwinkel zu. Insofern böte es sich an, die seit der Äußerung Fa 30 verschütteten Argumente wieder hervorzuholen. Doch die bloße Wiederholung der Behauptung an den bisherigen Beispielen in Äußerung Fa 158 lässt erkennen, dass sich das induktive Verständnis des Schülers Fabian weiter verfestigt hat.

Aus Umfangsgründen wird vom weiteren Geschehen hier kurz zusammenfassend berichtet: Der Interviewer lässt den Schüler Fabian, darin wiederum Goldberg (1992) folgend, noch das sechste Beispiel mit dem Basiswinkel $\alpha = \frac{1}{1000}^{\circ}$ erproben (↑ Abb. 3.39). Der Schüler Fabian bestätigt die Behauptung durch Berechnung des Winkels δ zu $\frac{2}{1000}^{\circ}$. Schließlich scheitert eine versuchte Formalisierung (mit $\alpha = x^{\circ}$ als Basiswinkel), weil der Schüler Fabian das Zeichen x bei seinem Rechenweg mit konkreten Beispielzahlen lediglich anfügt, z.B. an die Beispielzahl 1 zu $1x^{\circ}$. Damit erhält er seinem schematischen Algorithmus nach das falsche Ergebnis $\gamma = 178x^{\circ}$ (statt $\gamma = 180^{\circ} - 2x^{\circ}$) (↑ Abb. 3.39).

3.4.9 Kontext (Manuela)

Wie in ↑ Abs. 3.4.3 angesprochen, erfolgen zu Beginn des Schülerexperiments mit der Achtklässlerin Manuela Vorübungen zum Mittelpunkts-Umfangswinkelsatz, wie sie in ähnlicher Weise auch von GOLDBERG (1992, 42) favorisiert werden. Der Interviewer lässt die Schülerin Manuela (Ma) den Basiswinkel-, Winkelsummen- und Nebenwinkelsatz bearbeiten (↑ Abb. 3.40).

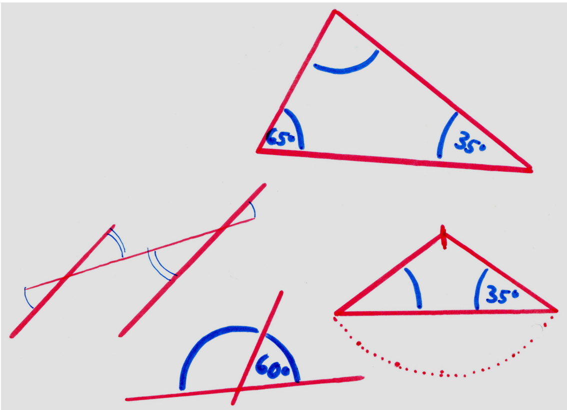


Abb. 3.40: Vorübungen zum Winkelsummen-, Basiswinkel- und Nebenwinkelsatz und Sätzen zu Winkeln an geschnittenen Geraden

Mit der obigen Zeichnung möchte der Interviewer den Winkelsummensatz und mit der rechten Abbildung den Basiswinkelsatz thematisieren. Unten geht es um den Nebenwinkelsatz, während links Sätze zu Winkeln an geschnittenen Geraden, nämlich Stufen- und Wechselwinkelsatz, behandelt werden. Letztere sind für das weitere Vorgehen jedoch nicht von Belang, da der zweite Beweisweg gewählt wird. Die Sätze der Vorübung korrespondieren mit den Regeln aus dem zugehörigen mehrgliedrig-mehrschichtigen Argumentgefüge (↑ Abb. 3.34 in ↑ Abs. 3.4.1).

Die Schülerin Manuela hat sich mit dem Basiswinkelsatz während ihrer Vorübung zunächst etwas schwer getan, bis sie aus der durch die Kreislinie angedeutete Gleichschenkligkeit des Dreiecks die Gleichheit der Basiswinkel gefolgert hat. Die anderen Vorübungen sind ohne Schwierigkeiten verlaufen.

3.4.10 Kontrastanalyse (Manuela): Rückwärtsarbeiten

Schülerin Manuelas erste Planskizze

Nach Ende der Vorübungen kommt der Interviewer mit der Schülerin Manuela über ihre erste Planskizze (↑ Abb. 3.41) ins Gespräch, in der sie bereits den Basiswinkel $\alpha = 48°$ gemessen und eingetragen hat.

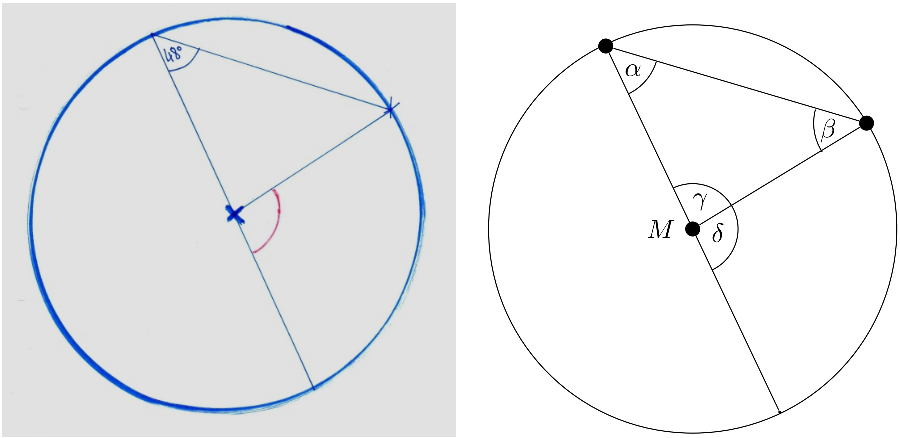


Abb. 3.41: Schülerin Manuelas angefangene erste Planskizze mit Vorgabe des Basiswinkels $\alpha = 48°$ und den dazu passenden Bezeichnungen

10:20	I	67	*ich würde jetzt gerne wissen, wie groß <u>der</u> Winkel ist* (deutet auf den Mittelpunktswinkel δ in der ersten Planskizze, ↑ Abb. 3.41), *ich markier den 'mal mit Rot* (5 sec, markiert den Mittelpunktswinkel δ), *wie groß ist <u>der</u>'* (45 sec)
11:13	Ma	68	*emm, wenn man wüsste, wie groß <u>der</u> Winkel wäre* (deutet auf den Mittelpunktwinkel γ), *dann könnte man* 180° – *<u>den</u> Winkel'* (deutet auf Mittelpunktswinkel γ)
11:20	I	69	*ja, okay* (15 sec) *und, woher kannst du wissen, wie groß <u>der</u> Winkel ist'* (deutet auf Mittelpunktswinkel γ)
11:40	Ma	70	*emm ... wenn .. wenn man <u>den</u> noch wüsste* (deutet auf den Basiswinkel β), *könnte man die beiden* (deutet auf die Basiswinkel α und β) *zusammenrechnen und dann* 180° – *<u>die</u> beiden* (deutet auf die beiden Basiswinkel), *weil in einem Dreieck sind ja immer* 180°, *alle, zusammen*

Schülerin Manuela arbeitet rückwärts

Die Schülerin Manuela entwickelt einen Lösungsweg zur Bestimmung des Mittelpunktswinkels δ, indem sie von der gesuchten Größe (dem Mittelpunktswinkel) ausgeht und rückwärts auf die bekannte Größe (den markierten Basiswinkel α) schließt. Legt man die Winkelbezeichnungen der mathematischen Analyse zugrunde, in der δ als der Mittelpunktswinkel, γ als dessen Nebenwinkel und α und β als die beiden Basiswinkel des Dreiecks bezeichnet werden, argumentiert die Schülerin Manuela wie folgt: Wenn man den Mittelpunktswinkel γ kennen würde, könnte man den gesuchten Mittelpunktswinkel δ zu $\delta = 180° - \gamma$ berechnen. Wenn man wiederum neben dem Basiswinkel α auch den Basiswinkel β kennen würde, könnte man den Mittelpunktswinkel γ zu $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ berechnen. Vom gesuchten Mittelpunktswinkel δ ausgehend, gelangt sie durch Rückwärtsarbeiten im Sinne von GOLDBERG (1992, 38) also zum markierten Basiswinkel α. Da der Winkel δ nicht bekannt ist, sind die Ausführungen der Schülerin Manuela notwendig allgemein gehalten. Die Verwendung des Indefinitpronomens *man* unterstreicht die Allgemeinheit ihres Vorgehens anhand der vorliegenden Planskizze.

Schülerin Manuela weiß nicht, wie groß der Basiswinkel β ist, und misst ihn daher

Um vorwärts arbeiten zu können, müsste die Schülerin Manuela die Gleichheit der beiden Basiswinkel α und β entdecken. Mit der Frage, wie groß der Basiswinkel β nun sei, kommt sie nach reiflicher Überlegung aber nicht weiter. Daher misst die Schülerin Manuela den Basiswinkel β auf Anregung des Interviewers. Der Interviewer gibt ihr schließlich noch den Hinweis, den in der Vorübung thematisierten Basiswinkelsatz heranzuziehen. Die Schülerin Manuela greift diesen Hinweis auf und belegt folgerichtig auch den Basiswinkel β mit 48°. Der Interviewer fragt sie nun, wie sich der Mittelpunktswinkel δ im betrachteten Beispiel berechnen lässt:

14:24	I	81	*okay, kann man das dann ausrechnen'*
14:25	Ma	82	*ja dann ..* 180 − 48 − 48
14:30	I	83	*mm-mmh .. und wie groß ist <u>der</u> dann* (deutet auf den Mittelpunktswinkel δ, 5 sec)
14:36	Ma	84	*emm ...*
14:41	I	85	*sag was du denkst*
14:42	Ma	86	*also wenn man <u>den</u> weiß* (deutet auf den Mittelpunktswinkel γ) *dann kann man* 180 − *<u>den</u> Winkel, dann rechnen* (deutet erneut darauf)
14:50	I	87	*mm-mmh, und wie kriegst du <u>den</u>'* (deutet auf den Mittelpunktswinkel γ)
14:52	Ma	88	48 + 48 *und dann* 180− *die Summe davon* (deutet zweimal auf die Basiswinkel α und β)

Die Schülerin Manuela will zunächst vorwärts arbeiten, um den Mittelpunktswinkel γ zu berechnen. Der Mittelpunktswinkel γ besitzt für sie hier die unausgerechnete Form $\gamma = 180° - 48° - 48°$ bzw. $\gamma = 180° - (48° + 48°)$, womit sie den Winkelsummensatz im Dreieck zwar noch andeutet, aber bereits nicht mehr explizit nennt. Der Winkel δ stellt sich für die Schülerin Manuela immer noch symbolisch als $\delta = 180° - \gamma$ dar, weil sie hinsichtlich des Nebenwinkelsatzes als Regel rückwärts gearbeitet hat.

14:55	I	89	*mm-mmh, okay, weißt du jetzt, wie groß der rote* (d.h. der Mittelpunktswinkel δ) *Winkel ist'*
14:58	Ma	90	*emm .. mmh*
15:02	I	91	*<u>ohne</u> <u>den</u> auszurechnen* (deutet auf den Mittelpunktswinkel γ, 20 sec)
15:20	Ma	92	*vielleicht* 48 + 48°' (schaut fragend)

Mit seinem Appell in Äußerung I 91, den Mittelpunktswinkel γ in seiner unausgerechneten Form zu belassen, möchte der Interviewer den Blick auf den Zusammenhang zwischen den konkret gedachten Basiswinkeln $\alpha = \beta = 48°$ und dem gesuchten, markierten Mittelpunktswinkel δ richten. Die Schülerin Manuela fragt sich sogleich, ob der Mittelpunktswinkel δ mit der nicht ausgerechneten Summe $48° + 48°$ der beiden Basiswinkel α und β übereinstimmt. Der Interviewer regt sie daraufhin zur weiteren Versprachlichung ihrer Überlegungen an:

15:26	I	93	*emm .. ja, sag noch 'mal, was du dir jetzt dabei gedacht hast, deine Gedanken'*
15:32	Ma	94	*ja man muss ja, um den rauszukriegen* (deutet auf den Mittelpunktswinkel γ), 180 − *die beiden* (deutet auf die Basiswinkel α und β)
15:39	I	95	*ja*
15:39	Ma	96	*und, um den rauszukriegen* (deutet auf den Mittelpunktswinkel δ) *müsste man ja eigentlich,* 180°− *den* (deutet auf den Mittelpunktswinkel γ) *dann könnte man ja vielleicht die einfach zusammenrechnen* (leiser werdend, deutet auf die Basiswinkel α und β)
15:48	I	97	*kann man das oder kann man's nicht'*
15:50	Ma	98	(5 sec) *ich glaub schon*

Schülerin Manuela entdeckt die allgemeine Behauptung $\delta = \alpha + \beta$

Die Schülerin Manuela scheint ihren vorwärts gedachten Rechenweg nunmehr allgemein zu beschreiben. Dabei stellt sie die Vermutung auf, dass $\delta = \alpha + \beta$ sei. Es bleibt jedoch offen, ob sie während ihres Gedankengangs die konkreten Winkel meint, auf die sie deutet, oder sich dabei beliebige Winkel vorstellt, für welche die Behauptung allgemein gilt. Die Schülerin Manuela wird zum Ende ihrer Äußerung Ma 96 leiser. Dies lässt sich dahingehend interpretieren, dass ihr für die entdeckte Behauptung $\delta = \alpha + \beta$ noch eine vollständige Begründung fehlt, der zugehörige Beweis also noch latent ist. In der Folge kommt sie auf das Rechenergebnis $\delta = 96°$ im betrachteten Beispiel:

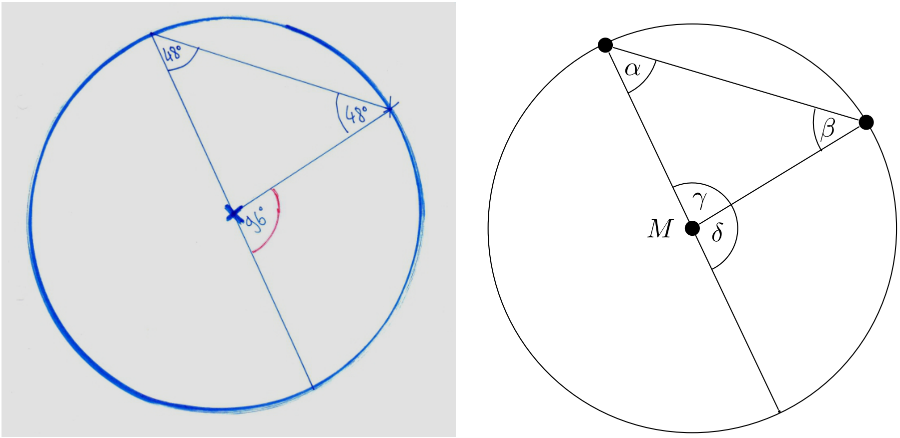


Abb. 3.42: Schülerin Manuelas ergänzte erste Planskizze mit Vorgabe des Basiswinkels $\alpha = 48°$ und den dazu passenden Bezeichnungen

16:46	I	111	*ah okay .. kannst du ja vielleicht, willst du's eintragen oder nicht'* (die Schülerin stimmt zu und trägt 96° für den Mittelpunktswinkel δ ein, ↑ Abb. 3.42) ... *emm, meinst du jetzt, dass das* <u>*immer*</u> *so ist' .. also wenn wir einen Durchmesser nehmen und irgendeinen Punkt auf der Kreislinie nehmen, und dann ergibt sich ja so ein anderes Dreieck, mmh, was wäre denn, wenn* <u>*hier*</u> *ein* <u>*anderer*</u> *Winkel wäre* (deutet auf den Basiswinkel α) .. *nicht* 48°
17:14	Ma	112	*dann wär* <u>*der*</u> *Winkel* (deutet auf den Basiswinkel β) *genauso groß wie* <u>*der*</u> (deutet auf den Basiswinkel α)
17:17	I	113	*warum'*
17:17	Ma	114	*emm, weil* (15 sec) *mmh, weil* <u>*der*</u> *Punkt hier* (deutet auf den Mittelpunkt M) *ist ja der Mittelpunkt von dem Kreis, der von* <u>*hier*</u> *nach* <u>*da*</u> (deutet vom Mittelpunkt M zum Dreieckspunkt am Basiswinkel α), *der Kreis geht ja auch* <u>*hier*</u> *vorbei* (deutet zum Dreieckspunkt am Basiswinkel β), *und dann sind* <u>*die*</u> *Seiten* (deutet auf die Dreiecksseiten als Radien des Kreises) *gleich* <u>*lang*</u> ..

Der Interviewer präzisiert in seiner Äußerung I 111 die Frage nach der Allgemeingültigkeit der durch die Schülerin Manuela entdeckten Behauptung $\delta = \alpha + \beta$. Diese führt in ihrer Äußerung Ma 114 als Begründung der Gleichheit der Basiswinkel α und β an, dass die beiden Schenkel an den Basiswinkeln α und β zum Mittelpunkt hin gleich lang sind. Dies führt sie wiederum – ähnlich wie in der Vorübung – auf die Lage der Dreieckspunkte auf Kreislinie und Kreismittelpunkt zurück. Der Basiswinkelsatz wird als Regel nicht explizit genannt. Es liegt ein formaler Beweis der Gleichschenkligkeit des Dreiecks (bzw. der Basiswinkelgleichheit) als Grenzfall des beispielgebundenen Beweises vor. Die Schülerin Manuela führt ihren Beweis an einer Planskizze, die vordergründig konkret ist mit dem Basiswinkel $\alpha = 48°$, jedoch als Planskizze allgemein gedacht wird.

Schülerin Manuela begründet, warum die Basiswinkel α und β gleich groß sind

17:46	I	115	*okay, und wie geht das dann weiter, kannst du 'mal noch weiter machen' … also, wenn wir <u>hier</u> einen <u>anderen</u> Winkel haben* (deutet auf den Basiswinkel α), *nehmen wir 'mal an,* $20°$ ..
18:02	Ma	116	*dann wär der auch* $20°$ (deutet auf den Basiswinkel β)
18:04	I	117	*wie groß ist der'* (deutet auf den Mittelpunktswinkel δ)
18:07	Ma	118	*der wär dann,* $140°$
18:08	I	119	*äh welcher'*
18:09	Ma	120	(deutet auf den Mittelpunktswinkel γ)
18:10	I	121	*ach so, <u>der</u>, nein, ich mein den <u>roten</u>* (deutet auf den Mittelpunktswinkel δ)
18:13	Ma	122	*emm,* $40°$
18:14	I	123	*äh, warum'*
18:16	Ma	124	*weil, wenn man <u>die</u> beiden zusammenrechnet'* (schaut fragend) *ist* $40°$
18:26	I	125	*ach so, na ja, und denkst du, dass das <u>immer</u> ist, dass <u>der</u> Winkel* (deutet auf den Mittelpunktswinkel δ) *<u>immer</u>, so <u>groß</u> ist wie die <u>beiden</u>'* (deutet auf die Basiswinkel α und β, 55 sec) *glaubst du das'*
19:27	Ma	126	*weiß nicht* (lächelt)
19:28	I	127	*weißt nicht', emm, willst du vielleicht ein anderes Beispiel zeichnen'*
19:30	Ma	128	*ja*

Schülerin Manuela wendet die Behauptung $\delta = \alpha + \beta$ auf das Beispiel $\alpha = 20°$ an

Die Schülerin Manuela berechnet nun zwischenzeitlich für das Beispiel $\alpha = 20°$ den Mittelpunktswinkel γ zu $140°$ und den Mittelpunktswinkel δ zu $40°$. Das Ergebnis $\delta = 40°$ erhält sie dadurch, dass sie die beiden Basiswinkel α und β zusammenrechnet. Sie führt dabei keine Argumente wie in ihren früheren Äußerungen an. Man kann dies so deuten, dass die Schülerin Manuela ihre vorher entdeckte Behauptung auf das neue Beispiel mit den Basiswinkeln $\alpha = \beta = 20°$ anwendet. Aus einer anderen Perspektive betrachtet, lässt sich in ihrem Beweisverhalten auch ein verkürzter beispielgebundener Beweis sehen.

Damit sich ihre Ausführungen allmählich von der Besonderheit betrachteter Winkel lösen, lässt der Interviewer die Schülerin Manuela eine zweite Planskizze anfertigen, in welche keine Winkelzahlen eingezeichnet werden (↑ Abb. 3.43).

Die Schülerin Manuela ist auf Nachfrage noch etwas unsicher, was die Allgemeingültigkeit der Behauptung $\delta = \alpha + \beta$ bzw. $\delta = 2\alpha$ anbelangt. Nach dem Zeichnen nimmt sie das Gespräch wieder von sich aus auf:

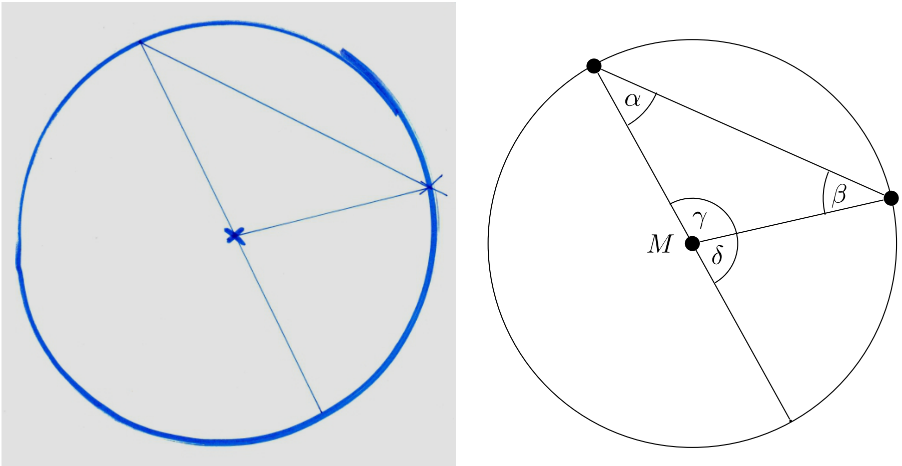


Abb. 3.43: Schülerin Manuelas zweite, unbeschriftete Planskizze und den dazu passenden Bezeichnungen

20:33	Ma	132	*dann sind die beiden wieder, gleich groß, glaub ich* (deutet auf die Basiswinkel α und β, 45 sec)
21:23	I	133	*was denkst du jetzt'*
21:25	Ma	134	*äh, ich glaub, das ist, auch so, dass der Winkel doppelt so groß ist wie der* (deutet auf die Mittelpunktswinkel δ und den Basiswinkel α in ↑ Abb. 3.43)
21:32	I	135	*warum'*
21:33	Ma	136	*weil, emm, die sind, ja gleich groß* (deutet auf die Basiswinkel α und β)
21:37	I	137	*ja*
21:37	Ma	138	*und dann, müsste der ja* (deutet auf den Mittelpunktswinkel γ) 180− *die beiden sein* (deutet auf die Basiswinkel α und β), *und der* (deutet auf den Mittelpunktswinkel δ) *müsste* $180° -$ *dem sein* (deutet auf den Mittelpunktswinkel γ), *dann, wär das ja, die, beiden Winkel zusammen* (deutet auf die Basiswinkel α und β)
21:51	I	139	*okay* (5 sec) *also stimmt immer* (12 sec)
22:10	Ma	140	*ich glaub schon, wenn das hier mit so 'nem Kreis hier ist'* (fährt mit dem Stift die Kreislinie entlang)

Zur Begründung der leicht modifizierten Behauptung $\delta = 2\alpha$ führt die Schülerin Manuela an der unbeschrifteten Planskizze in ↑ Abb. 3.43 implizit die Satzgruppe aus Basiswinkelsatz, Winkelsummensatz, Nebenwinkelsatz an. Die gleiche Länge der an den Basiswinkeln α und β anliegenden Schenkel als Voraussetzung zur Anwendung des Basiswinkelsatzes führt sie wie schon zuvor auf die Kreisgeometrie zurück. Obwohl die Sätze der Satzgruppe hier nicht mehr explizit genannt werden, legen die bisherigen Äußerungen, insbesondere Ma 68, Ma 70, Ma 114 und Ma 138 nahe, dass die Schülerin Manuela einen detaillierten formalen Beweis anhand ihrer beiden Skizzen geführt hat. Sie hat aus dem anfänglichen Rückwärtsarbeiten die Beweisidee generiert und argumentiert an

Schülerin Manuela argumentiert an einer unbeschrifteten Beweisfigur allgemein dieser Stelle schließlich allgemein, ohne die bereits genannten Regeln nochmals anzuführen.

Wenn die Schülerin Manuela die Behauptung anhand eines konkreten Beispiels begründen soll, wie es im zweiten Beispiel mit dem Basiswinkel $\alpha = 20°$ geschieht, ist nicht klar zu entscheiden, ob sie dann die Behauptung bloß auf das betrachtete Beispiel anwendet, oder ob sie daran einen verkürzten beispielgebundenen Beweis führt. Dadurch, dass sich die Winkelgrößen im Konkreten verrechnen lassen, kann die Struktur des Beweises als mehrgliedriges Argumentgefüge bei Betrachtung konkreter Winkel durchaus verdeckt werden. Dadurch aber, dass die Schülerin Manuela ihre Ausführungen nicht mit einem konkreten Beispiel begonnen hat, sondern sich durch ihr anfängliches Rückwärtsarbeiten auf die Struktur des Beweises konzentriert hat, haben sich Teile des Beweises als mehrgliedriges Argument schon recht früh manifestiert.

3.4.11 Kontrastanalyse (Manuela): Beweis des Außenwinkelsatzes

der Außenwinkelsatz $\delta = \alpha + \beta$ als Verallgemeinerung der bisherigen Behauptung $\delta = 2\alpha$

Die Behauptung $\delta = \alpha + \beta$ lässt sich für nicht notwendig gleichgroße Winkel α, β in Verallgemeinerung der Behauptung $\delta = 2\alpha$ unter Fortlassen des Kreises als Außenwinkelsatz ansehen. Im Argumentgefüge ↑ Abb. 3.34 aus ↑ Abs. 3.4.1 fällt dann der untere Teil mit dem Basiswinkelsatz weg, das Argument reduziert sich auf die Behauptung $\delta = \alpha + \beta$ als Konklusion von Umformungen der Daten $\delta = 180° - \gamma$ und $\gamma = 180° - \alpha - \beta$, die wiederum durch Nebenwinkelsatz und Winkelsummensatz als Regeln begründet werden.

Schülerin Manuela zeichnet zum Beweis des Außenwinkelsatzes eine Planskizze

Zum Beweis des Außenwinkelsatzes zeichnet die Schülerin Manuela nun eine dritte Planskizze. Diese besteht aus einem Dreieck mit einer verlängerten Dreiecksseite. Die Winkel des Dreiecks werden zunächst nicht beschriftet (↑ Abb. 3.44):

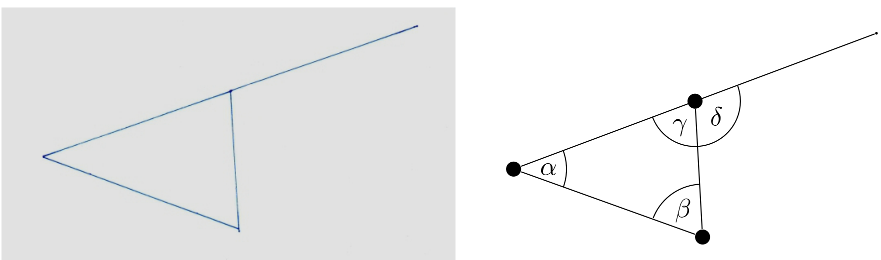


Abb. 3.44: Schülerin Manuelas dritte, unbeschriftete Planskizze zur Begründung des Außenwinkelsatzes und den dazu passenden Bezeichnungen

Der Interviewer stellt der Schülerin Manuela nun die Frage, wie sich der Außenwinkel an der verlängerten Seite des Dreiecks zu den gegenüberliegenden Innenwinkeln des Dreiecks verhalten:

22:55	I	149	*äh, möchtest du jetzt die Winkel, äh messen' .. also die beiden messen'* (deutet auf beiden Innenwinkel α und β in ↑ Abb. 3.44) *.. oder willst du mir sagen .. also was, was ist, wenn wir den Winkel wissen und den* (deutet wiederum auf die beiden Innenwinkel α und β), *was mit dem ist* (deutet auf den Außenwinkel δ, 5 sec)
23:17	Ma	150	*ich glaub, dann, wieder die beiden zusammenrechnen* (deutet auf die beiden Innenwinkel α und β), *das ist dann der* (deutet auf den Außenwinkel δ)
23:22	I	151	*warum'*
23:23	Ma	152	*ja weil die sind ja, die drei Winkel sind ja alle zusammen* 180°, *wenn man die weiß* (deutet auf die beiden Innenwinkel α und β in ↑ Abb. 3.44), *dann kann man* 180°− *die beiden* (deutet auf die beiden Innenwinkel α und β) *.. hat man das hier 'raus, den Winkel 'raus* (deutet auf den Innenwinkel γ), *und dann müsste man ja* 180 − *den Winkel* (deutet auf den Innenwinkel γ), *und dann, käm da ja eigentlich, die beiden zusammen 'raus* (deutet auf die beiden Innenwinkel α und β)

Die Schülerin Manuela formuliert und begründet die Behauptung $\delta = \alpha + \beta$ allgemein anhand der unbeschrifteten Beweisfigur (↑ Abb. 3.44). Dabei arbeitet sie sich, ausgehend von den Innenwinkeln α, β und γ, schrittweise vor.

Das weitere Gespräch zwischen Schülerin Manuela und dem Interviewer wird nun zusammenfassend dargestellt. Der Interviewer fragt die Schülerin Manuela, ob die allgemeine Behauptung $\delta = \alpha + \beta$ jetzt ohne Kreis immer noch gelten würde. Die Schülerin Manuela bejaht dies, wenngleich sie kundtut, dass sie sich nicht sicher sei. Im Sinne eines *need for further checks* (↑ Abs. 1.1.2) misst Manuela die Winkel daraufhin zu $\alpha = 40°$, $\beta = 65°$ und $\delta = 107°$ und trägt diese Winkelgrößen in ihre Skizze ein (↑ Abb. 3.45). Sie schliesst Messfehler dabei nicht aus. Schließlich fragt der Interviewer sie noch einmal, ob die Behauptung nun für die konkretisierte Figur gelte:

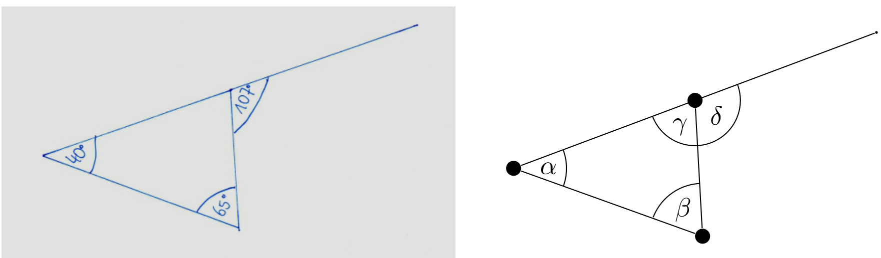


Abb. 3.45: Schülerin Manuelas ergänzte dritte Planskizze zur Begründung des Außenwinkelsatzes und den dazu passenden Bezeichnungen

26:30	I	179	*mmh .. kannst du mir das vielleicht noch 'mal an dem Beispiel sagen'*
26:36	Ma	180	*hier'* (deutet auf die dritte Planskizze, ↑ Abb. 3.45)
26:37	I	181	*ja*
26:38	Ma	182	*ja, also der Winkel + der Winkel* (deutet auf die Innenwinkel α und β) *müsste dann den Winkel ergeben* (deutet auf den Außenwinkel δ)
26:43	I	183	*ja gut, das ist die Behauptung, okay, die Behauptung, ja, und, emm, wie begründest du das'*
26:49	Ma	184	*ja weil alle Winkel in dem Dreieck müssen ja* 180° *ergeben* (der Interviewer nickt), *und wenn man den 'rauskriegen will* (deutet auf den Innenwinkel γ), *muss man ja* 180°− *den* − *den rechnen* (deutet auf die Innenwinkel α und β), *und die beiden Winkel* (deutet auf den Innenwinkel γ und den Außenwinkel δ) *müssen ja auch zusammen* 180° *geben und dann könnte man, also eigentlich müsste man ja dann* 180°− *den Winkel* (deutet auf den Innenwinkel γ), *dann könnte man ja einfach auch den* + *den Winkel rechnen* (deutet auf die Innenwinkel α und β)

Schülerin Manuela beweist den Außenwinkelsatz an einer Planskizze formal

Die Schülerin Manuela argumentiert trotz eingezeichneter Winkelgrößen und der Aufforderung, doch am Beispiel zu begründen, in der Äußerung Ma 184 allgemein. Dies spricht dafür, dass sie ihre Zeichnung als Planskizze verwendet und in diesem Sinne beispielgebunden beweist. Aus ihrer Äußerung Ma 184 lassen sich die beiden oberen Teile des Argumentgefüges der ↑ Abb. 3.34 aus ↑ Abs. 3.4.1 wie folgt rekonstruieren: Im Detail formt die Schülerin Manuela aus Expertensicht zum einen $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ (Winkelsumme) in $\gamma = 180° - \alpha - \beta$ und zum anderen $\gamma + \delta = 180°$ (Nebenwinkelsumme) in $\gamma = 180° - \delta$ um. Aus dem am geometrischen Beispiel geführten Vergleich erhält sie die Behauptung $\delta = \alpha + \beta$. Damit hat die Schülerin Manuela das Argument an der Planskizze fast vollständig wiedergegeben, und der Beweis dient nunmehr offensichtlich zur theoretischen Absicherung der Behauptung.

Mathematisch gesehen ist der Außenwinkelsatz (mit der Behauptung $\delta = \alpha+\beta$) eine Verallgemeinerung des Umfangswinkel-/Mittelpunktswinkelsatzes (mit der Behauptung $\delta = 2\alpha$), so dass die Behauptungen einen Regelverband formen (↑ Abs. 3.4.1). Die thematisierte Verallgemeinerung einer Behauptung wie $\delta = 2\alpha$ zu $\delta = \alpha + \beta$ zeigt exemplarisch, dass sich das (beispielgebundene) Beweisen gerade dann festigen kann, wenn die Möglichkeiten für einen Beweis einer spezielleren Behauptung ausgereizt scheinen. Statt also ähnlich wie GOLDBERG Schüler dann an weiteren Beispielen beispielgebunden beweisen zu lassen (mit der Gefahr, dadurch das induktive Prüfen zu sehr zu befördern), kann eine allgemeinere Behauptung des Regelverbands neuen Beweisbedarf wecken und eine ähnlich strukturierte beispielgebundene Begründung evozieren.

Auf die Frage schließlich, welche Begründung (allgemein oder anhand von Beispielzahlen) besser sei, antwortet die Schülerin Manuela:

28:56	Ma	192	*ich glaub, wenn man das so allgemein sagt*
29:00	I	193	*dann*
29:02	Ma	194	*dann, ja dann, wenn, also wenn das jetzt so stimmt, dann, heißt das ja, dass es <u>immer</u> gilt*
29:10	I	195	*ah ja*
29:10	Ma	196	*wenn man das nur mit Zahlen sagt, kann's ja sein, dass es gerade nur zufällig bei dem Dreieck so ist*

Damit gibt die Schülerin Manuela einerseits die Crux des *visual proving* resp. des beispielgebundenen Beweisens wieder. Andererseits drückt sie damit ihre Präferenz zum formalen Beweisen aus. Dennoch kann bei einer geometrisch gestellten Aufgabe das Beweisen an einer Planskizze je nach Beweisverhalten des Schülers als induktiv, beispielgebunden oder formal interpretiert werden. Eine Differenzierung *per se* ist hier schwieriger vorzunehmen als bei einer arithmetisch gestellten Aufgabe mit der Möglichkeit, bei Argumenten zwischen Beispielzahlen und Variablen zu unterscheiden.

Schülerin Manuela unterscheidet formales Beweisen von beispielgebundenem Argumentieren

3.4.12 Ergebnisse

Die Analysen über das beispielgebundene Beweisen des Schülers Fabian und der Schülerin Manuela bilden in ihrer Anlage (ohne und mit Vorübungen) und ihres Verlaufs (Vor- und Rückwärtsarbeiten) einen Kontrast. Insgesamt gesehen erfolgten die eingangs gestellten Forschungsfragen aus vornehmlich theoretischer, kategorialer und übriger Perspektive (I, II, V) und konzentrierten sich auf folgende Forschungsbereiche (vgl. ↑ Abs. 3.4.2):

- Überprüfung der Goldberg-These
- Wahl und Anzahl der Beispiele
- Beispielgebundenes Beweisen durch Lösen einer Berechnungsaufgabe

Die Analyseergebnisse hierzu werden im Folgenden wie gewohnt zunächst schülerbezogen dargestellt. Im Resümé wird davon in Hinblick auf den Gesamtzusammenhang der Arbeit abstrahiert (↑ Abs. 3.4.13).

Hauptanalyse (Fabian)

Verfestigung im induktiven Prüfen

Der vorwärts arbeitende Schüler Fabian hat im Lösen des *Berechnungsproblems* das Argumentgefüge in ↑ Abb. 3.34 aus ↑ Abs. 3.4.1 in Bezug auf ein konkretes Beispiel (Basiswinkel $\alpha = 40°$) anfangs fast vollständig wiedergeben können. Paradoxerweise verflüchtigt sich diese Argumentstruktur jedoch mehr und mehr, sobald der Interviewer die fragliche allgemeine Behauptung ($\delta = 2\alpha$) aufstellt:

Nennung der meisten Argumente

- Beim ersten Beispiel ($\alpha = 40°$, ↑ Abb. 3.35) nennt der Schüler Fabian zwar zunächst alle Argumente, die für einen möglichen Beweis notwendig wären, die zugehörige Behauptung $\delta = 2\alpha$ steht allerdings noch nicht im Raum. Seine Äußerungen bilden eine ausführliche, im Beispiel begründete Schilderung, wie er auf das Ergebnis $\delta = 80°$ kommt.

Wegfall von Begründungen

- Beim zweiten Beispiel ($\alpha = 12°$, ↑ Abb. 3.36) verlässt sich der Schüler Fabian zum einen auf seinen visuellen Eindruck der Planskizze und möchte die fraglichen Größen der Winkel messen. Zum anderen kommt er viel schneller auf das Rechenergebnis $\delta = 24°$. Angesichts der noch unsicheren Behauptung sieht er zunächst keinen Beweisbedarf, sondern sucht erst noch nach Ausnahmen. In diesem Stadium legt er ein deutlich induktiv geprägtes Verständnis von Mathematik an den Tag und lässt Begründungen wegfallen. Ein solcher Verlauf beispielgebundenen Beweisens widerspricht insofern der These von Goldberg (↑ Abs. 1.2.5).

Algorithmisierung

- Beim dritten Beispiel ($\alpha = 1°$) reduziert der Schüler Fabian seinen Rechen- und Erklärungsaufwand noch einmal deutlich. Dies stützt die These, dass er in der Betrachtung der Beispiele sein Vorgehen zunehmend algorithmisiert und dieses begründungsfrei werden lässt.

Erkennen von Begründungsbedarf

- Beim vierten Beispiel ($\alpha = 75°$, ↑ Abb. 3.37) verfährt der Schüler Fabian ähnlich. Danach glaubt er, dass die Behauptung $\delta = 2\alpha$ wohl immer gilt, weil er diese an vier Beispielen bestätigt hat. Gleichwohl sieht er durchaus Begründungsbedarf, wie er in Äußerung Fa 72 erkennen lässt: *… das, ist <u>immer</u> so, jetzt ist nur die Frage, <u>warum</u> ist das immer so, da wird's dann* *natürlich schwieriger.* Der für notwendig befundene Beweis der Behauptung bleibt aber latent. Im Rückgriff auf das erste Beispiel $\alpha = 40°$ bleibt der Schüler Fabian ratlos, wie er die Behauptung begründen soll.

- Beim fünften Beispiel ($\alpha = \frac{1}{10}^{\circ}$, ↑ Abb. 3.39) sollte der Schüler Fabian mit dem komplizierten Term die latente Beweisidee durch eine mehr strukturelle Sichtweise des Sachverhalts realisieren. Zwar nimmt er die doppelte Bedeutung des Winkels 180° als Winkelsumme im Dreieck und als Halbwinkel wahr, die Beweisidee bleibt ihm aber noch immer latent.

  Umgang mit einem komplizierten Beispiel

- Beim sechsten Beispiel ($\alpha = \frac{1}{1000}^{\circ}$, ↑ Abb. 3.39) agiert der Schüler Fabian entsprechend. Schließlich versucht er die formale Verallgemeinerung auf $x°$, welche aber scheitert, da er mit dem Variablenkalkül nicht umgehen kann. Der Schüler Fabian verweist zum Ende fortwährend darauf, dass die Behauptung $\delta = 2\alpha$ allgemein stimmen müsste, da sie sich schon an einigen Beispielen erwiesen habe.

  Scheitern der Formalisierung

Der Schüler Fabian hat mit jedem neuen Beispiel seinen Rechenweg perfektioniert. Es ist eine Algorithmisierung des Rechenwegs erkennbar, die den Beweis als Sinnstruktur wieder latenter werden lässt und die Beispielbindung in seinen Argumenten eher noch verfestigt. Insofern achtet der Schüler nur auf den Rechenweg und nicht auf die Struktur des Argumentgefüges, welche ihn erst die Allgemeingültigkeit der Behauptung erkennen ließe. Das Rechnen hält der Schüler Fabian auch bei den unhandlichen, bedingt vorstellbaren Beispielen durch, welche ihn eigentlich vom Rechnen abhalten und dazu beitragen sollten, den Beweis als Sinnstruktur subjektiv zu realisieren. Die allgemeingültige Behauptung $\delta = 2\alpha$ ist ihm also letztlich als bloß induktiv zu bestätigender Satz begegnet.

Kontrastanalyse (Manuela)

Schülerin Manuela arbeitet rückwärts und beweist formal

Die Schülerin Manuela arbeitet rückwärts, indem sie bei der Frage, wie groß der Winkel δ sei, von diesem Winkel selbst ausgeht, dann auf die Größe des Winkels γ schließt und schließlich auf die Größe der Winkel α und β zurückgeht. Sie führt dabei jene Begründungsschritte schon an, die sie beim nachfolgenden Vorwärtsarbeiten im Beweisen verwendet. Insofern birgt ihr Rückwärtsarbeiten schon die Beweisidee. Zudem wird die Schülerin Manuela aufgefordert, die Behauptung am Beispiel zu beweisen. Bei Vorgabe eines Anfangswinkels α liefert sie eine induktive Bestätigung der Behauptung, d.h. ohne Angabe einer Begründung. Dies spricht für den strukturverdeckenden Charakter induktiver Prüfungen.

Grenzfall beispielgebundenen Beweisens

Der formale Beweis der Schülerin Manuela erscheint als Grenzfall beispielgebundenen Beweises, geführt an einer Planskizze. Ein allmählicher Übergang über das beispielgebundene Beweisen zum formalen Beweis findet nicht statt. Zwar wurden die einzelnen Beweisschritte in der Vorübung mit der Schülerin Manuela an wechselnden Beispielen vorbereitet. Sie hat die Beweisidee aber durch das Rückwärtsarbeiten generiert, während sie die Behauptung an konkreten Beispielen im Vorwärtsarbeiten wie der Schüler Fabian nur induktiv prüfte. Der Beweisgedanke, verstanden als subjektive Realisierung des Beweises als latente Sinnstruktur, hat sich bei der Schülerin Manuela also gerade durch Vermeidung einer Betrachtung von Beispielen eingestellt.

3.4.13 Resümé

Mit den schülerbezogenen Ergebnissen im Hintergrund sollen nun auch die Forschungsfragen aus ↑ Abs. 3.4.2 soweit als möglich beantwortet werden.

- Überprüfung der Goldberg-These

  Nach (Goldberg, 1992, 42) "wird durch das Bearbeiten vieler (die nötige Anzahl ist individuell verschieden) Beispiele (...) der Beweisgedanke vorbereitet". Kann die These Goldbergs bestätigt werden, dass Schüler nach entsprechender Vorübung und der Arbeit an mehreren Beispielen beispielgebunden begründen können? Erhalten Schüler durch die Aufforderung, an vielen Beispielen zu arbeiten, nicht eher den Eindruck, eine empirische Erkenntnissicherung reiche aus, die Allgemeingültigkeit von Behauptungen festzustellen? Erweist sich das von Goldberg vorgeschlagene Vorgehen nicht insofern als eher kontraproduktiv?

Relativierung der Goldberg-These

Der Darstellung und Diskussion beider Studien nach muss die Goldberg-These relativiert werden. Nicht allein die Anzahl der bearbeiteten Beispiele ist für das beispielgebundene Beweisen relevant, sondern auch deren Beschaffenheit (etwa als spezielle, paradigmatische, bedingt vorstellbare oder Gegenbeispiele). Auch wie Schüler die Rolle des Beispiels im Rahmen ihres beispielgebundenen Beweisens auffassen, ist entscheidend. Die Entwicklung des Beweisverhaltens mancher Schüler lässt die Hoffnung Goldbergs fraglich erscheinen, dass Schüler an einigen Beispielen das allen strukturell Gemeine (das Allgemeine) herausarbeiten und auf diesem argumentativen Wege beispielgebunden begründen, es also als allgemeingültig erweisen. Es besteht die Gefahr, dass Schüler in der Arbeit an vielen Beispielen ein induktives Beweisverständnis entwickeln und verfestigen, bis hin zu einem *experimentellen 'Beweisen'* im Sinne von Wittmann & Müller (1988) (vgl. ↑ Abs. 1.2.3) als Grenzfall beispielgebundenen Beweisens, bei dem die Behauptung durch das elementare Messen oder Berechnen ohne argumentativen Zusammenhang induktiv geprüft wird.

Verfestigung im induktiven Prüfen und Algorithmisierung

- Wahl und Anzahl der Beispiele

  Welchen Effekt hat die Wahl von trivialen oder zu speziellen Beispielen auf das beispielgebundene Beweisen eines Schülers? Inwiefern eignet sich die Vorgabe komplizierter oder schwer vorstellbarer Beispiele (Stichwort *big/small number*) zum beispielgebundenen Beweisen? Welche Funktion besitzt das jeweilige Beispiel für den Schüler? Benutzt er es, um die Behauptung darin zu bestätigen, oder um diese daran zu beweisen?

Ambivalenter Charakter von Beispielen

Anzahl und Rolle der Beispiele sind nicht nur in den beiden vorgestellten Einzelfallstudien als zwiespältig anzusehen. Werden zu viele Beispiele betrachtet oder sind sie zu einfach gehalten, kann sich der beobachtete Effekt einstellen, dass die Schüler die Argumentstruktur zugunsten der Rechenstruktur auflösen oder allmählich verdrängen. Die teils schon entwickelte Beweisidee wird damit wieder latent. Durch fortschreitende Algorithmisierung geht es einigen Schülern dann hauptsächlich darum, die Behauptung durch jedes neue Rechenexempel plausibler zu machen. Es hat sich gleichwohl auch gezeigt, dass Schülern mit bedingt vorstellbaren Beispielen oder Beispielen, die eine Verrechnung der Beispielzahlen zum Teil *per se* vermeiden lassen, eher gedient ist. Mit solchen Beispielen können Schüler eher über die Argumentstruktur reflektieren, und diese erleichtern ihnen zudem eine allmähliche Loslösung von elementaren Beispielen. Insofern kann die oben angesprochene GOLDBERG-These aus der eigenen empirischen Erfahrung heraus modifiziert werden.

Vorteile bedingt vorstellbarer Beispiele

- Beispielgebundenes Beweisen durch Lösen einer Berechnungsaufgabe

  Man kann das beabsichtigte Vorgehen im Interview nach HOLLAND (2007, 152) auch als *Satz- bzw. Beweisfindung durch Lösung einer Berechnungsaufgabe* ansehen. (Dabei besteht die *Berechnungsaufgabe* darin, den Mittelpunktswinkel δ nach Vorgabe eines konkreten Basiswinkels α, z.B. $\alpha = 40°$, zu ermitteln. Dadurch kann die behauptete Formel $\delta = 2\alpha$ als Satz gefunden werden.) Wie kann sich nun der Verlauf vom Aufstellen der Behauptung bis zu ihrem Beweis am Beispiel gestalten?

In der Sprache HOLLANDs muss eine anfänglich vorgegebene *Berechnungsaufgabe* zur Satzfindung nicht die Beweisfindung implizieren. Manche Schüler iterieren also ihre *Berechnungsaufgabe* an immer neuen Beispielen und gelangen darüber nicht mehr zur eigentlichen Beweisfindung. Eine Möglichkeit der Förderung der Beweisidee besteht also in der Vermeidung von Rechenschritten oder sogar in der Vermeidung der Beispiele selbst. Durch Rückwärtsarbeiten an Planskizzen kann sich zuweilen jene strukturelle Einsicht einstellen, durch die das formale Beweisen als ein Grenzfall beispielgebundenen Beweisens erscheint. Entsprechend stellen sich unterschiedliche Beweisverläufe ein.

Diskrepanz zwischen Satz- und Beweisfindung

Möglichkeiten zur Förderung der Beweisidee

3.5 Didaktische Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen

Einleitung und Übersicht

In dieser fünften und letzten Einzelfallstudie geht es am Aufgabenbeispiel der Potenzregeln um zwei verschiedene Wege zum beispielgebundenen Beweisen: Der eine Zugang erfolgt über die Entdeckung und Prüfung mit latenter Beweisidee, ohne dass der Interviewer die Potenzregeln von sich aus als Behauptungen vorgibt. Der Schüler arbeitet vielmehr weitgehend frei von zielgerichteten Arbeitsaufträgen des Interviewers. Bei dem anderen Zugang werden einer Schülerin die Potenzregeln als Behauptungen zusammen mit einer induktiven Prüfung zum Nachvollzug vorgelegt. In dieser induktiven Prüfung soll die Schülerin einen beispielgebundenen Beweis der Behauptung erkennen. Im Vergleich zu den bisherigen Einzelfallstudien treten hier also mehr die verschiedenen Konzeptionen der Aufgabenstellung und die Interventionsmöglichkeiten des Lehrenden zum Ermöglichen beispielgebundenen Beweisens in den Vordergrund.

3.5.1	*Mathematische Analyse*	Kl. 8/9	Beispielgebundenes Beweisen der Potenzregeln
		Beh.	Erste und zweite Potenzregel
3.5.2	*Forschungs -perspektiven -bereiche -fragen*	I III V	○ Entdecken mit latenter Beweisidee ○ Umgang mit vorgelegten Behauptungen ○ Beweisverständnis von Schülern ○ Interventionsmöglichkeiten des Lehrenden
3.5.3	*Kontext*	Mi	Einübung der Potenzdefinitionen und der Fachtermini
3.5.4	*Hauptanalyse*	Mi	Entdecken, Prüfen und Begründen der ersten Potenzregel
3.5.5	*Hauptanalyse*	Mi	Entdecken, Prüfen und Begründen der zweiten Potenzregel
3.5.6	*Kontrastanalyse*	Ju	Nachvollzug vorgelegter Beweise
3.5.7	*Ergebnisse*	Mi Ju	Verlaufsbetrachtung Summarische Betrachtung
3.5.8	*Resümé*		zu den Forschungsperspektiven, -bereichen und -fragen

3.5.1 Mathematische Analyse: Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen der Potenzregeln

Einführung der Potenzregeln

Die Potenzregeln werden üblicherweise erst in der letzten Jahrgangsstufe der Sekundarstufe I explizit eingeführt. Den Schülern werden sie zumeist in formeller Darstellung präsentiert. Variabel sind bei einer Potenz jeweils die Basis und der Exponent. Wie die ausgeschriebenen Terme $b^6 = b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$ und $6^n = 6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6$ nahelegen, lässt sich die Variation der Basis $b \in \mathbb{N}$ einfacher darstellen als die Variation des Exponenten $n \in \mathbb{N}$. Denn die Variation der Basis ändert den Term nicht hinsichtlich seiner Faktorenanzahl. Für die nachstehende Analyse werden die erste und zweite Potenzregel betrachtet:

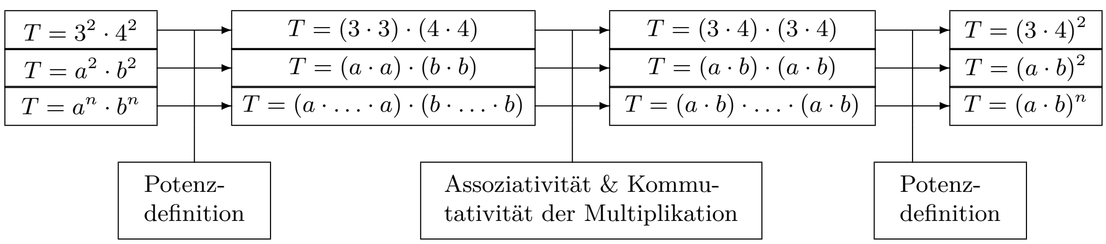
erste und zweite Potenzregel

Erste Potenzregel	Wenn zwei Potenzen die gleichen Basen besitzen, a^m und a^n mit $a, b, n \in \mathbb{N}$, dann ist ihr Produkt $a^m \cdot a^n$ gleich a^{m+n}.
Zweite Potenzregel	Wenn zwei Potenzen den gleichen Exponenten besitzen, a^n und b^n mit $a, b, n \in \mathbb{N}$, dann ist ihr Produkt $a^n \cdot b^n$ gleich $(a \cdot b)^n$.

Wie die logisch-strukturellen Analysen von ↑ Kap. 1.3 und von ↑ Kap. 1.4 gezeigt haben, gründet dabei die erste Potenzregel lediglich auf der Potenzdefinition und auf der Assoziativität der Multiplikation. Bei der zweiten Potenzregel tritt noch die Kommutativität der Multiplikation hinzu. Möchte man schrittweise vorgehen und die Schwierigkeiten gestuft angehen, lassen sich zunächst die erste und dann die zweite Potenzregel und dabei jeweils zunächst die Variation der Basiszahlen und daran anschließend die Variation der Exponenten thematisieren.

beispielgebundenes Beweisen der zweiten Potenzregel

In ↑ Abs. 1.5.1 wurde bereits die zweite Potenzregel betrachtet, deren Beweis als mehrgliedriges beispielgebundenes Argumentgefüge wie folgt dargestellt werden kann:



'schultypische Problematik' beispielgebundenen Beweisens

Wegen ihrer relativ einfachen Beweisstruktur können die Potenzregeln als Musterbeispiele zur Erarbeitung mathematischer Sätze herangezogen werden. In diesem Zusammenhang verweisen Meyer & Voigt (2009a, 57) am Beispiel der ersten Potenzregel auf die "schultypische Problematik", wie die Prüfung mit latenter Beweisidee vom beispielgebundenen Beweisen zu unterscheiden sei. Aus den theoretischen Vorarbeiten in ↑ Abs. 1.5.3 geht hervor, dass die Schüler die vormals latente Sinnstruktur eines Beweises allmählich subjektiv realisieren und ggf. manifestieren können. Dafür müssen sie im Besonderen der Beispiele das Allgemeingültige erkennen und versprachlichen, etwa in der deduktiven Herleitung des Resultats der induktiven Prüfung $3^2 \cdot 4^2 = (3 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 4) = (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4) = (3 \cdot 4)^2$ mit latenter Beweisidee. Ob die Schüler dann wirklich das Allgemeingültige subjektiv realisiert haben, muss durch den Experten, den Lehrer oder die Mitschüler jeweils interpretativ erschlossen werden.

Zugang über die Entdeckung und die Prüfung der Potenzregeln mit latenter Beweisidee

Ein möglicher Zugang zum beispielgebundenen Beweisen der Potenzregeln besteht nun darin, den Schülern nach einer Vorübung zum Einstudieren der Potenzdefinition und der Bezeichnung von Basis und Exponent einige Potenzterme wie $2^3 \cdot 2^4$ und 2^7 sowie $3^2 \cdot 4^2$ und $(3 \cdot 4)^2$ vorzulegen. An diesen Potenztermen können die Schüler die erste und zweite Potenzregel entdecken und sie zunächst in Variation der Basen mit latenter Beweisidee prüfen. Vielleicht können die Schüler in fortschreitender Verallgemeinerung auch die latente Beweisidee unter Variation der Exponenten entwickeln und für ihren späteren Beweis der Potenzregeln nutzbar machen.

Zugang über vorgelegte Potenzregeln mit Beweisen

Um den Zugang zum beispielgebundenen Beweisen abzukürzen, können den Schülern aber auch beispielgebundene Beweise zum Nachvollzug vorgegeben werden. Dabei wird in formaler (resp. formeller) Sprache eine Behauptung vorangestellt, welche Allgemeingültigkeit beansprucht, sowie eine im Beispiel gehaltene induktive Prüfung mit latenter Beweisidee als deren Beweis nachgestellt. Zur allgemeingültigen Behauptung $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ mit natürlichen Zahlen a, m und n kann ein vorgeblicher Beweis in seiner Spezifikation für $m = n = 2$ etwa wie folgt gefasst werden (↑ Abb. 3.46):

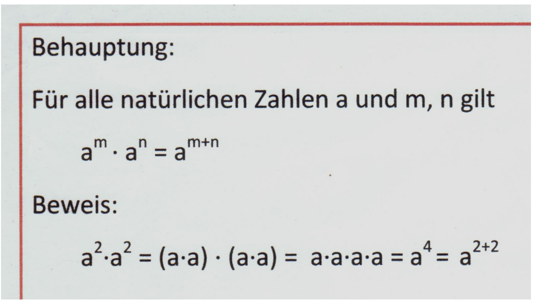
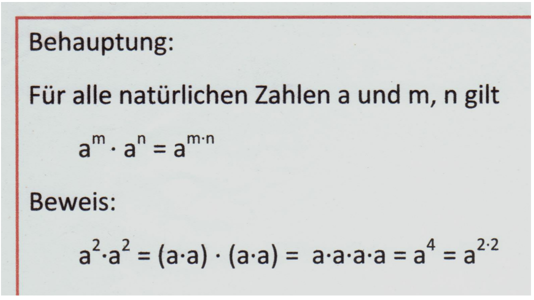


Abb. 3.46: vorgelegte richtige Behauptung mit vorgeblichem Beweis

Zugang über falsche Behauptungen mit Beweisen

Selbst wenn der vorgebliche beispielhafte Beweis formal richtig ist, kann die Behauptung trotzdem falsch sein. Etwa ist das hier gewählte Beispiel der induktiven Prüfung wegen der Gleichsetzung $m = n = 2$ so spezifisch gehalten, dass es sich auch auf schwächere Behauptungen wie $a^m \cdot a^m = a^{2m}$ oder $a^n \cdot a^2 = a^{n+2}$ beziehen ließe. Manche Schüler fallen auch auf falsche Behauptungen herein, etwa wenn zur falschen Behauptung $a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$ mit natürlichen Zahlen a, m und n der vorgebliche beispielhafte Beweis in ↑ Abb. 3.47 vorgelegt wird. Hier ist der Exponent durch die Beispielzahl 2 repräsentiert, welche wegen $2 \cdot 2 = 2 + 2$ einer adäquaten Verallgemeinerung der Behauptung nicht dienlich ist:



Behauptung:

Für alle natürlichen Zahlen a und m, n gilt

$a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$

Beweis:

$a^2 \cdot a^2 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4 = a^{2 \cdot 2}$

Abb. 3.47: vorgelegte falsche Behauptung mit vorgeblichem Beweis

In einer derartigen Darstellung von Behauptung und vorgeblichem Beweis finden sich beide Pole beispielgebundenen Beweisens wieder: das Beispielhafte und das Formale (resp. Formelle). Insofern kann darüber das beispielgebundene Beweisen direkt thematisiert werden.

3.5.2 Forschungsperspektiven, -bereiche und -fragen

Forschungsperspektiven dieser Einzelfallstudie

Thema dieser Einzelfallstudie ist der Vergleich zweier didaktisch reflektierter Zugangswege zum beispielgebundenen Beweisen: das Entdecken und das Prüfen einer Behauptung mit latenter Beweisidee sowie der Nachvollzug vorgelegter Behauptungen und beispielgebundener Beweise. Die Forschungsbereiche dieser Einzelfallstudie werden aus folgenden Perspektiven entwickelt (vgl. ↑ Kap. 2.1):

I	Theoretische Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen i.e.S. (in Latenz, subjektiver Realisierung und Manifestierung des beispielgebundenen Beweises als Sinnstruktur)
III	Praktische Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen i.w.S. (einschließlich von Zugängen zum beispielgebundenen Beweisen, etwa des Entdeckens und des Prüfens)
V	Weitere Perspektiven	○ Wahl und die Anzahl der Beispiele ○ Interventionsmöglichkeiten von Lehrenden

Forschungsbereiche und Forschungsfragen

Von dieser Schwerpunktsetzung ausgehend, lassen sich mit Blick auf die Aufgabenstellungen nachstehende Fragen zu folgenden Forschungsbereichen stellen:

- Entdecken mit latenter Beweisidee

  Wie weit trägt das Entdecken mit latenter Beweisidee? Wie entwickeln Schüler diese zu einem (beispielgebundenen) Beweis? Es bietet sich an, hierzu ein besonderes Augenmerk auf zwischenzeitliche induktive Prüfungen zu legen, in denen die Schüler an ihrer Beweisidee arbeiten. Durch diesen Ansatz wird den Schülern ein hohes Maß an Selbstständigkeit eingeräumt. Mit welchen Schwierigkeiten haben Schüler bei diesem Zugang zum beispielgebundenen Beweisen zu kämpfen?

- Umgang mit vorgelegten Behauptungen

  Durch vorgelegte Behauptungen mit vorgeblichen Beweisen soll erkundet werden, inwieweit die Schüler in den induktiven Prüfungen eine latente Beweisidee erkennen können, und wie sehr sie einer vorgeblich richtigen Behauptung Glauben schenken. Wie gehen die Schüler bei diesem Zugang mit weiteren, selbst gewählten induktiven Prüfungen um?

- Beweisverständnis von Schülern beim beispielgebundenen Beweisen

  Möglicherweise kann es beim vorgenannten Zugang zum beispielgebundenen Beweisen zu einer Diskussion darüber kommen, ob die präsentierte oder die eigene induktive Prüfung einen Beweis darstellt oder nicht. Hierüber kann dann auch das Beweisen an sich thematisiert werden.

- Interventionsmöglichkeiten des Lehrenden

  Welche Interventionsmöglichkeiten erlauben es dem Lehrenden, den Prozess des beispielgebundenen Beweisens adäquat zu begleiten? Hierbei dürfte der gewählte Zugang zum beispielgebundenen Beweisen eine Rolle spielen, hat dieser doch nicht nur inhaltliche, sondern auch kommunikative Auswirkungen.

3.5.3 Kontext (Mike)

Vorgabe der Bezeichnungen und der Potenzdefinition

In einer Vorübung zum Thema Potenzregeln übt der Interviewer mit dem Schüler Mike, einem Schüler der 8. Klasse [sic!], die Definition der *Potenz* ein und gibt ihm die Termini *Basis* bzw. *Grundzahl* und *Exponent* bzw. *Hochzahl* an die Hand. Hierbei soll der Schüler zum einen verschiedene Beispielzahlen als Basen und Exponenten wählen und die jeweiligen Potenzen ausschreiben statt ausrechnen. Zum anderen werden auch Variablenzeichen als Basen und Exponenten gewählt (↑ Abb. 3.48).

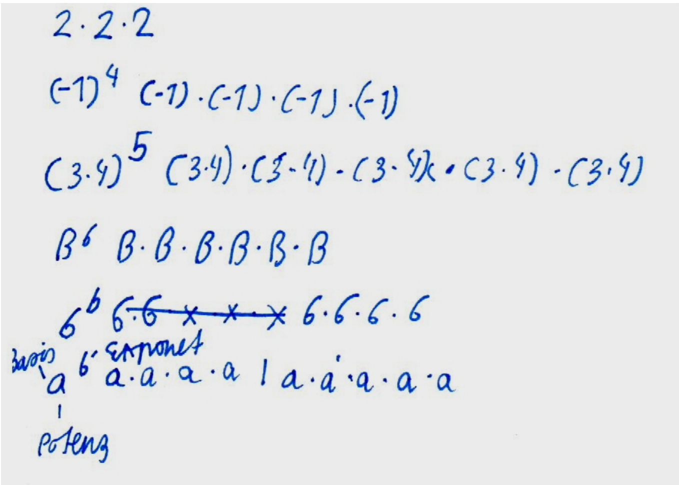


Abb. 3.48: Mikes Vorübungen zum Einüben der Potenzdefinition

Interviewgestaltung

Wie in ↑ Abs. 3.5.1 dargelegt wurde, soll sich der Verlauf des Interviews mit dem Schüler Mike bezüglich beider Potenzregeln jeweils wie folgt gestalten: Zunächst lässt der Interviewer den Schüler jeweils zwei Terme aus Potenzen untereinander schreiben: Für die erste Potenzregel sind es die Potenzterme $2^3 \cdot 2^4$ und 2^7, für die zweite Potenzregel sind es die Potenzterme $3^2 \cdot 4^2$ und $(3 \cdot 4)^2$ zur Variation der Basen sowie die Potenzterme $3^5 \cdot 4^5$ und $(3 \cdot 4)^5$ zur Variation der Exponenten. Um den Schüler Mike nicht zu lenken, wird jeweils auf einen konkreten Arbeitsauftrag verzichtet.

3.5.4 Hauptanalyse (Mike): Entdecken, Prüfen und Begründen der ersten Potenzregel

der Interviewer gibt die Potenzterme $2^3 \cdot 2^4$ und 2^7 vor

Zur Thematisierung der ersten Potenzregel lässt der Interviewer den Schüler Mike zunächst die Terme $2^3 \cdot 2^4$ und 2^7 untereinander schreiben (↑ Abb. 3.49):

08:10	I	63	*das ist für uns ganz wichtig, emm, ich würd dich jetzt bitten hier aufzuschreiben,* $2^3 \cdot 2^4$ *.. und da drunter ..* 2^7 *..* (der Schüler murmelt und schreibt jeweils mit, ↑ Abb. 3.49) *.. und jetzt geb ich dir bisschen Zeit, emm ..*
08:27	Mi	64	*ach so, ob das das Gleiche ist, ja das würd ich jetzt sagen,* $2^3 \cdot 2^4$ (schreibt nochmals den Term $2^3 \cdot 2^4$ auf) *.. ist* (schaut nach oben, 4 sec) *gleich* 2^7 (ergänzt zu $= 2^7$ in der ersten Zeile), *weil die beiden .. die Basis, sind ja hier beide gleich, alle drei gleich* (deutet auf die entstandene Gleichung der ersten Zeile), *bei der Aufgabe, und die beiden, die Exponenten .. das hier wär jetzt* $2 \cdot 2 \cdot 2$ (schreibt unter die Potenz 2^3 den Term $(2 \cdot 2 \cdot 2)$) *halt · ..* $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ (fügt unter der Potenz 2^4 den Term $\cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$ an), *also* 4 *mal* 2, *und das wär dann* 7*mal*, $\cdot\, 2$ (ergänzt zu $= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$ in der zweiten Zeile, 6 sec) *also wenn man das hier jetzt nimmt* (deutet auf den vorderen Teil der zweiten Zeile), *das sind auch* 7*mal* · 2, *weil* 3 *und* 4 *addiert, sind* 7, *die beiden Exponenten addiert sind die gleichen wie mit* 2^7
09:27	I	65	*und emm, und warum kannst du das sagen' .. was ist mit den Klammern dort'* (deutet auf die Klammerausdrücke in der zweiten Zeile)
09:34	Mi	66	*ja die Aufgabe ist ja hier* 2^3, *das* (deutet auf den Term $(2 \cdot 2 \cdot 2)$) *sind ja zwei Klammern .. ja die Klammern kann man auflösen ... warum, weiß ich jetzt nicht*

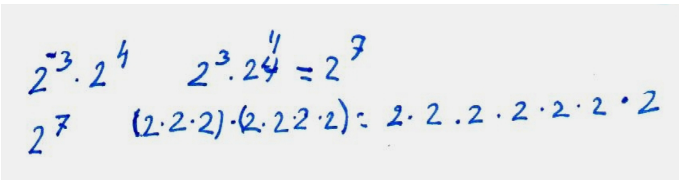


Abb. 3.49: Initialbeispiel für das erste Potenzregel. Das linksstehende Minuszeichen wurde erst später hinzugefügt.

Schüler Mike entdeckt, dass die Potenzterme $2^3 \cdot 2^4$ und 2^7 gleich sind

Ohne dass der Interviewer ihn dazu aufgefordert hat, vergleicht der Schüler Mike die beiden links stehenden Terme $2^3 \cdot 2^4$ und 2^7. Er behauptet, dass $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$ sei, und führt dies zunächst darauf zurück, dass die Basen aller drei Teilterme gleich seien. Zur Verdeutlichung schreibt er die Zweierpotenzen als Produkte aus und argumentiert, dass im Term $(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$ wie auch im Term $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ der Faktor 2 jeweils siebenmal vorkomme, weil sich die Exponenten 3 und 4 zu $3 + 4 = 7$ addieren.

Rekonstruktion mittels Abduktionschemata

Der Terminologie von Meyer & Voigt (2009a, 48f.) folgend, kann diese Schlussweise als eine Entdeckung mit latenter Beweisidee angesehen werden. Ließe sich in Äußerung Mi 64 ein Indiz dafür feststellen, dass der Schüler Mike die erste Potenzregel als hypothetisches Gesetz assoziieren würde, erhielte man folgende idealtypische Abduktion (vgl. Meyer & Voigt (2009a, 40)):

Resultat	$2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$
Gesetz	Erste Potenzregel: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Fall	Die Basiszahlen sind gleich, und $3 + 4 = 7$.

Der Schüler Mike leitet den erklärenden Fall in Äußerung Mi 64 jeweils mit *weil* ein: Die Basisgleichheit thematisiert er durch *weil die beiden .. die Basis, sind ja hier beide gleich, alle drei gleich.* Dass sich die Exponenten der Potenzen addieren, thematisiert er durch *das sind auch* 7*mal* $\cdot\ 2$, *weil* 3 *und* 4 *addiert, sind* 7, *die beiden Exponenten addiert sind die gleichen wie mit* 2^7. Allerdings lässt die Äußerung des Schülers Mike das assoziierte Gesetz nicht erkennen, und seine handschriftlichen Aufzeichnungen entsprechen auch nicht ganz der obigen Darstellung des deduktiv hergestellten Resultats. Insofern ist der Schüler Mike von der idealtypischen Abduktion noch etwas entfernt. Zusätzlich zum entäußerten Resultat lässt sich aus seinen Äußerungen Mi 64 und Mi 66 folgende Abduktion erkennen:

Resultat	Gleichheit $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$
Gesetz	Assoziativität
Fall	$2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$ und $2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Liest man das vorstehende Abduktionsschema von unten nach oben als Deduktionsschema, so ergibt sich folgendes Bild: Vermöge des Gesetzes der Assoziativität, welches der Schüler Mike in der zweiten Zeile seiner eigenen Aufzeichnungen anwendet, ist er in der Lage, aus den vermöge der Potenzdefinition gebildeten Potenztermen $2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$ und $2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ (Fall) deren Gleichheit $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$ (Resultat) zu folgern. Dabei fungiert die Assoziativität laut Äußerung Mi 66 als unhinterfragte, d.h. nicht weiter gestützte Regel: *ja die Klammern kann man auflösen ... warum, weiß ich jetzt nicht.*

Die beiden dokumentierten Zeilen des Schülers Mike wirken auf den Betrachter wie manche Darstellungen von Schülern oder Studierenden zur vollständigen Induktion, wenn diese die Induktionsbehauptung als zu beweisende Aussage in die erste Zeile (hier $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$ als zu erweisendes Resultat) schreiben und dann in den Folgezeilen getrennt nach linker und rechter Seite jeweils solange äquivalent umformen, bis die Gleichheit in der untersten Zeile (hier $(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$) offensichtlich ist. Anschließend lässt sich die Induktionsbehauptung als Deduktionskette in voller Länge umschreiben, wie sie im Resultat des ersten Abduktionsschemas zu finden ist: $2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$.

bisheriger Ablauf des beispielgebundenen Beweisens des Schülers Mike

Insgesamt ergibt sich also folgender Ablauf: Der Schüler Mike formuliert die Behauptung $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$ als zu erweisendes Resultat. Zum Beweis wendet er die Definition der Potenz auf die Potenzterme $2^3 \cdot 2^4$ und 2^7 an, und anschließend das Assoziativgesetz. Damit hat er im Prinzip das Resultat des ersten Abduktionsschemas deduktiv hergestellt:

$$\boxed{T = 2^3 \cdot 2^4} \xrightarrow{\text{Potenzdefinition}} \boxed{T = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)} \xrightarrow{\text{Assoziativität}} \boxed{T = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \xrightarrow{\text{Potenzdefinition}} \boxed{T = 2^7}$$

Darüber hinaus hat er auch den Fall des ersten Abduktionsschemas benannt, wenn er davon spricht, dass sich die Exponenten der Potenzen addieren. Allein die erste Potenzregel als Gesetz scheint der Schüler Mike noch nicht assoziiert zu haben. Damit ergibt sich folgendes Paradox: Die allgemeine Behauptung der ersten Potenzregel steht zwar noch nicht im Raum, aber der Schüler Mike hat mit der deduktiven Herstellung des Resultats schon deren Beweisidee im Beispiel formuliert. Der Schüler Mike beweist insofern mit latent gebliebener Entdeckung, d.h. ohne Entdecken im strengen Sinne von Meyer & Voigt (2009a). Er muss sich zunächst der Entdeckung der ersten Potenzregel bewusst werden, etwa indem er sie allgemein formuliert, und diese dann beweisen, indem er seine Beweisidee der Latenz enthebt. In diesem Fall ist also nicht nur die Beweisidee latent, sondern auch die Behauptung, so dass man von einer doppelten Latenz sprechen kann.

Schüler Mike variiert Basen und Exponenten

Bei der Herstellung des Resultats der Termgleichheit hat der Schüler Mike deduktive Schlüsse an Beispielzahlen geführt. Der Interviewer möchte nun auf die Potenzregel als Behauptung zu sprechen kommen. Auf seine Frage, ob man dasselbe Vorgehen auch für eine andere Grundzahl, z.B. 5 wählen könne, antwortet der Schüler Mike:

10:02	Mi	70	*ja, emm, die Grundzahlen sind variabel, aber man kann jetzt nicht* $2^4 \cdot 2^4 = 2^7$
10:11	I	71	*ach so, emm, was ist mit den Exponenten, wenn man die, ändert'*
10:17	Mi	72	*die müssen halt immer auf beiden Seiten das Gleiche ergeben, die Exponenten*

Der Schüler Mike betont in Äußerung Mi 70, dass die Basiszahlen *variabel* seien. Er thematisiert des Weiteren die Exponenten, die er auch als Veränderliche ansieht. Wie er in den Äußerungen Mi 70 und Mi 72 am Kontrastbeispiel $2^4 \cdot 2^4 \neq 2^7$

ausführt, müssen die Exponenten nämlich *immer auf beiden Seiten das Gleiche ergeben.* Um seine Aussage zu präzisieren, wählt der Schüler ein zweites, schwierigeres Beispiel:

10:41	Mi	76	*und jetzt aber* $3^3 \cdot 3^2 \cdot 3^6$ *gleich* $3^8 \cdot 3^4$ *stehen würde, dann wär das ja hier addiert* 12, *die Exponenten, und da* 11, *und dann wär das nicht das Gleiche, dann wär das ungleich, zueinander*

An dieser Stelle benutzt der Schüler Mike ein weiteres Kontrastbeispiel, um die erste Potenzregel anzudeuten. Dabei lässt er durch die Wahl anderer Beispielzahlen zwar erkennen, dass es ihm um die Allgemeingültigkeit der ersten Potenzregel $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ und deren Grenzen geht. Allerdings formuliert er sie wieder nicht explizit. Der Schüler Mike erkundet jedoch den Gültigkeitsbereich der ersten Potenzregel insofern, als dass er deren Prämissen hinsichtlich der Anzahl der Potenzterme verallgemeinert. Darauf eingehend, fragt ihn der Interviewer schließlich auch nach negativen Basiszahlen:

Schüler Mike deutet die erste Potenzregel durch ein Kontrastbeispiel an

11:37	I	81	*okay, emm, würde das jetzt auch noch gelten, dass* $(-2)^3 \cdot (-2)^4$ *dasselbe ist wie* $(-2)^7$ *'*
11:48	Mi	82	(abrupt) *ja*
11:48	I	83	*kannst du's noch 'mal sagen warum'*
11:50	Mi	84	*weil da auch wieder, die Basiszahlen sind gleich groß, und die, also immer die gleichen, und, wenn man die beiden, emm, Exponenten addiert auf beiden Seiten, ist das auch das .. also* 3 *und* 4 *addiert, dann sind das* 7, *und, auf der anderen Seite sind auch* 7 (deutet auf die Gleichung $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$) *.. und deshalb, bleibt das so ..*

Auf das vom Interviewer vorgegebene Beispiel mit der negativen Basiszahl -2 hin erläutert der Schüler Mike die erste Potenzregel. Dabei drückt er sich allgemein aus, wie seine Äußerung Mi 84 zeigt: *die Basiszahlen sind gleich groß* sowie *wenn man die beiden, emm, Exponenten addiert auf beiden Seiten, ist das auch das.* Die ursprünglich verwendete Beispielzahl 2 ist für den Schüler Mike zu einem Variablenzeichen geworden, das für eine beliebige, auch negative Basiszahl stehen kann. Entsprechend scheint die Summe $3 + 4$ für ihn mittlerweile eine Summe $m + n$ im Exponenten zu repräsentieren. Da der Schüler die Behauptung zum Ende seiner Äußerung Mi 84 am Beispiel konkretisiert, ohne sie zu beweisen, fragt der Interviewer nach:

Schüler Mike konkretisiert die erste Potenzregel am Beispiel

12:10	I	85	*ja okay, jetzt hast du die Regel geschildert, dass du* $3+4$ *addieren musst, emm, woran liegt denn das, dass das jetzt gleich ist' ..*
12:21	Mi	86	*weil, das,* 2*, das sind ja alles hier Malzahlen, die, emm, Potenzen sind ja eigentlich nur Malgerechnete .. und* 2^3 *die Potenz* $\cdot\, 2^4$ *das ist ja dann* $2\cdot2\cdot2$ *und* $2\cdot2\cdot2\cdot2$*, also* 4 *mal* $\cdot$ 2*, und wenn dazwischen noch ein Malzeichen da ist, dann ist das, sozusagen, eine ganz lange Potenz*

allmähliche subjektive Realisierung von Behauptung und Beweis

Die in der frühen Äußerung Mi 64 verbalisierte Deduktionskette erfolgte ursprünglich zur Herstellung des Resultats der Termgleichheit von $2^3 \cdot 2^4$ und 2^7. Während zu diesem Zeitpunkt jedoch unklar war, ob der Schüler Mike die Behauptung überhaupt vor Augen hatte, lässt sich die Äußerung Mi 86 nun im Kontext der allgemeinen Behauptung $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ lesen. Diesen Kontext hat sich der Schüler zwischenzeitlich in den Äußerungen Mi 70, Mi 72 und Mi 84 durch die Variation von Basiszahlen und Exponenten allgemein erschlossen. In der Äußerung Mi 86 manifestiert sich die vormals latente, nunmehr subjektiv realisierte Beweisidee, auch wenn sie vordergründig bloß an den ursprünglich gewählten Beispielzahlen gebunden scheint. Insofern enthebt der Schüler Mike die Behauptung und die Beweisidee allmählich beide gleichermaßen der Latenz. Es lässt sich darüber streiten, ob es nicht sinnvoller ist, erst die Behauptung und danach die Beweisidee entdecken.

3.5.5 Hauptanalyse (Mike): Entdecken, Prüfen und Begründen der zweiten Potenzregel

der Interviewer gibt die Terme $3^2 \cdot 4^2$ und $(3\cdot4)^2$ vor

Zur Besprechung der zweiten Potenzregel bittet der Interviewer den Schüler Mike, die Terme $3^2 \cdot 4^2$ und $(3 \cdot 4)^2$ aufzuschreiben (↑ Abb. 3.50):

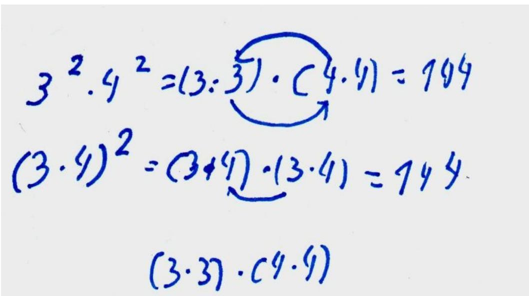


Abb. 3.50: die zweite Potenzregel, erläutert an den Beispielzahlen 3 und 4 als Basen

Schüler Mike vermutet, dass die Terme ungleich sind

Der zweite Term $(3 \cdot 4)^2$ erinnert den Schüler Mike zunächst an den Anfang einer binomischen Formel, bei der aber ein Pluszeichen stehen müsse. Er zeigt sich von der Gleichheit der rasch ausgeschriebenen Terme $(3 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 4)$ und $(3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4)$ zunächst nicht überzeugt, so dass er bemerkt:

14:52	Mi	100	*weil die Poten-, äh, der Exponent gilt ja hier* (deutet auf den Term $(3\cdot4)^2$) *für die gesamte Klammer, und da* (deutet auf den Term $3^2\cdot4^2$) *jeweils nur für die einzelne, Basis, und deshalb, müsste das eigentlich ungleich sein, die beiden, Gleichungen*

Der Schüler Mike richtet seine Aufmerksamkeit dabei zunächst auf den gleichen Exponenten 2 der links stehenden Terme $(3 \cdot 4)^2$ und $3^2 \cdot 4^2$ und auf die Verschiedenartigkeit der einzelnen Basen. Daraufhin berechnet der Schüler Mike die beiden ausgeschriebenen Terme $(3 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 4)$ und $(3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4)$ zu 144 und stellt somit ihre Gleichheit fest. Dieses Resultat kommt für ihn angesichts seiner gegenteiligen Vermutung in Äußerung Mi 100 überraschend. Anders als bei der ersten Potenzregel geht der Schüler Mike allerdings nicht den Weg, dieses Resultat auf die Gleichheit der Exponenten der Potenzen 3^2 und 4^2 zurückzuführen. Vielmehr liefert der Schüler Mike sofort eine Begründung für die festgestellte Termgleichheit:

Schüler Mike stellt durch Ausrechnen fest, dass die Potenzterme gleich sind

15:41	Mi	104	144 *und* 144, *bei beiden .. ei .. das kann man vielleicht, ja genau, ich weiß es jetzt, bei, bei :, bei der Multiplikation gilt ja Verschiebungsgesetz, und deshalb kann man auch hier, sag ich 'mal* (deutet auf den Term $(3\cdot3)\cdot(4\cdot4)$) *die rüberziehen und die rüberziehen* (setzt an die mittleren Zahlen 3 und 4 gegenläufige Pfeile), *dann hat man das Gleiche wie da* (deutet auf die zweite Zeile)

Zunächst hat der Schüler Mike in Äußerung Mi 100 also die Gleichheit seiner umgeformten und berechneten Potenzterme festgestellt. Wenig später betrachtet er die Potenzterme nunmehr strukturell und begründet damit deren Gleichheit. Er verwendet in Äußerung Mi 104 dazu das als *Verschiebungsgesetz* bezeichnete Kommutativgesetz; das Assoziativgesetz erscheint ihm trivial, wenn er diesbezüglich in Äußerung Mi 108 auf Nachfrage des Interviewers betont: *die Klammern sind ja, eigentlich egal.* Zudem ist ihm das Assoziativgesetz schon von der ersten Potenzregel her bekannt.

Schüler Mike betrachtet die Potenzterme strukturell

Die Bemühungen des Schülers Mike konzentrieren sich hier wiederum nicht explizit auf die zweite Potenzregel, sondern auf die zu erweisende Gleichheit der links stehenden Terme $(3 \cdot 4)^2$ und $3^2 \cdot 4^2$. Implizit bleibt auch der die Termgleichheit erklärende Fall, dass die Exponenten der Potenzen 3^2 und 4^2 gleich sind. Dass der Schüler Mike aber so rasch zur latenten Beweisidee der für den Experten sichtbaren, aber im Gespräch nicht thematisierten zweiten Potenzregel übergeht, ist wohlmöglich einem Gewöhnungseffekt zuzuschreiben: Die Art der Aufgabenstellung ist ähnlich. Eine andere Erklärung besteht darin, dass der Schüler Mike seine Aufmerksamkeit auf das korrekte Ausschreiben der Potenzterme und deren Deutung richtet, und sich dieses Unterfangen nicht ganz so leicht wie bei der ersten Potenzregel gestaltet.

dem Schüler Mike bleibt die Behauptung erneut implizit *der Interviewer regt zur Variation der Basiszahlen an*

Mit der Frage des Interviewers, warum die Gleichheit beider Terme $3^2 \cdot 4^2$ und $(3 \cdot 4)^2$ auch für andere Basiszahlen (wie zum Beispiel 5 und 6 oder negative Basiszahlen) besteht, nimmt die zweite Potenzregel für den Exponenten $n = 2$ als Behauptung jedoch Konturen an. Der Schüler Mike bemerkt:

16:44	Mi	114	*weil, bei anderen Grundzahlen wär ja das Gleiche hier was 'rauskommen würde, halt nur bei* 5 *und* 6, $5 \cdot 5$ *stehen, in Klammern* $\cdot\, 6 \cdot 6$, *und auf der anderen Seite halt* $5 \cdot 6$ *in Klammern* $\cdot\, 5 \cdot 6$, *und dann könnte man das genauso verschieben, die* 5 *und die* 6 *mit dem Verschiebungsgesetz, und bei negativen Zahlen genauso*

Der Schüler Mike stellt in Äußerung Mi 114 das Resultat der Termgleichheit auch für die Basiszahlen 5 und 6 her, nennt dabei erneut das *Verschiebungsgesetz* her und postuliert die Gültigkeit des Resultats auch für negative Basiszahlen, ohne die jeweiligen Potenzterme auszurechnen. Es ist daher anzunehmen, dass er hinsichtlich der Verallgemeinerung der Basiszahlen den Beweis der zweiten Potenzregel für den Exponenten $n = 2$ subjektiv realisiert hat.

der Interviewer regt zur Variation der Exponenten an

Schüler Mike vermutet, dass die Potenzterme ungleich sind

Mit Blick auf die Verallgemeinerung hinsichtlich des Exponenten lässt der Interviewer den Schüler Mike die Termgleichheit nun am Beispiel des Exponenten 5 prüfen (↑ Abb. 3.51). Zunächst bezweifelt der Schüler Mike wiederum, dass die Potenzterme ein gleiches Ergebnis liefern, weil die erste Zeile zwei Klammerpaare und die zweite Zeile fünf Klammerpaare aufweise:

17:34	Mi	120	*ja, würd ich sagen, dann wär halt hier,* $3{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}4$, *fünfmal, und da wär das auch fünfmal,* $3 \cdot 3 \cdot 3$ (deutet auf die erste Zeile, ↑ Abb. 3.51) *ich würd schon sagen, dass das gleichbleibt, obwohl haben wir hier 'ne längere Klammer und da* (deutet jeweils auf die Faktoren der ersten Zeile) *wären, wären immer noch* 2 *Klammern, und da* 5 *Klammern* (deutet auf die zweite Zeile, ↑ Abb. 3.51)

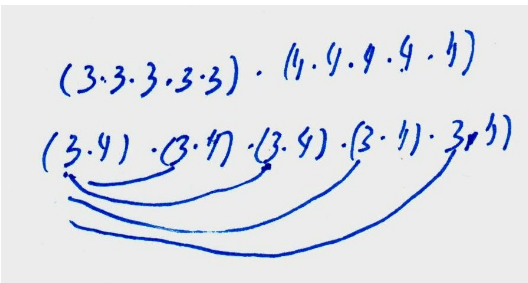


Abb. 3.51: die zweite Potenzregel, erläutert an der Beispielzahl 5 als Exponenten

Wieder ist es die Verschiedenheit der äußeren Darstellung, die den Schüler Mike die Potenzterme zunächst ungleich erscheinen lässt. Daraufhin entwickelt der Schüler Mike seine Beweisidee jedoch wie folgt weiter:

Schüler Mike entwickelt die Beweisidee weiter

18:23	Mi	124	*ich weiss nicht, kann auch sein, dass man bei, wenn's <u>nur</u>, multipliziert wird, alles, könnte man, dann könnte es sein, dass man das auch wieder verschieben kann, dass man, alle Dreien in <u>die</u> Klammer holen kann, alle, also <u>die</u>* 3, *da rein, <u>die</u> da rein und die <u>auch</u>, und die <u>auch</u>* (deutet auf die hinteren vier Dreien und zeichnet die abgebildeten vier Bögen unter die zweiten Zeile), *alle Vieren <u>da</u> jetzt meinetwegen in <u>die</u> Klammer holt* (deutet auf den zweiten Klammerausdruck in der zweiten Zeile) *und die ander'n drei auflösen, und dann hätte man <u>auch</u> wieder das <u>Gleiche</u>*

In der Äußerung Mi 124 versprachlicht der Schüler Mike die mehrfache Anwendung von Kommutativ- und Assoziativgesetz und greift dabei zu einer Veranschaulichung mit gezeichneten Bögen. Er prüft die zweite Potenzregel nun auch hinsichtlich der Variation des Exponenten. Formal handelt es sich dabei um eine Prüfung mit latenter Beweisidee:

Prüfung mit latenter Beweisidee

Fall Die Exponenten der Potenzen 3^5 und 4^5 sind auch gleich.

Resultat $(3 \cdot 4)^5 \overset{pd}{=} (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4)$
$\overset{ak}{=} (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) \overset{pd}{=} 3^5 \cdot 4^5$

Gesetz Zweite Potenzregel

Dass der Schüler Mike die Potenzterme nicht mit aufschreibt, deutet darauf hin, dass er die Beweisidee nur noch hinsichtlich der Assoziativität und Kommutativität *ak* vervollständigen muss. Sein Argument könnte er vermutlich auch für weitere Exponenten führen. Auf die Frage, woran es läge, dass die Behauptung immer gelte – etwa auch für Exponenten wie 10, 50 oder 100 – antwortet er:

Schüler Mike löst seine Argumente von den Beispielzahlen ab

19:07	Mi	132	*weil, immer wieder das Gleiche, immer wieder es kommt ein Term 'raus oder eine Gleichung, die nur mit, äh, Malzeichen, also nur multipliziert wird immer, man kann <u>immer</u> wieder verschieben die Klammern*
19:15	I	133	*ach so, aber ich hab ja bei dem unteren, Term dann immer <u>mehr</u> Klammern als, bei dem oberen Term*
19:21	Mi	134	*ja .. aber … ich weiss nicht, ich glaube man kann diese Klammern* (deutet auf den unteren Term), *man kann die drei so in die vordere Klammer 'reinschieben*
19:33	I	135	*aha, okay, also glaubst du, dass das <u>immer</u> gilt' …*
19:41	Mi	136	*irgendwie <u>nicht</u> .. na ich glaub schon, ich glaub schon, dass das immer gilt, <u>egal</u> welche Exponenten, <u>egal</u> welche Basis*

Schüler Mike manifestiert die subjektiv realisierte Beweisidee

In den vorstehenden Äußerungen des Schülers Mike löst sich dessen Sprache von konkreten Beispielen ab. Er stellt in Äußerung Mi 132 fest, dass das Ergebnis immer das Gleiche sei: Denn *multipliziert wird immer*, und man könne die Klammern *immer wieder verschieben.* Er zeigt sich von der Allgemeingültigkeit der Behauptung hinsichtlich der Variation der Exponenten schließlich relativ überzeugt und führt aus:

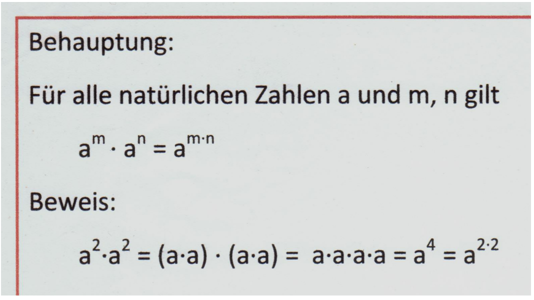
19:58	Mi	138	*also <u>das</u> hier* (deutet auf ↑ Abb. 3.50) *bei hoch* 2 *gilt auf jeden <u>Fall</u>, und <u>das</u> hier* (deutet auf die erste Zeile in ↑ Abb. 3.51) *gilt glaub ich auch, weil, ja wie gesagt, mit dem Verschiebungsgesetz, kann man das ja beim Malzeichen immer wieder verschieben, und dann in eine Klammer holen, sozusagen, das sind ja im Prinzip die gleichen Zahlen, mit denen man immer malrechnet, es sind auch <u>hier</u>* 5 *Vieren und auch <u>da</u>* 5 *Dreien, mit denen man malrechnet* (deutet auf die zweite Zeile in ↑ Abb. 3.51)

Der Schüler Mike richtet seinen Blick in der vorstehenden Äußerung Mi 138 auf die strukturellen Gemeinsamkeiten der beiden vorliegenden Beispiele mit den Exponenten 2 und 5 und begründet die jeweilige Termgleichheit noch einmal durch Nennung von *Verschiebungsgesetz* (Kommutativität) und *in eine Klammer holen* (Assoziativität). Zusammen mit der Äußerung Mi 86 kann man somit davon ausgehen, dass der Schüler Mike die Potenzregeln hinsichtlich der Verallgemeinerung von Basen und Exponenten jeweils beispielgebunden bewiesen hat.

3.5.6 Kontrastanalyse (Judith): Nachvollzug vorgelegter Beweise

der Interviewer legt Schülerin Judith eine falsche Behauptung vor

Die Schülerin Judith geht in die 9. Klasse eines Gymnasiums. Da ihr die Potenzschreibweise schon bekannt ist, konfrontiert sie der Interviewer ohne Vorübung mit einer falschen Behauptung (↑ Abs. 3.52):



Behauptung:

Für alle natürlichen Zahlen a und m, n gilt

$a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$

Beweis:

$a^2 \cdot a^2 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4 = a^{2 \cdot 2}$

Abb. 3.52: vorgelegte falsche Behauptung mit vorgeblichem Beweis

Schülerin Judith vollzieht den vorgelegten Beweis nach und prüft die falsche Behauptung

Der vorgelegte Beweis erscheint der Schülerin Judith nach kurzem Überlegen *logisch*, und so gibt sie diesen in eigenen Worten wieder. Sie ist sich jedoch unsicher, ob der vorgelegte Beweis die Behauptung wirklich beweist, jedenfalls scheint ihr ein Beispiel nicht auszureichen. Die Schülerin Judith überlegt sich daher, ob die Behauptung beim Einsetzen anderer Beispielzahlen immer noch gilt und wählt dafür die Exponenten $m = 4$ und $n = 6$:

08:13	Ju	86	*nee, ich hab mir jetzt überlegt, wenn ich da* (deutet auf den Term $a^2 \cdot a^2$, ↑ Abb. 3.52) *jetzt andere Zahlen einsetze, andere, Exponenten*
08:18	I	87	*ja, du kannst es jetzt auch 'mal aufschreiben, wenn du das willst*
08:21	Ju	88	*also zum Beispiel* $a^4 \cdot a^6$ (schreibt diesen Term auf ihr Arbeitsblatt, ↑ Abb. 3.53), *ob da dann immer noch* a^{24} *'rauskommt*
08:30	I	89	*mm-mmh .. kannst es ja 'mal, kannst ja 'mal gucken*
08:34	Ju	90	*also* (leise) $a \cdot a \cdot a \cdot a, \cdot$ (5 sec, schreibt ihre Rechnung weiter) $=$ .. *ja* (leise) a^{24}, *und das muss, das kann man jetzt auch anders, zerlegen, zum Beispiel* 2·12 *oder* 2·2·2·3

Bestätigung der falschen Behauptung durch zirkuläres Schließen

Die Schülerin Judith hat die vorgelegte falsche Behauptung $a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$ mit den neuen Exponenten $m = 4$ und $n = 6$ in der ersten Zeile von ↑ Abb. 3.53 zirkulär geprüft und sieht die Behauptung damit als bestätigt an. In ihrer induktiven Prüfung hat sie beim Übergang zur Potenz a^{24} dabei die falsche Behauptung selbst angewandt, und nicht die Definition der Potenz.

Vorgabe der richtigen Behauptung

Der Interviewer wendet nun das Arbeitsblatt und legt der Schülerin Judith die zweite (richtige) Behauptung $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ vor (↑ Abb. 3.54).

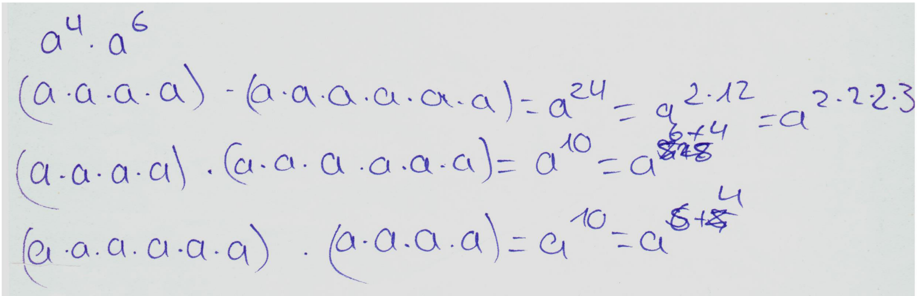


Abb. 3.53: Schülerin Judith prüft die vorgelegte falsche Behauptung $a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$ zirkulär

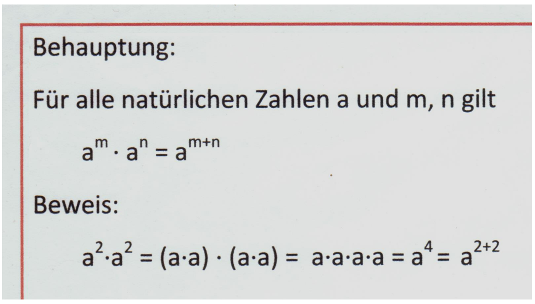


Abb. 3.54: vorgelegte richtige Behauptung mit vorgeblichem Beweis

Die Schülerin Judith überträgt den vorgelegten Beweis nun schematisch auf das Zahlenbeispiel $m = 4, n = 6$ (zweite Zeile in ↑ Abb. 3.53). Der Interviewer bringt sie nun in einen kognitiven Konflikt. Auf ihre ersten beiden Zeilen hingewiesen, bemerkt die Schülerin Judith nach einiger Zeit den Widerspruch:

14:46	Ju	132	*nee, das <u>stimmt</u> nicht* (deutet auf die erste Zeile in ↑ Abb. 3.53) *dann würd doch da stehen, da würde* 24 mal *a stehen, also* $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ ..

Auch wenn sich die Schülerin Judith angesichts beider Behauptungen nun für die zweite (richtige) Behauptung entscheidet (↑ Abb. 3.54), gelingt es ihr dennoch nicht, diese beispielgebunden zu beweisen:

15:05	I	135	(deutet auch auf den zweiten Beweis) *und, emm, also da würde jetzt eine .. deiner Mitschülerinnen noch nicht verstehen, jetzt ist das ja nur für* $m = 2$ *und* $n = 2$ *gemacht*
15:17	Ju	136	*ja*
15:19	I	137	*mmh, gilt das jetzt denn immer' .. egal was wir für m und n nehmen'*
15:25	Ju	138	*ja hab ich ja hier auch* (deutet auf ↑ Abb. 3.53) *.. hab ich ja für, emm, m* 4 *und für n* 6 *genommen*
15:32	I	139	*aha, ja*
15:34	Ju	140	*und da* (deutet wiederum auf ↑ Abb. 3.53) *hat's ja eigentlich auch gepasst*
15:37	I	141	*und, emm würdest du jetzt sagen, also wenn es jetzt hier gepasst hat und dort gepasst hat,* (deutet zunächst auf den Beweis in ↑ Abb. 3.54, dann auf ↑ Abb. 3.53), *dass das dann immer gilt' ...*
15:46	Ju	142	*emm, ja*
15:50	I	143	*also würdest du dann, also würdest du dann sagen, das gilt dann allgemein'* (die Schülerin Judith nickt, 4 sec) *egal was wir jetzt für m und n einsetzen'* (5 sec)
16:03	Ju	144	*mmh, ja ..*
16:07	I	145	*und warum denkst du das'*
16:08	Ju	146	*ja, weil das ja, hier bewiesen ist* (tippt auf den Beweis in ↑ Abb. 3.54) *und hier eigentlich auch* (deutet auf ↑ Abb. 3.53)

Die Schülerin Judith führt die induktiven Prüfungen als Beweis der vorgegebenen richtigen Behauptung an und kann überdies nicht begründen, warum im Exponenten des Ergebnisses nicht das Produkt $m \cdot n$, sondern die Summe $m + n$ der Exponenten steht. Sie scheint nicht zu verstehen, was induktives Prüfen vom (beispielgebundenen) Beweisen unterscheidet.

induktives Prüfen, verstanden als Beweisen

3.5.7 Ergebnisse

In dieser Analyse wurden zwei konträre Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen vorgestellt – zum einen durch das Entdecken-Lassen der Behauptung und zum anderen durch die Vorlage einer scheinbar richtigen Behauptung mit einem im Beispiel gehaltenen vorgeblichen Beweis. Dabei sind die Potenzregeln mit Blick auf die vorigen Aufgabenstellungen und auf die Klassenstufen der Schüler nicht so schwer zu beweisen. Vom Ergebnis her betrachtet mag es von nachrangiger Bedeutung sein, dass im ersten Fall ein Schüler der 8. Klasse und im zweiten Fall eine Schülerin der 9. Klasse interviewt wurde. Es steht vielmehr zu vermuten, dass tieferliegende Gründe für die starke Diskrepanz im Beweisverhalten der beiden Schüler wirksam sind. Insgesamt gesehen erfolgten die eingangs gestellten Forschungsfragen aus vornehmlich theoretischer, praktischer und sprachlicher Perspektive (I, III, V) und konzentrierten sich auf folgende Forschungsbereiche (↑ Abs. 3.5.2):

- Entdecken mit latenter Beweisidee
- Umgang mit vorgelegten Behauptungen
- Beweisverständnis von Schülern beim beispielgebundenen Beweisen
- Interventionsmöglichkeiten des Lehrenden

Die Analyseergebnisse hierzu werden im Folgenden wie gewohnt zunächst schülerbezogen dargestellt. Im Resümé wird davon in Hinblick auf den Gesamtzusammenhang der Arbeit abstrahiert (↑ Abs. 3.5.8).

Hauptanalyse (Mike)

strukturiertes beispielgebundenes Beweisen des Schülers Mike

Die vorstehenden Interviewsequenzen zeigen eine fast parallele Entwicklung im beispielgebundenen Beweisen der zweiten Potenzregel bezüglich der Variationen von Basen und Exponenten:

schnell korrigierte falsche Vermutungen

- Zunächst vermutet der Schüler Mike an den Referenzbeispielen für $n = 2$ und $n = 5$, dass die jeweils vorangestellten Potenzterme ungleich seien. Für $n = 2$ bestätigt der Schüler Mike die Termgleichheit dann durch das bloße Ausrechnen der Potenzterme zu 144. Für $n = 5$ kommt dies nicht mehr in Frage (Verhinderung induktiven Prüfens durch *big numbers*, ↑ Abs. 1.1.2).

Suche nach jeweiliger Begründung für die Termgleichheit

- Der Schüler Mike versucht anschließend, am jeweiligen Referenzbeispiel Begründungen für die Gleichheit der Terme zu finden. Dabei bezeichnet er das Kommutativgesetz in mehreren seiner Äußerungen als *Verschiebungsgesetz*, während er unter dem Assoziativgesetz das *Klammern auflösen* und unter *in Klammern holen* oder *Klammern verschieben* eine Kombination beider Regeln versteht.

Variation von Basen und Exponenten

- Die Antworten des Schülers Mike auf entsprechende Fragen zur Variation von Basen und Exponenten lassen jeweils erkennen, dass er den Beweis der zweiten Potenzregel subjektiv realisiert hat. Der Schüler Mike hat also seine Beweisidee vom einfacheren Beispiel $n = 2$ fortschreitend zum schwierigeren Beispiel $n = 5$ weiterentwickelt und die zweite Potenzregel auf diesem Wege beispielgebunden bewiesen.

Trotz des klaren Gesprächsaufbaus wäre die situative Rekonstruktion der jeweiligen Schlussform nicht leicht, da sich der Interviewer insbesondere hinsichtlich der Vorgabe der Behauptung weit zurückgenommen hat, Fälle und Potenzregeln dadurch implizit bleiben und beim Schüler die Erfahrungen aus der Vorübung und zum beispielgebundenen Beweisen der ersten Potenzregel nachwirken. Dieses Metawissen setzt der Schüler Mike gekonnt ein, um die zweite Potenzregel allmählich mit latenter Beweisidee durch schrittweise Variation von Basiszahlen und Exponenten zu entwickeln. Die Beweisidee wird auf diesem Wege ihrer Latenz fortschreitend enthoben und formiert sich darüber zu einem beispielgebundenen Beweis.

allmähliche Entwicklung der Beweisidee

Kontrastanalyse (Judith)

Der Schülerin Judith sind zur zweiten Potenzregel nacheinander zwei Behauptungen ($a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$ und $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ für natürliche a, m und n) mit jeweiligem Beweis in Beispielzahlen vorgelegt worden. Dabei ist das Beispiel mit den Potenzen $a^4 = a^{2 \cdot 2} = a^{2+2}$ so speziell gewählt geworden, dass es nicht die allgemeingültige Regel erkennen lässt. Mit den vorgelegten, beide formal korrekt dargestellten Beweisen geht die Schülerin Judith wie folgt um:

Vorlage einer falschen und richtigen Behauptung und zugehöriger Beweise

- Der eingangs betrachtete Beweis der falschen Behauptung erscheint der Schülerin Judith logisch. Sie gibt den Beweis in eigenen Worten wieder.
- Die Schülerin Judith stellt in Frage, ob der vorgelegte Beweis der Behauptung wirklich allgemeingültig ist, da er nur an einem Beispiel dargestellt ist. Dies veranlasst die Schülerin Judith zur Prüfung der Behauptung an weiteren Beispielzahlen.
- Die Schülerin Judith verifiziert die Behauptung durch die Anwendung der Behauptung an den neuen Beispielzahlen selbst, begeht also einen Zirkelschluss.
- Erst nach Vorlage der richtigen Behauptung stößt die Schülerin Judith auf ihren Irrtum. Sie entscheidet sich zwar für die richtige Behauptung, kann diese aber des Weiteren nicht beispielgebunden begründen. Sie hält vielmehr bereits ihre induktive Prüfungen für hinreichend beweiskräftig.

Die Schülerin Judith ist auf die falsche vorgelegte Behauptung hereingefallen. Dennoch hat sie die Allgemeingültigkeit des mit Beispielzahlen geführten Beweises zunächst hinterfragt. Dies steht im Widerspruch zu ihrer zuletzt geäußerten Meinung, dass induktive Prüfungen die Behauptung bereits beweisen würden. Insofern ist sie ihrem Beweisverhalten gegenüber noch unkritischer als gegenüber der Vorlage einer Behauptung und deren Beweis.

unkritische Haltung gegenüber Behauptung, Beweis und Beweisverhalten

3.5.8 Resümé

Mit den schülerbezogenen Ergebnissen im Hintergrund sollen nun auch die Forschungsfragen aus ↑ Abs. 3.5.2 soweit als möglich beantwortet werden.

- Entdecken mit latenter Beweisidee

  Wie weit trägt das Entdecken mit latenter Beweisidee? Wie entwickeln Schüler diese zu einem (beispielgebundenen) Beweis? Es bietet sich an, hierzu ein besonderes Augenmerk auf zwischenzeitliche induktive Prüfungen zu legen, in denen die Schüler an ihrer Beweisidee arbeiten. Durch diesen Ansatz wird den Schülern ein hohes Maß an Selbstständigkeit eingeräumt. Mit welchen Schwierigkeiten haben Schüler bei diesem Zugang zum beispielgebundenen Beweisen zu kämpfen?

Zugang über das Entdecken und Prüfen mit latenter Beweisidee

Das Entdecken der Behauptung mit latenter Beweisidee erscheint aus didaktischer Perspektive für das beispielgebundene Beweisen sehr produktiv zu sein: In der zum Beweis motivierenden eigenen Entdeckung der Behauptung am (ggf. überraschenden) Resultat ist die Beweisidee schon angelegt. Im Erkennen des Allgemeingültigen am besonders gehaltenen, deduktiv hergestellten Resultat muss die Beweisidee dann nur noch subjektiv realisiert und manifestiert werden. Hat der Schüler nun eine richtige, aber noch weiter verallgemeinerungsfähige Behauptung entdeckt, stellt sich für den Experten die Frage, ob er den Schüler dazu anhalten soll, die Behauptung zu versprachlichen. Kommt es nicht dazu, können sich im Gesprächsverlauf und hinsichtlich der Analyse Unsicherheiten ergeben, um welche Ausprägung der Behauptung es jeweils geht. Lässt der Schüler – wie hier bezogen auf die Variation von Basiszahlen und Exponent – dennoch allmählich erkennen, dass er die Beweisideen des Regelverbands subjektiv realisiert hat, ist eher eine Zurückhaltung des Lehrenden angeraten.

- Umgang mit vorgelegten Behauptungen

  Durch vorgelegte Behauptungen mit vorgeblichen Beweisen soll erkundet werden, inwieweit die Schüler in den induktiven Prüfungen eine latente Beweisidee erkennen können, und wie sehr sie einer vorgeblich richtigen Behauptung Glauben schenken. Wie gehen die Schüler bei diesem Zugang mit weiteren, selbst gewählten induktiven Prüfungen um?

Zugang über vorgelegte Behauptungen und Beweise

Im Mathematikunterricht machen Schüler häufig die Erfahrung, dass sie nur wahre Behauptungen beweisen sollen. Vermittelt wird ihnen dies auch in den einschlägigen Schulbüchern. Ein eher äußerer Grund, vorgelegten Behauptungen (ggf. mit Beweis) mehr zu vertrauen, mag – wie in dieser Studie – in einer formellen Darstellung der Behauptung liegen. Durch die formelle Darstellung wird der Anspruch auf Allgemeingültigkeit betont, an der Schüler zu zweifeln nicht gewohnt sind. Zugleich vermag die formelle Darstellung manchen Schülern aufgrund dieses Anspruchs kein geeignetes semantisches Verständnis für den Beweisgang entwickeln lassen und wenig Anlass zur eigenen logisch-mathematischen Durchdringung bieten. Bei diesem Zugang zum beispielgebundenen Beweisen besteht gleichwohl das Risiko, dass die Schüler die fragliche Behauptung unvorsichtigerweise verwenden, um sie an einem Beispiel zu prüfen. Ob Schüler diesen oder jenen Weg beschreiten und es dabei auch zu einer grundsätzlichen Diskussion darüber kommt, ob der im Beispiel gehaltene vorgebliche Beweis wirklich ein Beweis der vorgelegten Behauptung ist, macht jedoch den Reiz dieses praktischen Zugangs zum beispielgebundenen Beweisen aus.

- Beweisverständnis von Schülern beim beispielgebundenen Beweisen

  Möglicherweise kann es beim vorgenannten Zugang zum beispielgebundenen Beweisen zu einer Diskussion darüber kommen, ob die präsentierte oder die eigene induktive Prüfung einen Beweis darstellt oder nicht. Hierüber kann dann auch das Beweisen an sich thematisiert werden.

unkritischere Haltung gegenüber vorlegten Behauptungen und Beweisen

Werden Behauptung und Beweis vorgelegt, gleichsam präsentiert, hat dies Auswirkungen auf die Einschätzung des Schülers hinsichtlich deren Korrektheit. Dieser ist es von den Schulbüchern gewohnt, dass Behauptungen und Beweisführungen in der Regel richtig sind. Deshalb stimmen Schüler dieser Aussage zunächst häufiger zu. Induktive Prüfungen an Beispielzahlen lassen sie dann an der Behauptung zweifeln und schließlich verwerfen oder modifzieren. Umgekehrt nehmen Schüler häufig wahr, dass induktive Prüfungen allein nicht ausreichen, um allgemeingültige Aussagen zu beweisen. Zuweilen reflektieren Schüler dann über jenen zwiespältigen Charakter des beispielgebundenen Beweisens, bei dem sich das Allgemeingültige am Besonderen der Beispiele zeigt.

häufig kritischere Haltung gegenüber eigenem induktiven Prüfen

- Interventionsmöglichkeiten des Lehrenden

  Welche Interventionsmöglichkeiten erlauben es dem Lehrenden, den Prozess des beispielgebundenen Beweisens adäquat zu begleiten? Hierbei dürfte der gewählte Zugang zum beispielgebundenen Beweisen eine Rolle spielen, hat dieser doch nicht nur inhaltliche, sondern auch kommunikative Auswirkungen.

praktische Hinweise zur Anregung beispielgebundenen Beweisens

Dem Lehrenden bieten sich eine Fülle von Interventionsmöglichkeiten während des beispielgebundenen Beweisens. Exemplarisch kann gesagt werden: Lässt der Lehrende den Schüler viel entdecken, wird er darauf achten, dass sich der Schüler nicht in seinen Entdeckungen verstrickt, sondern ihn zu aussagekräftigen Behauptungen und deren Beweise anregen. Dabei fördert er durch maßvolles Nachfragen auch das Ausdrucksvermögen des Schülers. Wichtig ist zudem, dass er den Schüler den Allgemeinheitsgrad seiner Ausführungen erklären lässt. An veränderten Beispielen oder fiktiven Bezugspartnern (Mitschüler, Eltern etc.) kann der Lehrende prüfen, ob der Schüler wirklich die Beweisidee subjektiv realisiert hat. Zugleich sollte er darauf achten, dass mehrfache induktive Prüfungen beim Schüler nicht zu einer Verfestigung algorithmischen Denkens führt.

Teil 4

Forschungsergebnisse

Überblick

In diesem Teil werden die Forschungsergebnisse der vorliegenden Arbeit behandelt. In ↑ Kap. 2.1 wurden Forschungsfragen zur empirischen Untersuchung beispielgebundenen Beweisens gestellt, welche folgenden Forschungsperspektiven zugeordnet wurden:

4.1 / 2.1.1	I	Theoretische Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen i.e.S. (in Latenz, subjektiver Realisierung und Manifestierung des beispielgebundenen Beweises als Sinnstruktur)
4.2 / 2.1.2	II	Kategoriale Perspektive	Induktives Prüfen $\leftarrow \cdots \rightarrow$ formelles Beweisen (beispielgebundenes Beweisen im Changieren zwischen induktivem Prüfen und formalem resp. formellem Beweisen)
4.3 / 2.1.3	III	Praktische Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen i.w.S. (einschließlich von Zugängen zum beispielgebundenen Beweisen, etwa des Entdeckens und des Prüfens)
4.4 / 2.1.4	IV	Sprachliche Perspektive	Beispielgebundenes Beweisen in Explikation des Allgemeingültigen am Besonderen (unter besonderer Berücksichtigung sprachlicher Aspekte)
4.5 / 2.1.5	V	Weitere Perspektiven	◦ Wahl und Anzahl der Beispiele ◦ Allgemeinheitsgrade von Behauptungen ◦ Beweisverständnis von Schülern ◦ Interventionsmöglichkeiten von Lehrenden

Die Darstellung der Forschungsergebnisse in den nachstehenden Kapiteln 4.1 – 4.5 erfolgt also entsprechend aus den genannten Forschungsperspektiven I – V heraus. Eingangs wird jeweils eine Zusammenfassung und ein Überblick geboten, bevor sich jeweils die Ergebnisse aus der Forschung, theoretische Ergebnisse und empirische Ergebnisse anschließen.

4.1 Theoretische Perspektive: Beispielgebundenes Beweisen i.e.S.

Zusammenfassung

Die noch im Ungefähren gehaltenen Definitionen beispielgebundenen Beweisens aus der Forschungsliteratur können in dieser Arbeit vermöge des Begriffs der latenten Sinnstruktur gebündelt werden. Beim beispielgebundenen Beweisen i.e.S. wird theoretisch zwischen Latenz, subjektiver Realisierung und Manifestierung des Beweises als Sinnstruktur unterschieden und dabei die Betrachterabhängigkeit und die Prozesshaftigkeit beispielgebundenen Beweisens betont. Empirisch werden eine Reihe von Indizien dafür und dagegen angeführt, dass ein Schüler einen Beweis oder dessen Teile wohl subjektiv realisiert hat.

Forschungsstand, Theorie und Praxis

Zunächst werden Teile der auf Oevermann zurückgehenden Objektiven Hermeneutik dazu verwendet, den Forschungsgegenstand des beispielgebundenen Beweisens zu fassen. Zentral ist dabei der Begriff der (latenten) Sinnstruktur, als welcher ein vorliegender Beweis im mathematikdidaktischen Kontext vom Lernenden subjektiv realisiert und manifestiert werden kann. Aus der Sichtung des weiter gefassten Forschungsstands in ↑ Kap. 1.1, 1.2 zum (beispielgebundenen) Beweisen lassen sich einige Anknüpfungspunkte für diesen Zugang finden. Die Charakterisierung des Entdeckens, Prüfens und Begründens nach Peirce in ↑ Kap. 1.3 und der Struktur von Argumenten nach Toulmin in ↑ Kap. 1.4 bahnt dann den Weg zu einer eigenen Definition beispielgebundenen Beweisens i.w.S. und i.e.S. in ↑ Kap. 1.5 und zu theoretischen Schlussfolgerungen. Hieraus lassen sich Forschungsfragen entwickeln, in denen es hauptsächlich um Indizien für und gegen die subjektive Realisierung von Teilargumenten eines Beweises durch Schüler geht. Aus den fünf Einzelfallstudien lassen sich zum beispielgebundenen Beweisen i.e.S. entsprechende empirische Ergebnisse ermitteln.

4.1.1	Ergebnisse aus der Forschung	Struktur- und Systemcharakter von Beweisen Konkretion und Abstraktion Betrachterabhängigkeit Loslösung vom Beispiel Mehrdeutbarkeit von *visual proofs*
4.1.2	Theoretische Ergebnisse	Latente Beweisideen beim Entdecken und Prüfen beispielgebundenes Argumentgefüge fortschreitende Verallgemeinerung beispielgebundenes Beweisen i.e.S.
4.1.3	Empirische Ergebnisse	sprachliche Präzisierung bei fortschreitender Verallg. subjektive Realisierung bei implizit bleibender Beh. Gefahren der Operationalisierung von Argumenten induktives Prüfen und subjektive Realisierung Manifestierung des subjektiv Realisierten

4.1.1 Ergebnisse aus der Forschung

In der eigens getroffenen Definition beispielgebundenen Beweisens i.e.S. aus ↑ Abs. 1.5.3 lassen sich einige Spuren aus dem Forschungsstand ausmachen:

Struktur- und Systemcharakter von Beweisen

Zunächst kommt der Strukturierung eines Beweises durch den Experten und ferner auch durch den Lernenden mittels Daten, Konklusionen, Regeln und Stützungen selbst eine systematisierende Funktion zu (vgl. ↑ Abs. 1.1.1). Die subjektive Realisierung des Beweises als Sinnstruktur muss sich dabei nicht unbedingt am Beispiel zeigen: Der Schüler kann übergangslos gleich zum formalen Beweisen kommen und die Sinnstruktur in mathematikhaltiger oder in formalisiert (formell) gehaltener Sprache manifestieren.

Konkretion und Abstraktion

In die hier favorisierte Richtung beispielgebundenen Beweisens weist die Ausdrucksweise von Miyazaki (2000), wenn er davon spricht, dass ein Lernender sowohl konkret als auch abstrakt denken kann, wenn er einen formalen Beweis in ikonischer Darstellung oder eine induktive Prüfung in symbolischer Darstellung führt (↑ Abs. 1.1.2). In den vorliegenden Studien geht es aber nicht darum, den Schüler in Kategorien des Beweisverhaltens oder in Verlaufstypen einzugruppieren, sondern darum, zu analysieren, wie der Schüler konkret operiert und dabei allgemein denkt (oder umgekehrt).

Betrachterabhängigkeit

Auch die Perspektive des Betrachters spielt eine Rolle: Sieht der Experte, der Lehrer oder ein Mischüler den Schüler an einem Beispiel beweisen? Mason & Pimm (1984, 287) sprechen dies noch etwas allgemein und lakonisch aus: "different ways of seeing lead to different ways of knowing" (↑ Abs. 1.2.2). Balacheff (1988, 224) zufolge wohnt die Betrachterabhängigkeit dem schillernden Charakter des *generic example* selbst inne, so dass die Erkenntnis des Allgemeingültigen am besonderen Beispiel sozial geteilt werden muss (↑ Abs. 1.2.2).

Loslösung vom Beispiel

Auch in dem in Balacheff (1988, 218) angeführten Gütekriterium des *decontextualization* scheint eine Möglichkeit durch, wie sich der Prozess der subjektiven Realisierung beschreiben lässt: "giving up the actual object, independent of their particular circumstances". Mit Wittmann (1989, 57???) gesprochen heißt dies im Kontext des operativen Beweisens, "daß sich die Handlungen von ihrer Bindung an spezielle Objekte immer mehr lösen" (↑ Abs. 1.2.3). Der Lernende muss sich von den Besonderheiten des betrachteten Beispiels also allmählich lösen, um zum als allgemeingültig Erkannten vorzudringen. Damit enthebt er den Beweis als Sinnstruktur nach und nach seiner Latenz. Diese eigene Erkenntnis des Allgemeingültigen wird der Lernende im Sinne der kommunikativen Beweisfunktion (↑ Abs. 1.1.1) verbalisieren müssen, um den Beweis zu einem sozial geteilten Gut werden zu lassen.

Mehrdeutbarkeit von visual proofs

Die Loslösung von der Besonderheit des Beispiels spielt bei einer Sonderform beispielgebundenen Beweisens eine bedeutende Rolle, dem *visual proving*. Borwein & Jörgenson (2001), Barwise & Etchemendy (1996) und Herbst (2004) haben einige theoretische Unterscheidungen getroffen und Vermutungen darüber angestellt, wie der jeweilige Betrachter mit der Mehrdeutbarkeit von Bildern filternd umgehen kann (↑ Abs. 1.2.5), was es diesem erleichtert, den Beweis als eine im Bild latent gehaltene Sinnstruktur zu realisieren.

4.1.2 Theoretische Ergebnisse

latente Beweisideen beim Entdecken und Prüfen

Für die Suche nach Indizien für oder gegen die subjektive Realisierung des Beweises als Sinnstruktur sind die theoretischen Ergebnisse zum beispielgebundenen Beweisen aus ↑ Kap. 1.3 – 1.5 aufschlussreich. Zunächst ist unter Rückgriff auf Meyer (2007) geklärt worden, wie das Entdecken, Prüfen und Begründen durch die logischen Schlussformen der Abduktion, Induktion und Deduktion im Sinne von Peirce charakterisiert werden kann. Die Zugänge des Entdeckens und Prüfens mit latenter Beweisidee (↑ Abs. 1.3.3, 1.3.5) erscheinen für das beispielgebundene Beweisen didaktisch produktiv, da sie die subjektive Realisierung des Beweises am Beispiel maßgeblich erleichtern. Der Lernende muss zeigen, dass seine am Beispiel geführten deduktiven Schlüsse zur Erzeugung des Resultats seiner Abduktion oder Induktion unabhängig von der Wahl der Beispielzahlen oder -figuren sind.

beispielgebundenes Argumentgefüge

In ↑ Kap. 1.4 wird das beispielgebundene Argumentgefüge als eine Strukturdarstellung des Beweises im Sinne von Toulmin mit Bezug auf Schwarzkopf (2000) eingeführt. Die Darstellung der latenten Sinnstruktur als beispielgebundenes Argumentgefüge dient dem Experten dazu, das subjektive Realisieren durch einen Lernenden zu verfolgen. Führt dieser ein Argument teilweise allgemein, obwohl er auf konkrete Beispielzahlen oder -figuren deutet, kann dies als Indiz für die subjektive Realisierung des Allgemeingültigen gewertet werden.

fortschreitende Verallgemeinerung

Häufig geschieht das beispielgebundene Beweisen in fortschreitender Verallgemeinerung der Behauptung. Eine dazu passende aufgefächerte Darstellung des beispielgebundenen Argumentgefüges eignet sich unter ggf. leichter Modifikation je nach erreichtem Verallgemeinerungsgrad ebenso als Folie, um den Prozess des Lernenden in allmählicher Ablösung von den betrachteten oder vorgestellten Beispielinstanzen zu verfolgen. Dabei kann es sein, dass der Lernende ein Argument als Teil eines Argumentgefüges in einer allgemeineren Gültigkeit noch nicht so hinreichend subjektiv realisiert hat, wie es der Experte sieht. Auch kann der Lernende mit resultierender falscher Behauptung zu weitgehend verallgemeinern. Er muss die Grenzen der Allgemeingültigkeit suchen und finden.

beispielgebundenes Beweisen i.e.S.

In ↑ Kap. 1.5 ist der Oevermannsche Terminus der latenten Sinnstrukturen als zentraler Begriff der Objektiven Hermeneutik genuiner Bestandteil des beispielgebundenen Beweisens i.e.S. und damit ausnahmsweise des Forschungsgegenstands selbst. Aus Sicht eines beobachtenden Experten kann der Beweis als Sinnstruktur für einen Lernenden latent sein, wenn dessen Argumente noch im Besonderen der Beispiele gehalten erscheinen. Der Lernende realisiert den Beweis subjektiv, wenn er am Besonderen der Beispiele das Allgemeingültige erkennt und sich damit von den Besonderheiten der Beispiele allmählich löst. Der Lernende manifestiert schließlich den Beweis, wenn er seine Argumente so überzeugend versprachlicht, dass ein beobachtender Experte den Eindruck erhält, dass der Lernende den Beweis als latente Sinnstruktur subjektiv realisiert hat. Der Lernende muss den Beweis dabei weder in formalisierter (formeller) Sprache noch in durchweg allgemein gehaltener (formaler) Umgangssprache führen.

4.1.3 Empirische Ergebnisse

teilweise subjektive Realisierung und Manifestierung

Sehr häufig lässt sich eine mehr oder weniger vollständige subjektive Realisierung von Teilen des betrachteteten Beweises beobachten. Dies hängt auch davon ab, in wie weit der Lernende sprachlich so versiert ist, dass er jedes Teilargument adäquat formulieren kann. Wenn es dem Lernenden gelingt, das Datum und/oder die Konklusion allgemein zu formulieren und ggf. auch die Regel und die unterliegende Stützung eines Arguments zu nennen, kann dies als ein Indiz für die subjektive Realisierung des Arguments gewertet werden. Dabei ist darauf zu achten, dass der Lernende nicht nur allgemein formuliert, um die gefühlten Erwartungen des Lehrenden hinsichtlich bestimmter Sprechweisen zu erfüllen, ohne allgemein zu denken. Eine abstrakt gehaltene Formulierung des Beweises ist nämlich kein alleiniges Kriterium für die subjektive Realisierung des Allgemeingültigen.

sprachliche Präzisierung bei fortschreitender Verallgemeinerung

Es hat sich gezeigt, dass die Versprachlichung des als allgemeingültig Vermuteten oder Erkannten dessen subjektive Realisierung fördert und umgekehrt. Ein vom Lehrenden begleiteter Prozess der fortschreitenden Verallgemeinerung einer Behauptung trägt im Verein mit einer damit einhergehenden sprachlich-begrifflichen Präzisierung zur allmählichen subjektiven Realisierung des Allgemeingültigen durch den Schüler bei. Dies ist von der Anlage und Weiterentwicklung der Aufgabenstellung beim beispielgebundenen Beweisen abhängig und kann durch die Auswahl jeweils passender Beispiele beeinflusst werden.

subjektive Realisierung bei implizit bleibender Behauptung

Wird die Behauptung im Rahmen des beispielgebundenen Beweisens zu lange nicht explizit thematisiert, etwa weil der Schüler die Behauptung selbst noch entdecken soll, kann dies der subjektiven Realisierung des Allgemeingültigen abträglich sein: Der Schüler mag dann zwar schon (beispielgebundene) Teilargumente führen können, allerdings noch in fehlendem Bezug auf eine Behauptung. Insofern bleibt der Beweis vorerst latent. Dass die Behauptung und deren Fraglichkeit während des beispielgebundenen Beweisens thematisiert werden sollte, zeigt sich auch nicht nur, aber insbesondere dann, wenn fortschreitend verallgemeinert wird und der Schüler in der Gefahr steht, einzelne Teilargumente zu vergessen, Grenzen ihrer Allgemeingültigkeit nicht adäquat einzuschätzen, oder der Schüler sich an einem anderen Allgemeinheitsgrad der Behauptung orientiert als dies der Betrachter tut.

Gefahr der Operationalisierung von Argumenten

Die Operationalisierbarkeit von Argumenten scheint eine Verfestigung induktiven Prüfens bis hin zu einer Algorithmisierung eher zu begünstigen, als dass sie dazu beiträgt, den Beweis als Sinnstruktur subjektiv zu realisieren. Es besteht nämlich die Gefahr, dass dem Schüler das Argument durch dessen Operationalisierung wieder zunehmend latent wird. Es erfüllt dann eher eine Art Kalkülaspekt oder Anwendungsaspekt.

induktives Prüfen und subjektive Realisierung

Auch induktive Prüfungen können zur subjektiven Realisierung beitragen, wenn sie etwa den Schüler darin bestärken, die an Beispielen bestätigte Behauptung zu verallgemeinern, und der Schüler dadurch möglicherweise eine mehr strukturelle Sicht gewinnt. Ein ähnlicher Effekt kann eintreten, wenn der Schüler eine schwächere Behauptung entdeckt und ihn diese Entdeckung dann zu einer Verallgemeinerung der Behauptung und zum weiteren Beweisen veranlasst.

4.2 Kategoriale Perspektive: Induktives Prüfen ⟷ formelles Beweisen

Zusammenfassung

Das beispielgebundene Beweisen kann als Oberbegriff für bestimmte Sonderformen, etwa das operativen Beweisen oder das *visual proving*, verwandt werden. Mehr der theoretischen Fundierung beispielgebundenen Beweisens dient die Charakterisierung induktiven Prüfens und die Behandlung induktiven Prüfens mit latenter Beweisidee. Empirisch lassen sich bei Schülern stärker und schwächer changierende Beweisverläufe ausmachen. Wenngleich eine Reihe von Strategien zur Vermeidung induktiven Prüfens dem beispielgebundenen Beweisen förderlich ist, besitzt das induktive Prüfen als integraler Bestandteil beispielgebundenen Beweisens auch seine Vorzüge und verhilft dem beispielgebundenen Beweisen auch gegenüber dem formalen Beweisen zu seiner Berechtigung.

Forschungsstand, Theorie und Praxis

In der vorliegenden Arbeit geht es nicht um eine Klassifikation von Beweisformen und einer entsprechenden Eingruppierung von Schülern, sondern um das beispielgebundenen Beweisen als Prozess. Gleichwohl bietet der Forschungsstand (↑ Kap. 1.1, 1.2) eine reiche Auswahl an Abstufungen vom induktiven Prüfen bis hin zum formalen resp. formellen Beweisen. Das induktive Prüfen und das formale Beweisen erscheinen als Pole, zwischen denen Schüler beispielgebundenen beweisen. Wenn man das induktive Prüfen mit latenter Beweisidee betrachtet (↑ Abs. 1.3.3), welches sich sehr schnell zum beispielgebundenen Beweisen wandeln kann, erübrigt sich eine scharfe Grenzziehung. Vielmehr wird zwischen einem auf die Realisierung und Manifestierung des Beweises bezogenen, theoretischen beispielgebundenen Beweisen i.e.S. und einem die induktiven und abduktiven Zugänge thematisierenden, praxisrelevanten beispielgebundenen Beweisen i.w.S. unterschieden (↑ Abs. 1.5.3). In den Einzelfallstudien (↑ Kap. 3.1 – 3.5) wird hauptsächlich die Verfestigung induktiven Prüfens und deren Vermeidung und ein sich schnell formalisierender Beweisgang untersucht, changierende Beweisverläufe nachgezeichnet und dabei jeweils die Rolle der Beispiele geklärt.

4.2.1	Ergebnisse aus der Forschung	formales und formelles Beweisen Kategorisierungen des Beweisverhaltens v. Schülern "need for further inductive checks"; *big numbers* Prozesshaftigkeit beispielgebundenen Beweisens Abgrenzungsproblematik zum induktiven Prüfen
4.2.2	Theoretische Ergebnisse	Modellierung induktiven Prüfens induktives Prüfen mit latenter Beweisidee Allgemeingültigkeit bei fortschreitender Verallg. beispielgebundenes Beweisen als Oberbegriff
4.2.3	Empirische Ergebnisse	stark changierende Beweisverläufe schwach changierende Beweisverläufe Vorzüge und Nachteile induktiven Prüfens Strategien zur Vermeidung induktiven Prüfens

4.2.1 Ergebnisse aus der Forschung

formales und formelles Beweisen

An der Unterscheidung zwischen einem formellen (formalisierten) und einem formalen Beweis wird zunächst deutlich, dass der Nachweis der Allgemeingültigkeit einer Behauptung nicht notwendigerweise einer formalisierten Sprache bedarf. In beiden Fällen dominiert jedoch die verifikative Beweisfunktion (↑ Abs. 1.1.1), was den formellen resp. formalen Beweis gegenüber induktiven Beweiszugängen auszeichnet.

Kategorisierungen des Beweisverhaltens von Schülern

Mehrere quantitative Studien ziehen damit eine Grenze zwischen einem vornehmlich induktiv und einem vornehmlich deduktiv geprägten Beweisverhalten von Schülern, so etwa MARTIN & HAREL (1989) und COE & RUTHVEN (1994) (↑ Abs. 1.1.2). Wie Zuschreibungen wie *inductive thinker* und *deductive thinker* von WILLIAMS (1979) zeigen, ist dann der Schritt zu Kategorisierungen oder Kompetenzniveaus von Schülern nicht weit.

"need for further inductive checks", big numbers

Aus den referierten Studien lassen sich jedoch auch einige Ergebnisse ziehen, die für die vorliegende Arbeit relevant sind: Etwa haben FISCHBEIN & KEDEM (1982) beobachtet, dass bei einigen Schülern "the need for further inductive checks after proving" besteht, so dass sich hieraus eine Berechtigung beispielgebundenen Beweisens in dem Sinne ergibt, dass induktive Prüfungen nicht nur als Notbehelfe gesehen werden (↑ Abs. 1.1.2). Auch die Idee, den Schülern Beispiele vom Typ *big number* vorzulegen, so dass das induktive Prüfen an großen (resp. kleinen, unhandlichen) Beispielzahlen nicht lohnenswert erscheint, stammt aus quantitativ geprägten Studien.

Prozesshaftigkeit beispielgebundenen Beweisens

Mehr die Prozesshaftigkeit des beispielgebundenen Beweisens i.w.S. betont BALACHEFF (1988), der etwa von einem "movement to conceptual proof" spricht, ausgehend vom *crucial experiment* über das *generic example* hin zum *thought experiment*. Auch RECIO & GODINO (2001) legen Übergänge zwischen einzelnen Beweiskategorien nahe. Dass es sinnvoller ist, vom beispielgebundenen Beweisen statt von beispielgebundenen Beweisen zu sprechen, legen also auch bereits bestehende Studien nahe (↑ Abs. 1.1.2).

Abgrenzungsproblematik zum induktiven Prüfen

Zuvor bieten Einteilungen von LAKATOS (1978) wie in *preformal proving* und *formal proving*, die konkreten Beweise von STEIN (1981), die Vervollständigung induktiver Beweise nach BESUDEN (1979) genügend Diskussionsstoff, um die Abgrenzungsproblematik des Beweisens zum induktiven Prüfen deutlich werden zu lassen. SEMADENI und ihm nachfolgende Autoren siedeln *premathematical proofs* resp. *action proofs* zwischen induktivem Prüfen und formellem Beweisen an (↑ Abs. 1.2.1). Ebenso halten es WITTMANN & MÜLLER (1988) und BLUM & KIRSCH (1991) mit den inhaltlich-anschaulichen Beweisen (↑ Abs. 1.2.3). An der Darstellung des beispielgebundenen Begründens nach GOLDBERG (1992) lässt sich kritisieren, dass das Bearbeiten möglichst vieler Beispiele nicht automatisch dazu führt, dass die Schüler beispielgebunden begründen. Es kann auch zur Verfestigung induktiven Prüfens führen. Die Einteilung beispielgebundenen Beweisens in Niveaustufen zur Beurteilung von Schülern macht deutlich, dass GOLDBERG (1992) das beispielgebundene Begründen nicht primär als Prozess sieht, sondern als Methode, aber gleichwohl als eigenständige Beweisform.

4.2.2 Theoretische Ergebnisse

Charakterisierung induktiven Prüfens

Das Prüfen per Induktion kann Meyer (2007) zufolge durch den Peirceschen Dreischritt modelliert werden. Dabei zeigt sich, dass der induktiven Bestätigung eines Gesetzes an einem neuen Fall zum einen die deduktive Vorhersage für diesen neuen Fall und zum anderen die abduktive Generierung des hypothetischen Gesetzes vorausgeht (↑ Abs. 1.3.4). Insofern ist der Induktion als solcher bloß die enumerative Bestätigung von bereits unterstellten Gesetzen zuzuschreiben. Manche Lernende sehen dann in der an weiteren Fällen wiederholten induktiven Bestätigung des Gesetzes fälschlicherweise schon eine theoretische Sicherung dessen Wahrheitsgehalts und berufen sich dabei auf das naturkundlich anmutende und unmathematische Motto "was einmal (zweimal, dreimal ...) gilt, gilt immer". Dies rührt von der schulmathematischen Erfahrung her, dass viele mathematische Behauptungen durchaus korrekt sind, wenn die jeweilige Behauptung schon an einigen Fällen bestätigt, aber eben noch nicht bewiesen wurde.

induktives Prüfen mit latenter Beweisidee

Durch das induktive Prüfen mit latenter Beweisidee lässt sich ein Übergang zwischen induktivem Prüfen und formalem (resp. formellem) Beweisen theoretisch beschreiben. Der Beweis ist als Sinnstruktur schon in der induktiven Prüfung der Behauptung angelegt. Daher lässt sich das induktive Prüfen mit latenter Beweisidee leicht zum beispielgebundenen Beweisen wandeln (↑ Abs. 1.3.5). Beim induktiven Prüfen ohne latente Beweisidee muss die Behauptung hingegen auf anderem Wege bewiesen werden. Dabei liegen diese direkten Zugänge meistens näher und bedürfen weniger der Anleitung. Die Lücke zwischen diesem induktiven Prüfen und der formalen Beweisführung ist aber größer (↑ Abs. 1.3.4).

Allgemeingültigkeit bei fortschreitender Verallgemeinerung

Veränderungen in der Beweisstruktur bei fortschreitender Verallgemeinerung können dazu führen, dass der Lernende erneute induktive Prüfungen durchführt, um die allgemeinere Behauptung an weiteren Fällen zu prüfen (↑ Abs. 1.4.4). Bestimmte Regeln können sich in einer allgemeineren Anwendung als teilweise ungültig herausstellen. Insofern können schon leicht verallgemeinerte Aussagen die Überzeugung eines Lernenden destabilisieren oder auch zur weiteren Ausdifferenzierung der jeweiligen Beweisstruktur anregen.

beispielgebundenes Beweisen als Oberbegriff

Im Changieren zwischen induktivem Prüfen und formalem Beweisen drückt sich das prozessuale Verständnis beispielgebundenen Beweisens aus, welches in der Stellung etwa derjenigen inhaltlich-anschaulicher Beweise von Wittmann & Müller (1988) zwischen *experimentellen 'Beweisen'* und formell gehaltenen Beweisen entspricht. In dieser klassischen, aber schon dynamisch veränderten Betrachtungsweise braucht noch nicht zwischen einem beispielgebundenen Beweisen i.e.S. und i.w.S. gemäß ↑ Abs. 1.5.3 differenziert zu werden, da es dabei weder primär um den Beweis als latente Sinnstruktur geht noch um darauf ausgerichtete, theoretisch reflektierte Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen. Das beispielgebundene Beweisen wird gleichwohl als Sammelbegriff für eine Vielzahl ähnlicher Termini verwandt, wie sie zu Beginn des ↑ Kap. 1.2 aufgelistet werden. Insbesondere konnte theoretisch herausgearbeitet werden, dass sich das beispielgebundene Beweisen als Oberbegriff für *operatives Beweisen* und *visual proving* eignet (↑ Abs. 1.2.3, 1.2.4).

4.2.3 Empirische Ergebnisse

stark changierende Beweisverläufe

Der changierende Prozess zwischen induktivem Prüfen und formalem resp. formellem Beweisen kann zum Teil sehr deutlich ausgeprägt sein. Manchmal ist für den forschenden Beobachter während des beispielgebundenen Beweisens eines Schülers und sogar in der rückblickenden Analyse des Beweisprozesses nicht sicher entscheidbar, ob beim Schüler ein eher induktives oder deduktives Beweisverhalten vorherrscht, und zwar je situativ bei dem Beweis einer Behauptung oder auch auf den Beweisprozess insgesamt bezogen.

schwach changierende Beweisverläufe

Bei manchen Schülern ist ein Changieren zwischen induktivem Prüfen und formalem resp. formellem Beweisen hingegen wenig ausgeprägt. Dies kann vielfältige Gründe haben: Möglicherweise ist die Aufgabenstellung zu leicht oder ohne besondere Tiefe, als dass sich beim Schüler eine übergangsprovozierende Unsicherheit einstellen kann. Auch können dem Schüler etwaige Vorübungen die Beweisidee schon hinreichend vertraut gemacht haben, so dass er diese gleich formal darstellt. Möglicherweise greift der Schüler aus prinzipiellen Gründen oder aus einem schon entwickelten Hang zur Abstraktion heraus zu formalen Beweisen. Umgekehrt können entsprechende Gründe dazu führen, dass ein Schüler bloß im induktiven Prüfen verharrt und über dieses Stadium kaum hinausfindet.

Vorzüge und Nachteile induktiven Prüfens

Die Wiederholung von einmal durchgeführten und bewiesenen Prozeduren und Operationen gibt manchen Schülern die notwendige Routine, um sich der behaupteten Aussage zu vergewissern. Auch ein Bedürfnis nach der Konkretisierung im induktiven Prüfen mag Schüler dazu bewegen, die nach einem formalen gehaltenen Beweis unfraglich gewordene Behauptung induktiv zu bekräftigen. Die Operationalisierung von Regeln soll einmal eingeführte und bewiesene Begründungsschritte beschleunigen und formalisieren. Bei ihrer bloßen Anwendung durch den Schüler kann der Interpret jedoch nicht sicher sein, ob der Schüler wirklich subjektiv realisiert hat, warum die jeweilige Regel (immer noch) gilt. Auch besteht häufig die Gefahr, dass die Operationalisierung von Regeln zu einer Algorithmisierung bis hin zu einer Verfestigung des induktiven Prüfens unter Verlust der eigentlichen Gründe führt und der Schüler damit das eigentliche Ziel verfehlt, beispielgebunden zu beweisen. Dies ist auch der Hauptkritikpunkt an der These von Goldberg (1992), nach der es nur individuell verschieden viele Beispiele bedürfe, bis auch der letzte Schüler beispielgebunden begründet hat.

Strategien zur Vermeidung induktiven Prüfens

Der Neigung zum Konkretismus induktiven Prüfens kann durch situativ und zur Aufgabenstellung passende paradigmatische Beispiele (resp. *generic examples*) begegnet werden. Bedingt vorstellbare Beispiele lassen den Schüler zwar auch noch induktiv prüfen, aber zugleich auch die zu imaginierende Struktur des Beweises hervortreten. Vorbeugend wirkt auch, dem Schüler weder den Gebrauch von Rechen- und Messwerkzeugen noch Legetechniken zu erlauben. Auf einer mehr algebraischen Ebene bedeutet dies, den Schüler am Ausrechnen von Termen zu hindern oder in figuralen oder geometrischen Darstellungen etwa das Abzählen zu vermeiden. Mehr noch als der Lehrende muss der Forschende dabei die Balance zwischen einem Gewährenlassen und Intervenieren halten.

4.3 Praktische Perspektive: Beispielgebundenes Beweisen i.w.S.

Zusammenfassung

Es gibt in der Forschungsliteratur eine Bandbreite von didaktischen Zugängen zum beispielgebundenen Beweisen, welche von vorgelegten Beweisen bis zum freien Entdecken von Behauptungen reichen. In theoretischer Differenzierung wird vom beispielgebundenen Beweisen i.w.S. gesprochen, wenn mehr die didaktischen Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen i.e.S. gemeint sind, zu denen insbesondere das Entdecken und das Prüfen mit und ohne latente(r) Beweisidee zu zählen sind. Dabei wird der Übergang vom Entdecken und Prüfen mit latenter Beweisidee diskutiert und mit anderen Konzepten, etwa dem Übergang von Beweisfindung zur Beweisführung, verglichen. In der praktischen Erprobung wurde der Einsatz figuraler Darstellungen, offen gehaltener Beweisaufgaben, beweisvorbereitender Übungen sowie vorgelegter Behauptungen und Beweise untersucht und dabei die Zugänge des Entdeckens, Prüfens und Begründens gewählt.

Forschungsstand, Theorie und Praxis

Unter dem beispielgebundenen Beweisen i.w.S. werden in dieser Arbeit Zugänge des Entdeckens, Prüfens und Begründens verstanden, die den Schüler zum beispielgebundenen Beweisen i.e.S. hinführen sollen. Dies ist vor allem für die praktische Durchführung der Studien und für die Unterrichtswirklichkeit relevant. Die Fachdidaktiker geben verschiedene konkrete didaktische Empfehlungen, um Schüler auf das beispielgebundene Beweisen vorzubereiten (↑ Kap. 1.1, 1.2). Mit Schülern können etwa Vorübungen getätigt, ihnen Beweise zur Beurteilung vorgelegt, sie zum Rückwärtsarbeiten ermutigt, Behauptungen mit und ohne latente(r) Beweisidee entdeckt oder geprüft werden usw.. Theoretisch wird besonders intensiv diskutiert, wie Schüler von der Beweisfindung zur Beweisführung gelangen (↑ Kap. 1.3 – 1.5). In den Einzelfallstudien zeigen sich Vor- und Nachteile der einzelnen Beweiszugänge (↑ Kap. 3.1 – 3.5).

4.3.1	Ergebnisse aus der Forschung	Beweiszugänge motivierende Beweisfunktionen vorgelegte Beweise didaktisch motivierte Beweiszugänge Methoden beispielgebundenen Beweisens
4.3.2	Theoretische Ergebnisse	Beispielgebundenes Beweisen i.w.S. Entdecken und Prüfen mit latenter Beweisidee Lücke zwischen Beweisfindung und Beweisführung Repräsentationsformen beim Beweisen Abgrenzung z. beispielgebundenen Beweisen i.e.S.
4.3.3	Empirische Ergebnisse	Einsatz figuraler Darstellungen offene Aufgabenstellungen u. entdeckende Zugänge Rückwärtsarbeiten beweisvorbereitende Übungen vorgelegte Behauptungen und Beweise

4.3.1 Ergebnisse aus der Forschung

Beweiszugänge motivierende Beweisfunktionen

Die verschiedenen Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen können durch die verifikative, explanative, entdeckende, systematisierende und kommunikative Beweisfunktion motiviert werden. So steht die verifikative Beweisfunktion bei formalen resp. formellen Beweisen vornehmlich im Vordergrund, wenn es nach Hanna (1990) um das *proving that* geht. Werden induktiv durchsetzte Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen bevorzugt und damit auch die Frage nach dem *proving why* gestellt, kommt der explanativen Beweisfunktion Bedeutung zu. Beim Entdecken von Behauptungen ist die entdeckende Beweisfunktion wirksam, zumal bei Zugängen zum beispielgebundenen Beweisen wie dem Entdecken mit latenter Beweisidee. Das beispielgebundene Beweisen genügt überdies auch der kommunikativen Beweisfunktion insofern, als dass das Manifestieren des subjektiv realisierten Beweises einen sozial geteilten Akt darstellt, der auf den Beweisführenden zurückwirkt. Schließlich trägt das mehrmalige (beispielgebundene) Beweisen auch der systematisierenden Beweisfunktion Rechnung, als dass die Sinnstruktur des Beweises den Ausschnitt eines Systems von Begriffen, Axiomen, Definitionen und Sätzen bildet, welches das Gebäude der mathematischen Wissenschaft konstitutiert (↑ Abs. 1.1.1).

vorgelegte Beweise

In der Diskussion um die Fraglichkeit einer Behauptung bei Edwards (1998) kommt der vorgelegte (beispielgebundene) Beweis ins Spiel. Bei diesem Zugang soll der Lernende den (beispielgebundenen) Beweis nachvollziehen und Stellung beziehen, ob es sich wirklich um einen Beweis handelt. Manche Autoren schließen aus den Antworten der Befragten dann jedoch auf deren Beweisverhalten, das dann mehr oder weniger induktiv oder deduktiv klassifiziert wird. Betrachtet man das beispielgebundene Beweisen jedoch als Prozess, lässt sich das Beweisverhalten, wie es etwa von Balacheff (1988) beobachtet wird, eher als situationsbezogen deuten (↑ Abs. 1.1.1).

didaktisch motivierte Beweiszugänge

In einigen weiteren Studien werden auch didaktische Empfehlungen gegeben, wie Lernende an das beispielgebundene Beweisen herangeführt werden können. Dahinter stehen zum Teil einige weitergehende Modelle und Theorien, die an dieser Stelle genannt werden: Etwa liegt den *action proofs* des prämathematischen Beweisens das relativ allgemein gehaltene *schema permanence principle* (SPP) von Semadeni (1981a) zugrunde (↑ Abs. 1.2.1). Das operative Beweisen nach Wittmann (1985) gründet auf dem *operativen Prinzip der Mathematikdidaktik* (↑ Abs. 1.2.3), und Wittmann & Müller (1988) sprechen von einem "elementarmathematischen Forschungsprogramm für den Mathematikunterricht", wenn es ihnen um die Schaffung von Rahmenbedingungen für ihre *inhaltlich-anschauliche Beweise* geht (↑ Abs. 1.2.3). Das *generic proving* behandeln Mason & Pimm (1984) unter Rückgriff auf sprachliche und inhaltliche Aspekte des *generic example* (↑ Abs. 1.2.2).

Methoden beispielgebundenen Beweisens

Dem *generic example-assisted proof* von Movshovitz-Hadar (1988) liegt die sogenannte *stimulated responsive (S-R-)Methode* zugrunde. Diese Methode stellt einen entdeckenden Zugang dar, um die Schüler zum beispielgebundenen Beweisen am generischen Beispiel zu motivieren (↑ Abs. 1.2.2). Zudem tritt das beispielgebundene Begründen von Goldberg (1992) mit dem Anspruch auf, eine einsatzfähige Methode zu sein, die sich die Lernenden aneignen (↑ Abs. 1.2.5).

4.3.2 Theoretische Ergebnisse

beispielgebundenes Beweisen i.w.S.

Für die theoretische Fassung des beispielgebundenen Beweisens i.w.S. sind die Schlussformen Abduktion, Induktion und Deduktion und daraus abgeleitete Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen i.e.S. relevant.

Entdecken und Prüfen mit latenter Beweisidee

Das Entdecken und Prüfen mit latenter Beweisidee eröffnet dem Experten Meyer (2007) zufolge didaktisch produktive Möglichkeiten zur Hinführung des Lernenden zum beispielgebundenen Beweisen (↑ Abs. 1.3.3, 1.3.5). Dadurch gelingt es dem Lernenden auch leichter, die Lücke zwischen Beweisfindung und Beweisführung zu schließen.

Lücke zwischen Beweisfindung und Beweisführung

Zur Überwindung dieser Lücke wird von Pedemonte (2007) in Rückgriff auf Boero et al. (1996) der Begriff der *cognitive unity* eingeführt (↑ Abs. 1.5.2). In der schon diskussionswürdigen Beschreibung von Abduktion, Induktion und Deduktion durch Toulmin-Schemata nach Pedemonte (2007) lässt sich in der sogenannten *cognitive unity* zwischen Beweisfindung und Beweisführung der in der vorliegenden Arbeit verwendete Zugang des Entdeckens resp. Prüfens mit latenter Beweisidee selbst lesen. Dieses kann sich leichter mit als ohne latente(r) Beweisidee zum beispielgebundenen Beweisen wandeln.

Repräsentationsformen zum Beweisen

Welche Repräsentationsformen dem Lernenden angeboten werden, um beispielgebunden zu beweisen, hat mittelbar Auswirkungen auf die Beweisstruktur und damit auf die beispielgebundenen Argumentgefüge (↑ Abs. 1.4.4). Nicht immer ist der symbolisch beschriebene Beweis die einfacher strukturierte oder naheliegendere Alternative zum ikonisch oder enaktiv durchgeführten Beweis, selbst wenn er am Beispiel erfolgt. Vielmehr lassen sich Darstellungsmittel häufig nutzen, um den Lernenden nach einer Einführung in deren Gebrauch direkt beispielgebunden beweisen zu lassen, ohne auf das Variablenkalkül zurückgreifen zu müssen.

Abgrenzung zum beispielgebundenen Beweisen i.e.S.

Die theoretische Differenzierung zwischen dem beispielgebundenen Beweisen i.e.S. und i.w.S. wurde getroffen, um die didaktischen Zugänge im Entdecken und Prüfen vom eigentlichen beispielgebundenen Beweisen in der subjektiven Realisierung der Sinnstruktur zu trennen. Abduktive und induktive Zugänge sind wichtig, damit der Lernende anfangs etwa die Behauptung selbst entdekken oder später durch induktive Prüfungen bestätigen oder widerlegen kann. Als besonders motivierend gilt dabei das Entdecken, während das induktive Prüfen zum Austesten vermuteter Verallgemeinerungen der Ursprungsbehauptung verwendet werden kann.

4.3.3 Empirische Ergebnisse

Die empirischen Ergebnisse zeigen, dass ganz unterschiedliche Verläufe beispielgebundenen Beweisens möglich sind, welche an dieser Stelle aber nicht typologisiert werden, sondern inhaltlich reflektiert werden sollen. Die Verlaufsbetrachtungen hängen sehr vom Schüler und dessen Klassenstufe, der gewählten Aufgabenstellung und des Zugangswegs zum beispielgebundenen Beweisen i.e.S. ab. In der Gesamtbetrachtung der Einzelfallstudien lässt sich hinsichtlich dieser Zugänge Folgendes festhalten:

Einsatz figuraler Darstellungen

Bei Aufgabenstellungen mit rein arithmetischen Darstellungen können Platzhalter oder Variablenzeichen dazu verwendet werden, damit sich der Schüler von der Betrachtung von Beispielzahlen allmählich löst und das Allgemeingültige im Besonderen der Beispiele erkennt. Als weniger günstig hat sich der Einsatz von Darstellungsmitteln herausgestellt, wenn diese erst noch erlernt werden müssen und damit viel Aufmerksamkeit an die Übertragung zwischen Arithmetik und figuralen Darstellungen binden. Gelingt diese Übertragung nur schematisch, kann das Operieren an den figuralen Darstellungen die Beweisstruktur dauerhaft verdeckt halten. Dies lässt sich insbesondere für mathematisch schwächere Schüler sagen. Da die figuralen Darstellungen deutungsoffen gehalten sind, ist die Gefahr des Missverstehens recht groß. Ständig besteht die Notwendigkeit zur Übertragung in den arithmetischen Kontext. Dieses kontextuelle Mitverstehen erfordert einen versierten Umgang mit der Sprache.

offene Aufgabenstellungen und entdeckende Zugänge

Offene Aufgabenstellungen, in denen eine Vielzahl von Entdeckungen mit und ohne latente(r) Beweisidee möglich ist, lassen den Entdeckungsprozess floride und zeitintensiv werden. Diese Erfahrung lässt sich auch unter Experten etwa an zu entdeckenden Behauptungen der Hochschulmathematik machen. Abduktionen können sich als falsch herausstellen, Schüler können erschöpfen und demotiviert werden, aber auch zur Suche nach einer weiteren Behauptung angeregt sein. Ist bereits viel Kraft für die Entdeckung der Behauptung aufgewandt worden, kann die Motivation zur Beweisführung im Prüfen der Behauptung erschöpft sein. Auch besteht möglicherweise gar kein Beweisbedürfnis. In einem solchen Stadium zeigt sich die Überlegenheit des Entdeckens mit latenter Beweisidee, da der Schüler beim Entdecken der Behauptung am Beispiel schon unwissentlich bewiesen hat und dies bloß noch subjektiv realisieren und manifestieren muss.

Rückwärtsarbeiten

Mit dem Rückwärtsarbeiten von der behaupteten Konklusion zu den Daten bietet sich ein besonderer Zugang an, der *a priori* ein größeres Beweisverständnis herbeiführen kann. Abhängig ist dies von der jeweiligen Aufgabenstellung (etwa Winkelberechnungen im geometrischen Kontext) und damit insbesondere von der jeweiligen mehrgliedrig-mehrschichtigen Beweisstruktur. Der Schüler kann wählen, ob er von der im Beispiel oder von der allgemein gehaltenen Behauptung als Konklusion des Argumentgefüges ausgeht. Der Schüler führt dabei im Grunde schrittweise Abduktionen, so dass es dafür an sich mehr Orientierung von Seiten des Lehrenden bedarf. Die Favorisierung des Rückwärtsarbeitens kann jedoch induktive Prüfungen, zu denen der Schüler beim Vorwärtsarbeiten in manchen Aufgabenstellungen verleitet sein kann, vermeiden helfen. Das Vor- und Rückwärtsarbeiten kann auch gleichzeitig geschehen, so dass sich der

Schüler die Beweisstruktur von verschiedenen Seiten erarbeitet. Das Rückwärtsarbeiten konnte auch im Rahmen beispielgebundenen Begründens nach GOLDBERG (1992) empfohlen werden. An ihrem Aufgabenbeispiel des Umfangswinkel-Mittelpunktswinkelsatzes konnte der Vorzug des Rückwärtsarbeiten bestätigt werden.

beweisvorbereitende Übungen

Der Nutzen der von GOLDBERG (1992) empfohlenen beweisvorbereitenden Übungen konnte ebenfalls bestätigt werden. Diese ermöglichen es etwa, dem Schüler Hilfsmittel, Begriffe und Definitionen zu vermitteln, auf einfacherem Niveau Beweise zu führen, den Schüler in das beispielgebundene Beweisen einzuführen, ihn Teilargumente am Beispiel vorab führen zu lassen und daran sein Beweisverhalten vorab zu studieren. Im Forschungsrahmen lassen sich ausgedehnte Vorübungen kritisieren, weil sie den weiteren Verlauf beispielgebundenen Beweisens mitbestimmen und man sie strenggenommen auch als Vorstudien ansehen müsste. Aus einer mehr praktischen Sicht handelt es sich schlicht um eine Möglichkeit, das beispielgebundene Beweisen vorzubereiten und dabei einen passenden Beweiszugang auszuwählen.

vorgelegte Behauptungen und Beweise

Vorgelegte Behauptungen und deren beispielgebundene Beweise halten den Gesprächsrahmen recht eng, haben einen gewissen Testcharakter und dienen eher dazu, dass der Schüler den Beweis nachvollzieht, versteht und beurteilt. Es hat sich gezeigt, dass dabei das (beispielgebundene) Beweisen auch an sich thematisiert wird. Durch den mehr dokumentarischen Charakter vorgelegter Beweise dürfte sich dieser Beweiszugang gut für den Mathematikunterricht eignen. Dadurch, dass dieser Zugang aber weniger zur individuellen Tätigkeit beispielgebundenen Beweisens anregt, lässt sich auch weniger über das Beweisverhalten von Schülern erfahren.

4.4 Sprachliche Perspektive: Explikation des Allgemeinen am Besonderen

Zusammenfassung

Die kommunikative Beweisfunktion darf zumal beim beispielgebundenen Beweisen nicht unterschätzt werden. Darauf weisen bereits einige frühe Arbeiten der Forschungsliteratur hin. Als besonders interessant ist die Rolle der Sprache beim operativen Beweisen und beim *visual proving* als Sonderformen beispielgebundenen Beweisens einzuschätzen. Theoretisch gesehen bedarf das Manifestieren des subjektiv Realisierten beim beispielgebundenen Beweisen i.e.S. der Sprache. Dabei kann Allgemeines konkret gesagt werden und umgekehrt, ohne dass dies als alleiniges Indiz für oder gegen die subjektive Realisierung des Allgemein(gültig)en gelten kann. Eine unterrichtspraktische Berechtigung mag das beispielgebundene Beweisen gegenüber dem formalen (resp. formellen) Beweisen darin finden, dass es die inhaltliche Schwelle zum Beweisen senkt. Gleichwohl verlangt dies von den Schülern aber einen versierten Umgang mit variablenhaltiger Umgangssprache. Während des beispielgebundenen Beweisens halten dann häufig eine sprachlich-begriffliche Ausdifferenzierung und das beispielgebundene Beweisen einander Schritt.

Forschungsstand, Theorie und Praxis

Beim beispielgebundenen Beweisen stehen Schüler vor der Aufgabe, das Allgemeingültige am Besonderen der Beispiele nicht nur subjektiv zu realisieren, sondern auch entsprechend zu manifestieren. In der Forschungsliteratur wird zum Teil schon auf die Bedeutung der Versprachlichung des Allgemeingültigen hingewiesen (↑ Kap. 1.1, 1.2). In der Definition des beispielgebundenen Beweisens i.e.S. gemäß der vorliegenden Arbeit ist die Manifestierung des subjektiv Realisierten enthalten (↑ Kap. 1.5). In der empirischen Praxis erscheinen Formulierungen, Ausdrucksformen und Sprechweisen als Mittel zum Zweck, beispielgebunden zu beweisen (↑ Kap. 3.1 – 3.5). Gegenüber der normierten Sprache formell gehaltener Beweise rückt beim beispielgebundenen Beweisen eine mathematikhaltige Umgangssprache in den Vordergrund. Zu den sprachlichen Aspekten beispielgebundenen Beweisens sei neben den nachstehenden Ergebnissen auch auf die eigene Zusammenfassung in Krumsdorf (2011) verwiesen.

4.4.1	Ergebnisse aus der Forschung	Kommunikative Funktion des Beweisens sprachbezogene Untersuchungen z. *generic example* sprachliche Aspekte operativen Beweisens sprachliche Aspekte des *visual proving*
4.4.2	Theoretische Ergebnisse	Sprache beim beispielgebundenen Beweisen Manifestierung des subjektiv Realisierten
4.4.3	Empirische Ergebnisse	Erarbeitung sprachlichen Rüstzeugs sprachlich-begriffliche Ausdifferenzierung konkret und allgemein(gültig) Formuliertes paradoxe Sprachlosigkeit beim *visual proving*

4.4.1 Ergebnisse aus der Forschung

kommunikative Funktion des Beweisens

Unter den Beweisfunktionen ist neben dem verifikativen und explanativen die kommunikative Funktion für das beispielgebundene Beweisen von großer Bedeutung (↑ Abs. 1.1.1). Die Explikation des Allgemeingültigen an der Besonderheit des Beispiels verhilft dem Schüler, den Beweis als Sinnstruktur allmählich zu realisieren, und dem Experten, dies einschätzen zu können und zu begleiten. Schon FREUDENTHAL (1978) weist auf die Bedeutung des sprachlichen Ausdrucksvermögens zum Führen paradigmatischer Beispiele hin (↑ Abs. 1.2.1).

sprachbezogene Untersuchungen zum generic example

MASON & PIMM (1984) haben versucht, *generic examples* vom *specific / particular example* auf einer rein sprachlichen Ebene zu unterscheiden. Hieran ist zu kritisieren gewesen, dass es mehr kontextbezogener Worte bedarf, als dass der bloße sprachliche Gebrauch einzelner Zahlwörter, Variablenbezeichnungen und (In-)Definitpronomen darüber Auskunft gäbe, inwiefern der Schüler das Allgemeingültige am Beispiel subjektiv realisiert hat (↑ Abs. 1.2.2). Dennoch geben ihre sprachlich basierte Untersuchung wie auch die Unterscheidung von Variablenaspekten nach MALLE (1986) dem Experten ein Rüstzeug an die Hand, Indizien für die subjektive Realisierung des Allgemeingültigen zu finden.

sprachliche Aspekte operativen Beweisens

WITTMANN & ZIEGENBALG (2004) betonen in Abgrenzung zu einem *Beweisen durch Hinschauen* nach NEUBRAND & MÖLLER (1990), dass die Versprachlichung der ”Wirkungen von Operationen” unbedingt notwendig ist, besonders wenn diese enaktiv und ikonisch repräsentiert werden. Versprachlichung ermöglicht es, am beispielhaft Dargestellten das Allgemeingültige zu vermitteln (↑ Abs. 1.2.3).

sprachliche Aspekte des visual proving

In der vorliegenden Arbeit werden neben dem *operative proving* auch das *visual proving* als Spezialfall beispielgebundenen Beweisens angesehen, letzteres im Sinne eines *bildlich gebundenen Beweisens*. Hieraus ergibt sich das Paradox, dass *visual proving* auch der sprachlichen Explikation bedarf. In der Interaktion zwischen dem Schüler und dem Experten können dialogische Mittel nach VOLLRATH (1967) oder GOLDBERG (1992) dazu eingesetzt werden, das beispielgebundene Beweisen zu befördern.

4.4.2 Theoretische Ergebnisse

Sprache beim beispielgebundenen Beweisen

Die Versprachlichung von etwas Allgemeinem im Konkreten bezeichnen MEYER & VOIGT (2009a) als Artikulationsprozess, welcher im Rahmen beispielgebundenen Beweisens zum Erkenntnisprozess hinzutreten muss (↑ Abs. 1.3.4). Der Beweis als Sinnstruktur kann als Argumentgefüge dargestellt und somit als Folie zur Analyse der sprachlichen Äußerungen des Schülers verwendet werden (↑ Abs. 1.4.4). Sprachen und Sprache an sich lassen sich als latente, subjektiv realisierte und manifeste Sinnstruktur ansehen (↑ Abs. 1.5.1, 1.5.3).

Manifestierung des subjektiv Realisierten

Beim beispielgebundenen Beweisen i.e.S. manifestiert der Lernende seinen subjektiv realisierten Beweis, indem er dessen Allgemeingültigkeit am Beispiel in überzeugender Weise versprachlicht. Dabei muss der Lernende den Beweis weder durchgängig formell darstellen, noch sich in allgemein gehaltener Umgangssprache formal äußern. Die Manifestation kann vielmehr sprachlich zwischen

Konkretem und Allgemeinem changieren oder auch konkret sein, sofern der Lernende darin eine subjektive Realisierung des Allgemeingültigen erkennen lässt. Umgekehrt garantiert ein formal resp. formell dargestellter Beweis nicht, dass der Lernende die Sinnstruktur subjektiv realisiert hat, etwa wenn Redeweisen von Anderen übernommen werden (↑ Abs. 1.5.3).

4.4.3 Empirische Ergebnisse

Erarbeitung sprachlichen Rüstzeugs

In Vorübungen kann der Schüler nicht nur an inhaltliche Aspekte beispielgebundenen Beweisens und an das Beweisen selbst herangeführt werden, sondern ihm auch sprachliches Rüstzeug angeboten werden. Dabei geht es häufig um Bezeichnungen geometrischer Objekte, mathematischer Sätze oder Begriffe. Als motivierend hat sich herausgestellt, dass der Experte die Bezeichnungen des Schülers übernimmt und nicht umgekehrt.

sprachlich-begriffliche Ausdifferenzierung

Die fortschreitende Verallgemeinerung einer Behauptung in Regelverbänden geht bei manchen Schülern mit einer sprachlich-begrifflichen Ausdifferenzierung einher. Diese umfasst sowohl eigene Sprachschöpfungen (z.B. *zwei Irgendwasses*) als auch übliche Bezeichnungen und Formulierungen oder Begriffsübernahmen von Seiten des Experten. Die sprachliche Verfeinerung kann bei zugleich inhaltlicher Angemessenheit als Indiz für die subjektive Realisierung des Beweises gelten.

konkret und allgemein (-gültig) Formuliertes

Aus der eigenen Interviewpraxis kann bestätigt werden, dass der Verzicht auf beispielhafte Formulierungen *per se* kein Indiz für die subjektive Realisierung des Allgemeingültigen ist. Zu allgemein Gesagtes kann überdies auch falsch sein, oder nur eine übernommene oder stets wiederholte Sprechweise zur Darstellung eines operativen Kalküls sein. Umgekehrt kann Konkretes gesagt oder auf Konkretes gedeutet werden, aber allgemeiner gedacht werden, so dass die bloße, isoliert gesehene Explikation eines Schülers wenig Aussagekraft hat. Gleichzeitig eröffnet sich dadurch die Möglichkeit, Schüler nach Behandeln konkreter Beispiele zum Beweisen an imaginierten, bloß noch vorgestellten Beispielen zu ermutigen. Dies kann dazu führen, dass Schüler in allgemein gehaltener Umgangssprache sprechen, da sie die latente Sinnstruktur am imaginierten Beispiel subjektiv realisiert haben. Dabei besteht dennoch die Gefahr, dass Schüler den passenden Allgemeinheitsgrad verfehlen, d.h. entweder nicht weitgehend oder so sehr verallgemeinern, dass die Behauptung falsch wird.

paradoxe Sprachlosigkeit beim visual proving

Gerade weil *visual proving*, verstanden als bildlich gebundenes Beweisen, auf dem ersten Blick ohne mathematische Sprache auszukommen scheint, gestaltet sich die Vermittlung des Allgemeingültigen an ihnen auch in den betrachteten Einzelfallstudien als um so schwieriger: Der Sprachlosigkeit des Bildes kann der Schüler Sprache entgegensetzen, um die im Bild latenten und möglicherweise subjektiv realisierten Sinnstrukturen zu manifestieren. Ähnlich stark fordert die Schüler das eher den Experten geläufige kognitive und sprachlich vermittelte Übertragen von Informationen zwischen Arithmetik und geometrischen Darstellungsformen. Hier kommt es zum Teil zu einer mechanischen Identifizierung, so dass einem Schüler bei einer Verallgemeinerung der Behauptung die geometrische Darstellung an der subjektiven Realisierung des Allgemeingültigen sogar hindern kann.

4.5 Weitere Perspektiven

Überblick

Der Forschungsgegenstand des beispielgebundenen Beweisens ist in der vorliegenden Arbeit an Studien mit einzelnen Schülern untersucht worden. Für den Mathematikunterricht können insofern nur begrenzte Aussagen getroffen werden. Die Durchführung dieser Studien haben gleichwohl einige praxisbezogene Ergebnisse erbracht, die neben der Diskussion von entdeckenden und prüfenden Zugängen zum beispielgebundenen Beweisen (↑ Kap. 4.3) für den Mathematikunterricht von Bedeutung sein können.

4.5.1	Wahl und Anzahl der Beispiele	Beweisen an verschiedenartigen Beispielen triviale und konkrete Beispiele Rolle der Beispiele beim induktiven Prüfen Fraglichkeit der GOLDBERG-These komplizierte, bedingt vorstellbare, imaginierte Beispiele
4.5.2	Allgemeinheitsgrade von Behauptungen	Verweise auf die Theorie Argumentgefüge als Folie für den Lehrenden Austesten von Grenzen der Verallgemeinerung Entdecken und Begründen von speziellen Behauptungen
4.5.3	Beweisverständnis des Schülers	Auswirkungen des Beweisens auf das Beweisverständnis Reflexion des Beweisverständnisses vorgelegte Behauptungen und Beweise Prüfen des Beweisverhaltens von Schülern
4.5.4	Interventionen des Lehrenden	Anregung und Intervention durch den Lehrenden Aufgabenspezifische Beweisstrukturen Problematisierung von Regelverbänden Änderung von Argumentstrukturen Vermeidung von Kalkül- und Messaspekten Maßnahmen zum Wecken des Beweisbedarfs Wahl geeigneter Repräsentationsformen verschiedenartige Beweiswege Wahl von Beispielen und Aufgaben Einsatz wechselnder dialogischer Mittel

Im Folgenden werden hauptsächlich die eigenen empirischen Erfahrungen aus den Einzelfallstudien wiedergegeben. An jedes Thema schließt sich ein kurzes Fazit an. Gleichwohl sei aber auch auf den Forschungsstand in ↑ Kap. 1.1, 1.2 verwiesen.

4.5.1 Wahl und Anzahl der Beispiele

Beweisen an verschiedenartigen Beispielen

Der Schüler beweist beispielgebunden, indem er sich allmählich von den betrachteten Beispielen löst und daran das Allgemeingültige der Behauptung erkennt und vermittelt. Bei den Beispielen kann es sich um triviale, konkrete, bedingt vorstellbare, komplizierte und imaginierte Beispiele handeln.

triviale und konkrete Beispiele

Triviale und konkrete Beispiele besitzen den Vorteil, dass sie die Schwelle zum Beweisen am Beispiel niedrig halten. Sie können aber auch manche Schüler unterfordern. Aus inhaltlicher Sicht können triviale oder sehr konkrete Beispiele zu falschen Verallgemeinerungen führen. Etwa ist die Gleichung $a^2 \cdot a^2 = a^{2 \cdot 2}$ zwar richtig, kann aber zu einer falschen Verallgemeinerung $a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$ führen. Am vollständigen Graphen eines Fünfecks lassen sich zehn Verbindungen abzählen – ein vollständiger Graph mit n Ecken hat aber nicht $2n$ Verbindungen.

Rolle der Beispiele beim induktiven Prüfen

Schülern der Sekundarstufe I gelingt es häufig, an und aus mehreren Beispielen durch induktives Prüfen ihrer abduktiv generierten Hypothesen heraus eine richtige Behauptung aufzustellen. Dabei können sie die Erfahrung gemacht haben: ”was einmal, zweimal, dreimal ... gilt, gilt immer”. Da sich dieser subjektive Leitsatz mit der empirischen Sicht der Naturkunde verträgt und sich überdies an vielen Aufgabenbeispielen bestätigt, sollte an der Vermittlung des mathematikspezifischen deduktiven Beweisverständnisses im Sinne einer theoretischen Erkenntnissicherung gearbeitet werden.

Fraglichkeit der GOLDBERG-*These*

Schon GOLDBERG (1992) betont, dass die Anzahl an Beispielen, die der jeweilige Schüler zum beispielgebundenen Beweisen im Mathematikunterricht braucht, individuell verschieden sei. Dies möge man nicht in dem Sinne missverstehen, dass eine hohe Anzahl an Beispielen ausreiche, dass ein Schüler daran das Allgemeingültige einer Behauptung erkenne und beweise. Von den durchgeführten Einzelfallstudien her gesehen erscheint es in diesem Zusammenhang sinnvoller, den Schüler seinem situativen Kenntnisstand nach ausgewählte Beispiele anzubieten. Nicht Quantität, sondern Qualität der Beispiele ist entscheidend.

komplizierte, bedingt vorstellbare, imaginierte Beispiele

Einige Schüler können auch mit komplizierten, schwierigen oder nur schwer vorstellbaren Beispielen umgehen. Der Lehrende kann ein kompliziertes Beispiel (*big/small number*) dazu einsetzen, um zu verhindern, dass der Schüler die Behauptung daran induktiv prüft, so dass dessen Blick wohlmöglich mehr auf die strukturellen Aspekte des dargebotenen Beispiels fällt. Schwierige oder nur schwer vorstellbare bis imaginierte Beispiele sind für Schüler geeignet, die sich schon hinreichend von den Besonderheiten einfacher Beispiele gelöst haben. Die strukturelle und abstrakte Betrachtung dominiert dabei, die Bindung an diese Beispiele kann sich zunehmend auflösen. Darüber hinaus erscheint es auch sinnvoll, den Schüler am vorliegenden konkreten Beispiel zur Imagination eines weiteren Beispiels herauszufordern. Dies hat ebenso kreativitätsweckende wie beweisevozierende Kraft.

Fazit

Es zeigt sich, dass die Wahl und die Anzahl an Beispielen wesentlich den beispielgebundenen Beweisverlauf eines Schülers beeinflusst. Vorsicht ist geboten, wenn ein Schüler Beispiele wiederholt zum bloßen induktiven Prüfen verwendet, statt an ihnen die Allgemeingültigkeit einer fraglichen Behauptung zu beweisen.

4.5.2 Allgemeinheitsgrade von Behauptungen

Verweise auf die Theorie

Hinsichtlich der Allgemeinheitsgrade von Behauptungen sei vor allem die theoretische Fassung des beispielgebundenen Argumentgefüges hervorgehoben, welches eine Darstellungsmöglichkeit für den Beweis als Sinnstruktur liefert (↑ Abs. 1.4.4). Es handelt sich dabei quasi um eine Schichtung von Argumentgefügen je nach argumentweise (möglicherweise wechselndem) Grad an Verallgemeinerung. Ein Argument(gefüge) kann seinerseits mehrgliedrig und mehrschichtig sein. Bei Letzterem steigt der Abstraktionsgrad an (↑ Abs. 1.4.2).

Argumentgefüge als Folie für den Lehrenden

Auch wenn die Darstellung der Beweisstruktur durch Argumentgefüge sehr theoretisch wirkt, kann die Auffächerung des beispielgebundenen Argumentgefüges dem Lehrenden als Folie zur Beurteilung beispielgebundenen Beweisens dienen, insbesondere dann, um bei Schülern das beispielgebundene Beweisen in fortschreitender Verallgemeinerung zu verfolgen. Im Gespräch mit dem Schüler sollte es nicht bei der pauschalen Frage bleiben: "Warum gilt das immer?", sondern der jeweilige Verallgemeinerungsgrad der Behauptung oder der Konklusion eines Teilarguments mitbenannt werden. Dies stellt sicher, dass Schüler und Lehrender sich auf die gleiche Verallgemeinerungsebene beziehen.

Austesten von Grenzen der Verallgemeinerung

Der Schüler kann die Grenzen der Verallgemeinerungsfähigkeit von Behauptung und Beweis falsch einschätzen, insbesondere dann, wenn er sich beim Entdecken und nicht nur beim Prüfen einer Behauptung an der Front seines Wissens befindet. Das Entdecken kann (etwa bei der Anzahl an Verbindungen eines vollständigen Graphen mit 5, 10, x Ecken) zu falschen Behauptungen führen, welche auf dem Prüfen eines speziellen Beispiels basieren (scheinbar $2x$ Verbindungen im Allgemeinen, so wie 10 Verbindungen beim Fünfeck), inkorrekt verallgemeinert ($10 \cdot 4 \ / \ 2$ Verbindungen beim Zehneck) oder unter Verlust der früheren Erkenntnis von Zusammenhängen verallgemeinert werden ($x \cdot y \ / \ 2$). Gleichwohl übt sich der Schüler durch diese Fehltritte darin, in der Aufstellung der Behauptung nach und nach treffsicher zu werden und bei bestehender latenter Beweisidee den Beweis teils vorwegzunehmen. Nicht ganz adäquate Verallgemeinerungen sind in der prozessualen Betrachtung des beispielgebundenen Beweisens konstruktiv, zumal sie selbst zu deren Prüfen und ggf. Beweisen einladen.

Entdecken und Begründen von speziellen Behauptungen

Im Rahmen der Thematisierung der entdeckenden Beweisfunktion wurde bemerkt, dass zunächst Spezialfälle von allgemeineren Behauptungen entdeckt werden können, welche dann zum Beweis der allgemeineren Behauptungen Veranlassung geben (↑ Abs. 1.1.1). Dabei ist es ratsam, den Schüler zwischenzeitlich erst den Spezialfall der allgemeinen Behauptung beweisen zu lassen, damit er sich nicht nur im Vermuten, Entdecken und Prüfen übt, sondern auch den Übergang zum Beweisen findet.

Fazit

Das Austesten von Grenzen der Verallgemeinerungsfähigkeit von Behauptungen ist ein didaktisch probates Mittel, Schülern das Allgemeingültige im Besonderen der Beispiele erkennen zu lassen. Hierbei ist von Seiten der Lehrenden eine entsprechende mathematische Durchdringung der Aufgabenstellung hilfreich, etwa durch Skizzierung eines beispielgebundenen Argumentgefüges. Gleichwohl soll der Schüler nicht nur zum Prüfen, sondern auch zum Beweisen seiner spezifizierten wie fortschreitend verallgemeinerten Behauptungen kommen.

4.5.3 Beweisverständnis des Schülers beim Beweisen

Auswirkungen des Beweisens auf das Beweisverständnis

Das bei Schülern beobachtbare Beweisverhalten gründet auf einem mehr oder weniger internalisierten Beweisverständnis, welches im Mathematikunterricht nicht sehr häufig explizite Behandlung erfährt. Bei den vorwiegend quantitativ gehaltenen Studien mit ihrer Tendenz zu Kategorisierungen des Beweisverhaltens wird zuweilen auch auf das zugrunde liegende Beweisverständnis geschlossen (↑ Abs. 1.1.2). Siedelt man das beispielgebundene Beweisen als Prozess zwischen induktivem Prüfen und formalem Beweisen an, wird das Beweisverständnis situativ je nach gewählter oder thematisierter Beweisform mitbehandelt. Durch den changierenden Charakter beispielgebundenen Beweisens kann es dazu kommen, dass sich das Beweisverständnis des Schülers während des beispielgebundenen Beweisens und damit am beispielgebundenen Beweisen einer exemplarischen Behauptung wandelt.

Reflexion des Beweisverständnisses

Manche Schüler – sogar Grundschüler – besitzen soviel Introspektionsvermögen, dass sie über ihr eigenes Beweisverhalten (schon) reflektieren können. Die auf das Beweisen als Tätigkeit bezogenen Äußerungen von Grundschülern (↑ Abs. 3.2.4, 3.1.7) zeigen unabhängig vom tatsächlichen Beweisverhalten und dessen Beurteilung ein gewisses Reflexionsvermögen.

vorgelegte Behauptungen und Beweise

Vorgelegte Behauptungen mit Beweisen an Beispielen bieten den Schülern die Möglichkeit, die formale resp. formelle Darstellung von (beispielgebundenen) Beweisen hinterfragend nachzuvollziehen. Wegen dieses relativ normierten Zugangs zum (beispielgebundenen) Beweisen gehen hierbei jedoch auch soziale Aspekte ein, die nicht nur die vorgebende Lehrperson als situativ Handelnde betreffen. Auch entspricht die Vorgabe einer Behauptung und deren (i.d.R. formellen) Beweis der gängigen Praxis. Insofern kann nicht allein daraus, dass ein Schüler eine falsche Behauptung oder einen falsch vorgegebenen Beweis nicht als solchen erkennt, auf ein fehlendes Beweisverständnis geschlossen werden.

Prüfen des Beweisverhaltens von Schülern

Die Frage, warum ein Schüler induktiv prüft, lässt sich nur insoweit beantworten, als dass man die genannten theoretischen Gründe am Beweisverhalten des Schülers selbst prüft: Nicht immer ist das mehr oder weniger entwickelte Beweisverständnis des Schülers handlungsleitend. Nicht immer hält ein Schüler eine vorgelegte Behauptung für unfraglich. Nicht immer wendet ein Schüler die Behauptung bloß an, weil ihm deren Prämisse bereits als Begründung erscheint. Gleichwohl kann man den Schüler aber auch seine Stellung zum induktiven Prüfen selbst thematisieren lassen, wie auch zum beispielgebundenen Beweisen oder zum formalen Prüfen.

Fazit

Mit dem changierenden Charakter beispielgebundenen Beweisens zwischen induktivem Prüfen und formalem (resp. formellem) Beweisen wird das den Schülern selten bewusste Beweisverständnis mitbehandelt. Dieses lässt sich durch kritische Fragen nach der Allgemeingültigkeit oder konfrontativen Bemerkungen (etwa "was einmal, zweimal, dreimal ... gilt, gilt immer?") hinterfragen, wenngleich auch hier singuläre Beobachtungen mit Vorsicht zu genießen sind. Daran können aber Maßnahmen zum Wecken des Beweisbedarfs ansetzen.

4.5.4 Interventionsmöglichkeiten des Experten

Anregung und Intervention durch den Lehrenden

Die Palette an Interventionsmöglichkeiten des Experten im Rahmen des beispielgebundenen Beweisens sind reich. Vorab können aus theoretischer Sicht verschiedene Zugänge des Entdeckens und Prüfens in Betracht gezogen werden, wie sie in ↑ Kap. 1.3 dargestellt wurden. Auch hält Goldberg (1992) eine Reihe von Anregungen bereit, wie das beispielgebundene Beweisen befördert werden kann. Hierzu zählen etwa das Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten sowie Vorübungen zum beispielgebundenen Beweisen, in denen Begriffe und Definitionen geklärt werden können und der Schüler das beispielgebundene Beweisen an einfachen Beispielen erfährt.

aufgabenspezifische Beweisstrukturen

Es gibt einige Merkmale von Aufgabenstellungen, die Schülern das beispielgebundene Beweisen erleichtern wie erschweren. Kann der Beweis durch eine mehrschichtig-mehrgliedrige, aber nicht zu komplexe Sinnstruktur dargestellt werden, bieten sich grundsätzlich mehrere Argumente als Anknüpfungsmöglichkeiten an. Um aber reichhaltige Möglichkeiten zum Beweisen am Beispiel zu eröffnen, kommt es auf den Grad der Auffächerung des beispielgebundenen Argumentgefüges an, m.a.W. inwieweit sich ein nur im Beispiel gehaltenes Argumentgefüge in einen Regelverband einbetten lässt (↑ Abs. 1.4.4).

Problematisierung von Regelverbänden

So wie die Argumentstruktur an sich weder zu einfach noch zu kompliziert gehalten sein darf, erschwert eine zu weite Auffächerung eines Argumentgefüges vielen Schülern, auf der jeweiligen Verallgemeinerungsebene passend zu argumentieren. Verallgemeinert der Schüler die Behauptung zu weitgehend, oder hält er sie bei seinen Argumenten zu sehr an Beispielen, kann der Experte intervenieren. Dies gilt insbesondere dann, wenn die Behauptung oder deren Beweis im zu Allgemeinen falsch wird oder der Schüler sich im induktiven Prüfen in immer neuen Beispielen verliert.

Änderung von Argumentstrukturen

Neben dem grundsätzlichen Kriterium der Struktur von Argument und Regelverband ist auch entscheidend, welche strukturelle Diskrepanz zwischen einem im Beispiel gehaltenen Argumentgefüge und deren Verallgemeinerungen besteht, m.a.W. welcher Grad an struktureller Einbettung eines im Beispiel gebundenen Argumentgefüges besteht. Ändert sich nämlich die Struktur eines Beweises bei Verallgemeinerung der entsprechenden Behauptung wesentlich, so stellt dies an den Schüler eine zusätzliche Herausforderung während seines beispielgebundenen Beweisens.

Vermeidung von Kalkül- und Messaspekten

Von großer Bedeutung ist mit Blick auf die praktische Durchführung auch, ob das induktive Prüfen sich nicht im bloßen Ausrechnen oder Messen erschöpft, sondern darin auch strukturelle Aspekte erkannt werden. Dies bedeutet nicht, dass jedwedes induktive Prüfen mit latenter Beweisidee erfolgen muss, wodurch der Übergang zum beispielgebundenen Beweisen fließend ist. Vielmehr sollte schon bei der Anlage oder Auswahl der Aufgaben vermieden werden, dass der Kalkül- oder Messaspekt zu sehr in den Vordergrund rückt.

Maßnahmen zum Wecken des Beweisbedarfs von Behauptungen

An Maßnahmen, wie der Beweisbedarf für eine bereits im Raum stehende Behauptung herausgestellt oder geweckt werden kann, bieten sich mehrere Möglichkeiten an: ein Vergleichen mit einer falschen Modifikation (etwa einer zu weitgehenden Verallgemeinerung) der Behauptung, ein Herausstellen der Fraglichkeit der Behauptung durch ein Herausfordern zu Gegenbeispielen, eine kritische Thematisierung des naturkundlichen Prinzips "was einmal, zweimal, dreimal ... gilt, gilt immer".

Wahl geeigneter Repräsentationsformen

Ferner stellt sich die Frage, in welcher Repräsentationsform (enaktiv, ikonisch, symbolisch) beispielgebundenes Beweisen geschehen soll. Auch dies stellt vorab eine Interventionsmaßnahme dar. Den eigenen empirischen Studien nach kann dies nur je nach Aufgabenstellung, Klassenstufe und Schüler entschieden werden.

verschiedenartige Beweiswege

Überdies können in den mathematischen Analysen häufig mehrere Beweiswege ausgemacht werden, aus denen der Experte im Voraus passende beispielgebundene Beweisgänge auswählen oder dem Schüler als Alternativen anbieten kann. Dabei kann der Experte auch verschiedene Zugänge zum beispielgebundenen Beweisen erproben.

Wahl von Beispielen und Aufgaben

Der Experte kann bei einer Neigung des Schülers zum (wiederholten) induktiven Prüfen versuchen, mit großen, kleinen oder komplizierten Beispielzahlen oder geometrischen Objekten zu intervenieren, so dass der Schüler sein Augenmerk eher auf die strukturellen Aspekte der Aufgabenstellung richtet. Einen ähnlichen Effekt bietet der eingeforderte Verzicht auf elementare Zählmethoden, den Taschenrechner oder Messwerkzeuge, letztlich auch die Herausforderung, sich Beispiele bloß noch vorzustellen. Aufwändiger wäre es, während des beispielgebundenen Beweisens zu den oben beschriebenen Alternativen zu greifen, die die Anlage der Aufgabe vorab betreffen. Bei starker Verfestigung des Schülers im induktiven Prüfen oder in schematisch anmutenden Kalkülen ist dies jedoch angeraten.

Einsatz wechselnder dialogischer Mittel

An dialogischen Mitteln eignet sich bei fortgeschrittenen Schülern ein Herausfordern des Schülers durch verunsichernde Fragen. Der Experte kann die Rolle eines *advocatus diaboli* einnehmen und den Schüler zur weiteren Manifestierung des Beweises oder weitergehender Verallgemeinerungen provozieren. Ansonsten bietet sich für den Experten auch die Rolle eines fiktiven Mitschülers an, mit dem der befragte Schüler vorgeblich bekannt ist. Mit diesen Rollenwechseln wird – wie auch bei Veränderung anderer Dialogmittel und -strukturen – eine leichte soziale Befremdung erreicht, die auch einen inhaltlichen Perspektivenwechsel auf Seiten des Schülers zur Folge haben kann.

Fazit

Welche der vielfältigen Interventionsmöglichkeiten des Experten jeweils geeignet sind, um das weitere beispielgebundene Beweisen eines Schülers zu befördern, dürfte der Lehrende situativ und schülergemäß entscheiden. Hierbei stellen sich an den Lehrenden auch Fragen des eigenen Lehr- und Lernstils und der eigenen Auffassung vom beispielgebundenen Beweisen. Der Lehrende kann jedoch am changierenden Charakter beispielgebundenen Beweisens lernen, die Beweisversuche der Schüler differenziert zu erkennen (etwa ob der Beweis latent ist oder subjektiv realisiert wurde oder manifest ist), und sie durch das beispielgebundene Beweisen zum (selbst)kritischen Arbeiten befähigen.

4.6 Ausblick

Möglichkeiten und Grenzen der Forschung

Die vorliegende Arbeit liefert eine theoretische Fassung des beispielgebundenen Beweisens als Forschungsgegenstand und dessen empirische Untersuchung in Form von Einzelfallstudien. Nicht erforscht werden sollte, wie Schüler im Mathematikunterricht beispielgebunden beweisen. Dies ist und bleibt der weiteren Forschung vorbehalten. Denkbar wäre in diesem Zusammenhang zum einen, das beispielgebundene Beweisen in Kleingruppen zu erforschen, oder situativ in der Unterrichtswirklichkeit. Hierbei gehen weitere, insbesondere soziale Faktoren ein – insofern gewinnen dabei mehr unterrichtspraktische Fragestellungen an Bedeutung. Dieser Umstand ist letztlich auch ein Grund dafür gewesen, das beispielgebundene Beweisen zunächst gleichsam im Labor mit einzelnen Schülern zu untersuchen. Eine Beschränkung auf Grundschüler oder Sekundarstufenschüler wurde dabei nicht vorgenommen, um den Facettenreichtum und die Bandbreite beispielgebundenen Beweisens erfahrbar werden zu lassen.

Weitere Aufgabenstellungen

Für weitere exemplarische Einzelfallstudien bieten sich die Aufgabenstellungen des Winkelsummensatzes für ein n-Eck und die Potenzfunktionen an. Diese wurden aus Umfangsgründen und zeitlichen Erwägungen nicht in die vorstehende Forschungsarbeit aufgenommen. Letztere Aufgabenstellung ist für ältere Sekundarstufenschüler gedacht. Möglicherweise tendieren einige Schüler am Übergang zur Sekundarstufe II schon zu einem mehr formalisierten Beweisverhalten, während andere Schüler noch sehr am Beispiel beweisen. Hier wäre zu untersuchen, welchen Einfluss die Einführung der Schulalgebra auf das Beweisen der Schüler haben kann. Mehr die praktische Didaktik betreffend können weitere Aufgabenstellungen ausgearbeitet werden, welche sich für das beispielgebundene Beweisen in der jeweiligen Klassenstufe eignen. Ein allgemeinverständlicher Aufsatz ist hierzu von Krumsdorf (2009b) erschienen (vgl. auch Krumsdorf (2009a)).

Sonderfälle beispielgebundenen Beweisens

Als in der Theorie und praktischen Umsetzung anspruchsvoll haben sich in der vorliegenden Arbeit die Sonderfälle beispielgebundenen Beweisens gezeigt, d.h. das *operative Beweisen*, *visual proving*, das Beweisen in Sachkontexten und unter Einsatz von Darstellungsmitteln. Dies liegt daran, dass vom Schüler jeweils eine Übertragung von Informationen zwischen den jeweiligen Kontexten und dem mathematischen Kern der jeweiligen Aufgabenstellung abverlangt wird. Der Schüler muss sich den jeweiligen Kontext und damit auch dessen differierende Sprache erst erarbeiten. Dies macht das beispielgebundene Beweisen und dessen Erforschung wesentlich komplizierter.

beispielgebundenes Beweisen in mathematikdidaktischen Veranstaltungen

Von Interesse ist überdies, wie beispielgebundenes Beweisen Lehramtsstudierenden und Bachelorstudenten der Mathematik nahegebracht werden kann, so dass diese das beispielgebundene Beweisen neben dem formellen Beweisen als didaktisch produktiv erfahren und ihre Erkenntnisse weitertragen können.

Damit schließt die vorliegende Forschungsarbeit. Manche der vorstehenden Forschungsergebnisse dürften wohl auch auf andere Kontexte übertragbar sein. Dem Verfasser bereitete es ein arbeitsreiches Vergnügen, ein so relevantes wie nützliches Thema wie das beispielgebundene Beweisen zu erforschen.

Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1985): *Das operative Prinzip.* In: mathematik lehren, **11**: 4–6.

Akinwunmi, K. (2012): *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster (Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Christoph Selter).* Springer Spektrum, Wiesbaden [Diss. Univ. Dortmund].

Balacheff, N. (1987): *Processus de preuve et situations de validation.* In: Educational Studies in Mathematics, **18**: 147–176.

Balacheff, N. (1988): *Aspects of Proof in Pupils' Practice of School Mathematics.* In: Pimm, D. [Hrsg.]: *Mathematics, Teachers and Children. A Reader*, 216–235. Hodder and Stoughton, London (England).

Balacheff, N. (1991): *Treatment of Refutations: Aspects of the Complexity of a Constructivist Approach to Mathematics Learning.* In: von Glasersfeld, E. [Hrsg.]: *Radical Construcivism in Mathematics Education*, 89–110. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (Niederlande).

Barwise, J. & Etchemendy, J. (1994): *Hyperproof.* Center for the Study of Language and Information (CSLI), Stanford (USA).

Barwise, J. & Etchemendy, J. (1996): *Visual Information and Valid Reasoning.* In: Allwein, G. & Barwise, J. [Hrsg.]: *Logical Reasoning with Diagrams*, 179–200. Oxford University Press, New York (USA).

Barzel, B., Berlin, T., Bertalan, D. & Fischer, A. (2008): *Algebraisches Denken (Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker).* Franzbecker, Hildesheim.

Beck, C. & Maier, H. (1994a): *Mathematikdidaktik als Textwissenschaft. Zum Status von Texten als Grundlage empirischer mathematikdidaktischer Forschung.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, **15**, 1/2: 35–78.

Beck, C. & Maier, H. (1994b): *Zu Methoden der Textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen Forschung.* In: Maier, H. & Voigt, J. [Hrsg.]: *Verstehen und Verständigung. Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung*, 43–76. IDM-Reihe Bd. 19, Aulis Verlag Deubner, Köln.

Bell, A. (1976): *A Study of Pupils' Proof-Explanations in Mathematical Situations.* In: Educational Studies in Mathematics, **7**: 23–40.

Bell, A. (1979): *The Learning of Process Aspects of Mathematics.* In: Educational Studies in Mathematics, **10**: 361–387.

Besuden, H. (1979): *Vollständige Induktion in der Grundschule?* In: Dörfler, W. & Fischer, R. [Hrsg.]: *Beweisen im Mathematikunterricht (Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für „Didaktik der Mathematik" vom 26.9. bis 29.9.1978 in Klagenfurt)*, 83–91. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien (Österreich).

Bezold, A. (2009): *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote. Eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule.* Verlag Dr. Kovač, Hamburg [Diss. Univ. Würzburg].

Biehler, R. & Kempen, L. (2013): *Students' Use of Variables and Examples in their Transition from Generic Proof to Formal Proof.* In: Ubuz, B., Haser, Ç.. & Mariotti, M. [Hrsg.]: *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 86 – 95. Middle East Technical University Ankara, Manavgat – Side, Antalya (Türkei).

Bikner-Ahsbahs, A. (2003): *Empirisch begründete Idealtypenbildung. Ein methodisches Prinzip zur Theoriekonstruktion in der interpretativen mathematikdidaktischen Forschung.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, **35**, 5: 208–223.

Bills, L. (1996): *The Use of Examples in the Teaching and Learning of Mathematics.* In: Puig, L. & Gutierrez, A. [Hrsg.]: *Proceedings of the 20^{th} Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pme 20, 8–12 July 1996, Valencia)*, Bd. 2, 81–88. Encuadernaciones Artesanas, Valencia (Spanien).

Bills, L. & Rowland, T. (1999): *Examples, Generalisation and Proof.* In: Brown, L. [Hrsg.]: *Making Meaning in Mathematics. A Collection of Extended and Referred Papers from BSRLM – the British Society for Research into Learning Mathematics*, 103–116. QED and BSRLM, York / London (England).

Blum, W. (2003): *On the Role of 'Grundvorstellungen' for Reality-Related Proofs – Examples and Reflections.* In: Blum, W., Booker, G. & Huntley, I. [Hrsg.]: *Mathematical Modelling – Teaching and Assessment in a Technology-Rich World*, 63–74. Horwood Publishing, Chichester (England).

Blum, W. (2006): *Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht – Herausforderung für Schüler und Lehrer.* In: Büchter, A., Humenberger, H., Hussmann, S. & Prediger, S. [Hrsg.]: *Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis (Festschrift für Hans-Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag)*, 8–23. Franzbecker, Hildesheim.

Blum, W. & Kirsch, A. (1989): *Warum haben nicht-triviale Lösungen von f' = f keine Nullstellen? Beobachtungen und Bemerkungen zum "inhaltlich-anschaulichen Beweisen".* In: Kautschitsch, H. & Metzler, W. [Hrsg.]: *Anschauliches Beweisen (7. und 8. Workshop zur „Visualisierung in der Mathematik" in Klagenfurt im Juli 1987 und 1988)*, 199–209. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt, Bd. 18. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien (Österreich).

Blum, W. & Kirsch, A. (1991): *Preformal Proving: Examples and Reflections.* In: Educational Studies in Mathematics, **22**: 183–203.

Blumer, H. (1973): *Der methodologische Standort des Symbolischen Interaktionismus.* In: Horu, E. [Hrsg.]: *Alltagswissen, Interaktion und gesellschaftliche Wirklichkeit,* Bd. 1: *Symbolischer Interaktionismus und Ethnomethodologie*, 80–146. Rowohlt, Reinbek.

Boero, P., Garuti, R. & Mariotti, M. (1996): *Some Dynamic Mental Processes Underlying Producing and Proving Conjecture.* In: Puig, L. & Gutierrez, A. [Hrsg.]: *Proceedings of the 20^{th} Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pme 20, 8–12 July 1996, Valencia)*, Bd. 2, 121–128. Encuadernaciones Artesanas, Valencia (Spanien).

BOHNSACK, R. (2000): *Rekonstruktive Sozialforschung. Einführung in Methodologie und Praxis qualitativer Forschung.* 4. Aufl. Leske + Budrich, Opladen.

BORWEIN, J. & JÖRGENSON, L. (2001): *Visible Structures in Number Theory.* In: The American Mathematical Monthly, **108**, 10: 897–910.

BRANDT, B. & KRUMMHEUER, G. (2000): *Das Prinzip der Komparation im Rahmen der Interpretativen Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, **21**, 3/4: 193–226.

BRANFORD, B. (1913): *Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität.* Teubner, Leipzig.

BROWN, J. (1997): *Proofs and Pictures.* In: The British Journal for the Philosophy of Science, **48**: 161–180.

BROWN, J. (2000): *Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures.* Routledge, New York (England).

BRUNNER, E. (2013): *Innermathematisches Beweisen und Argumentieren in der Sekundarstufe I. Mögliche Erklärungen für systematische Bearbeitungsunterschiede und leistungsförderliche Aspekte.* (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik. Herausgegeben von Götz Krummheuer und Aiso Heinze, Bd. 16). Waxmann, Münster [Diss. Univ. Zürich (Schweiz)].

BRUNNER, E. (2014): *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Reihe Mathematik im Fokus, Springer Spektrum, Berlin.

CHAZAN, D. (1993): *High School Geometry Students' Justification for their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof.* In: Educational Studies in Mathematics, **24**: 359–387.

COE, R. & RUTHVEN, K. (1994): *Proof Practices and Constructs of Advanced Mathematics Students.* In: British Educational Research Journal, **20**, 1: 41–53.

DAMEROW, P. & LEFÈVRE, W. (1981): *Rechenstein, Experiment, Sprache. Historische Fallstudien zur Entstehung der exakten Wissenschaften.* Klett-Cotta, Stuttgart.

DAVIS, P. (1993): *Visual Theorems.* In: Educational Studies in Mathematics, **24**: 333–344.

DE VILLIERS, M. (1986): *The Role of Axiomatization in Mathematics and Mathematics Teaching.* In: *Rumeus Studies in Mathematics Education*, Bd. 2. Department of Didactics, Faculty of Education, Stellenbosch (Südafrika).

DE VILLIERS, M. (1990): *The Role and Function of Proofs in Mathematics.* In: Pythagoras, **24**: 17–24.

DE VILLIERS, M. (1999): *Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad.* Key Curriculum Press, Emeryville (USA).

DESCARTES, R. (1667): In: CLERSELIER, C. [Hrsg.]: *Lettres de M^r Descartes, Où sont traittées les plus belles Questions de la morale, physique, medecine et des mathematiques*, Bd. III. Charles Angot, Paris (Frankreich).

ECO, U. (1985): *Hörner, Hufe, Sohlen. Einige Hypothesen zu drei Abduktionstypen.* In: ECO, U. & SEBEOK, T. [Hrsg.]: *Der Zirkel oder Im Zeichen der Drei. Dupin, Holmes, Peirce*, 288–320. Wilhelm Fink Verlag, München.

Edwards, L. (1998): *Odds and Evens: Mathematical Reasoning and Informal Proof among High School Students.* In: The Journal of Mathematical Behavior, **17**, 4: 489–504.

Fischbein, E. (1982): *Intuition and Proof.* In: For the Learning of Mathematics, **3**, 2: 9–24.

Fischbein, E. & Kedem, I. (1982): *Proof and certitude in the development of mathematical thinking.* In: Vermandel, A. [Hrsg.]: *Proceedings of the 6th International Conference for the Psychology of Mathematical Education (pme 6, 18-23 July 1982, Antwerpen)*, 128–131. Universitaire Instelling, Antwerpen (Belgien).

Fischer, A. (2009): *Zwischen bestimmten und unbestimmten Zahlen.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, **30**, 1: 3–29.

Flick, U. (1995): *Stationen des qualitativen Forschungsprozesses.* In: Flick, U. [Hrsg.]: *Handbuch Qualitative Sozialforschung. Grundlagen, Konzepte, Methoden und Anwendungen*, 147–173. 2. Aufl. Psychologie Verlags Union, Weinheim.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematics as an Educational Task.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht (Niederlande).

Freudenthal, H. (1978): *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht.* R. Oldenbourg Verlag, München.

Freudenthal, H. (1979): *Konstruieren, Reflektieren, Beweisen in phänomenologischer Sicht.* In: Dörfler, W. & Fischer, R. [Hrsg.]: *Beweisen im Mathematikunterricht (Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für „Didaktik der Mathematik“ vom 26.9. bis 29.9.1978 in Klagenfurt)*, 183–200. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien (Österreich).

Garfinkel, H. (1967): *Studies in Ethnomethodology.* 10. Aufl. Prentice Hall, Englewood Cliffs (USA).

Goldberg, E. (1984): *Zur Bestimmung des von Schülern siebenter Klassen erreichbaren Niveaus der Fähigkeiten im Begründen und Beweisen.* [Diss. Univ. Halle-Wittenberg].

Goldberg, E. (1992): *Beweisen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Ergebnisse – Schwierigkeiten – Möglichkeiten.* In: Der Mathematikunterricht, **6**: 33–46.

Goode, W. & Hatt, P. (1956): *Die Einzelfallstudie.* In: König, R. [Hrsg.]: *Beobachtung und Experiment in der Sozialforschung. Praktische Sozialforschung II*, 299–313. Verlag für Politik und Wirtschaft, Köln.

Griesel, H., Postel, H. & Suhr, F. (2004): *Elemente der Mathematik 10.* Schroedel, Berlin [Schulbuch].

Grimm, J. & Grimm, W. (1854): *Deutsches Wörterbuch.* Hirzel, Leipzig.

Hanna, G. (1989): *Proofs that Prove and Proofs that Explain.* In: Vergnaud, G., Rogalski, J. & Artigue, M. [Hrsg.]: *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bd. 2, 45–51.

Hanna, G. (1990): *Some Pedagogical Aspects of Proof.* In: Interchange, **21**, 1: 6–13.

Hanna, G. (2000): *Proof, Explanation and Exploration: an Overview.* In: Educational Studies in Mathematics, **44**, 1: 5–23.

Hanna, G. & Jahnke, H. (1996): *Proof and Proving.* In: Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. [Hrsg.]: *International Handbook of Mathematics Education.*, Bd. 4, Part 2, 877–908. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (Niederlande).

Harel, G. (2002): *The Development of Mathematical Induction as a Proof Scheme – a Model for DNR-based Instruction.* In: Campbell, S. & Zazkis, R. [Hrsg.]: *Learning and Teaching Number Theory. Research in Cognition and Instruction*, 185–212. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (Niederlande).

Harel, G. & Martin, W. (1986): *The Concept of Proof Held by Preservice Elementary Teachers.* In: Burton, L. & Hoyles, C. [Hrsg.]: *Proceedings of the 10th International Conference for the Psychology of Mathematical Education (pme 10, 20-25 July, London)*, 386–391. University of London, Institute of Education, London (England).

Healy, L. & Hoyles, C. (1998): *Justifying and Proving in School Mathematics: Technical Report on the Nationwide Survey.* Institute of Education, University of London (England).

Healy, L. & Hoyles, C. (2000): *A Study of Proof Conceptions in Algebra.* In: Journal for Research in Mathematical Education, **31**, 4: 396–428.

Hefendehl-Hebeker, L. & Hussmann, S. (2003): *Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie (Festschrift für Norbert Knoche).* Franzbecker, Hildesheim.

Herbst, P. (2004): *Interactions with Diagrams and the Making of Reasoned Conjectures in Geometry.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, **36**, 5: 129–139.

Holland, G. (2007): *Geometrie in der Sekundarstufe. Entdecken – Konstruieren – Deduzieren. Didaktische und methodische Fragen.* 3. Aufl. Franzbecker, Hildesheim.

Jahnke, H. (1978): *Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik. Beweisen als didaktisches Problem.* IDM-Reihe Materialien und Studien Bd. 10, Institut für Didaktik der Mathematik, Univ. Bielefeld.

Jungwirth, H. (2003): *Interpretative Forschung in der Mathematikdidaktik – ein Überblick für Irrgäste, Teilzieher und Standvögel.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, **35**, 5: 189–200.

Kempen, L. (2013): *Generische Beweise in der Hochschullehre.* In: Greefrath, G., Käpnick, F. & Stein, M. [Hrsg.]: *Beiträge für den Mathematikunterricht (Vorträge auf der 47. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 04.03.2013 bis 08.03.2013 in Münster)*, Bd. 1, 528–531. WTM, Münster.

Kirsch, A. (1979): *Beispiele für „prämathematische“ Beweise.* In: Dörfler, W. & Fischer, A. [Hrsg.]: *Beweisen im Mathematikunterricht (Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für „Didaktik der Mathematik“ vom 26.9. bis 29.9.1978 in Klagenfurt)*, 261–274. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien (Österreich).

KMK (2003): *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. Beschluss vom 4.12.2003.* Luchterhand, München.

Knipping, C. (2003): *Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis – Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich.* texte zur mathematischen forschung und lehre 23, Franzbecker, Hildesheim [Diss. Univ. Hamburg / Grenoble (Frankreich)].

KNIPPING, C. (2005): *Challenges in Teaching Proofs.* In: HENN, H. & KAISER, G. [Hrsg.]: *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation (Festschrift für Werner Blum)*, 165–174. Franzbecker, Hildesheim.

KRAUTHAUSEN, G. (2001): *»Wann fängt das Beweisen an? Jedenfalls, ehe es einen Namen hat.« Zum Image einer fundamentalen Tätigkeit.* In: WEISER, W. & WOLLRING, B. [Hrsg.]: *Beiträge zur Didaktik der Mathematik in der Primarstufe (Festschrift für Siegbert Schmidt)*, 99–113. Verlag Dr. Kovač, Hamburg.

KROMREY, H. (2006): *Empirische Sozialforschung. Modelle und Methoden der standardisierten Datenerhebung und Datenauswertung.* 11. Aufl. Lucius & Lucius, Stuttgart.

KRUMMHEUER, G. (1997): *Narrativität und Lernen. Mikrosoziologische Studien zur sozialen Konstitution schulischen Lernens.* Deutscher Studien Verlag, Weinheim.

KRUMMHEUER, G. (2003): *Argumentationsanalyse in der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, **35**, 6: 247–256.

KRUMMHEUER, G. & BRANDT, B. (2001): *Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens.* Beltz, Weinheim.

KRUMSDORF, J. (2009a): *Beispielgebundenes Beweisen.* In: NEUBRAND, M. [Hrsg.]: *Beiträge für den Mathematikunterricht (Vorträge auf der 43. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 02.03.2009 bis 06.03.2009 in Oldenburg)*, 711–714. WTM, Münster.

KRUMSDORF, J. (2009b): *Beweisen am Beispiel. Beispielgebundenes Beweisen zwischen induktivem Prüfen und formalem Beweisen.* In: Praxis der Mathematik in der Schule, **51**: 8–13.

KRUMSDORF, J. (2011): *Sprachliche Aspekte beispielgebundenen Beweisens.* In: HAUG, R. & HOLZÄPFEL, L. [Hrsg.]: *Beiträge für den Mathematikunterricht (Vorträge auf der 45. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 21.02.2011 bis 25.02.2011 in Freiburg)*, 499–502. WTM, Münster.

KÜCHEMANN, D. (1978): *Children's Understanding of Numerical Variables.* In: Mathematics in School, **7**, 4: 23–26.

LAKATOS, I. (1976): *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery.* University Printing House, Cambridge (England).

LAKATOS, I. (1978): *What does a Mathematical Proof Prove?* In: WORRALL, J. & CURRIE, G. [Hrsg.]: *Mathematics, Science and Epistemology. Philosophical Papers*, Bd. 2, 61–69. University Press, Cambridge (England).

LAKATOS, I. (1979): *Beweise und Widerlegungen. Die Logik mathematischer Entdeckungen (Herausgegeben von John Worrall and Elie Zahar).* Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden.

LAKATOS, I. (1982): *Was beweist ein mathematischer Beweis?* In: WORRALL, J. & CURRIE, G. [Hrsg.]: *Mathematik, empirische Wissenschaft und Erkenntnistheorie*, 60–68. Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden.

LAMNEK, S. (2010): *Qualitative Sozialforschung. Lehrbuch.* 5. Aufl. Beltz, Weinheim.

LAUTH, B. & SAREITER, J. (2005): *Wissenschaftliche Erkenntnis. Eine ideengeschichtliche Einführung in die Wissenschaftstheorie.* 2. Aufl. Mentis, Paderborn.

Leddy, J. (2001): *Justifying and Proving in Secondary School Mathematics.* Department of Curriculum Teaching and Learning, [Diss. Univ. Toronto] (Kanada).

Legewie, H. (1995): *Feldforschung und teilnehmende Beobachtung.* In: Flick, U. [Hrsg.]: *Handbuch Qualitative Sozialforschung: Grundlagen, Konzepte, Methoden und Anwendungen*, 189–193. 2. Aufl. Psychologie Verlags Union, Weinheim.

Leiss, D. & Blum, W. (2006): *Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen.* In: Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. [Hrsg.]: *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*, 33–50. Cornelsen, Berlin.

Leron, U. & Zaslavsky, O. (2009): *Generic Proving: Reflections on Scope and Method.* In: Lin, F., Hsieh, F., Hanna, G. & de Villiers, M. [Hrsg.]: *Proceedings of the ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education.*, Bd. 2, 53–58. The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, Taipei (Chinesisches Meer).

Linke, A., Nussbaumer, M. & Portmann, P. (1994): *Studienbuch Linguistik. Ergänzt um ein Kapitel »Phonetik und Phonologie«.* 2. Aufl. Max Niemeyer Verlag, Tübingen.

Malle, G. (1986): *Variable. Basisartikel mit Überlegungen zur elementaren Algebra.* In: mathematik lehren, **15**: 2–8.

Malle, G. (1993): *Didaktische Probleme der elementaren Algebra (Unter Mitarbeit von Heinrich Bürger. Herausgegeben von Erich Ch. Wittmann).* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig / Wiesbaden.

Manin, Y. (1977): *A Course in Mathematical Logic (Translated from the Russian by Neal Koblitz).* Graduate texts in mathematics 53, Springer, New York (USA).

Martin, W. & Harel, G. (1989): *Proof Frames of Preservice Elementary Teachers.* In: Journal for Research in Mathematics Education, **20**: 41–51.

Mason, J. & Pimm, D. (1984): *Generic Examples: Seeing the General in the Particular.* In: Educational Studies in Mathematics, **15**: 277–289.

Mead, G. (1973): *Geist, Identität und Gesellschaft aus der Sicht des Sozialbehaviorismus (Aus dem Amerikanischen von Ulf Pacher).* Suhrkamp, Frankfurt a. M.

Menge-Güthling, H. (2001): *Langenscheidts Großwörterbuch Altgriechisch. Altgriechisch-Deutsch: unter Berücksichtigung der Etymologie.* 30. Aufl. Langenscheidt, Berlin.

Meyer, M. (2007): *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument.* texte zur mathematischen forschung und lehre 52, Franzbecker, Hildesheim [Diss. Univ. Münster].

Meyer, M. & Prediger, S. (2009): *Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen.* In: Praxis der Mathematik in der Schule, **30**: 1–7.

Meyer, M. & Voigt, J. (2008): *Entdecken mit latenter Beweisidee – Analyse von Schulbuchseiten.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, **29**: 124–151.

Meyer, M. & Voigt, J. (2009a): *Beweisen durch Entdecken.* In: Praxis der Mathematik in der Schule, **30**: 14–20.

MEYER, M. & VOIGT, J. (2009b): *Entdecken, Prüfen und Begründen. Gestaltung von Aufgaben zur Erarbeitung mathematischer Sätze.* In: mathematica didactica, **32**: 31–66.

MEYER, M. & VOIGT, J. (2011): *Rationale Modellierungsprozesse.* In: BRANDT, B., FETZER, M. & SCHÜTTE, M. [Hrsg.]: *Auf den Spuren Interpretativer Unterrichtsforschung*, 117–148. Waxmann, Münster.

MIYAZAKI, M. (2000): *Levels of Proof in Lower Secondary School Mathematics. As Steps from an Inductive Proof to an Algebraic Demonstration.* In: Educational Studies in Mathematics, **41**: 47–68.

MORMANN, T. (1981): *Argumentieren, Begründen, Verallgemeinern. Zum Beweisen im Mathematikunterricht.* Entwicklung praxisorientierter Ausbildungs- und Studienmaterialien für Mathematiklehrer der Sekundarstufe I, Bd. 3, Scriptor, Königstein / Ts. [Diss. Univ. Bielefeld].

MOVSHOVITZ-HADAR, N. (1988): *Stimulating Presentations of Theorems Followed by Responsive Proofs.* In: For the Learning of Mathematics, **8**, 2: 12–33.

MOVSHOVITZ-HADAR, N., JAHNKE, H., HOYLES, C. & BALL, D. (2002): *The Teaching of Proof.* In: LI, T. [Hrsg.]: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Bd. III, 907–920. Higher Education Press, Peking (China).

MSJK (2004): *Kernlehrplan für die Realschule in Nordrhein-Westfalen – Mathematik.* Ritterbach, Frechen.

MSJK (2007): *Kernlehrplan für das Gymnasium – Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen – Mathematik.* Ritterbach, Frechen.

NELSON, R. (1993): *Proofs Without Words. Exercises in Visual Thinking.* The Classroom Resource Materials 1. Mathematical Association of America, Washington (USA).

NEUBRAND, M. & MÖLLER, M. (1990): *Einführung in die Arithmetik: Ein Arbeitsbuch für Studierende des Lehramts.* Franzbecker, Bad Salzdetfurth.

OEVERMANN, U., KRAMBECK, J., KONAU, E. & ALLERT, T. (1979): *Die Methodologie einer »objektiven Hermeneutik« und ihre allgemeine forschungslogische Bedeutung in den Sozialwissenschaften.* In: SOEFFNER, H. [Hrsg.]: *Interpretative Verfahren in den Sozial- und Textwissenschaften*, 352–434. J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart.

PADBERG, F. (1997): *Einführung in die Mathematik I. Arithmetik.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

PEDEMONTE, B. (2007): *How can the Relationship between Argumentation and Proof can be Analysed.* In: Educational Studies in Mathematics, **66**, 1: 23–41.

PEIRCE, C. (1960): *Collected Papers of Charles Sanders Peirce (Edited by Charles Hartshorne and Paul Weiss.),* Bd. 5: *Pragatism and Pragmaticism* / Bd. 6: *Scientific Metaphysics.* University Press, Harvard (USA).

PIMM, D. (1983): *Against Generalization. Mathematics, Students and Ulterior Motives.* In: HERSHKOWITZ, R. [Hrsg.]: *Proceedings of the 7^{th} International Conference for the Psychology of Mathematics Education (pme 7, Rehovot, 24–29 July 1998)*, 52–56. The Weizmann Institute of Science, Rehovot (Israel).

Pólya, G. (1949): *Schule des Denkens (Aus dem Englischen übersetzt von Elisabeth Behnke).* Francke, Bern (Schweiz).

Pólya, G. (1962): *Mathematik und plausibles Schließen,* Bd. 1: *Induktion und Analogie in der Mathematik (Ins Deutsche übersetzt von Lulu Bechtolsheim).* Birkhäuser, Basel (Schweiz).

Pólya, G. (1963): *Mathematik und plausibles Schließen,* Bd. 2: *Typen und Strukturen plausibler Folgerung (Ins Deutsche übersetzt von Lulu Bechtolsheim).* Birkhäuser, Basel (Schweiz).

Ratzinger, W. (1992): *Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht.* Verband der wissenschaftlichen Gesellschaften Österreichs, Wien (Österreich) [Diss. Univ. Linz (dto.)].

Rav, Y. (1999): *Why do we Prove Theorems?* In: Philosophia Mathematica, **7**: 5–41.

Recio, A. & Godino, J. (2001): *Institutional and Personal Meanings of Mathematical Proof.* In: Educational Studies in Mathematics, **48**: 83–99.

Ricœur, P. (1972): *Der Text als Modell: Hermeneutisches Verstehen.* In: Bühl, W. [Hrsg.]: *Verstehende Soziologie. Grundzüge und Entwicklungstendenzen*, 252–283. Nymphenburger Verlagsbuchhandlung, München.

Rinvold, R. & Lorange, A. (2011): *Multimodal Derivation and Proof in Algebra.* In: Pytlak, M., Rowland, T. & Swoboda, E. [Hrsg.]: *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 233–242. University of Rzeszów (Polen).

Ritter, J. (1971): *Historisches Wörterbuch der Philosophie (Unter Mitwirkung von mehr als 700 Fachgelehrten).* Bd. 1: *A–C.* Schwabe & Co., Basel (Schweiz).

Rowland, T. (1998): *Conviction, Explanation and Generic Examples.* In: Olivier, A. & Newstead, K. [Hrsg.]: *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (*pme 22, 12–17 July 1998, Stellenbosch)*, Bd. 4, 65–72. Research Unit for Mathematics Education, Stellenbosch (Südafrika).

Rowland, T. (2000): *The Pragmatics of Mathematics Education. Vagueness and Mathematical Discourse.* Falmer Press, London (England).

Rowland, T. (2002): *Generic Proofs in Number Theory.* In: Campbell, S. & Zazkis, R. [Hrsg.]: *Learning and Teaching Number Theory. Research in Cognition and Instruction*, 157–184. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (Niederlande).

Schipper, W. & Hülshoff, A. (1984): *Wie anschaulich sind Veranschaulichungshilfen? Zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 10.* In: Grundschule, **16**, 4: 54–56.

Schneider, G. (1994): *Sozialwissenschaftliche Hermeneutik und "strukturale" Systemtheorie. Zu den Grenzen und Entwicklungsmöglichkeiten der "objektiven Hermeneutik".* In: Garz, D. & Kraimer, K. [Hrsg.]: *Die Welt als Text. Theorie, Kritik und Praxis der objektiven Hermeneutik*, 153–194. Suhrkamp, Frankfurt a.M.

Schütz, A. (1932): *Der sinnhafte Aufbau der sozialen Welt. Eine Einleitung in die verstehende Soziologie.* Julius Springer, Wien (Österreich).

SCHWARZKOPF, R. (2000): *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien.* texte zur mathematischen forschung und lehre 10, Franzbecker, Hildesheim [Diss. Univ. Münster].

SCHWARZKOPF, R. (2001): *Argumentationsanalysen im Unterricht der frühen Jahrgangsstufen — eigenständiges Schließen mit Ausnahmen.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, **22**, 3/4: 253–276.

SEMADENI, Z. (1976): *The Concept of Premathematics as a Theoretical Background for Primary Mathematics Teaching.* Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warschau (Polen).

SEMADENI, Z. (1981a): *Action Proofs in Primary Mathematics Teaching and in Teachers Training.* Preprint Nr. 237, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warschau (Polen).

SEMADENI, Z. (1981b): *A Principle of Schema Permanence in Defining Arithmetical Concepts.* Preprint Nr. 237, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warschau (Polen).

SEMADENI, Z. (1984): *Action Proofs in Primary Mathematics Teaching and in Teacher Training.* In: For the Learning of Mathematics, **4**, 1: 32–34.

SPECHT, B. (2009): *Variablenverständnis und Variablen verstehen. Empirische Untersuchungen zum Einfluss sprachlicher Formulierungen in der Primar- und Sekundarstufe.* texte zur mathematischen forschung und lehre 65, Franzbecker, Hildesheim [Diss. Univ. Oldenburg].

STEIN, M. (1981): *Kommentierte Bibliographie: Zum Beweisen im Mathematikunterricht (deutsch- und englischsprachige Literatur).* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, **13**: 63–75.

STEIN, M. (1986): *Beweisen: eine Analyse des Beweisprozesses und der ihn beeinflussenden Faktoren auf der Grundlage empirischer Untersuchungen zum Argumentationsverhalten von 11-13jährigen Schülern, ausgehend von einer systematisierenden Auseinandersetzung mit didaktischen Konzeptionen und empirischen Forschungsansätzen zum Beweisen.* texte zur mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen forschung und lehre 19, Franzbecker, Bad Salzdetfurth [Habil. Univ. Münster].

STEINBRING, H. (1993): *Die Konstruktion mathematischen Wissens im Unterricht – Eine epistemologische Methode der Interaktionsanalyse.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, **14**, 2: 113–145.

STEINER, M. (1978): *Mathematical Explanation.* In: Philosophical Studies, **34**: 135–151.

STOSCH, S. (1778): *Predigers zu Lüdersdorf kleine Beiträge zur nähern Kenntnis der Deutschen Sprache.* Mylius, Berlin.

STURM, J. (1670): *Des Unvergleichlichen Archimedes Kunst=Bücher oder heutigs Tags befindliche Schrifften aus dem Griechischen in das Hoch=Teutsche übersetzt und mit nothwendigen Anmerkungen durch und durch erläutert.* In Verlegung Pulus Fürstens, Kunst- und Buchhändlers Seel. Wittib und Erben, gedrukkt daselbst bey Christoph Gerhardt, Nürnberg.

TOULMIN, S. (1958): *The Uses of Argument.* University Press, Cambridge (England).

TOULMIN, S. (1975): *Der Gebrauch von Argumenten (Aus dem Englischen übersetzt von Ulrich Berk).* Scriptor, Kronberg / Ts.

Toulmin, S. (1996): *Der Gebrauch von Argumenten.* Beltz, Weinheim.

van Dormolen, J. (1977): *Learning to Understand what Giving a Proof Really Means.* In: Educational Studies of Mathematics, **8**: 27–34.

van Hiele, P. (1973): *Begrip & Inzicht. Werkboek van de wiskundedidactiek.* [Verständnis und Erkenntnis. Arbeitsbuch der Mathematikdidaktik] J. Muusses, Purmerend (Niederlande).

Vinner, S. (1983): *The Notion of Proof: Some Aspects of Students' Views at the Senior High Level.* In: Hershkowitz, R. [Hrsg.]: *Proceedings of the 7th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pme 7, 24–29 July 1996, Rehovot)*, 289–294. Weizmann Institute of Science, Rehovot (Israel).

Voigt, J. (1984): *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen.* Beltz, Weinheim / Basel (Schweiz) [Diss. Univ. Bielefeld].

Voigt, J. (1993): *Unterschiedliche Deutungen bildlicher Darstellungen zwischen Lehrerin und Schülern.* In: Lorenz, J. [Hrsg.]: *Mathematik und Anschauung*, 147–166. Aulis Verlag Deubner, Köln.

Voigt, J. (2011): *Rationale Modellierungsprozesse.* In: Haug, R. & Holzäpfel, L. [Hrsg.]: *Beiträge für den Mathematikunterricht (Vorträge auf der 45. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 21.02.2011 bis 25.02.2011 in Freiburg)*, Bd. 2, 867–870. WTM, Münster.

Voigt, J. (2013): *Eine Alternative zum Modellierungskreislauf.* In: Greefrath, G., Käpnick, F. & Stein, M. [Hrsg.]: *Beiträge für den Mathematikunterricht (Vorträge auf der 47. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 04.03.2013 bis 08.03.2013 in Münster)*, Bd. 2, 1046–1049. WTM, Münster.

Vollrath, H. (1967): *Der Beweis als Gewinnstrategie im Unterrichtsdialog.* In: Praxis der Mathematik, **11**: 297–300.

Vollrath, H. (1968): *Dialogisches Lehren von Beweisen.* In: Die Schulwarte, **22**: 765–771.

Vollrath, H. (1969): *Dialogisches Lehren von Beweisen.* In: *Beiträge für den Mathematikunterricht (Vorträge auf der 3. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 25.–29.März 1969 in Ludwigsburg)*, Bd. 1, 33–39. Hermann Schroedel Verlag, Hannover.

Walde, A. & Pokorny, J. (1973): *Vergleichendes Wörterbuch der indogermanischen Sprachen.* de Gruyter, Berlin.

Walsch, W. (1992): *Beweisen im Mathematikunterricht – logische, psychologische und didaktische Aspekte.* In: Der Mathematikunterricht, **6**: 23–32.

Weidmann, A. (1974): *Die Feldbeobachtung.* In: von Koolwijk, J. & Wieken-Mayser, M. [Hrsg.]: *Techniken der empirischen Sozialforschung*, Bd. 3, 9–26. Oldenbourg, München.

Wicke, E. (1985): *Formale und formalisierte Bildung. Anmerkungen zum wissenschaftsorientierten Unterricht.* In: Weiss, H. & Wicke, E. [Hrsg.]: *Pädagogische Theorie und schulische Ernstsituation. Diskussionen zwischen Studienseminar und Hochschule in Kassel.*, 53–64. Referat Schulpraktische Studien, Gesamthochschule Kassel.

WILLIAMS, E. (1979): *An Investigation of Senior High School Students' Understanding of the Nature of Mathematical Proof.* University of Alberta, Alberta (Kanada).

WILSON, T. (1973): *Theorien der Interaktion und Modelle soziologischer Erklärung.* In: HORU, E. [Hrsg.]: *Alltagswissen, Interaktion und gesellschaftliche Wirklichkeit. Symbolischer Interaktionismus und Ethnomethodologie*, Bd. 1, 54–79. Rowohlt, Reinbek.

WINTER, H. (1983a): *Prämathematische Beweise der Teilbarkeitsregeln.* In: mathematica didactica, **6**: 177–187.

WINTER, H. (1983b): *Zur Problematik des Beweisbedürfnisses.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, **4**, 1: 59–95.

WITTMANN, E. (1974): *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Vieweg, Braunschweig.

WITTMANN, E. (1985): *Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik.* In: mathematik lehren, **11**: 7–11.

WITTMANN, E. (1989): *The Mathematical Training of Teachers from the Point of View of Education.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, **10**: 291–308.

WITTMANN, E. (1993): *„Weniger ist mehr“, Anschauungsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule.* In: MÜLLER, K. [Hrsg.]: *Beiträge zum Mathematikunterricht (Vorträge auf der 27. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 22. bis 26.3.1993 in Freiburg / Schweiz)*, 394–397. Franzbecker, Hildesheim.

WITTMANN, E. (1996): *Operative Proofs in Primary Mathematics.* In: DE VILLIERS, M. & FURINGHETTI, F. [Hrsg.]: *Proceedings of Topic 8 'Proofs and Proving: Why, when, and how?' (8th International Congress on Mathematical Education, Sevilla 14–21 July*, 15–22. Association for Mathematics Education of South Africa, Centrahil (Südafrika).

WITTMANN, E. (2009): *Operative Proofs in Elementary Mathematics.* In: LIN, F., HSIEH, F., HANNA, G. & DE VILLIERS, M. [Hrsg.]: *ICMI Study 19: Proof and Proving in mathematics education*, Bd. 2, 251–256. The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, Taipei (Chinesisches Meer).

WITTMANN, E. & MÜLLER, G. (1988): *Wann ist ein Beweis ein Beweis?* In: BENDER, P. [Hrsg.]: *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis (Festschrift für Heinrich Winter)*, 237–258. Cornelsen, Berlin.

WITTMANN, E. & ZIEGENBALG, J. (2004): *Sich Zahl um Zahl hochhangeln.* In: MÜLLER, G., STEINBRING, H. & WITTMANN, E. [Hrsg.]: *Arithmetik als Prozess*, 35–53. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze.

WUNDERLICH, D. (1981): *Grundlagen der Linguistik.* WV Studien Bd. 17, 2. Aufl. Westdeutscher Verlag, Opladen.