Jörg Konopka

Gleichmäßig beste sequentielle Tests bei unabhängigen Versuchswiederholungen

2003

Angewandte Mathematik

Gleichmäßig beste sequentielle Tests bei unabhängigen Versuchswiederholungen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
im Fachbereich Mathematik und Informatik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Jörg Konopka
aus Herten

2003

Dekan:	Prof. Dr. Frank Natterer
Erster Gutachter:	Prof. Dr. Norbert Schmitz
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. Gerold Alsmeyer
Tag der mündlichen Prüfungen:	19.9.03 24.9.03 30.9.03
Tag der Promotion:	17.12.03

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. Norbert Schmitz, der diese Arbeit betreut hat. Ich danke ihm für wertvolle Hinweise und Anregungen während der Promotionszeit. Außerdem danke ich ihm als Lehrer.

Weiter bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Gerold Alsmeyer für die Übernahme und Erstellung des weiteren Gutachtens.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In den 50er und 60er Jahren erlebte die sequentielle Statistik einen Boom. Sequentielle Verfahren versprachen den Anwendern die Einsparung an Beobachtungszeit und somit an Kosten gegenüber den Einsatz von klassischen Verfahren beim Testen von Hypothesen. Außerdem ist es aus ethischen Gründen nicht vertretbar, dass z.B. ein neues wirksameres Verfahren zur Behandlung einer Krebsform erst nach Ablauf der üblichen 5 Jahren Testphase auf den Markt gebracht werden darf, obwohl die Daten viel früher deutlich auf eine größere Wirksamkeit hinweisen. Auch hier versprach die sequentielle Statistik Abhilfe.
In der klassischen Statistik wird nämlich der Beobachtungshorizont N vorher festgelegt und eine Entscheidung für oder gegen die Nullhypothese H_0 wird erst nach Ablauf aller N Experimente zu einem Irrtumsniveau α getroffen, ungeachtet wie informativ die bereits erhaltenen Daten sind. Dagegen steht in der sequentiellen Statistik das Bemühen im Vordergrund, möglichst frühzeitig mit dem Beobachten abzubrechen. Sequentielle Verfahren berücksichtigen daher zwei Entscheidungsaspekte: einen der die Frage betrifft, wann frühest möglich gestoppt werden kann, um eine signifkante Aussage zu treffen, und der andere betrifft die klassische Frage, ob H_0 abgelehnt werden kann oder nicht. Die wichtigsten sequentiellen Verfahren liefern dabei Sequential Probability Ratio Tests (SPRTs).

Die Folklore in der sequentiellen Statistik besagt: „Es gibt keine gleichmäßig besten sequentiellen Tests."
Diese These wurde allerdings nie bewiesen oder widerlegt. Sie wirkt nach wie vor als ein Grundsatz in der sequentiellen Statistik weiter. Mir sind keine Arbeiten über gleichmäßig beste sequentielle Tests für zusammengesetzte Hypothesen bekannt.
Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die genannte Aussage mathematisch zu überprüfen. Dazu wird die Aussage an folgender konkreten Problemstellung untersucht:
Es sollen bei unabhängigen Versuchswiederholungen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einseitige Hypothesen des Typs $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_2$ mit $\vartheta_2 \geq \vartheta_0$ getestet werden. Neben der üblichen Bedingung an die Fehlerwahrscheinlichkeit 1.Art wird zusätzlich von den zugelassenen sequentiellen Tests gefordert, dass unter einer Verteilung P_η, der erwartete Stichprobenumfang eine vorgegebene Schranke δ nicht überschreiten darf. Diese Bedingung ersetzt gewissermaßen den festen Stichprobenumfang aus der klassischen Statistik. Unter den genannten Bedingungen soll dann die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art auf H_1 minimiert werden bzw. die Güte auf H_1 maximiert werden, d.h. es sind Lösungen des Problems

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_\vartheta\, \varphi_t \overset{!}{=} sup & \forall \vartheta > \vartheta_2 \\ E_\vartheta\, \varphi_t \leq \alpha & \forall \vartheta \leq \vartheta_0 \\ E_\eta\;\, t \leq \delta & \end{array} \right\} \tag{0.0.1}$$

gesucht. Dieses Problem ist eine naheliegende Verallgemeinerung der klassischen Aufgabenstellung zur gleichmäßigen Optimalität.
Dabei werden sequentielle Tests als Paare $(t, (\varphi_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}})$ aufgefasst, bestehend aus einer Stoppzeit t und einer Folge von klassischen Tests $(\varphi_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$, dem Terminalentscheidungsverfahren (TV) (vgl. 1.1, 2.1).
Es wird zwischen zwei Arten von Randomisierungen unterschieden: Zum einen Randomisierungen bei den Terminalentscheidungen, welche durch die Verfahren φ_n als $[0,1]$-wertige Funktionen realisiert werden. Und zum anderen Randomisierungen bei den Stoppentscheidungen; diese werden durch stochastisch unabhängige $\mathcal{R}(0,1)$-vereilte Zusatzexperimente $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ermöglicht, die auch unabhängig von allen Beobachtungen sein sollen.
Die beiden Randomisierungsarten dienen dem Ausschöpfen der vorgegeben Niveaus: die Randomisierung bei den Terminalentscheidungen dem Ausschöpfen von α und die bei den Stoppentscheidungen dem Ausschöpfen von δ.

Das obige Problem soll im wesentlichen für einparametrige Exponentialfamilien untersucht werden.

Eines der Ergebnisse dieser Arbeit ist es, für das Problem (0.0.1) und verwandte Teilprobleme eine ganze Reihe von Beispielen für gleichmäßig beste sequentielle Tests zu liefern. Damit wird die Folklore widerlegt.
Andererseits zeigt diese Arbeit, dass zufriedenstellende gleichmäßige Optimaltätsaussagen, wie man sie aus der klassischen Statistik kennt, für sequentielle Verfahren nicht erhalten werden können. In diesem Sinne wird die Folklore der sequentiellen Statistik bestätigt.

Bei den Untersuchungen des Problems (0.0.1) wird zwischen endlichem und unendlichem Beobachtungshorizont unterschieden.
Dabei bedeutet endlicher Beobachtungshorizont für das Problem (0.0.1), dass zu einem $N \in \mathbb{N}$ nur sequentielle Tests zugelassen werden, die spätestens zum Zeitpunkt N stoppen. Zusätzlich wird in dieser Situation von der Schranke δ gefordert, dass $\delta < N$ gilt, um ein echtes sequentielles Problem zu erhalten, für das triviale Lösungen mit $t^* \equiv N$ ausgeschlossen sind. Bei unendlichem Horizont gibt es eine solche Einschränkung bzgl. dessen, wann spätestens gestoppt werden muss, nicht.
In dieser Arbeit werden die Unterschiede zwischen endlichem und unendlichem Beobachtungshorizont für das Problem (0.0.1) herausgearbeitet. Dazu erweist es sich als zweckmäßig, bei den zu testenden einseitigen Hypothesen zwischen aneinander grenzenden, d.h. $\vartheta_2 = \vartheta_0$ im Problem (0.0.1), und nicht aneinander grenzenden Hypothesen, d.h. $\vartheta_2 > \vartheta_0$ zu unterscheiden. Für diese Probleme werden folgende Ergebnisse erhalten. Dies ist Gegenstand von Kapitel 3:

- Für endlichen Horizont lassen sich gleichmäßig beste sequentielle Tests für aneinander grenzende Hypothesen angeben. Die wichtigsten Beispiele liefern sequentielle Tests, die sich durch Verkürzen eines besten Tests $\bar{\varphi}_N$ z.N.

α bei festem Stichprobenumfang N ergeben: Dabei wird ausgehend vom gleichmäßig besten Test des klassischen Testproblems zum Horizont N

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_\vartheta\,\varphi \stackrel{!}{=} sup & \forall\vartheta > \vartheta_0 \\ E_\vartheta\,\varphi \leq \alpha & \forall\vartheta \leq \vartheta_0 \end{array} \right\}$$

der Test $\bar{\varphi}_N$ - sofern dies möglich ist - durch früheres Stoppen als bei N so „verkürzt“ dass die Gütefunktion des erhaltenen sequentiellen Tests $(t, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ mit der von $\bar{\varphi}_N$ übereinstimmt (vgl. 3.1.1). Unter den so verkürzten sequentiellen Tests haben die Curtailed Inspection Plans (CIPs) eine ausgezeichnete Rolle: es handelt sich hierbei um sequentielle Tests, die stoppen so früh es geht und dabei pfadweise dieselbe Entscheidung treffen wie der Test $\bar{\varphi}_N$ (vgl. 1.3). Damit werden eine Fülle von Beispielen für gleichmäßig beste sequentielle Tests erhalten: Zum einen einseitige CIPs (vgl. 1.3.4) z.B. für die Klasse der Poissonverteilungen, der Gammaverteilungen und der Rechteckverteilungen, und zum anderen zweiseitige CIPs (vgl. 1.3.5) z.B. für die Klasse der Binomialverteilungen.
Einseitige CIPs bestehen aus Ersteintrittszeiten, die stoppen, sobald die Prüfgröße eine vorgegebene Schranke a überschreitet bzw. unterschreitet. Bei den zweiseitigen CIPs stoppt die zugehörige Ersteintrittszeit, wenn die Prüfgröße außerhalb eines Intervalls $[c_1, c_2]$ liegt.

Darüber hinaus zeigt ein Beispiel für die Klasse der Binomialverteilungen, dass die „verkürzten“ sequentiellen Tests nicht die einzigen gleichmäßig besten sequentiellen Tests ergeben (vgl. 3.1.3).
Und schließlich zeigt ein Beispiel für die Klasse der Normalverteilungen, dass wenig Hoffnung dazu besteht, neben den CIPs noch ganze weitere Beispielklassen für gleichmäßig beste sequentielle Tests für endlichen Horizont zu erhalten: Nämlich selbst in den gutartigsten und einfachsten Fällen wie für die Klasse der Normalverteilungen für Horizont $N = 2$ gibt es keine gleichmäßig besten sequentiellen Tests (vgl. 3.1.5).

- Für unendlichen Horizont ist Curtailed Inspection natürlich nicht ausführbar. Es besteht aber hier die Möglichkeit, gleichmäßig beste Tests $(t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ der Güte 1, d.h. mit $E_\vartheta\ \varphi^*_{t^*} = 1 \quad \forall\vartheta > \vartheta_2$, zu erhalten, die wegen der Bedingung $E_{\vartheta_0}\varphi^*_{t^*} \leq \alpha$ notwendig unter P_{ϑ_0} offen sind, d.h. mit positiver Wahrscheinlichkeit unter P_{ϑ_0} nicht stoppen. Solche optimalen Lösungen sind bei endlichem Horizont wegen der Äquivalenz einer einparametrigen Exponentialfamilie nicht möglich.
Aufgrund der Stetigkeit der Gütefunktion optimaler sequentieller Tests, kann es gleichmäßig beste Tests der Güte 1 nur für nicht aneinander grenzende Hypothesen geben. Geantwortet wird in diesem Zusammenhang auf die Frage, wie klein $\vartheta_2 > \vartheta_0$ gewählt werden kann, damit das Problem

(0.0.1) noch gleichmäßig beste sequentielle Tests der Güte 1 zulässt. Außerdem werden alle Situationen charakterisiert, in denen Tests der Güte 1 für das Problem (0.0.1) auftreten könnnen. Für diese Situationen werden zu vorgegebenen Niveaus $\alpha \in (0,1)$ und $\delta \in (1,\infty)$ Tests der Güte 1 konstruktiv bestimmt. Die ausgezeichneten Lösungen der Güte 1 ergeben randomisierte rechtsseitige SPRTs.

Die Methoden und Hilfsmittel, um diese Ergebnisse zu zeigen, werden in Kapitel 1 und Kapitel 2 vorbereitet.
Nach dem Vorbild der klassischen Statistik wird das obige Optimierungsproblem für zusammengesetzte Hypothesen dadurch gelöst, dass für einfache Hypothesen $H_0 = \{\vartheta_0\}$ und $H_1 = \{\vartheta_1\}$ mit $\vartheta_1 > \vartheta_2$ ein Neyman-Pearson-Lemma für sequentielle Tests formuliert wird.
Das ist Gegenstand von Kapitel 2:
Der Weg für den Beweis eines sequentiellen Neyman-Pearson-Lemmas für das Problem

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\vartheta_1} \varphi_t \stackrel{!}{=} sup \\ E_{\vartheta_0} \varphi_t \leq \alpha \\ E_\eta \; t \leq \delta \end{array} \right\} \tag{0.0.2}$$

ist durch die Habilitationsschrift von Müller-Funk [MF] vorbereitet.

1) Die Existenz optimaler sequentieller Tests wird nach dem Vorbild der Schwach*-Folgenkompaktheit der klassischen Tests mit Hilfe einer entsprechenden Folgenkompaktheitsaussage für die Menge der sequentiellen Tests erhalten. Dieser Existenzbeweis ist nicht konstruktiv.
Eine problematische Besonderheit tritt beim Neyman-Pearson-Problem mit unendlichem Horizont auf. Hier können trotz der Bedingung an den erwarteten Stichprobenumfang optimale sequentielle Tests $(t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ auftreten, die unter P_{ϑ_0} oder P_{ϑ_1} offen sind. Beispiele liefern dafür Tests der Güte 1. Daher muss, um die Existenz von Lösungen zu sichern, das Randomisieren im Unendlichen zugelassen werden, d.h. es wird eine randomisierte Entscheidungsfunktion φ_∞ benötigt. Praktisch gesehen macht das Randomisieren im „Unendlichen" natürlich keinen Sinn. In 2.2.6 wird aber gezeigt, dass im allgemeinen das sequentielle Neyman-Pearson-Problem unter allen abgeschlossenen sequentiellen Tests - dies sind sequentielle Tests $(t, \underset{\sim}{\varphi})$ mit $P_\vartheta(t < \infty) = 1 \; \forall \vartheta$ - keine Lösung besitzt.
Diese Probleme mit der Abgeschlossenheit der optimalen Lösung treten bei Müller-Funk nicht auf, da er zusätzliche Bedingungen an den erwarteten Stichprobenumfang unter P_{ϑ_0} und P_{ϑ_1} stellt.

2) Zur Formulierung hinreichender und notwendiger Bedingungen für Optimalität wird das Ausgangsproblem mit Hilfe eines Dualitätssatzes in zwei

Teilprobleme zerlegt. Zum einen in ein Problem des optimalen Stoppens $(S_{a,c}^{\mathcal{N}})$ (vgl. 2.4.1, 2.6) und zum anderen in ein Testproblem

$$(P_\alpha^t) \quad \begin{cases} E_{\vartheta_1}\varphi_t \overset{!}{=} sup \\ E_{\vartheta_0}\varphi_t \leq \alpha \\ \underset{\sim}{\varphi} \text{ TV} \end{cases} \tag{0.0.3}$$

unter einer festen Stoppzeit t. Hierbei kommen die Hilfsmittel aus der Theorie der Optimierung unter „konvexen" Nebenbedingungen zum Einsatz (vgl. 2.3).

Bei den Lösungen des Problems (0.0.2) zeigt sich für endlichen und unendlichen Horizont eine Analogie zu den Lösungen des Neyman-Pearson-Problems aus der klassischen Statistik: Die optimalen sequentiellen Tests $\varphi_{t^*}^*$ für endlichen und für unendlichen Horizont besitzen dieselbe 1-0-Gestalt wie die optimalen Tests im klassischen Fall.

Unterschiede treten auf im Zusammenhang mit der Frage, ob ähnlich wie beim klassichen Neyman-Pearson-Lemma ein optimaler Test von Güte kleiner als 1 die zur Verfügung stehenden Ressourcen voll ausschöpfen muss.
Für unendlichen Horizont bleibt diese Analogie bestehen.

Dagegen zeigt sich eine Abweichung bei endlichem Horizont. Bei endlichem Horizont gibt es die Möglichkeit einen optimalen sequentiellen Test $\varphi_{t^*}^*$ zu verkürzen, ohne dass sich die Gütefunktion verändert. Damit muss ein optimaler Test von Güte kleiner 1 nicht notwendig das Niveau δ für den erwarteten Stichprobenumfang ausschöpfen. Beipiele hierfür liefern CIPs (vgl. 2.4.5). Weitere Beispiele werden durch die Antwort auf die folgende Frage gegeben:
Lässt sich die Güte eines besten Tests für festen Stichprobenumfang durch eine weitere Beobachtung (bei unabhängigen Versuchswiederholungen) verbessern? Intuitiv zu erwarten ist, dass dies stets der Fall sein sollte. Für die Klasse der Bernoulliverteilungen muss dies aber nicht zutreffen: es wird gezeigt, dass es hierfür Situtionen gibt, in denen eine weitere Beobachtung nichts weiter an Güte einbringt.
Allgemeiner wird bewiesen, dass die Klasse der Bernoulli-Verteilungen sogar im wesentlichen die einzige Verteilungsklasse mit dieser Eigenschaft liefert. Dazu wird eine Charakterisierung aller Testsituationen angegeben, in denen durch eine weitere Beobachtung nichts an Güte gewonnen wird. Da die obige Fragestellung eher der klassischen Problemstellung zuzurechnen ist, wird die vollständige Antwort auf die Frage in den Anhang gestellt.

Abschließend werden in Kapitel 2 die Lösungen des Stopproblems $(S_{a,c}^{\mathcal{N}})$ bestimmt (vgl 2.6). Für endlichen Horizont sind die Lösungen prinzipiell durch Rückwärtsinduktion berechenbar.
Für unendlichen Horizont ist das auftretende $(S_{a,c}^{\mathcal{N}})$ Stopproblem von derselben

Struktur, wie das Stopproblem, welches beim Lösen des modifizierten Kiefer-Weiss-Problems auftritt. Hier kommt die Theorie des optimalen Stoppens für Markovsche Stoppsituationen zum Einsatz. Besonderes Interesse wird der Konstruktion randomisierter Lösungen des Stopproblems $(S_{a,c}^{\mathcal{N}})$ gewidmet. Randomisierte Stoppzeiten werden dafür benötigt, um das Niveau für den erwarteten Stichprobenumfang voll auszuschöpfen. Dazu wird gezeigt, dass jede Konvexkombination der frühesten optimalen Stoppzeit und der spätesten optimalen Stoppzeit wieder eine Lösung des Stopproblems ergibt. Diese Konstruktionsidee liefert den Schlüssel zur Konstruktion von Tests der Güte 1 zu beliebig vorgegebenen Niveaus.

Prinzipiell sind damit die Lösungen des Stopproblems $(S_{a,c}^{\mathcal{N}})$ für endlichen und unendlichen Horizont bestimmt. Leider lassen sich die Lösungen des Stopproblems bis auf in besonders einfachen Situationen nicht explizit angeben. Dadurch sind der Anwendung des sequentiellen Neyman-Pearson-Lemmas für die Untersuchung zusammengesetzter Hypothesen Grenzen gesetzt.

Einen anderen Zugang für die Untersuchung zusammengesetzter Hypothesen liefert das Teilproblem (P_α^t), das mit Hilfe des Dualititätssatzes aus dem Neyman-Pearson-Problem herausgeschält wurde: ein sequentielle Testproblem unter einer *festen* Stoppzeit.
Dass dieser Zugang auch fruchtbar ist, wird in Kapitel 1 gezeigt.
In Kapitel 1 wird umfassend untersucht, welche Optimalitätsaussagen man unter einer festen Stoppzeit erhalten kann: Zum einen wird untersucht, unter welchen Typen von Stoppzeiten für zusammengesetzte Hypothesen der Gestalt
$H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ und $H_1 : \vartheta \in (\vartheta_2, \hat{\vartheta})$ mit $\vartheta_2 \geq \vartheta_0$ und $\hat{\vartheta} > \vartheta_2$ optimale sequentielle Tests existieren. Hierbei wird wie beim Problem (0.0.1) zwischen aneinader grenzende und nicht aneinander grenzende Hypothesen unterschieden. Außerdem werden für aneinander grenzende Hypothesen neben gleichmäßig besten sequentiellen Tests auch lokal gleichmäßig beste Tests untersucht (vgl. 1.2.3, 1.7)
Zum anderen werden unter einer festen Stoppzeit Aussagen über lokal beste sequentielle Tests z.N. α gemacht. (vgl. 1.2.4, 1.8)

1) Für die Untersuchung (lokal) gleichmäßig bester sequentieller Tests z.N. α (für aneinander grenzende Hypothesen) wird für die Verteilungsklasse als Mindestvoraussetzung gefordert, dass für jeden möglichen Stoppzeitpunkt n ein isotoner Dichtequotient in einer Statistik S_n vorliege (vgl. S.25). Mit Hilfe eines sequentiellen Neyman-Pearson-Lemma für einfache Hypothesen (vgl. 1.4.1) wird eine notwendige Bedingung für die Existenz lokal gleichmäßig bester sequentieller Tests für einparametrige Exponentialfamilien bewiesen (vgl. 1.5.1). Diese notwendige Bedingung legt den Grundstein für eine Reihe von Negativaussagen für Stoppzeiten, die für das obige Test-

problem sinnvoll sind. Sinnvoll für das Testproblem

$$\begin{cases} E_\vartheta\,\varphi_t \overset{!}{=} sup & \forall\vartheta \in (\vartheta_2, \hat{\vartheta}) \\ E_\vartheta\,\varphi_t \leq \alpha & \forall\vartheta \leq \vartheta_0 \\ \underset{\sim}{\varphi}\ \text{TV} & \end{cases} \tag{0.0.4}$$

sind beschränkte und unbeschränkte Ersteintrittszeiten, die vorschreiben mit dem Beobachten abzubrechen, sobald deutliche Werte der Prüfgröße S_n für $H_1 : \vartheta > \vartheta_2$ durch große Werte der Prüfgröße S_n sichtbar sind oder für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ durch kleine Werte der Prüfgröße S_n.
Ähnlich wie bei den CIPs wird hierbei je nach Gestalt des Fortsetzungsgebietes noch zwischen einseitigen und zweiseitgen Ersteintrittszeiten unterschieden.
Es wird in 1.5 gezeigt, dass selbst unter der starken Voraussetzung, dass eine einparametrige Exponentialfamilie vorliege, unter beschränkten zweiseitigen Ersteintrittszeiten keine gleichmäßig besten sequentiellen Tests für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ existieren. Und unter unbeschränkten Ersteintritszeiten sogar keine lokal gleichmäßig besten Tests. Diese Negativaussagen liefern den Schlüssel für den Beweis der Negativaussagen des Ausgangsproblems (0.0.1) für endlichen und unendlichen Beobachtungshorizont.

Weiter wird ausgehend von der notwendigen Bedingung 1.5.1 auf die Frage geantwortet, welche Randomisierungsmöglichkeiten beim TV eines *lokal gleichmäßig besten* sequentiellen Tests bestehen. Es wird dabei gezeigt, dass durch die Randomisierungsweisen, die beim TV eines lokal gleichmäßig besten Tests erlaubt sind, nicht jedes vorgebene Niveau α ausgeschöpft werden. Im Prinzip darf nämlich wie bei den CIPs nur zum Endzeitpunkt randomisiert werden. Dies alles ist Gegenstand von 1.5

Nach den Negativaussagen unter unbeschränkten Ersteintrittszeiten ist es Ziel der Betrachtungen von 1.6 und 1.7, hinreichende Bedingungen für (lokal) gleichmäßige Optimalität unter beschränkten Ersteintrittszeiten zu formulieren: zum einen in 1.6 für einseitige Ersteintrittszeiten und zum anderen in 1.7 für zweiseitige Ersteintrittszeiten. Hierbei kommt das einfache Neyman-Pearson-Lemma zum Einsatz. Erste Beispiele für gleichmäßig beste sequentielle Tests unter beschränkten Ersteintrittszeiten liefern die CIPs. Diese Beispiele werden verallgemeinert.
In 1.6 werden nach dem Vorbild aus der klassischen Statistik Isotoniebedingungen für die Dichtequotienten der Verteilungsklasse formuliert, welche die Existenz gleichmäßig bester sequentieller Tests unter einseitigen beschränkten Ersteintrittszeiten garantieren. Der sequentielle Aspekt wird dadurch berücksichtigt, dass die Isotoniebedingungen zusätzlich die Verträglichkeit der einzelnen Stufen n untereinander, zu denen unter t gestoppt werden

kann, mitberücksichtigen.
Weiter werden zu beliebigem Niveau α unter geeigneten randomisierten beschränkten Ersteintrittszeiten gleichmäßig beste sequentielle Tests konstruktiv angegeben. Hierbei werden eine Reihe von Überlegungen angestellt, die sich mit dem Ausschöpfen des Niveaus auseinandersetzen. Es werden eine Fülle von Beispielen für gleichmäßig besten Tests gegeben, die von den CIPs abweichen.

2) In 1.9 und 1.10 werden für den Fall einparametriger Exponentialfamilien unter einer festen Stoppzeit Aussagen über gleichmäßig beste sequentielle Tests der Güte 1 für nicht aneinander grenzende Hypothesen gemacht. Als feste Stoppzeiten werden dabei ausschließlich unbeschränkte randomisierte rechtsseitige Ersteintrittszeiten betrachtet. Diesen Ersteintrittszeiten kommt nämlich eine ausgezeichnete Rolle bei der Behandlung von Tests der Güte 1 mit variierenden Stoppzeiten zu: In Kapitel 3 wird dazu gezeigt, dass diese Stoppzeiten Lösungen des zugehörigen Stopproblems (S^a) liefern (vgl. 3.2). Es wird hier zu beliebigem Niveau α konstruktiv ein gleichmäßig bester Tests der Güte 1 angegeben. Die Optimalitätsaussagen unter rechtsseitigen randomisierten Ersteintrittszeiten bereiten zudem den Beweis für die gleichmäßige Optimalität von randomisierten rechtsseitigen SPRTs unter variierenden Stoppzeiten vor.

   In 1.7 werden die Ideen zur Konstruktion gleichmäßig bester sequentieller Tests aus 1.6 auf zweiseitige Ersteintrittszeiten übertragen. Dabei zeigt sich, dass nur noch lokal gleichmäßige Optimalitätsaussagen gemacht werden können und stärkere Forderungen an die Verteilungsklassen getroffen werden müssen.

In 1.8 geht es um die Untersuchung lokal bester Test α-ähnlicher Tests. Hierbei soll unter allen α-ähnlichen Tests die Ableitung der Gütefunktion in ϑ_0 maximiert werden. Damit dieses Problem überhaupt sinnvoll wird, werden zunächst hinreichende Bedingungen für die Verteilungsklasse formuliert, damit die Gütefunktion sequentieller Tests differenzierbar ist. Mit einem Neyman-Pearson-Lemma für dieses Problem ist das Problem vollständig gelöst. Da es sich um ein einfaches Testproblem handelt, sind für die Existenz keine Einschränkungen an die Stoppzeit erforderlich.

Kapitel 1

Optimale sequentielle Tests bei fester Stoppzeit

a) Problemstellung und Grundlagen

Bei stochastisch unabhängigen, identisch verteilten Beobachtungen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sollen zwei Hypothesen H_0 und H_1 unter einer festen (randomisierten) Stoppzeit t getestet werden. Dabei ermöglichen stochastisch unabhängige $\mathcal{R}(0,1)$-verteilte Zusatzexperimente $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die auch unabhängig von allen Beobachtungen sein sollen, randomisierte Stoppentscheidungen. In diesem Kapitel soll untersucht werden, unter welchen Typen von Stoppzeiten für zusammengesetzte Hypothesen H_0 und H_1 optimale sequentielle Tests existieren und wie die Gestalt dieser Tests aussieht. Es erhebt sich dann die Frage, welche Aussagen über gleichmäßig optimale Tests aus der klassischen Testtheorie, d.h. bei festem Stichprobenumfang, sich auf sequentielle Tests übertragen lassen. Wir werden dazu einseitige Testprobleme behandeln. Den Grundstein zur Lösung einseitiger Testprobleme liefert in der klassischen Testtheorie bekanntlich das einfache Neyman-Pearson-Lemma. Entprechend werden wir hier eine Version für das sequentielle Testen aufstellen.
Die oben beschriebene Situation realisieren wir in einem *iid-Modell.*

1.1 Modellbildung

1.1.1 Das iid-Modell

Es sei $\mathcal{Q} = \{Q_\vartheta \,|\, \vartheta \in \Theta\}$ eine Familie von (nicht notwendig äquivalenten) W-Maßen auf einem Borelschen Raum $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ mit $Q_{\vartheta_0} \neq Q_{\vartheta_1}$ $\forall \vartheta_0 \neq \vartheta_1$ aus Θ. Weiter setzen wir voraus, dass die Familie $\mathcal{Q}$ durch ein σ-endliches Maß μ dominiert werde, und für $\vartheta \in \Theta$ bezeichne

$$f_\vartheta : \mathcal{X} \to [0, \infty) \quad \text{eine } \mu\text{-Dichte von } Q_\vartheta.$$

Das *iid-Modell* ist dann gegeben durch das Tupel

$$\mathcal{M} = (\Omega\,, \mathcal{A}, \underset{\sim}{\mathcal{C}}, \underset{\sim}{\mathcal{A}}, (P_\vartheta)_{\vartheta \in \theta}),$$

bestehend aus folgenden Größen

i) $\Omega = \mathcal{X}^{\mathbb{N}} \times (0,1)^{\mathbb{N}}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{B}^{\mathbb{N}} \otimes \mathbb{B}_{|(0,1)}{}^{\mathbb{N}},$

ii) $P_\vartheta = Q_\vartheta^{\mathbb{N}} \bigotimes \mathcal{R}(0,1)^{\mathbb{N}}, \quad \vartheta \in \theta,$

iii) $X_j \,:\, \Omega \to \mathcal{X}, \qquad X_j\big((x,u)\big) := x_j$ für $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}},$
$u = (u_1, u_2, \ldots) \in (0,1)^{\mathbb{N}}$ $(j \in \mathbb{N}),$
$U_n \,:\, \Omega \to (0,1), \;\; U_n\big((x,u)\big) := u_n$ für $x \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}, u \in (0,1)^{\mathbb{N}}$ $\qquad (n \in \mathbb{N}),$

iv) der Filtration $\underset{\sim}{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ mit
$\mathcal{C}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n), \quad \mathcal{C}_\infty = \sigma(X_n \,|\, n \in \mathbb{N}),$

v) der Filtration $\underset{\sim}{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ mit
$\mathcal{A}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n, U_1, \ldots, U_n)\;, \quad \mathcal{A}_\infty = \sigma(\mathcal{A}_n \,|\, n \in \mathbb{N}).$

□

1.1.2 Bemerkung

a) Die Filtration $\underset{\sim}{\mathcal{C}}$ gibt den Verlauf der Informationen an, den man aufgrund der Beobachtungen erhält und die Filtration $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ den Verlauf der Informationen , welche die Beobachtungen und Zusatzexperimente zusammen liefern.

b) Für $\vartheta_0 \neq \vartheta_1$ aus Θ folgt aus dem Borelschen Gesetz der großen Zahlen, selbst für den Fall $Q_{\vartheta_0} \approx Q_{\vartheta_1}$, dass die unabhängigen Kopplungen $P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_\infty}$ und $P_{\vartheta_1|\mathcal{C}_\infty}$ zueinander orthogonal sind, d.h.

$$\exists C \in \mathcal{C}_\infty : \; P_{\vartheta_1}(C) = 1 \text{ und } P_{\vartheta_0}(C) = 0.$$

□

Wir legen der gesamten Arbeit das *iid-Modell* zugrunde.

Für dieses Kapitel sei $t : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ eine feste Stoppzeit bzgl $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$
(d.h. $\{t = n\} \in \mathcal{A}_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$).
Dabei heiße eine Stoppzeit bzgl. $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ *randomisiert* und eine Stoppzeit bzgl $\underset{\sim}{\mathcal{C}}$ *nicht-randomisiert*.
Wir wollen a priori auch zulassen, dass die Stoppzeit unter einer Verteilung P_ϑ mit positiver Wahrscheinlichkeit nie zu stoppen braucht.
Hinsichtlich der Eigenschaft, wann eine Stoppzeit vorschreibt mit dem Beobachten abzubrechen, ob nach endlicher Zeit oder sogar spätestens nach einer festen Zeit N ($N \in \mathbb{N}$), werden wir folgende Bezeichnungen verwenden:

i) Die Stoppzeit t heiße unter P_ϑ **abgeschlossen**, falls gilt $P_\vartheta(t < \infty) = 1$, ansonsten **offen** unter P_ϑ.
   Die Stoppzeit t heiße *abgeschlossen*, wenn sie unter allen P_ϑ ($\vartheta \in \Theta$) abgeschlossen ist.

ii) Die Stoppzeit t heiße unter P_ϑ **unbeschränkt**, falls gilt:
   $P_\vartheta(t = n) > 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

iii) Die Stoppzeit t heiße **beschränkt**, falls gilt:
   es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit: $\quad P_\vartheta(t \leq N) \quad \forall \vartheta \in \Theta$.

Die Informationen, die man aufgrund der Stoppzeit erhalten kann, sind durch die σ-Algebra der t-Vergangenheit $\mathcal{A}_t$ gegeben, definiert durch

$$\mathcal{A}_t = \{A \in \mathcal{A} \mid \; A \cap \{t = n\} \in \mathcal{A}_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Eine Folge $\underset{\sim}{\varphi} = (\varphi_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ heisst *Terminalentscheidungsverfahren* (TV), falls gilt:

$$\varphi_n : \Omega \to [0,1] \text{ ist } \mathcal{C}_n - \text{messbar } \;\forall n \in \overline{\mathbb{N}},$$

d.h. jedes φ_n ist ein klassischer Test bei festem Stichprobenumfang $n \in \mathbb{N}$.
Dabei soll durch φ_∞, für den Fall, dass nie gestoppt wird, auch eine randomisierte Entscheidung ermöglicht werden; es werde also a priori zugelassen, dass $\varphi_\infty \in (0,1)$ mit positiver Wahrscheinlichkeit auftreten darf. Wir sprechen davon, dass wir zulassen wollen im „Unendlichen zu randomisieren “.
Das Randomisieren im Unendlichen macht natürlich aus praktisch statistischer Sicht wenig Sinn, da der Statistiker nur jeweils über endlich viele Daten verfügt.

Über die Rolle von φ_∞ sei hier nur soviel angemerkt, dass wir diese Entscheidungsfunktion nämlich für theoretische Hilfsaussagen im Rahmen von Existenzaussagen brauchen, bei denen es erlaubt ist, dass „Masse ins Unendliche wandert "(vgl. 2.2).

Zu einem TV $\underset{\sim}{\varphi}$ ist ein *sequentieller Test* (unter t) gegeben durch

$$\varphi_t = \sum_{n \in \overline{\mathbb{N}}} \varphi_n \, 1_{\{t=n\}}.$$

Jeder sequentielle Test $\varphi_t : \Omega \to [0,1]$ ist natürlich $\mathcal{A}_t$-messbar (vgl. Irle [I], 1.2.2).
Die Menge aller sequentiellen Tests mit fester Stoppzeit t bezeichnen wir mit

$$\Phi_t := \{\varphi_t \,|\, \underset{\sim}{\varphi} \text{ TV }\}.$$

Weiter werden wir zur Vereinfachung von Beweisschritten zu Φ_t folgende Obermenge betrachten:

$$\overline{\Phi_t} = \{\varphi \,|\, \varphi : \Omega \to [0,1] \; \mathcal{A}_t - \text{messbar}\}.$$

Die Elemente $\varphi \in \overline{\Phi_t}$ lassen sich in der Form $\varphi = \psi_t$ darstellen mit
$\psi_n : \Omega \to [0,1]$ $\mathcal{A}_n$-messbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\mathcal{C}_n \neq \mathcal{A}_n$ ist ψ_n aber nicht notwendig $\mathcal{C}_n$-messbar. Beide Mengen sequentieller Tests sind konvex. □

In dem iid-Modell wollen wir folgende Typen von „einseitigen" Optimierungsproblemen untersuchen.

1.2 Einseitige Aufgaben

Wir legen eine einparametrige Verteilungsklasse $\mathcal{Q} = \{Q_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}, \Theta \subset \mathbb{R}$ zugrunde. Weiter seien $t : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ eine feste Stoppzeit bzgl. $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$, $\alpha \in (0,1)$ sowie $\vartheta_0 \in \Theta$.

1.2.1 Einfache Neyman-Pearson-Aufgabe

Es sei $\vartheta_1 \in \Theta$ mit $\vartheta_1 \neq \vartheta_0$. Gesucht ist dann ein TV $\underset{\sim}{\varphi}^*$ mit

$$\text{i)} \quad E_{\vartheta_0}\varphi_t^* \leq \alpha$$

$$\text{ii)} \quad E_{\vartheta_1}\varphi_t^* = \sup_{\underset{\sim}{\varphi}:\, E_{\vartheta_0}\varphi_t \leq \alpha} E_{\vartheta_1}\varphi_t\,.$$

Für die Formulierung dieser Aufgabe werden wir folgende intuitivere Darstellung verwenden, welche die Nebenbedingung explizit macht.

$$(P_\alpha^t) \quad \begin{cases} E_{\vartheta_1}\varphi_t \overset{!}{=} sup \\ E_{\vartheta_0}\varphi_t \leq \alpha \\ \varphi_t \in \phi_t \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Ein sequentieller Test φ_t heiße **zulässig** für die Aufgabe (P_α^t), falls gilt $E_{\vartheta_0}\varphi_t \leq \alpha$.
Diese explizitere Darstellungsweise werden wir auch für die Formulierung aller weiteren Probleme der Optimierung unter Nebenbedingungen benutzen, sie ist dann entsprechend wie (P_α^t) zu verstehen. Ebenso sprechen wir bei den folgenden Problemen von einem *zulässigen* sequentiellen Test, falls er die Nebenbedingungen des Problems erfüllt.

1.2.2 Gleichmäßig beste Tests z.N. α für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_2$

Für $\vartheta_0, \vartheta_2 \in \overset{\circ}{\Theta}$ mit $\vartheta_0 \leq \vartheta_2$ betrachten wir das Problem

$$\begin{cases} E_\vartheta\,\varphi_t \overset{!}{=} sup \quad \forall \vartheta > \vartheta_2 \\ E_\vartheta\,\varphi_t \leq \alpha \quad \forall \vartheta \leq \vartheta_0 \\ \varphi_t \in \phi_t \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Außerdem werden wir folgende zwei Konzepte zur lokalen Optimalität betrachten (vgl. Witting [Wi], S.122):

1.2.3 Lokal gleichmäßig beste Tests z.N. α

Es sei $\vartheta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$. Ein Test φ_t^* heisst **lokal gleichmäßig bester z.N.** α Test für $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$, falls gilt:
es gibt ein $\vartheta_1 > \vartheta_0$ aus Θ, so dass φ_t^* die folgende Aufgabe löst

$$\begin{cases} E_\vartheta\, \varphi_t \overset{!}{=} sup \quad \forall \vartheta \in (\vartheta_0, \vartheta_1) \\ E_{\vartheta_0} \varphi_t \leq \alpha \\ \varphi_t \in \phi_t \end{cases} . \tag{1.2.3}$$

Der Test φ_t^* heisst **lokal gleichmäßig bester z.N.** α Test für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$, falls zusätzlich gilt: $E_\vartheta\, \varphi_t \leq \alpha \ \ \forall \vartheta \leq \vartheta_0$.

Bei den Problemen (1.2.2) mit $\vartheta_2 = \vartheta_0$ und (1.2.3) sprechen wir von Testproblemen mit *aneinander grenzenden* Hypothesen.

1.2.4 Lokal beste Tests z.N. α

Hier stellen wir an die Verteilungsklasse $\{Q_\vartheta \,|\, \vartheta \in \theta\}$ zusätzliche Bedingungen derart, dass die Gütefunktion $\vartheta \mapsto E_\vartheta\, \varphi_t$ eines sequentiellen Tests differenzierbar ist. Für $\vartheta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$ bezeichne

$$\triangledown E_{\vartheta_0} \varphi_t := \frac{d}{d\vartheta}\, E_\vartheta\, \varphi_t\, |_{\vartheta = \vartheta_0}$$

die Ableitung der Gütefunktion in ϑ_0.

a) Ein Test φ_t^* heisst **lokal bester α-ähnlicher Test** für
$H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$, falls er folgende Aufgabe löst

$$\begin{cases} \triangledown E_{\vartheta_0} \varphi_t \overset{!}{=} sup \\ E_{\vartheta_0}\, \varphi_t = \alpha \\ \varphi_t \in \phi_t \end{cases} \tag{1.2.4}$$

b) Ein Test φ_t^* heisst **lokal besser** als jeder Vergleichstest z.N. α für
$H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$, falls gilt

$$\forall\, TV\, \underset{\sim}{\varphi} : \ E_{\vartheta_0} \varphi_t \leq \alpha \ \exists \vartheta_1 = \vartheta_1(\underset{\sim}{\varphi})\ \forall \vartheta \in (\vartheta_0, \vartheta_1) : \quad E_\vartheta\, \varphi_t^* \geq E_\vartheta\, \varphi_t. \tag{1.2.5}$$

Natürlich ist im Falle der Differenzierbarkeit der Gütefunktion jeder lokal gleichmäßig beste Test z.N. α (d.h. Lösung von (1.2.3)) auch eine optimale Lösung von (1.2.4) und jede Lösung von (1.2.4) ist optimal für (1.2.5). Von den fünf betrachteten Aufgaben liefert (1.2.2) die stärkste Optimalitätsaussage. □

Für die Herleitung und Beschreibung der Lösungen von (1.2.1)-(1.2.5) spielen Dichtequotienten eine entscheidende Rolle.

1.2.5 Dichtequotienten

Für eine endliche Teilmenge von W-Maßen $\{P_{\vartheta_0}, P_{\vartheta_1}, \ldots, P_{\vartheta_m}\} \subset \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ sei P ein zum Summenmaß $\sum_{i=0}^m P_{\vartheta_i}$ äquivalentes W-Maß (z.B. $P = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^m P_{\vartheta_i}$). In dieser Arbeit werden nur die beiden Spezialfälle $m = 1$ und $m = 2$ auftreten. Bzgl. P bilden wir Dichten

$$M_n^i := \frac{dP_{\vartheta_i} \,|\, \mathcal{C}_n}{dP \,|\, \mathcal{C}_n} : \Omega \to [0, m+1] \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},\ i = 0, \ldots, m).$$

Da f_ϑ eine μ-Dichte von $P_\vartheta^{X_1}$ liefert, erhalten wir aufgrund der Definition des iid-Modells und der Rechenregeln für Radon-Nikodym-Ableitungen

$$\frac{M_n^1}{M_n^0} = \frac{dP_{\vartheta_1 | \mathcal{A}_n}}{dP_{\vartheta_0 | \mathcal{A}_n}} = \prod_{k=1}^n \frac{f_{\vartheta_1}}{f_{\vartheta_0}}(X_k) \quad P_{|\mathcal{C}_n} - \text{f.s.} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \tag{1.2.6}$$

$$\text{wobei } \frac{a}{0} := \infty \text{ für } a > 0.$$

Wegen der Orthogonalität von $P_{\vartheta_1|\mathcal{C}_\infty}$ und $P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_\infty}$ gibt es eine Menge $B \in \mathcal{C}_\infty$ mit $P_{\vartheta_0}(B) = 0$ und $P_{\vartheta_1}(B) = 1$, so dass:

a) $M_\infty^1(\omega) > 0, \quad M_\infty^0(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in B$,
   mit der obigen Konvention also $\frac{M_\infty^1}{M_\infty^0} = \infty$ auf B;

b) $M_\infty^1(\omega) = 0, \quad M_\infty^0(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in B^c$, also $\frac{M_\infty^1}{M_\infty^0} = 0$ auf B^c.

(Z.B. wähle man $B = \{M_\infty^1 > 0\} \cap C \cup \{M_\infty^0 = 0\}$ mit $C \in \mathcal{C}_\infty$, so dass $P_{\vartheta_0}(C) = 0$, $P_{\vartheta_1}(C) = 1$.)

Für die unter t gestoppten Dichten gilt:

$$M_t^i := \sum_{n \in \overline{\mathbb{N}}} M_n^i 1_{\{t=n\}} = \frac{dP_{\vartheta_i | \mathcal{A}_t}}{dP_{| \mathcal{A}_t}} \quad P_{| \mathcal{A}_t} - \text{f.s.}$$

$$E_{\vartheta_i} \varphi_t = E_P\,(\varphi_t\, M_t^i), \tag{1.2.7}$$

und die Gleichung (1.2.6) verallgemeinert sich zu

$$\frac{M_t^1}{M_t^0} = \frac{dP_{\vartheta_1 | \mathcal{A}_t}}{dP_{\vartheta_0 | \mathcal{A}_t}} = \prod_{k=1}^t \frac{f_{\vartheta_1}}{f_{\vartheta_0}}(X_k) \quad P_{|\mathcal{C}_t} - \text{f.s} \quad \text{auf } \{t < \infty\}.$$

□

Für die Untersuchungen in diesem Kapitel lassen wir auch zu, dass die feste diskretwertige Stoppzeit $t : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ randomisiert sein kann. Gemäß unserer Modellbildung steckt die Randomisierung im W-Raum in Form von $\mathcal{R}(0,1)$-verteilten Zusatzexperimenten $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wie bei den TVs, die sich als [0,1]-wertige Funktionen als Übergangskern auffassen lassen, der das Zusatzexperiment enthält, können wir auch die Randomisierungen für die Stoppzeit t durch einen Übergangskern in die Entscheidungsfunktion bringen. Solche Entscheidungsfunktionen bezeichnen wir in Anlehnung an Müller-Funk [MF] als *Abbruchregeln*:

1.2.6 Abbruchregeln

Zu einer Stoppzeit t bzgl. $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ kann man einen $\underset{\sim}{\mathcal{C}}$-adaptierten Prozeß $\underset{\sim}{g} = (g_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ mit Werten in $[0,1]$ bilden, so daß g_n die (bedingte) Wahrscheinlichkeit angibt, genau zum Zeitpunkt n aufzuhören, unter Berücksichtigung der ersten n Beobachtungen.
Allgemeiner bezeichnen wir jeden zu $\underset{\sim}{\mathcal{C}}$ adaptierten $[0,1]$-wertigen Prozeß $\underset{\sim}{g} = (g_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ mit

$$\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} g_n = 1 \quad P\text{-}f.s.$$

als *Abbruchregel*.
Die Verwendung von *Abbruchregeln* hat einen wichtigen analytischen Vorteil: Die Menge aller Abbruchregeln ist abgeschlossen gegenüber Konvexkombinationen. Davon werden wir im Kapitel 2 beim Beweis der schwach*-Folgenkompaktheit und bei der Herleitung eines Dualitätssatzes für $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ Gebrauch machen.

Das iid-Modell 1.1.1 erlaubt es, in dem nachfolgenden Sinne von Stoppzeiten problemlos auf Abbruchregeln überzugehen und umgekehrt.

1.2.7 Satz (vgl. Irle Transactions, Prague Conference(1990) Vol.B p.13)

i) Für jede Stoppzeit t bzgl. $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ gibt es eine Abbruchregel $\underset{\sim}{g}$ mit

$$\begin{aligned} g_n &= P_\bullet(t = n \mid \mathcal{C}_n), \ \ d.h. \\ g_n &= P_\vartheta(t = n \mid \mathcal{C}_n) \quad P_\vartheta \mid \mathcal{C}_n\text{-}f.s. \quad \forall\, \vartheta \in \theta,\ n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Die Abbruchregel $\underset{\sim}{g}$ ist durch (1.2.8) P_ϑ-f.s. eindeutig bestimmt für alle $\vartheta \in \Theta$.

ii) Umgekehrt wird zu jeder Abbruchregel $\underset{\sim}{g}$ durch

$$t = \inf \{\, n \in \mathbb{N} \mid U_n \leq \frac{g_n}{1 - \sum\limits_{j \leq n} g_j} \,\} \quad (\tfrac{0}{0} := 0,\ \inf \emptyset := \infty,\ \textit{leere Summe} := 0),$$

eine Stoppzeit definiert, für die (1.2.8) gilt.

1.2.8 Bemerkung

Wegen (1.2.6) ist gemäß des Neyman-Kriteriums (vgl. Witting [Wi], Satz 3.19 auf S.344) für jedes $n \in \mathbb{N}$ die σ-Algebra $\mathcal{C}_n$ suffizient für $\{P_\vartheta \,|\, \mathcal{A}_n \ :\ \vartheta \in \theta\}$. Somit gibt es eine vom Parameter $\vartheta \in \theta$ unabhängige Version der bedingten Wahrscheinlichkeit $g_n = P_\bullet(t = n \,|\, \mathcal{C}_n)$, was wir im folgenden bei der Konstruktion von randomisierten Stoppzeiten mitbenutzen werden.

1.2.9 Korollar

Seien t eine Stoppzeit und $\underset{\sim}{g}$ eine Abruchregel, die über (1.2.8) miteinander in Beziehung stehen, und $R \in \{P_{\vartheta_0}, P_{\vartheta_1}, P_{\vartheta_2}, P\}$.
Dann gilt für jeden zu $\underset{\sim}{\mathcal{C}}$ adaptierten reellwertigen Prozeß $\underset{\sim}{X} = (X_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$,
der **nicht negativ oder $\mathbb{L}_1(R)$-dominiert** ist, d.h. $\sup_{n \in \overline{\mathbb{N}}} |X_n| \in \mathbb{L}_1(R)$

$$E_R\, X_t = \sum_{n \in \overline{\mathbb{N}}} E_R\,(X_n\, 1_{\{t=n\}}) = \sum_{n \in \overline{\mathbb{N}}} E_R\,(X_n\, g_n).$$

Begründung:
Zunächst gilt wegen der stochastischen Unabhängigkeit von (X_n) und (U_n)

$$P_\vartheta(t = n \,|\, \mathcal{C}_n) = P_\vartheta(t = n \,|\, \mathcal{C}_\infty) \quad \forall\, \vartheta \in \theta,\ n \in \overline{\mathbb{N}},$$

so daß sich die Bedingung (1.2.8) wegen $g_\infty = 1 - \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n$ *P-f.s.* und monotoner Konvergenz für bedingte Erwartungswerte auch auf den Fall $n = \infty$ überträgt. Außerdem gilt (1.2.8) auch für das W-Maß P. Die Aussage folgt dann aus monotoner bzw. majorisierter Konvergenz und der Glättungsregel für bedingte Erwartungswerte. □

Als nächstes stellt sich die Frage, ob für die Aufgaben (1.2.1) bis (1.2.5) Lösungen existieren?
Diese Frage wird allgemein nicht mit ja beantwortet werden können :
Bereits für den trivialen Spezialfall, dass t eine konstante Stoppzeit definiert, d.h. $t \equiv N$, benötigt man i.a. noch zusätzliche Forderungen an die Struktur des Dichtequotienten. Es ist aus der klassischen Testtheorie bekannt (vgl. Witting [Wi], Satz 2.24 auf S.210), dass für die Existenz gleichmäßig bester Tests z.N. α ein isotoner Dichtequotient für die Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ hinreichend ist und nach Pfanzagl [P], Theorem 4.5.4 auf Seite 140, auch im wesentlichen notwendig.
Wird diese Forderung auch für das Testen unter beliebigen nichtkonstanten Stoppzeiten ausreichend sein?
Auch diese Frage wird sich so allgemein nicht beantworten lassen, es wird zu erwarten sein, dass wir Aussagen über gleichmäßige Optimalität für beliebige Stoppzeiten nicht werden erhalten können, selbst unter der starken Voraussetzung, dass $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Exponentialfamilie ist, denn die gewählte feste Stoppzeit sollte selbstverständlich zum Problem passen. So wird beispielsweise unter einer Stoppzeit, die für sehr kleine Werte des Dichtequotienten $\frac{M_n^1}{M_n^0}$ -was für H_0 spricht- mit hoher Wahrscheinlichkeit stoppt, eine Lösung für (1.2.2) nicht existieren, was in dieser Arbeit noch gezeigt wird.
Daher fragt sich: Welche Forderungen -neben denen an die Verteilungsklasse- müssen wir zusätzlich an die Struktur der Stoppzeiten stellen, um Lösungen für das Problem (1.2.2) zu erhalten?

Um zu erkennen, dass es lohnend ist , sich diesen Fragen zuzuwenden, notieren wir zunächst einige Beispiele für gleichmäßig beste sequentielle Tests z.N. α bei nicht konstanter Stoppzeit.
Eine solche Klasse von ersten Beispielen für die Existenz gleichmäßig bester Tests z.N. α (und somit auch Lösungen von (1.2.1),(1.2.2)-(1.2.5)) bei nichtkonstanter Stoppzeit, liefern Curtailed Inspection Plans (CIPs). Die dabei auftretenden Stoppzeiten sind die naheliegendsten, welche zum Problem passen: beschränkte Ersteintrittszeiten, die sich durch Verkürzen des gleichmäßig besten Tests bei festem Stichprobenumfang ergeben. So einfach diese ersten Beispiele auch sind, sie werden uns erste Einsichten über die allgemeinere Struktur von gleichmäßig besten sequentiellen Tests geben.

1.3 Curtailed Inspection Plans (CIPs)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ habe $\mathcal{Q}^n = \{Q_\vartheta^n \mid \vartheta \in \Theta\}$ einen*isotonen Dichtequotienten* in $\hat{S}_n : \mathcal{X}^n \to \mathbb{R}$, d.h. für alle $\vartheta_0 < \vartheta_1$ aus Θ gibt es eine isotone Funktion $H^n_{\vartheta_0,\vartheta_1} : \mathbb{R} \to [0,\infty]$, so dass gilt

$$\begin{aligned} \frac{M_n^1}{M_n^0} \quad &= \quad H^n_{\vartheta_0,\vartheta_1}(S_n) \quad (P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_n} + P_{\vartheta_1|\mathcal{C}_n}) - f.s., \\ \textit{wobei} \quad & S_n := \hat{S}_n(X_1,\ldots,X_n) : \Omega \to \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Unter dieser Voraussetzung wird bekanntlich zu einem festem Stichprobenumfang N ein gleichmäßig bester Test z.N. α für $H_0 : \vartheta \le \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ gegeben durch

$$\bar{\varphi}_N := \begin{cases} 1 & & & > & \\ \gamma_N & \text{für} & S_N & = & c_{N,\alpha} \\ 0 & & & < & \end{cases}, \quad \text{mit} \tag{1.3.2}$$

$\gamma_N \in [0,1]$, $c_{N,\alpha} \in \mathbb{R}$ derart, dass $P_{\vartheta_0}(S_N > c_{N,\alpha}) + \gamma_N P_{\vartheta_0}(S_N = c_{N,\alpha}) = \alpha$ (vgl. Witting [Wi], Satz 2.24 auf S.210).
Dabei kann $c_{N,\alpha}$ als das kleinste α-Fraktil von $P_{\vartheta_0}^{S_N}$ gewählt werden, d.h. $c_{N,\alpha} = \inf\{c \in \mathbb{R} \mid P_{\vartheta_0}(S_N > c) \le \alpha\}$

Zu $\bar{\varphi}_N$ unterscheiden wir zwischen *verkürzten* sequentiellen Tests und *CIPs*:

i) Ein sequentieller Test φ_t heiße zu $\bar{\varphi}_N$ **verkürzter** Test, wenn gilt: $\varphi_t = \bar{\varphi}_N$ und $t \le N$.

ii) Ein zu $\bar{\varphi}_N$ verkürzter sequentieller Test $\varphi^*_{t^*}$ heiße **CIP** (Curtailed Inspection Plan) zu $\bar{\varphi}_N$, falls gilt $t^* \le t$ für jeden zu $\bar{\varphi}_N$ verkürzten Test φ^*_t.

Damit erhalten wir:

1.3.1 Bemerkung

a) Ein zu φ^*_N verkürzter Test φ_t kann nur zum Endzeitpunkt randomisieren, d.h. auf der Menge $\{t = N\}$.

b) Jeder zu φ^*_N verkürzter Test φ_t liefert einen gleichmäßig besten Test z.N. α für H_0 gegen H_1 im Sinne von (1.2.2).

c) Ein CIP $\varphi^*_{t^*}$ zu φ^*_N ist offensichtlich P-f.s. eindeutig bestimmt, daher sprechen wir im folgenden von dem CIP von φ^*_N.

Als nächstes geben wir Verteilungsklassen an, die der Isotoniebedingung (1.3.1) genügen. Die wichtigsten liefern einparametrige Exponentialfamilien.

1.3.2 Einparametrige Exponentialfamilien:

Es sei Q eine einparametrige Exponentialfamilie über $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ mit μ-Dichten der Form

$$f_\vartheta = C(\vartheta) \cdot e^{\zeta(\vartheta)T} \cdot h \quad \text{mit } h(x) > 0 \; \forall x \in \mathcal{X} \text{ und } \vartheta \mapsto \zeta(\vartheta) \text{ streng isoton.}$$

Für unsere Untersuchungen stellen wir die einparametrige Exponentialfammilie in natürlicher Parametrisierung $\{Q_\zeta \mid \zeta \in \mathcal{Z}\}$ dar mit μ-Dichten der Gestalt

$$f_\zeta = e^{\zeta T - b(\zeta)} \cdot h, \tag{1.3.3}$$

wobei $\mathcal{Z} = \{\zeta \in \mathbb{R} \mid \int_{\mathcal{X}} e^{\zeta T} h d\mu < \infty\}$ den natürlichen Parameterraum bezeichne. Das Testproblem (1.2.2) schreibt sich in natürlicher Parametrisierung um zu $H_0 : \zeta \leq \zeta_0, \; H_1 : \zeta > \zeta_0$ mit $\zeta_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{Z}}$.

Im weiteren verwenden wir folgende bekannte analytische Eigenschaften einparametriger Exponentialfamilien:

1.3.2.1 Satz (vgl. [Wi] S.152: Satz 1.164, S.214: Satz 2.28)

a) Der natürliche Parameterraum $\mathcal{Z}$ ist ein nicht leeres Intervall $< \underline{\zeta}, \overline{\zeta} >$.

b) Die Abbildung $\zeta \mapsto b(\zeta)$ ist strikt konvex auf $\mathcal{Z}$ und liefert auf $\overset{\circ}{\mathcal{Z}}$ eine C^∞-Funktion mit

$$b'(\zeta) = E_\zeta T(X_1)$$
$$b''(\zeta) = V_\zeta T(X_1).$$

c) Für jede beschränkte messbare Funktion $\psi : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ wird durch

$$\zeta \mapsto E_\zeta \psi(X_1) = \int_{\mathcal{X}} \psi e^{\zeta T} h d\mu$$

eine C^∞-Funktion auf $\mathcal{Z}$ definiert mit der Ableitung

$$\bigtriangledown E_{\zeta_0} \psi(X_1) = \int_{\mathcal{X}} \psi \bigtriangledown \log f_{\zeta_0} dP_{\zeta_0}^{X_1}. \tag{1.3.4}$$

d) Für jede beschränkte messbare und Q_ζ^T-f.s. isotone Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nicht Q_ζ^T-f.s. konstant ist, liefert $\zeta \mapsto E_\zeta \psi(X_1)$ eine streng isotone Funktion.

e) Bezeichne zu $\zeta_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{Z}}$ und $\zeta \neq \zeta_0$ aus $\mathcal{Z}$

$$\begin{aligned} \triangle_0(\zeta) &:= \frac{b(\zeta)-b(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}, \quad \triangle_0(\zeta) := b'(\zeta_0), \quad d_0(\zeta) := \triangle_0(\zeta) - b'(\zeta_0), \\ d_0 &:= \lim_{\zeta \to \overline{\zeta}} d_0(\zeta), \end{aligned}$$

dann gilt aufgrund der strikten Konvexität von b:

$$\begin{array}{rcl} \triangle_0(\zeta) \mathop{\gtrless}\limits^{<}_{>} b'(\zeta) & \text{für} & \zeta \mathop{\gtrless}\limits^{>}_{<} \zeta_0 \\ d_0(\zeta) \mathop{\gtrless}\limits^{>}_{<} 0 & \text{für} & \zeta \mathop{\gtrless}\limits^{>}_{<} \zeta_0, \\ \zeta \mapsto d_0(\zeta) & \text{ist} & \text{streng isoton mit Supremum } d_0. \end{array}$$

1.3.2.2 Bemerkung

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt $\mathcal{Q}^n$ einen streng isotonen Dichtequotienten in

$$\hat{S}_n(x_1 \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i) - nb'(\zeta_0), \tag{1.3.5}$$

denn es gilt für alle $\zeta_0 < \zeta_1$ aus $\mathcal{Z}$ $\quad (P_{\zeta_0|\mathcal{C}_n} + P_{\zeta_1|\mathcal{C}_n}) -$ f.s. :

$$\frac{M_n^1}{M_n^0} = e^{(\zeta_1-\zeta_0)S_n} \cdot e^{-n(\zeta_1-\zeta_0)d_0(\zeta_1)}. \tag{1.3.6}$$

b) Natürlich besitzt $\mathcal{Q}^n$ auch einen streng isotonen Dichtequotienten in $x \mapsto \sum_{i=1}^n T(x_i)$.
Für das sequentielle Testen ist dies aber nicht die geeignete Folge von Prüfgrößen. An der Form des Dichtequotienten in (1.3.6) erkennt man nämlich, dass aufgrund des Neyman-Kriteriums die Statistik $(\sum_{i=1}^t T(X_i), t)$ suffizient ist für $\{P_{\zeta|\mathcal{A}_t} \mid \zeta \in \mathcal{Z}\}$, nicht aber die Statistik $\sum_{i=1}^t T(X_i)$ (bis auf die Ausnahmen $t \equiv n$).
Bei unseren Untersuchungen über optimale sequentielle Tests werden wir immer wieder auf folgende wichtige Beispiele für einparametrige Exponentialfamilien zurückgreifen:

1.3.2.3 Beispiele

a) **Binomialverteilungen:** Für $m \in \mathbb{N}$ sei $Q_\vartheta = \mathcal{B}(m, \vartheta),\ \vartheta \in (0,1)$, d.h.

$$\frac{dQ_\vartheta}{d\mu_\mathcal{X}}(x) = \binom{m}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{m-x}, \quad \mathcal{X} = \{0, \ldots, m\}$$

Natürliche Parametrisierung:

$$\begin{aligned}
&\zeta(\vartheta) = \log\frac{\vartheta}{1-\vartheta}, \quad \mathcal{Z} = \mathbb{R} \\
&b(\zeta) = m \cdot \log(1+e^{\zeta}), \quad b'(\zeta) = m\frac{e^{\zeta}}{1+e^{\zeta}} = m\vartheta, \\
&d_0 = m(1-\vartheta_0), \\
&T(x) = x.
\end{aligned}$$

b) **Negative Binomialverteilungen:** Für $k \in \mathbb{N}$ sei $Q_\vartheta = NB(k,\vartheta),\ \vartheta(0,1)$, d.h.

$$\frac{dQ_\vartheta}{d\mu_{\mathcal{X}}}(x) = \binom{x+k-1}{k-1}(1-\vartheta)^x\vartheta^k, \quad \mathcal{X} = \mathbb{N}_0$$

Natürliche Parametrisierung:

$$\begin{aligned}
&\zeta(\vartheta) = \log\frac{1}{1-\vartheta}, \quad \mathcal{Z} = (0,\infty) \\
&b(\zeta) = k \cdot \log(\frac{1}{1-e^{-\zeta}}), \quad b'(\zeta) = -k\frac{e^{-\zeta}}{1-e^{-\zeta}} \in (-\infty, 0), \\
&d_0 = k\frac{1-\vartheta_0}{\vartheta_0}, \\
&T(x) = -x.
\end{aligned}$$

c) **Poissonverteilungen:** $Q_\vartheta = Poi(\vartheta),\ \vartheta \in (0,\infty)$, d.h.

$$\frac{dQ_\vartheta}{d\mu_{\mathcal{X}}}(x) = e^{-\vartheta}\frac{\vartheta^x}{x!}, \quad \mathcal{X} = \mathbb{N}_0$$

Natürliche Parametrisierung:

$$\begin{aligned}
&\zeta(\vartheta) = \vartheta, \quad \mathcal{Z} = (0,\infty) \\
&b(\zeta) = e^{\zeta}, \quad b'(\zeta) = e^{\zeta} \in (0,\infty), \\
&d_0 = \infty, \\
&T(x) = x.
\end{aligned}$$

d) **Normalverteilungen mit bekannter Varianz:**
Für $\sigma^2 \in (0,\infty)$ sei $Q_\vartheta = \mathcal{N}(\vartheta,\sigma^2),\ \vartheta \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\frac{dQ_\vartheta}{d\lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\vartheta)^2}{2\sigma^2}}, \quad \mathcal{X} = \mathbb{R}$$

Natürliche Parametrisierung:

$$\begin{aligned}
&\zeta(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\sigma^2}, \quad \mathcal{Z} = \mathbb{R}\\
&b(\zeta) = \frac{1}{2}\sigma^2\zeta^2, \quad b'(\zeta) = \sigma^2\zeta \in \mathbb{R},\\
&d_0 = \infty,\\
&T(x) = x.
\end{aligned}$$

e) **Gammaverteilungen mit festem Faltungsparameter :**
Für $\mu \in (0,\infty)$ sei $Q_\vartheta = \Gamma(\vartheta,\mu),\ \vartheta \in (0,\infty)$, d.h.

$$\frac{dQ_\vartheta}{d\lambda}(x) = \frac{\vartheta^\mu}{\Gamma(\mu)}x^{\mu-1}e^{-\vartheta x}, \quad \mathcal{X} = (0,\infty)$$

Natürliche Parametrisierung:

$$\begin{aligned}
&\zeta(\vartheta) = \vartheta, \quad \mathcal{Z} = (0,\infty)\\
&b(\zeta) = -\mu\log\zeta, \quad b'(\zeta) = -\frac{\mu}{\zeta} \in (-\infty,0),\\
&d_0 = \frac{\mu}{\zeta_0},\\
&T(x) = -x.
\end{aligned}$$

Der Spezialfall $\mu = 1$ liefert die Exponentialverteilungen $Exp(\vartheta)$. □

Ein Beispiel für eine nichtäquivalente Verteilungsklasse, die der Isotoniebedingung (1.3.1) genügt, liefert die Klasse der

1.3.3 Rechteckverteilungen mit fester Unter-bzw. Obergrenze

a) Für $a \in \mathbb{R}$ sei $\mathcal{Q}_a = \{\mathcal{R}(a,\vartheta) \mid \vartheta > a\}$,

dann hat $\mathcal{Q}_a^n$ isotonen Dichtequotienten in

$$\hat{S}(x_1,\ldots,x_n) = \max(x_1,\ldots,x_n). \tag{1.3.7}$$

Denn es gilt für alle $\vartheta_1 > \vartheta_0 > a \quad (P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_n} + P_{\vartheta_1|\mathcal{C}_n})$ – f.s. :

$$\frac{M_n^1}{M_n^0} = \begin{cases} \infty \\ (\frac{\vartheta_0-a}{\vartheta_1-a})^n, \end{cases} \quad \max(X_1\ldots,X_n) \begin{matrix} > \\ \le \end{matrix} \vartheta_0.$$

b) Für $b \in \mathbb{R}$ sei $\mathcal{Q}^b = \{\mathcal{R}(\vartheta,b) \mid \vartheta < b\}$, dann hat $(\mathcal{Q}^b)^n$ hat isotonen Dichtequotienten in

$$\hat{S}(x_1, \dots, x_n) = \min(x_1, \dots, x_n). \tag{1.3.8}$$

Denn es gilt für alle $\vartheta_0 < \vartheta_1 < b \quad (P_{\vartheta_0 | \mathcal{C}_n} + P_{\vartheta_1 | \mathcal{C}_n}) -$ f.s. :

$$\frac{M_n^1}{M_n^0} = \begin{cases} 0 \\ (\frac{b-\vartheta_0}{b-\vartheta_1})^n, \end{cases} \quad \min(X_1 \dots, X_n) \begin{matrix} < \\ \geq \end{matrix} \vartheta_1.$$

Hiermit bekommen wir Beispiele, um zu φ_N^* aus (1.3.1) CIPs anzugeben, wir unterscheiden dabei zwischen ein- und zweiseitigen CIPs:

1.3.4 Einseitige CIPs

Genügen die Prüfgrößen S_n, $n \leq N$ aus (1.3.1) der Bedingung

a) $S_N \geq S_n + (N-n)A$, für ein $A \in \mathbb{R}$,

dann ist ein zu $\bar{\varphi}_N$ verkürzter Test gegeben durch

$$t_A^N := \inf\{n \leq N \mid S_n > c_{N,\alpha} - (N-n)A\} \quad (\inf \emptyset := N) \tag{1.3.9}$$

zusammen mit dem TV

$$\varphi_n^* := \begin{cases} 1 & & & > \\ \gamma_N & \text{für} & S_n & = & c_{N,\alpha} - (N-n)A, \ (n \leq N). \\ 0 & & & < \end{cases}$$

Beispiele:

Der Test $\varphi_{t_A^N}^*$ liefert einen zu $\bar{\varphi}_N$ verkürzten Test für den Fall, dass

i) $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Exponentialfamilie definiert mit $T(X_i) \geq A + b'(\zeta_0)$,
insb. liefert für $Q_\vartheta = Poi(\vartheta)$ mit $A = -b'(\zeta_0) = -\vartheta_0$ der Test $\varphi_{t_A^N}^*$ den CIP zu $\bar{\varphi}_N$;

ii) $Q_\vartheta = \mathcal{R}(a, \vartheta)$ mit $A = 0$. Auch hier liefert $\varphi_{t_A^N}^*$ den CIP zu $\bar{\varphi}_N$.

b) $S_N \leq S_n - (N-n)B$, für ein $B \in \mathbb{R}$,

dann wird ein zu $\bar{\varphi}_N$ verkürzter Test definiert durch

$$_Bt^N := \inf\{n \leq N \mid S_n < c_{N,\alpha} + (N-n)B\} \tag{1.3.10}$$

zusammen mit dem TV

$$\varphi_n^* := \begin{cases} 1 & & > \\ \gamma_N & \text{für} \quad S_n & = & c_{N,\alpha} + (N-n)B, \ (n \leq N). \\ 0 & & < \end{cases}$$

<u>*Beispiele*</u>:

Der Test $\varphi^*_{{}_Bt^N}$ liefert einen zu $\bar{\varphi}_N$ verkürzten Test für den Fall, dass

i) $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Exponentialfamilie definiert mit $T(X_i) \leq b'(\zeta_0) - B$,

insb. liefert für $Q_\vartheta = \Gamma(\vartheta, \mu)$ mit $B = b'(\zeta_0) = \frac{\mu}{\vartheta_0}$ der Test $\varphi^*_{{}_Bt^N}$ den CIP zu $\bar{\varphi}_N$.

ii) $Q_\vartheta = \mathcal{R}(\vartheta, b)$ mit $B = 0$. Auch hier liefert $\varphi^*_{{}_Bt^N}$ den CIP zu $\bar{\varphi}_N$.

1.3.5 Zweiseitige CIPs

Genügen die Prüfgrößen S_n, $n \leq N$ aus (1.3.1) der Bedingung

$$S_n + (N-n)A \leq S_N \leq S_n - (N-n)B,$$

dann ist ein zu $\bar{\varphi}_N$ verkürzter Test gegeben durch

$$\begin{aligned} t^N_{A,B} : &= \min(t^N_A, t^N_B) \qquad (1.3.11) \\ &= \inf\{n \leq N \mid S_n \notin [c_{N,\alpha} + (N-n)B, c_{N,\alpha} - (N-n)A]\} \end{aligned}$$

zusammen mit dem TV

$$\varphi_n^* := \begin{cases} 1 & & > & c_{N,\alpha} - (N-n)A \\ \gamma_N & \text{für} \quad S_n & = & c_{N,\alpha} \\ 0 & & < & c_{N,\alpha} + (N-n)B. \end{cases}$$

<u>*Beispiele*</u>:

Der Test $\varphi^*_{t^N_{A,B}}$ liefert einen zu $\bar{\varphi}_N$ verkürzten Test für den Fall, dass $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Exponentialfamilie definiert mit

$$b'(\zeta_0) + A \leq T(X_i) \leq b'(\zeta_0) - B,$$

insb. liefert $\varphi^*_{t^N_{A,B}}$ für $Q_\vartheta = \mathcal{B}(m, \vartheta)$ mit $A = -b'(\zeta_0) = -m\vartheta_0$ und $B = m - b'(\zeta_0) = m(1 - \vartheta_0)$ den CIP zu $\bar{\varphi}_N$. □

1.4 Einfaches Neyman-Pearson-Lemma bei fester Stoppzeit

Den Grundstein zur Untersuchung der Aufgaben (1.2.2)-(1.2.5) legt die Lösung der Aufgabe (1.2.1), ein einfaches Neyman-Pearson-Lemma für sequentielle Tests φ_t. Zur Lösung der Aufgabe (1.2.1) betrachten wir das modifizierte Problem:

$$(\widetilde{P}_\alpha^t) \quad \begin{cases} E_{\vartheta_1}\,\varphi \overset{!}{=} sup \\ E_{\vartheta_0}\,\varphi \leq \alpha \\ \varphi \in \overline{\phi_t} \end{cases}$$

Dieses Problem lässt sich lösen, indem wir das klassische Neyman-Pearson-Lemma (vgl. Witting [Wi] Satz 2.5 auf S.193) auf das statistische Experiment

$$(\Omega, \mathcal{A}_t, \{P_{\vartheta_0|\mathcal{A}_t}, P_{\vartheta_1|\mathcal{A}_t}\}) \quad \text{anwenden.}$$

Beh.: Die Optimalwerte der beiden Aufgaben (P_α^t) und $(\widetilde{P}_\alpha^t)$ stimmen überein.

Begr.: Offensichtlich ist jeder für (P_α^t) zulässige Test φ_t auch zulässig für $(\widetilde{P}_\alpha^t)$ und somit ist der Optimalwert von (P_α^t) kleiner oder gleich dem von $(\widetilde{P}_\alpha^t)$.
Umgekehrt wird eine optimale Lösungen φ^* von $(\widetilde{P}_\alpha^t)$ durch den Dichtequotienten $\frac{M_t^1}{M_t^0}$ bis auf Randomisierung eindeutig festgelegt. Da $\frac{M_t^1}{M_t^0}$ $\mathcal{C}_t$-messbar ist, lässt sich immer ein TV $\underset{\sim}{\hat{\varphi}}$ finden, so dass gilt $E_{\vartheta_i}\hat{\varphi}_t = E_{\vartheta_i}\varphi^*$ für $i = 0, 1$. $\square$

Mit diesen Überlegungen gewinnen wir eine Charakterisierung für die Lösungen von (P_α^t), die ein vollständiges Analagon zum klassischen Neyman-Pearson-Lemma liefert. Natürlich können wir hier auf die reellwertige Parametrisierung, d.h. $\Theta \subset \mathbb{R}$, verzichten, welche bei der Formulierung der einseitigen Aufgaben gefordert wurde. Ebenso werden keinerlei Forderungen an der Struktur der Stoppzeit t benötigt.

1.4.1 Satz

Es seien $Q_{\vartheta_0} \neq Q_{\vartheta_1}$*, und es sei* P *ein zu* $P_{\vartheta_0}+P_{\vartheta_1}$ *äquivalentes W-Maß (vgl.1.2.5). Weiter seien* $\alpha \in (0,1)$ *und* $t : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ *eine beliebige Stoppzeit bzgl* $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$.

1) *Hinreichendes Kriterium:*
   Es sei $\underset{\sim}{\varphi} = (\varphi_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ *ein TV, für das gilt:*

   a) $E_{\vartheta_0}(\varphi_t 1_{\{t<\infty\}}) = \alpha$.

   b) *Es gibt ein* $a \in [0,\infty)$*, so dass für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\varphi_n = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad \frac{M_n^1}{M_n^0} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \ a \ \ P_{|\mathcal{C}_n} - f.s. \ auf \ \{t=n\}, \tag{1.4.1}$$

$$\begin{aligned} \varphi_\infty &= 1 \quad P_{\vartheta_1} - f.s. \ auf \ \{t=\infty\}, \\ \varphi_\infty &= 0 \quad P_{\vartheta_0} - f.s. \ auf \ \{t=\infty\}. \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

   Dann liefert φ_t *eine Lösung von* (P_α^t).

2) *Existenzaussage: Es sei* $C \in \mathcal{C}_\infty$ *mit* $P_{\vartheta_1}(C) = 1$ *und* $P_{\vartheta_0}(C) = 0$.

1.Fall: Ist $P_{\vartheta_0}(t<\infty) < \alpha$*, so liefert der sequentielle Test* φ_t^* *der Gestalt*

$$\varphi_n^* = 1 \, (n \in \mathbb{N}), \quad \varphi_\infty^* = 1_C$$

als Test der Güte 1 (d.h. $E_{\vartheta_1}\varphi_t^* = 1$*) mit* $E_{\vartheta_0}\varphi_t^* < \alpha$ *eine Lösung von* (P_α^t).

2.Fall: Ist $P_{\vartheta_0}(t<\infty) \geq \alpha$ *so erfüllt der sequentielle Test* φ_t^* *der Gestalt*

$$\varphi_n^* := \begin{cases} 1 & & > \\ \gamma & \text{für} \quad \dfrac{M_n^1}{M_n^0} & = & a \quad (n \in \mathbb{N}), \\ 0 & & < \end{cases}$$

$\varphi_\infty^* := 1_C$ *mit*

i) $a := \inf\{b \geq 0 \mid P_{\vartheta_0}(\frac{M_t^1}{M_t^0} > b, t<\infty) \leq \alpha\}$ *und*

ii) $\gamma \in [0,1]$ *derart, dass*

$$P_{\vartheta_0}(M_t^1 > aM_t^0, t<\infty) + \gamma P_{\vartheta_0}(M_t^1 = aM_t^0, t<\infty) = \alpha \tag{1.4.3}$$

die hinreichenden Bedingungen a) und b) und ergibt somit eine Lösung von (P_α^t).

3) *Notwendiges Kriterium:*
Es sei φ_t^* eine Lösung von (P_α^t). Dann gilt:

a) *Es gibt ein $a \in [0,\infty)$, so dass φ_n^* für jeden möglichen Stoppzeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ die 1-0-Gestalt aus (1.4.1) auf $\{t = n\}$ besitzt, und außerdem gilt*

$$\begin{aligned} \varphi_\infty =& 1 \quad P_{\vartheta_1}\text{-f.s. auf } \{t = \infty\}, \\ a \cdot \varphi_\infty =& 0 \quad P_{\vartheta_0}\text{-f.s. auf } \{t = \infty\}. \end{aligned}$$

b) $E_{\vartheta_1}\varphi_t^* > \alpha$.

c) $E_{\vartheta_0}\varphi_t^* < \alpha \Rightarrow E_{\vartheta_1}\varphi_t^* = 1$.
Insbesondere wird das Problem (P_α^t) im Falle $P_{\vartheta_0}(t < \infty) < \alpha$ nur durch einen Test der Güte 1 gelöst.

d) *Ist φ_t^* von Güte kleiner 1, d.h. $E_{\vartheta_1}\varphi_t^* < 1$, dann besitzt jede weitere Lösung $\bar{\varphi}_t$ von (P_α^t) bis auf Randomisierung $P_{|\mathcal{C}_t}$-f.s. dieselbe 1-0-Gestalt wie φ_t^*, d.h. mit dem Multiplikator a aus a) erhalten wir*

$$\bar{\varphi}_t = \varphi_t^* \qquad \text{auf } \{M_t^1 \neq aM_t^0\}\ P_{|\mathcal{C}_t}\text{-f.s.}$$

e) $E_{\vartheta_1}\varphi_t^* = 1$ *und* $P_{\vartheta_0}(t < \infty) = 1 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$
$P_{\vartheta_0}|\mathcal{A}_{n|\{t=n\}} \not\ll P_{\vartheta_1}|\mathcal{A}_{n|\{t=n\}}$ *(d.h.* $\exists A \in \mathcal{A}_{n|\{t=n\}} : P_{\vartheta_1}(A) = 0$ *und* $P_{\vartheta_0}(A) > 0$*) und somit* $Q_{\vartheta_0} \not\ll Q_{\vartheta_1}$.

f) **Entweder** *es gilt* $a > 0$ *und* $E_{\vartheta_0}\varphi_t^* = \alpha$
oder $a = 0$ *und* $E_{\vartheta_1}\varphi_t^* = 1$.

Beweis:

1) Hinreichende Bedingung
Sei $\underset{\sim}{\varphi} = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein TV mit $E_{\vartheta_0}(\varphi_t 1_{\{t<\infty\}}) = \alpha$ und der 1-0-Gestalt aus (1.4.1). Dann gilt wegen $\varphi_\infty = 0 \quad P_{\vartheta_0} -$ f.s. auf $\{t = \infty\}$:
$E_{\vartheta_0}\varphi_t = E_{\vartheta_0}(\varphi_t 1_{\{t<\infty\}}) = \alpha$.
Da $a < \infty$ folgt aus der 1-0-Gestalt von φ_∞ zusammen mit der Orthogonalität von $P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_\infty}$ und $P_{\vartheta_1|\mathcal{C}_\infty}$ (vgl. 1.2.4 a),b))

$$\varphi_\infty = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad M_\infty^1 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} aM_\infty^0 \quad P_{|\mathcal{C}_\infty} - \text{f.s. auf } \{t = \infty\}.$$

Daraus erhalten wir zusammen mit der 1-0-Gestalt der φ_n $(n \in \mathbb{N})$

$$(*) \quad \varphi_t = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad M_t^1 \gtrless aM_t^0 \quad P_{|\mathcal{C}_t} - \text{f.s..}$$

Da $P_{|\mathcal{C}_t}$ äquivalent ist zu $P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_t} + P_{\vartheta_1|\mathcal{C}_t}$, liefert der Test φ_t nach dem einfachen Neyman-Pearson-Lemma eine Lösung von $(\tilde{P}_\alpha^t)$ und damit ist er auch optimal für (P_α^t).

2) Es bleibt der nichttriviale Fall $P_{\vartheta_0}(t < \infty) \geq \alpha$ zu betrachten:
Aufgrund der hinreichenden Bedingung ist für die Existenzaussage noch zu zeigen, dass es ein $\gamma \in [0,1]$ gibt mit (1.4.3).
Hierfür ist nur anzumerken, dass wegen der Definition von a gilt:
$P_{\vartheta_0}(M_t^1 > aM_t^0, t < \infty) \leq \alpha$ und $P_{\vartheta_0}(M_t^1 \geq aM_t^0, t < \infty) \geq \alpha$.
Außerdem erhalten wir zusammen mit der hinreichenden Bedingung 1), dass (P_α^t) denselben Optimalwert hat wie $(\tilde{P}_\alpha^t)$.

3) Notwendige Bedingung
Sei φ_t^* eine Lösung von (P_α^t). Dann liefert sie gemäß 2) auch eine Lösung von $(\tilde{P}_\alpha^t)$. Das einfache N-P-Lemma für das Problem $(\tilde{P}_\alpha^t)$ ergibt:

$$\exists a \geq 0: \ \varphi_t^* = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad M_t^1 \gtrless aM_t^0 \quad P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_t} + P_{\vartheta_1|\mathcal{C}_t} - \text{f.s.}$$

Damit erhalten wir, dass φ_n^* für alle $n \in \mathbb{N}$ die 1-0-Gestalt aus (1.4.1) auf $\{t = n\}$ besitzt. Außerdem gilt aufgrund der Orthogonalität von $P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_\infty}$ und $P_{\vartheta_1|\mathcal{C}_\infty}$ $\frac{M_\infty^1}{M_\infty^0} = \infty > a$ P_{ϑ_1}-f.s (vgl.1.2.5 a)) und daher erhalten wir $\varphi_\infty = 1 \quad P_{\vartheta_1}$-f.s. auf $\{t = \infty\}$.
Andererseits gilt P_{ϑ_0}-f.s. $\frac{M_\infty^1}{M_\infty^0} = 0$, so dass wir im Falle $a > 0$ erhalten: $\varphi_\infty = 0 \quad P_{\vartheta_0}$-f.s. auf $\{t = \infty\}$. Das liefert die Teilaussagen in a).

Für die Aussagen b),c),f) verweisen wir auf Witting [Wi], Kor 2.6 auf S.195 und Satz 2.5 auf S.193, wobei nur zu bemerken bleibt, dass wegen $Q_{\vartheta_0} \neq Q_{\vartheta_1}$ auch $P_{\vartheta_0|\mathcal{A}_t} \neq P_{\vartheta_1|\mathcal{A}_t}$ für jede Stoppzeit t folgt.

d) Da $E_{\vartheta_1}\varphi_t^* < 1$, folgt aus c) $E_{\vartheta_0}\varphi_t^* = \alpha$ und ebenso auch $E_{\vartheta_0}\bar{\varphi}_t = \alpha$ für jede weitere Lösung $\bar{\varphi}_t$ von (P_α^t). Mit dem Multiplikator a aus a) für φ_t^* bekommen wir:

$$0 = E_{\vartheta_1}(\varphi_t^* - \bar{\varphi}_t) = \int_\Omega (\varphi_t^* - \bar{\varphi}_t)(M_t^1 - aM_t^0)\, dP.$$

Aufgrund der 1-0-Gestalt von φ_t^* aus 3) , folgt schließlich die Behauptung in d).

e) Aus Witting [Wi], Kor 2.6 auf S.195 folgt:
$E_{\vartheta_1}\varphi_t^* = 1 \Rightarrow \exists N \in \mathcal{A}_t : \; P_{\vartheta_1}(N) = 0, \; P_{\vartheta_0}(N) > 0.$
Da außerdem $P_{\vartheta_0}(t < \infty) = 1$ und $N \cap \{t = n\} \in \mathcal{A}_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ nach Definition von $\mathcal{A}_t$ gilt:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P_{\vartheta_1}(N \cap \{t = n\}) = 0, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} P_{\vartheta_0}(N \cap \{t = n\}) = P_{\vartheta_0}(N) > 0.$$

Daraus folgt

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad P_{\vartheta_1}(N \cap \{t = m\}) = 0 \text{ und } \exists n \in \mathbb{N} \quad P_{\vartheta_0}(N \cap \{t = n\}) > 0,$$

und somit gibt es $n \in \mathbb{N}, \; A \in \mathcal{A}_{n|\{t=n\}}$ mit $P_{\vartheta_0}(A) > 0$ und $P_{\vartheta_1}(A) = 0.$
Da P_{ϑ_i} die stochastisch unabhängige Kopplung der Q_{ϑ_i} ist, erhalten wir schließlich: $\exists B \in \mathcal{B} \quad Q_{\vartheta_0}(B) > 0$ und $Q_{\vartheta_1}(B) = 0.$ □

1.4.2 Bemerkung zu den Lösungen φ_t^* von (P_α^t)

a) Es sei darauf hingewiesen, dass für eine Lösung φ_t^* von (P_α^t) nicht notwendig $\varphi_\infty^* = 0$ P_{ϑ_0}-f.s. auf $\{t = \infty\}$ gelten muss. Hier erhalten wir eine Abweichung vom hinreichenden Kriterium im N-P-Lemma 1.4.1.
Z.B. liefert unter einer Stoppzeit t mit

$$P_{\vartheta_1}(t < \infty) = 1 \text{ und } P_{\vartheta_0}(t < \infty) < \alpha$$

der sequentielle Test φ_t^* mit

$$\varphi_n^* \; (n \in \mathbb{N}), \quad \varphi_\infty^* = \frac{\alpha - P_{\vartheta_0}(t < \infty)}{P_{\vartheta_0}(t = \infty)}$$

eine Lösung von (P_α^t) als Test der Güte 1 mit $E_{\vartheta_0}\varphi_t^* = \alpha$. Die Existenz einer unter P_{ϑ_1} abgeschlossenen und unter P_{ϑ_0} offenen Stoppzeit werden wir mit Hilfe von einseitigen Ersteintrittszeiten in 1.9 angeben (vgl. 1.9.2, 1.9.4).

b) Die einparametrigen Exponentialfamilien werden für unsere Untersuchungen die wichtigsten Verteilungsklassen liefern. Es sei deswegen ausdrücklich erwähnt, dass wegen der Äquivalenz der Verteilungen einparametriger Exponentialfamilien, Lösungen der Güte 1 für das Problem (P_α^t) (bei einparametrigen Exponentialfamilein) *nur* dann auftreten können, wenn die Stoppzeit t unter P_{ϑ_0} *offen* ist (vgl. 1.4.1 3) d)). Ist dagegen t *abgeschlossen* unter P_{ϑ_0}, so muss jede Lösung des Problems (P_α^t) von Güte kleiner 1 sein. Bei der Untersuchung gleichmäßig bester Tests der Güte 1 (bei einparametrigen Exponentialfamilien) wird es deswegen zum einen darum gehen Stoppzeiten anzugeben, die unter bestimmten Parameterwerten offen sind (vgl. 1.9) und zum anderen zu untersuchen, für welche Parameterwerte sie abgeschlossen sind (vgl. 1.10).

c) Bei den Lösungen φ_t^* des Problems (P_α^t) sind die klassischen Tests φ_n^* selbstverständlich nur auf $\{t = n\}$ bestimmt. Es stellt sich daher die Frage, ob das Problem (P_α^t) auch gelöst werden kann, indem wir es jeweils durch Bedingen unter $\{t = n\}$ in eine Folge klassischer Testprobleme $(P_\alpha^{|t=n})_{n\in\mathbb{N}}$ bei gleichem Niveau α der Gestalt

$$(P_\alpha^{|t=n}) \qquad \begin{cases} E_{\vartheta_1}(\varphi_t|t=n) \overset{!}{=} sup \\ E_{\vartheta_0}(\varphi_t|t=n) \leq \alpha \end{cases}$$

überführen und diese dann einzelnen lösen, vorausgesetzt, dass
t abgeschlossen ist.
Diese Vorgehensweise hätte den Vorteil, dass wir damit alle Hilfsmittel aus der klassischen Statistik zur Verfügung hätten, so dass die Hoffnung bestünde, die Optimalitätsaussagen für zusammengesetzte Hypothesen aus der klassischen Statistik hiermit auf das sequentielle Testen (bei fester Stoppzeit) übertragen zu können.
Aber bereits das folgende Beispiel zeigt, dass die Lösungen der bedingten Testprobleme $(P_\alpha^{|t=n})$ im allgemeinen keine Lösung für das Problem (P_α^t) liefern:
Es seien $Q_\vartheta = \mathcal{N}(\vartheta, 1)$ und $t = \inf\{n \leq 2 \mid \sum_{i=1}^n X_i \geq 0\}$. Getestet werden sollen $\vartheta_0 = 0$ gegen $\vartheta_1 = 1$ zum Niveau $\alpha = 0.5 + P_{\vartheta_0}(X_1 < 0, X_1 + X_2 \geq 0)$.
Gemäß des N-P-Lemmas 1.4.1 ist eine Lösung des Problems gegeben durch den sequentiellen Test

$$\varphi_t^* = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad \sum_{i=1}^t X_i \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0,$$

und da $P_\vartheta^{X_1}$ stetige Verteilungsfunktion besitzt, ist diese Lösung $P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_t}$-f.s. eindeutig bestimmt.
Andererseits liefert das klassische N-P-Lemma für das Problem

$$(P_\alpha^{|t=1}) \qquad \begin{cases} E_{\vartheta_1}(\varphi_1|X_1 \geq 0) \overset{!}{=} sup \\ E_{\vartheta_0}(\varphi_1|X_1 \geq 0) \leq \alpha \end{cases}$$

als Lösung $\hat{\varphi}_1 = \left\{\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right.$ für $X_1 \gtrless c$ auf $\{X_1 \geq 0\}$, mit $c \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$P_{\vartheta_0}(X_1 \geq c) = P_{\vartheta_0}(X_1 \geq 0) \cdot \alpha.$$

Da $\alpha \in (0,1)$, muss gelten $c > 0$, so dass $P_{\vartheta_0}(\hat{\varphi}_t \neq \varphi_t^*, t = 1) > 0$ und daher liefert die Lösung $(\hat{\varphi})_{n \leq 2}$ von $(P_\alpha^{|t=n})_{n \leq 2}$ keine Lösung von (P_α^t). Da auch die Lösungen von $(P_\alpha^{|t=n})_{n \leq 2}$ $P_{\vartheta_0 | \mathcal{C}_t}$-f.s. eindeutig bestimmt sind, wird in der oberen Situation das Problem (P_α^t) nicht durch eine Lösung von $(P_\alpha^{|t=n})_{n \leq 2}$ gelöst. □

Der Grund, warum dieser Ansatz im allgemeinen nicht erfolgreich ist, liegt darin, dass bei der Zerlegung des Problems (P_α^t) in eine Folge klassischer Testprobleme i.a. nicht ein und dasselbe Niveau α für jede Stufe n verwendet werden darf. Es muss zugelassen werden, dass das Niveau α auf die einzelnen Stufen durch eine geeignete Folge von Niveaus $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aufgeteilt wird. Testen wir im oberen Beispiel auf $\{t = 1\}$ zum Niveau $\alpha_1 = 0.5$ und auf $\{t = 2\}$ zum Niveau $\alpha_2 = P_{\vartheta_0}(X_1 < 0, X_1 + X_2 \geq 0)$, so liefern die Lösungen von $(P_{\alpha_n}^{|t=n})_{n \leq 2}$ auch wieder Lösungen von (P_α^t).
Leider wissen wir im allgemeinen a priori nicht wie das Niveau α für die einzelnen Stufen $n \in \mathbb{N}$ passend zu zerlegen ist, es sei denn wir kennten bereits eine Lösung von (P_α^t), so dass dieser Ansatz keine Vereinfachung zur Bestimmung gleichmäßig bester sequentieller Tests an die Hand gibt.

b) Gleichmässig beste Tests von Güte kleiner 1 bei fester Stoppzeit

Ziel der Betrachtungen der folgenden drei Abschnitte ist es, zu untersuchen, ob sich ähnlich wie in der klassischen Statistik allgemeine Bedingungen für die Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ angeben lassen, so dass gleichmäßig beste sequentielle Tests für aneinander angrenzende einseitige Hypothesen der Gestalt $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ und $H_1 : \vartheta \in (\vartheta_0, \hat{\vartheta})$ existieren unter Stoppzeiten, die für dieses einseitige Problem sinnvoll sind.
Für die Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ stellen wir wie in 1.3 als Mindestforderung, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein isotoner Dichtequotient für $\{P_{\vartheta|\mathcal{C}_n} \mid \vartheta \in \Theta\}$ in einer Statistik S_n vorliege. Diese Forderung ist aus folgenden zwei Gründen sinnvoll:
Zum einen ist bei festem Stichprobenumfang n ein isotoner Dichtequotient für $\{P_{\vartheta|\mathcal{C}_n} \mid \vartheta \in \Theta\}$ nicht nur hinreichend für die Existenz gleichmäßig bester Tests für aneinander angrenzende einseitige Hypothesen, sondern nach Pfanzagl [P], Theorem 4.5.4 auf Seite 140, im wesentlichen notwendig. Zum anderen wollen wir auch unbeschränkte Stoppzeiten untersuchen, für die zu jedem $n \in \mathbb{N}$ mit positiver Wahrscheinlichkeit gestoppt werden kann.

Von den Stoppzeiten, die für das obige Problem sinnvoll sind, kommen im wesentlichen Ersteintrittszeiten in Frage, die vorschreiben mit dem Beobachten abzubrechen, sobald deutliche Informationen für H_0 durch kleine Werte der Prüfgröße S_n oder für H_1 durch große Werte der Prüfgröße S_n sichtbar sind. Dabei unterscheiden wir zwischen beschränkten und unbeschränkten Ersteintrittszeiten.
Mit Hilfe einer notwendigen Bedingung für lokal gleichmäßige Optimalität in 1.5 werden wir in 1.5 eine Reihe von Negativaussagen für Ersteintrittszeiten beweisen, die für das obige Problem sinnvoll sind: selbst unter der Vorraussetzung, dass eine einparametrige Exponentialfamilie vorliegt, gibt es für unbeschränkte Ersteintrittszeiten keine lokal gleichmäßig besten sequentiellen Tests und für beschränkte Ersteintrittszeiten keine gleichmäßig besten sequentiellen für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

Notwendig für die Optimalität eines sequentiellen Tests von Güte kleiner 1 ist -gemäß des einfachen Neyman-Pearson-Lemmas 1.4.1- das Ausschöpfen des Niveaus α auf dem gemeinsamen Rand $\{\vartheta_0\}$ der aneinander grenzenden Hypothesen. Beim Testen einfacher Hypothesen lässt sich das Niveau α durch geeignete Randomisierung bei einem für eine Lösung in Frage kommenden TV immer ausschöpfen (vgl. 1.4.1): randomisiert werden darf hier noch zu jedem möglichen Stoppzeitpunkt. Es stellt sich die Frage, welche Randomisierungsmöglichkeiten für lokal gleichmäßig beste Tests noch bestehen. Darf hier immer noch zu jedem möglichen Stoppzeitpunkt bei dem für eine Lösung in Frage kommenden TV randomisiert werden? Und lässt sich durch die Randomisierungsweisen, die erlaubt sind, jedes vorgegebene Niveau α ausschöpfen? Auch diesen Fragen gehen wir in 1.5 nach mit Hilfe einer notwendigen Bedingung für die Existenz (lokal) gleichmäßig bester Tests.

Die CIPs gaben erste Beispiele für gleichmäßig beste sequentielle Tests. Diese Beispiele sollen im folgenden verallgemeinert werden. Dabei stellt sich die Frage, ob die klassische Isontoniebedingung 1.3.1 an die Dichtequotienten der Verteilungsklasse, welche wir oben gefordert haben, ausreicht, um auch für andere Ersteintrittszeiten t, als die, welche bei den CIPs auftreten, gleichmäßig beste Tests zu erhalten? Wir werden sehen, dass diese Bedingung allein nicht ausreichen wird und dass wir zusätzliche Forderungen an die Struktur der Verteilungsklasse stellen müssen, die dem sequentiellen Aspekt mehr Rechnung tragen. Eine erste Begründung gibt folgende Überlegung:
Ähnlich wie beim Beweis des Neyman-Pearson-Lemmas (vgl. Seite 18), kann das sequentielle Problem in ein Problem der klassischen Statistik überführt werden, indem als Verteilungsklasse $\{P_{\vartheta|\mathcal{A}_t} \mid \vartheta \in \Theta\}$ gewählt wird. Besitzt diese Verteilungsklasse einen isotonen Dichtequotienten in einer Statistik S_t, so gibt es einen gleichmäßig besten Test für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ (vgl. Witting [Wi], Satz 2.24 auf Seite 210). Diese Bedingung enthält eine Isotononiebedingung, welche auf die zugehörige Stoppzeit zugeschnitten ist und eine Verträglichkeit der einzelnen Stufen, zu denen unter t gestoppt wird berücksichtigt, was in der obigen Isotonieforderung noch nicht der Fall ist. Allerdings ist diese hinreichende Isotoniebedingung so stark, dass sie selbst bei einparametrigen Exponentialfamilien unter beschränkten Ersteintrittszeiten nicht erfüllt wird. Außerdem bekommen wir so nur in Abhängigkeit von der speziell gewählten Stoppzeit hinreichende Bedingungen für gleichmäßige Optimalität. Wir werden daher diese Vorgehensweise unter der Klasse der einseitigen beschränkten Ersteintrittszeiten dahingehend modifizieren, dass wir in 1.6 eine geeignete Isotoniebedingung für die Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ formulieren, welche die Verträglichkeit der einzelnen Stufen untereinander mitberücksichtigt.

1.5 Negativaussagen für einparametrige Exponentialfamilien

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{Q} = \{Q_\zeta \mid \zeta \in \mathcal{Z}\}$ eine einparametrige Exponentialfamilie in natürlicher Parametrisierung mit μ-Dichten der Gestalt (1.3.3) und natürlichem Parameterraum $\mathcal{Z} =< \underline{\zeta}, \overline{\zeta} >$ (vgl. (1.3.2)).

Es seien $\zeta_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{Z}}$ und $\hat{\zeta} \in (\zeta_0, \overline{\zeta}]$. Zu einer Stoppzeit $t : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ (bzgl. $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$) und zu vorgegebenem Irrtumsniveau $\alpha \in (0,1)$ soll untersucht werden, ob das Problem

$$\begin{cases} E_{\zeta_1}\varphi_t \overset{!}{=} \sup & \forall \zeta_1 \in (\zeta_0, \hat{\zeta}) \\ E_{\zeta_0}\varphi_t \leq \alpha \end{cases} \tag{1.5.1}$$

eine Lösung besitzt. Dabei werden wir uns in diesem Abschnitt auf Probleme beschränken, die nur Lösungen φ_t^* der Güte kleiner 1 (d.h. $E_{\zeta_1}\varphi_t^* < 1 \quad \forall \zeta_1 \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$) zulassen; den gleichmäßig besten Tests der Güte 1 wenden wir uns später in den Abschnitten 1.9 und 1.10 zu.

Diese Untersuchung entspricht im Falle $\hat{\zeta} < \bar{\zeta}$ der Frage, ob gleichmäßig beste Tests für $\overline{H}_0 : \zeta = \zeta_0$ gegen $\hat{H}_1 : \zeta \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$ existieren (vgl. (1.2.3)), wir sprechen hier auch von lokal gleichmäßig besten Tests für $\overline{H}_0 : \zeta = \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$. Und im Falle $\hat{\zeta} = \bar{\zeta}$ entspricht die Untersuchung der Ausgangsfrage, ob es gleichmäßig beste Tests für $\overline{H}_0 : \zeta = \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$ gibt (vgl. (1.2.2)).

In der klassischen Testtheorie (d. h. für $t \equiv n, \ n \in \mathbb{N}$) bekommen wir unter den obigen Voraussetzungen - es genügt sogar, dass $\{Q_\zeta^n \mid \zeta \in \mathcal{Z}\}$ nur isotonen Dichtequotienten besitzt - die Existenz eines gleichmäßig besten Tests für $H_0 : \zeta \leq \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$, der zusätzlich auch noch unter allen α-ähnlichen Tests die Fehlerwahrscheinlichkeit 1.Art minimiert, d.h. gleichzeitig folgende Aufgabe löst:

$$\begin{cases} E_{\zeta_1}\varphi_t \overset{!}{=} \inf & \forall \zeta_1 \in (\underline{\zeta}, \zeta_0) \\ E_{\zeta_0}\varphi_t = \alpha \end{cases} . \tag{1.5.2}$$

Eine entsprechende Aussage für nichtkonstante Stoppzeiten werden wir i.a. nicht erhalten, selbst unter der starken obigen Voraussetzung, dass $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Exponentialfamilie definiert.

Zur Untersuchung der Aufgabe (1.5.2) betrachten wir zusätzlich das folgende zu

(1.5.1) verwandte Problem:

$$\begin{cases} E_{\zeta_1}\varphi_t \overset{!}{=} \sup & \forall \zeta_1 \in (\underline{\zeta}, \zeta_0) \\ E_{\zeta_0}\varphi_t \leq \alpha \end{cases} . \tag{1.5.3}$$

Wir beginnen mit Aussagen über die notwendige Gestalt von lokal gleichmäßig besten Tests der Güte kleiner 1:

1.5.1 Lemma: Notwendige Bedingung für (lokal) gleichmäßige Optimalität

Es sei φ_t^* eine Lösung von (1.5.1) mit

$$E_{\zeta_1}\varphi_t^* < 1 \;\; \forall \zeta_1 \in (\zeta_0, \hat{\zeta}). \tag{1.5.4}$$

Weiter bezeichne wie in (1.3.5) $S_n := \hat{S}_n(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^n T(X_i) - nb'(\zeta_0)$. Dann gilt:

a) $E_{\zeta_0}\varphi_t^* = \alpha$.

b) $\forall \zeta_1 \in (\zeta_0, \hat{\zeta}) \; \exists \tilde{a}(\zeta_1) \in \mathbb{R}$, *so dass* $\forall n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$\varphi_n^* = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad S_n \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \tilde{a}(\zeta_1) + nd_0(\zeta_1) \;\; P_{\zeta_0|\mathcal{C}_n} - \text{f.s. auf } \{t = n\}.$$

c) $\exists \tilde{a}_0 \in \mathbb{R}$, *so dass* $\forall n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\varphi_n^* = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad S_n \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \tilde{a}_0 \;\; P_{\zeta_0|\mathcal{C}_n} - \text{f.s. auf } \{t = n\}. \tag{1.5.5}$$

d) Es kann nur zu höchstens einem Stoppzeitpunkt randomisiert werden, d.h. es gibt höchstens ein $n \in \mathbb{N}$ *mit* $P_{\zeta_0}\big(\varphi_n^* \in (0,1), \; t = n\big) > 0$.

Hinreichend dafür, dass eine Lösung φ_t^* von (1.5.1) auf $\hat{H}_1 : \zeta \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$ Güte kleiner als 1 besitzt, d.h. der Bedingung (1.5.4) genügt, ist, dass t abgeschlossen unter P_{ζ_0} ist.

Beweis:
Es sei φ_t^* eine Lösung von (1.5.1) mit $E_{\zeta_1}\varphi_t^* < 1 \;\; \forall \zeta_1 \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$.

a) Aufgrund (1.5.4) folgt aus (1.4.1) 3)c) $E_{\zeta_0}\varphi_t^* = \alpha$.

b) Außerdem liefert die notwendige Bedingung (1.4.1)3e),a), dass für $\forall \zeta_1 \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$ ein $a(\zeta_1) > 0$ gibt, so dass zusammen mit (1.3.6) für jedes $n \in \mathbb{N}$ notwendig gilt:

$$\varphi_n^* = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad e^{(\zeta_1 - \zeta_0)\left(S_n - n d_0(\zeta_1)\right)} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} a(\zeta_1) \;\; P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_n} - \text{f.s. auf } \{t = n\}. \quad (1.5.6)$$

Logarithmieren auf beiden Seiten der Ungleichung und Division durch $(\zeta_1 - \zeta_0)$ liefert b) mit $\tilde{a}(\zeta_1) = \frac{\log a(\zeta_1)}{\zeta_1 - \zeta_0}$.

c) Wir wählen $\tilde{a}_0 := \limsup_{\zeta_1 \downarrow \zeta_0} \tilde{a}(\zeta_1)$.
Seien $n \in \mathbb{N}$, $C_n \in \mathcal{C}_n$ mit $P_{\zeta_0}(C_n) = 1$ und $\omega \in \{t = n\} \cap C_n$.

1) Ist $S_n(\omega) > \tilde{a}_0 \Rightarrow \exists \epsilon > 0 \; S_n(\omega) > \tilde{a}_0 + \epsilon$.
Außerdem gibt es aufgrund der Definition von $\tilde{a}_0$ ein $\zeta(n) \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$ mit

i) $\tilde{a}_0 - \epsilon/2 < \tilde{a}(\zeta_1) < \tilde{a}_0 + \epsilon/2$ für unendlich viele $\zeta_1 \in \big(\zeta_0, \zeta(n)\big)$,

ii) $-\epsilon/2 < n d_0(\zeta_1) < \epsilon/2$ für alle $\zeta_1 \in \big(\zeta_0, \zeta(n)\big)$.

Aus i) und ii) folgt schließlich $S_n(\omega) > \tilde{a}(\zeta_1) + n d_0(\zeta_1)$ für unendlich viele $\zeta_1 > \zeta_0 \overset{b)}{\Rightarrow} \varphi_n^*(\omega) = 1$.

2) Ist $S_n(\omega) < \tilde{a}_0 \Rightarrow \exists \epsilon > 0 \; S_n(\omega) < \tilde{a}_0 - \epsilon$.
$\overset{i),ii)}{\Rightarrow} S_n(\omega) < \tilde{a}(\zeta_1) + n d_0(\zeta_1)$ für unendlich viele $\zeta_1 \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$
$\overset{b)}{\Rightarrow} \varphi_n^*(\omega) = 0$.

Damit besitzt φ_t^* die in (1.5.5) geforderte 1-0-Gestalt, wobei $\tilde{a}_0 \in \mathbb{R}$ gelten muss: Wäre nämlich $\tilde{a}_0 = \infty$, so würde $\varphi_t^* = 0 \; P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_t}$-f.s. auf $\{t = \infty\}$ gelten und folglich keine Lösung von (1.5.1) liefern; anderseits wäre φ_t^* im Falle $\tilde{a}_0 = -\infty$ von Güte 1.

d) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $P_{\zeta_0}\big(\varphi_n^* \in (0,1),\; t = n\big) > 0$. Dann liefern b) und c) $\forall \zeta_1 \in (\zeta_0, \hat{\zeta}) : \; S_n = \tilde{a}(\zeta_1) + n d_0(\zeta_1) = \tilde{a}_0 \;\; P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_n} - \text{f.s. auf } \{t = n\}$. Damit ist aber $\tilde{a}(\zeta_1)$ eindeutig festgelegt und wegen $d_0(\zeta_1) > 0$ kann es kein weiteres $m \in \mathbb{N}$ geben mit $P_{\zeta_0}\big(\varphi_m^* \in (0,1),\; t = m\big) > 0$.

□

Hieraus erhalten wir unmittelbar folgendes nützliche

1.5.2 Korollar: Notwendige und hinreichende Bedingung für (lokal) gleichmäßige Optimalität

a) Sei $\underset{\sim}{\varphi}^*$ *eine Lösung von (1.5.1) mit* $E_\zeta\, \varphi_t^* < 1\ \forall \zeta \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$. *Dann folgt:*
$\exists \tilde{a}_0 : \forall \zeta_1 \in (\zeta_0, \hat{\zeta})\ \exists \tilde{a}(\zeta_1)$, *so dass für alle* $n \in \mathbb{N}$ *auf* $\{t = n\}$ $P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_n}$*–f.s. notwendig gilt:*

O-1.1 $\quad S_n > \tilde{a}_0 \Rightarrow S_n \geq \tilde{a}(\zeta_1) + n d_0(\zeta_1)$

O-1.2 $\quad S_n < \tilde{a}_0 \Rightarrow S_n \leq \tilde{a}(\zeta_1) + n d_0(\zeta_1)$

und der Test besitzt die 1-0-Gestalt (1.5.5).

b) Es sei $\underset{\sim}{\varphi}^*$ *ein TV mit der 1-0-Gestalt (1.5.5) für ein* $\tilde{a}_0 \in \mathbb{R}$ *sowie* $\varphi_\infty^* = 1_C$ *mit*
$C \in \mathcal{C}_\infty :\ P_{\zeta_0}(C) = 0$ *und* $P_{\zeta_1}(C) = 1$. *Außerdem gelte :*

i) $E_{\zeta_0}\big(\varphi_t^* 1_{\{t<\infty\}}\big) = \alpha$,

ii) $\forall \zeta_1 \in (\zeta_0, \bar{\zeta})\ \exists \tilde{a}(\zeta_1)$, *so dass für alle* $n \in \mathbb{N}$ *auf* $\{t = n\}$ $P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_n}$*-f.s. die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

O-2.1 $\quad S_n > \tilde{a}(\zeta_1) + n d_0(\zeta_1) \Rightarrow \varphi_n^* = 1$

O-2.2 $\quad S_n < \tilde{a}(\zeta_1) + n d_0(\zeta_1) \Rightarrow \varphi_n^* = 0.$

(Insbesondere sind O-2.1 und O-2.2 erfüllt, wenn gilt

O-2.1' $\quad S_n > \tilde{a}(\zeta_1) + n d_0(\zeta_1) \Rightarrow S_n > \tilde{a}_0$

O-2.2' $\quad S_n < \tilde{a}(\zeta_1) + n d_0(\zeta_1) \Rightarrow S_n < \tilde{a}_0$.)

Dann liefert φ_t^* *eine Lösung von (1.5.1).* □

Die in 1.5.1 und 1.5.2 auftretende Größe $d_0(\zeta_1)$ lässt sich interpretieren als die Abweichung des Wertes der Prüfgröße $T(X_1)$ nach einer Beobachtung, der erwartet wird, wenn $\zeta = \zeta_0$ vorliegt, von dem Wert der Prüfgröße, der erwartet wird, wenn $\zeta = \zeta_1$ vorliegt (vgl. 1.3.2.1 b),e)). Die Größe d_0 beschreibt die maximale Abweichung des Wertes der Prüfgröße $T(X_1)$ nach einer Beobachtung, der erwartet wird, wenn $\zeta \in \hat{H}_1 = (\zeta_0, \hat{\zeta})$, von dem Wert, der unter $\zeta = \zeta_0$ zu erwarten ist.

Eine zu Lemma 1.5.1 bzw. zu Korollar 1.5.2 völlig entsprechende Aussage erhalten wir für die Probleme (1.5.3), welche nur Lösungen der Güte kleiner 1 erlauben:

1.5.3 Bemerkung

Es sei φ_t^* eine Lösung von (1.5.3) mit

$$E_{\zeta_1}\varphi_t^* < 1 \ \ \forall \zeta_1 \in (\underline{\zeta}, \zeta_0). \tag{1.5.7}$$

Dann gilt:

a) $E_{\zeta_0}\varphi_t^* = \alpha$ und damit mininiert φ_t^* auch die Fehlerwahrscheinlichkeit 1.Art unter allen $(1-\alpha)$-ähnlichen Tests, d.h. φ_t^* löst die Aufgabe (1.5.2) z.N. $1-\alpha$.

b) $\exists \tilde{a}_0 \in \mathbb{R}$, so dass φ_t^* notwendig folgende 1-0-Gestalt besitzt:

$$\varphi_t^* = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad S_t \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \tilde{a}_0 \ \ P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_t} - \text{f.s.},$$

und $\forall \zeta_1 \in (\underline{\zeta}, \zeta_0)$ $\exists \tilde{a}(\zeta_1)$, so dass für $n \in \mathbb{N}$ auf $\{t = n\}$ $P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_n}$–f.s. notwendig die Bedingungen O-1.1 und O-1.2 erfüllt werden müssen.

Hinreichend dafür, dass eine Lösung φ_t^* von (1.5.3) auf $\underline{H}_1 : \zeta \in (\underline{\zeta}, \zeta_0)$ die Güte kleiner als 1 besitzt, d.h. der Bedingung (1.5.7) genügt, ist, dass t abgeschlossen unter P_{ζ_0} ist.

Für die Begründung dieser Aussagen bleibt nur anzumerken, dass im Beweis von Lemma 1.5.1 bei der Umformung des TV's aus (1.5.5) die Ungleichheitszeichen sich wegen $\zeta_1 - \zeta_0 < 0$ umdrehen. □

Die notwendige 1-0-Gestalt in (1.5.1)c) für einen (lokal) gleichmäßig besten Test φ_t^* ist aus praktischer statistischer Sicht auch sehr naheliegend: Deutliche Informationen durch „große “ Werte der Prüfgröße S_n (größer als ein $\tilde{a}_0$) sprechen für $\hat{H}_1 : \zeta \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$ und deutliche Informationen durch „kleine “Werte der Prüfgröße (kleiner als ein $\tilde{a}_0$) sprechen für $H_0 : \zeta \leq \zeta_0$. Daher spricht dies dafür, Stoppzeiten zu betrachten, die mit dem Beobachten abbrechen, sobald deutliche Informationen für H_0 oder für H_1 sichtbar sind. Solche Stoppzeiten liefern folgende Ersteintrittszeiten:

1.5.4 Ersteintrittszeiten

Es seien $N \in \overline{\mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $c_1 < c_2$. Weiter sei S_n $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge von

Prüfgrößen, in welcher die Verteilungsklassen $\{P_{\vartheta|\mathcal{C}_n} \mid \vartheta \in \Theta\}$ $(n \in \mathbb{N})$ jeweils isotonen Dichtequotienten habe. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} t^N(c_1,c_2) &:= \min\Big(\inf\{n \le N \mid S_n \notin (c_1,c_2)\}, N\Big) \\ t^N(a) &:= t^N(-\infty,a) = \inf\{n \le N \mid S_n \ge a\}. \end{aligned}$$

a) Für $N \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir die Stoppzeit $t^N(c_1,c_2)$ als zweiseitige, beschränkte Ersteintrittszeit und die Stoppzeit $t^N(a)$ als einseitige, beschränkte Ersteintrittszeit.

b) Für $N = \infty$ bezeichnen wir die Stoppzeit $t(c_1,c_2) := t^N(c_1,c_2)$ als zweiseitige (unbeschränkte) Ersteintrittszeit und die Stoppzeit $t(a) := t^N(a)$ als einseitige (unbeschränkte) Ersteintrittszeit.

□

Im Hinblick auf die Randomisierung bei gleichmäßig besten sequentiellen Tests für $\overline{H}_0 : \zeta = \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$ macht das Lemma 1.5.1 die Aussage, dass höchstens zu einem Zeitpunkt randomisiert werden darf, dagegen keine Aussagen darüber, wann dies zu geschehen hat. Bei den ersten Beispielen für gleichmäßige Optimalität, den CIP's, erfolgte die Randomisierung nur zum Endzeitpunkt. Es drängt sich daher die Frage auf, ob auch unter allen beschränkten Ersteintrittszeiten nur zum Endzeitpunkt randomisiert werden darf?
Da der Wertebereich der Prüfgrößen S_n mit wachsenden $n \in \mathbb{N}$ immer weiter auffächert, wird für festes $\zeta_1 > \zeta_0$ der Multiplikator $\tilde{a}(\zeta_1)$ aus 1.5.1 b) zum Endzeitpunkt die meisten Anforderungen erfahren, so dass es naheliegend wird, ihn zum Endzeitpunkt durch $\tilde{a}(\zeta_1) = \tilde{a}_0 + Nd_0(\zeta_1)$ festzulegen. Damit kann nur noch zum Endzeitpunkt randomisiert werden (vgl. Beweis 1.5.1 d)).
Dagegen können wir im Falle diskreter Verteilungen $\mathcal{Q}$ Beispiele angeben, für die zu einem früheren Zeitpunkt als N randomisiert werden darf, wie die folgenden Beispiele für Bernoulliverteilungen zeigen:

1.5.5 Beispiel

Es seien $\mathcal{Q} = \{Q_\vartheta = \mathcal{B}(1,\vartheta) \mid \vartheta \in (0,1)\}$, $\vartheta_0 \in (0,1)$ und zu $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei die einseitige, beschränkte Ersteintrittszeit $t = \inf\{n \le N \mid S_n \ge a\}$ gegeben, wobei wie in 1.3.2.2 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i - n\vartheta_0$.
Zu $m < N$ und $\tilde{a}_0 \ge a$ mit $\tilde{a}_0 \in \{s - m\vartheta_0 \mid s = 0,\dots,m\}$ und $\gamma \in (0,1)$ sei $\underset{\sim}{\varphi}^*$

das Terminalentscheidungsverfahren der Gestalt:

$$\forall n < m \quad \varphi_n^* \quad = \quad \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad S_n \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \tilde{a}_0 \,, \tag{1.5.8}$$

$$\varphi_m^* \quad = \quad \begin{cases} 1 & & & > & \\ \gamma & \text{für} & S_m & = & \tilde{a}_0 \quad , \\ 0 & & & < & \end{cases} \tag{1.5.9}$$

$$\forall n > m \quad \varphi_n^* \quad = \quad \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad S_n \begin{matrix} > \\ \leq \end{matrix} \tilde{a}_0 \,. \tag{1.5.10}$$

Dann liefert der sequentielle Test φ_t^* in den folgenden speziellen Situationen eine gleichmäßig optimale Lösung für
$\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ zum Niveau $\alpha = E_{\vartheta_0}\varphi_t^*$:

a) $N = 3, m = 1$ und $a = \tilde{a}_0 = 1 - \vartheta_0$, $\vartheta_0 \geq \frac{1}{2}$.

b) $N = 3, m = 2$ und $a = \tilde{a}_0 = 1 - 2\vartheta_0$.

c) $N = 5, m = 2$ und $a = \tilde{a}_0 = 2 - 2\vartheta_0$, $\vartheta_0 > \frac{1}{2}$.

d) $N = 6, m = 3$ und $a = 1 - \vartheta_0$, $\tilde{a}_0 = 2 - 3\vartheta_0$ mit $\vartheta_0 < \frac{1}{4}$.

Begründung:

Es bleibt gemäß Korollar 1.5.2b) noch zu zeigen, dass es für alle $\vartheta_1 \in (\vartheta_0, 1)$ ein $a(\vartheta_1) \in \mathbb{R}$ gibt, so dass φ_t^* folgende 1-0-Gestalt $P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_t}$-f.s. besitzt:

$$\varphi_t^* = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad S_t \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} a(\vartheta_1) + td_0(\vartheta_1) \,.$$

<u>Beh.</u>: $a(\vartheta_1) = \tilde{a}_0 - md_0(\vartheta_1)$ liefert in allen 4 Fällen für φ_t^* die erforderte 1-0-Gestalt, denn es gilt wegen $a(\vartheta_1) + nd_0(\vartheta_1) = \tilde{a}_0 + (n-m)d_0(\vartheta_1)$ für alle $\vartheta_1 > \vartheta_0$:

a)

$$\begin{aligned} \text{Auf } \{t = 1\} =& \{X_1 = 1\} : \; S_1 = \tilde{a}_0, \\ \{t = 2\} =& \emptyset, \; (da\ 1 - 2\vartheta_0 < 1 - \vartheta_0), \\ \text{auf } \{t = 3\} =& \{X_1 = 0\} : \; S_3 \leq 2 - 3\vartheta_0 < \tilde{a}_0 + 2d_0(\vartheta_1), \\ & (da\ 2 - 3\vartheta_0 \leq 1 - \vartheta_0 \text{ für } \vartheta_0 \geq \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\text{Auf } \{t=1\} =& \{X_1=1\}: \ S_1 = 1-\vartheta_0 > 1-2\vartheta_0 > \tilde{a}_0 + (1-2)d_0(\vartheta_1),\\
\text{auf } \{t=2\} =& \{X_1=0, X_2=1\}: \ S_2 = 1-2\vartheta_0,\\
\text{auf } \{t=3\} =& \{X_1=0, X_2=0\}: S_3 \le 1-3\vartheta_0 < \tilde{a}_0 + (3-2)d_0(\vartheta_1).
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\{t=1\} =& \emptyset \ (da\ 1-\vartheta_0 < 2-2\vartheta_0),\\
\text{auf } \{t=2\} =& \{X_1=1, X_2=2\}: \ S_2 = 2-2\vartheta_0,\\
\{t=3\} =& \emptyset \ (da\ 2-3\vartheta_0 < 2-2\vartheta_0),\\
\{t=4\} =& \emptyset \ (da\ 3-4\vartheta_0 < 2-2\vartheta_0 \text{ für } \vartheta_0 > \frac{1}{2}),\\
\text{auf } \{t=5\} =& \{X_1=1, X_2=0\}: S_5 \le 4-5\vartheta_0 < \tilde{a}_0 + (5-2)d_0(\vartheta_1).
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\text{auf } \{t=1\} =& \{X_1=1\}: \ S_1 = 1-\vartheta_0 < 2-3\vartheta_0 - 2d_0(\vartheta_1)\\
& (da\ 1-\vartheta_0 < 2-5\vartheta_0 \text{ für } \vartheta_0 < \frac{1}{4}),\\
\{t=2\} =& \emptyset \ (da\, 1-2\vartheta_0 < 1-\vartheta_0),\\
\text{auf } \{t=3\} =& \{X_1=0, X_2=X_3=1\}: \ S_3 = 2-3\vartheta_0,\\
\text{auf } \{t=4\} =& \{X_1=0, X_2=1, X_3=0, X_4=1\} (da\ 2-4\vartheta_0 > 1-\vartheta_0 \text{ für } \vartheta_0 < \frac{1}{3}):\\
& S_4 = 2-4\vartheta_0 < 2-3\vartheta_0 + d_0(\vartheta_1),\\
\text{auf } \{t=5\} =& \{X_1=0, X_2=1, X_3=0, X_4=0, X_5=1\}\\
& (da\ 2-5\vartheta_0 > 1-\vartheta_0 \text{ für } \vartheta_0 < \frac{1}{4}):\\
& S_5 = 2-5\vartheta_0 < 2-3\vartheta_0 + 2d_0(\vartheta_1),\\
\text{auf } \{t=6\} =& \{X_1=0, X_2=1, X_3=0, X_4=0, X_5=0\}:\\
& S_6 \le 2-6\vartheta_0 < 2-3\vartheta_0 + 3d_0(\vartheta_1) = a(\vartheta_1) + 6d_0(\vartheta_1).
\end{aligned}$$

□

Aus diesen Beispielen können wir noch einiges mehr ablesen:

1.5.6 Bemerkung

1) Das Beispiel d) zeigt, dass i.a der Multiplikator $\tilde{a}_0$ des gleichmäßig besten Tests nicht mit der Eintrittsschwelle a der vorgelegten Ersteintrittszeit $t^N(a)$ übereinstimmen muss. Es fragt sich, ob man ein anderes TV $\underset{\sim}{\hat{\varphi}}$ mit $\tilde{a}_0 = a$ finden kann , welches auch das Problem (1.5.1) löst?
   Da ein gleichmäßig bester Test, was die 1-0 Gestalt betrifft, bis auf Randomisierung eindeutig festgelegt ist und da ohne Einschränkung $a, \tilde{a}_0 \in \cup_{n=1}^{N} Bild(S_n)$, ist offensichtlich, dass der Multiplikator $\tilde{a}_0 > a$ nicht mehr kleiner gewählt werden kann, ohne dabei die Gütefunktion zu verändern.

2) Das Beispiel d) zeigt außerdem eine weitere Abweichung von der Struktur der *einseitigen CIPs*: Im Falle $\tilde{a}_0 > a$ darf auch vor dem Randomisierungszeitpunkt für H_0 entschieden werden, wenn gestoppt wird.

3) Bei allen 4 Beispielen können wir beobachten, dass nach dem Randomisierungszeitpunkt mit positiver Wahrscheinlichkeit nicht mehr für H_1 entschieden wird. Daher erhebt sich die Frage, ob sogar allgemeiner gezeigt werden kann, dass, wenn ein gleichmäßig bester sequentieller Test zu einem früheren Zeitpunkt als N mit positiver Wahrscheinlichkeit randomisiert, er für die nachfolgenden Zeitpunkte bei H_0 bleiben muss?

Das folgende Lemma gibt auf die letzte Frage für den Fall einseitiger Ersteintrittszeiten eine positive Antwort:

1.5.7 Lemma: Randomisierung bei gleichmäßig besten sequentiellen Tests

Zu $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $a \in \mathbb{R}$ sei $t = t^N(a)$ eine einseitige, beschränkte bzw. unbeschränkte Ersteintrittszeit mit den Prüfgrößen $S_n := \sum_{k=1}^{n} T(X_k) - nb'(\zeta_0)$ wie in 1.3.2.2. Außerdem gelte

$$d_0 = \max_{x \in \mathcal{X}} T(x) - b'(\zeta_0).$$

Sei φ_t^* eine Lösung von (1.5.1), die zu einem früheren Zeitpunkt als N randomisiert, d.h.

$$\exists m < N : \quad P_{\zeta_0}(\varphi_m^* \in (0,1), t = m) > 0. \tag{1.5.11}$$

Dann gilt

$$\forall n > m \;\; P_\zeta(\varphi_n^* > 0, t = n) = 0 \quad \forall \zeta \in \mathcal{Z}.$$

Beweis:

Wegen (1.5.11) erhalten wir aus dem Beweis von Lemma 1.5.1 d):

$$\forall \zeta_1 \in (\zeta_0, \bar{\zeta}) \quad S_m = \tilde{a}(\zeta_1) + m d_0(\zeta_1) = \tilde{a}_0 \text{ auf } \{t = m\} \; P_{\zeta_0|\mathcal{C}_m} - \text{f.s.}$$

Da $\{t = m\} = \{S_1 < a, \ldots, S_{m-1} < a, S_m \geq a\}$ folgt daraus

$$(*) \qquad \tilde{a}_0 \geq a \text{ und } \tilde{a}(\zeta_1) = \tilde{a}_0 - m d_0(\zeta_1) \; \forall \zeta_1 \in (\zeta_0, \bar{\zeta}).$$

Sei nun $n > m$, dann folgt aus der notwendigen Bedingung 1.5.1 b), dass auf $\{t = n\}$ $P_{\zeta_0|\mathcal{C}_n}$-f.s. für alle $\zeta_1 \in (\zeta_0, \bar{\zeta})$ die Implikation gilt:

$$S_n < \tilde{a}(\zeta_1) + n d_0(\zeta_1) \overset{(*)}{=} \tilde{a}_0 + (n - m) d_0(\zeta_1) \Rightarrow \varphi_n^* = 0$$

und der Grenzübergang $\zeta_1 \to \bar{\zeta}$ liefert dann

$$S_n < \tilde{a}_0 + (n - m) d_0 \Rightarrow \varphi_n^* = 0.$$

Da auf $\{t = n\}$ gilt $S_{n-1} < a \leq \tilde{a}_0$, und $d_0 = \max_{x \in \mathcal{X}} T(x) - b'(\zeta_0)$, folgt:

$$S_n = S_{n-1} + (T(X_n) - b'(\zeta_0)) < \tilde{a}_0 + d_0 \leq \tilde{a}_0 + (n - m) d_0 \;\text{ auf } \{t = n\} P_{\zeta_0|\mathcal{C}_n} - \text{f.s.}$$

Damit erhalten wir aufgrund der Äquivalenz von $\{P_{\zeta|\mathcal{C}_n} \mid \zeta \in \mathcal{Z}\}$ die Behauptung.
□

1.5.8 Bemerkungen: Randomisierung bei gleichmäßig besten sequentiellen Tests

a) Die Aussage von Lemma 1.5.7 trifft für alle in 1.3.2.3 angegebenen Beispiele einparametriger Exponentialfamilien zu, da in diesen Fällen jeweils $d_0 = \max_{x \in \mathcal{X}} T(x) - b'(\zeta_0)$ gilt.

b) Der Beweis des Lemmas 1.5.7 gibt eine negative Antwort auf die Frage, ob unter rechtsseitigen Ersteintrittszeiten der Multiplikator $\tilde{a}_0$ einer Lösung φ_t^* von (1.5.1) auch kleiner als die Schwelle a der vorgelegten Stoppzeit $t^N(a)$ sein darf, wenn der Test randomisiert. In diesem Fall muss gelten $\tilde{a}_0 \geq a$. Allerdings bleibt die Frage für nichtrandomisierte Lösungen von (1.5.1) noch offen.

c) Ist in Lemma 1.5.7 der Multiplikator $\tilde{a}_0$ gleich a wählbar, so erhalten wir zudem, dass der Test φ_t^* sich vor dem Randomisierungszeitpunkt m nur für H_1 entscheiden darf, d.h. es gilt

$$\forall n < m \;\; P_\zeta(\varphi_n^* < 1, t = n) = 0 \quad \forall \zeta \in \mathcal{Z}.$$

Begr.: Sei $n < m$. Dann bekommen wir aus der notwendigen Bedingung 1.5.1 b), dass auf $\{t = n\} = \{S_1 < \tilde{a}_0, \ldots, S_{n-1} < \tilde{a}_0, S_n \geq \tilde{a}_0\}$ $P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_n}$-f.s. für alle $\zeta_1 \in (\zeta_0, \bar{\zeta})$ gilt:

$$S_n > \tilde{a}(\zeta_1) + n d_0(\zeta_1) \overset{(*)}{=} \tilde{a}_0 - (m-n) d_0(\zeta_1) \Rightarrow \varphi_n^* = 1.$$

d) Haben wir in der Situation von 1.5.7 zusätzlich $d_0 = \infty$, d.h. der Träger von $P_\zeta^{T(X_1)}$ ist unendlich , so gilt unter den rechtsseitigen Ersteintrittszeiten $t = t^N(a)$ mit $P_{\zeta_0}(S_1, \ldots, S_{N-1} < a) > 0$, dass eine Lösung φ_t^* von (1.5.1), nur zum Endzeitpunkt randomisieren darf, d.h.:

$$\forall m < N \;\; P_{\zeta_0}(\varphi_m^* \in (0,1), t = m) = 0.$$

Begr.: $\mathbb{A}$: $\exists m < N : \; P_{\zeta_0}(\varphi_m^* \in (0,1), t = m) > 0$. Dann folgt aus Lemma 1.5.7

$$P_{\zeta_0}(\varphi_N^* > 0, t = N) = 0.$$

Da $d_0 = \max_{x \in \mathcal{X}} T(x) - b'(\zeta_0) = \infty$, erhalten wir

$$P_{\zeta_0}(S_1, \ldots, S_{N-1} < a, S_{N-1} + T(X_N) > \tilde{a}_0) > 0,$$

woraus aber der Widerspruch $P_{\zeta_0}(\varphi_N^* > 0, t = N) > 0$ entsteht. □

Dabei stellt die Forderung $P_{\zeta_0}(S_1, \ldots, S_{N-1} < a) > 0$ keine Einschränkung an die Stoppzeit $t^N(a)$ dar. Wäre nämlich $P_{\zeta_0}(S_1, \ldots, S_{N-1} < a) = 0$, so wählte man das kleinste $M \geq 1$ mit $P_{\zeta_0}(S_1, \ldots, S_{M-1} < a) > 0$ und erhielte $t^M(a) = t^N(a)$ P_{ζ_0}-f.s.

e) Es sei darauf hingewiesen, dass die Einschränkung, zu welchem Zeitpunkt randomisiert werden darf, die das Lemma 1.5.7 macht, sich im allgemeinen nicht auf *lokal* gleichmäßig beste Tests, d.h. Lösungen von (1.5.1) mit $\hat{\zeta} < \bar{\zeta}$, übertragen lässt. Am Beipiel 1.5.5 a) können wir sehen, dass lokal gleichmäßig beste Tests sich i.a. nach dem Randomisierungszeitpunkt nicht

mehr für H_0 zu entscheiden brauchen und somit im Falle $d_0 = \infty$ eine Randomisierung zum Endzeitpunkt nicht mehr zwingend wird, was die folgende Modifikation von Beispiel 1.5.5 a) illustriert:
Man wähle $\vartheta_0 < 1/2$ und wie in 1.5.5 a) seien $N = 3$, $a = \tilde{a}_0 = (1 - \vartheta_0)$, dann gilt für ein hinreichend kleines $\triangle > 0$:

$$\begin{aligned} &\text{auf } \{t = 3\} \cap \{X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1\}: \; S_3 = 2 - 3\vartheta_0 > \tilde{a}_0 + 2d_0(\vartheta_1) \\ &\quad \text{für alle } \vartheta_1 \in (\vartheta_0, \vartheta_0 + \triangle), \; \text{da } 2 - 3\vartheta_0 > 1 - \vartheta_0 \text{ für } \vartheta_0 < \frac{1}{2}. \\ &\quad \text{Außerdem gilt auf } \{t = 3\} \cap \{X_1 = 0, X_2 + X_3 \leq 1\}: \\ &\quad S_3 \leq 1 - 3\vartheta_0 < \tilde{a}_0 + 2d_0(\vartheta_1) \; \forall \vartheta_1 > \vartheta_0 (\text{ da } 1 - 3\vartheta_0 < 1 - \vartheta_0). \end{aligned}$$

Gemäß Lemma 1.5.2 b) liefert damit der Test φ_t^* zu seinem Niveau eine Lösung von $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta \in (\vartheta_0, \vartheta_0 + \triangle)$. □

Die Einschränkungen, welche wir bei der Randomisierung des TV's einer Lösung von (1.5.1) unter einseitigen Ersteintrittszeiten $t^N(a)$ erhalten, weisen darauf hin, dass wir im Falle diskreter Verteilungsklassen $\mathcal{Q}$ nicht jedes Niveau α werden ausschöpfen können mit den Kandidaten für gleichmäßig beste Tests, die gemäß Lemma 1.5.1 in Frage kommen. Damit kann es zu solchen Niveaus α einen gleichmäßig besten Test für $\overline{H}_0 : \zeta = \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$ unter einer einseitigen beschränkten Ersteintrittszeit nicht geben. Ein Beispiel hierfür werden wir in 1.6 liefern.

Wir wenden uns jetzt den Negativaussagen zur gleichmäßigen Optimalität zu: Mit Hilfe von Korollar (1.5.2) lassen sich für zweiseitige beschränkte Ersteintrittszeiten und für unbeschränkte Ersteintrittszeiten Situationen angeben, in denen (lokal) gleichmäßig beste Tests nicht existieren, trotz der starken Voraussetzung, dass einparametrige Exponentialfamilien vorliegen.
Als erstes Beispiel betrachten wir zweiseitige, beschränkte Ersteintrittszeiten bei Normalverteilungen für den Horizont $N = 2$.

1.5.9 Beispiel

Es seien $Q_\vartheta = \mathcal{N}(\vartheta, \sigma^2)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 < c_2$ und $t := t^2(c_1, c_2)$ eine zweiseitige, beschränkte Ersteintrittszeit.
Seien $\alpha \in (0,1)$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ und $\zeta_0 := \frac{\vartheta_0}{\sigma^2}$. Dann gibt es keine Lösung für das Problem (1.5.1).

Um den Schreibaufwand bei diesem Beweis und den nachkommenden Beweisen zu reduzieren, führen wir folgende Bezeichnung ein:

1.5.10 Definition

Es seien $S_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ $(n \in \mathbb{N})$ messbare Funktionen, $t : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ eine Stoppzeit und $\tilde{a}_0 \in \mathbb{R}, , m \in \mathbb{N}, U \subset \mathbb{R}$.
Dann sprechen wir davon, dass

1) S_t auf $\{t = m\}$ unter P_{ϑ_0} beliebig nahe von links an $\tilde{a}_0$ herankommt, falls gilt:
$$\forall \epsilon > 0 \qquad P_{\vartheta_0}(S_t \in (\tilde{a}_0 - \epsilon, \tilde{a}_0), t = m) > 0;$$

2) S_t auf $\{t = m\}$ unter P_{ϑ_0} beliebig nahe von rechts an $\tilde{a}_0$ herankommt, falls gilt:
$$\forall \epsilon > 0 \qquad P_{\vartheta_0}(S_t \in (\tilde{a}_0, \tilde{a}_0 + \epsilon), t = m) > 0;$$

3) S_t nimmt auf $\{t = m\}$ unter P_{ϑ_0} jeden Wert aus U an, falls gilt:
$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_1 < c_2 : \; (c_1, c_2) \subset U \;\; P_{\vartheta_0}(S_t \in (c_1, c_2), t = m) > 0.$$

Wird aus dem Zusammenhang ersichtlich, unter welchem W-Maß eine der oberen Aussagen verstanden werden soll, so lassen wir den Zusatz *unter* P_{ϑ_0} einfach fort.

Beweis der Aussage in 1.5.9:

$\mathbb{A}$: Es gibt eine Lösung φ_t^* von (1.5.1). Dann folgt aus dem Korollar 1.5.2:
$\exists \tilde{a}_0 : \quad \forall \zeta_1 > \zeta_0 \; \exists \tilde{a}(\zeta_1)$, so dass für $n \in \{1,2\}$ auf $\{t = n\}$ $P_{\zeta_0|\mathcal{C}_n}$–f.s. notwendig die Bedingungen O-1.1 und O-1.2 erfüllt sein müsen.

Wegen der Normalverteilungsannahme kann der Multiplikator $\tilde{a}_0$ je nach der Wahl von $\alpha, \vartheta_0, c_1, c_2$ jeden Wert aus $\mathbb{R}$ annehmen.

Da zum Endstoppzeitpunkt $N = 2$ auf $\{t = N\}$ die Zufallsgröße $X_N - b'(\zeta_0)$ keiner Beschränkung unterliegt und somit jeden Wert aus $\mathbb{R}$ annehmen kann, bekommen wir mit S_t jeden Wert aus $\mathbb{R}$ auf $\{t = N\}$, so dass der Multiplikator $\tilde{a}(\zeta_1)$ auf $\{t = N\}$ festgelegt werden muss:

a) Auf $\{t = 2\} = \{S_1 \in (c_1, c_2)\}$ gilt für jede Wahl von $\tilde{a}_0 \in \mathbb{R}$, dass S_t beliebig nahe von links und von rechts an $\tilde{a}_0 \in \mathbb{R}$ herankommt.
Mit den Bedingungen O-1.1 und O-1.2 auf $\{t = 2\}$ folgt daraus :

$$(*) \quad \tilde{a}(\zeta_1) = \tilde{a}_0 - 2d_0(\zeta_1)$$

<u>Begr.</u> $\mathbb{A}$: $\tilde{a}_0 < \tilde{a}(\zeta_1) + 2d_0(\zeta_1) \quad \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : \; \tilde{a}_0 < \tilde{a}_0 + \epsilon < \tilde{a}(\zeta_1) + 2d_0(\zeta_1)$
Da S_t auf $\{t = 2\}$ beliebig nahe von rechts an $\tilde{a}_0$ herankommt, gilt:

$$P_{\zeta_0}(S_t \in (\tilde{a}_0, \tilde{a}_0 + \epsilon), t = 2) > 0.$$

Dies liefert aber einen Widerspruch zu O-1.1.
Analog führt die Annahme $\tilde{a}_0 > \tilde{a}(\zeta_1) + 2d_0(\zeta_1)$ zu einem Widerspruch zur Bedingung O-1.2 aufgrund der Eigenschaft, dass S_t auf $\{t = 2\}$ beliebig nahe von links an $\tilde{a}_0$ herankommt $\quad \Rightarrow (*)$.

b) Die Festlegung von $\tilde{a}(\zeta_1)$ gemäß $(*)$ verträgt sich aber nicht mit O-1.1 und O-1.2 auf $\{t = 1\} = \{S_1 \notin (c_1, c_2)\}$:

<u>1. Fall</u> Ist $\tilde{a}_0 \notin [c_1, c_2]$, so kommen wir mit S_t auf $\{t = 1\}$ beliebig nahe von links und rechts an $\tilde{a}_0$ heran, so dass aufgrund von O-1.1 und O-1.2 gelten muss (vgl.a)):

$$\tilde{a}(\zeta_1) = \tilde{a}_0 - d_0(\zeta_1).$$

Aber wegen $d_0(\zeta_1) > 0$ liefert dies einen Widerspruch zu $(*)$.
Daher muss notwendig der andere Fall vorliegen:

<u>2. Fall</u> $\tilde{a}_0 \in [c_1, c_2]$
Aufgrund der Festlegung von $\tilde{a}_0$ in $(*)$ formuliert sich die Bedingung O-1.2 auf $\{t = 1\}$ um zu:

O-1.2' $S_n < \tilde{a}_0 \Rightarrow S_n \leq \tilde{a}_0 - (N-n)d_0(\zeta_1)$ auf $\{t = n\}$ $P_{\zeta_0|\mathcal{C}_n}$-f.s. mit $n = 1$.

Da S_t auf $\{t = 1\}$ beliebig nahe von links an c_1 herankommt, muss wegen O-1.2' gelten:

$$\forall \zeta_1 > \zeta_0 \quad c_1 \leq \tilde{a}_0 - (N-1)d_0(\zeta_1) \leq c_2,$$

und nach Grenzübergang $\zeta_1 \to \overline{\zeta} = \infty$:

$$c_1 \leq \tilde{a}_0 - (N-1)d_0 < \tilde{a}_0 \leq c_2. \tag{1.5.12}$$

Da aber $d_0 = \infty$ (vgl. 1.3.2.1 d)), kann diese Forderung nicht erfüllt werden, was den Widerspruch zur Ausgangsannahme liefert. □

Der wesentliche Grund, warum in der Situation von Beispiel 1.5.9 keine gleichmäßig besten Tests existieren können, liegt im Zusammenwirken folgender beiden Effekte: Zum einen, dass die Stoppzeit t auch mit positiver Wahrscheinlichkeit stoppt, wenn die Prüfgröße die Schwelle c_1 unterschreitet und zum anderen, dass die Größe $d_0(\zeta_1)$ unbeschränkt ist für $\zeta_1 \in (\zeta_0, \bar{\zeta})$:
Ist nämlich der „wahre" Parameter $\zeta_1 > \zeta_0$ sehr groß, so wird der Test φ_t^* durch das Stoppen, sobald die Prüfgröße die Schwelle c_1 unterschreitet, an Güte verlieren im Vergleich zu einem besten Test für $\{\zeta_0\}$ gegen $\{\zeta_1\}$.

Der Beweis zeigt uns, wie sich das Beispiel 1.5.9 leicht verallgemeinern lässt.
Der folgende Satz stellt die allgemeine Struktur heraus, die zum einen von den zweiseitigen beschränkten Ersteintrittszeiten und zum anderen von der Verteilungsklasse benötigt wird, damit keine gleichmäßig besten sequentiellen Tests existieren können. Das anschließende Korollar liefert konkrete Beispiele, worauf sich der Satz anwenden lässt.

1.5.11 Satz

Es seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $c_1 < c_2$ und $l, m \in \mathbb{N}$ mit $l < m$. Weiter sei $t : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ eine Stoppzeit mit $P_{\zeta_0}(t = i,\ S_t \notin (c_1, c_2)) > 0$ für $i \in \{l, m\}$, wobei wie in 1.3.2.2 $S_n := \sum_{k=1}^{n} T(X_k) - nb'(\zeta_0)$.
Dabei gelte

1) zum Zeitpunkt m:
$\forall \tilde{a}_0 \in \mathbb{R}$ *mit* $P_{\zeta_0}(S_t \geq \tilde{a}_0) > 0$
komme S_t *auf* $\{t = m\}$ *beliebig nahe von links und von rechts an* $\tilde{a}_0$ *heran;*

2) zum Zeitpunkt l:

2.1) $\forall \tilde{a}_0 \notin [c_1, c_2]$ *mit* $P_{\zeta_0}(S_t \geq \tilde{a}_0) > 0$
komme S_t *auf* $\{t = l\}$ *beliebig nahe von links und von rechts an* $\tilde{a}_0$ *heran;*

2.2) S_t *komme auf* $\{t = l\}$ *beliebig nahe von links an* c_1 *heran;*

3) $(m - l)d_0 > c_2 - c_1$, *mit* d_0 *aus 1.3.2.1 e).*

Sei $\alpha \in (0, 1)$. *Dann gibt es für das Problem (1.5.1) keine Lösung* $\underset{\sim}{\varphi}^*$ *mit* $E_\zeta \, \varphi_t^* < 1 \; \forall \zeta \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$. *Insbesondere besitzt das Problem (1.5.1) keine Lösung, wenn t unter* P_{ζ_0} *abgeschlossen ist.*

Beweis:

1) $\mathbb{A}$: Es gibt eine Lösung φ_t^* von (1.5.1). Dann folgt aus dem Korollar 1.5.2:
$\exists \tilde{a}_0 : \quad \forall \zeta_1 > \zeta_0 \; \exists \tilde{a}(\zeta_1)$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ auf $\{t = n\}$ $P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_n}$–f.s. notwendig die Bedingungen O-1.1 und O-1.2 erfüllt sein müssen.
Da φ_t^* notwendig die 1-0-Gestalt (1.5.5) besitzt, muss für $\tilde{a}_0$ gelten $P_{\zeta_0}(S_t \geq \tilde{a}_0) > 0$, sonst hätte der Test φ_t^* die Güte 0.

a) Laut Voraussetzung 1) kommt S_t auf $\{t = m\}$ beliebig nahe von links und von rechts an $\tilde{a}_0$ heran, daher muss aufgrund der Bedingungen O-1.1 und O-1.2 der Multiplikator $\tilde{a}(\zeta_1)$ folgendermaßen festgelegt werden:

$$(*) \quad \tilde{a}(\zeta_1) = \tilde{a}_0 - m d_0(\zeta_1).$$

(zur Begründung vgl. Beweis von Bsp. 1.5.9)

b) Diese Festlegung von $\tilde{a}(\zeta_1)$ verträgt sich wegen der Bedingung an die Stoppzeit auf $\{t = l\}$ nicht mit O-1.1 und O-1.2:

<u>1.Fall</u> Ist $\tilde{a}_0 \notin [c_1, c_2]$,
so kommen wir laut Voraussetzung 2.1) mit S_t auf $\{t = l\}$ beliebig nahe von rechts und von links an $\tilde{a}_0$ heran, so dass aufgrund von O-1.1 und O-1.2 gelten muss

$$\tilde{a}(\zeta_1) = \tilde{a}_0 - l d_0(\zeta_1).$$

Aber wegen $d_0(\zeta_1) > 0$ liefert dies einen Widerspruch zu $(*)$.
Daher muss notwendig vorliegen:

2.Fall $\tilde{a}_0 \in [c_1, c_2]$.
Aufgrund der Festlegung von $\tilde{a}_0$ in $(*)$ formuliert sich die Bedingung O-1.2 um zu:

O-1.2" $\quad S_l < \tilde{a}_0 \Rightarrow S_l \leq \tilde{a}_0 - (m-l)d_0(\zeta_1)$ auf $\{t = l\}$ $P_{\zeta_0|\mathcal{C}_l}$-f.s..

Da laut Voraussetzung 2.2) S_t auf $\{t = l\}$ beliebig nahe von links an c_1 herankommt, muss wegen O-1.2" gelten:

$$\forall \zeta_1 > \zeta_0 \quad c_1 \leq \tilde{a}_0 - (m-l)d_0(\zeta_1) \leq c_2,$$

und nach Grenzübergang $\zeta_1 \to \overline{\zeta} = \infty$:

$$c_1 \leq \tilde{a}_0 - (m-l)d_0 < \tilde{a}_0 \leq c_2. \tag{1.5.13}$$

Da aber $\tilde{a}_0 \in [c_1, c_2]$, liefert diese Aussage einen Widerspruch zur Voraussetzung 3).

2) Ist t sogar abgeschlossen unter P_{ζ_0}, dann gilt gemäß Lemma 1.5.1, dass jede Lösung von (1.5.1) auf $\hat{H}_1$ Güte kleiner als 1 besitzt. Wegen 1) kann es aber dann keine Lösungen von (1.5.1) geben.

□

Die in 1.5.11 angegebenen Voraussetzungen werden für zweiseitige, beschränkte Ersteintrittszeiten z.B. von den Klassen der Normalverteilungen und der Gammaverteilungen erfüllt:

1.5.12 Beispiele: Negativaussagen für zweiseitige beschränkte Ersteintrittszeiten

Es sei $t = t^N(c_1, c_2)$ eine zweiseitige, beschränkte Ersteintrittszeit mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 < c_2$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dann gilt:

a) Es seien $\mathcal{Q} = \{\mathcal{N}(\vartheta, \sigma^2) \mid \vartheta \in \mathbb{R}\}$, $\sigma, \vartheta_0 \in \mathbb{R}$ und $\zeta_0 := \frac{\vartheta_0}{\sigma^2}$ und $\alpha \in (0,1)$. Dann gibt es keine Lösung für das Problem (1.5.1).

*b) Es seien $\mathcal{Q} = \{\Gamma(\vartheta, \mu) \mid \vartheta \in (0, \infty)\}$, $\mu, \vartheta_0 \in (0, \infty)$ und $\zeta_0 := \vartheta_0$ und $\alpha \in (0,1), N \geq 3$.
Weiter sei $c_2 < (N-2)d_0$ und $c_2 - c_1 < d_0$, wobei $d_0 = \frac{\mu}{\zeta_0}$ (vgl. 1.3.2.3 e). Dann gibt es keine Lösung für das Problem (1.5.1).*

Beweis:

Wir wenden Satz 1.5.11 an auf den Fall $m = N$ und $l = N - 1$.
Es bleibt zu zeigen, dass die Voraussetzungen 1)-3) in den Situationen a) und b) erfüllt werden.
Laut Definition von t gilt:

$$\begin{aligned}
\{t = N\} &= \{S_k \in (c_1, c_2)\, \forall k < N,\, S_N \in \mathbb{R}\} \\
\{t = N - 1\} &= \{S_k \in (c_1, c_2)\, \forall k < N - 1,\, S_{N-1} \notin (c_1, c_2)\}.
\end{aligned}$$

a) Die Zufallsgrößen $X_1, \ldots, X_N$ sind unter P_ϑ stochastisch unabhängig und $\mathcal{N}(\vartheta, \sigma^2)$-verteilt.

   i) Da zum Endzeitpunkt N die letzte Beobachtung X_N keiner Beschränkung unterliegt, erhalten wir, dass $X_N - b'(\zeta_0)$ auf $\{t = N\}$ jeden Wert aus $\mathbb{R}$ annimmt.
   Damit ist die Bedingung 1) erfüllt.

   ii) Da S_t auf $\{t = N-1\}$ jeden Wert außerhalb von $[c_1, c_2]$ annimmt, sind auch die Bedingungen 2) erfüllt.

   iii) Wegen $d_0 = \infty$ ist 3) für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ erfüllt.

b) Die Zufallsgrößen $X_1, \ldots, X_N$ sind unter P_ϑ stochastisch unabhängig und $\Gamma(\vartheta, \mu)$-verteilt.
Sei $\tilde{a}_0 \in \mathbb{R}$ mit $P_{\zeta_0}(S_t \geq \tilde{a}_0) > 0$. Dann gilt $\tilde{a}_0 \in (-\infty, c_2 + d_0)$.

<u>Begr.:</u> Für jedes $n \leq N$ gilt $d_0 - X_n \leq d_0 \quad P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_n} - f.s.$.
Wegen $S_n = \sum_{i=1}^n \big(T(X_i) - b'(\zeta_0)\big) = S_{n-1} + \big(d_0 - X_i\big)$(vgl.1.3.2.3 e)), erhalten wir für $n \leq N$ auf $\{t = n\}:\ S_n < c_2 + d_0\ P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_n} - f.s.$
Wäre $\tilde{a}_0 \geq c_2 + d_0$, so würde aufgrund der notwendigen 1-0 Gestalt (1.5.5) der Lösungen von (1.5.1) die Aufgabe (1.5.1) durch einen Test der Güte 0 gelöst werden. $\Rightarrow \tilde{a}_0 < c_2 + d_0$.

i) Da $c_2 < (N-1)d_0$ und $d_0 - X_i$ $(i \leq N)$ jeden Wert aus $(-\infty, d_0)$ annimmt, erhalten wir auf $\{t = N\}$, dass S_{N-1} jeden Wert aus (c_1, c_2) annimmt. Somit können wir mit S_t auf $\{t = N\}$ jeden Wert aus $(-\infty, c_2 + d_0)$ annehmen. Daraus folgt die Bedingung 1).

ii) Wegen $c_2 < (N - 2)d_0$, kann S_{N-2} auf $\{t = N - 1\}$ jeden Wert aus (c_1, c_2) annehmen und somit S_t auf $\{t = N - 1\}$ jeden Wert aus

$(-\infty, c_2 + d_0) \setminus (c_1, c_2)$. Daraus erhalten wir die Bedingungen 2).

iii) Laut Voraussetzung ist die Bedingung 3) erfüllt. □

Eine zu Korollar 1.5.12 entprechende Negativaussage lässt sich für das Testen unter beschränkten *ein*seitigen Ersteintrittszeiten für das Problem (1.5.3) machen, wenn das Stoppen der Ersteintrittszeit gegenläufig zum Problem (1.5.3) erfolgt. Dazu modifizieren wir den Satz 1.5.11 auf die Struktur einer einseitigen beschränkten Ertseintrittszeit:

1.5.13 Satz

Es seien $c \in \mathbb{R}$ und $l, m \in \mathbb{N}$ mit $l < m$. Weiter sei $t : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ eine Stoppzeit mit $P_{\zeta_0}(t = i,\, S_t \geq c) > 0$ für $i \in \{l, m\}$, wobei wie in 1.3.2.2 $S_n := \sum_{k=1}^{n} T(X_k) - nb'(\zeta_0)$. Dabei gelte

1) *zum Zeitpunkt m:*
   $\forall \tilde{a}_0 \in \mathbb{R}$ *mit* $P_{\zeta_0}(S_t \leq \tilde{a}_0) > 0$
   komme S_t auf $\{t = m\}$ beliebig nahe von links und von rechts an $\tilde{a}_0$ heran;

2) *zum Zeitpunkt l:*

   2.1) $\forall \tilde{a}_0 > c$ *mit* $P_{\zeta_0}(S_t \leq \tilde{a}_0) > 0$
   komme S_t auf $\{t = l\}$ beliebig nahe von links und von rechts an $\tilde{a}_0$ heran;

   2.2) *S_t komme auf $\{t = l\}$ beliebig nahe von rechts an c heran;*

3) $\lim_{\zeta_1 \to \underline{\zeta}} d_0(\zeta_1) = -\infty$.

Sei $\alpha \in (0, 1)$. Dann gibt es für das Problem (1.5.3) keine Lösung $\underset{\sim}{\varphi}^*$ mit $E_\zeta\, \varphi_t^* < 1$ $\forall \zeta \in (\underline{\zeta}, \zeta_0)$. Insbesondere besitzt das Problem (1.5.3) keine Lösung, wenn t abgeschlossen unter P_{ζ_0} ist.

Beweis:

$\mathbb{A}$: Es gibt eine Lösung φ_t^* von (1.5.3). Dann folgt aus der Bemerkung 1.5.3:

$$\exists \tilde{a}_0 \in \mathbb{R} \text{ mit } \varphi_t^* = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad S_t \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \tilde{a}_0 \;\; P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_t} - \text{f.s.}, \tag{1.5.14}$$

und $\forall \zeta_1 < \zeta_0$ $\exists \tilde{a}(\zeta_1)$, so dass für $n \in \mathbb{N}$ auf $\{t = n\}$ $P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_n}$–f.s. notwendig die

Bedingungen O-1.1 und O-1.2 erfüllt werden müssen.
Wegen der 1-0-Gestalt von φ_t^* muss $P_{\zeta_0}(S_t \leq \tilde{a}_0) > 0$ gelten, weil sonst der Test φ_t^* die Güte 0 hätte.

a) Laut Voraussetzung 1) kommt S_t auf $\{t = m\}$ beliebig nahe von links und von rechts an $\tilde{a}_0$ heran, so dass wegen den Bedingungen O-1.1 und O-1.2 folgt
$$(*) \quad \tilde{a}(\zeta_1) = \tilde{a}_0 - md_0(\zeta_1).$$

b) Diese Festlegung von $\tilde{a}(\zeta_1)$ verträgt sich aufgrund der Bedingungen an die Stoppzeit auf $\{t = l\}$ nicht mit O-1.1 und O-1.2:

<u>1.Fall</u> Ist $\tilde{a}_0 > c$,
so kommen wir laut Voraussetzung 2.1) mit S_t auf $\{t = l\}$ beliebig nahe von rechts und von links an $\tilde{a}_0$ heran, so dass aufgrund von O-1.1 und O-1.2 gelten muss
$$\tilde{a}(\zeta_1) = \tilde{a}_0 - ld_0(\zeta_1).$$
Wegen $d_0(\zeta_1) < 0$ liefert dies aber einen Widerspruch zu $(*)$.
Daher muss notwendig vorliegen:

<u>2.Fall</u> $\tilde{a}_0 \leq c$.
Dann gilt $\tilde{a}(\zeta_1) - ld_0(\zeta_1) \leq c$, da es sonst ein $\epsilon > 0$ gäbe mit $c < c + \epsilon < \tilde{a}(\zeta_1) + ld_0(\zeta_1)$. Aufgrund der Bedingung 2.2) würde dann $P_{\zeta_0}\big(S_t \in (c, c+\epsilon), t = l\big) > 0$ gelten, was aber einen Widerspruch zu O-1.1 ergibt.
Mit der Festlegung von $\tilde{a}(\zeta_1)$ in $(*)$ erhalten wir
$$\tilde{a}_0 - (m - l)d_0(\zeta_1) \leq c \; \forall \zeta_1 < \zeta_0.$$
Die Voraussetzung $\lim_{\zeta \to \underline{\zeta}} d_0(\zeta_1) = -\infty$ liefert schließlich den Widerspruch.

2) Ist t sogar abgeschlossen unter P_{ζ_0}, dann gilt gemäß Lemma 1.5.3, dass jede Lösung von (1.5.3) auf $\hat{H}_1$ Güte kleiner als 1 besitzt. Wegen 1) kann es aber dann keine Lösungen von (1.5.1) geben.

□

Die Aussage von Satz 1.5.13 formuliert genau das, was man von der Anschauung

ohnehin erwarten würde:
Sofern ein gleichmäßig bester sequentieller Test φ_t^* für das Problem $\overline{H}_0 : \zeta = \zeta_0$ gegen $\underline{H}_1 : \zeta < \zeta_0$ existiert, muss er die 1-0-Gestalt (1.5.14) besitzen. D.h. er muss sich bei kleinen Werten der Prüfgröße S_n $(n \in \mathbb{N})$, in welcher isotoner Dichtequotient vorliegt, für $\underline{H}_1$ entscheiden, dagegen bei großen Werten der Prüfgröße bei $\overline{H}_0 : \zeta = \zeta_0$ bleiben. Unter einer Stoppzeit t, die vorschreibt nur bei großen Werten der Prüfgröße zu stoppen, sich also gegenläufig zum TV $\underset{\sim}{\varphi}$ verhält, verliert das TV $\underset{\sim}{\varphi}$ offensichtlich an Güte und wird daher nicht gleichmäßig optimal sein können.
Der Satz 1.5.13 hat aber weiter reichende Konsequenzen:
Zunächst folgt daraus, dass unter den Voraussetzungen aus 1.5.13 ein gleichmäßig bester sequentieller Test für $H_0 : \zeta \leq \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$, falls er existiert, i.a. nicht die Fehlerwahrscheinlichkeit 1.Art unter allen α-ähnlichen Tests minimieren wird, so wie wir es aus der klassischen Testtheorie her kennen. Zum anderen hat der Satz 1.5.13 Auswirkungen auf die Anforderungen an die Verteilungsklasse, um gleichmäßíg beste Tests für $H_0 : \zeta \leq \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$ zu garantieren, worauf wir im Abschnitt 1.6 zu sprechen kommen.
Es folgen zwei Beispiele, auf die sich der Satz 1.5.13 anwenden lässt.

1.5.14 Beispiele: Negativaussagen für einseitige beschränkte Ersteintrittszeiten

Es sei $t = t^N(c)$ mit $c \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ eine einseitige beschränkte Ersteintrittszeit. Dann gilt:

a) Es seien $\mathcal{Q} = \{\mathcal{N}(\vartheta, \sigma^2) \mid \vartheta \in \mathbb{R}\}$ und $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1)$. Dann gibt es keine Lösung für das Problem (1.5.3) Lösung und somit auch keine Lösung für das Problem (1.5.2).

b) Seien $\mathcal{Q} = \{\Gamma(\vartheta, \mu) \mid \vartheta \in (0, \infty)\}$, $\vartheta_0 \in (0, \infty)$, $d_0 := \frac{\mu}{\zeta_0}$ und $c < (N-1)d_0$. Weiter sei $\alpha(0, 1)$. Dann gibt es keine Lösung für die Probleme (1.5.3) und (1.5.2).

Beweis:

Wir wenden Satz 1.5.13 auf den Fall $m = N$ und $l = N - 1$ an und zeigen dazu, dass die Voraussetzungen 1)-3) in den Situationen a) und b) erfüllt werden.

a) Da zum Endzeitpunkt N die letzte Beobachtung X_N keiner Beschränkung unterliegt und diese alle Werte aus $\mathbb{R}$ annehmen kann, gilt:

$$\forall a \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}: \qquad P_{\zeta_0}\big(S_N \in (a, a+1/k), S_1, \ldots, S_{N-1} \leq c\big) > 0$$
$$\text{und } P_{\zeta_0}\big(S_N \in (a, a-1/k), S_1, \ldots, S_{N-1} \leq c\big) > 0.$$

Damit wird die Bedingung 1) in 1.5.14 erfüllt. Aufgrund der Definition von t werden auch die Bedingungen 2) für $l = N-1$ erfüllt, da S_l jeden Wert größer oder gleich c annehmen kann.
Schließlich haben wir $d_0(\zeta_1) = \triangle_0(\zeta_1) - b'(\zeta_0) = \sigma^2(\zeta_1 + \zeta_0) - \sigma^2\zeta_0 = \sigma^2\zeta_1$, so dass für $\zeta_1 \to -\infty$ auch 3) erfüllt wird.

b) Sei $\tilde{a}_0 \in \mathbb{R}$ mit $P_{\zeta_0}(S_t \leq \tilde{a}_0) > 0$, dann gilt $\tilde{a}_0 \in (-\infty, c + d_0)$:

Denn für jedes $n \leq N$ gilt $d_0 - X_n \leq d_0 \quad P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_n}$–f.s..
Da $S_n = \sum_{i=1}^n \big(T(X_i) - b'(\zeta_0)\big) = S_{n-1} + (d_0 - X_n)$, erhalten wir für $n \leq N$ auf $\{t = n\}$: $S_n < c + d_0\ P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_n}$–f.s.
Wäre $\tilde{a}_0 \geq c + d_0$, so würde aufgrund der notwendigen Gestalt (1.5.14) der Lösungen von (1.5.3) das Problem (1.5.3) durch einen Test der Güte 1 gelöst werden . Ein solcher Test kann aber wegen der Abgeschlossenheit von t unter P_{ζ_0} aufgrund der Äquivalenz der eingeschränkten Maße hier nicht auftreten (vgl. Bemerkung 1.5.3).

Zum Endzeitpunkt N unterliegt die Beobachtung X_N keiner Beschränkung, daher kommt S_N beliebig nahe von links und rechts an a heran, d.h. die Bedingung 1) wird erfüllt.
Da $c < (N-1)d_0$, gilt wegen $S_{N-1} \in \big(-\infty, (N-1)d_0\big)\ P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_{N-1}}$-f.s. und der Definition von t: $\quad P_{\zeta_0}(S_{N-1} \geq c, t = N-1) > 0$.
Demnach kann S_{N-1} auf $\{t = N-1\}$ jeden Wert aus $(c, c+d_0)$ annehmen und es folgen die Bedingungen 2).
Schließlich haben wir mit

$$\begin{aligned} d_0(\zeta_1) &= \frac{b(\zeta_1) - b(\zeta_0)}{\zeta_1 - \zeta_0} + \frac{\mu}{\zeta_0} = -\mu\big(\frac{\log(\zeta_0) - \log(\zeta_1)}{\zeta_0 - \zeta_1} + \frac{\mu}{\zeta_0} \\ &\longrightarrow -\infty \quad \text{für } \zeta_1 \downarrow 0 \end{aligned}$$

auch 3) erfüllt. □

Abschließend wollen wir Negativaussagen für unbeschränkte Ersteintrittszeiten beweisen.

Zunächst können wir die Negativaussagen, welche Korollar 1.5.12 für Normalverteilungen und Gammaverteilungen unter zweiseitigen beschränkten Ersteintrittszeiten macht, auch unter *un*beschränkten, zweiseitigen Ersteintrittszeiten beweisen. Zur Vorbereitung modifizieren wir den Satz 1.5.11 zu

1.5.15 Satz

Es seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $c_1 < c_2$ und $l, m \in \mathbb{N}$ mit $l < m$. Weiter sei $t : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ eine Stoppzeit mit $P_{\zeta_0}(t = i,\ S_t \notin (c_1, c_2)) > 0$ für $i \in \{l, m\}$, wobei wie in 1.3.2.2 $S_n := \sum_{k=1}^{n} T(X_k) - nb'(\zeta_0)$. Dabei gelte für $i \in \{l, m\}$

1) $\forall \tilde{a}_0 \notin [c_1, c_2] : \ P_{\zeta_0}(S_t \geq \tilde{a}_0) > 0$
komme S_t auf $\{t = i\}$ beliebig nahe von links und von rechts an $\tilde{a}_0$;

2) *S_t komme auf $\{t = i\}$ beliebig nahe von links an c_1 heran und von rechts an c_2.*

3) *$(m - l)d_0 > c_2 - c_1$, mit d_0 aus 1.3.2.1 e).*

Sei $\alpha \in (0, 1)$. Dann gibt es für das Problem (1.5.1) keine Lösung $\underset{\sim}{\varphi}^*$ mit $E_\zeta\, \varphi_t^* < 1\, \forall \zeta \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$. Insbesondere besitzt das Problem (1.5.1) keine Lösung, wenn t abgeschlossen unter P_{ζ_0} ist.

Beweis:

1) $\mathbb{A}$: Es gibt eine Lösung φ_t^* von (1.5.1) mit $E_\zeta\, \varphi_t^* < 1\, \forall \zeta \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$. Dann folgt aus dem Korollar 1.5.2:
$\exists \tilde{a}_0 : \quad \forall \zeta_1 > \zeta_0\ \exists \tilde{a}(\zeta_1)$, so dass für $n \in \mathbb{N}$ auf $\{t = n\}$ $P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_n}$–f.s. notwendig die Bedingungen O-1.1 und O-1.2 erfüllt sein müssen.
Da φ_t^* notwendig die 1-0-Gestalt (1.5.5) besitzt muss für $\tilde{a}_0$ gelten
$P_{\zeta_0}(S_t \geq \tilde{a}_0) > 0$, sonst hätte der Test φ_t^* die Güte 0.

<u>1.Fall</u> Ist $\tilde{a}_0 \notin [c_1, c_2]$, so folgt aus 1) zusammen mit O-1.1 und O-1.2

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\zeta_1) &= \tilde{a}_0 - md_0(\zeta_1) \\ &= \tilde{a}_0 - ld_0(\zeta_1), \end{aligned}$$

was einen Widerspruch zu $d_0(\zeta_1) > 0$ liefert.
Daher muss notwendig vorliegen:

2.Fall $\tilde{a}_0 \in [c_1, c_2]$. Dann folgt aus 2) zusammen mit O-1.1 und O-1.2

$$\tilde{a}(\zeta_1) + id_0(\zeta_1) \in [c_1, c_2] \quad \forall \zeta_1 > \zeta_0,\ i \in \{l, m\}$$
$$\Rightarrow (m-l)d_0 \leq c_2 - c_1,$$

was den gewünschten Widerspruch liefert.

2) Die Negativaussage für den Fall, dass t abgeschlossen unter P_{ζ_0} ist, folgt entsprechend zum Beweis von 1.5.11.

□

Damit erhalten wir unmittelbar:

1.5.16 Beispiele: Negativaussagen für zweiseitige unbeschränkte Ersteintrittszeiten

Es sei $t = t(c_1, c_2)$ eine zweiseitige, unbeschränkte Ersteintrittszeit mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 < c_2$. Dann gilt:

a) Es seien $\mathcal{Q} = \{\mathcal{N}(\vartheta, \sigma^2) \mid \vartheta \in \mathbb{R}\}$, $\sigma, \vartheta_0 \in \mathbb{R}$ und $\zeta_0 := \frac{\vartheta_0}{\sigma^2}$ und $\alpha \in (0,1)$. Dann gibt es keine Lösung für das Problem (1.5.1).

b) Es seien $\mathcal{Q} = \{\Gamma(\vartheta, \mu) \mid \vartheta \in (0,\infty)\}$, $\mu, \vartheta_0 \in (0,\infty)$ und $\zeta_0 := \vartheta_0$ und $\alpha \in (0,1)$.
Dann gibt es keine Lösung für das Problem (1.5.1).

Beweis:

Dazu verweisen wir auf den Beweis von Korollar 1.5.12. Anzumerken ist zum einen nur, dass die Stoppzeit $t(c_1, c_2)$ im iid-Modell abgeschlossen unter P_{ζ_0} ist:

> Dies folgt z.B. aus dem Satz von Stein (vgl. Schmitz [Sch], S.380), da gilt: $S_n = \sum_{i=1}^n D_i$ mit Zufallsgrößen $D_i = T(X_i) - b'(\zeta_0)$, die unter P_{ζ_0} stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind, wobei $E_{\zeta_0} D_1 = 0$ und $P_{\zeta_0}(D_1 > 0) > 0$.

Und zum anderen ist in b) zu bemerken, dass für den Multiplikator $\tilde{a}_0$ aus (1.5.5) gilt $\tilde{a}_0 \in (-\infty, c_2 + d_0)$, da sonst (1.5.1) durch einen Test der Güte 0 gelöst werden würde (vgl. Beweis von (1.5.12)). Wegen $S_n \in \big(-\infty, nd_0\big)$ $P_{\zeta_0|\mathcal{C}_n}$-f.s., gibt es ein hinreichend großes $l \in \mathbb{N}$ mit $P_{\zeta_0}(S_t \geq c_2, t = l-1) > 0$. Damit können wir mit S_t auf $\{t = l\}$ jeden Wert $a \in [c_2, c_2 + d_0) \cup (-\infty, c_1]$ annehmen. Es werden also die Bedingungen 1) und 2) für l und somit auch für jeden späteren Zeitpunkt

$m > l$ erfüllt. Wir wählen schließlich m so groß, dass $m - l > c_2 - c_1$, so dass der Satz 1.5.8 greifen kann. □

Für einseitige unbeschränkte Ersteintrittszeiten können wir die Negativaussage sogar auf beliebige einparametrige Exponentialfamilien $\mathcal{Q}$, ausgenommen Bernoulli-Gleichberteilungen, ausdehnen.

1.5.17 Satz: Negativaussage für einseitige unbeschränkte Ersteintrittszeiten

Es seien $\zeta_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{Z}}$ und $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Exponentialfamilie, für die $Q^T_{\zeta_0}$ keine Laplace-Verteilung über $\{-u, u\}$ für ein $u > 0$ ist.
Weiter sei $t = t(c) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \geq c\}$ eine einseitige Ersteintrittszeit mit $c \in \mathbb{R}$ derart, dass $t \not\equiv 1$, wobei wie in 1.3.2.2 $S_n = \sum_{k=1}^n T(X_k) - nb'(\zeta_0)$.
Sei $\alpha \in (0,1)$, dann gibt es für das Problem (1.5.1) keine Lösung $\underset{\sim}{\varphi}^*$.

Beweis:

$\mathbb{A}$: Es gibt eine Lösung φ^*_t von (1.5.1) mit $E_\zeta\, \varphi^*_t < 1\, \forall \zeta \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$.
Dann folgt aus dem Lemma 1.5.1: $\exists \tilde{a}_0 \in \mathbb{R}$, so dass $\varphi^*_t = \left\{ {1 \atop 0} \; S_t {> \atop <} \tilde{a}_0 \right.$ $P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_t}$-f.s. auf $\{t < \infty\}$.
Es sei $\zeta_1 \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$. Dann erhalten wir aus Korollar 1.5.2 a): es gibt ein $\tilde{a}(\zeta_1) \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ auf $\{t = n\}$ $P_{\zeta_1 | \mathcal{C}_n}$-f.s. gilt:
O-1.1 $\quad S_n > \tilde{a}_0 \Rightarrow S_n \geq \tilde{a}(\zeta_1) + nd_0(\zeta_1)$.

Beh.1: Es gibt eine Teilfolge $(n_l)_{l \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{l \to \infty} n_l = \infty$, so dass:

$$P_{\zeta_1}(S_{n_l} > \tilde{a}_0, t = n_l) > 0 \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Begr.: Da $E_{\zeta_1}\, \varphi^*_t > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$P_{\zeta_1}(S_{n_0} \geq \tilde{a}_0, t = n_0) > 0,$$

und wegen $t \not\equiv 1$ kann $n_0 > 1$ gewählt werden.
Daher gibt es $\triangle > \epsilon > 0$ derart, dass

$$(*) \quad P_{\zeta_1}(t = n_0,\ c - \triangle \leq S_{n_0 - 1} \leq c - \epsilon,\ S_{n_0} \geq \tilde{a}_0) > 0.$$

Wir zeigen, dass es unendlich viele $\triangle > \epsilon > 0$ und $l = l(\triangle, \epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$(**) \quad P_{\zeta_1}(t = n_0 + l,\ c - \triangle \leq S_{n_0 + l - 1} \leq c - \epsilon,\ S_{n_0 + l} > \tilde{a}_0) > 0.$$

Da $S_n = \sum_{i=1}^{n} D_i$ mit Zufallsgrößen $D_i = T(X_i) - b'(\zeta_0)$, die unter P_{ζ_1} stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind, können wir den Prozess $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Random-Walk auffassen. Für seine Zuwächse haben wir

$$P_{\zeta_1}(D_1 > 0) > 0 \text{ und } P_{\zeta_1}(D_1 < 0) > 0,$$

weil gemäß 1.3.2.1 gilt $E_{\zeta_0} D_1 = 0$.
Wir führen den Nachweis von $(**)$ *zunächst für den Fall aus, dass* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine einfache Irrfahrt ist mit* $P_{\zeta_1}(D_1 = u) = 1 - P_{\zeta_1}(D_1 = d)$ *mit* $u < 0 < d$.

<u>1. Fall:</u> $\tilde{a}_0 < c$

Dann gilt $\{t = n\} \subset \{S_n > \tilde{a}_0\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $(*)$ erhält die Gestalt

$$P_{\zeta_1}(t = n_0,\ c - \triangle \le S_{n_0 - 1} \le c - \epsilon,\ S_{n_0} \ge c) > 0,$$

wobei $\triangle > \epsilon$ so gewählt werden kann, dass $c - \triangle + u \ge c$.
Da $u < 0 < d$, gibt es zu $\epsilon/2$ natürliche Zahlen m, n mit

$$(***) \quad 0 \le md + nu \le \epsilon/2.$$

Somit können wir den Pfad bis $n_0 - 1$ mit $c - \triangle \le S_{n_0 - 1} \le c - \epsilon$ derart verlängern, dass zunächst m-mal hintereinander der Random-Walk um jeweils d absteigt und danach n-mal in Folge um jeweils u aufsteigt, so dass wir erhalten:

$$\begin{aligned} P_{\zeta_1}(&S_1 < c, \ldots, S_{n_0-2} < c,\ c - \triangle \le S_{n_0-1} \le c - \epsilon,\ S_{n_0} < c, \ldots, \\ &S_{n_0+m+n-2} < c,\ c - \triangle \le S_{n_0+m+n-1} \le c - \epsilon/2, S_{n_0+m+n} \ge c) > 0. \end{aligned}$$

Auf diese Weise können wir bei gegeigneter Wahl von $\triangle > \epsilon > 0$ beliebig lange Endstücke nach n_0 anhängen, so dass wir $(**)$ für unendlich viele $l \in \mathbb{N}$ erfüllt haben.

<u>2. Fall:</u> $\tilde{a}_0 \ge c$.

Dann bekommen wir analog zum 1. Fall , dass für unendlich viele $l \in \mathbb{N}$ gilt

$$P_{\zeta_1}(t = n_0 + l,\ S_{n_0+l} \ge \tilde{a}_0) > 0.$$

Es bleibt zu zeigen, dass sogar $P_{\zeta_1}(t = n_0 + l,\ S_{n_0+l} > \tilde{a}_0) > 0$ gilt. Hierfür brauchen wir zusätzlich die Voraussetzung, dass $Q^T_{\zeta_0}$ keine Laplace-Verteilung über $\{u, -u\}$ mit $u > 0$ liefert. Für die einfache Irrfahrt bedeutet dies, dass $u \neq |d|$. Damit können wir $(***)$ noch etwas verschärfen zu:

$$\forall 0 < \triangle < \epsilon \ \exists m, n \in \mathbb{N}: \quad \triangle/2 \leq md + nu \leq \epsilon/2.$$

Daraus erhalten wir mit der Konstruktion aus dem ersten Fall

$$P_{\zeta_1}(S_1 < c, \ldots, S_{n_0-2} < c, \ c - \triangle \leq S_{n_0-1} \leq c - \epsilon, \ S_{n_0} < c, \ldots, \\ S_{n_0+m+n-2} < c, \ c - \triangle/2 \leq S_{n_0+m+n-1} \leq c - \epsilon/2, S_{n_0+m+n} > \tilde{a}_0) > 0,$$

wobei $\triangle > 0$ derart, dass $c - \triangle + u \geq \tilde{a}_0$, woraus wir schließlich Beh.1 für den Fall der einfachen Irrfahrt bekommen.
Da für die vorherigen Überlegungen von der Struktur der einfachen Irrfahrt nur benötigt wurde, dass $P_{\zeta_1}(D_1 > 0) > 0$ und $P_{\zeta_1}(D_1 < 0) > 0$ gilt, ist $(**)$ und die Beh.1 auch für den allgemeinen Fall bewiesen.

<u>*Beh.2:*</u> *Es gibt ein $E > 0$, so dass für die Teilfolge $(n_l)_{l \in \mathbb{N}}$ aus Beh.1 gilt*

$$P_{\zeta_1}(S_{n_l} > \tilde{a}_0 + E, \ t = n_l) < P_{\zeta_1}(S_{n_l} > \tilde{a}_0, \ t = n_l) \quad \forall l \in \mathbb{N}$$

Begr.: *Da aufgrund von Beh.1 für jedes $l \in \mathbb{N}$ ein $\triangle > 0$ gibt, so dass*

$$P_{\zeta_1}(S_1 < c, \ldots, c - \triangle < S_{n_l-1} < c, \ S_{n_l-1} + D_{n_l} > \tilde{a}_0) > 0,$$

bekommen wir wegen der Unabhängigkeit und wegen der identischen Verteilung der D_k zunächst: $P_{\zeta_1}(D_1 > \max(\triangle, \tilde{a}_0 - \triangle)) > 0$.
Aufgrund $P_{\zeta_1}(D_1 < \infty)$ gibt es dann ein $E > 0$, so dass

$$P_{\zeta_1}(D_1 > \max(\triangle, \tilde{a}_0 - \triangle) + E) < P_{\zeta_1}(D_1 > \max(\triangle, \tilde{a}_0 - \triangle)),$$

woraus wir zusammen mit der Unabhängigkeit und identischen Verteilung der D_k die Beh. 2 erhalten.

Da $d_0(\zeta_1) > 0$, können wir ein hinreichend großes $l \in \mathbb{N}$ finden mit

$$\tilde{a}(\zeta_1) + n_l d_0(\zeta_1) > \tilde{a}_0 + E.$$

Doch hiermit bekommen wir auf $\{t = n_l\}$ gemäß O-1.1, dass $P_{\zeta_1|\mathcal{C}_{n_l}}$-f.s. gilt $\{S_{n_l} > \tilde{a}_0\} \subset \{S_{n_l} > \tilde{a}_0 + E\}$, was einen Widerspruch zu Beh.2 liefert.
Folglich gibt es keine Lösung $\underset{\sim}{\varphi}^*$ von (1.5.1) mit $E_\zeta \varphi_t^* < 1 \ \ \forall \zeta \in (\zeta_1, \hat{\zeta})$.

Schließlich bleibt noch zu erwähnen, dass t unter P_{ζ_0} abgeschlossen ist, so dass wir für (1.5.1) auch keine Lösungen von Güte 1 erhalten können:
Da wir $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Random-Walk auffassen können mit Zuwächsen
$D_i = T(X_i) - b'(\zeta_0) \neq 0 \ P_{\zeta|\mathcal{C}_1}$–f.s., für die nach 1.3.2 gilt $E_{\zeta_0} D_i = 0$, folgt aus dem Satz von Chung-Fuchs: $P_{\zeta_0}(t(c) < \infty) = 1$. □

1.5.18 Bemerkung

a) In Satz 1.5.17 haben wir den Fall herausgenommen, dass $Q^T_{\zeta_0}$ eine Laplace-Verteilung über $\{u, -u\}$ für ein $u > 0$ definiere. Es fragt sich, ob es für diesen Spezialfall Beispiele gibt, so dass wir unter $t(c)$ eine Lösung von (1.5.1) erhalten. Wir können für den Fall $\mathcal{Q} = \{\mathcal{B}(1, \vartheta) \mid \vartheta \in (0,1)\}$ und $\vartheta_0 = 1/2$ ein Beispiel angeben :

Für die Zuwächse D_i der einfachen Irrfahrt $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haben wir
$D_i = X_i - 1/2 \in \{1/2, -1/2\}$. Es sei $c = 1 - \vartheta_0 = 1/2$ und $t = t(c)$, dann gilt für $n \in \mathbb{N},\ n > 1$

$$\{t = n\} = \{S_1 < 1/2, \ldots, S_{n-1} < 1/2, D_n = 1/2\}.$$

Der sequentielle Test φ^*_t mit $\varphi^*_t = 1$ auf $\{t = 1\}$ und $\varphi^*_t = 0$ auf $\{t > 1\}$ liefert einen gleichmäßig besten sequentiellen Test für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ zum eigenen Niveau $\alpha = 1/2$.

Begr.: Für $\vartheta_1 > \vartheta_0 = 1/2$ werden durch $a(\vartheta_1) = 1/2 - d_0(\vartheta_1)$ die Bedingungen O-2.1 und O-2.2 aus Korollar 1.5.2 erfüllt, denn für $n \geq 2$ gilt auf $\{t = n\}$ $S_n \leq 1/2 < 1/2 + (n-1)d_0(\vartheta_1)$, was mit $\varphi^*_n = 0$ zusammenpasst. Die Behauptung folgt damit aus Korollar 1.5.2.

Da jede Laplace-Verteilung über $\{u, -u\}$, $u > 0$ durch Skalentransformation aus einer Bernoulli-Gleichverteilung hervorgeht, liefert das obige Beispiel die einzige Situation, in der unter einer einseitigen unbeschränkten Stoppzeit ein lokal gleichmäßig bester Test existiert. □

Hiermit schließen wir die Negativaussagen.

Das Beispiel 1.5.9 und der Satz 1.5.11 liefern neben den Negativaussagen, die sie machen, auch Hinweise darüber, was für eine Struktur feste beschränkte Ersteintrittszeiten $t^N(c_1, c_2)$ besitzen müssen, damit gleichmäßig beste Tests bei einparametrigen Exponentialfamlien auftreten können. Die Struktur der Stoppzeit muss natürlich die der TV's aus 1.5.1 respektieren. Weiter muss für stetige Verteilungsklassen gelten:

$$\tilde{a}_0 \in [c_1, c_2], \quad c_2 - c_1 \geq d_0.$$

Die ersten Beispiele für gleichmäßig beste Tests, die einseitigen und zweiseitigen CIP's, genügen dieser Strukturforderung. Daher liegt es nahe, allgemeinere Aussagen über gleichmäßige Optimalität für einseitige und zweiseitige beschränkte

Ersteintrittszeiten zu formulieren.
Im folgenden Abschnitt untersuchen wir zunächst, welche hinreichenden Bedingungen an die Verteilungsklassen gefordert werden müssen, damit unter einseitigen, beschränkten Ersteintrittszeiten gleichmäßig beste Tests existieren können.

1.6 Gleichmäßig beste Tests bei fester beschränkter einseitiger Stoppzeit

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{Q} = \{Q_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ eine einparametrige Verteilungsklasse, derart, dass $\{P_{\vartheta|\mathcal{C}_n} \mid \vartheta \in \Theta\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen isotonen Dichtequotienten in einer Statistik S_n besitzt.
Weiter seien $\vartheta_0 \in \mathring{\Theta}$ sowie $\alpha \in (0,1)$. Zum Horizont $N \in \mathbb{N}$ betrachten wir eine beschränkte Stoppzeit $t : \Omega \to \{1, \ldots, N\}$ (bzgl. $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$). Dabei fordern wir, dass für die Stoppzeit t zusätzlich gelte: es gibt Schwellen $\tilde{a}_n$ mit

$$\forall n < N : \ \{t = n\} \subset \{S_n \geq \tilde{a}_n\} \quad P_{\vartheta|\mathcal{C}_n}\text{-f.s. } \forall \vartheta \in \Theta. \tag{1.6.1}$$

Eine Stoppzeit t, welche der Bedingung (1.6.1) genügt, bezeichnen wir im folgenden als *rechtsseitige Stoppzeit.* Für unsere Untersuchungen ist nach geeigneter Skalierung der Prüfgrößen der Fall $\tilde{a}_n = \tilde{a}_0 \, \forall n \in \mathbb{N}$ von besonderer Bedeutung.
Es sollen im folgenden hinreichende Bedingungen dafür hergeleitet werden, wann unter t gleichmäßig beste Tests z.N. α für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ (d.h. Lösungen von (1.2.2) mit $\vartheta_2 = \vartheta_0$) existieren bzw. wann es gleichmäßig beste Tests z.N. α gibt für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $\underline{H}_1 : \vartheta < \vartheta_0$, (d.h. Lösungen für das Problem (1.5.3)).
Wir werden im weiteren bei der Benennung der Testprobleme diese suggestive Sprechweise beibehalten: allgemeiner verstehen wir unter gleichmäßig optimalen Lösungen für H_0 gegen H_1 z.N. α unter t, Lösungen des Problems

$$\begin{cases} E_\vartheta \varphi_t \overset{!}{=} \sup & \forall \vartheta \in H_1 \\ E_\vartheta \varphi_t \leq \alpha & \forall \vartheta \in H_0 \end{cases} . \tag{1.6.2}$$

Wird aus dem Zusammenhang ersichtlich, unter welcher Stoppzeit t das obige Problem betrachtet werden soll, so lassen wir den Zusatz *unter* t einfach fort.

In Beispiel 1.5.9 sahen wir, dass für die Klasse der Normalverteilungen unter Ersteintrittszeiten mit 2-seitigem Stoppgebiet aufgrund der Unbeschränktheit von $d_0(\zeta_1)$ für $\zeta_1 > \zeta_0$ keine (lokal) gleichmäßig besten Tests existieren können. Diese Schwierigkeiten entstanden aus der Bedingung (1.5.12) durch die untere Stoppgrenze c_1. Lassen wir die untere Stoppgrenze fort, betrachten also einseitige, beschränkte Ersteintrittszeiten $t = t^N(c_2)$, so liefert der Beweis von 1.5.9, dass

$$\varphi_t^* = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad S_t \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \tilde{a}_0$$

eine gleichmäßig beste Lösung von (1.5.1) zum Niveau $\alpha := E_{\zeta_0} \varphi_t^*$ ergibt mit $\zeta_0 = \frac{\vartheta_0}{\sigma^2}$. Aus diesen Vorüberlegungen bekommen wir ein erstes Beispiel für gleichmäßige Optimalität, was vom Curtailing Inspection wegrückt.

1.6.1 Beispiel

Es seien $Q_\vartheta = \mathcal{N}(\vartheta, \sigma^2)$, $\alpha \in (0,1)$, $N \in \mathbb{N}$ und $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ fest. Ferner sei

$$\tilde{a}_0 = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{N} P_{\vartheta_0}(S_k < a \; \forall k < n, \, S_n > a) \leq \alpha\}$$

Hierzu betrachten wir die einseitige Ersteintrittszeit $t = t^N(\tilde{a}_0)$, dann liefert der sequentielle Test

$$\varphi_t^* = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad S_t \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \tilde{a}_0$$

eine gleichmäßig optimale Lösung für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

Beweis:

Für den Beweis betrachten wir das Problem in natürlicher Parametrisierung $\zeta(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\sigma^2}$, wobei $\zeta_0 := \zeta(\vartheta_0)$. Hinreichend für die gleichmäßige Optimalität von φ_t^* für $\overline{H}_0 : \zeta = \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$ ist gemäß Korollar 1.5.2 b)

i) $E_{\zeta_0} \varphi_t^* = \alpha$ und

ii) $\forall \zeta_1 > \zeta_0 \; \exists \tilde{a}(\zeta_1)$, so dass für alle $n \in \{1, \ldots, N\}$ auf $\{t = n\}$ $P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_n}$-f.s. die Bedingungen O-2.1 und O-2.2 erfüllt sind.

Zu ii) Es sei $\zeta_1 > \zeta_0$. Dann gilt:

1) Auf $\{t = N\}$ müssen wir $\tilde{a}_0$ wegen der Bedingungen O-1.1 und O-1.2 folgendermaßen festlegen (vgl. Satz 1.5.11)

$$\tilde{a}(\zeta_1) = \tilde{a}_0 - N d_0(\zeta_1). \tag{1.6.3}$$

2) Diese Festlegung verträgt sich auch mit den hinreichenden Bedingungen O-2.1 und O-2.2 für $n < N$ auf $\{t = n\} = \{S_1, \dots, S_{n-1} < \tilde{a}_0,\ S_n \geq \tilde{a}_0\}$, denn

   - da Q_{ζ_0} eine stetige Verteilungsfunktion besitzt, gilt $P_{\zeta_0}(S_n = \tilde{a}_0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ und somit ist O-2.1 trivialerweise erfüllt,
   - aus $S_n < \tilde{a}_0 - (N-n)d_0(\zeta_1)$, folgt $S_n < \tilde{a}_0$.

Zu i) Da $P_{\zeta_0}(S_n = \tilde{a}_0) = 0\ \forall n \leq N$, gilt $P_{\zeta_0}(S_t = \tilde{a}_0) = 0$. Aus dem nachfolgenden Lemma erhalten wir daraus zusammen mit der Definition von $\tilde{a}_0$, dass der Test φ_t^* unter P_{ζ_0} das Niveau α voll ausschöpft, d.h. es gilt $E_{\zeta_0}\varphi_t^* = \alpha$. □

1.6.2 Lemma: Ausschöpfen von α

Es sei $\mathcal{Q}$ eine beliebige einparametrige Verteilungsklasse. Weiter seien $N \in \mathbb{N}$ und $S_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ beliebige messbare Abbildungen ($n \leq N$).
Weiter betrachten wir zu $a \in \mathbb{R}$ die rechtsseitigen, beschränkten Ersteintrittszeiten

$$t^N(a) := \inf\{n \leq N \mid S_n \geq a\}.$$

Zu $\alpha \in (0,1)$ sei $\tilde{a}_0 = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid P_{\vartheta_0}(S_{t^N(a)} > a) \leq \alpha\}$. Dann gilt:

$$P_{\vartheta_0}(S_{t^N(\tilde{a}_0)} > \tilde{a}_0) \leq \alpha \text{ und } P_{\vartheta_0}(S_{t^N(\tilde{a}_0)} \geq \tilde{a}_0) \geq \alpha.$$

Beweis:

Die Aussagen folgen aus der Defintion von $\tilde{a}_0$ unter Benutzung der Stetigkeit des W-Maßes P_{ϑ_0}. □

Der Beweis von Beispiel 1.6.1 weist darauf hin, dass die Optimalitätsaussage sich für diejenigen einparametrigen Exponentialfamilien verallgemeinern lassen wird, für die Q_ζ^T eine stetige Verteilungsfunktion besitzt. Für solche Verteilungsklassen hat nämlich aufgrund des iid-Modells auch $P_\zeta^{S_n}$ eine stetige Verteilungsfunktion. Daher ist die Frage naheliegend, ob sich die Aussage auf weitere Verteilungsklassen ausdehnen lässt.
In der *klassischen* Testtheorie (d.h. bei festen Stichprobenumfang) genügt es bekanntermaßen, dass $\mathcal{Q}^n$ einen isotonen Dichtequotienten in einer Statistik $\hat{S}_n$ besitzt. In dieser Situation minimiert ein gleichmäßig bester Test φ_n^* für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ auch die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art unter allen α-ähnlichen Tests. Dagegen zeigt das Korollar 1.5.14, dass sich unter rechtsseitigen

beschränkten Ersteintrittszeiten $t^N(c)$ selbst für Normalverteilungen oder für Gammaverteilungen die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art sich nicht durch einen sequentiellen Test minimieren lässt. Außerdem zeigt folgendes Beispiel, dass die Isotonieforderung an den Dichtequotienten aus der klassischen Statistik i.a. nicht ausreichen wird, um gleichmäßig beste sequentielle Tests für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ unter einseitigen, beschränkten Stoppzeiten zu erhalten.

1.6.3 Beispiel

Es seien $\mathcal{Q} = \{\mathcal{R}(\vartheta, 1) \mid \vartheta < 1\}$, $N = 2$, $\vartheta_0 = 0$ und $\alpha = \frac{3}{16}$.
Gemäß 1.3.3 hat $\mathcal{Q}^n$ einen isotonen Dichtequotienten in $S_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ auf ganz $\theta = (-\infty, 1)$. Aber unter $t = t^2(a) = \inf\{n \leq 2 \mid \min(X_1, \ldots, X_n) \geq a\}$ mit $a = \frac{1}{2}$ gibt es keinen gleichmäßig besten sequentiellen Test für $\overline{H}_0 : \vartheta = 0$ gegen $H_1 : \vartheta \in (0, 1)$ zum Niveau α.

Beweis:

$\underline{\mathbb{A}}$: Es gibt einen gleichmäßig besten Test φ_t^* für $\overline{H}_0$ gegen H_1 z.N. $\alpha = \frac{3}{16}$. Dann liefert φ_t^* auch Lösungen von (P_α^t) für $\overline{H}_0 : \vartheta = 0$ gegen $\overline{H}_1 : \vartheta_1 = \frac{1}{4}$ und für $\overline{H}_0$ gegen $\overline{H}_2 : \vartheta_2 = \frac{3}{4}$.
Da $\vartheta_1 < a$, gilt für die Dichtequotienten (vgl. 1.3.3):

$$\begin{aligned}
\frac{M_1^{\vartheta_1}}{M_1^{\vartheta_0}} &= \frac{1}{1-\vartheta_1} = \frac{4}{3} \text{ auf } \{t = 1\} = \{X_1 \geq 1/2\}, \\
\frac{M_2^{\vartheta_1}}{M_2^{\vartheta_0}} &= \begin{cases} 0 \\ (\frac{1}{1-\vartheta_1})^2 \end{cases} \text{für} \quad \min(X_1, X_2) \begin{matrix} < \\ \geq \end{matrix} \vartheta_1 \\
&= \begin{cases} 0 \\ \frac{16}{9} \end{cases} \text{für} \quad \begin{matrix} \min(X_1, X_2) < 1/4 \\ X_1, X_2 \geq 1/4 \end{matrix} \quad \text{auf } \{t = 2\} = \{X_1 < 1/2\}.
\end{aligned}$$

Wegen $\vartheta_2 > a$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{M_1^{\vartheta_2}}{M_1^{\vartheta_0}} &= \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{1-\vartheta_2} \end{cases} \text{für} \quad X_1 \begin{matrix} < \\ \geq \end{matrix} \vartheta_2 \\
&= \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases} \text{für} \quad X_1 \begin{matrix} < \\ \geq \end{matrix} 3/4 \text{ auf } \{X_1 \geq 1/2\}, \\
\frac{M_2^{\vartheta_2}}{M_2^{\vartheta_0}} &= \begin{cases} 0 \\ (\frac{1}{1-\vartheta_2})^2 \end{cases} \text{für} \quad \min(X_1, X_2) \begin{matrix} < \\ \geq \end{matrix} \vartheta_2 \\
&= \quad 0 \quad \text{auf } \{X_1 < 1/2\}.
\end{aligned}$$

Eine Lösung von (P_α^t) für $\overline{H}_0$ gegen $\overline{H}_1 : \vartheta_1 = 1/4$ ist gegeben durch den sequentiellen Test

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_1 =& 0 \quad \text{auf } \{X_1 \geq 1/2\}\\ \bar{\varphi}_2 =& \begin{cases}1\\0\end{cases} \text{falls } \min(X_1, X_2) \begin{matrix}\geq\\<\end{matrix} 1/4 \qquad \text{auf } \{X_1 < 1/2\}.\end{aligned}$$

Zum einen haben wir nämlich

$$\begin{aligned}E_{\vartheta_0}\bar{\varphi}_t =& P_{\vartheta_0}(X_1, X_2 \geq 1/4,\ X_1 < 1/4)\\ =& P_{\vartheta_0}(1/4 \leq X_1 < 1/2) \cdot P_{\vartheta_0}(X_2 \geq 1/4) = (1/2 - 1/4)(1 - 1/4) = \alpha\end{aligned}$$

und zum anderen erhalten wir mit $a(\vartheta_1) = \frac{15}{9}$

$$\bar{\varphi}_t = \begin{cases}1\\0\end{cases} \text{für } \frac{M_t^{\vartheta_1}}{M_t^{\vartheta_0}} \begin{matrix}>\\<\end{matrix} a(\vartheta_1)\ ,$$

so dass $\bar{\varphi}_t$ die in 1.4.1 geforderte 1-0-Gestalt besitzt.
Dadurch bekommen wir $E_{\vartheta_1}\varphi_t^* = E_{\vartheta_1}\bar{\varphi}_t = \frac{1}{1-1/4}(1/2 - 1/4) = \frac{1}{3} < 1$, so dass gemäß der Teilaussage d) des N-P-Lemmas 1.4.1 φ_t^* auf $\{M_t^{\vartheta_1} \neq a(\vartheta_1)M_t^{\vartheta_0}\} = \Omega$ $P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_t} + P_{\vartheta_1|\mathcal{C}_t}$-f.s. mit $\bar{\varphi}_t$ übereinstimmen muss.
Da $P_{\vartheta_0} = \mathcal{R}(0,1)$ und $P_{\vartheta_1} = \mathcal{R}(\frac{1}{4}, 1)$, muss notwendig gelten $\varphi_t^* = \bar{\varphi}_t$ $P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_t}$-f.s.
Es ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}\varphi_1^* =& 0 \quad \text{auf } \{X_1 \geq 1/2\}\ P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_1} - \text{f.s.}\\ \varphi_2^* =& 1 \quad \text{auf } \{1/4 \leq X_1 < 1/2, X_2 \geq 1/4\}\ P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_2} - \text{f.s.}\end{aligned} \tag{1.6.4}$$

Dies steht aber im Widerspruch zur notwendigen 1-0-Gestalt einer Lösung von (P_α^t) für $\overline{H}_0$ gegen $\overline{H}_2 : \vartheta_2 = 3/4$:
Für dieses Problem haben wir nämlich eine Lösung gegeben durch

$$\hat{\varphi}_1 = 3/4 \ \text{ auf } \{X_1 \geq 3/4\}, \quad \hat{\varphi}_2 = 0.$$

Einerseits gilt nämlich $E_{\vartheta_0}\hat{\varphi}_t = \frac{3}{4}P_{\vartheta_0}(X_1 \geq 3/4) = \alpha$, andererseits erhalten wir mit $a(\vartheta_2) = \frac{1}{1-\vartheta_2} = 4$

$$\hat{\varphi}_t = \begin{cases}1\\0\end{cases} \text{für } \frac{M_t^{\vartheta_2}}{M_t^{\vartheta_0}} \begin{matrix}>\\<\end{matrix} a(\vartheta_2)\ ,$$

so dass $\hat{\varphi}_t$ die in 1.4.1 geforderte 1-0-Gestalt besitzt.
Da $E_{\vartheta_1}\hat{\varphi}_t = 3/4P_{\vartheta_1}(X_1 \geq 3/4) < 1$, folgt wieder aus der Teilaussage d) des N-P-Lemmas 1.4.1:

$$\varphi_t^* = \hat{\varphi}_t \quad \text{auf } \{M_t^{\vartheta_2} \neq a(\vartheta_2)M_t^{\vartheta_0}\} = \{1/2 \leq X_1 < 3/4\} + \{X_1 < 1/2\} \quad P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_t} - \text{f.s.},$$

also insbesondere $\varphi_2^* = 0$ auf $\{X_1 < 1/2\}$ $P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_2}$-f.s. Dies liefert jedoch wegen $P_{\vartheta_0}^{X_1} = \mathcal{R}(0,1)$ einen Widerspruch zu (1.6.4). □

Damit drängt sich die Frage auf, welche zusätzlichen Strukturaussagen wir für die einparametrigen Exponentialfamilien benötigen, um Optimalitätsausagen unter einseitigen, beschränkten Ersteintrittszeiten zu erhalten. Bei einparametrigen Exponentialfamilien, für die Q_ζ^T eine stetige Verteilungsfunktion besitzt, haben wir im Beweis der Negativaussgen 1.5.11 und 1.5.15 gesehen, dass der Multiplikator $\tilde{a}(\zeta_1)$ (für $\zeta_1 > \zeta_0$) im letzten Stoppzeitpunkt durch (1.6.3) festgelegt werden muss. Damit die Bedingungen O-2.1 und O-2.2 (vgl. S.30) auch für die früheren Stoppzeitpunkte erfüllt werden, benötigen wir $d_0(\zeta_1) > 0$.
Dies bedeutet für den Dichtequotienten
$\frac{M_n^1}{M_n^0} = e^{(\zeta_1-\zeta_0)S_n} \cdot e^{-n(\zeta_1-\zeta_0)d_0(\zeta_1)}$, dass $n \mapsto \frac{M_n^1}{M_n^0}(\omega)$ eine antitone Abbildung liefert.
Wir benötigen demnach für die Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ zwei Monotonieeigenschaften

- eine bei fester Stufe n in den Werten der suffizienten Statistik S_n,
- eine bei festem Wert der suffizienten Statistik für variierendes n, um Verträglichkeit der einzelnen Stufen zu erreichen.

Dies führt zu folgender

1.6.4 Definition

a) Eine einparametrige Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ hat *sequentiell-antitonen isotonen Dichtequotienten* in $\underset{\sim}{S} = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit messbaren Abbildungen $S_n : (\Omega, \mathcal{C}_n) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ $(n \in \mathbb{N})$ auf $\Theta_0 \subset \Theta$, falls gilt:
$\forall \vartheta_0, \vartheta_1 \in \Theta_0,\ \vartheta_0 < \vartheta_1\ \exists \underset{\sim}{H}_{\vartheta_0,\vartheta_1} = \left(H_{\vartheta_0,\vartheta_1}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften

(1) $\frac{M_n^1}{M_n^0} = H_{\vartheta_0,\vartheta_1}^n(S_n) \quad (P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_n} + P_{\vartheta_1|\mathcal{C}_n}) - f.s.\ \forall n \in \mathbb{N}$,

(2) $H_{\vartheta_0,\vartheta_1}^n : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ ist isoton,

(3) $n \mapsto H_{\vartheta_0,\vartheta_1}^n(s)$ ist antiton $\forall s \in \mathbb{R}$.

Sind die Abbildungen $H_{\vartheta_0,\vartheta_1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, zudem sämtlich streng isoton, so sprechen wir von einer Verteilungsklasse mit sequentiell-antitonen *streng isotonen* Dichtequotienten in $\underset{\sim}{S}$.

b) Sind in (3) für jedes $s \in \mathbb{R}$ die Abbildungen $n \mapsto H^n_{\vartheta_0,\vartheta_1}(s)$ *isoton*, so sprechen wir von einer Verteilungsklasse mit *sequentiell-isotonen* isotonen Dichtequotienten in $\underset{\sim}{S}$.

Die einparametrigen Exponentialfamilien liefern erste Beispiele für Verteilungsklassen mit sequentiell-*antitonen* isotonen Dichtequotienten bzw. mit sequentiell-*isotonen* isotonen Dichtequotienten, weitere haben wir in 1.3 bereits kennengelernt: die Rechteckverteilungen. Daher notieren wir:

1.6.5 Beispiele

a) Es seien $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Exponentialfamilie und $\zeta_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{Z}}$.

i) Dann folgt aus der strikten Konvexität von $\zeta \mapsto b(\zeta)$ und aus 1.3.2.2, dass $\mathcal{Q}$ einen sequentiell-antitonen streng isotonen Dichtequotienten auf $\overset{\circ}{\mathcal{Z}} \cap [\zeta_0, \infty)$ besitzt in

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T(X_i) - nb'(\zeta_0) \text{ mit}$$

$$H^n_{\zeta_1,\zeta_2}(s) = e^{(\zeta_2-\zeta_1)s} \cdot e^{-n(\zeta_2-\zeta_1)\left(\frac{b(\zeta_2)-b(\zeta_1)}{\zeta_2-\zeta_1} - b'(\zeta_0)\right)} \text{ für } \zeta_1 < \zeta_2.$$

ii) Man beachte, dass aber für $\zeta_1 < \zeta_2 \leq \zeta_0$ wegen $\left(\frac{b(\zeta_2)-b(\zeta_1)}{\zeta_2-\zeta_1} - b'(\zeta_0)\right) < 0$ die Abbildung $n \mapsto H^n_{\zeta_1,\zeta_2}(s)$ *streng isoton* ist für jedes $s \in \mathbb{R}$.
Somit besitzt $\mathcal{Q}$ auf $\overset{\circ}{\mathcal{Z}} \cap (-\infty, \zeta_0]$ sequentiell-*isotonen* streng isotonen Dichtequotienten in S_n $(n \in \mathbb{N})$.
Dieser Tatbestand passt auch zusammen mit der Negativaussage aus Korollar 1.5.14, dass bei einparametrigen Exponentialfamilien keine gleichmäßig besten sequentiellen Tests für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $\underline{H}_1 : \vartheta < \vartheta_0$ existieren.

b) Für Rechteckverteilungen liefert 1.3.3:

i) $\mathcal{Q}_a = \{\mathcal{R}(a, \vartheta) \mid \vartheta > a\}$ $(a \in \mathbb{R})$ besitzt sequentiell-antitonen isotonen Dichtequotienten in

$$S_n = \max(X_1, \ldots, X_n) \text{ auf } \Theta = (a, \infty) \text{ mit } H^n_{\vartheta_0,\vartheta_1}(s) = \begin{cases} \infty \\ (\frac{\vartheta_0-a}{\vartheta_1-a})^n, \end{cases} \quad s \overset{>}{\underset{\leq}{}} \vartheta_0.$$

ii) Dagegen hat die Verteilungsklasse $\mathcal{Q}^b = \{\mathcal{R}(\vartheta, b) \mid \vartheta < b\}$ $(b \in \mathbb{R})$ sequentiell-*isotonen* isotonen Dichtequotienten in

$$S_n = \min(X_1, \ldots, X_n) \text{ auf } \Theta = (-\infty, b) \text{ mit } H^n_{\vartheta_0,\vartheta_1}(s) = \begin{cases} 0 \\ (\frac{b-\vartheta_0}{b-\vartheta_1})^n, \end{cases} \quad s \overset{<}{\underset{\geq}{}} \vartheta_1 .$$

Denn wegen $\frac{b-\vartheta_0}{b-\vartheta_1} > 1$ für $\vartheta_0 < \vartheta_1 < b$, ist die Abbildung $n \mapsto H^n_{\vartheta_0,\vartheta_1}(s)$ streng isoton für jedes $s \geq \vartheta_1$.
Wir erinnern uns, $\mathcal{Q}^b$ lieferte ein Beispiel dafür, dass die Isotonieforderung an den Dichtequotienten aus der klassischen Statistik i.a. nicht ausreicht, um für das Problem (1.2.2) Lösungen zu erhalten; jetzt können wir den tieferen Grund in der gegenläufigen Isotonie-Bedingung finden.

Unter der Bedingung, dass die Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ einen sequentiell-antitonen isotonen Dichtequotienten hat, erhalten wir für die rechtsseitigen, beschränkten Stoppzeiten $t^N(c)$ eine zur klassischen Testtheorie analoge Aussage über gleichmäßig beste Tests für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ bzw. für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

1.6.6 Satz: Hinreichende Bedingung für gleichmäßige Optimalität bei einseitigen beschränkten Stoppzeiten

Es seien $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Verteilungsklasse, die einen sequentiell-antitonen isotonen Dichtequotienten in $\underset{\sim}{S} = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\Theta \cap [\vartheta_0, \infty)$ hat und $\alpha \in (0,1)$.
Zu $N \in \mathbb{N}$ und $\tilde{a}_0 \in \mathbb{R}$ seien $t : \Omega \to \{1, \dots, N\}$ eine beschränkte, rechtsseitige Stoppzeit (d.h. sie genügt der Bedingung (1.6.1) mit $\tilde{a}_n = \tilde{a}_0 \; \forall n \in \mathbb{N}$) und $\underset{\sim}{\varphi}^*$ ein TV mit

1) $E_{\vartheta_0} \varphi_t^* = \alpha$,

2) $\varphi_t^* = \left\{ {1 \atop 0} \right.$ für $S_t \gtreqless \tilde{a}_0$ auf $\{t < N\}$ $P_{\vartheta|\mathcal{C}_t} -$ f.s. $\forall \vartheta \in \Theta$,
   $\varphi_t^* = \left\{ {1 \atop 0} \right.$ für $S_t \gtrless \tilde{a}_0$ auf $\{t = N\}$ $P_{\vartheta|\mathcal{C}_t} -$ f.s. $\forall \vartheta \in \Theta$.

Dann gilt:

a) φ_t^* ist gleichmäßig optimal für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ (insb. wegen 1) ein gleichmäßig bester α-ähnlicher Test).

b) φ_t^* besitzt streng isotone Gütefunktion auf $\{\vartheta \in \Theta \mid \vartheta_0 \leq \vartheta \;\wedge\; E_\vartheta \varphi_t^* < 1\}$

c) Hat $\mathcal{Q}$ sequentiell-antitonen isotonen Dichtequotienten in $\underset{\sim}{S}$ auf *ganz* Θ, so gilt zusätzlich

   i) φ_t^* löst das Problem (1.5.2), d.h. minimiert die Fehlerwahrscheinlichkeit 1.Art unter allen α-ähnlichen Tests.

   ii) φ_t^* ist gleichmäßig optimal für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

iii) φ_t^* besitzt streng isotone Gütefunktion auf $\{\vartheta \in \Theta \mid 0 < E_\vartheta\, \varphi_t^* < 1\}$.

Beweis:

a) Es sei $\vartheta_1 > \vartheta_0$.
Da $E_{\vartheta_0}\varphi_t^* = \alpha$, müssen wir gemäß Satz 1.4.1 ein $a(\vartheta_1) \geq 0$ finden, so dass $\forall n \leq N$ auf $\{t = n\}$ $(P_{\vartheta_0 \mid \mathcal{C}_n} + P_{\vartheta_1 \mid \mathcal{C}_n})$-f.s. gilt

$$\varphi_n^* = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad \frac{M_n^1}{M_n^0} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} a(\vartheta_1).$$

Wir wählen $a(\vartheta_1) := H^N_{\vartheta_0,\vartheta_1}(\tilde{a}_0)$. Hiermit bekommen wir

1) Auf $\{t = N\}$ $(P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_N} + P_{\vartheta_1|\mathcal{C}_N})$-f.s aufgrund der Isotonie von $H^N_{\vartheta_0,\vartheta_1}$

$$\frac{M_N^1}{M_N^0} = H^N_{\vartheta_0,\vartheta_1}(S_N) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} a(\vartheta_1) \Rightarrow S_N \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \tilde{a}_0 \Rightarrow \varphi_N^* = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}.$$

2) Sei $n < N$. Dann gilt $(P_{\vartheta_0 \mid \mathcal{C}_n} + P_{\vartheta_1 \mid \mathcal{C}_n})$-f.s auf $\{S_n \geq \tilde{a}_0\}$: $\varphi_n^* = 1$ und aufgrund der Monotoniebedingungen an $(n, s) \mapsto H^n_{\vartheta_0,\vartheta_1}(s)$

$$\frac{M_n^1}{M_n^0} = H^n_{\vartheta_0,\vartheta_1}(S_n) \geq H^n_{\vartheta_0,\vartheta_1}(\tilde{a}_0) \geq H^N_{\vartheta_0,\vartheta_1}(\tilde{a}_0) = a(\vartheta_1).$$

Folglich kann $\frac{M_n^1}{M_n^0} < a(\vartheta_1)$ auf $\{t = n\}$ nicht mit positiver Wahrscheinlichkeit auftreten: der Test φ_t^* hat also die geforderte 1-0-Gestalt.

b) Es seien $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \Theta$ mit $\vartheta_0 \leq \vartheta_1 < \vartheta_2$ und $\alpha_1 := E_{\vartheta_1}\varphi_t^* < 1$. Dann liefert φ_t^* gemäß a) eine Lösung für das Problem

$$\begin{cases} E_{\vartheta_2}\varphi_t \overset{!}{=} sup \\ E_{\vartheta_1}\varphi_t = \alpha \end{cases}$$

Da gemäß der Modellannahme $Q_{\vartheta_2} \neq Q_{\vartheta_1}$ (vgl. 1.1) , folgt aus 1.4.1 3)b) schließlich $E_{\vartheta_2}\, \varphi_t > \alpha_1$.

c)

i) Nach dem Vorbild aus der klassischen Testtheorie vertauschen wir die Hypothesen und zeigen, dass für $\vartheta_2 < \vartheta_0$ der Test $1 - \varphi_t^*$ folgende Aufgabe löst

$$\begin{cases} E_{\vartheta_2}\varphi_t \overset{!}{=} sup \\ E_{\vartheta_0}\varphi_t = 1 - \alpha \end{cases} \quad . \tag{1.6.5}$$

Hierfür wählen wir $a(\vartheta_2) := H^N_{\vartheta_2,\vartheta_0}(\tilde{a}_0)$.
Gemäß Satz 1.4.1 müssen wir zeigen, dass $\forall n \leq N$ auf $\{t = n\}$ $(P_{\vartheta_2|\mathcal{C}_n} + P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_n})$-f.s. gilt

$$1 - \varphi^*_n = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \frac{M^0_n}{M^2_n} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} a(\vartheta_2). \\ 0 & \end{cases}$$

1) Auf $\{t = N\}$ ist diese Bedingung nach Definition von $a(\vartheta_2)$ erfüllt.

2) Sei nun $n < N$. Dann gilt $(P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_n} + P_{\vartheta_2|\mathcal{C}_n})$-f.s auf $\{S_n \geq \tilde{a}_0\}$ $1 - \varphi^*_n = 0$ und wegen der Monotoniebedingungen an $(n, s) \mapsto H^n_{\vartheta_2,\vartheta_0}(s)$

$$\frac{M^0_n}{M^2_n} = H^n_{\vartheta_2,\vartheta_0}(S_n) \geq H^n_{\vartheta_2,\vartheta_0}(\tilde{a}_0) \geq H^N_{\vartheta_2,\vartheta_0}(\tilde{a}_0) = a(\vartheta_2).$$

Damit kann $\frac{M^0_n}{M^2_n} < a(\vartheta_1)$ auf $\{t = n\}$ nicht mit positiver Wahrscheinlichkeit auftreten, der Test $1 - \varphi^*_t$ hat demnach die geforderte 1-0-Gestalt und liefert eine Lösung von (1.6.5).

Wir erhalten die Behauptung in i).

ii) Diese Aussage gewinnen wir aus a) und c) i) durch Vergleich mit $\varphi_t \equiv \alpha$.

iii) wird analog zu b) gezeigt.

□

1.6.7 Bemerkung

a) Die sequentiellen Tests aus 1.6.6 ähneln von der Struktur her den rechtsseitigen CIPs $\varphi^*_{t^N_a}$, unsere ersten Beispiele für gleichmäßig beste sequentielle Tests für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$. Wird früher als zum Endzeitpunkt N gestoppt, so entscheiden sie sich für H_1, und nur zum Endzeitpunkt N haben sie die Möglichkeit bzgl. der Terminalentscheidungen zu randomisieren. Gemäß Lemma 1.5.1 darf im Falle einparametriger Exponentialfamilien ein gleichmäßig bester sequentieller Test für H_0 gegen H_1 (von Güte kleiner 1) höchstens zu einem Zeitpunkt eine randomisierte Entscheidung treffen.
Die Beispiele aus 1.5.5 zeigen aber, dass unter rechtsseitigen, beschränkten Ersteintrittszeiten $t^N(a)$ - im Gegensatz zu den CIPs - ein gleichmäßig bester sequentieller Test auch zu einem früheren Zeitpunkt randomisieren darf, wenn der Träger von $Q^{T(X_1)}$ beschränkt ist (d.h. $d_0 < \infty$), wofür aber ein Preis gezahlt

wird: Nach Lemma 1.5.7 muss dann im Falle einparametriger Exponentialfamilien bei allen nachfolgenden Entscheidungen bei H_0 geblieben werden.

b) Die Forderung der Antitonie-Bedingung in der Definition des „sequentiellen Dichtequotienten“ ist für die Gültigkeit der Optimalitätsaussage 1.6.6 a) von der Anschauung her auch offensichtlich:
Liefert zu einem Stoppzeitpunkt $t = n$ der Wert der Prüfgröße $S_t = s$ eine deutliche Information für das Vorliegen von H_1, so wird für einen späteren Stoppzeitpunkt $m > n$ derselbe Wert s der Prüfgröße S_t selbstverständlich nicht mehr so klar auf H_1 hinweisen, wie der Wert s es zum Zeitpunkt n getan hat:
Nach den ersten n deutlichen Informationen für H_1, müssen $m - n$ Werte der Prüfgröße S_t folgen, die nicht mehr so klar auf H_1 hinweisen, damit wir auf denselben Wert s auskommen, und im ungüngstigsten Falle sprechen diese Werte sogar für H_0. Folglich wurden die ersten n Informationen durch die nachkommenden aufgeweicht. Dieser Sachverhalt drückt sich formal darin aus, dass sich der Dichtequotient $\frac{M_m^1}{M_m^0}(\omega) = H^m_{\vartheta_0,\vartheta_1}(s)$ für $\omega \in \{S_t = s\} \cap \{t = m\}$ nicht vergrößert hat verglichen mit dem zum Zeitpunkt $t = n$. Das liefert gerade die Antitonie-Forderung für die Abbildung $n \mapsto H^n_{\vartheta_0,\vartheta_1}(s)$.

c) **Es lässt sich eine zu Satz 1.6.6 entsprechende Aussage für das sequentielle Testen von $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $\underline{H}_1 : \vartheta < \vartheta_0$ formulieren** : Hierbei weisen kleine Werte der Prüfgröße S_n, in welcher ein isotoner Dichtequotient vorliegt, auf H_1 hin. Deshalb ist es naheliegend für dieses Problem eine Stoppzeit zu verwenden, die stoppt, sobald die Prüfgröße einen Schwellenwert $\tilde{a}_0$ unterschritten hat, und als zusätzliche Forderung an die Verteilungsklasse zu stellen, dass für jeden möglichen Wert der Prüfgröße S_t die Abbildung $n \mapsto H^n_{\vartheta_1,\vartheta_2}(s)$ (für $\vartheta_1 < \vartheta_2$) monoton schwach wächst, da derselbe Wert s zu einem späteren Zeitpunkt nicht mehr so deutlich für H_1 spricht.
Demnach erhalten wir analog zum Satz 1.6.6 für das Testen von $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $\underline{H}_1 : \vartheta < \vartheta_0$:
Es sei $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Verteilungsklasse mit sequentiell-isotonen isotonen Dichtequotienten in $\underset{\sim}{S} = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\Theta \cap (-\infty, \vartheta_0)$. Zu $N \in \mathbb{N}$ und $\tilde{a}_0 \in \mathbb{R}$ sei $t : \Omega \to \{1, \ldots, N\}$ eine beschränkte, linksseitige Stoppzeit, d.h. sie genügt der Bedingung

$$\forall n < N : \; \{t = n\} \subset \{S_n \leq \tilde{a}_0\} \quad P_{\vartheta|\mathcal{C}_n}\text{-f.s.}\forall\vartheta \in \Theta. \tag{1.6.6}$$

Dann liefert jedes TV $\underset{\sim}{\varphi}^*$ mit

1) $E_{\vartheta_0}\,\varphi_t^* = \alpha$,

2) $\varphi_t^* = \left\{\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right.$ für $S_t \overset{\leq}{>} \tilde{a}_0$ auf $\{t < N\}$ $P_{\vartheta|\mathcal{C}_t}$ – f.s. $\forall \vartheta \in \Theta$,

$\varphi_t^* = \left\{\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right.$ für $S_t \overset{>}{>} \tilde{a}_0$ auf $\{t = N\}$ $P_{\vartheta|\mathcal{C}_t}$ – f.s. $\forall \vartheta \in \Theta$.

einen gleichmäßig besten sequentiellen Test φ_t^* für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $\underline{H}_1 : \vartheta < \vartheta_0$.

□

Das folgende Korollar zeigt, wie sich zu vorgegebenem Niveau $\alpha \in (0,1)$ aus der Klasse der rechtsseitigen beschränkten Ersteintrittszeiten $\{t^N(a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ein sequentieller Test φ_t^*, konstruktiv bestimmen lässt, der den Bedingungen aus 1.6.1 genügt. Anschließend werden Beispiele von Verteilungsklassen notiert, für die das Korollar anwendbar ist.

1.6.8 Korollar: Gleichmäßig beste sequentielle Tests unter einseitigen beschränkten Ersteintrittszeiten

Es sei $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Verteilungsfamilie mit sequentiell-antitonen isotonen Dichtequotienten in $\underset{\sim}{S} = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\Theta \cap [\vartheta_0, \infty)$.
Zu $\alpha \in (0,1)$ und $N \in \mathbb{N}$ sei

$$\tilde{a}_0 := \inf\{a \in \mathbb{R} \mid P_{\vartheta_0}(S_{t^N(a)} > a) \leq \alpha\} \text{ mit } P_{\vartheta_0}(S_n = \tilde{a}_0) = 0 \;\forall n < N.$$

Es bezeichne $t := t^N(\tilde{a}_0) = \inf\{n \leq N \mid S_n \geq \tilde{a}_0\}$.

a) Dann liefert

$$\varphi_n^* = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für } S_n \overset{\geq}{<} \tilde{a}_0 \quad (n < N), \qquad \varphi_N^* = \begin{cases} 1 & & > \\ \gamma & \text{für} \quad S_N & = & \tilde{a}_0 \\ 0 & & < \end{cases}$$

mit $\gamma \in [0,1]$ derart, dass $E_{\vartheta_0}\varphi_t^* = \alpha$,
eine gleichmäßig optimale Lösung für $\overline{H_0} : \vartheta = \vartheta_0$ gegen
$H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

b) Es gibt ein TV $\underset{\sim}{\varphi}^*$ mit der Gestalt aus a) und $E_{\vartheta_0}\varphi_t^* = \alpha$.

c) Besitzt $\mathcal{Q}$ einen sequentiell isotonen Dichtequotienten in $\underset{\sim}{S}$ auf ganz Θ, so gilt zusätzlich $E_\vartheta\,\varphi_t^* \leq \alpha \quad \forall \vartheta \leq \vartheta_0$ und somit liefert φ_t^* einen gleichmäßig besten Test für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegn $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$. Außerdem minimiert φ_t^* die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art unter allen α-ähnlichen Tests, d.h. liefert eine Lösung von (1.5.2).

Beweis:

Da die Ersteintrittszeit $t^N(\tilde{a}_0)$ offensichtlich die Bedingung (1.6.1) erfüllt, bleibt nur noch anzumerken: es gibt ein $\gamma \in [0,1]$, so dass für das TV $\underset{\sim}{\varphi}^*$ mit der Gestalt aus a) gilt $E_{\vartheta_0}\varphi_t^* = \alpha$.
Zunächst folgt aufgrund der Festlegung von $\tilde{a}_0$ mit Hilfe des Lemmas 1.6.2:

$$P_{\vartheta_0}(S_t > \tilde{a}_0) \leq \alpha \text{ und } P_{\vartheta_0}(S_t \geq \tilde{a}_0) \geq \alpha.$$

Außerdem gilt wegen der Voraussetzung $P_{\vartheta_0}(S_n = \tilde{a}_0) = 0 \; \forall n < N$:

$$P_{\vartheta_0}(S_t \geq \tilde{a}_0) = P_{\vartheta_0}(S_t > \tilde{a}_0) + P_{\vartheta_0}(S_t = \tilde{a}_0, t = N).$$

Ist $P_{\vartheta_0}(S_t = \tilde{a}_0, t = N) > 0$, so liefert offenkundig

$$\gamma := \frac{\alpha - P_{\vartheta_0}(S_t > \tilde{a}_0)}{P_{\vartheta_0}(S_t = \tilde{a}_0, t = N)} \quad \text{das Gewünschte.}$$

Andererseits, im trivialen Fall $P_{\vartheta_0}(S_t = \tilde{a}_0, t = N) = 0$, wird nicht randomisiert und es kann z.B. $\gamma = 1$ gewählt werden, so dass der sequentielle Test aus a) die Gestalt $\varphi_t^* = \left\{\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right.$ für $S_t \underset{<}{\geq} \tilde{a}_0$ bekommt. □

1.6.9 Beispiele

a) Die rechtsseitigen CIPs (vgl. 1.3.4) liefern erste Beispiele für sequentielle Tests mit der Gestalt aus Korollar 1.6.8. Der Multiplikator $\tilde{a}_0$ ist dabei das kleinste α-Fraktil von $P_{\vartheta_0}^{S_N}$.

b) Zugeschnitten auf das Korollar 1.6.8 sind Verteilungsklassen $\mathcal{Q}$ mit sequentiell-antitonen isotonen Dichtequotienten, für die zusätzlich $P_\vartheta^{S_n}$ $(n \in \mathbb{N}, \vartheta \in \Theta)$ stetige Verteilungsfunktionen besitzen. In dieser Situation lässt sich zu jedem Niveau $\alpha \in (0,1)$ und Stichprobenumfang $N \in \mathbb{N}$ durch den nicht randomisierten sequentiellen Test

$$\varphi^*_{t^N(\tilde{a}_0)} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad S_{t^N(\tilde{a}_0)} \underset{<}{\geq} \tilde{a}_0 \quad \text{mit } \tilde{a}_0 := \inf\{a \in \mathbb{R} \mid P_{\vartheta_0}(S_{t^N(a)} > a) \leq \alpha\}$$

eine gleichmäßig optimale Lösung für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ angeben. Beispiele für solche Verteilungsklassen liefern

i) einparametrige Exponentialfamilien $\mathcal{Q}$, für die Q_ζ^T stetige Verteilungsfunktion besitzt, also z.B. $Q_\vartheta = \mathcal{N}(\vartheta, \sigma^2)$ oder $Q_\vartheta = \Gamma(\vartheta, \mu)$.

ii) die Klasse der Rechteckverteilungen $\mathcal{Q}_a = \{\mathcal{R}(a,\vartheta) \mid \vartheta > a\}, (a \in \mathbb{R})$.
Da $\mathcal{Q}_a$ in $S_n = \max(X_1 \ldots, X_n)$ sequentiell-antitonen isotonen Dichtequotienten auf ganz $\Theta = (a, \infty)$ besitzt, minimiert φ_t^* sogar die Fehlerwahrscheinlichkeit 1.Art unter allen α-ähnlichen Tests und ist damit optimal für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

c) Bei einparametrigen Exponentialfamilien $\mathcal{Q}$, für die Q_ζ^T keine stetige Verteilungsfunktion besitzt, (z.B. die Klasse der Binomialverteilungen, der negativen Binomialverteilungen, der Poissonverteilungen) werden wir durch den sequentiellen Test φ_t^* aus 1.6.8 nur für solche Niveaus $\alpha \in (0,1)$ gleichmäßig beste Tests erhalten, die unter P_{ϑ_0} von φ_t^* für ein geeignetes $\gamma \in [0,1]$ ausgeschöpft werden können.
Randomisieren kann der sequentielle Test φ_t^* aus 1.6.8 nur zum Endzeitpunkt, daher liegt es nahe, dass nicht zu jedem Niveau α ein sequentieller Test φ_t^* aus 1.6.8 konstruiert werden kann, der α ausschöpft. Auf dieses Problem kommen wir noch zu zurück. □

Zuvor notieren wir:

1.6.10 Bemerkung: Gleichmäßig beste sequentielle Tests für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $\underline{H}_1 : \vartheta < \vartheta_0$

Es lässt sich eine analoge Aussage zu Korollar 1.6.8 für das Testen von $\overline{H}_0 : \zeta = \zeta_0$ gegen $\underline{H}_1 : \vartheta < \vartheta_0$ machen, wenn wir eine einparametrige Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ mit sequentiell-*isotonen* isotonen Dichtequotienten auf $\Theta \cap (-\infty, \vartheta_0]$ zugrunde legen. Dabei werden wir linksseitige, beschränkte Ersteintrittszeiten $t(a) := \inf\{n \leq N \mid S_n \leq a\}$ verwenden mit dazu passendem TV (vgl. Bemerkung 1.6.7 c)). Besitzt die Verteilungsklasse zudem für $P_{\vartheta_0}^{S_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ stetige Verteilungsfunktion, so wird zu jedem Niveau $\alpha \in (0,1)$ und Stichprobenumfang $N \in \mathbb{N}$ durch den nicht randomisierten Test

$$\varphi^*_{t^N(\tilde{a}_0)} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad S_{t(\tilde{a}_0)} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \tilde{a}_0 \quad \text{mit } \tilde{a}_0 := \inf\{a \in \mathbb{R} \mid P_{\vartheta_0}(S_{t(a)} < a) \leq \alpha\}$$

eine gleichmäßig optimale Lösung für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $\underline{H}_1 : \vartheta < \vartheta_0$ gegeben, d.h. eine Lösung für das Problem (1.5.3).
Beispiele für solche Verteilungsklassen werden gemäß 1.6.5 wieder geliefert zum einen durch einparametrige Exponentialfamilien, für die Q_ζ^T stetige Verteilungsfunktion besitzt und zum anderen durch die Klasse der Rechteckverteilungen $\mathcal{Q}^b = \{\mathcal{R}(\vartheta, b) \mid \vartheta < b\}$. □

Zum Schluss wollen wir uns in diesem Abschnitt noch zwei Fragen zuwenden, die durch die bisherigen Untersuchungen aufgeworfen wurden:

F1) In Beispiel 1.6.9 c) haben wir darauf hingewiesen, dass nicht jedes Niveau $\alpha \in (0,1)$ durch einen sequentiellen Test aus Korollar 1.6.8 unter P_{ϑ_0} wird ausgeschöpft werden können. Somit wird bei äquivalenten Verteilungsklassen $\mathcal{Q}$ ein solcher Test nicht mehr gleichmäßig optimal für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ sein. Es stellt sich die Frage, ob die prinzipielle Konstruktionsidee aus 1.6.8 (zur Bestimmung der zum Problem passenden Ertseintrittszeit $t^N(\tilde{a}_0)$) beibehalten werden kann, indem man durch eine andere Wahl des TVs, das vorgegebene Niveau α versucht auszuschöpfen.

F2) Weiterhin sahen wir im Beispiel 1.6.9, dass für die Klasse der Rechteckverteilungen $\mathcal{Q}_a$ der sequentielle Test $\varphi^*_{t^N(\tilde{a}_0)}$ sogar gleichmäßig optimal für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ ist. Können wir eine solche Aussage auch für einparametrige Exponentialfamilien herleiten?

Wir wenden uns zunächst der Frage F1 zu:
Da das TV $\underset{\sim}{\varphi}^*$ eines gleichmäßig besten Tests aufgrund des Neyman-Pearson-Lemmas 1.4.1 in seiner 1-0-Gestalt über eine Konstante für alle Stufen notwendig festliegt, bieten sich nur zwei Möglichkeiten das TV zu modifizieren, einerseits zu einem früheren Zeitpunkt als N beim TV zu randomisieren und andererseits den Multiplikator für das TV verschieden von der Schwelle $\tilde{a}_0$ der Ersteintrittszeit zu wählen. Allerdings geht bei der letzten Möglichkeit der Konstruktionsgedanke aus 1.6.8 verloren.
Hinsichtlich des Randomisierens beim TV eines gleichmäßig besten Tests haben wir im Falle einparametriger Exponentialfamilien mit 1.5.7 und 1.5.8 bereits Antworten gegeben. Zunächst ist klar, dass das Problem des Randomisierens sich nur für diskrete Exponentialfamilien stellt. Für solche mit unendlichem Träger, so z.B. die Familie der Poissonverteilungen, darf unter einer einseitigen beschränkten Ersteintrittszeit beim optimalen TV nur im Endzeitpunkt randomisiert werden, so dass sich in diesen Fällen nicht jedes Niveau α wird ausschöpfen lassen.
Für die diskreten Exponentialfamilien mit endlichem Träger ist es wohl erlaubt, zu einem früheren Zeitpunkt beim TV zu randomisieren, aber mit dem Preis, dass nachfolgend das optimale TV bei H_0 bleiben muss. Das folgende Beispiel für Bernoulliverteilungen zeigt, dass sich durch diese Randomisierungsmöglich-

keit nicht jedes Niveau α ausschöpfen lässt unter der Ersteintrittszeit $t^N(\tilde{a}_0)$ aus 1.6.8, wenn $\tilde{a}_0$ auch als Multiplikator für das TV verwandt wird.

1.6.11 Beispiel

Es seien $Q_\vartheta = \mathcal{B}(1,\vartheta)$, $N=3$, $\vartheta_0 < 1/2$ und $\alpha \in \big(\vartheta_0^2 + 2(1-\vartheta_0)\vartheta_0^2,\, \vartheta_0\big)$.
Weiter sei

$$\tilde{a}_0 \in \mathbb{R} \text{ mit } P_{\vartheta_0}(S_{t^N(\tilde{a}_0)} > \tilde{a}_0) \le \alpha \text{ und } P_{\vartheta_0}(S_{t^N(\tilde{a}_0)} \ge \tilde{a}_0) \ge \alpha. \tag{1.6.7}$$

Dann gibt es unter $t^N(\tilde{a}_0)$ keine Lösung für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

Beweis:

Beh. 1: Für jedes $\tilde{a}_0 \in \mathbb{R}$, dass (1.6.7) genügt, gilt $\tilde{a}_0 = 1 - \vartheta_0$.

Begr.: Zu $a \in \mathbb{R}$ bezeichnen

$$\begin{aligned}
g(a) &:= P_{\vartheta_0}(S_{t^N(a)} > a)\\
&= P_{\vartheta_0}(S_1 > a) + P_{\vartheta_0}(S_1 < a,\, S_2 > a) + P_{\vartheta_0}(S_1 < a,\, S_2 < a,\, S_3 > a),\\
\gamma_1(a) &:= P_{\vartheta_0}(S_1 = a),\\
\gamma_2(a) &:= P_{\vartheta_0}(S_1 < a,\, S_2 = a),\\
\gamma_3(a) &:= P_{\vartheta_0}(S_1 < a,\, S_2 < a, S_3 = a),\\
g^+(a) &:= P_{\vartheta_0}(S_{t^N(a)} \ge a) = g(a) + \sum_{i=1}^{3} \gamma_i(a).
\end{aligned}$$

Wir bestimmen $g(a)$ und $g^+(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
Für die Zufallsgrößen S_n gilt:

$$\begin{aligned}
S_1 &\in \{-\vartheta_0, 1-\vartheta_0\},\\
S_2 &\in \{-2\vartheta_0, 1-2\vartheta_0, 2-2\vartheta_0\}\\
S_3 &\in \{-3\vartheta_0, 1-3\vartheta_0, 2-3\vartheta_0, 3-3\vartheta_0\}.
\end{aligned}$$

Da $\vartheta_0 < 1/2$, lassen sich die möglichen Werte von S_n folgendermaßen anordnen:

$$-3\vartheta_0 < -2\vartheta_0 < -\vartheta_0 < 1-3\vartheta_0 < 1-2\vartheta_0 < 1-\vartheta_0 < 2-3\vartheta_0 < 2-2\vartheta_0 < 3-3\vartheta_0,$$

und wir können entsprechend dieser Anordnung die Werte von $g(a)$ bestimmen.

1) Für $a \ge 2-2\vartheta_0$ gilt $S_1, S_2 \le a$, somit

$$g(a) = P_{\vartheta_0}(S_3 > a) = \begin{cases} 0 & a \ge 3-3\vartheta_0 \\ \vartheta_0^3 \quad \text{für} & 2-2\vartheta_0 < a < 3-3\vartheta_0 \\ 0 & a = 2-2\vartheta_0 \end{cases}.$$

2) Für $1-\vartheta_0 \le a < 2-2\vartheta_0$ gilt $S_1 \le a$, somit

$$\begin{aligned} g(a) &= P_{\vartheta_0}(S_1 < a, S_2 > a) + P_{\vartheta_0}(S_1 < a, S_2 < a, S_3 > a) \\ &= \begin{cases} \vartheta_0^2 & \quad 2-3\vartheta_0 \le a < 2-2\vartheta_0 \\ \vartheta_0^2 + 2(1-\vartheta_0)\vartheta_0^2 & \text{für} \quad 1-\vartheta_0 < a < 2-3\vartheta_0 \\ (1-\vartheta_0)\vartheta_0^2 & \quad a = 1-\vartheta_0 \end{cases} . \end{aligned}$$

3) Für $-\vartheta_0 \le a < 1-\vartheta_0$ gilt

$$\begin{aligned} g(a) &= P_{\vartheta_0}(X_1 = 1) + P_{\vartheta_0}(S_1 < a, S_2 > a) + P_{\vartheta_0}(S_1 < a, S_2 < a, S_3 > a) \\ &= \begin{cases} \vartheta_0 + (1-\vartheta_0)\vartheta_0^2 & \quad 1-2\vartheta_0 \le a < 1-1\vartheta_0 \\ \vartheta_0 & \text{für} \quad a = 1-2\vartheta_0 \\ \vartheta_0 + (1-\vartheta_0)\vartheta_0 & \quad 1-3\vartheta_0 \le a < 1-2\vartheta_0 \\ \vartheta_0 + (1-\vartheta_0)\vartheta_0 + (1-\vartheta_0)^2\vartheta_0 & \quad -\vartheta_0 < a < 1-3\vartheta_0 \end{cases} . \end{aligned}$$

4) Für $a \le -\vartheta_0$ gilt $S_1 \ge a$, somit

$$g(a) = P_{\vartheta_0}(S_1 > a) = \begin{cases} \vartheta_0 & \quad a = -\vartheta_0 \\ & \text{für} \\ 1 & \quad a < -\vartheta_0 \end{cases} .$$

Es sind nur diejenigen $\gamma_n(a)$ interessant mit

$$a \in \{-\vartheta_0, 1-3\vartheta_0, 1-2\vartheta_0, 1-\vartheta_0, 2-3\vartheta_0, 2-2\vartheta_0, 3-3\vartheta_0\},$$

für alle anderen a gilt $\gamma_n(a) = 0$.
Daher liefern diese Werte von a alle möglichen verschiedenen Werte von $g(a)$ und $g^+(a)$. Dies stellt die folgende Tabelle dar:

a	$g(a)$	$\gamma_1(a)$	$\gamma_2(a)$	$\gamma_3(a)$
$3-3\vartheta_0$	0	0	0	ϑ_0^3
$2-2\vartheta_0$	0	0	ϑ_0^2	0
$2-3\vartheta_0$	ϑ_0^2	0	0	$2\vartheta_0^2(1-\vartheta_0)$
$1-\vartheta_0$	$(1-\vartheta_0)\vartheta_0^2$	ϑ_0	0	0
$1-2\vartheta_0$	ϑ_0	0	$\vartheta_0(1-\vartheta_0)$	0
$1-3\vartheta_0$	$\vartheta_0 + (1-\vartheta_0)\vartheta_0$	0	0	$\vartheta_0(1-\vartheta_0)^2$
$-\vartheta_0$	ϑ_0	$1-\vartheta_0$	0	0

Da $\alpha \in \big(\vartheta_0^2 + 2(1-\vartheta_0)\vartheta_0^2,\, \vartheta_0\big) \subset \big(\vartheta_0^2(1-\vartheta_0), \vartheta_0^2(1-\vartheta_0)+\vartheta_0\big)$, liefert $\tilde{a}_0 = 1-\vartheta_0$:

$$g(\tilde{a}_0) < \alpha \text{ und } g^+(\tilde{a}_0) > \alpha.$$

Weiter gilt für jedes $a < \tilde{a}_0$: $g^+(a) \leq \vartheta_0^2 + 2(1-\vartheta_0)\vartheta_0 < \alpha$ und für jedes $a > \tilde{a}_0 : g(a) \geq \vartheta_0 > \alpha$; damit erhalten wir die Beh 1.
Übrigens ist in dieser Situation $\tilde{a}_0 = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid P_{\vartheta_0}(S_{t^N(a)} > a) \leq \alpha\}$. Aber wie wir der Tabelle entnehmen können, ist $g(a) = P_{\vartheta_0}(S_{t^N(a)} > a)$ nicht monoton in a.

Beh. 2: Unter $t = t^N(\tilde{a}_0)$ gibt es z.N. α keine gleichmäßig optimale Lösung für (P_α^t) für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

Begr.: Für den Beweis betrachten wir die Aufgabe in natürlicher Parametrisierung. Es gilt $\{t=1\} = \{X_1 = 1\}$, $\{t=2\} = \emptyset$, $\{t=3\} = \{X_1 = 0\}$.
Zu $\gamma \in (0,1)$ mit $g(\tilde{a}_0) + \gamma\gamma_1(\tilde{a}_0) = \alpha$ betrachten wir den sequentiellen Test

$$\varphi_t^* = \begin{cases} 1 & & & > & \\ \gamma & \text{füuzr} & S_t & = & \tilde{a}_0 \\ 0 & & & < & \end{cases}, d.h.$$

$$\varphi_1^* = \gamma \text{ auf } \{X_1 = 1\}, \quad \varphi_3^* = \begin{cases} 1 & \text{für} & X_1 = 0,\, X_2 = X_3 = 1 \\ 0 & & X_1 = 0,\, X_2 + X_3 \leq 1 \end{cases}.$$

Beh.2.1 φ_t^* löst nicht das Problem (1.5.1).
$\mathbb{A}$: φ_t^* ist Lösung von (1.5.1). Da $P_{\vartheta_0}(\varphi_t^* \in (0,1),\, t=1) > 0$, muss dann nach dem Lemma 1.5.7 für alle $n > 1$ gelten: $P_{\vartheta_0}(\varphi_t^* > 0,\, t = n) = 0$, was offenkundig im Widerspruch zu $P_{\vartheta_0}(\varphi_t^* = 1,\, t=3) > 0$ steht.

Beh.2.2: $\exists \vartheta_1 > \vartheta_0$ mit φ_t^* löst die Aufgabe (P_α^t) für $\overline{H_0} : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $\overline{H}_1 : \vartheta = \vartheta_1$.
Begr.: Da $d_0(\zeta(\vartheta_1)) = \Delta_0(\zeta(\vartheta_1)) - b'(\zeta(\vartheta_0)) \downarrow 0$ für $\vartheta_1 \downarrow \vartheta_0$, können wir ein $\vartheta_1 > \vartheta_0$ finden mit

$$2d_0(\zeta(\vartheta_1)) < (2 - 3\vartheta_0) - \tilde{a}_0 = 1 - 2\vartheta_0.$$

Wegen $E_{\zeta_0}\, \varphi_t^* = \alpha$, genügt gemäß 1.5.1 b) zu zeigen, dass ein $\tilde{a}(\vartheta_1)$ existiert, so dass für alle $n \leq N$ auf $\{t = n\}$ gilt:

$$S_n \genfrac{}{}{0pt}{}{>}{<} \tilde{a}(\vartheta_1) + nd_0(\zeta(\vartheta_1)) \Longrightarrow \varphi_n^* = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}.$$

Aufgrund der Randomisierung zum Zeitpunkt $t = 1$ muss $\tilde{a}(\vartheta_1)$ wie folgt festgelegt werden: $\tilde{a}(\vartheta_1) = (1 - \vartheta_0) - d_0(\zeta(\vartheta_1))$. Damit ist die obige Bedingung für $n = 1$ trivialerweise erfüllt, und da $\{t = 2\} = \emptyset$, bleibt die Bedingung für $n = 3$ zu zeigen.
Auf $\{t = 3\} = \{X_1 = 0\}$ gilt $S_3 \in \{-\vartheta_0, 1 - 3\vartheta_0, 2 - 3\vartheta_0\}$
und somit bekommen wir aufgrund der Wahl von ϑ_1

$$S_3 \underset{<}{\overset{>}{}} (1 - \vartheta_0) + 2d_0(\zeta(\vartheta_1)) \Longrightarrow S_3 \underset{<}{\overset{>}{}} 1 - \vartheta_0.$$

Wir erhalten Beh.2.2; wir haben sogar noch mehr gezeigt:

Aufgrund der Isotonie von $\vartheta \mapsto d_0(\zeta(\vartheta))$ für $\vartheta > \vartheta_0$ ist φ_t^* lokal gleichmäßig optimal für (P_α^t) für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $\hat{H}_1 : \vartheta \in (\vartheta_0, \vartheta_1]$.

Beh.2.3: Es gibt keinen gleichmäßig besten Test $\hat{\varphi}_t$ für die Aufgabe (P_α^t) für $\overline{H_0}$: $\vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

$\mathbb{A}$: Es gibt doch ein TV $\underset{\sim}{\hat{\varphi}}$, das die obere Aufgabe löst. Dann ist $\underset{\sim}{\hat{\varphi}}$ auch eine Lösung von (P_α^t) für $\overline{H}_0$ gegen $\overline{H}_1$. Da der sequentielle Test φ_t^* unter P_{ϑ_1} Güte kleiner als 1 besitzt, folgt aus der Teilaussage d) des N-P-Lemmas 1.4.1, dass $\underset{\sim}{\hat{\varphi}}$ bis auf Randomisierung $P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_t}$-f.s. mit φ_t^* übereinstimmen muss, d.h. es gilt

$$\hat{\varphi}_t = \varphi_t^* \text{ auf } \{M_t^1 \neq \tilde{a}_0 M_t^0\} \ P_{|\mathcal{C}_t}\text{-f.s.}.$$

Damit kann aber aufgrund Beh. 2.1 $\hat{\varphi}_t$ nicht gleichmäßig optimal sein für die Aufgabe (P_α^t) für $\overline{H_0} : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

□

1.6.12 Bemerkung zur unterschiedlichen Wahl der Schwelle bei Stoppzeit und TV

In der Situation von Beispiel 1.6.11 können wir allerdings unter rechtsseitigen, beschränkten Ersteintrittszeit $t^N(a)$ einen gleichmäßig besten sequentiellen Test für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ angeben, wenn wir zulassen, dass der Multiplikator $\tilde{a}_0$ für das TV verschieden von der Schwelle a der Ersteintrittszeit gewählt werden darf, was in 1.6.8 bei der Konstruktion eines gleichmäßig besten Tests nicht der Fall war.
So liefert beispielsweise für $Q_\vartheta = \mathcal{B}(1, \vartheta)$, $N = 3, \vartheta_0 < 1/2$ zu $\alpha \in (0, \vartheta_0)$ unter

der Ersteintrittszeit $t^3(1-2\vartheta_0)$ das TV $\underset{\sim}{\varphi}^*$ der Gestalt:

$$\varphi_1^* = \begin{cases} 1 & & > \\ \gamma & \text{für} \quad S_1 & = \quad 1-\vartheta_0 \\ 0 & & < \end{cases}, \quad \varphi_2^* = \varphi_3^* = 0,$$

mit $\gamma \in (0,1)$ derart, dass $\gamma\vartheta_0 = \alpha$ eine Lösung von (1.5.1).
Für den Beweis verweisen wir auf das Beispiel 1.5.5 a). □

Wir können aber die Konstruktionsidee aus 1.6.8 beibehalten und auf anderem Wege Abhilfe beschaffen, indem wir statt bei den Terminalentscheidungen zu randomisieren, dies bei den Stoppentscheidungen ausführen: Wir verwenden für die Ersteintrittszeit $t^N(a)$, welche stoppt, sobald die Prüfgröße S_n die Schwelle a überschreitet, eine geeignete randomisierte Stoppzeit, indem wir $t^N(a)$ konvexkombinieren mit der Ersteintrittszeit, $t^{N+}(a)$ welche stoppt, sobald die Prüfgöße S_n größer ist als die Schwelle a, folglich also „später" stoppt als $t^N(a)$, dann den Multiplikator $\tilde{a}_0$ ähnlich wie in 1.6.8 passend zum Niveau α wählen und unter dieser randomisierten Stoppzeit $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ testen. Praktisch bedeutet dies, dass wir vor dem Beobachten ein Zusatzexperiment durchführen (z.B. das Werfen einer nicht notwendig fairen Münze), aufgrund dessen Ausganges wir entscheiden, welche der beiden Stoppzeiten wir zum Auswerten im weiteren verwenden. Auf diese Weise können wir auch in den Situationen, in denen $P_{\vartheta_0}^{S_n}$ keine stetige Verteilungsfunktion besitzt, zu jedem Niveau $\alpha \in (0,1)$ gleichmäßig beste Tests für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ angeben:

1.6.13 Lemma

Es sei $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Verteilungsfamilie mit sequentiell-antitonen isotonen Dichtequotienten in $\underset{\sim}{S} = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\Theta \cap [\vartheta_0, \infty)$.
Zu $\alpha \in (0,1)$ und $N \in \mathbb{N}$ sei

$$\tilde{a}_0 := \inf\{a \in \mathbb{R} \mid P_{\vartheta_0}(S_{t^N(a)} > a) \le \alpha\}.$$

Zu $\gamma \in [0,1]$ bezeichne $t_\gamma^N(\tilde{a}_0)$ die randomisierte Stoppzeit, welche durch folgende Abbruchregel $\underset{\sim}{g}$ (vgl. 1.2.7) gegeben ist

$$\begin{aligned} g_n :=& \gamma P_\bullet\big(t^{N+}(\tilde{a}_0) = n | \mathcal{C}_n\big) + (1-\gamma) P_\bullet\big(t^N(\tilde{a}_0) = n | \mathcal{C}_n\big) \ \ (n \le N) \\ & \textit{wobei} \ \ t^{N+}(\tilde{a}_0) := \inf\{n \le N \mid S_n > \tilde{a}_0\}. \end{aligned}$$

a) *Dann liefert*

$$\varphi^*_{t^N_\gamma(\tilde a_0)} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad S_{t^N_\gamma(\tilde a_0)} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \tilde a_0$$

mit $\gamma \in [0,1]$ *derart, dass*

$$\gamma P_{\vartheta_0}\big(S_{t^{N+}(\tilde a_0)} > \tilde a_0\big) + (1-\gamma) P_{\vartheta_0}\big(S_{t^N(\tilde a_0)} \geq \tilde a_0\big) = \alpha \tag{1.6.8}$$

eine gleichmäßig optimale Lösung für $\overline{H_0} : \vartheta = \vartheta_0$ *gegen* $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ *unter* $t^N_\gamma(\tilde a_0)$.

b) *Besitzt* $\mathcal{Q}$ *sequentiell isotonen Dichtequotienten in* $\underset{\sim}{S}$ *auf ganz* Θ, *so liefert* $\varphi^*_{t^N_\gamma(\tilde a_0)}$ *einen gleichmäßig besten Test für* $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ *gegen* $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$, *der die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art unter allen* α*-ähnlichen Tests minimiert.*

Beweis:

Wir wollen Satz 1.6.6 anwenden. Die randomisierte Stoppzeit $t^N_\gamma(\tilde a_0)$ erfüllt offensichtlich die Bedingung (1.6.1), und der sequentielle Test $\varphi^*_{t^N_\gamma(\tilde a_0)}$ besitzt die in Satz 1.6.6 geforderte 1-0-Gestalt. Außerdem erhalten wir aufgrund der Definition der randomisierten Stoppzeit $t^N_\gamma(\tilde a_0)$ mit 1.2.7 und 1.2.9

$$E_{\vartheta_0}\varphi^*_{t^N_\gamma(\tilde a_0)} = \gamma P_{\vartheta_0}\big(S_{t^{N+}(\tilde a_0)} > \tilde a_0\big) + (1-\gamma) P_{\vartheta_0}\big(S_{t^N(\tilde a_0)} \geq \tilde a_0\big).$$

Daher bleibt nur noch zu zeigen, dass es ein $\gamma \in [0,1]$ mit (1.6.8) gibt:
Zunächst liefert Lemma 1.6.2 wegen der Festlegung von $\tilde a_0$

$$P_{\vartheta_0}(S_{t^N(\tilde a_0)} \geq \tilde a_0) \geq \alpha.$$

Desweiteren gilt $P_{\vartheta_0}(S_{t^{N+}(\tilde a_0)} > \tilde a_0) \leq \alpha$, denn wegen $(\tilde a_0, \infty) = \cup_{a > \tilde a_0}(a, \infty)$, erhalten wir aufgrund der Stetigkeit des W-Maßes P_{ϑ_0} und der Definition von $\tilde a_0$ und von $t^{N+}(\tilde a_0)$:

$$\begin{aligned} P_{\vartheta_0}(S_{t^{N+}(\tilde a_0)} > \tilde a_0) &= \sum_{n=1}^N P_{\vartheta_0}(S_k \leq \tilde a_0\ \forall k < n,\ S_n > \tilde a_0) \\ &= \lim_{a \downarrow \tilde a_0} \sum_{n=1}^N P_{\vartheta_0}(S_k \leq \tilde a_0\ \forall k < n,\ S_n > a) \\ &\leq \lim_{a \downarrow \tilde a_0} \sum_{n=1}^N P_{\vartheta_0}(S_k < a\ \forall k < n,\ S_n > a) \\ &\qquad \big(\text{da } \{S_k \leq \tilde a_0\} \subset \{S_k < a\} \text{ für } a > \tilde a_0\big) \\ &= \lim_{a \downarrow \tilde a_0} P_{\vartheta_0}(S_{t^N(a)} > a) \leq \alpha. \end{aligned}$$

Damit bekommen wir die Existenz eines $\gamma \in [0,1]$ mit (1.6.8). □

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass das Lemma 1.6.13 nur bedingt eine Lösung für das Ausschöpfen von α bietet. Das Ausschöpfen von α ist eigentlich die Aufgabe des TVs und nicht der Stoppzeit t: Das Randomisieren bei den Stoppentscheidungen ist nämlich dafür vorgesehen, im Hinblick auf optimale sequentielle Tests bei variierenden Stoppzeiten (vgl. Kapitel 2 und 3), wo zusätzlich noch eine Bedingung an den erwarteten Stichprobenumfang gestellt wird, die vorgegebene Schranke δ für den erwarteten Stichprobenumfang auszuschöpfen. Dies wird aber offensichtlich i.a. nicht mehr möglich sein, wenn die Randomisierungsmöglichkeit bei den Stoppentscheidungen für das Ausschöpfen von α verbraucht wird.

Abschließend wenden wir uns der Frage F2 zu:
Die Aussage, dass der sequentielle Test $\varphi^*_{t^N(\tilde{a}_0)}$ das Niveau α auf ganz $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ einhält, bekamen wir im Falle der Rechteckverteilungen dadurch, dass der Test $\varphi^*_{t^N(\tilde{a}_0)}$ auch die Fehlerwahrscheinlichkeit 1.Art unter allen α-ähnlichen Tests minimiert. Diese Argumentation werden wir wegen 1.5.14 auf einparametrige Exponentialfamilien nicht übertragen können.
Daher fragt sich, ob wenigstens die Gütefunktion von $\varphi^*_{t^N(\tilde{a}_0)}$ auf $\mathcal{Z} \cap (-\infty, \zeta_0]$ monoton wächst, woraus wir schließlich auch erhielten, dass der Test auf ganz $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ das Niveau α einhält?
Das folgende Lemma gibt hierauf eine positive Antwort. Der Beweis geht auf Ghosh zurück (vgl. [Gh] S.100ff.). Er hat dort eine solche Isotonieaussage für SPRTs gezeigt. Wir übertragen den Beweis auf die besten Tests unter beschränkten einseitigen Ersteintrittszeiten.

1.6.14 Lemma: Isotonie der Gütefunktion

Es sei $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Verteilungsklasse mit streng isotonen Dichtequotienten in $\underset{\sim}{S} = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Weiter seien $a \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ und $\gamma \in [0,1]$.
Dann ist folgende Abbildung isoton

$$g_N : \Theta \to [0,1], \quad g_N(\vartheta) := \sum_{n=1}^{N-1} P_\vartheta\big(S_k < a \;\forall k < n,\; S_n \geq a\big) + \gamma P_\vartheta\big(S_k < a \;\forall k < N,\; S_N \geq a\big).$$

Beweis: (vgl. Ghosh [G], S.100 ff.)

Sei $t = t(a) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \geq a\}$. Dann gilt

$$g_N(\vartheta) = P_\vartheta(t < N) + \gamma P_\vartheta(t = N).$$

Seien $\vartheta_0 < \vartheta_1$ aus Θ. Wir beweisen zunächst durch Induktion nach $N \in \mathbb{N}$, dass gilt

Beh.1:

$$\delta_N := P_{\vartheta_1}(t \leq N) - P_{\vartheta_0}(t \leq N) \geq 0.$$

Dazu zeigen wir

Beh.2:

$$P_{\vartheta_1}(t = n+1) \cdot P_{\vartheta_0}(t > n) \geq P_{\vartheta_1}(t > n) \cdot P_{\vartheta_0}(t = n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Begr.: Da $\mathcal{Q}$ streng isotonen Dichtequotienten in $\underset{\sim}{S}$ besitzt, gilt:
$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists H^n_{\vartheta_0,\vartheta_1} : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ streng isoton mit

$$\frac{M_n^1}{M_n^0} = H^n_{\vartheta_0,\vartheta_1}(S_n) \quad (P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_n} + P_{\vartheta_1|\mathcal{C}_n}) - f.s..$$

Daraus folgt mit $a_n := H^n_{\vartheta_0,\vartheta_1}(a)$, dass $(P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_n} + P_{\vartheta_1|\mathcal{C}_n}) - f.s.$ gilt:

$$S_n \geq a \iff \frac{M_n^1}{M_n^0} \geq a_n$$

und somit erhalten wir $t = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{M_n^1}{M_n^0} \geq a_n\}$.
Auf $\{t = n+1\}$ gilt $P_{|\mathcal{C}_{n+1}} - f.s.\quad M^1_{n+1} \geq a_{n+1} \cdot M^0_{n+1}$, und
auf $\{t > n+1\}$ gilt $P_{|\mathcal{C}_{n+1}} - f.s.\quad M^1_{n+1} < a_{n+1} \cdot M^0_{n+1}$.
Integration beider Ungleichungen bzgl. $P_{|\mathcal{C}_{n+1}}$ liefert

(1) $P_{\vartheta_1}(t = n+1) \geq a_{n+1} \cdot P_{\vartheta_0}(t = n+1)$;

(2) $P_{\vartheta_1}(t > n) - P_{\vartheta_1}(t = n+1) < a_{n+1}\big(P_{\vartheta_0}(t > n) - P_{\vartheta_0}(t = n+1)\big)$, falls $P_{\vartheta_1}(t > n+1) > 0$.

1.Fall: Ist $P_{\vartheta_1}(t = n+1) = 0$, so folgt aus (1) auch $P_{\vartheta_0}(t = n+1) = 0$ und Beh.2 gilt trivialerweise.

2.Fall: Ist $P_{\vartheta_1}(t = n+1) = P_{\vartheta_1}(t > n)$, dann bekommen wir
$P_{\vartheta_1}(t = n+1) \cdot P_{\vartheta_0}(t > n) \geq P_{\vartheta_1}(t > n) \cdot P_{\vartheta_0}(t = n+1)$.

<u>3.Fall</u>: Ist $0 < P_{\vartheta_1}(t = n+1) < P_{\vartheta_1}(t > n)$, dann liefert (2):

$$\begin{aligned} & P_{\vartheta_1}(t > n+1) \geq a_{n+1} \cdot P_{\vartheta_0}(t > n+1) \\ \Longrightarrow \quad & a_{n+1} > 0 \text{ und } \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{P_{\vartheta_0}(t > n+1)}{P_{\vartheta_1}(t > n+1)}. \end{aligned}$$

Aus (1) erhalten wir $\frac{1}{a_{n+1}} \geq \frac{P_{\vartheta_0}(t=n+1)}{P_{\vartheta_1}(t=n+1)}$, so dass insgesamt gilt

$$\begin{aligned} & \frac{P_{\vartheta_0}(t = n+1)}{P_{\vartheta_1}(t = n+1)} < \frac{P_{\vartheta_0}(t > n+1)}{P_{\vartheta_1}(t > n+1)} \\ \Longrightarrow \quad & P_{\vartheta_0}(t = n+1) \cdot \big(P_{\vartheta_1}(t > n) - P_{\vartheta_1}(t = n+1)\big) < \\ & \big(P_{\vartheta_0}(t > n) - P_{\vartheta_0}(t = n+1)\big) \cdot P_{\vartheta_1}(t = n+1). \end{aligned}$$

Demnach ist Beh.2 bewiesen.

Den Induktionsanfang bekommen wir aus Beh.2 mit n=0:
$P_{\vartheta_1}(t = 1) \cdot P_{\vartheta_0}(t > 0) \geq P_{\vartheta_1}(t > 0) \cdot P_{\vartheta_0}(t = 1)$. Daraus folgt auch die Isotonie von g_1.

Induktionsschritt: Laut Induktionsvoraussetzung gilt $\delta_N \geq 0$.
Wir haben $\delta_{N+1} = \delta_N + \big(P_{\vartheta_1}(t = N+1) - P_{\vartheta_0}(t = N+1)\big)$.

<u>1.Fall</u>: Ist $P_{\vartheta_0}(t > N) = 0$, so gilt trivialerweise $\delta_{N+1} \geq 0$.

<u>2.Fall</u>: Ist $P_{\vartheta_0}(t > N) > 0$, so liefert Beh.2

$$\begin{aligned} & P_{\vartheta_1}(t = N+1) - P_{\vartheta_0}(t = N+1) \\ \geq \quad & P_{\vartheta_0}(t = N+1) \, \frac{P_{\vartheta_1}(t > N) - P_{\vartheta_0}(t > N)}{P_{\vartheta_0}(t > N)} \\ = \quad & -\frac{P_{\vartheta_0}(t = N+1)}{P_{\vartheta_0}(t \geq N+1)} \cdot \delta_N \\ \Longrightarrow \quad & \delta_{N+1} \geq \delta_N \big(1 - \frac{P_{\vartheta_0}(t = N+1)}{P_{\vartheta_0}(t \geq N+1)}\big) \geq 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir Beh.1 gezeigt.

Für die Isotonieaussage ist nur noch anzumerken, dass wegen Beh.2 gilt:

$$\begin{aligned} g_{N+1}(\vartheta_1) - g_{N+1}(\vartheta_0) \quad &= \quad \delta_N + \gamma\big(P_{\vartheta_1}(t = N+1) - P_{\vartheta_0}(t = N+1\big) \\ &= \quad \delta_N \big(1 - \gamma \frac{P_{\vartheta_0}(t = N+1)}{P_{\vartheta_0}(t \geq N+1)}\big) \geq 0. \end{aligned}$$

□

1.6.15 Bemerkung: Isotonie der Gütefunktion des besten Tests bei randomisierten beschränkten Ersteintrittszeiten

Eine zu 1.6.14 entsprechende Aussage über die Isotonie der Gütefunktion bekommen wir für den sequentiellen Test $\varphi^*_{t^N_\gamma(a)}$ aus 1.6.13: Die Gütefunktion hat nämlich die Gestalt:

$$E_\vartheta \varphi^*_{t^N_\gamma(a)} = \gamma P_\vartheta\big(S_{t^{N+}(\tilde{a}_0)} > \tilde{a}_0\big) + (1-\gamma) P_\vartheta\big(S_{t^N(\tilde{a}_0)} \geq \tilde{a}_0\big).$$

Der zweite Summand ist aufgrund des vorherigen Lemmas isoton in ϑ.
Der erste Summand lässt sich mit Hilfe der unbeschränkten Ersteintrittszeit $t^+(a) := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid S_n > a\}$ folgendermaßen umschreiben

$$P_\vartheta\big(S_{t^{N+}(\tilde{a}_0)} > \tilde{a}_0\big) = \sum_{n=1}^{N} P_\vartheta(S_k \leq a \forall k < n, S_n > a) = P_\vartheta(t^+(a) \leq N).$$

Die Isotonie von $\vartheta \mapsto P_\vartheta(t^+(a) \leq N)$ bekommen wir dann völlig analog zum Beweis von Lemma 1.6.14.
Insgesamt erhalten wir, dass die sequentiellen Tests aus 1.6.8 und 1.6.13 im Falle einparametriger Exponentialfamilien das Niveau α auf ganz $H_0 : \zeta \leq \zeta_0$ einhalten und somit gleichmäßig optimal für $H_0 : \zeta \leq \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$ sind.

1.7 Gleichmäßig beste Tests bei fester beschränkter zweiseitiger Stoppzeit

Wir wollen jetzt der Frage nachgehen, ob die Ergebnisse über gleichmäßig beste Tests unter einseitigen, beschränkten Ersteintrittszeiten $t^N(a)$ auch auf die Existenz gleichmäßig bester Tests unter *zwei*seitigen, beschränkten Ersteintrittszeiten $t^N(c_1, c_2)$ sich übertragen lassen? Es liegt die Vermutung nahe, dass durch die zusätzliche untere Schranke beim Stoppen, weitere Einschränkungen an die Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ gemacht werden müssen, um noch Aussagen über gleichmäßige Optimalität zu erhalten. Für die Klasse der Normalverteilungen und der Gammaverteilungen wurde in 1.5.12 gezeigt, dass gleichmäßig beste sequentielle Tests unter zweiseitigen beschränkten Ersteintrittszeiten nicht existieren. Bei Gammaverteilung ist es immerhin möglich, eine gleichmäßige Optimalitätsaussage unter $t^N(c_1, c_2)$ zu erhalten, wenn das Fortsetzungsintervall (c_1, c_2) nur groß genug gewählt wird. Dass dies bei Gammaverteilungen überhaupt möglich ist und bei Normalverteilungen aber nicht, liegt an der Größe d_0. Sie gibt die Abweichung des Erwartungswertes der Prüfgröße T unter dem „größtmöglichem Parameter“ ζ_1 aus H_1 vom Erwartungswert der Prüfgröße unter der Nullhypothese $\overline{H}_0 = \{\zeta_0\}$ an (vgl. 1.5.2 c)). Bei der Klasse der Normalverteilungen ist $d_0 = \infty$, und somit kann es unter zweiseitigen Stoppzeiten keine gleichmäßig optimale Lösung geben für $\overline{H}_0$ gegen ganz $H_1 = (\zeta_0, \infty)$. Schränken wir H_1 ein auf z.B. $\hat{H}_1 = (\zeta_0, \hat{\zeta})$ mit $\hat{\zeta} < \infty$, so erhalten wir als maximale Abweichung des Erwartungswertes der Prüfgröße T die Größe $\hat{d}_0 = d_0(\hat{\zeta})$, welche endlich ist. Damit wären selbst für normalverteilte Hypothesen immerhin *lokal* gleichmäßig beste Tests unter zweiseitigen, beschränkten Ersteintrittszeiten denkbar.

Unser Ziel wird es daher sein, hinreichende Bedingungen für lokal gleichmäßige Optimalität unter zweiseitigen, beschränkten Ersteintrittszeiten zu formulieren, wobei wir uns am Vorbild der Untersuchungen der einseitigen, beschränkten Ersteintrittszeiten orientieren. Die gleichmäßige Optimalitätsaussage ergibt sich dann als Spezialfall, nämlich für $\hat{\zeta} = \bar{\zeta}$, wobei $\bar{\zeta}$ das Supremum des natürlichen Parameterraums $\mathcal{Z}$ bezeichne (vgl. 1.3.1).

Wir formulieren zunächst eine hinreichende Bedingung für lokal gleichmäßige Optimalität für *einparametrige Exponentialfamilien*:

1.7.1 Satz: Hinreichende Bedingungen für lokal gleichmäßige Optimalität bei beschränkten, zweiseitigen Stoppzeiten

Es sei $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Exponentialfamilie in natürlicher Parametrisierung (vgl. 1.3.1). Zu $\zeta_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{Z}}$, $\hat{\zeta} \in \overline{\mathcal{Z}}$, $\zeta_0 < \hat{\zeta}$ und $\alpha \in (0,1)$ sollen folgende Hypothesen getestet werden:

$$\overline{H}_0 : \zeta = \zeta_0, \ \hat{H}_1 : \zeta \in (\zeta_0, \hat{\zeta}).$$

Es bezeichne $\hat{d}_0 := d_0(\hat{\zeta})$ (wobei $d_0(\bar{\zeta}) := d_0$). Ferner seien $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $d_1, d_2 \in \{0, \hat{d}_0\}$ mit $d_1 + d_2 > 0$.
Zu $\tilde{a}_0 \in \mathbb{R}$ sei $t : \Omega \to \{1, \ldots, N\}$ eine beschränkte Stoppzeit, für die gelte:

$$\forall n < N : \ \{t = n\} \subset \{S_n \notin [\tilde{a}_0 - (N-n)d_1, \tilde{a}_0 + (N-n)d_2]\} \ P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_n}\text{-f.s.} \quad (1.7.1)$$

Es sei $\underset{\sim}{\varphi}^*$ ein TV mit

1) $E_{\zeta_0} \varphi_t^* = \alpha$,

2)

$$\varphi_t^* = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad S_t \ \begin{matrix} > \tilde{a}_0 + (N-t)d_2 \\ < \tilde{a}_0 - (N-t)d_1 \end{matrix} \end{cases} \quad P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_t} - \text{f.s..}$$

Dann ist φ_t^* gleichmäßig optimal für $\overline{H}_0 : \zeta = \zeta_0$ gegen $\hat{H}_1 : \zeta \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$, d.h. eine Lösung der Aufgabe

$$\begin{cases} E_\zeta \varphi_t \overset{!}{=} sup & \forall \zeta \in (\zeta_0, \hat{\zeta}) \\ E_{\zeta_0} \varphi_t \leq \alpha & \end{cases} .$$

Beweis:

a) Es sei $\zeta_1 \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$. Dann gilt gemäß 1.3.2.1 $d_0(\zeta_1) < \hat{d}_0$.
Da $E_{\zeta_0} \varphi_t^* = \alpha$, müssen wir nach dem N-P-Lemma 1.4.1 noch ein $a(\zeta_1) \geq 0$ finden, so dass $\forall n \leq N$ auf $\{t = n\}$ $P_{\zeta_0 | \mathcal{C}_n}$-f.s. gilt

$$\varphi_n^* = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad \frac{M_n^1}{M_n^0} = H_{\zeta_0, \zeta_1}^n(S_n) \ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} a(\zeta_1) ,$$

wobei hier

$$\begin{aligned} H_{\zeta_0,\zeta_1}^n(s) &= e^{(\zeta_1 - \zeta_0)s} \cdot e^{-n(\zeta_1 - \zeta_0) d_0(\zeta_1)} \\ &= e^{(\zeta_1 - \zeta_0)\left(s - n d_0(\zeta_1)\right)} \text{(vgl. 1.3.1.2).} \end{aligned}$$

Wie bei den einseitigen Stoppzeiten (vgl. 1.6.6) wählen wir $a(\vartheta_1) := H_{\zeta_0,\zeta_1}^N(\tilde{a}_0)$.
Dann folgt:

1) Auf $\{t = N\}$ $P_{\zeta_0|\mathcal{C}_N}$-f.s aufgrund der Isotonie von $H^N_{\vartheta_0,\vartheta_1}$

$$\frac{M^1_N}{M^0_N} = H^N_{\zeta_0,\zeta_1}(S_N) \underset{<}{>} a(\vartheta_1) \Rightarrow S_N \underset{<}{>} \tilde{a}_0 \Rightarrow \varphi^*_N = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}.$$

2) Sei nun $n < N$. Dann gilt $P_{\zeta_0|\mathcal{C}_n}$-f.s auf $\{S_n \notin [\tilde{a}_0 - (N-n)d_1, \tilde{a}_0 + (N-n)d_2]\}$:

2.1) Ist $S_n > \tilde{a}_0 + (N-n)d_2 \Rightarrow \varphi^*_n = 1$ und aufgrund der Isotonie von $s \mapsto H^n_{\zeta_0,\zeta_1}(s)$ und der Antitonie von $n \mapsto H^n_{\zeta_0,\zeta_1}(s)$ gilt:

$$\frac{M^1_n}{M^0_n} = H^n_{\zeta_0,\zeta_1}(S_n) > H^n_{\zeta_0,\zeta_1}(\tilde{a}_0) > H^N_{\zeta_0,\zeta_1}(\tilde{a}_0) = a(\zeta_1).$$

Damit kann $\frac{M^1_n}{M^0_n} < a(\zeta_1)$ auf $\{t = n\} \cap \{S_n > \tilde{a}_0 + (N-n)d_2\}$ nicht mit positiver Wahrscheinlichkeit auftreten, der Test φ^*_t hat also in dieser Situation die geforderte 1-0-Gestalt.

2.2) Ist $S_n < \tilde{a}_0 - (N-n)d_1 \Rightarrow \varphi^*_n = 0$ und $\frac{M^1_n}{M^0_n} > a(\zeta_1)$ kann auf $\{t = n\} \cap \{S_n < \tilde{a}_0 - (N-n)d_1\}$ nicht mit positiver Wahrscheinlichkeit auftreten, da:

$$\begin{aligned} \frac{M^1_n}{M^0_n} &< H^n_{\zeta_0,\zeta_1}(\tilde{a}_0 - (N-n)d_1) \\ &= e^{(\zeta_1-\zeta_0)(\tilde{a}_0-(N-n)d_1-nd_0(\zeta_1))} \\ &< H^N_{\zeta_0,\zeta_1}(\tilde{a}_0), \ \textit{denn} \end{aligned}$$

<u>1.Fall</u>: Ist $d_1 = 0$, dann folgt die Ungleichung aus der Antitonie von $n \mapsto H^n_{\zeta_0,\zeta_1}(s)$.

<u>2.Fall</u>: Ist $d_1 = \hat{d}_0$, dann gilt $d_1 - d_0(\zeta_1) > 0$ und daher

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 - Nd_0(\zeta_1) - (N-n)(d_1 - d_0(\zeta_1)) &= \tilde{a}_0 - N\hat{d}_0 + n(\hat{d}_0 - d_0(\zeta_1)) \\ &< \tilde{a}_0 - N\hat{d}_0 + N(\hat{d}_0 - d_0(\zeta_1)) \\ &= \tilde{a}_0 - N\hat{d}_0. \end{aligned}$$

□

1.7.2 Bemerkung

a) Satz 1.7.1 liefert für einparametrige Exponentialfamilien mit $d_0 = \infty$ eine Verallgemeinerung von Satz 1.6.6: so z.B. für die Klasse der Normalverteilungen und für die der Poissonverteilungen.

b) Im Gegensatz zu Satz 1.6.6 reicht es hier im allgemeinen nicht mehr aus, für die Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ sequentiell-antitonen isotonen Dichtequotienten zu fordern, wir benötigen die volle Struktur der einparametrigen Exponentialfamilien. Die untere Grenze des Fortsetzungsintervalls der Stoppzeit t mit $d_1 = \hat{d}_0 < \infty$ bereitet nämlich Schwierigkeiten:
Hier genügt die Antitoniebedingung an $n \mapsto H^n_{\zeta_0,\zeta_1}(s)$ nicht, um die notwendige 1-0 Gestalt des Tests zu erhalten, wenn aufgrund der Bedingung $S_n < \tilde{a}_0 - (N-n)\hat{d}_0$ für $n < N$ gestoppt wird.
Ein Beispiel für eine Verteilungsklasse mit sequentiell-antitonen isotonen Dichtequotienten, für die es unter zweiseitigen beschränkten Ersteintrittszeiten keine lokal gleichmäßig besten Tests gibt, liefert $\mathcal{Q} = \{\mathcal{R}(0,\vartheta) \mid \vartheta > 0\}$ (vgl. 1.6.5). Z.B. gibt es für $N = 2$ und $\alpha \in (0,1)$ für alle $c_1 < c_2$ aus $(0,2)$ keine gleichmäßig besten Tests für $\overline{H} : \vartheta = 1$ gegen $\hat{H} : \vartheta \in (1, 1 + \triangle)$ mit $\triangle > 0$ z.N. α unter $t(c_1,c_2)^N = \inf\{n \leq N \mid \max(X_1,\dots,X_n) \in (c_1,c_2)\}$.

c) Für den Fall, dass die Größe d_0 der Exponentialfamilie $\mathcal{Q}$ *endlich* ist, liefert der Satz 1.7.1 eine hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Optimalität von $\overline{H}_0 : \zeta = \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$ unter zweiseitigen beschränkten Ersteintrittszeiten; man wähle $\hat{\zeta} = \bar{\zeta}$. So bekommen wir diese Aussage z.B. für die Klasse der Binomialverteilungen, der negativen Binomialverteilungen und der Gammaverteilungen.
□

Als nächstes wollen wir mit Hilfe von Satz 1.7.1 für jedes vorgegebene α-Niveau einen lokal gleichmäßig besten Test konstruktiv angeben. Dazu müssen wir uns noch überlegen, wie sich das α-Niveau ausschöpfen lässt. Hierfür verallgemeinern wir das Lemma 1.6.2 für zweiseitige, beschränkte Ersteintrittszeiten.

1.7.3 Lemma: Ausschöpfen von α

Es sei $\mathcal{Q}$ eine beliebige einparametrige Verteilungsklasse. Weiter seien $N \in \mathbb{N}$ und $S_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ beliebige messbare Abbildungen $(n \leq N)$.
Zu $a \in \mathbb{R}$, b_n, $c_n \geq 0\,(n \leq N)$ mit $b_n + c_n > 0$ für ein $n < N$ betrachten wir

die zweiseitige beschränkte Stoppzeit

$$t_a = t^N_{a,b,c} := \inf\{n \leq N \mid S_n \notin (a - b_n, a + c_n)\},$$

und zu $\alpha \in (0,1)$ *sei*

$$\tilde{a}_0 = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid P_{\vartheta_0}(\bar{S}_{t_a} > a) \leq \alpha\} \text{ mit} \tag{1.7.2}$$

$$\bar{S}_n := S_n - c_n. \tag{1.7.3}$$

Dann gilt

$$P_{\vartheta_0}(\bar{S}_{t_{\tilde{a}_0}} > \tilde{a}_0) \leq \alpha.$$

Haben wir zusätzlich $P_{\vartheta_0}(S_n = \tilde{a}_0 - b_n) = 0 \;\; \forall n < N$, *so gilt*

$$P_{\vartheta_0}(\bar{S}_{t_{\tilde{a}_0}} \geq \tilde{a}_0) \geq \alpha.$$

Beweis:

1) Da $(\tilde{a}_0, b) = \cup_{a > \tilde{a}_0}(a, b)$ für $b > \tilde{a}_0$, gilt aufgrund der Stetigkeit des W-Maßes P_{ϑ_0} und der Definition von $\tilde{a}_0$:

$$\begin{aligned}
& P_{\vartheta_0}(\bar{S}_{t(\tilde{a}_0)} > \tilde{a}_0) = \sum_{n=1}^{N} P_{\vartheta_0}(S_k \in (\tilde{a}_0 - b_k, \tilde{a}_0 + c_k)\; \forall k < n,\; S_n > \tilde{a}_0 + c_n) \\
= \quad & \lim_{a \downarrow \tilde{a}_0} \sum_{n=1}^{N} P_{\vartheta_0}(S_k \in (a - b_k, \tilde{a}_0 + c_k)\; \forall k < n,\; S_n > a + c_n) \\
\leq \quad & \lim_{a \downarrow \tilde{a}_0} \sum_{n=1}^{N} P_{\vartheta_0}(S_k \in (a - b_k, a + c_k)\; \forall k < n,\; S_n \notin (a - b_n, a + c_n),\; \bar{S}_n > a) \\
& \quad \big(\text{weil } \{S_k < \tilde{a}_0 + c_k\} \subset \{S_k < a + c_k\} \;\text{ für }\; a > \tilde{a}_0\big) \\
= \quad & \lim_{a \downarrow \tilde{a}_0} P_{\vartheta_0}(\bar{S}_{t_a} > a) \leq \alpha.
\end{aligned}$$

2) Jetzt gelte zusätzlich $P_{\vartheta_0}(S_k = \tilde{a}_0 - b_k) = 0 \; \forall k < N \quad (*)$.
Da $[\tilde{a}_0, b) = \cap_{a < \tilde{a}_0}(a, b)$ für $b > \tilde{a}_0$, gilt aufgrund der Stetigkeit des W-Maßes P_{ϑ_0}

und der Definition von $\tilde{a}_0$:

$$\begin{aligned}
& P_{\vartheta_0}(\bar{S}_{t_{\tilde{a}_0}} \geq \tilde{a}_0) = \sum_{n=1}^{N} P_{\vartheta_0}(S_k \in (\tilde{a}_0 - b_k, \tilde{a}_0 + c_k)\ \forall k < n,\ S_n \geq \tilde{a}_0 + c_n) \\
\overset{(*)}{=} \quad & \sum_{n=1}^{N} P_{\vartheta_0}(S_k \in [\tilde{a}_0 - b_k, \tilde{a}_0 + c_k)\ \forall k < n,\ S_n \geq \tilde{a}_0 + c_n) \\
= \quad & \lim_{a \uparrow \tilde{a}_0} \sum_{n=1}^{N} P_{\vartheta_0}(S_k \in (a - b_k, \tilde{a}_0 + c_k)\ \forall k < n,\ S_n > a + c_n) \\
\geq \quad & \lim_{a \uparrow \tilde{a}_0} \sum_{n=1}^{N} P_{\vartheta_0}(S_k \in (a - b_k, a + c_k)\ \forall k < n,\ S_n \notin (a - b_n, a + c_n)\ , \bar{S}_n > a) \\
& \quad \big(\text{weil } \{S_k < \tilde{a}_0 + c_k\} \supset \{S_k < a + c_k\} \text{ für } a < \tilde{a}_0\big) \\
= \quad & \lim_{a \uparrow \tilde{a}_0} P_{\vartheta_0}(\bar{S}_{t_a} > a) \geq \alpha.
\end{aligned}$$

□

Damit erhalten wir:

1.7.4 Korollar: Gleichmäßig beste sequentielle Tests unter zweiseitigen beschränkten Ersteintrittszeiten

Es sei $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Exponentialfamilie in natürlicher Parametrisierung. Zu $\zeta_0 \in \mathring{\mathcal{Z}}$, $\hat{\zeta} \in \overline{\mathcal{Z}}$, $\zeta_0 < \hat{\zeta}$ und $\alpha \in (0,1)$ sollen folgende Hypothesen getestet werden:

$$\overline{H}_0 : \zeta = \zeta_0,\ \hat{H}_1 : \zeta \in (\zeta_0, \hat{\zeta}).$$

Wie in Satz 1.7.1 bezeichne $\hat{d}_0 := d_0(\zeta_1)$, und es seien $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sowie $d_1, d_2 \in \{0, \hat{d}_0\}$ mit $d_1 + d_2 > 0$.
Es bezeichnen $\bar{S}_n := S_n - (N-n)d_2$, mit $S_n = \sum_{i=1}^{N}(T(X_i) - b'(\zeta_0))$ und

$$t_{a,d} := t^N_{a,d_1,d_2} := \inf\{n \leq N \mid S_n \notin (a - (N-n)d_1, a + (N-n)d_2)\}.$$

Weiter sei

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_0 &:= \inf\{a \in \mathbb{R} \mid P_{\zeta_0}(\bar{S}_{t_{a,d}} > a) \leq \alpha\} \\
\textit{mit } P_{\zeta_0}(S_n &= \tilde{a}_0 - (N-n)d_1) = 0\ \forall n < N, \qquad (1.7.4) \\
P_{\zeta_0}(S_n &= \tilde{a}_0 + (N-n)d_2) = 0\ \forall n < N. \qquad (1.7.5)
\end{aligned}$$

Schließlich bezeichne $t := t_{\tilde{a}_0,d}$.

a) Dann liefert das TV

$$\varphi_n^* = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad S_n \begin{array}{l} > \tilde{a}_0 + (N-n)d_2 \\ < \tilde{a}_0 - (N-n)d_1 \end{array} \quad (n < N),$$

$$\varphi_N^* = \begin{cases} 1 & & > \\ \gamma & \text{für} \quad S_N & = & \tilde{a}_0 \\ 0 & & < \end{cases}$$

mit $\gamma \in [0,1]$ derart, dass $E_{\zeta_0}\varphi_t^* = \alpha$,
eine gleichmäßig optimale Lösung für $\overline{H_0}$ gegen $\hat{H}_1$ unter t.

b) Es gibt ein TV $\underset{\sim}{\varphi}^*$ mit der Gestalt aus a) und $E_{\vartheta_0}\varphi_t^* = \alpha$.

Beweis:

Da die Ersteintrittszeit $t = t_{\tilde{a}_0,d}$ offenkundig die Bedingung 1.7.1 erfüllt, bleibt noch anzumerken: es gibt ein $\gamma \in [0,1]$ derart, dass für das TV $\underset{\sim}{\varphi}^*$ mit der Gestalt aus a) gilt $E_{\vartheta_0}\varphi_t^* = \alpha$. Aufgrund der Festlegung von $\tilde{a}_0$ bekommen wir mit Hilfe des Lemmas 1.7.3 und mit der Bedingung 1.7.4:

$$P_{\zeta_0}(\bar{S}_t > \tilde{a}_0) \leq \alpha \text{ und } P_{\zeta_0}(\bar{S}_t \geq \tilde{a}_0) \geq \alpha.$$

Wegen der Bedingungen 1.7.5 gilt:

$$P_{\zeta_0}(\bar{S}_t \geq \tilde{a}_0) = P_{\zeta_0}(\bar{S}_t > \tilde{a}_0) + P_{\zeta_0}(\bar{S}_t = \tilde{a}_0, t = N),$$

so dass wir wie im Beweis von 1.6.8 mit einem $\gamma \in [0,1]$ das Niveau α ausschöpfen können. □

1.7.5 Bemerkung

a) Für den Spezialfall $\hat{\zeta} = \bar{\zeta}$ liefert $\varphi_{t_{\tilde{a}_0,d}}^*$ einen gleichmäßig besten Test für $\overline{H}_0$: $\zeta = \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$, d.h. eine Lösung von (1.5.1).

b) Ist $d_0 = \infty$, so gilt für den Spezialfall $\hat{\zeta} = \bar{\zeta}$ und $d_1 = \hat{d}_0$, $d_2 = 0$

$$\begin{aligned} t_{\tilde{a}_0,d_1,d_2}^N &:= \inf\{n \leq N \mid S_n \notin (\tilde{a}_0 - (N-n)\hat{d}_0, \tilde{a}_0\} \\ &= t^N(\tilde{a}_0). \end{aligned}$$

Damit liefert Korollar 1.7.4 für einparametrige Exponentialfamilien eine Verallgemeinerung von Korollar 1.6.8.

1.7.6 Beispiele

Es liege die Situation aus Korollar 1.7.4 vor.

a) Die Verteilungen der einparametrigen Exponentialsfamilie $\mathcal{Q}$ haben stetige Verteilungsfunktionen. Aufgrund des iid-Modells sind dann auch die Verteilungsfunktionen von $P_\zeta^{S_n}$ $(\zeta \in \mathcal{Z})$ stetig. Damit liefert für $d_1 = \hat{d}_0$, $d_2 \in \{0, \hat{d}_0\}$, $N \in \mathbb{N}$ der sequentielle Test $\varphi^*_{t^N_{\tilde{a}_0,d_1,d_2}}$ aus Korollar 1.7.4 einen lokal gleichmäßig besten Test für $\overline{H}_0 : \zeta = \zeta_0$ gegen $\hat{H}_1 : \zeta \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$.
Insbesondere erhalten wir damit Lösungen in folgenden Situationen:

   i) $\mathcal{Q} = \{\Gamma(\vartheta, \mu) \mid \vartheta \in (0, \infty)\}$, $\mu \in (0, \infty)$.
   Dann gilt für $\hat{\zeta} = \bar{\zeta} = \infty$: $\hat{d}_0 = d_0 = \frac{\mu}{\zeta_0} < \infty$.
   Der sequentielle Test $\varphi^*_{t^N_{\tilde{a}_0,d_1,d_2}}$ liefert einen zweiseitigen, beschränkten SPRT, der gleichmäßig optimal für $\overline{H}_0 : \zeta = \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$ ist.

   ii) $\mathcal{Q} = \{\mathcal{N}(\vartheta, \sigma^2) \mid \vartheta \in \mathbb{R}\}$, $\sigma^2 \in (0, \infty)$.
   Dann liefert für jedes $\hat{\zeta} \in (\zeta_0, \infty)$ der sequentielle Test $\varphi^*_{t^N_{\tilde{a}_0,d_1,d_2}}$ einen zweiseitigen, beschränkten SPRT, der *lokal* gleichmäßig optimal für $\overline{H}_0$ gegen $\hat{H}_1$ ist.

b) Die zweiseitigen CIP's, unsere ersten Beispiele für gleichmäßig optimale Tests, besitzen die Struktur der sequentiellen Tests aus Korollar 1.7.4 mit $d_1 = d_2 = \hat{d}_0$, und fügen sich somit auch in 1.7.4 ein.

Schließlich können wir nach dem Vorbild für gleichmäßig beste Tests für beschränkte *einseitige* Ersteintrittszeiten zeigen, dass die sequentiellen Tests aus 1.7.4 sogar gleichmäßig optimal für $H_0 : \zeta \le \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$ sind, indem wir zeigen, dass die Gütefunktion $\zeta \mapsto P_\zeta(t^N_{a,d} < N) + \gamma P_\zeta(T^N_{a,d} = N)$ isoton ist.
Aufgrund des zweiseitigen Stoppgebietes wird für die Isotonieaussage nicht wie in 1.6.14 die Bedingung genügen, dass die Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ streng isotonen Dichtequotienten in einer Folge $\underset{\sim}{S} = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Prüfgrößen habe.
Wir brauchen eine stärkere Isotonieforderung, welche bei einparametrigen Exponentialfamilien $\mathcal{Q}$ im iid-Modell gegeben ist:

1.7.7 Hilfsaussage: Verteilungsgleiche Ersetzung

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen, deren Randverteilungen $P_\zeta^{X_1}$ eine einparametrige Exponentialfamilie mit μ-Dichten der Gestalt

$$f_\zeta = e^{\zeta T - b(\zeta)} \cdot h, \quad \zeta \in \mathcal{Z}$$

bildet.

Zu $\zeta < \zeta'$ aus $\mathcal{Z}$ gibt es auf einem gegeigneten W-Raum $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{S}}, \hat{P})$ zwei Folgen von stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Zufallsgrößen $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\hat{P}^{Y_1} = P_\zeta^{T(X_1)} \text{ und } \hat{P}^{Z_1} = P_{\zeta'}^{T(X_1)}, \tag{1.7.6}$$

so dass gilt:

$$Y_n \leq Z_n \quad \hat{P}\text{-f.s. } \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.7.7}$$

Begründung:

Es seien $\zeta < \zeta'$ und $F_\zeta^{T(X_1)}$ die Verteilungsfuntion von $P_\zeta^{T(X_1)}$.

Da $\{P_\zeta^{X_1} \mid \zeta \in \mathcal{Z}\}$ eine einparametrige Exponentialfamilie mit isotonem Dichtequotienten in T bildet, folgt aus Satz 1.3.2.1d) angewandt auf $\psi = 1_{(x,\infty)}$ $(x \in \mathbb{R})$, dass gilt:

$$F_\zeta^{T(X_1)} \geq F_{\zeta'}^{T(X_1)}.$$

Es seien

$$\hat{\Omega} = (0,1)^{\mathbb{N}}, \;\; \hat{\mathcal{S}} = (\mathbb{B}_{|(0,1)})^{\mathbb{N}}, \;\; \hat{P} = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}(0,1)$$

sowie $U_n : \hat{\Omega} \to (0,1)$ die Projektion auf die n-te Komponente, dann liefern die Zufallsgrößen

$$Y_n := \big(F_\zeta^{T(X_1)}\big)^{-1} \circ U_n \quad \text{und } Z_n := \big(F_{\zeta'}^{T(X_1)}\big)^{-1} \circ U_n \; (n \in \mathbb{N})$$

das Gewünschte. □

Mit diesem Hilfsmittel der verteilungsgleichen Ersetzung folgt die Isotonie der Gütefunktion sequentieller Tests der Gestalt

$$E_\zeta \varphi_t^* = \sum_{n=1}^{N} P_\zeta\big(S_k \in (a_k, b_k) \; \forall k < n, \; S_n > b_n\big).$$

Begründung:

Es seien $\zeta < \zeta'$. Dazu seien $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen von Zufallsgrößen wie in 1.7.7. Ferner seien $V_n := \sum_{k=1}^n Y_k$ und $W_n := \sum_{k=1}^n Z_k$ und

$$\begin{aligned} A &:= \cup_{n=1}^N \{V_k \in (a_k, b_k)\ \forall k < n,\ V_n \geq b_n\}, \\ A' &:= \cup_{n=1}^N \{W_n \in (a_n, b_n)\ \forall k < n,\ W_n \geq b_n\}. \end{aligned}$$

Dann gilt $A \subset A'$ $\hat{P}$-f.s. und somit $E_\zeta \varphi_t^* \leq E_{\zeta'} \varphi_t^*$.
Die Inklusion der Mengen sieht man folgendermaßen:
Zunächst gibt es für $\hat{P}$-fast alle $\omega \in A$ jeweils ein $n \leq N$ mit

$$V_k(\omega) \in (a_k, b_k)\ \forall k < n,\ V_n(\omega) \geq b_n.$$

Wegen $V_k \leq W_k$ $\hat{P}$-f.s. folgt daraus

$$W_k(\omega) > a_k\ \forall k < n,\ W_n(\omega) \geq b_n.$$

Jetzt sei n_0 das kleinste $k \leq n$ mit $W_k(\omega) \geq b_k$.
Dann gilt $a_k < W_k(\omega) < b_k\ \forall k < n_0$ und $W_{n_0}(\omega) \geq b_{n_0}$.
Daraus folgt schließlich $\omega \in A'$. $\square$

c) Lokal beste Tests bei fester Stoppzeit

1.8 Lokal beste Tests

In diesem Abschnitt wollen wir die Probleme (1.2.3), (1.2.4) untersuchen, auch wieder im Hinblick auf die Frage, für welche Typen von Verteilungsklassen und Stoppzeiten wir Lösungen werden angeben können, und wie die Struktur dieser Lösungen aussieht? In den Sätzen 1.6.6 bzw. 1.7.1 hatten wir bereits für beschränkte, einseitige bzw. zweiseitige Stoppzeiten bei einparametrigen Exponentialfamilien für das Problem (1.2.3) hinreichende Bedingungen für die Existenz lokal gleichmäßig bester Tests formuliert. Im wesentlichen soll damit die Untersuchung dieses Problems abgeschlossen sein. Wir werden noch eine Ergänzung anführen für beliebige beschränkte Stoppzeiten, die nichtrandomisiert sind, und zwar für den Fall, dass die Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ endlichen Stichprobenraum $\mathcal{X}$ besitzt.

Unser Hauptinteresse gilt dem Problem (1.2.4), der Untersuchung lokal bester α-ähnlicher Tests. In 1.2.4 hatten wir bereits angemerkt, dass die einparametrige Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ gewissen Differentationsanforderungen genügen muss, damit die Gütefunktion eines sequentiellen Tests φ_t differenzierbar wird und somit das Problem (1.2.4) überhaupt formuliert werden kann. Wir beginnen mit einem Differentationsbegriff, der aus der klassischen Statistik wohlbekannt ist.

1.8.1 Definition: $\mathbb{L}_1(\vartheta_0)$-differenzierbar (vgl. Witting [Wi], S.164)

Es seien $\mathcal{Q} = \{Q_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ eine einparametrige Verteilungsklasse, $\vartheta_0 \in \mathring{\Theta}$ und $l_{\vartheta,\vartheta_0}$ der verallgemeinerte Dichtequotient von Q_ϑ nach Q_{ϑ_0},
d.h. $l_{\vartheta,\vartheta_0}$ ist eine messbare numerische Funktion von $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ nach $([0,\infty], \overline{\mathbb{B}}_{|[0,\infty]})$ mit

$$Q_\vartheta(B) = \int_B l_{\vartheta,\vartheta_0} dQ_{\vartheta_0} \; + Q_\vartheta(B \cap \{l_{\vartheta,\vartheta_0} = \infty\}) \;\; \forall B \in \mathcal{B}$$

und $Q_{\vartheta_0}(l_{\vartheta,\vartheta_0} < \infty) = 1$.

Die Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ heisst $\mathbb{L}_1(\vartheta_0)$**-differenzierbar** mit Ableitung $\overset{\bullet}{f}_{\vartheta_0}$, falls gilt:

1) Die messbare Abbildung $\overset{\bullet}{f}_{\vartheta_0}\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ ist integrierbar bzgl. Q_{ϑ_0}.

2) Es gibt eine Umgebung $U_{\vartheta_0} \subset \Theta$ von ϑ_0 und eine Funktion

$$r : U_{\vartheta_0} \to \mathbb{R} \text{ mit } \lim_{\vartheta \to \vartheta_0} \frac{r(\vartheta)}{|\vartheta - \vartheta_0|} = 0, \text{ so dass gilt:}$$

$$\int |(l_{\vartheta,\vartheta_0} - 1) - (\vartheta - \vartheta_0)\, \overset{\bullet}{f}_{\vartheta_0} \,|\, dQ_{\vartheta_0} = r(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in U_{\vartheta_0}.$$

Die $\mathbb{L}_1(\vartheta_0)$-Differenzierbarkeit der Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ bedeutet, dass der Dichtequotient $\vartheta \mapsto l_{\vartheta,\vartheta_0}$ differenzierbar ist in der $||.||_1$-Norm von $\mathbb{L}_1(\vartheta_0)$.

Aus dieser Definition erhalten wir zunächst, dass zu jedem festem Stichprobenumfang $n \in \mathbb{N}$ die Gütefunktion klassischer Tests differenzierbar ist.

1.8.2 Satz (vgl. Witting [Wi], Satz 1.179, S.164, Satz 1.182, S.168)

Es sei $\mathcal{Q}$ eine $\mathbb{L}_1(\vartheta_0)$-differenzierbare Verteilungsklasse mit Ableitung $\overset{\bullet}{f}_{\vartheta_0}$.
Dann gilt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jede messbare und *beschränkte* Funktion $h : \mathcal{X}^n \to \mathbb{R}$ ist die Abbildung $\vartheta \mapsto E_\vartheta\, h(X_1, \ldots, X_n)$ differenzierbar in ϑ_0 mit Ableitung:

$$\frac{d}{d\vartheta}\Big(\int_\Omega h(X_1, \ldots, X_n) dP_\vartheta\Big)_{|\vartheta = \vartheta_0} = \int_\Omega h(X_1, \ldots, X_n) \sum_{i=1}^n \overset{\bullet}{f}_{\vartheta_0}(X_i) dP_{\vartheta_0}.$$

Insb. gilt also: Für festen Stichprobenumfang $n \in \mathbb{N}$ ist die Gütefunktion $\vartheta \mapsto E_\vartheta\, \psi_n(X_1, \ldots, X_n)$ eines jeden Tests $\psi_n : \mathcal{X}^n \mapsto [0, 1]$ in ϑ_0 differenzierbar.

Beweis:

Es bleibt nur anzumerken, dass wegen des zugrundeliegenden iid-Modells die Zufallsgrößen $X_1, \ldots, X_n$ unter P_{ϑ_0} unabhängig und identisch verteilt sind. $\square$

Bekanntlich lässt sich die Ableitung $\overset{\bullet}{f}_{\vartheta_0}$ besonders leicht bestimmen, wenn Differentation und Integration für die Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ vertauschbar sind.

1.8.3 Bemerkung (vgl. Witting [Wi], Satz 1.183, S.170)

Es sei $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Verteilungsklasse, die durch ein σ-endliches Maß μ dominiert wird mit μ-Dichten $f_\vartheta > 0$, die in ϑ_0 differenzierbar sind und für die Differentation und Integration vertauschbar sind.
Dann ist $\mathcal{Q}$ eine $\mathbb{L}_1(\vartheta_0)$-differenzierbare Verteilungsklasse mit der Ableitung:

$$\overset{\bullet}{f}_{\vartheta_0}(x) = \nabla \log f_{\vartheta_0}(x) = \frac{\nabla f_{\vartheta_0}(x)}{f_{\vartheta_0}(x)} \quad \text{für } Q_{\vartheta_0}\text{-fast alle } x \in \mathcal{X} \tag{1.8.1}$$

Für Näheres zu den Regularitätsbedingungen an die μ-Dichten f_ϑ verweisen wir auf Witting I Satz 1.183.

Hiermit bekommen wir folgende ersten Beispiele an die Hand:

1.8.4 Beispiele (vgl. Witting [Wi], S.171, S.181)

a) Es sei $\mathcal{Q} = \{Q_\zeta \mid \zeta \in \mathcal{Z}\}$ eine einparametrige Exponentialfamilie in natürlicher Parametrisierung mit μ-Dichten der Form

$$f_\zeta = e^{\zeta T - b(\zeta)} \cdot h,$$

wobei $h(x) > 0 \; \forall x \in \mathcal{X}$.
Dann ist $\mathcal{Q}$ für jedes $\zeta_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{Z}}$ eine $\mathbb{L}_1(\vartheta_0)$-differenzierbare Verteilungsklasse mit der Ableitung

$$\overset{\bullet}{f}_{\vartheta_0} = \nabla \log f_{\zeta_0} = T - b'(\zeta_0). \tag{1.8.2}$$

b) *Lokationsmodell*:
Es sei Q eine Klasse von W-Verteilungen über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit $\lambda\!\!\lambda^1$-Dichte f, für die gelte: $f > 0$ und stetig differenzierbar mit Ableitung f' sowie $\int |f'| d\lambda\!\!\lambda^1 < \infty$.
Es bezeichne dann $\mathcal{Q} = \{Q_\vartheta \mid \vartheta \in \mathbb{R}\}$ die Verteilungsklasse mit den $\lambda\!\!\lambda^1$-Dichten $f_\vartheta(x) := f(x - \vartheta)$, $x \in \mathbb{R}$.
Dann ist $\mathcal{Q}$ für jedes $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ eine $\mathbb{L}_1(\vartheta_0)$-differenzierbare Verteilungsklasse mit der Ableitung

$$\overset{\bullet}{f}_{\vartheta_0}(x) = \nabla \log f_{\vartheta_0}(x) = -\frac{f'(x - \vartheta_0)}{f(x - \vartheta_0)} \quad \text{für } Q_{\vartheta_0}\text{-fast alle } x \in \mathbb{R}. \tag{1.8.3}$$

Mit Satz 1.6.2 erhalten wir für *beschränkte* Stoppzeiten, dass die Gütefunktion sequentieller Tests differenzierbar ist:

1.8.5 Korollar

Es sei $\mathcal{Q}$ eine $\mathbb{L}_1(\vartheta_0)$-differenzierbare Verteilungsklasse mit Ableitung $\overset{\bullet}{f}_{\vartheta_0}$.
Weiter sei $t : \Omega \to \{1, \ldots, N\}$ eine beschränkte Stoppzeit.
Dann ist für jedes TV $\underset{\sim}{\varphi} = (\varphi_n)_{n \le N}$ die Gütefunktion $\vartheta \mapsto E_\vartheta \varphi_t$ differenzierbar in ϑ_0 mit Ableitung

$$\nabla E_{\vartheta_0} \varphi_t = E_{\vartheta_0} \varphi_t \sum_{i=1}^{t} \overset{\bullet}{f}_{\vartheta_0}(X_i). \tag{1.8.4}$$

Insb. haben wir diese Aussage für die Beispiele aus 1.6.4.

Beweis:

Gemäß Satz 1.6.2 gilt für jedes $n \leq N$ und für jede $\mathcal{C}_n$-messbare, beschränkte Funktion $h_n : \Omega \to \mathbb{R}$

$$g_n(\vartheta) := \Big|\frac{E_\vartheta\, h_n(X) - E_{\vartheta_0} h_n(X)}{\vartheta - \vartheta_0} - E_{\vartheta_0}\big(h_n(X)\sum_{i=1}^{n} \dot{f}_{\vartheta_0}\,(X_i)\big)\Big| \longrightarrow 0 \quad \text{für } \vartheta \to \vartheta_0,$$

wobei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ bezeichne.
Damit bekommen wir für $h_n(X) = \varphi_n 1_{\{t=n\}}$

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{E_\vartheta\, \varphi_t - E_{\vartheta_0}\varphi_t}{\vartheta - \vartheta_0} - E_{\vartheta_0}\big(\varphi_t \sum_{i=1}^{t} \dot{f}_{\vartheta_0}\,(X_i)\big)\Big| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \Big|\frac{E_\vartheta\, \varphi_n 1_{\{t=n\}} - E_{\vartheta_0}\varphi_n 1_{\{t=n\}}}{\vartheta - \vartheta_0} - E_{\vartheta_0}\big(\varphi_n 1_{\{t=n\}} \sum_{i=1}^{n} \dot{f}_{\vartheta_0}\,(X_i)\big)\Big| \\
&= \sum_{n=1}^{N} g_n(\vartheta) \longrightarrow 0 \quad \text{für } \vartheta \to \vartheta_0 \qquad \square
\end{aligned}$$

Wir wollen die Aussage in 1.8.5 auf *nicht beschränkte* Stoppzeiten ausdehnen. Dabei ist es sinnvoll Stoppzeiten zu betrachten, die zumindest unter P_{ϑ_0}, der Stelle an der die Gütefunktion abgeleitet werden soll, abgeschlossen sind. Für solche Stoppzeiten führen wir einen geeigneten Differentationsbegriff ein:

1.8.6 Definition: Sequentielle Differenzierbarkeit

Es sei $\mathcal{Q}$ eine $\mathbb{L}_1(\vartheta_0)$-differenzierbare Klasse von W-Verteilungen über $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, und es sei $t : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ eine unter P_{ϑ_0} abgeschlossene Stoppzeit.
$\mathcal{Q}$ heisst **sequentiell differenzierbar in ϑ_0 unter** t mit Ableitung $\dot{L}_{\vartheta_0}$, falls gilt:

1) Die Abbildung $\dot{L}_{\vartheta_0}$: $\Omega \to \mathbb{R}$ ist bzgl. $P_{\vartheta_0|\mathcal{A}_t}$ integrierbar.

2) Für jedes TV $\underset{\sim}{\varphi}$ ist die Gütefunktion $\vartheta \mapsto E_\vartheta\, \varphi_t$ differenzierbar in ϑ_0 mit Ableitung

$$\nabla E_{\vartheta_0}\varphi_t = E_{\vartheta_0}\varphi_t\, \dot{L}_{\vartheta_0}\,. \tag{1.8.5}$$

Mit Korollar 1.8.5 erhalten wir sofort, dass unter *beschränkten Stoppzeiten* jede $\mathbb{L}_1(\vartheta_0)$-differenzierbare Verteilungsklasse sequentiell differenzierbar in ϑ_0 ist:

1.8.7 Bemerkung

Es sei $\mathcal{Q}$ eine $\mathbb{L}_1(\vartheta_0)$-differenzierbare Verteilungsklasse mit Ableitung $\overset{\bullet}{f}_{\vartheta_0}$. Weiter sei $t : \Omega \to \{1, \ldots, N\}$ eine beschränkte Stoppzeit. Dann ist $\mathcal{Q}$ in ϑ_0 sequentiell differenzierbar unter t mit Ableitung

$$\overset{\bullet}{L}_{\vartheta_0} = \sum_{i=1}^{t} \overset{\bullet}{f}_{\vartheta_0}(X_i) \tag{1.8.6}$$

Insb. erhalten wir diese Aussage für die Beispiele aus 1.8.4 □

Diese Aussage lässt sich auch für *nicht beschränkte* Stoppzeiten verallgemeinern, wenn wir zusätzlich eine Forderung an die 2. Momente der Dichtequotienten der Verteilungen stellen.

1.8.8 Lemma (vgl. Irle [I1], 4.14 auf S. 118)

Es sei $\mathcal{Q} = \{Q_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ eine äquivalente Verteilungsklasse, die $\mathbb{L}_1(\vartheta_0)$-differenzierbar ist. Weiter bezeichne

$$I(\vartheta_0, \vartheta) := \int_{\mathcal{X}} \log(l_{\vartheta_0,\vartheta}) dQ_{\vartheta_0}$$

die **Kullback-Leibner-Information** von Q_{ϑ_0} nach Q_ϑ.
Es gelte

$$\limsup_{\vartheta \to \vartheta_0} \frac{I(\vartheta_0, \vartheta)}{(\vartheta - \vartheta_0)^2} < \infty.$$

Dann ist für jede Stoppzeit $t : \Omega \to \mathbb{N}$ mit $E_{\vartheta_0} t < \infty$ und für jedes TV $\underset{\sim}{\varphi}$ die Gütefunktion $\vartheta \mapsto E_\vartheta\, \varphi_t$ differenzierbar in ϑ_0 mit Ableitung

$$\nabla E_{\vartheta_0} \varphi_t = E_{\vartheta_0} \varphi_t \sum_{i=1}^{t} \overset{\bullet}{f}_{\vartheta_0}(X_i).$$

Die einparametrigen Exponentialfamilien liefern für die Anwendung des Lemmas das wichtigste Beispiel: hier lässt sich die Bedingung an die Dichtequotienten besonders schön interpretieren als Bedingung an die Varianz der Beobachtungen unter ϑ_0:

1.8.9 Beispiel (vgl. Irle [I1], 4.1.8 auf S.128)

Es sei $\mathcal{Q} = \{Q_\zeta \mid \zeta \in \mathcal{Z}\}$ eine einparametrige Exponentialfamilie in natürlicher Parametrisierung. Weiter sei $\zeta_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{Z}}$, und es sei $t : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ eine Stoppzeit mit $E_{\zeta_0} t < \infty$. Dann gilt

$$\limsup_{\vartheta \to \vartheta_0} \frac{I(\vartheta_0, \vartheta)}{(\vartheta - \vartheta_0)^2} = Var_{\vartheta_0}(X_1)$$

und somit ist $\mathcal{Q}$ in ζ_0 sequentiell differenzierbar unter t mit Ableitung

$$\overset{\bullet}{L}_{\vartheta_0} = S_t, \quad \text{wobei } S_n = \sum_{i=1}^{n} T(X_i) - nb'(\zeta_0), \quad S_\infty := 0. \tag{1.8.7}$$

Man beachte, dass S_t die Prüfgöße für das einseitige Testen $\overline{H}_0 : \zeta = \zeta_0$ gegen $\hat{H}_1 : \zeta \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$ aus 1.5.1 liefert.

Mit diesen Vorbereitungen können wir das Problem (1.2.4)

$$\begin{cases} \nabla E_{\vartheta_0}\varphi_t \overset{!}{=} sup \\ E_{\vartheta_0}\varphi_t = \alpha \end{cases}$$

lösen. Analog zur Lösung des Problems (P_α^t) betrachten wir das statistische Experiment

$$(\Omega, \mathcal{A}_t, \{P_{\vartheta|\mathcal{A}_t} \mid \vartheta \in \Theta\})$$

und erhalten mit einer Argumentation entsprechend wie in 1.4:

1.8.10 Satz: Neyman-Pearson-Lemma für lokal beste Tests

Es seien $t : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ eine unter P_{ϑ_0} abgeschlossene Stoppzeit und $\mathcal{Q}$ eine sequentiell in $\vartheta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$ unter t differenzierbare Verteilungsklasse mit Ableitung $\overset{\bullet}{L}_{\vartheta_0}$.

1) *Hinreichendes Kriterium:*

   Es sei $\underset{\sim}{\varphi} = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein TV, für das gilt:

   a) *$E_{\vartheta_0}\varphi_t = \alpha$.*

   b) *Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, so dass gilt*

$$\varphi_t = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad \overset{\bullet}{L}_{\vartheta_0} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} c \quad P_{\vartheta_0|\mathcal{A}_t} - f.s.. \tag{1.8.8}$$

   Dann liefert φ_t einen lokal besten α-ähnlichen Test, d.h. eine Lösung von (1.3).

2) *Existenzaussage:*

   Der sequentielle Test φ_t^* der Gestalt

$$\varphi_t^* := \begin{cases} 1 & & & > & \\ \gamma & \text{für} & \overset{\bullet}{L}_{\vartheta_0} & = & c \quad , mit \\ 0 & & & < & \end{cases} \tag{1.8.9}$$

i) $c := \inf\{b \in \mathbb{R} \mid P_{\vartheta_0}(\overset{\bullet}{L}_{\vartheta_0} > b) \leq \alpha\}$ *und*

ii) $\gamma \in [0,1]$ *derart, dass*

$$P_{\vartheta_0}(\overset{\bullet}{L}_{\vartheta_0} > c) + \gamma P_{\vartheta_0}(\overset{\bullet}{L}_{\vartheta_0} = c) = \alpha$$

genügt den hinreichenden Bedingungen a) und b) und liefert somit eine Lösung von (1.2.4).

3) *Notwendiges Kriterium:*
Es sei φ_t^* *ein lokal bester* α*-ähnlicher Test. Dann gilt:*
Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$*, so dass* φ_t^* *die 1-0-Gestalt aus (1.8.9) besitzt.*

Beweis:

Da $\mathcal{Q}$ sequentiell in ϑ_0 unter t differenzierbar ist mit Ableitung $\overset{\bullet}{L}_{\vartheta_0}$, gilt:

$$\nabla \int \varphi_t dP_{\vartheta_0 | \mathcal{A}_t} = \int \varphi_t \overset{\bullet}{L}_{\vartheta_0} dP_{\vartheta_0 | \mathcal{A}_t}.$$

Das Neyman-Pearson Lemma für α-ähnliche Tests (vgl. Witting I S.196 Satz 2.7) angewandt auf das Problem (1.2.4) mit $q_0 = 1$ und $q_1 = \overset{\bullet}{L}_{\vartheta_0}$ liefert die Behauptung. □

Wie in der klassischen Statistik bekommen wir für lokal beste α-ähnliche Tests φ_t^* eine weitere Optimalitätsaussage, wenn φ_t^* *nicht-randomisiert* ist:

1.8.11 Satz

Es liege die Situation wie in 1.8.10 vor, wobei zusätzlich $\mathcal{Q}$ *äquivalent sei.*
Ist der lokal beste α*-ähnliche Test* φ_t^* *aus 1.8.10 nicht randomisiert, d.h. von der Gestalt*

$$\varphi_t^* = 1_{\{\overset{\bullet}{L}_{\vartheta_0} \geq c\}},$$

so ist φ_t^* *lokal besser als jeder* α*-ähnliche Vergleichstest (vgl.(1.2.4)).*

Beweis:

Wir verweisen hierfür auf Witting [Wi] S.223/224 Satz 2.44. Es ist nur anzumerken, dass der Beweis auf das Experiment

$$(\Omega, \mathcal{A}_t, \{P_{\vartheta | \mathcal{A}_t} \mid \vartheta \in \Theta\})$$

übertragen wird. □

Für $\mathbb{L}_1(\vartheta_0)$-differenzierbare Verteilungsklassen können wir unter *beschränkten* Stoppzeiten lokal beste α-ähnliche Tests explizit angeben:

1.8.12 Korollar

Es seien $t : \Omega \to \{1, \ldots, N\}$ eine beschränkte Stoppzeit und Q eine $\mathbb{L}_1(\vartheta_0)$-differenzierbare Verteilungsklasse mit Ableitung $\overset{\bullet}{f}_{\vartheta_0}$. Dann liefert der sequentielle Test

$$\varphi_t^* := \begin{cases} 1 & & & > & \\ \gamma & \text{für} & \sum_{i=1}^{t} \overset{\bullet}{f}_{\vartheta_0}(X_i) & = & c \\ 0 & & & < & \end{cases}, \text{ mit}$$

$$c := \inf\{b \in \mathbb{R} \mid P_{\vartheta_0}(\overset{\bullet}{L}_{\vartheta_0} > b) \leq \alpha\} \text{ und } \gamma \in [0,1] \text{ derart, dass } E_{\vartheta_0}\varphi_t^* = \alpha$$

einen in ϑ_0 lokal besten α-ähnlichen Test.
Für den Fall, dass $\gamma \in \{0,1\}$, ist φ_t^* sogar lokal besser als jeder α-ähnliche Vergleichstest. Insb. erhalten wir diese Aussagen für die Beispiele aus 1.8.4.

Schließlich liefert Beispiel 1.8.9, dass für einparametrige Exponetialfamilien auch unter *unbeschränkten* Stoppzeiten lokal beste α-ähnliche Tests angeben werden können:

1.8.13 Korollar

Es sei $\mathcal{Q} = \{Q_\zeta \mid \zeta \in \mathcal{Z}\}$ eine einparametrige Exponentialfamilie in natürlicher Parametrisierung.
Weiter sei $\zeta_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{Z}}$, und es sei $t : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ eine Stoppzeit mit $E_{\zeta_0} t < \infty$, und es sei $S_n = \sum_{i=1}^{t} T(X_i) - tb'(\zeta_0))$. Dann ergibt der sequentielle Test

$$\varphi_t^* := \begin{cases} 1 & & & > & \\ \gamma & \text{für} & S_t & = & c \\ 0 & & & < & \end{cases}, \text{ mit}$$

$$c := \inf\{b \in \mathbb{R} \mid P_{\zeta_0}(S_t > b) \leq \alpha\} \text{ und } \gamma \in [0,1] \text{ derart, dass } E_{\zeta_0}\varphi_t^* = \alpha$$

einen in ζ_0 lokal besten α-ähnlichen Test.
Für den Fall, dass $\gamma \in \{0,1\}$, ist φ_t^* auch lokal besser als jeder α-ähnliche Vergleichstest.

1.8.14 Bemerkung

Ist in 1.8.13 $t = t^N(b)$ eine beschränkte einseitige Ersteintrittszeit, so liefert der sequentielle Test aus 1.8.13 den Test aus 1.6.8 und daher einen gleichmäßig besten sequentiellen Test für $H_0 : \zeta \leq \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$. □

Abschließend ergänzen wir die Untersuchungen über lokal gleichmäßig beste Tests, die wir in 1.6 bzw. 1.7 für nicht randomisierte einseitige bzw. zweiseitige Ersteintrittszeiten durchgeführt haben, indem wir sie auf beliebige beschränkte nicht randomisierte Stoppzeiten ausdehnen. Selbstverständlich benötigen wir dann stärkere Forderungen an die Struktur der Verteilungsklasse, um für diese größere Klasse von Stoppzeiten noch Aussagen über lokal gleichmäßige Optimalität machen zu können. Daher betrachten wir jetzt $\mathbb{L}_1(\vartheta_0)$-differenzierbare Verteilungsklassen $\mathcal{Q}$ mit endlichem Stichprobenraum $\mathcal{X}$ und können nach dem Vorbild der klassischen Statistik lokal gleichmäßig beste Tests angeben, wenn zusätzlich der Dichtequotient $\vartheta \mapsto l_{\vartheta,\vartheta_0}(x)$ für jedes $x \in \mathcal{X}$ eine analytische Funktion liefert:

1.8.15 Lemma

Es sei $\mathcal{Q} = \{Q_\vartheta \mid \vartheta \in [\vartheta_0, \infty)\}$ eine *äquivalente* Verteilungsklasse über einer *endlichen* Menge $\mathcal{X}$ mit

$$Q_{\vartheta_0}(\{x\}) > 0 \;\; \forall x \in \mathcal{X}.$$

Außerdem ist jedes $x \in \mathcal{X}$ die Abbildung $\vartheta \mapsto Q_\vartheta(\{x\})$ in eine Potenzreihe um ϑ_0 entwickelbar.

Es sei $t : \Omega \to \{1, \ldots, N\}$ eine beschränkte nicht randomisierte Stoppzeit (d.h. eine Stoppzeit bzgl. $\underset{\sim}{\mathcal{C}}$), dann gilt:

Es gibt ein $\vartheta_1 > \vartheta_0$ und eine Lösung $\underset{\sim}{\varphi}^*$ des Problems (1.5.1)

$$\begin{cases} E_\vartheta \, \varphi_t \overset{!}{=} sup & \forall \vartheta \in (\vartheta_0, \vartheta_1) \\ E_{\vartheta_0} \varphi_t \leq \alpha & \end{cases} .$$

Beweis:

Seien $\vartheta > \vartheta_0$ und

$$\varphi^*_{t,\vartheta}(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & & & > & \\ \gamma & \text{für} & \prod_{k=1}^{t(\vec{x})} \frac{Q_\vartheta}{Q_{\vartheta_0}}(x_k) & = & a \\ 0 & & & < & \end{cases} ,$$

mit $E_{\vartheta_0}\varphi^*_{t,\vartheta} = \alpha$ der gemäß des N-P-Lemmas 1.4.1 beste Test für $\{\vartheta_0\}$ gegen $\{\vartheta_1\}$. Dieser Test ist durch die Prüfgröße

$$L_{t,\vartheta}(\vec{x}) := \prod_{k=1}^{t(\vec{x})} \frac{Q_\vartheta}{Q_{\vartheta_0}}(x_k)$$

eindeutig festgelegt. $L_{t,\vartheta}(\vec{x})$ liefert als endliches Produkt von Potenzreihen um ϑ_0 wieder eine Potenzreihe um ϑ_0.
Für feste $\vec{x}, \vec{x}' \in \mathcal{X}^N$ gilt nach dem Identitätssatzes für Potenzreihen entweder

$$L_{t,\vartheta}(\vec{x}) = L_{t,\vartheta}(\vec{x}') \;\; \forall \vartheta \in (\vartheta_0, \vartheta_0 + \delta)$$

oder es gibt einen Parameter $\vartheta' = \vartheta(\vec{x}, \vec{x}') > \vartheta_0$ derart, dass aus Stetigkeitsgründen folgt

$$L_{t,\vartheta}(\vec{x}) > L_{t,\vartheta}(\vec{x}') \;\; \forall \vartheta \in (\vartheta_0, \vartheta') \quad \text{oder} \quad L_{t,\vartheta}(\vec{x}) < L_{t,\vartheta}(\vec{x}') \;\; \forall \vartheta \in (\vartheta_0, \vartheta').$$

Bezeichnet ϑ_1 den kleinsten dieser endlich vielen Werte $\vartheta(\vec{x}, \vec{x}')$, so sind alle Ordnungsrelationen unabhängig von $\vartheta \in (\vartheta_0, \vartheta_1)$ und damit auch $\varphi^*_{t,\vartheta}$.
Folglich liefert der Test $\varphi^*_t := \varphi^*_{t,\varphi_1}$ eine Lösung von (1.5.1). □

Den wichtigsten Spezialfall bringt die Anwendung des Lemmas auf Binomialverteilungen:

1.8.16 Korollar

Es seien $\mathcal{Q} = \{\mathcal{B}(1, \vartheta) \mid \vartheta \in (0,1)\}$ und $t : \Omega \to \{1, \ldots, N\}$ eine beschränkte nicht randomisierte Stoppzeit, $\vartheta_0 \in (0,1)$ und $S_n := \sum_{i=1}^n X_i - n\vartheta_0$.
Dann ergibt der Test

$$\varphi^*_t := \begin{cases} 1 & & & > & \\ \gamma & \text{für} & S_t & = & c \quad , \textit{mit} \\ 0 & & & < & \end{cases} \tag{1.8.10}$$

$$c := \inf\{b \in \mathbb{R} \mid P_{\vartheta_0}(S_t > b) \le \alpha\} \;\; \textit{und}\;\; \gamma \in [0,1] \;\; \textit{derart, dass}\;\; E_{\vartheta_0}\varphi^*_t = \alpha,$$

einen lokal gleichmäßig besten besten Test für $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ z.N. α.

Beweis:

Zunächst garantiert uns Lemma 1.8.15 die Existenz eines lokal gleichmäßig besten Tests φ^*_t z.N. α. Es bleibt daher zu zeigen, dass φ^*_t die Gestalt aus (1.8.10) besitzt:
Da $\{\mathcal{B}(1, \vartheta) \mid \vartheta \in (0,1)\}$ eine $\mathbb{L}_1(\vartheta_0)$-differenzierbare Verteilungsklasse ist, liefert φ^*_t auch einen lokal besten Test z.N. α und er muss somit gemäß 1.8.10 und 1.8.9 die Gestalt

$$\varphi^*_t = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad S_t \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} c \;\; P_{\vartheta_0 | \mathcal{C}_t}$$

besitzen. □

d) Gleichmässig beste Tests der Güte 1

Tests der Güte 1 liefern gewiss artifizielle Beispiele für beste Tests. Und doch sind sie theoretisch so interessant, dass sie in der Literatur zur sequentiellen Statistik viel Beachtung gefunden haben. Ausgiebig untersucht wurden dabei rechtsseitige SPRTs bei iid-Versuchswiederholungen für das Testen einfacher Hypothesen $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ (vgl. Pollak [Po], S.1012f.; Siegmund [Si], Beispiel 4.1 auf Seite 70f.; Lerche [Le], S.1030f.); dies sind in der angegebenen Literatur sequentielle Tests $(t, \underset{\sim}{\varphi})$ der Gestalt

$$t = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid L(\vartheta_1, \vartheta_0) \geq a\}, \;\; \varphi_n = 1 \; (n \in \mathbb{N}), \;\; \varphi_\infty = 0.$$

Dabei wurden Optimalitätsaussagen nur für den Spezialfall gemacht, dass als Irrtumsniveau der Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art das eigene Niveau des SPRTs zugrunde gelegt werde: Dieses Vorgehen ist in der sequentiellen Statistik üblich, denn i.a. lässt sich zu beliebig vorgegebenem Niveau α ein bester sequentieller Test nicht mehr konstruktiv angeben, wenn bei der Problemstellung auch die Stoppzeiten mitvarieren dürfen (vgl. 2.4.3).

Ziel der folgenden Untersuchungen ist es, einerseits zu beliebigem Niveau α Stoppzeiten zu konstruieren, so dass das Problem (P^t_α) (für einfache Hypothesen) durch einen Test der Güte 1 gelöst wird. Das führt zu randomisierten rechtsseitigen unbeschränkten Ersteintrittszeiten und bei den Tests von Güte 1 entsprechend auf randomisierte rechtsseitige SPRTs. Diese Ersteintrittszeit wird nach dem Vorbild von 1.6.13 konstruiert werden, was Gegenstand von 1.9 ist.

Zum anderen werden wir in 1.10 unter den randomisierten rechtsseitigen unbeschränkten Ersteintrittszeiten t im Falle einparametriger Exponentialfamilien untersuchen, für welche maximale Teilklasse $\bar{H}_1 := (\zeta_2, \sup \mathcal{Z}) \subset (\zeta_0, \sup \mathcal{Z})$ gleichmäßig beste sequentielle Tests der Güte 1 existieren, d.h. für das Problem (1.2.2)

$$\begin{cases} E_\zeta \varphi_t \stackrel{!}{=} sup & \forall \zeta > \zeta_2 \\ E_\zeta \varphi_t \leq \alpha & \forall \zeta \leq \zeta_0. \end{cases}$$

Aufgrund der Stetigkeit der Gütefunktion sequentieller Tests bei einparametrigen Exponetialfamilien (vgl. 1.10.4) - eine solche Aussage ist für Tests bei festem Stichprobenumfang bekannt- können gleichmäßig beste Tests der Güte 1 nur für nicht aneinander grenzende Hypothesen auftreten, d.h. $\zeta_2 > \zeta_0$. Demnach kann

es für $H_0 : \zeta \leq \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$ keine gleichmäßig besten Tests der Güte 1 geben, und mit Satz 1.5.17 schließlich überhaupt keine gleichmäßig besten Tests für $H_0 : \zeta \leq \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$, also für aneinander grenzende Hypothesen, unter unbeschränkten randomisierten einseitigen Ersteintrittszeiten.
Dass wir bei der Behandlung von Problemen (P_α^t), die eine Lösung von Güte 1 zulassen, ausschließlich unbeschränkte randomisierte rechtsseitige Ersteintrittszeiten als feste Stoppzeit wählen, liegt an der ausgezeichneten Rolle, welche diesen Ersteintrittszeiten bei der Behandlung von Problemen mit varrierenden Stoppzeiten zukommt: Lässt ein solches Problem eine Lösung von Güte 1 zu, so kann die Lösung immer als randomisierter rechtsseitiger SPRT gewählt werden. Diese Aussage ist unter anderem Gegenstand von Kapitel 3.

1.9 Problemstellung und Voruntersuchungen

Es sei $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Verteilungsklasse, und es seien $\vartheta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$ sowie $\alpha \in (0,1)$ und $t : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ eine beliebige feste Stoppzeit bzgl. $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$.
Es soll hier für $\vartheta_1 \neq \vartheta_0$ untersucht werden, wann das einfache Neyman-Pearson-Problem (P_α^t) durch einen Test der Güte 1 gelöst wird.
Dazu bringen wir das Problem zunächst in eine andere Gestalt:

Aufgrund der Orthogonalität von P_{ϑ_0} und P_{ϑ_1} können wir φ_∞ stets so festgelegen, dass durch das Entscheiden im „Unendlichen“ kein Fehler 1. und 2. Art begangen wird, nämlich gemäß

$$\varphi_\infty = 1_C \;\text{ mit } C \in \mathcal{C}_\infty : \; P_{\vartheta_0}(C) = 0 \text{ und } P_{\vartheta_1}(C) = 1. \tag{1.9.1}$$

Denn bei Vorliegen aller im Modell verfügbaren Daten lässt sich formal immer eine richtige Entscheidung für H_0 bzw. für H_1 fällen, was praktisch natürlich nicht ausführbar ist; auf dieses Problem kommen wir an späterer Stelle noch zu sprechen.
Für sequentielle Tests φ_t mit φ_∞ wie in (1.9.1) erhält die Güte und die Fehlerwahrscheinlichkeit 1.Art folgende Form:

$$\begin{aligned} E_{\vartheta_1}\varphi_t &= E_{\vartheta_1}\varphi_t 1_{\{t<\infty\}} + P_{\vartheta_1}(t=\infty) \\ E_{\vartheta_0}\varphi_t &= E_{\vartheta_0}\varphi_t 1_{\{t<\infty\}}. \end{aligned} \tag{1.9.2}$$

In der gängigen Literatur zur Sequentialanalyse werden auf diese Weise a priori die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. und 2. Art festgelegt (vgl. z.B. Irle [I], S.14).

Damit modifiziert sich das Problem (P_α^t) zur Aufgabe

$$(\hat{P}_\alpha^t) \qquad \begin{cases} E_{\vartheta_1}\varphi_t 1_{\{t<\infty\}} + P_{\vartheta_1}(t=\infty) \overset{!}{=} \sup \\ \qquad\qquad E_{\vartheta_0}\varphi_t 1_{\{t<\infty\}} \leq \alpha, \end{cases}$$

welche im folgenden Sinne dieselben Lösungen besitzt wie die Aufgabe (P_α^t):
Bei den Lösungen von $(\hat{P}_\alpha^t)$ werde für φ_∞ die Darstellung (1.9.1) gewählt, und umgekehrt ergeben Lösungen von (P_α^t) natürlich auch eine Lösung von $(\hat{P}_\alpha^t)$.

Die Lösungen von $(\hat{P}_\alpha^t)$ werden folglich vollständig durch das Neyman-Pearson-Lemma von (P_α^t) charakterisiert, wobei die Entscheidungsfunktion φ_∞ aufgrund der Definition der Fehlerwahrscheinlichkeit 1.Art und der Güte entfällt. Diese Darstellung erweist sich im Hinblick auf eine Charakterisierung der Tests von Güte 1 bei variierenden Stoppzeiten in Kapitel 3 als die geeignetere. Wir verwenden im folgenden diese Darstellung des Neyman-Pearson-Problems.

Für die Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

1) $\mathcal{Q}$ ist äquivalent:
Dann ist jede Lösung φ_t^* der Aufgabe (P_α^t) von Güte 1 notwendig unter P_{ϑ_0} offen, d.h. es gilt $P_{\vartheta_0}(t=\infty) > 0$.

   <u>Begr.</u>: Da $E_{\vartheta_1}\varphi_t^* = 1$, folgt $\varphi_t^* = 1$ $P_{\vartheta_1|\mathcal{C}_t}$-f.s. und wegen der Äquivalenz der eingeschränkten W-Maße $(P_{\vartheta|\mathcal{C}_n})_{\vartheta\in\Theta}$, bekommen wir P_{ϑ_0}-f.s. $\varphi_t^* = 1$ auf $\{t<\infty\}$ und erhalten $P_{\vartheta_0}(t<\infty) = E_{\vartheta_0}\varphi_t^* \leq \alpha$.

2) $\mathcal{Q}$ ist nicht äquivalent:
Hier sei ohne Einschränkung $\vartheta_1 \neq \vartheta_0$ mit $Q_{\vartheta_1} \not\gg Q_{\vartheta_0}$. Folglich gibt es ein $N \in \mathcal{B}$ mit $Q_{\vartheta_1}(N) = 1$ und $Q_{\vartheta_0}(N) < 1$ und somit ein $n \in \mathbb{N}$ mit $Q_{\vartheta_0}(N)^n < \alpha$, so dass wir in dieser Situation Tests der Güte 1 bekommen können unter Stoppzeiten t, die *beschränkt* sind., was im äquivalenten Fall nicht möglich ist. Z.B. erhalten wir eine solche Aussage für die Klasse der Rechteckverteilungen $\{\mathcal{R}(\vartheta,b) \mid \vartheta < b\}$.

Hinsichtlich der Untersuchungen über gleichmäßige Optimaltität sind einparametrige Exponentialfamilien vom besonderen Interesse, daher beschränken wir uns im folgenden auf *äquivalente* Verteilungsklassen $\mathcal{Q}$.
Mit der Äquivalenz von $\mathcal{Q}$ haben wir, dass auch zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ alle eingeschränkten W-Maße $P_{\vartheta|\mathcal{C}_n}$ bzw. $P_{\vartheta|\mathcal{A}_n}$, $\vartheta \in \Theta$ äquivalent sind, so dass wir unter diesen Verteilungen Dichten bilden können.

Aufgrund der Äquivalenz von $\mathcal{Q}$ lässt das Problem (P_α^t) nur unter festen Stoppzeiten t, die unter P_{ϑ_0} offen sind, Lösungen von Güte 1 zu.
Dabei sind auch noch Sonderfälle zugelassen, wie $t \equiv \infty$ oder allgemeiner die Stoppzeiten

$$t = \begin{cases} t^N \\ \infty \end{cases} \text{falls } (X_1, \ldots, X_N) \underset{\notin}{\overset{\in}{}} C_N ,$$

wobei $N \in \mathbb{N}$, $C_N \in \mathcal{C}_N$ mit $P_{\vartheta_0}(X_1, \ldots, X_N \in C_N) < 1$ und
$t^N : \Omega \to \{1, \ldots, N\}$ eine beschränkte Stoppzeit sei. Diese Stoppzeiten sind nicht nur unter P_{ϑ_0} offen, sondern aufgrund der Äquivalenz der eingeschränkten W-Verteilungen $(P_{\vartheta \,|\, \mathcal{C}_N})_{\vartheta \in \Theta}$, auch unter allen anderen P_ϑ. Solche Stoppzeiten sind praktisch nicht ausführbar.
Daher stellen wir für die weiteren Untersuchungen an die feste Stoppzeit t zusätzlich die Forderung, dass unter einer dritten Verteilung P_η gelte

$$E_\eta t < \infty.$$

Dann ist t zumindest unter P_η abgeschlossen. Um Tests der Güte 1 für das Problem (P_α^t) erhalten zu können, müssen wir selbstverständlich noch fordern, dass $P_\eta \neq P_{\vartheta_0}$.
Der andere Fall $P_\eta = P_{\vartheta_1}$ sei dagegen erlaubt, er ist für die Praxis sogar sinnvoll, was das folgende praktische Beispiel für einen Test der Güte 1 illustrieren soll:

1.9.1 Beispiel:

Ein bereits etabliertes Verfahren A zur Behandlung einer Krankheit soll ersetzt werden durch ein gerade neu entwickeltes Verfahren B, dass die Krankheit anscheinend effektiver beseitigt. Dazu wird eine Testreihe durchgeführt und es soll ein Entscheidungsverfahren eingesetzt werden, dass sofern das Verfahren A tatsächlich wirkungsvoller ist, nach endlicher Zeit sich für die Hypothese H_1 : „B ist wirkungsvoller als A.“ entscheidet.
Dass sich das Verfahren nach endlicher Zeit für H_1 entscheidet, wenn H_1 vorliegt, entspricht dann der obigen Bedingung $E_\eta t < \infty$ für $P_\eta = P_{\vartheta_1}$. Sollte das Entscheidungsverfahren vorschreiben mit dem Beobachten nicht abzubrechen, so spreche dies dafür, dass die Hypothese H_0 : „B ist nicht wirkungsvoller als A.“ vorliegt und man bleibt bei H_0.

Der offenbare Nachteil dieses Entscheidungsverfahrens besteht darin, dass im allgemeinen nicht bekannt ist nach welcher „Zeit“ spätestens das Verfahren H_1 als wahr erkennt (wenn H_1 vorliegt). Hier könnte man sich damit abhelfen, dass eine obere Schranke δ für die „Zeit “ festgelegt werde, dafür, wann sich das Verfahren im Mittel spätestens für H_1 entschieden haben muss -das entpricht der Bedingung $E_\eta t \le \delta$; wenn dies nicht innerhalb dieser Zeitspanne geschieht, so bleibt man bei H_0. □

Es stellt sich die Frage, ob es überhaupt Stoppzeiten t gibt mit $E_\eta t < \infty$, die unter P_{ϑ_0} mit positiver Wahrscheinlichkeit nie stoppen. Erzwingt die Bedingung $E_\eta t < \infty$ nicht automatisch auch die Abgeschlossenheit unter P_{ϑ_0}?
Dass dem nicht so ist, es also Stoppzeiten mit $E_\eta t < \infty$ und $P_{\vartheta_0}(t = \infty) > 0$ gibt, liefert das elementare Erneuerungstheorem (vgl. Chow-Teicher [CT], Theorem 5 auf Seite 148), für dessen Anwendung wir Dichtequotienten von $P_{\eta|\mathcal{C}_n}$ nach $P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_n}$ einführen:
Die Äquivalenz der eingeschränkten W-Maße $\{P_{\vartheta|\mathcal{C}_n} \mid \vartheta \in \Theta\}$ $(n \in \mathbb{N})$ gestattet uns, Dichten bzgl. dieser Verteilungen zu bilden:

$$L_n(\vartheta, \hat{\vartheta}) := \frac{dP_\vartheta \mid \mathcal{C}_n}{dP_{\hat{\vartheta}} \mid \mathcal{C}_n} \quad (n \in \mathbb{N},\ \vartheta, \hat{\vartheta} \in \theta), \tag{1.9.3}$$

Mit den Rechenregeln für Radon-Nikodym-Ableitungen bekommen wir eine Darstellung der Dichten analog zu (1.2.6)

$$L_n(\vartheta, \hat{\vartheta}) = \frac{dP_\vartheta \mid \mathcal{A}_n}{dP_{\hat{\vartheta}} \mid \mathcal{A}_n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{f_\vartheta}{f_{\hat{\vartheta}}}(X_k) \in (0, \infty) \quad P_{\hat{\vartheta}|\mathcal{C}_n}\text{-}f.s. \tag{1.9.4}$$

Die wichtigsten Beispiele für obige Stoppzeiten geben rechtsseitige Ersteintrittszeite, d.h. Stoppzeiten, welche zum ersten Zeitpunkt n stoppen, zu dem der Dichtequotient $L_n(\eta, \vartheta_0)$ eine vorgegebene Schranke a überschritten hat; für diese gilt nämlich:

1.9.2 Lemma

Für $a > 0$ definieren wir

$$\begin{aligned} t(a, \eta) &:= \inf\{n \in \mathbb{N} \mid L_n(\eta, \vartheta_0) \ge a\}, \\ t^+(a, \eta) &:= \inf\{n \in \mathbb{N} \mid L_n(\eta, \vartheta_0) > a\}. \end{aligned}$$

Dann gilt

i) $t(a, \eta) \le t^+(a, \eta) \le t(a + \epsilon, \eta) \quad \forall \epsilon > 0.$

ii) $E_\eta t^+(a,\eta) < \infty$.

iii) $P_{\vartheta_0}\big(t(a,\eta) < \infty\big) \le \frac{1}{a}$.

iv) Für $c_m \downarrow a$ *mit* $c_m > a$ *gilt:*

$$\lim_{m\to\infty} t(c_m,\eta) \downarrow= t^+(a,\eta),$$

insb. erhalten wir $\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\{t(c_m,\eta) < \infty\} = \{t^+(a,\eta) < \infty\}$.

v) Für $b_m \uparrow a$ *mit* $0 < b_m < a$ *gilt:*

$$\lim_{m\to\infty} t(b_m,\eta) \uparrow= t(a,\eta) \quad P_{\vartheta_0}\text{-f.s.},$$

insb. bekommen wir $\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\{t(b_m,\eta) < \infty\} = \{t(a,\eta) < \infty\}$ P_{ϑ_0}*-f.s.*

Beweis: Abkürzend bezeichnen wir hier $t^+(a) := t^+(a,\eta)$, $t(a) := t(a,\eta)$ und es sei $L_n := L_n(\vartheta_0,\eta)$.

i) gilt offensichtlich.

ii) folgt zunächst für $a > 1$ aus der Version des elementaren Erneuerungstheorems von Chow-Teicher *Seite 148* angewandt auf die iid-Summen

$$Z_n = \log L_n = \sum_{i=1}^n \log \frac{f_\eta}{f_{\vartheta_0}}(X_i).$$

Da $E_\eta \log L_1$ gerade die Kullback-Leibner Information $I(\eta,\vartheta_0)$ bezeichnet (vgl.(1.8.8)), und da wegen $P_\eta \neq P_{\vartheta_0}$ gilt $I(\eta,\vartheta_0) > 0$ (vgl. Irle [I], *S.17*), bekommen wir $E_\eta \inf\{n\in\mathbb{N} \mid Z_n > \log a\} < \infty$. Aufgrund der Monotonie von $t^+(a,\eta)$ in a, erhalten wir die Aussage natürlich auch für alle $a > 0$.

iii) Wegen $L_n \le \frac{1}{a}$ auf $\{t(a) = n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt

$$P_{\vartheta_0}(t(a) < \infty) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{t(a)=n\}} L_n \, dP_\eta|\mathcal{C}_n \le \frac{1}{a} P_\eta(t(a) < \infty) \le \frac{1}{a}.$$

iv) Sei $\omega \in \Omega$.

<u>1.Fall</u> $t^+(a)(\omega) = n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$
$L_n(\omega) > a$ und $L_k(\omega) \le a \quad \forall k < n$.
Damit gibt es wegen $c_m \downarrow a$ ein $M \in \mathbb{N}$, so dass $\forall m \ge M$:
$L_n(\omega) > c_M \ge c_m > a$ und trivialerweise gilt $L_k(\omega) < c_m \quad \forall k < n$.
Wir erhalten also $\lim_{m\to\infty} t(c_m)(\omega) = n$.

2.Fall $t^+(a)(\omega) = \infty \Leftrightarrow$
$L_k(\omega) \leq a \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
Dann gilt erst recht $L_k(\omega) \leq c_m \quad \forall m, k \in \mathbb{N}$ und wir bekommen $\lim_{m\to\infty} t(c_m)(\omega) = \infty$ und folglich die Konvergenzaussage in iv).

Insbesondere liefert der 1.Fall, dass gilt $\{t^+(a) < \infty\} \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}}\{t(c_m) < \infty\}$. Die umgekehrte Inklusion folgt aus der Kontraposition des 2. Falls.

v) Zunächst folgt wegen $P_{\vartheta_0} \neq P_\eta$, dass es ein $A \in \mathcal{C}_\infty$ gibt mit $P_{\vartheta_0}(A) = 1$, so dass für alle $\omega \in A$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\omega) = 0 \quad (*).$$

Sei also $\omega \in A$.

1.Fall $t(a)(\omega) = n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$
$L_n(\omega) \geq a$ und $L_k(\omega) < a \quad \forall k < n$.
Damit gibt es wegen $b_m \uparrow a$ ein $M \in \mathbb{N}$, so dass $\forall m \geq M$:
$L_k(\omega) < b_M \leq b_m < a \quad \forall k < n$ und trivialerweise gilt $L_n(\omega) \geq a \geq b_m$.
Wir erhalten demnach $\lim_{m\to\infty} t(c_m)(\omega) = n$.

2.Fall $t(a)(\omega) = \infty \Leftrightarrow$
$L_k(\omega) < a \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
Wegen $(*)$ bekommen wir damit $\sup_{k\in\mathbb{N}} L_k(\omega) < a$. Demnach gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ mit $L_k(\omega) < b_M < a \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
Wir erhalten also $\lim_{m\to\infty} t(b_m)(\omega) = \infty$ und folglich die Konvergenzaussage in v).

Insbesondere folgt aus $t(b_m) \leq t(a)$, dass gilt
$\{t(a) < \infty\} \subset \bigcap_{m\in\mathbb{N}}\{t(b_m) < \infty\}$. Die umgekehrte Inklusion folgt P_{ϑ_0}-f.s. aus der Kontraposition des 2.Falls. $\square$

1.9.3 Bemerkung:

Die Konvergenzaussagen iv) und v) sind für die Beantwortung der Frage nicht erforderlich. Sie werden in dem Lemma mitaufgenommen, um etwas später randomisierte Ersteintrittszeiten zu konstruieren, die ein vorgegebenes Niveau α ausschöpfen sollen. □

Hiermit können wir in der Situation $\eta = \vartheta_1$ ein erstes Beipiel notieren für eine Lösung des Problems (P_α^t) von Güte 1, was in der Literatur zur sequentiellen Statistik wohlbekannt ist.

1.9.4 Beispiel (Test der Güte 1)(vgl. Khan [Kh],S.253f.)

Es seien $\eta = \vartheta_1$ und zu $a > 1$

$$\alpha(a) := P_{\vartheta_0}(t(a,\eta) < \infty), \quad \delta(a) := E_\eta t(a,\eta).$$

Dann liefert Lemma 1.9.2: $\alpha(a) \in (0,1)$ und $\delta(a) \in (1,\infty)$.
Der sequentielle Test $\varphi_{t(a,\eta)}$ mit

$$\varphi_n = 1, n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_\infty = 0$$

liefert also eine Lösung der Güte 1 für das Problem (P_α^t) mit $t = t(a,\eta)$ zu seinem eigenen Niveau $\alpha = \alpha(a)$.
Den sequentiellen Test $\varphi_{t(a,\eta)}$ bezeichnen wir im folgenden als *rechtsseitigen (nichtrandomisierten) Sequential Probability Ratio Test* (SPRT), wobei sich das Attribut nichtrandomisiert auf die Stoppzeit $t(a,\eta)$ bezieht. □

Im obigen Beispiel liefert $\varphi_{t(a,\eta)}$ eine Lösung von (P_α^t) mit $t = t_\gamma(a,\eta)$ der Güte 1 zu seinem eigenen Niveau $\alpha(a)$.
Um zu beliebig vorgegebenem Niveau $\alpha \in (0,1)$ eine Lösung der Güte 1 für (P_α^t) zu finden, werden wir nach dem Vorbild der einseitigen beschränkten Ersteintrittszeiten $t^N(a)$ in 1.6.13 das Niveau α durch randomisierte Stoppzeiten ausschöpfen, indem wir zunächst den Multiplikator a so wählen, dass gilt $P_{\vartheta_0}\big(t(a,\eta) < \infty\big) \leq \alpha$ und $P_{\vartheta_0}\big(t^+(a,\eta) < \infty\big) \geq \alpha$ und dann die früheste Ersteintrittszeit $t(a,\eta)$ mit der spätesten Ersteintrittszeit $t^+(a,\eta)$ geeignet so konvexkombinieren und schließlich unter dieser randomisierten Stoppzeit testen.

Es sei hier angemerkt, dass die Tests der Güte 1, welche auf solche Weise konstruiert werden, eine besondere Rolle in Kapitel 2 spielen bei der Charakterisierung der Tests von Güte 1 für das Problem $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\mathcal{N}})$ unter variierenden Stoppzeiten. Wir führen die Konstruktion hier aus. Zunächst definieren wir dafür:

1.9.5 Definition: Randomisierte rechtsseitige Ersteintrittszeiten

Es seien $a > 0$ und $\gamma \in [0,1]$, dann bezeichnen wir die Stoppzeit, welche durch die Abbruchregel $\underset{\sim}{g}$ mit

$$g_n := \gamma P_\bullet\big(t^+(a,\eta) = n|\mathcal{C}_n\big) + (1-\gamma)P_\bullet\big(t(a,\eta) = n|\mathcal{C}_n\big) \ (n \in \overline{\mathbb{N}})$$

definiert ist mit $t_\gamma(a,\eta)$ und sprechen dabei von einer randomisierten einseitigen Ersteintrittszeit.

Hiermit bekommen wir:

1.9.6 Satz: Ausschöpfen von α

Es seien $\alpha \in (0,1)$ und dazu

$$a_0 := \inf\{a > 0 \mid P_{\vartheta_0}\big(t(a,\eta) < \infty\big) \leq \alpha\}. \tag{1.9.5}$$

Dann ist $a_0 > 0$ und es gilt:

$$\exists \gamma_0 \in [0,1] \ mit \ P_{\vartheta_0}\big(t_{\gamma_0}(a_0,\eta) < \infty\big) = \alpha. \tag{1.9.6}$$

Insb. liefert für $\eta = \vartheta_1$ der sequentielle Test $\varphi_{t_{\gamma_0}(a_0,\eta)}$ mit

$$\varphi_n = 1, n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_\infty = 0$$

eine Lösung der Güte 1 für das Problem (P_α^t) mit $t = t_{\gamma_0}(a_0,\eta)$.
Den sequentiellen Test $\varphi_{t_{\gamma_0}(a_0,\eta)}$ bezeichnen wir als rechtsseitigen randomisierten SPRT.

Beweis:

Zunächst folgt aus Lemma 1.9.2 iii) und der a definierenden Bedingung, dass $a \in (0,\infty)$ gelten muss.
Aufgrund des Konvergenzverhaltens der Ersteintrittszeiten (vgl. Lemma 1.9.2 iv) und v)) ergibt sich aus der Stetigkeit des W-Maßes P_{ϑ_0} und der Definition von a:

i) Für $c_m \downarrow a$: $P_{\vartheta_0}(t^+(a,\eta) < \infty) = \lim_{m\to\infty} P_{\vartheta_0}(t(c_m,\eta) < \infty) \leq \alpha$.

ii) Für $b_m \uparrow a$: $P_{\vartheta_0}(t(a,\eta) < \infty) = \lim_{m\to\infty} P_{\vartheta_0}(t(b_m,\eta) < \infty) \geq \alpha$.

Daher gibt es ein $\gamma_0 \in [0,1]$ mit

$$\begin{aligned} \alpha = & \quad \gamma_0 P_{\vartheta_0}(t^+(a_0,\eta) < \infty) + (1-\gamma_0)P_{\vartheta_0}(t(a_0,\eta) < \infty) \\ = & \quad P_{\vartheta_0}(t_{\gamma_0}(a_0,\eta) < \infty), \end{aligned}$$

wobei letztere Gleichheit mit 1.2.7 und 1.2.9 aus der Definition von $t_{\gamma_0}(a_0, \eta)$ folgt.
Aus 1.9.2 i) und ii) bekommen wir schließlich

$$E_\eta t_{\gamma_0}(a_0, \eta) < \infty \text{ und } E_{\vartheta_1} \varphi_{t_{\gamma_0}(a_0,\eta)} = 1.$$

□

Wir wollen an dieser Stelle etwas zur Rolle von $\varphi_\infty : \Omega \to [0,1]$ anmerken. Bei der Formulierung der Aufgabe (P_α^t) haben wir apriori auch zugelassen,
dass $\varphi_\infty > 0$ mit positiver Wahrscheinlichkeit unter P_{ϑ_1} sein darf. Das Neyman-Pearson-Lemma 1.4.1 liefert, dass für jede Lösung φ_t von (P_α^t) notwendig gelten muss:

$$\begin{aligned} \varphi_t &= 1 \qquad && \text{auf } \{t = \infty\}\ P_{\vartheta_1}\text{-f.s. und} \\ a \cdot \varphi_t &= 0 && \text{auf } \{t = \infty\}\ P_{\vartheta_0}\text{-f.s für ein } a \geq 0 \end{aligned}$$

Aufgrund der Orthogonalität von P_{ϑ_0} und P_{ϑ_1} lässt sich dies auch immer erfüllen. Ein Anwender würde uns berechtigterweise daraufhinweisen, dass ein solches Entscheidungsverfahren φ_t sofern es unter P_{ϑ_0} und P_{ϑ_1} mit positiver Wahrscheinlichkeit nie stoppt, praktisch nicht ausführbar ist z.B. in dem Sinne von Beispiel 1.9.1.
In Beispiel 1.9.4 konnte für den besten Test φ_t die Entscheidungsfunktion $\varphi_\infty \equiv 0$ gewählt werden. Damit ist φ_t ausführbar im Sinne von 1.9.1.
Es fragt sich, ob im allgemeinen für das Problem (P_α^t) eine Lösung φ_t der Güte 1, - falls sie existiert - in dieser Form angegeben werden kann, d.h. mit $\varphi_\infty = 0$. Das führt zur Frage, ob es unter P_{ϑ_1} offene Tests der Güte 1 gibt.

1) Im Falle $\eta = \vartheta_1$ haben wir notwendigerweise, dass t unter P_{ϑ_0} abgeschlossen ist, und daher ist $\varphi_\infty \equiv 0$ wählbar.

2) Dagegen lässt sich in der Situation $\vartheta_1 \neq \eta$ eine Lösung φ_t von (P_α^t) der Güte 1 angeben die auch unter P_{ϑ_1} offen ist, was das anschließende Beispiel zeigt.
   Der Fall $\vartheta_1 \neq \eta$ ist in Hinblick auf unser ursprüngliches Vorhaben, Aussagen über gleichmäßige Optimalität von Tests der Güter 1 zu treffen auch wesentlich.

1.9.7 Beispiel (Test der Güte 1)

In der Situation $\eta \notin \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$ sei zu $a > 1$

$$t_i := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid L_n(\eta, \vartheta_i) \geq a\} \quad i = 0, 1.$$

Aus Lemma 1.9.2 folgt $E_\eta t_i < \infty$ und $P_{\vartheta_i}(t_i < \infty) \leq \frac{1}{a}$.
Damit liefert der sequentielle Test φ_t mit

$$t := t_0 + t_1 \text{ und } \varphi_n = 1, n \in \mathbb{N},\ \varphi_\infty = 1_C \text{ mit } C \in \mathcal{C}_\infty : P_{\vartheta_0}(C) = 0,\ P_{\vartheta_1}(C) = 1.$$

eine Lösung der Güte 1 für das Problem (P_α^t) zu seinem eigenen Niveau $\alpha = P_{\vartheta_0}(t < \infty)$, die unter P_{ϑ_1} offen ist. □

Damit müssen wir nochmal auf die Festlegung der Fehlerwahrscheinlichkeit 1.Art und der Güte in (1.9.2) zurückkommen: In Hinblick auf dieses Beispiel erscheint sie nicht sinnvoll.

1.9.8 Bemerkung

Der Test aus 1.9.7 hat eigentlich den Namen Güte 1 nicht verdient, denn praktisch gesehen verliert ein sequentieller Test an Güte, der mit positiver Wahrscheinlichkeit nie stoppt, wenn H_1 vorliegt: die einzig sinnvolle Entscheidung für den Fall, dass das Verfahren nie stoppt, ist bei H_0 zu bleiben, was wir mit dem Beispiel 1.9.1 begründet haben.

Es stellt sich daher die Frage, warum wir das Randomisieren im Unendlichen überhaupt zugelassen haben, wenn es auf Lösungen hinausläuft, die mit positiver Wahrscheinlichkeit nicht durchführbar sind, und warum wir uns nicht von vornherein auf sequentielle Tests φ_t mit $\varphi_\infty = 0$ beschränkt haben? Für das Problem (P_α^t) hätten wir das in der Tat so ausführen können. Dagegen verhält es sich mit dem Problem $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\mathcal{N}})$ im Kapitel 2 und 3 leider anders, wozu die Untersuchungen des Problems (P_α^t) zur Vorbereitung dienen: dort brauchen wir das Randomisieren im Unendlichen, um die Existenz von optimalen Tests zu garantieren (vgl. 2.2).

Wir lassen daher weiterhin für φ_∞ alle Werte aus $[0,1]$ zu und bleiben bei der Festlegung der Güte in (1.9.2) und behelfen uns in Hinblick auf das obige artifizielle Beispiel eines Testes von Güte 1, indem wir eine neue Bezeichnung einführen:

1.9.9 Definition

Ein sequentieller Test φ_t heiße auf H_1 *ausführbarer* Test von Güte 1, falls gilt:

$$E_{\vartheta_1}\varphi_t = 1 \text{ und } P_{\vartheta_1}(t < \infty) = 1 \quad \forall \vartheta_1 \in H_1.$$

$\square$

Nach diesen Voruntersuchungen kehren wir zum eigentlichen Problem zurück, Aussagen über gleichmäßig beste Tests der Güte 1 zu machen für nicht aneinander grenzende Hypothesen:
Zu vorgegenem Niveau α liefern die rechtsseitigen randomisierten Ersteintrittszeiten $t = t_{\gamma_0}(a_0, \eta)$ mit
$a_0 > 0, \gamma_0 \in [0,1]$ wie in Satz 1.9.6 Stoppzeiten mit $P_{\vartheta_0}(t < \infty) = \alpha$ und $E_\eta t < \infty$
Unter solchen Stoppzeiten t liefern die sequentiellen Tests φ_t mit $\varphi_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$ Lösungen des Problems

$$\begin{cases} E_{\vartheta_1}\varphi_t 1_{\{t<\infty\}} + P_{\vartheta_1}(t = \infty) & \overset{!}{=} \text{ sup} \quad \forall \vartheta_1 \in \Theta \\ E_{\vartheta_0}\varphi_t 1_{\{t<\infty\}} & \leq \alpha. \end{cases}$$

Mit Blick auf die Ausführbarkeit des Entscheidungsverfahrens sind dann die Parameter $\vartheta_1 > \vartheta_0$ von Interesse, für die t abgeschlossen ist.

Daher werden wir im folgenden Abschnitt, bei einparametrigen Exponentialfamilien untersuchen, für welche Parameter $\vartheta_1 \neq \vartheta_0$ die Stoppzeiten $t_{\gamma_0}(a_0, \eta)$ abgeschlossen sind.

1.10 Gleichmäßig beste Test der Güte 1

Für diesen Abschnitt sei $\{Q_\zeta \mid \zeta \in \mathcal{Z}\}$ eine einparametrige Exponentialfamilie in natürlicher Parametrisierung.
Weiter gegeben $\zeta_0, \eta \in \overset{\circ}{\mathcal{Z}}$ mit $\zeta_0 < \eta$ sowie $\alpha \in (0,1)$. Dazu seien wie in 1.9.5

$$a_0 = \inf\{a > 0 \mid P_{\zeta_0}(t(a,\eta) < \infty) \leq \alpha\}$$

und $\gamma_0 \in [0,1]$ wie in 1.9.6 derart, dass

$$\gamma_0 P_{\zeta_0}(t^+(a_0,\eta) < \infty) + (1-\gamma_0) P_{\zeta_0}(t(a_0,\eta) < \infty) = \alpha.$$

Dann gilt gemäß Satz 1.9.6: $a_0 > 0$ und alle randomisierten rechtsseitigen Ersteintrittszeiten $t = t_{\gamma^*}(a_0,\eta)$ mit $\gamma^* \geq \gamma_0$ erfüllen die Bedingungen

$$P_{\zeta_0}(t < \infty) \leq \alpha \text{ und } E_\eta t < \infty.$$

Gegenstand diesen Abschnittes ist es, zu klären für welche $\zeta_1 \in \mathcal{Z}$ die Stoppzeit $t_{\gamma^*}(a_0,\eta)$ abgeschlossen sind und damit der sequentielle Test $\varphi_{t_{\gamma^*}(a_0,\eta)}$ aus 1.9.5 gleichmäßig optimal für $H_0 : \zeta \leq \zeta_0$ gegen $\bar{H}_1$ für $(\hat{P}^t_\alpha)$ ist, wobei $\bar{H}_1$ die Menge aller obigen Parameter ζ_1 bezeichne.
Allgemeiner untersuchen wir dies für alle randomisierten rechtsseitigen Ersteintrittszeiten $t_\gamma(a,\eta)$ mit beliebigen $a > 0$ und $\gamma \in [0,1]$ und kommen immer dann auf die Ersteintrittszeiten $t_{\gamma^*}(a_0,\eta)$ zu sprechen, wenn wir Schlussfolgerungen über gleichmäßig beste Tests der Güte 1 ziehen wollen.

Wegen $E_\eta t_\gamma(a,\eta) < \infty$ haben wir, dass $t_\gamma(a,\eta)$ unter P_η abgeschlossen ist. Mit einer Aussage über die Isotonie der Gütefunktion $\zeta \mapsto P_\zeta\big(t_\gamma(a,\eta) < \infty\big)$ des sequentiellen Tests

$$\varphi^*_{t_\gamma(a,\eta)} \text{ mit } \varphi^*_n = 1,\ n \in \mathbb{N},$$

erhalten wir dann, dass $t_\gamma(a,\eta)$ auch abgeschlossen ist für alle Parameter $\zeta > \eta$.
Die Isotonie der Gütefunktion $\zeta \mapsto P_\zeta\big(t_\gamma(a,\eta) < \infty\big)$ bekommen wir mit Hilfe von Lemma 1.6.14 und Bemerkung 1.6.15. Dort erhielten wir unter der Voraussetzung, dass die zugrundeliegende Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ *streng isotonen Dichtequotienten* in $\underset{\sim}{S} = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt, dass die Funktionen

$$\vartheta \mapsto \gamma P_\vartheta\big(t(a) \leq N\big) + (1-\gamma) P_\vartheta\big(t^+(a) \leq N\big)$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ isoton sind und folglich auch ihr Limes

$$\vartheta \mapsto \gamma P_\vartheta\big(t(a) < \infty\big) + (1-\gamma) P_\vartheta\big(t^+(a) < \infty\big)$$

isoton ist. Um dieses Resultat auf unsere Situation anzuwenden, wählen wir für $t_\gamma(a,\eta)$ eine andere Darstellung: Da gemäß (1.3.3) gilt:

$$L_n(\eta,\zeta_0) = e^{(\eta-\zeta_0)\left(\sum_{i=1}^n (T(X_i)-\Delta_0(\eta)\right)}, \tag{1.10.1}$$

erhalten wir wegen $a > 0$ und $\eta - \zeta_0 > 0$, dass gilt

$$t(a,\eta) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid S_n^* \geq \frac{\log a}{\eta - \zeta_0}\} \text{ mit} \tag{1.10.2}$$

$$S_n^* := \sum_{i=1}^n \big(T(X_i) - \Delta_0(\eta)\big), \text{ wobei gemäß 1.3.2.1}e) \;\; \Delta_0(\eta) = \frac{b(\eta)-b(\zeta_0)}{\eta-\zeta_0}.$$

1.10.1 Bemerkung

Die einseitigen unbeschränkten Ersteintrittszeiten $t(c)$ aus 1.5 (vgl. 1.5.17) ergeben sich als Spezialfall aus der Darstellung (1.10.2), wenn $\eta \downarrow \zeta_0$, denn es gilt $\lim_{\eta\downarrow\zeta_0} \Delta_0(\eta) = b'(\zeta_0)$.
In Satz 1.5.17 haben wir gezeigt, dass im Falle einparametriger Exponentialfamilien wegen $P_{\zeta_0}\big(t(c) < \infty\big) = 1$ unter diesen Stoppzeiten keine Lösungen für $\overline{H}_0 : \zeta = \zeta_0$ gegen $\hat{H}_1 : \zeta \in (\zeta_0, \hat{\zeta})$ existieren können, insb. damit auch keine Tests der Güte 1.
Aufgrund der Verwandtschaft der Ersteintrittszeit $t(c)$ mit $t(a,\eta)$ liegt die Vermutung nahe, dass unter $t(c)$ Tests der Güte 1 möglich sind, wenn die Nullhypothese ein geeignetes Stück nach links verschoben wird, d.h. für das Testen von $H_0 : \zeta \leq \zeta_{-1}$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$ für ein ζ_{-1} mit $\zeta_{-1} < \zeta_0$? Einen Beweis hierfür geben wir zum Ende des Kapitels. □

An der Darstellung (1.10.1) lesen wir ab, dass wegen $\eta - \zeta_0 > 0$ für $\mathcal{Q}$ streng isotoner Dichtequotient in $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ vorliegt und wir bekommen schließlich:

1.10.2 Lemma: Isotonie der Gütefunktion

Für alle $a > 0$, $\gamma \in [0,1]$ ist $\zeta \mapsto P_\zeta\big(t_\gamma(a,\eta) < \infty\big)$ isoton.

Hiermit können wir eine erste Optimalitätsaussage festhalten:

1.10.3 Korollar

Der sequentielle Test $\varphi^*_{t_{\gamma^*}(a_0,\eta)}$ liefert einen gleichmäßig besten Test der Güte 1 für $H_0 : \zeta \leq \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta \geq \eta$ z.N. α unter $t_{\gamma^*}(a_0,\eta)$.

Es fragt sich jetzt, ob dieses Ergebnis noch weiter verbessert werden kann, in dem Sinne, dass wir die Abgeschlossenheit der Ersteintrittszeiten $t_{\gamma^*}(a_0, \eta)$ sogar für Parameter $\zeta < \eta$ erhalten können?
Dazu stecken wir die Grenzen dafür ab, was maximal erreicht werden kann, und geben eine Antwort auf die Frage, über welchen Parameterbereich maximal Güte 1 gehalten werden kann.
Hierauf liefert die Stetigkeit der Gütefunktion $\zeta \mapsto P_\zeta\big(t_{\gamma^*}(a_0, \eta) < \infty\big)$ eine Antwort, wir notieren zunächst:

1.10.4 Bemerkung: Stetigkeit der Gütefunktion

Es sei $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Exponentialfamilie, für die Q_ζ^T stetige Verteilungsfunktion besitzte. Dann lässt sich leicht nachweisen, dass für jedes $a > 0$, $\gamma \in [0,1]$ die Gütefunktion

$$\zeta \mapsto P_\zeta\big(t_\gamma(a, \eta) < \infty\big) \quad \text{stetig ist.}$$

□

Daher muss in der oberen Situation wegen $P_{\zeta_0}\big(t_{\gamma^*}(a_0, \eta) < \infty\big) \leq \alpha$ die Güte irgendwann zwischen ζ_0 und η unterhalb von 1 sinken. Aufgrund der Isotonie der Gütefunktion erfolgt das von genau einer kritischen Stelle ζ^* an. Nach dem Satz von Chung-Fuchs (vgl. Chow-Teicher [CT], Korollar 2 auf S.145f) wird es jene Stelle $\zeta^* \in (\zeta_0, \eta)$ sein, unter welcher die Zuwächse

$$D_i = T(X_i) - \Delta_0(\eta) \tag{1.10.3}$$

des Random-Walks $(S_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ den Erwartungswert 0 besitzen. Nun ist gemäß 1.3.2.2.1 für $\zeta \in \mathring{\mathcal{Z}}$

$$E_\zeta D_i = b'(\zeta) - \Delta_0(\eta). \tag{1.10.4}$$

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung liefert dann die Existenz einer solchen Stelle $\zeta^* \in (\zeta_0, \eta)$ mit

$$b'(\zeta^*) = \frac{b(\eta) - b(\zeta_0)}{\eta - \zeta_0}, \tag{1.10.5}$$

welche aufgrund der strikten Konvexität von $\zeta \mapsto b(\zeta)$ eindeutig bestimmt ist. Mit diesen Überlegungen bekommen wir eine Charakterisierung für die Abgeschlossenheit der rechtsseitigen Ersteitrittszeiten $t(a, \eta)$ durch folgenden:

1.10.5 Satz: Charakterisierung der Abgeschlossenheit

Es sei $\zeta^* \in (\zeta_0, \eta)$ *mit (1.10.5), und es sei*

$$\underline{a} := \operatorname*{ess\,inf}_{P_\zeta} \frac{f_\eta}{f_{\zeta_0}}(X_1).$$

Dann gilt für alle $a > \underline{a}$*:*

a) Für $\zeta > \zeta^*$

$$E_\zeta t(a,\eta) < \infty, \quad \textit{insb. } P_\zeta\big(t(a,\eta) < \infty\big) = 1.$$

b) Für $\zeta = \zeta^*$

$$P_\zeta\big(t(a,\eta) < \infty\big) = 1, \ \textit{und } E_\zeta t(a,\eta) = \infty.$$

c) Für $\zeta < \zeta^*$

$$P_\zeta\big(t(a,\eta) < \infty\big) < 1, \quad \textit{insb. } E_\zeta t(a,\eta) = \infty$$

Beweis:

Zunächst haben wir wegen $a > \underline{a}$, dass gilt $P_\zeta(t(a,\eta) = 1) < 1 \ \forall \zeta \in \mathcal{Z}$.
Gemäß (1.10.2) kann $t(a,\eta)$ als rechtsseitge Ersteintrittszeit des Random-Walks $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ aufgefasst werden. Die Zuwächse D_i des Random-Walks $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ sind stochastisch unabhängig und identisch verteilt unter P_ζ, $\zeta \in \mathcal{Z}$, und sie erhalten wegen (1.10.5) die Gestalt

$$D_i = T(X_i) - b'(\zeta^*). \tag{1.10.6}$$

Hieraus bekommen wir aufgrund (1.10.4) und 1.3.2.1.2, dass für $\zeta \in \overset{\circ}{\mathcal{Z}}$ gilt:

$$E_\zeta D_1 \begin{cases} < & & & & < & \\ = & 0, & \text{falls} & \zeta & = & \zeta^*. \\ > & & & & > & \end{cases}$$

Damit erhalten wir folgende 3 Fälle:

a) Für $\zeta > \zeta^*$ ist $E_\zeta D_1 > 0$, und aus dem elementaren Erneuerungstheorem (vgl. Chow-Teicher [CT], S.148) folgt

$$E_\zeta t(a,\eta) < \infty \ \forall a > 1,$$

so dass aufgrund der Isotonie von $t(a,\eta)$ in a dies auch für jedes $a > 0$ gilt.

b) Für $\zeta = \zeta^*$ ist $E_\zeta D_1 = 0$. Da $E_\zeta |D_1| > 0$. liefert der Satz von Chung-Fuchs (vgl. Chow-Teicher [CT], Cor.2 auf S.145)

$$\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty \quad P_\zeta\text{-f.s.},$$

insb. ergibt sich $P_\zeta\big(t(a,\eta) < \infty\big) = 1$. Außerdem liefert Chow-Teicher [CT], Cor.1 auf S.145 $E_\zeta t(a,\eta) = \infty$.

c) Für $\zeta < \zeta^*$ ist $E_\zeta D_1 < 0$, und mit dem 2. Kolmogoroffschen Gesetz der großen Zahlen erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty \; P_\zeta\text{-f.s.}.$$

Wegen Chow-Teicher [CT] Theorem 1 auf S.141f folgt daraus dann $P_\zeta(t(a,\eta) < \infty) < 1$.

□

Da für alle $a > 0$ gilt

$$t(a,\eta) \le t_\gamma(a,\eta) \le t(a+\epsilon,\eta) \quad \forall \epsilon > 0,$$

erhalten wir mit Satz 1.10.5 auch eine Charakterisierung der Abgeschlossenheit für $t_\gamma(a,\eta)$. Mit ζ^* aus (1.10.5) sind wir an die Grenze dafür gestoßen, wo wir gerade noch Tests der Güte 1 für das Problem (1.2.2) erhalten können.
Wir fassen die Ergebnisse zusammen: da aufgrund der Definition von a_0 gilt $a_0 > \underline{a}$, bekommen wir

1.10.6 Korollar

Es sei $\zeta^* \in (\zeta_0, \eta)$ mit (1.10.5).
Dann liefern die sequentiellen Tests $\varphi^*_{t_{\gamma^*}(a_0,\eta)}$ mit $\gamma^* \ge \gamma_0$ gleichmäßig beste Tests der Güte 1 für $H_0 : \zeta \le \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta \ge \zeta^*$.
Und für $\zeta < \zeta^*$ gilt $E_\zeta \varphi^*_{t_{\gamma^*}(a_0,\eta)} < 1$. □

1.10.7 Bemerkung

Der Satz 1.10.5 gibt uns auch eine positive Antwort auf die Frage, ob unter $t(c) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^n \big(T(X_i) - b'(\zeta_0)\big) \ge c\}$ aus 1.5 gleichmäßig beste Tests der Güte 1 auftreten können, wenn die Nullhypothese ein geeignetes Stück nach links verschoben wird. Ersetzen wir nämlich im Beweis von 1.10.5 ζ^* durch ζ_0,

so bekommen wir, dass für $\zeta < \zeta_0$ gilt: $P_\zeta(t(c) < \infty) < 1$ für $c \in \mathbb{R}$ derart, dass $t(c) \neq 1$.
Damit lässt sich für jedes $\alpha \in (0,1)$ und $\zeta_{-1} < \zeta_0$ ein $c = c(\alpha, \zeta_{-1}) \in \mathbb{R}$ finden mit $P_\zeta(t(c) < \infty) \leq \alpha$ (vgl. 1.9.6), so dass wir aufgrund der Isotonie der Gütefunktion $\zeta \mapsto P_\zeta(t(c) < \infty)$ folgende Optimaltiätsaussage festhalten können:
$\varphi^*_{t(c)}$ mit $\varphi^*_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$ liefert einen gleichmäßig besten Test der Güte 1 für $H_0 : \zeta \leq \zeta_{-1}$ gegen $H_1 : \zeta \geq \zeta_0$.

Abschließend drängt sich die Frage auf, ob der sequentielle Test $\varphi^*_{t_{\gamma^*}(a_0,\eta)}$, wenn er auch nicht die Güte 1 auf (ζ_0, ζ^*) besitzt, dort vielleicht die Güte maximiert unter allen TV's $\underset{\sim}{\varphi}$, die unter $t_{\gamma^*}(a_0, \eta)$ auf $H_0 : \zeta \leq \zeta_0$ das Niveau α einhalten? Der Satz 1.5.17 liefert hierauf eine negative Antwort:

1.10.8 Satz

Es sei $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Exponetialfamilie und $\zeta_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{Z}}$, so dass $Q^T_{\zeta_0}$ keine Laplaceverteilung über $\{-u, u\}$ für ein $u > 0$ definiert. Weiter sei $t = t_{\gamma^*}(a_0, \eta)$ mit $\gamma^* \geq \gamma$. Dann gibt es für $(\hat{P}^t_\alpha)$ keine gleichmäßig besten Tests φ_t für $\overline{H}_0 : \zeta = \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$.

Beweis:

A: Es gibt ein TV $\underset{\sim}{\varphi}^*$ derart, dass φ^*_t das Problem

$$\begin{cases} E_{\zeta_1}\varphi_t 1_{\{t<\infty\}} + P_{\zeta_1}(t = \infty) \overset{!}{=} \sup \quad \forall \zeta_1 > \zeta_0 \\ E_{\zeta_0}\varphi_t 1_{\{t<\infty\}} \leq \alpha. \end{cases}$$

löst. Gemäß Satz 1.5.17 wissen wir, dass unter den rechtsseitig beschränkten Ersteintrittszeiten $t = t(c)$ keine Lösung für das obige Problem gibt, sofern $Q^T_{\zeta_0}$ keine Laplaceverteilung über $\{-u, u\}$ für ein $u > 0$ definiert. Diese Aussage überträgt sich auf die Ersteintrittszeiten $t_{\gamma^*}(a_0, \eta)$, wie man am Beweis von 1.5.17 leicht sieht. Das ergibt den Widerspruch zur Annahme. □

Zusammenfassend können wir festhalten, dass die Stelle ζ^* nicht nur die Grenze zur Güte 1 angibt, sondern überhaupt zur gleichmäßigen Optimalität, eine Feststellung, die wir in Kapitel 2 für die Behandlung des Problems $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ noch gebrauchen werden.

Kapitel 2

Optimale sequentielle Tests für einfache Hypothesen

Wie in Kapitel 1 sollen bei stochastisch unabhängigen, identisch verteilten Beobachtungen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Hypothesen H_0 und H_1 getestet werden, aber jetzt unter variierenden randomisierten Stoppzeiten. Daher werden wir von den sequentiellen Tests zusätzlich neben der Bedingung an die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art fordern, dass der erwartete Stichprobenumfang unter einer dritten Verteilung P_η eine vorgegebene Schranke $\delta \in (1, \infty)$ nicht überschreiten darf, diese Bedingung ersetzt gewissermaßen den festen Stichprobenumfang im klassischen Fall bzw. die Forderung bei der Aufgabe (P_α^t), dass unter einer festen Stoppzeit getestet wird. Damit werden auch die artifiziellen Sonderfälle wie z.B. Tests der Güte 1 mit $t \equiv \infty$ von vornherein ausgeschlossen (vgl. auch 1.9 S.104f). Unter diesen Nebenbedingungen soll die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art minimiert werden. Das Problem soll in diesem Kapitel zunächst nur für einfache Hypothesen $H_0 = \{\vartheta_0\}$ $H_1 = \{\vartheta_1\}$ gelöst werden. Bei den zulässigen sequentiellen Tests unterscheiden wir im wesentlichen zwischen zwei Klassen: zum einen sequentielle Tests mit unendlichem Beobachtungshorizont und zum anderen solche mit endlichem Horizont. Wir behandeln die Neyman-Pearson Aufgabe für beide Klassen gleichzeitig, indem wir ein einfaches Neyman-Pearson-Lemma für sequentielle Tests formulieren. Es wird sich zeigen, dass dieses Vorgehen (der gleichzeitigen Behandlung) auch berechtigt ist, denn für beide Klassen liefert das Neyman-Pearson-Lemma Lösungen von gleicher Struktur. Und dennoch zeigen sich auch Unterschiede zwischen den Problemen mit endlichem und unendlichem Beobachtungshorizont, die a priori nicht zu erwarten sind: Bei unendlichem Horizont können trotz der Bedingung an

den erwarteten Stichprobenumfang offene Lösungen auftreten, so dass Randomisieren im Unendlichen zugelassen werden muss, um die Existenz von Lösungen zu sichern, und bei endlichem Horizont braucht ein optimaler Test von Güte kleiner 1 die zur Verfügung stehenden Ressourcen für den erwarteten Stichprobenumfang nicht immer voll auszunutzen.
Die Lösung des Neyman-Pearson- Problems wird im Vergleich zum Problem (P_α^t) aus Kapitel 1 erheblich schwieriger: da die Stoppzeiten hier mitvariieren, wird zusätzlich ein Problem des optimalen Stoppens zu lösen sein. Deswegen werden wir die Untersuchungen aus Kapitel 1 durch geeignete Hilfsmittel ergänzen müsssen, die es erlauben das Problem des optimalen Stoppens mitzubehandeln:

1) Die *Existenz optimaler Lösungen* werden wir nicht mehr konstruktiv nachweisen können, wie es noch beim Problem (P_α^t) möglich war. Wir werden uns am Vorbild der Schwach*-Folgenkompaktheit der Menge der klassischen Tests orientieren und die Menge der sequentiellen Tests mit einer geeigneten topologischen Struktur - der schwach-*-Topologie - ausstatten (vgl. Müller-Funk [MF]), die uns die Existenz extremaler Elemente liefert. In dieser Topologie gilt bekanntlich eine Folgenkompaktheitsaussage für die Menge der sequentiellen Tests: die schwach*-Folgenkompaktheit der Menge aller sequentiellen Tests.

2) Zur Formulierung *hinreichender und notwendiger Bedingungen für Optimalität* werden wir Hilfsmittel aus der Theorie der Optimierung unter „konvexen“ Nebenbedingungen bereitstellen. Mit Hilfe eines Dualitätssatzes können wir das Ausgangsproblem in zwei Teilprobleme zerlegen: zum einen in ein Problem des optimalen Stoppens unter Nebenbedingungen und zum anderen in ein Testproblem (P_α^t) unter fester Stoppzeit t, das wir in Kapitel 1 bereits vollständig behandelt haben.

Wir legen unseren Untersuchungen das iid-Modell 1.1.1 zugrunde. Demgemäß bezeiche auch in diesem Kapitel $\mathcal{Q} = \{Q_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ eine einparametrige Familie von beliebigen W-Maßen sofern nichts anderes ausdrücklich gesagt wurde.

2.1 Modellbildung und Grundlagen

In 1.1, wo die Stoppzeit festlag, haben wir einen sequentiellen Test durch das „gestoppte " TV φ_t angegeben. Für die Untersuchungen in diesem Kapitel bei variierenden Stoppzeiten erweist es sich als nützlich Stoppentscheidungen und Terminalentscheidungen als ein Paar zu „trennen". Dabei wollen wir sequentielle Tests mit endlichem und unendlichem Beobachtungshorizont in einem Formalismus gemeinsam behandeln. Dies führt zu folgender Definition:

2.1.1 Definition

Es sei $\mathcal{N} \in \{\mathbb{N}, \overline{\mathbb{N}}, \{1, \dots, N\} \mid N \in \mathbb{N}\}$ eine Indexmenge von natürlichen Zahlen. Ein *sequentieller Test* ist ein paar $T = (t, \underset{\sim}{\varphi})$, bestehend aus

i) einer Stoppzeit $t : \Omega \to \mathcal{N}$ bzgl. $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathcal{N}}$.

ii) einem TV $\underset{\sim}{\varphi} = (\varphi_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$, d.h. einem zu $\underset{\sim}{\mathcal{C}}$ adaptierten Prozeß mit Werten in $[0, 1]$.

Da bei einem sequentiellen Test T das TV $\underset{\sim}{\varphi}$ nur auf den Mengen der möglichen Stoppzeitpunkte $\{t = n\}$, $n \in \mathcal{N}$ „gesehen" werden kann, verwenden wir im folgenden den Begriff sequentieller Test in doppelter Bedeutung, nämlich sowohl für das Paar $T = (t, \underset{\sim}{\varphi})$ als auch für das gestoppte TV φ_t. Für das getoppte TV gilt: $\varphi_t = \sum_{n \in \mathcal{N}} \varphi_n 1_{\{t=n\}}$.
Weiter bezeichnen wir die *Menge aller Stoppzeiten bzgl.* $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathcal{N}}$ mit $\mathcal{S}^{\mathcal{N}}$ und die *Menge aller sequentiellen Tests* mit $\mathcal{T}^{\mathcal{N}}$.
Wir verwenden für die drei Klassen von sequentiellen Tests folgende Sprechweisen:

- $T \in \mathcal{T}^{\{1,\dots,N\}}$ heiße *beschränkter* sequentieller Test,
- $T \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ heiße *abgeschlossener* sequentieller Test,
- $T \in \mathcal{T}^{\overline{\mathbb{N}}}$ heiße *unbeschränkter* sequentieller Test.

□

Im iid-Modell 1.1.1 soll folgende Aufgabe untersucht werden.

2.1.2 Sequentielles Neyman-Pearson-Problem $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$

Es seien $\vartheta_0, \vartheta_1, \eta \in \Theta$ mit $\vartheta_0 \neq \vartheta_1$, $\mathcal{N} \in \{\mathbb{N}, \overline{\mathbb{N}}, \{1, \ldots, N\} \mid N \in \mathbb{N}\}$ sowie $\alpha \in (0,1)$, $\delta \in (1, \infty)$ mit $\delta < \sup \mathcal{N}$ und dazu

$$\mathcal{T}^{\mathcal{N}}(\alpha, \delta) := \{T = (t, \underset{\sim}{\varphi}) \in \mathcal{T}^{\mathcal{N}} \mid E_{\vartheta_0} \varphi_t \leq \alpha,\ E_\eta t \leq \delta\}.$$

Bei einem sequentiellen Neyman-Pearson-Problem $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ wird ein sequentieller Test $T^* = (t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ gesucht mit

i) T^* ist *zulässig* für $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$, d.h. $T^* \in \mathcal{T}^{\mathcal{N}}(\alpha, \delta)$

ii) $E_{\vartheta_1} \varphi^*_{t^*} = \sup\limits_{T \in \mathcal{T}^{\mathcal{N}}(\alpha,\delta)} E_{\vartheta_1} \varphi_t$.

Wie in 1.2 werden wir im weiteren folgende explizite Darstellung des obigen Problems benutzen:

$$(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} E_{\vartheta_1} \varphi_t \overset{!}{=} sup \\ E_{\vartheta_0} \varphi_t \leq \alpha \\ E_\eta t \quad \leq \delta \end{array} \right\}$$

□

Die Forderung $\delta < \sup \mathcal{N}$ an die Schranke für den erwarteten Stichprobenumfang wird gestellt, damit es sich bei $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ um ein echtes sequentielles Problem handelt, ansonsten wäre $t \equiv \infty$ bzw. $t \equiv N$ als Lösung möglich, im letzteren Fall ließe sich als Lösung immer der beste Test z.N. α bei festem Stichprobenumfang N wählen.

Aufgrund der Möglichkeit bei den Terminalentscheidungen und Stoppentscheidungen zu randomisieren, ist für $\mathcal{N} \in \{\mathbb{N}, \overline{\mathbb{N}}, \{1, \ldots, N\} \mid N \in \mathbb{N}\}$ die Aufgabe $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ für jedes $\alpha \in (0,1)$ und $\delta \in (1, \sup \mathcal{N})$ sinnvoll: z.B. schöpft der Test $T = (t, \underset{\sim}{\varphi})$ mit

$$\varphi_n \equiv \alpha \ \ (n \in \mathbb{N}) \quad \text{und} \quad t = \lfloor \delta \rfloor + 1_{\{U_0 \leq c\}} \tag{2.1.1}$$
$$(c = \delta - \lfloor \delta \rfloor, P^{U_0}_\vartheta = \mathcal{R}(0,1) \text{ vgl. } 1.1)$$

beide Niveaus voll aus, und ist somit zulässig für $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$.

Wegen der Nebenbedingung an den erwarteten Stichprobenumfang kommen in $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ auch für unendlichen Beobachtungshorizont, d.h. $\mathcal{N} \in \{\mathbb{N}, \overline{\mathbb{N}} \mid N \in \mathbb{N}\}$ nur Stoppzeiten t in Frage mit $E_\eta t < \infty$.
Daher können wir uns auf die Mengen

$$\mathcal{S}^{\mathcal{N}}_\eta = \{t \in \mathcal{S}^{\mathcal{N}} \mid E_\eta t < \infty\} \text{ und } \mathcal{T}^{\mathcal{N}}_\eta = \{T = (t, \underset{\sim}{\varphi}) \mid E_\eta t < \infty\}$$

beschränken.

Für die Lösung des Problems $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ spielen natürlich wieder Dichtequotienten eine wichtige Rolle.

Wie in 1.2.5 bezeichne im ganzen weiteren Kapitel 2 P ein W-Maß, das zu $P_{\vartheta_0} + P_{\vartheta_1} + P_\eta$ äquivalent sei, wobei in 1.2.5 $P_{\vartheta_2} := P_\eta$ sei. Wir verfügen damit für $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ über die P-Dichten M^i_n, $i = 0, 1, 2$, wobei gemäß unserer Konvention M^2_n die P-Dichte von $P_{\eta|\mathcal{C}_n}$ bezeichne.
Die Erwartungswerte in $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ lassen sich gemäß (1.2.7) dann folgendermaßen über die Dichten darstellen : Sei $T = (t, \underset{\sim}{\varphi}) \in \mathcal{T}^{\mathcal{N}}$ und $i = 0, 1$, so gilt

$$E_{\vartheta_i}\varphi_t = E_P(\varphi_t\, M^i_t\,), \quad E_\eta t = E_P(t\, M^2_t\,). \tag{2.1.2}$$

Wir verfügen mit den Dichten bzgl. P auch über einen Likelihoodprozess, nämlich $(M^i_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$, dessen Konvergenzverhalten im Hinblick auf den Existenznachweis für Lösungen von $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ eine wesentliche Rolle zukommt.
Der Prozess bildet bekanntlich ein Martingal bzgl. P und $\underset{\sim}{\mathcal{C}}$, das $\mathbb{L}_1$-*dominiert* ist, d.h. $\sup_{n\in\overline{\mathbb{N}}} M^i_n \in \mathbb{L}_1(P)$.
Daher konvergiert der Likelihoodprozesse aufgrund des Martingalkonvergenzsatz[1] und wegen $E(M^i_\infty \,|\, \mathcal{C}_n) = M^i_n$ P-f.s., P-fast-sicher gegen M^i_∞.

Wir wollen uns hier noch dem Problem der Abgeschlossenheit von Lösungen der Aufgabe $(\mathbb{P}^{\overline{\mathbb{N}}}_{\alpha,\delta})$ zuwenden:
Zunächst haben wir aufgrund der Bedingung an den erwarteten Stichprobenumfang, dass Lösungen $T^* = (t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ von $(\mathbb{P}^{\overline{\mathbb{N}}}_{\alpha,\delta})$ - falls sie existieren - unter P_η abgeschlossen sind, d.h.$P_\eta(t^* < \infty) = 1$.
Im Hinblick auf das Randomisieren im Unendlichen stellt sich dann die Frage, ob trotz der Bedingung an den erwarteten Stichprobenumfang, Lösungen von $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ auftreten können, welche unter P_{ϑ_0} oder P_{ϑ_1} mit positiver Wahrscheinlichkeit nie stoppen? Eine Antwort hierauf haben wir bereits in 1.9 (vgl. S.106ff) gegeben: sie lautet leider „Ja “. Wichtige Beispiele für offene optimale Lösungen liefern nämlich Tests der Güte 1 für äquivalente Verteilungsklassen $\mathcal{Q}$. Aufgrund der Äquivalenz der eingeschränkten W-Maße ist jede Lösung von $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ der Güte 1 wegen der Bedingung an die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art notwendig unter P_{ϑ_0} offen (vgl. auch 1.9 S.104). Ein erstes Beispiel für Tests der Güte 1 in der Situation $\eta = \vartheta_1$ liefert ein rechtsseitiger nichtrandomisierter SPRT (vgl. 1.9.4):

[1] vgl. [Sch 1] *Satz 11.32*

2.1.3 Beispiel (Test der Güte 1)

Es sei $\mathcal{Q}$ eine äquivalente einparametrige Verteilungsklasse. Es seien $\eta = \vartheta_1$ und zu $a > 1$ gegeben der sequentielle Test $T(a) = \big(t(a,\eta), \underset{\sim}{\varphi}\big)$ mit

$$t(a,\eta) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid L_n(\eta, \vartheta_0) \geq a\}, \quad \varphi_n = 1,\ n \in \mathbb{N},\ \varphi_\infty = 0.$$

Dann liefert Lemma 1.9.2:

$$\alpha(a) = P_{\vartheta_0}\big(t(a,\eta) < \infty\big) \in (0,1) \text{ und } \delta(a) = E_\eta t(a,\eta) \in (1,\infty).$$

Damit ergibt der rechtsseitige nichtrandomisierte Test $T(a)$ eine Lösung der Güte 1 für das Problem $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ zu seinen eigenen Niveaus$\alpha = \alpha(a)$ und $\delta = \delta(a)$.

Wir können dieses Beispiel noch weiter verschärfen und Beispiele in der Situation $\eta \neq \vartheta_1$ für Lösungen von $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ angeben, die unter P_{ϑ_0} *und* P_{ϑ_1} offen sind, so dass auf die Entscheidungsfunktion φ_∞ i.a. nicht verzichtet werden kann (vgl. 1.9.7):

2.1.4 Beispiel (Test der Güte 1)

Es sei $\mathcal{Q}$ eine äquivalente einparametrige Verteilungsklasse. In der Situation $\eta \notin \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$ seien zu $a > 1$

$$t_i := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid L_n(\eta, \vartheta_i) \geq a\} \quad i = 0, 1.$$

Aus Lemma 1.9.2 folgt $E_\eta t_i < \infty$ und $P_{\vartheta_i}(t_i < \infty) \leq \frac{1}{a}$.
Damit ist die Stoppzeit

$$t := \max\{t_0, t_1\} \text{ offen unter } P_{\vartheta_0} \text{ und } P_{\vartheta_1}$$

und der sequentielle Test $T = (t, \underset{\sim}{\varphi})$ mit

$$\varphi_n = 1,\ n \in \mathbb{N},\ \varphi_\infty = 1_C \text{ mit } C \in \mathcal{C}_\infty : P_{\vartheta_1}(C) = 1,\ P_{\vartheta_0}(C) = 0,$$

liefert eine Lösung der Güte 1 für das Problem $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ zu seinen eigenen Niveaus $\alpha = P_{\vartheta_0}(t < \infty)$ und $\delta = E_\eta t$. □

2.2 Existenzaussagen: Schwach*- Folgenkompaktheit der Menge der sequentiellen Tests

Wir wollen in diesem Abschnitt der Frage nachgehen, ob für die Probleme $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\mathcal{N}})$, $\mathcal{N} \in \{\mathbb{N}, \overline{\mathbb{N}}, \{1, \ldots, N\} \mid N \in \mathbb{N}\}$ Lösungen existieren und zwar für jede Wahl von $\vartheta_0, \vartheta_1, \eta$ mit $\vartheta_0 \neq \vartheta_1$ und für jedes $\alpha \in (0,1)$ sowie $\delta \in (1, \sup \mathcal{N})$? Dass die Antwort auf diese Frage vielleicht nicht so selbstverständlich ja lautet, diesen Hinweis haben bereits die Beispiele 2.1.3 und 2.1.4 von Lösungen der Güte 1 geliefert: Für das Problem $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\overline{\mathbb{N}}})$ können auch offene Lösungen auftreten. Daher stellt sich die Frage, ob dies Auswirkungen auf die Existenz von Lösungen von $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\mathbb{N}})$ haben wird. Außerdem gibt das einen Hinweis darauf, dass auf die Rolle des Entscheidungsverfahren φ_∞ im allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

Der Existenznachweis einer Lösung von $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\mathcal{N}})$ wird im allgemeinen nicht mehr konstruktiv ausgeführt werden können, da hier auch noch die Stoppzeiten mitvariieren.
Aber wegen $\mathcal{T}^{\mathcal{N}}(\alpha, \delta) \neq \emptyset$ existiert immerhin $s := \sup_{T \in \mathcal{T}^{\mathcal{N}}(\alpha,\delta)} E_{\vartheta_1} \varphi_t \in [0,1]$ und dazu eine Folge $\big(T(k)\big)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}^{\mathcal{N}}$ mit :

$$\big(T(k)\big)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}^{\mathcal{N}}(\alpha, \delta) \quad \text{und} \quad E_{\vartheta_1} \varphi(k)_{t(k)} \to s. \tag{2.2.1}$$

Nach dem Vorbild der schwach*-Folgenkompaktheit der Menge der klassischen Tests $\Phi_N = \{\phi : \Omega \to [0,1] \mid \phi \text{ ist } \mathcal{C}_N - \mathbb{B}\text{-messbar}\}$ versuchen wir dann die Existenz eines sequentiellen Tests $T \in \mathcal{T}^{\mathcal{N}}$ sowie einer Teilfolge $\big(T(k_l)\big)_{l \in \mathbb{N}}$ zu beweisen, so dass gilt

$$\begin{aligned} E_{\vartheta_i}\big(\varphi(k_l)_{t(k_l)}\big) \quad &\to \quad E_{\vartheta_i}\big(\varphi_t\big) \quad (i = 0,1), \\ E_\eta t(k_l) \quad &\to \quad E_\eta t. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Da $\big(T(k_l)\big)_{l \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}^{\mathcal{N}}(\alpha, \delta)$, folgt damit $T \in \mathcal{T}^{\mathcal{N}}(\alpha, \delta)$ und somit die Optimalität von T bzgl. $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\mathcal{N}})$.
Es sei hier angemerkt, dass wir statt der Konvergenz $E_\eta t(k_l) \to E_\eta t$ zeigen werden, dass aus $E_\eta t(k_l) \leq \delta$, folgt $E_\eta t \leq \delta$, woraus wir auch die Zulässigkeit von t für das Problem $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\mathcal{N}})$ erhalten.
Für dieses Vorhaben schreiben wir die Erwartungswerte unter P_{ϑ_i} (i=0,1,2) um mit Hilfe der Dichten $(M_n^i)_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ (vgl. 2.1.2) bzgl. eines zu $P_{\vartheta_0} + P_{\vartheta_1} + P_\eta$ äquivalenten W-Maßes P.

Im folgenden kürzen wir den Erwartungswert unter P mit E ab.
Wir bekommen wegen 1.2.9 und (2.1.2) die für funktionalanalytische Betrachtungen geeignetere Darstellung:

$$\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} E\big(\varphi_n(k_l)\,1_{\{t(k_l)=n\}}\,M_n^i\big) \quad\to\quad \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} E\big(\varphi_n\,1_{\{t=n\}}\,M_n^i\big) \tag{2.2.3}$$

$$\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} E\big(n\,1_{\{t(k_l)=n\}}\,M_n^2\big)\leq\delta \quad\Rightarrow\quad \sum_{n\in\mathbb{N}} E\big(n\,1_{\{t=n\}}\,M_n^2\big)\leq\delta. \tag{2.2.4}$$

Bei festem Stichprobenumfang N ist $t(k)\equiv N$ und die Aussage (2.2.3) ergibt sich daraus, dass die Menge der klassischen Tests Φ_N bekanntlich folgenkompakt ist in der schwach*-Topologie des Lebesgue-Raums $\mathbb{L}_\infty(\Omega,\mathcal{C}_N,P_{|\mathcal{C}_N})$, dem topologischen Dualraum von $\mathbb{L}_1(\Omega,\mathcal{C}_N,P_{|\mathcal{C}_N})$ (vgl. Witting [Wi], Satz 2.14 auf S.205ff und Kor.2.15 auf S. 207), da die Dichten M_N^i Elemente von $\mathbb{L}_1(\Omega,\mathcal{C}_N,P_{|\mathcal{C}_N})$ liefern.
Es gilt für die Menge der sequentiellen Tests $\mathcal{T}^{\mathcal{N}}$ eine entsprechende Folgenkompaktheitsaussage anzugeben, die passend zur Struktur von $\mathcal{T}^{\mathcal{N}}$ aus zwei Teilaussagen bestehen wird, einer Folgenkompaktheitsaussage für die Menge der Stoppzeiten $\mathcal{S}^{\mathcal{N}}$ und einer für die gestoppten TV's $\{\varphi_t\,|\,(t,\underset{\sim}{\varphi})\in\mathcal{T}^{\mathcal{N}}\}$.
Die Grundideen entstammen der Habilitationsschrift von Müller-Funk: „Mathematical Programming and Optimal Stopping in Sequential Testing Theorie“. Wir treffen für diesen Abschnitt die Konvention, dass alle auftretenden Gleichungen bzw. Ungleichungen P-f.s zu lesen sind. Wie üblich identifizieren wir $P_{|\mathcal{C}_n}$-f.s. übereinstimmende reellwertige $\mathcal{C}_n$-meßbare Funktionen, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird.

Aufgrund der Äquivalenz zwischen randomisierten Stoppzeiten und Abbruchregeln im Sinne von Lemma 1.2.7 und Satz 1.2.9 genügt es eine schwach*-Folgenkompaktheit für die beiden folgenden Mengen von $\underset{\sim}{\mathcal{C}}$-adaptierten stochastischen Prozessen anzugeben:

2.2.1 Definition (vgl. Müller-Funk [MF], *Seite 2.3*)

$$\mathcal{G}_{\leq} \;:=\; \mathcal{G}_{\leq}(\underset{\sim}{\mathcal{C}}) = \{\underset{\sim}{g}=(g_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}\;|\;g_n:\Omega\to[0,1]\;\;\mathcal{C}_n-\text{meßbar}\;\;\forall n\in\overline{\mathbb{N}}\;\text{ mit }\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} g_n\leq 1\},$$

$$\mathcal{G}_{=} \;:=\; \mathcal{G}_{=}(\underset{\sim}{\mathcal{C}}) := \{\underset{\sim}{g}\in\mathcal{G}_{\leq}(\underset{\sim}{\mathcal{C}})\;|\;\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} g_n = 1\}.$$

$\mathcal{G}_=$ bezeichnet die Menge aller Abbruchregeln, und $\mathcal{G}_\leq$ enthält offensichtlich die komponentenweise gebildeten Produkte $\underset{\sim}{g}\cdot\underset{\sim}{\varphi}:=(g_n\,\varphi_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ von Abbruchregeln $\underset{\sim}{g}$

und TV's $\underset{\sim}{\varphi}$, beschreibt daher die Menge aller gestoppten TV's $\{\varphi_t \mid T \in \mathcal{T}^{\overline{\mathbb{N}}}\}$ und liefert eine sequentielle Entsprechung zu der Menge der klassischen Tests.

Um die Menge $\mathcal{G}_{\leq}$ - und damit natürlich auch die Menge $\mathcal{G}_{=}$ als Teilmenge von $\mathcal{G}_{\leq}$ - mit einer schwach*-Topologie zu versehen, benötigt man ein topologisch duales Paar von Banachräumen $(\mathbb{L}, \mathbb{L}^*)$ derart, daß $\mathcal{G}_{\leq}$ als Teilraum des Dualraums $\mathbb{L}^*$ aufgefaßt werden kann. Und außerdem benötigt man für die Konvergenzaussage (2.2.3), dass der Raum $\mathbb{L}$ die Folgen der Dichten $(M_n^i)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ enthält.

Es seien

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_1(c) \quad &:= \quad \Big\{ \underset{\sim}{X} = (X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \text{ reellwertiger Prozeß auf } (\Omega, \mathcal{C}_\infty) \mid \\
&\qquad \lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty \text{ und } \sup_{n\in\overline{\mathbb{N}}} |X_n| \in \mathbb{L}_1(P|\,\mathcal{C}_\infty) \Big\}, \\
\mathbb{L}_\infty(l_1) \quad &:= \quad \Big\{ \underset{\sim}{Z} = (Z_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \text{ reellwertiger Prozeß auf } (\Omega, \mathcal{C}_\infty) \mid \\
&\qquad \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} |Z_n| \in \mathbb{L}_\infty(P|\,\mathcal{C}_\infty) \Big\}
\end{aligned}$$

und dazu die Normen

$$\begin{aligned}
\|\underset{\sim}{X}\|_1 \quad &:= \quad E \sup_{n\in\overline{\mathbb{N}}} |X_n| \qquad \big(\underset{\sim}{X} \in \mathbb{L}_1(c)\big), \text{ bzw.} \\
\|\underset{\sim}{Z}\|_\infty \quad &:= \quad \|\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} |Z_n|\,\|_\infty \quad \big(\underset{\sim}{Z} \in \mathbb{L}_\infty(l_1)\big), \\
&\qquad \text{(wobei rechts die Supremumsnorm von } \mathbb{L}_\infty(P|\,\mathcal{C}_\infty) \text{ steht).}
\end{aligned}$$

Bekannterweise (vgl. Neveu [Ne], Seite 201f.) ist der Banachraum $\mathbb{L}_\infty(l_1)$ isometrisch isomorph zum topologischen Dualraum $\mathbb{L}_1(c)^*$ von $\mathbb{L}_1(c)$ unter dem Produkt

$$[\underset{\sim}{Z}, \underset{\sim}{X}] := \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} E(Z_n X_n). \tag{2.2.5}$$

In natürlicherweise bietet sich dann als duales Paar für $\mathcal{G}_{\leq}$ an das Paar

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_1(\underset{\sim}{\mathcal{C}}, c) \quad &:= \quad \{\underset{\sim}{X} \in \mathbb{L}_1(c) \mid X_n \text{ ist } \mathcal{C}_n\text{-messbar } \forall n \in \overline{\mathbb{N}}\} \\
\mathbb{L}_\infty(\underset{\sim}{\mathcal{C}}, l_1) \quad &:= \quad \{\underset{\sim}{Z} \in \mathbb{L}_\infty(l_1) \mid Z_n \text{ ist } \mathcal{C}_n\text{-messbar } \forall n \in \overline{\mathbb{N}}\},
\end{aligned}$$

von $\underset{\sim}{\mathcal{C}}$-adaptierten Prozessen unter dem obigen Produkt [,].

Aber der Banachraum $\mathbb{L}_\infty(\underset{\sim}{\mathcal{C}}, l_1)$ ist nur ein echter Teilraum des Dualraumes von $\mathbb{L}_1(\underset{\sim}{\mathcal{C}}, c)$ (vgl. Müller-Funk [MF], Beispiel 2.3 auf Seite 2.2), den Dualraum erhält man vielmehr aus $\mathbb{L}_\infty(l_1)$ durch Bedingen seiner Elemente unter der Filtration $\underset{\sim}{\mathcal{C}}$:

2.2.2 Satz (vgl. Müller-Funk [MF], Korollar 2.2 auf Seite 2.2)

Versieht man den linearen Raum

$$\Pi(\underset{\sim}{\mathcal{C}}, l_1) := \left\{ E^{\underset{\sim}{\mathcal{C}}}(\underset{\sim}{Z}) := \big(E(Z_n \mid \mathcal{C}_n)\big)_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \mid \underset{\sim}{Z} \in \mathbb{L}_\infty(l_1) \right\}$$

mit der Norm $\|\underset{\sim}{Y}\|_\pi := \inf\left\{ \|\underset{\sim}{Z}\|_\infty \mid \underset{\sim}{Z} \in \mathbb{L}_\infty(l_1) \text{ mit } E^{\underset{\sim}{\mathcal{C}}}(\underset{\sim}{Z}) = \underset{\sim}{Y} \right\} \quad \big(\underset{\sim}{Y} \in \Pi(\underset{\sim}{\mathcal{C}}, l_1)\big)$, *dann gilt:*

i) $\Pi(\underset{\sim}{\mathcal{C}}, l_1)$ *ist isometrisch isomorph zu* $\mathbb{L}_1(\underset{\sim}{\mathcal{C}}, c)^*$ *unter dem Produkt* $[\ ,\ ]$ *aus 2.2.5.*

ii) Für $\underset{\sim}{X} \in \mathbb{L}_1(\underset{\sim}{\mathcal{C}}, c)$ *und* $\underset{\sim}{Y} = E^{\underset{\sim}{\mathcal{C}}}(\underset{\sim}{Z})$ *mit* $\underset{\sim}{Z} \in \mathbb{L}_\infty(l_1)$ *gilt*

$$[\underset{\sim}{Y}, \underset{\sim}{X}] \overset{def}{=} \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} E(Y_n X_n) = [\underset{\sim}{Z}, \underset{\sim}{X}] = E\Big(\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} Z_n X_n\Big).$$

Wir erhalten folgende Inklusionen

$$\mathcal{G}_= \subseteq \mathcal{G}_\leq \subseteq \mathbb{L}_\infty(\underset{\sim}{\mathcal{C}}, l_1) \subseteq \Pi(\underset{\sim}{\mathcal{C}}, l_1)$$

die alle sogar echt sind.

Damit bekommt man, dass in der schwach*-Topologie auf $\Pi(\underset{\sim}{\mathcal{C}}, l_1)$ die Mengen $\mathcal{G}_=$ und $\mathcal{G}_\leq$ folgenkompakt sind:
Diese Aussage ergibt sich wie üblich bei der Herleitung von schwach*-Folgenkompaktheitsaussagen aus dem Satz von Alaoglu, demgemäß die in der Normtopologie abgeschlossenen Einheitskugel von $\Pi(\underset{\sim}{\mathcal{C}}, l_1)$ schwach*-kompakt ist und mit einem Separabilitätsargument für $\mathbb{L}_1(\underset{\sim}{\mathcal{C}}, c)$ kommt man schließlich zur schwach*-Folgenkompaktheit von $\mathcal{G}_=$, $\mathcal{G}_\leq$ (für eine genaue Ausführung der Schritte vgl. Müller-Funk [MF], 2.4-2.6).
Damit erhalten wir die schwach*-Folgenkompaktheit für die unbeschränkten sequentiellen Tests und die schwach*-Folgenkompaktheit für die beschränkten sequentiellen Tests:

2.2.3 Theorem

Es sei $\mathcal{N} \in \{\overline{\mathbb{N}}, \{1, \ldots, N\} \mid N \in \mathbb{N}\}$. *Dann ist die Menge der sequentiellen Tests* $\mathcal{T}^{\mathcal{N}}$ *schwach*-folgenkompakt im folgenden Sinne*

$$\forall \text{ Folge } \big(T(k)\big)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}^{\mathcal{N}} \quad \exists \text{ Teilfolge } \big(T(k_l)\big)_{l\in\mathbb{N}} \text{ und } T \in \mathcal{T}^{\mathcal{N}}, \text{ so dass gilt}$$

$$\begin{array}{rrcl} & \forall \underset{\sim}{X} \in \mathbb{L}_1(\underset{\sim}{\mathcal{C}}, c) : & & \\ (1) & E\,X_{t(k_l)} & \to & E\,X_t. \\ (2) & E(\varphi(k_l)_{t(k_l)}\,X_{t(k_l)}) & \to & E(\varphi_t\,X_t). \end{array}$$

Beweis:

a) Die schwach*-Folgenkompaktheit von $\mathcal{T}^{\overline{\mathbb{N}}}$ erhält man aus der Folgenkompaktheitsaussage der Mengen $\mathcal{G}_{\leq}$ und $\mathcal{G}_{=}$, indem man zu einer Folge $T(k) = (\underset{\sim}{g}(k), \underset{\sim}{\varphi}(k))$ $(k \in \mathbb{N})$ von sequentiellen Tests die schwach*-Limiten $\underset{\sim}{g} \in \mathcal{G}_{=}$ einer Teilfolge $(\underset{\sim}{g}(k_l))_{l\in\mathbb{N}}$ von $(\underset{\sim}{g}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ und $\underset{\sim}{h} \in \mathcal{G}_{\leq}$ einer Teilfolge von $(\underset{\sim}{g}(k_l)\cdot\underset{\sim}{\varphi}(k_l))_{l\in\mathbb{N}}$ hernimmt und hieraus in naheliegenderweise den „schwach*-Limes" der TVs herausrechnet gemäß:

$$\varphi_n := \frac{h_n}{g_n}\,1_{\{g_n>0\}} \quad (n \in \overline{\mathbb{N}}).$$

Für eine detailliertere Ausführung der Schritte vgl. Müller-Funk [MF], Seite 2.9.

b) Mit $\mathcal{T}^{\overline{\mathbb{N}}}$ ist automatisch auch $\mathcal{T}^{\{1,\ldots,N\}}$ $(N \in \mathbb{N})$ schwach*-folgenkompakt, denn: Sei $\big(T(k)\big)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}^{\{1,\ldots,N\}}$,dann konvergiert aufgrund der schwach*-Folgenkompaktheit von $\mathcal{T}^{\overline{\mathbb{N}}}$ eine Teilfolge $\big(T(k_l)\big)_{l\in\mathbb{N}}$ im obigen Sinne gemäß (1) und (2) gegen einen Test $T = (t, \underset{\sim}{\varphi}) \in \mathcal{T}^{\overline{\mathbb{N}}}$.

Beh.: $T \in \mathcal{T}^{\{1,\ldots,N\}}$, d.h. $t \in S^{\{1,\ldots,N\}}$

Begr.: Wir betrachten die Folge $\underset{\sim}{X} \in \mathbb{L}_1(\underset{\sim}{\mathcal{C}}, c)$ mit

$$X_n = \begin{cases} 0, n \leq N \\ 1, n > N \end{cases},$$

dann folgt $EX_t = P(t > N)$, und wegen $t(k_l) \in S^{\{1,\ldots,N\}}$ gilt $EX_{t(k_l)} = 0$. Die schwach*-Konvergenz liefert damit :

$$0 = \lim_{l\to\infty} EX_{t(k_l)} = P(t > N)$$

und wegen $P \approx P_{\vartheta_0} + P_{\vartheta_1} + P_\eta$ folgt daraus die Behauptung.

□

2.2.4 Bemerkung

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Menge der abgeschlossenen sequentiellen Tests $\mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ nicht schwach*-folgenkompakt ist:

Es kann nämlich auftreten auf, dass für den schwach*-Limes $(t, \underset{\sim}{\varphi})$ von einer Folge abgeschlossener sequentieller Tests $(T(k))_{k\in\mathbb{N}}$ gilt $P(\varphi_t > 0, t = \infty) > 0$. Zum Beispiel konvergieren die sequentiellen Tests $(t(k), \underset{\sim}{\varphi}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ mit $t(k) \equiv k$, $\varphi_n(k) = \frac{1}{2}$ in der schwach*-Topologie gegen den offenen sequentiellen Test $(t, \underset{\sim}{\varphi})$ mit $t = \infty$ und $\varphi_n = \frac{1}{2}$, denn aufgrund majorisierter Konvergenz gilt

$$\forall \underset{\sim}{X} \in \mathbb{L}_1(\underset{\sim}{\mathcal{C}}, c) \quad [(\delta_{nk})_{n\in\overline{\mathbb{N}}}, \underset{\sim}{X}] = E(X_k) \to E(X_\infty) = [(\delta_{n\infty})_{n\in\overline{\mathbb{N}}}, \underset{\sim}{X}].$$

Dieses Phänomen, dass beim schwach*-Limes Masse im „Unendlichen“ verschwinden kann entspricht der Existenz *offener optimaler Lösungen.* Außerdem zeigt das obige Beispiel, dass auf das Randomisieren im Unendlichen mit Hilfe der Entscheidungsfunktion φ_∞ im allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

□

Mit Hilfe der schwach*-Folgenkompaktheitsaussage 2.2.3 können wir Existenzaussagen machen für die Probleme $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ bei beschränkten und unbeschränkten sequentiellen Tests.

2.2.5 Satz

Es seien $\mathcal{N} \in \{\overline{\mathbb{N}}, \{1, \dots, N\} \mid N \in \mathbb{N}\}$ *und* $\alpha \in (0,1)$ *und* $\delta \in (1, \sup \mathcal{N})$.
Dann gibt es einen optimalen Test $T \in \mathcal{T}^{\mathcal{N}}(\alpha, \delta)$ *für das Problem* $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$.

Beweis:

Es sei $(T(k))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}^{\mathcal{N}}(\alpha, \delta)$ eine Folge sequentieller Test mit 2.2.1.
Da $M^i_n \leq 3$ P-f.s. und $M^i_n \to M^i_\infty$ P-f.s., folgt $(M^i_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \in \mathbb{L}_1(\mathcal{C}, c)$. Aufgrund der schwach*-Folgenkompaktheit von $\mathcal{T}^{\mathcal{N}}$ gibt es einen sequentiellen Test $\mathcal{T}^{\mathcal{N}}$, so dass wir die Konvergenzaussage (2.2.3) erhalten. Daher bleibt für den Existenznachweis nur noch (2.2.4) zu zeigen. Dies folgt aus der Teilaussage bei Müller-Funk [MF] auf Seite 2.6 mit der Wahl $\xi_n(k) = g_n(k)$ und $\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{M}^2$, wobei $(g_n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ die zu $t(k)$ gehörige Abbruchregel bezeichne.

□

Offen bleibt noch die Frage nach der Existenz von Lösungen für das Problem $(\mathbb{P}^{\mathbb{N}}_{\alpha,\delta})$. Gemäß 2.2.4 wissen wir, dass $\mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ nicht schwach*-folgenkompakt ist und wir somit diese funktionalanalytischen Hilfmittel für einen Existenzbeweis nicht benutzen können. Das folgende Beispiel zeigt sogar, dass diese Beweisschwierigkeiten von grundlegenderer Natur sind, das Problem $(\mathbb{P}^{\mathbb{N}}_{\alpha,\delta})$ besitzt nämlich nicht in jeder Situation eine Lösung:

2.2.6 Beispiel

Es sei in diesem Beispiel $\mathcal{Q}$ eine äquivalente Verteilungsklasse.
Dann muss notwendig jede Lösung $\varphi^*_{t^*}$ der Probleme $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ von Güte 1 unter P_{ϑ_0} offen sein (vgl. 1.9 S.102). Daher kann es für die Probleme $(\mathbb{P}^{\{1,\ldots,N\}}_{\alpha,\delta})$ und $(\mathbb{P}^{\mathbb{N}}_{\alpha,\delta})$ keine Lösungen von Güte 1 geben. Tests der Güte 1 können (im Falle der Äquivalenz der Verteilungsklasse) also nur für das Problem $(\mathbb{P}^{\overline{\mathbb{N}}}_{\alpha,\delta})$ existieren.
Beh.: In allen Situationen, für die das Problem $(\mathbb{P}^{\overline{\mathbb{N}}}_{\alpha,\delta})$ durch einen Test der Güte 1 gelöst wird, besitzt das Problem $(\mathbb{P}^{\mathbb{N}}_{\alpha,\delta})$ keine Lösung.

Beweis: Es sei $\eta \neq \vartheta_0$. Weiter seien $\alpha \in (0,1)$, $\delta \in (1,\infty)$, derart, dass $(\mathbb{P}^{\overline{\mathbb{N}}}_{\alpha,\delta})$ durch einen Test von Güte 1 gelöst wird.
Wir zeigen, dass $(\mathbb{P}^{\mathbb{N}}_{\alpha,\delta})$ dann ebenfalls den Optimalwert 1 besitzt, woraus die Behauptung folgt, da dieser Wert durch keinen für $(\mathbb{P}^{\mathbb{N}}_{\alpha,\delta})$ zulässigen Test angenommen werden kann.
Gemäß der Sätze 3.2.2 und 3.2.6 aus Kapitel 3 lässt sich das Problem $(\mathbb{P}^{\overline{\mathbb{N}}}_{\alpha,\delta})$ lösen durch einen geeigneten rechtsseitigen randomisierten SPRT der Gestalt $T = (t_\gamma(a,\eta), \underset{\sim}{\varphi})$ mit $\varphi_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_\infty = 1_C$, $C \in \mathcal{C}_\infty$ mit $P_{\vartheta_1}(C) = 1$ und $P_{\vartheta_0}(C) = 0$, wobei $t_\gamma(a,\eta)$ eine randomisierte rechtsseitige Ersteintrittszeit aus 1.9.5 definiert mit $a > 1$.
Zu jedem solchen Test gibt es eine Folge von abgeschlossenen zulässigen Tests $\big(t(k), \underset{\sim}{\varphi}(k)\big)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}^{\mathbb{N}}(\alpha,\delta)$ mit

$$t_k \uparrow t_\gamma(a,\eta) \quad P\text{-f.s.}, \tag{2.2.6}$$

$$E_{\vartheta_i}\varphi(k)_{t_k} \uparrow E_{\vartheta_i}\varphi_{t_\gamma(a,\eta)} \quad (i = 0,1). \tag{2.2.7}$$

Für die nichtrandomisierten rechtsseitigen SPRT's (d.h. $\gamma = 0$) liefern eine solche Folge die SPRT's $\big(t(b_k,a), \underset{\sim}{\varphi}(a)\big)$ mit

$$\begin{aligned} t(b_k,a) &:= \inf\{n \in \mathbb{N} \mid L_n(\eta,\vartheta_0) \geq a \text{ oder } L_n(\eta,\vartheta_0) \leq b_k\} \\ \varphi_n(a) &:= 1_{\{L_n(\eta,\vartheta_0) \geq a\}} \end{aligned}$$

und $b_k \downarrow 0,\ b_k < a$.
Für randomisierte rechtsseitige SPRT's müssen die SPRT's $\big(t(b_k,a), \underset{\sim}{\varphi}(a)\big)$ noch geeignet konvexkombiniert werden im Sinne von 1.9.5 mit den SPRT's
$\big(t^+(b_k,a), \underset{\sim}{\varphi}(a)\big)$ mit

$$t^+(b_k,a) := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid L_n(\eta,\vartheta_0) > a \text{ oder } L_n(\eta,\vartheta_0) \leq b_k\}.$$

2.3 Ein Dualitätssatz

Hier sollen die Hilfsmittel bereitgestellt werden, die wir benötigen, um Aussagen über die Gestalt der Lösungen von $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$, $\mathcal{N} \in \{\mathbb{N}, \overline{\mathbb{N}}, \{1, \ldots, N\} \mid N \in \mathbb{N}\}$ machen zu können. Bei der sequentiellen Neyman-Pearson-Aufgabe $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ handelt es sich - wie beim klassischen Neyman-Pearson-Problem - um eine Optimierung unter Nebenbedingungen: es soll die Zielfunktion $F(T) := E_{\vartheta_1}\varphi_t$ auf der Menge aller sequentiellen Tests $\mathcal{T}^{\mathcal{N}}$ minimiert werden unter den Nebenbedingungen, die durch folgende Ungleichungen gegeben sind: $A(T) := \binom{E_{\vartheta_0}\varphi_t}{E_\eta t} \leq \binom{\alpha}{\delta}$.
Probleme dieser Gestalt, für die Zielfunktion und Definitionsbereich noch geeignete Konvexitätsbedingungen erfüllen, werden in der Literatur üblicherweise durch die Methode der *Lagrange-Multipikatoren* gelöst. Dabei wird das *primale* Optimierungsproblem $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$, das Problem mit Nebenbedingungen, in ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen überführt, der *dualen* Optimierungsaufgabe $(\mathbb{D}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$, indem jede der Nebenbedingungen durch einen Lagrangschen Multiplikator als „Strafterm“ in eine neue Zielfunktion eingebunden wird. Das duale Problem als Optimierungsproblem ohne Nebenbedindungen lässt sich im allgemeinen leichter lösen als das Ausgangsproblem. Der wesentliche Schritt besteht dann darin von den Lösungen des dualen Problems wieder zurück zu den Lösungen des Ausgangsproblems zu kommen. Dazu formulieren wir einen Dualitätssatz. Wir verwenden in Anlehnung an Witting [Wi] folgende Bezeichnugsweise: Wir sprechen von der Gültigkeit eines

- *schwachen Dualitätssatzes*, wenn die Optimalwerte beider Probleme übereinstimmen,
- *starken Dualitätssatzes*, falls es sogar Punkte gibt, in denen die primale und duale Zielfunktion übereinstimmen.

Bei den Optimierungsproblemen aus der sequentiellen Statistik erfüllen gewöhnlich Zielfunktion und Nebenbedingungen nicht die Konvexitätsbedingungen, die benötigt werden, um die klassische Lagrange-Methode anwenden zu können. Eine Verallgemeinerung der Lagrange-Methode für Optimierungssituationen aus der sequentiellen Statistik hat Müller-Funk in seiner Habilitationsschrift [MF] ausgeführt. Wir werden die Resultate von Müller-Funk in der Form aufbereiten, wie wir sie für unsere Arbeit brauchen werden.
Da die verallgemeinerte Methode der Lagrange Multiplikatoren auch zur Lösung des Stopproblems (S_α), einem Stopproblem unter Nebenbedingungen (vgl. 3.2)

eingesetzt werden soll, werden wir die benötigten Hilsmittel für die allgemeinere Situation entwickeln, dass eine Zielfunktion F unter n Nebenbedingungen minimiert werden soll. Für uns treten dann die beiden Fälle $n = 1$ und $n = 2$ auf.

Wir treffen in diesem Abschnitt folgende Konventionen: Mit α bzw. a werden n-Tupel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ bzw. $(a_1, \ldots, a_n)$ von reellen Zahlen bezeichnet. Weiter bezeichne $<,>$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, außerdem sind Gleichungen und Ungleichungen von n-Tupeln komponentenweise aufzufassen.

Im folgenden seien R eine nichtleere Menge, $n \in \mathbb{N}$ und $F : R \to \mathbb{R}$, $A : R \to \mathbb{R}^n$ Abbildungen mit

D1: $\forall x, y \in R,\ \lambda \in (0,1)\ \exists z \in R$, so dass gilt
$F(z) \geq \lambda\, F(x) + (1-\lambda)F(y)$,
$A(z) \leq \lambda\, A(x) + (1-\lambda)A(y)$,

D2: $\forall x \in R\ A(x) \in [0,\infty)^n$ und $\exists x_0 \in R\ A(x_0) = 0$,

D3: $\exists a_0 \in [0,\infty)^n \quad \sup_{x \in R} \big(F(x) - < A(x), a_0 > \big) < \infty$.

Ausgehend von dieser Situation betrachten wir die Aufgaben:

2.3.1 Definition: Primale und duale Aufgabe (vgl. Witting [Wi], auf Seite 67ff.)

Es seien $\alpha \in [0,\infty)^n$ und $R(\alpha) := \{x \in R \mid A(x) \leq \alpha\}$, dann definiert

$$(\mathbb{P}_\alpha) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} F(x) & \stackrel{!}{=} & sup \\ A(x) & \leq & \alpha \\ x & \in & R \end{array} \right.$$

die *primale* Aufgabe und

$$\overline{F}(\alpha) := \sup_{x \in R(\alpha)} F(x) \text{ bezeichnet den zugehörigen Optimalwert.}$$

Zur Zielfunktion F bilden wir die duale Funktion $H^\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ gemäß

$$H^\alpha(a) := \sup_{x \in R} \Big(F(x) - < A(x) - \alpha, a > \Big).$$

Damit definiert

$$(\mathbb{D}_\alpha) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} H^\alpha(a) & \stackrel{!}{=} & inf \\ a & \in & [0,\infty)^n \end{array} \right\}$$

die zu $(\mathbb{P}_\alpha)$ gehörige *duale* Aufgabe und

$$\underline{H}(\alpha) := \inf_{a\in[0,\infty)^n} H^\alpha(a) \text{ bezeichnet den zugehörigen Optimalwert.}$$

Außerhalb $[0,\infty)^n$ setzten wir die Wertefunktionen $\overline{F}$ und $\underline{H}$ durch $-\infty$ fort und erhalten damit Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$.

Sei $\alpha\in[0,\infty)^n$, dann folgt aus der Definition von $\overline{F}$ und $\underline{H}$:

$$F(x)\le\overline{F}(\alpha)\le\underline{H}(\alpha)\le H(a)\quad\forall x\in R(\alpha),\ a\in[0,\infty)^n,$$

d.h. es gilt ein Vergleichssatz zwischen $(\mathbb{P}_\alpha)$ und $(\mathbb{D}_\alpha)$.

Die Forderungen $D1-D3$ an Zielfunktion und Nebenbedingungen sind wesentlich für die Gültigkeit eines Dualitätssatzes:
Die Bedingung $D3$ liefert, dass die Wertefunktionen $\overline{F}$ und $\underline{H}$ durch $F(x_0)$ nach unten beschränkt sind. Zusammen mit $D2$ folgt daraus, dass $\overline{F}$ und $\underline{H}$ auf $[0,\infty)^n$ nur endliche Werte annehmen. Und die Bedingung $D1$ liefert die Konkavität der Zielfunktionen $\overline{F}$ und $\underline{H}$. Als konkave Funktionen sind dann $\overline{F}$ und $\underline{H}$ auf dem Inneren ihres Definitionsbereiches, also auf $(0,\infty)^n$ stetig.

Für die Probleme in 2.3.1 erhalten wir aus Theorem 1.6 bei Müller-Funk [MF] folgenden Dualitätssatz:

2.3.2 Satz

Es sei $\alpha\in(0,\infty)^n$, dann gilt:

a) *Schwacher Dualitätssatz:* $\overline{F}(\alpha)=\underline{H}(\alpha)$,

b) *Starker Dualitätssatz:* $\forall\, x^*\in R(\alpha)$ *optimal für* $(\mathbb{P}_\alpha)$
$\exists a^*\in[0,\infty)^n:\quad F(x^*)=H^\alpha(a^*)$.

Beweis:

a) Der schwache Dualitätssatz folgt unmittelbar aus Theorem 1.6 bei Müller-Funk [MF] mit $g=F$ und $r_1=A$ und abgeschlossenem Kegel $K=[0,\infty)^n$.

b) Seien $x^* \in R(\alpha)$ eine Lösung von $(\mathbb{P}_\alpha)$ und $a^* \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\overline{F}(a) \leq \overline{F}(\alpha) + < a^*, a - \alpha > \quad \forall a \in [0, \infty)^n, \tag{2.3.1}$$

(d.h. a^* ist die Steigung einer Hyperebenen durch den Punkt $(\alpha, \overline{F}(\alpha))$, die nicht in den Graphen von $\overline{F}$ hineinschneidet.)
Dann liefert Theorem 1.6 von Müller-Funk [MF] die Gültigkeit von

$$F(x^*) = H^\alpha(a^*).$$

Da $\overline{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ eine konkave Funktion definiert, die wegen $R(\alpha) \subset R(\alpha')$ für $\alpha \leq \alpha'$ aus $[0, \infty)^n$ monoton wächst separat in jeder einzelnen Komponente, folgt (vgl. Rockarfeller [R], Seite 215, 217):

- es gilt $a^* \in [0, \infty)^n$
- und es gibt auch eine Stelle a^* mit (2.3.1).

$\square$

2.4 Ein sequentielles Neyman-Pearson-Lemma für $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\mathcal{N}})$

Das Theorem 2.2.3 über die sequentielle schwach*-Folgenkompaktheit liefert uns die Existenz optimaler Lösungen der sequentiellen Neyman-Pearson-Aufgabe $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\mathcal{N}})$ für $\mathcal{N} = \overline{\mathbb{N}}$ und $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$, d.h. zum einen für unbeschränkte nicht notwendig abgeschlossene Stoppzeiten und zum anderen für beschränkte Stoppzeiten (vgl. 2.2.5). Es macht aber keine Aussagen über die Gestalt optimaler Tests. Um auch hierüber Auskunkt zu bekommen, werden wir mit Hilfe des Dualitätssatzes aus 2.3.2 hinreichende und notwendige Bedingungen dafür formulieren, wann ein sequentieller Test das Problem $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\mathcal{N}})$ löst. Dabei werden wir endlichen und unendlichen Horizont gemeinsam behandeln können: es zeigt sich nämlich, dass die Lösungen der Probleme $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\mathcal{N}})$ für $\mathcal{N} = \overline{\mathbb{N}}$ und $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$ dieselbe Gestalt besitzen. Diese Lösung steht in enger Analogie zur Lösung des klassischen Neyman-Pearson-Problems bei festem Stichprobenumfang.
Unterschiede treten erst dann auf, wenn es um folgende Frage geht:
Muss ein optimaler sequentieller Test von Güte kleiner 1 die zur Verfügung stehenden Ressourcen immer voll ausnutzen?
Was das Niveau α für die Fehlerwahrscheinlichkeit 1.Art betrifft, hat das N-P-Lemma 1.4.1 für festes t bereits eine positive Antwort gegeben. Für die Frage im Hinblick auf das Ausschöpfens von δ, also der Schranke für den erwarteten Stichprobenumfang, werden wir hier noch eine Antwort liefern.

Zur Formulierung hinreichender und notwendiger Bedingungen für Optimaltität wenden wir den Dualitätssatz 2.3.2 an auf den Spezialfall $n = 2$ mit

$$R = \mathcal{T}_\eta^{\mathcal{N}}, \quad F(T) = E_{\vartheta_1}\varphi_t, \quad A(T) := \begin{pmatrix} E_{\vartheta_0}\,\varphi_t \\ E_\eta\, t - 1 \end{pmatrix}. \tag{2.4.1}$$

Dazu bleibt noch zu überprüfen, dass die Abbildungen F und A den Bedingungen $D1 - D3$ genügen:

i) Seien $T_1 = (t_1, \underset{\sim}{\varphi}^{(1)})$, $T_2 = (t_2, \underset{\sim}{\varphi}^{(2)}) \in \mathcal{T}_\eta^{\mathcal{N}}$ sowie $\underset{\sim}{g}^{(i)}$ die zu t_i gehörigen Abbruchregeln und $\lambda \in (0,1)$, dann definiert

$$\begin{aligned} g_n &:= \lambda\, g_n^{(1)} + (1-\lambda)\, g_n^2, \\ \varphi_n &:= \frac{\lambda\, g_n^{(1)}\, \varphi_n^{(1)} + (1-\lambda)\, g_n^2\, \varphi_n^{(2)}}{g_n}, \quad (\text{wobei } \frac{0}{0} := 0,\ n \in \overline{\mathbb{N}}) \end{aligned}$$

einen sequentiellen Test $T = (t, \underset{\sim}{\varphi}) \in \mathcal{T}_\eta^{\mathcal{N}}$, für den gilt:

$$\begin{aligned} F(T) &= \lambda\, F(T_1) + (1-\lambda) F(T_2), \\ A(T) &= \lambda\, A(T_1) + (1-\lambda) A(T_2). \end{aligned}$$

Dies liefert uns $D1$.

ii) Aufgrund der Randomisierungen für Terminal- und Stoppentscheidungen (vgl.(2.1.1)) gilt: $A(\mathcal{T}_\eta^{\mathcal{N}}) = [0,1] \times [0, \sup \mathcal{N})$, woraus $D2, D3$ folgt.

Wie in 2.2 treffen wir die Konvention den Erwartungswert unter dem zu $P_{\vartheta_1} + P_{\vartheta_0} + P_\eta$ äquivalenten W-Maß P mit E abzukürzen.
Damit bekommen wir für sequentielle Tests mit möglichen Stoppzeitpunkten in $\{1, \ldots, N\}$ bzw. $\overline{\mathbb{N}}$:

2.4.1 Sequentielles Neyman-Pearson-Lemma

Es sei $\mathcal{N} \in \{\overline{\mathbb{N}},\ \{1, \ldots, N\} \mid N \in \mathbb{N}\}$. *Und es seien* $\alpha \in (0,1)$ *und* $\delta \in (1, \infty)$ *mit* $\delta < \sup \mathcal{N}$.

1) *Existenzaussage:*

Es gibt einen optimalen sequentiellen Test T^* *für* $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\mathcal{N}})$.

2) *Hinreichendes Kriterium:*

Es sei $T^* = (t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ *ein sequentieller Test, für den gilt:*

a) $E_{\vartheta_0} \varphi_t^* = \alpha$ *und* $E_\eta t^* = \delta$.

b) *Es existieren Multiplikatoren* $a, c \in [0, \infty)$, *so dass für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\varphi_n^* = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \quad \text{für} \quad M_n^1 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} a\, M_n^0 \right\} \quad P_{|\mathcal{C}_n}\text{-f.s. auf } \{t^* = n\}, \tag{2.4.2}$$

$$\varphi_\infty^* = 1 \quad P_{\vartheta_1}\text{-f.s. auf } \{t^* = \infty\}, \tag{2.4.3}$$

$$a\, \varphi_\infty^* = 0 \quad P_{\vartheta_0}\text{-f.s. auf } \{t^* = \infty\}.$$

t^* *ist optimale Lösung des Stoppproblems*

$$(S_{a,c}^{\mathcal{N}}) \quad \left\{ \begin{matrix} E\Big(\big(\min(a\, M_t^0, M_t^1) + c\, t M_t^2\big) 1_{\{t<\infty\}}\Big) \overset{!}{=} \inf \\ t \in \mathcal{S}_\eta^{\mathcal{N}} \end{matrix} \right\}.$$

Dann liefert T^* *eine Lösung von* $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\mathcal{N}})$.

3) Notwendiges Kriterium:
Es sei $T^* = (t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ eine Lösung von $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$. Dann gilt:

a) Es gibt Multiplikatoren $a, c \in [0, \infty)$, so dass gilt:

i) $(\alpha - E_{\vartheta_0}\, \varphi^*_{t^*})\, a = 0 = (\delta - E_\eta\, t^*)\, c$.

ii) $\underset{\sim}{\varphi}^* = (\varphi_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ hat die 0-1-Gestalt aus (2.4.2) und (2.4.3).

iii) t^* ist optimale Lösung von $(S^{\mathcal{N}}_{a,c})$.

b) $E_{\vartheta_1} \varphi^*_{t^*} > \alpha$.

c) $E_{\vartheta_0} \varphi^*_{t^*} < \alpha \Rightarrow E_{\vartheta_1} \varphi^*_{t^*} = 1$.
Insbesondere wird das Problem $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ im Falle $P_{\vartheta_0}(t^* < \infty) < \alpha$ nur durch einen Test der Güte 1 gelöst.

d) $E_{\vartheta_1} \varphi^*_{t^*} = 1$ und $P_{\vartheta_0}(t^* < \infty) = 1 \Rightarrow$
$\exists n \in \mathbb{N} \quad P_{\vartheta_0}|\mathcal{A}_{n|\{t^*=n\}} \not\ll P_{\vartheta_1}|\mathcal{A}_{n|\{t^*=n\}}$ und somit $Q_{\vartheta_0} \not\ll Q_{\vartheta_1}$.

e) **Entweder** *es gilt $a > 0$ und $E_{\vartheta_0} \varphi^*_{t^*} = \alpha$*
oder *$a = 0$ und $E_{\vartheta_1} \varphi^*_{t^*} = 1$.*

Beweis:

Seien $T \in \mathcal{T}^{\mathcal{N}}(\alpha, \delta)$ und $a, c \in [0, \infty)$, dann gilt wegen des Vergleichssatzes

$$F(T) \leq H^\alpha(a, c).$$

Betrachten wir die Hilfsfunktionen

$$v_n(a) := \left\{ \begin{array}{rcl} M_n^1 - a\, M_n^0 & , & n \in \mathbb{N} \\ 0 & , & n = \infty \end{array} \right\},$$

dann zerlegt sich die obere Ungleichung mit Hilfe der Eigenschaften von Dichten 2.1.2 in folgende Ungleichungskette:

$$
\begin{aligned}
F(T) \quad &= \quad E_{\vartheta_1}\varphi_t \;=\; E(\varphi_t\, M_t^1 1_{\{t<\infty\}}) + E_{\vartheta_1}(\varphi_\infty\, 1_{\{t=\infty\}})\\
&= \quad E(v_t(a)\,\varphi_t 1_{\{t<\infty\}}) + a\,E_{\vartheta_0}\varphi_t - a\,E_{\vartheta_0}(\varphi_\infty\, 1_{\{t=\infty\}}) + E_{\vartheta_1}(\varphi_\infty\, 1_{\{t=\infty\}})\\
&\overset{(1)}{\le} \quad E(v_t(a)\,\varphi_t 1_{\{t<\infty\}}) + \alpha\, a - a\,E_{\vartheta_0}(\varphi_\infty\, 1_{\{t=\infty\}}) + E_{\vartheta_1}(\varphi_\infty\, 1_{\{t=\infty\}})\\
&\overset{(2.1)}{\le} \quad E(v_t(a)^+ 1_{\{t<\infty\}}) - a\,E_{\vartheta_0}(\varphi_\infty\, 1_{\{t=\infty\}}) + E_{\vartheta_1}(\varphi_\infty\, 1_{\{t=\infty\}})\\
&\overset{(2.2)}{\le} \quad E(v_t(a)^+ 1_{\{t<\infty\}}) + \alpha\, a + P_{\vartheta_1}(t=\infty)\\
&= \quad E\big((v_t(a)^+ - c\,M_t^2(t-1))1_{\{t<\infty\}}\big) + E(c\,M_t^2(t-1)1_{\{t<\infty\}})\\
&\qquad +\alpha\, a + P_{\vartheta_1}(t=\infty)\\
&\overset{(3)}{\le} \quad E\big((v_t(a)^+ - c\,M_t^2(t-1))1_{\{t<\infty\}}\big) + P_{\vartheta_1}(t=\infty) + \left\langle \tbinom{\alpha}{\delta-1}, \tbinom{a}{c}\right\rangle\\
&\overset{(4)}{\le} \quad \sup_{t'\in\mathcal{S}^{\mathcal{N}}_\eta}\Big[E\big((v_{t'}(a)^+ - c\,M_{t'}^2(t'-1))1_{\{t'<\infty\}}\big) + P_{\vartheta_1}(t'=\infty)\Big] + \left\langle \tbinom{\alpha}{\delta-1}, \tbinom{a}{c}\right\rangle\\
&\overset{(5)}{=} \quad \sup_{T'\in\mathcal{T}^{\mathcal{N}}_\eta}\Big[E\big((v_{t'}(a)^+\,\varphi'_{t'} - c\,M_{t'}^2(t'-1))1_{\{t<\infty\}}\big) + E_{\vartheta_1}(\varphi'_\infty\, 1_{\{t'=\infty\}})\\
&\qquad\qquad - a\,E_{\vartheta_0}(\varphi'_\infty\, 1_{\{t'=\infty\}})\Big] + \left\langle \tbinom{\alpha}{\delta-1}, \tbinom{a}{c}\right\rangle\\
&\overset{(6)}{=} \quad \sup_{T'\in\mathcal{T}^{\mathcal{N}}_\eta}\Big[F(T') - \left\langle A(T'), \tbinom{a}{c}\right\rangle\Big] \;=\; H^{\alpha,\delta}(a,c).
\end{aligned}
$$

Zur Begründung der Ungleichungskette merken wir an:

(1) $a \ge 0$ und $E_{\vartheta_0}\varphi_t \le \alpha$, (3) $c \ge 0$ und $E_\eta\, t \le \delta$,

(5) Man betrachte $\varphi'_n = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ für $v_n(a) \; \begin{matrix}\ge\\ <\end{matrix} \; 0$ $(n \in \mathbb{N})$
$\varphi'_\infty = 1_C$ mit $C \in \mathcal{C}_\infty$: $P_{\vartheta_1}(C) = 1$ und $P_{\vartheta_0}(C) = 0$,

(6) Gleiche Umformung wie zu Beginn.

Zusammen mit dem starken Dualitätssatz 2.3.2 folgt dann:

$$(*) \qquad T^* \text{ optimal für } (\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta}) \;\Leftrightarrow\; \exists\, a, c \in [0,\infty) : \; F(T^*) = H^{\alpha,\delta}(a,c).$$

Dabei ist $F(T^*) = H^{\alpha,\delta}(a,c)$ dazu äquivalent, daß Gleichheit in den Ungleichungen (1)−(4) auftritt:

i) Gleichheit in (1) und (3) ist äquivalent zu

$$(\alpha - E_{\vartheta_0}\, \varphi^*_{t^*})\, a = 0 = (\delta - E_\eta\, t^*)\, c.$$

Gleichheit in (2.1) ist aufgrund monotoner Konvergenz äquivalent zu

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{t^*=n\}} \varphi^*_n\, v_n(a)^-\, dP = 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{t^*=n\}} (1-\varphi^*_n)\, v_n(a)^+\, dP = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \forall n \in \mathbb{N}: \ \varphi^*_n = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ für } \ M^1_n \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} a\, M^0_n \text{ auf } \{t^* = n\} \cap C_n,$$

$$\text{wobei } C_n \in \mathcal{C}_n, \ \text{mit } P(C_n) = 1.$$

Gleichheit in (2.2) ist äquivalent zu

$$\int_{\{t^*=\infty\}} (1-\varphi^*_\infty)\, dP_{\vartheta_1} = 0 = a \int_{\{t^*=\infty\}} \varphi^*_\infty\, dP_{\vartheta_0}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \varphi^*_\infty = 1 \ \text{ auf } \ \{t^* = \infty\} \ \ P_{\vartheta_1}\text{-f.s.},$$

$$a\,\varphi^*_\infty = 0 \text{ auf } \ \{t^* = \infty\} \ \ P_{\vartheta_0}\text{-f.s..}$$

ii) Gleichheit in (4) ist äquivalent dazu, daß t^* eine Lösung des folgenden Stopproblems liefert

$$\left\{ \begin{matrix} E\big((v_t(a)^+ - c\, M^2_t t) 1_{\{t<\infty\}}\big) + P_{\vartheta_1}(t = \infty) \overset{!}{=} \sup \\ t \in \mathcal{S}^{\mathcal{N}}_\eta \end{matrix} \right\} \tag{2.4.4}$$

Da $\max(A-B,0)-A = \max(-B,-A)$ und $P_{\vartheta_1}(t<\infty) = E(M^1_t\, 1_{\{t<\infty\}})$, lässt sich die Zielfunktion von (2.4.4) folgendermaßen umformen:

$$E\Big((v_t(a)^+ - c\, M^2_t t) 1_{\{t<\infty\}}\Big) + 1 - P_{\vartheta_1}(t<\infty) =$$
$$-E\big((\min(a\, M^0_t, M^1_t) + c\, M^2_t t) 1_{t<\infty}\big) + 1.$$

Daher ist das Stoppproblem (2.4.4) äquivalent zu $(S^{\mathcal{N}}_{a,c})$.

Folglich liefert in $(*)$ die Richtung „$\Leftarrow$ " das hinreichende Kriterium, und die Richtung „$\Rightarrow$ " Teilaussage a) des notwendigen Kriteriums für optimale Lösungen von $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$.
Die Aussagen b)-e) des notwendigen Kriteriums folgen unmittelbar aus den Teilaussagen b)-e) des notwendigen Kriteriums von Satz 1.4.1, denn $\varphi^*_{t^*}$ ist als Lösung von $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ (bei variierenden Stoppzeiten) natürlich auch eine Lösung von $(P^{t^*}_\alpha)$ (unter seiner eigenen Stoppzeit). □

2.4.2 Bemerkung

Eine zu 2.4.1 2) und 3) entsprechende Aussage über die Gestalt optimaler sequentieller Tests bekommen wir für das Problem $(\mathbb{P}^{\mathbb{N}}_{\alpha,\delta})$, denn die Vorraussetzungen D1-D3 für die Anwendung des Dualtitätssatzes zur Formulierung hinreichender und notwendiger Bedingungen sind auch für die Indexmenge $\mathcal{N} = \mathbb{N}$ erfüllt. Dagegen problematisch bleibt die Existenzaussage (vgl. 2.2.6), die müssen wir vorsichtiger formulieren: Wird das Problem $(\mathbb{P}^{\overline{\mathbb{N}}}_{\alpha,\delta})$ durch einen unter P_{ϑ_1} und P_{ϑ_0} abgeschlossenen sequentiellen Test $(t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ gelöst, so liefert $(t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ dann auch eine Lösung für das Problem $(\mathbb{P}^{\mathbb{N}}_{\alpha,\delta})$.

2.4.3 Bemerkung

a) Das Problem $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ zerlegt sich in ein Problem des optimalen Stoppens $(S^{\mathcal{N}}_{a,c})$ und in ein Testproblem (P^t_α) bei fester Stoppzeit t, welche das Problem $(S^{\mathcal{N}}_{a,c})$ löst.

b) Die auftretenden Parameter a und c lassen sich folgendermaßen interpretieren: Der Parameter a entspricht dem kleinsten α-Fraktil aus der klassischen Statistik, und der Parameter c modelliert die Beobachtungskosten.
Mit 2.4.1 haben wir eine vollständige Lösung des Problems $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$, aber im Gegensatz zum klassischen Neyman-Pearson-Lemma lassen sich die Multiplikatoren a und c im allgemeinen nicht explizit angeben. Zur Bestimmung optimaler sequentieller Tests wird daher in der sequentiellen Statistik die Vorgehensweise aus der klassischen Statistik umgedreht: anstatt zu den Niveaus α und δ die passenden Mutilplikatoren zu bestimmen, wird umgekehrt zu vorgegebenen Multiplikatoren a und c der optimale Test φ_t bestimmt, indem das Stopproblems $(S^{\mathcal{N}}_{a,c})$ gelöst wird. Dieser Test optimiert die Aufgabe $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ zu seinen eigenen Niveaus $\alpha := E_{\vartheta_0}\varphi_t$, $\delta := E_\eta t$, die natürlich von a und c abhängen. Dann wird untersucht wie α und δ von a und c abhängen, um aus dem Zusammenhang schließlich zu beliebig vorgegebenen Niveaus α, δ die zugehörigen Multiplikatoren a, c zu bestimmen. □

Abschließend wenden wir uns der Frage zu, ob wir in fortgeführter/erweiteter Analogie zum klassischen Neyman-Pearson-Lemma die Aussage bekommen können, dass ein sequentieller Test von Güte kleiner als der bestmögliche Wert 1 nur dann eine Lösung von $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ liefert, wenn er die zur Verfügung stehenden Ressourcen voll ausschöpft. Für das Niveau der Fehlerwahrscheinlichkeit 1.Art hat das sequentielle Neyman-Pearson-Lemma gezeigt, dass dies der Fall ist. Zu Behandeln bleibt daher die Frage für die Schranke des erwarteten Stichprobenumfangs. Zu erwarten ist, dass auch die Schranke für den erwarteten Stichprobenumfang ausgeschöpft werden muss, damit ein sequentieller Test von Güte kleiner 1 optimal für $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ wird. Das legt folgende Überlegung nahe: es wäre nämlich sonst noch Platz im Budget für zusätzliche Beobachtungen, welche die Güte verbessern können, da $P_{\vartheta_0} \neq P_{\vartheta_1}$ und die Experimente unabhängig ausgeführt werden.

Für unendlichen Horizont können wir diese Überlegungen auch bestätigen:

2.4.4 Lemma

Es sei $\mathcal{N} \in \{\mathbb{N}, \overline{\mathbb{N}}\}$. Weiter seien $\alpha \in (0,1)$ und $\delta \in (1, \sup \mathcal{N})$.
Für einen bzgl. $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ optimalen Test $T = (t, \underset{\sim}{\varphi}) \in \mathcal{T}^{\mathcal{N}}(\alpha, \delta)$ gilt:

$$E_\eta\, t < \delta \quad \Rightarrow \quad E_{\vartheta_1}\, \varphi_t = 1.$$

Beweis:

Es sei T eine Lösung von $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ mit $E_\eta\, t < \delta$:
Aus 2.4.1.3)a) i) folgt $c = 0$. Damit erhält man wegen der Äquivalenz der Stoppprobleme $(\mathcal{S}^{\mathcal{N}}_{a,c})$ und (2.4.4) mit 2.4.13)a) iii), dass t eine Lösung liefert von

$$(**) \quad \left\{ \begin{array}{c} E\big(v_t(a)^+ 1_{\{t<\infty\}}\big) + P_{\vartheta_1}(t = \infty) \overset{!}{=} \sup \\ t \in \mathcal{S}_\eta \end{array} \right\}.$$

Dabei kann ohne Einschränkung $a > 0$ angenommen werden kann, denn für $a = 0$ folgt bereits aus 2.4.13)f), dass $E_{\vartheta_1}\varphi_t = 1$.

$\mathbb{A}: E_{\vartheta_1}\, \varphi_t < 1$.
Wegen $\varphi_\infty = 1$ P_{ϑ_1}-f.s. auf $\{t = \infty\}$, wird Güte durch die Entscheidung für H_0 zu einem endlichen Stoppzeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ verloren, d.h. es gilt

$$P_{\vartheta_1}(\varphi_n < 1,\, t = n) > 0.$$

Dann lässt sich durch späteres Stoppen der Wert $E\big(v_t(a)^+ 1_{\{t<\infty\}}\big) + P_{\vartheta_1}(t = \infty)$ vergrößern, was gleichbedeutend damit ist, dass die Güte von T verbessert werden kann. Die Idee zur Verbesserung der Güte ist folgende: Da auf $\{t = n\}$ der sequentielle Test T durch die Pfade, welche zu einer Entscheidung für H_0 führen, an Güte verliert, diese Pfade nach n Beobachtungen abbrechen und alle zusammen positive Wahrscheinlichkeit unter P_{ϑ_1} besitzen, werden wir dahingehen und diese Pfade geeignet verlängern durch Beobachtungen, die für H_1 sprechen und zwar soweit verlängern, dass zu diesem späteren Zeitpunkt, bezeichnen wir den mal mit m, gilt $v_m(a)^+ > 0$, d.h. der Dichtequotient ist größer als ein kritischer Wert a und der Test entscheidet sich daher für H_1. Dass es überhaupt einen solchen Zeitpunkt m gibt, liegt am Konvergenzverhalten des Dichtequotienten M_n^1/M_n^0 bei unabhängigen Versuchswiederholungen. Dies Idee führen wir im folgenden aus:

Da $\varphi_n = 1$ für $v_n(a)^+ > 0$ auf $\{t = n\}$ $P_{P|\mathcal{A}_n}$-f.s., folgt aus $P_{\vartheta_1}(\varphi_n < 1,\, t = n) > 0$ wegen $P >> P_{\vartheta_1}$, dass gilt

$$P(A_n) > 0 \quad \text{mit} \quad A_n := \{v_n(a)^+ = 0,\, t = n\}.$$

Beh.: Zu $a > 0$ gibt es ein $m > n$ aus $\mathbb{N}$, so daß gilt: $P(v_m(a)^+ > 0,\, A_n) > 0$.

Begr.: Aus der Orthogonalität von P_{ϑ_0} und P_{ϑ_1} folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n^1}{M_n^0} = \infty \quad P_{\vartheta_1}\text{-f.s. (vgl. Neveu [Ne], Korollar III-2-7 auf Seite),}$$

und insbesondere

$\lim_{n\to\infty} P_{\vartheta_1}\big(\frac{M_n^1}{M_n^0} > a\big) = 1$, so dass $P_{\vartheta_1}(v_m(a)^+ > 0,\, A_n) > 0$, woraus wir wegen $P >> P_{\vartheta_1}$ die Behauptung erhalten.

Damit läßt sich eine neue Stoppzeit $\hat{t}$ definieren gemäß

$$\begin{aligned} \{\hat{t} = k\} &:= \{t = k\} \text{ für } k \neq n, m, \\ \{\hat{t} = n\} &:= \{v_n(a)^+ > 0,\, t = n\}, \\ \{\hat{t} = m\} &:= \{t = m\} \cup \{v_n(a)^+ = 0,\, t = n\}. \end{aligned}$$

Da nach Definition gilt

$$\sum_{k\in\mathcal{N}} \{\hat{t} = k\} = \Omega, \quad \text{sowie} \quad \{\hat{t} = k\} \in \mathcal{A}_k \ (k \in \mathcal{N}),$$

liefert $\hat{t}$ eine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathcal{N}}$.

Wegen $E_\eta \hat{t} \leq E_\eta t + m\, P_\eta(A_n) < \infty$, ist dann $\hat{t} \in \mathcal{S}_\eta^{\mathcal{N}}$.

Außerdem gilt $\{\hat{t} < \infty\} = \{t < \infty\}$. Wir erhalten hiermit

$$\begin{aligned} E\big(v_{\hat{t}}(a)^+ 1_{\{\hat{t}<\infty\}}\big) + P_{\vartheta_1}(\hat{t} = \infty) &= E\big(v_{\hat{t}}(a)^+ 1_{\{t<\infty\}}\big) + P_{\vartheta_1}(t = \infty) \\ &= E\big(v_t(a)^+ 1_{\{t<\infty\}}\big) + E\big(v_m(a)^+\, 1_{A_n}\big) + P_{\vartheta_1}(t = \infty) \\ &> E\big(v_t(a)^+ 1_{\{t<\infty\}}\big) + P_{\vartheta_1}(t = \infty), \end{aligned}$$

woraus sich ein Widerspruch zur Optimalität von t für das Stoppproblems $(**)$ ergibt. □

Dieses Vorgehen, die Güte eines sequentiellen Tests von Güte kleiner 1, der den erwarteten Stichprobenumfang nicht ausschöpft, durch späteres Stoppen zu verbessern, ist im allgemeinen nicht auf endlichem Beobachtungshorizont übertragbar:
Bei endlichem Beobachtungshorizont N besteht die Möglichkeit einen für $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\{1,\dots,N\}})$ besten Test $\varphi_{t^*}^*$ zu „verkürzen". Eine Möglichkeit der Verkürzung haben wir bereits in Kapitel 1 mit dem Curtailing Inspection (vgl. 1.3) kennengelernt:

2.4.5 Beispiel: Curtailed Inspection

Es liege die Situation aus 1.3 vor, d.h. es sei $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Verteilungsklasse, mit der Eigenschaft, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{Q}^n = \{Q_\vartheta^n \mid \vartheta \in \Theta\}$ isotonen Dichtequotienten in einer Statistik $\hat{S}_n : \mathcal{X}^n \to \mathbb{R}$ habe. Weiter bezeichne $S_n := \hat{S}_n(X_1, \dots, X_n)$. Zu einem vorgegebenen festen Stichprobenumfang $N \in \mathbb{N}$, $\vartheta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$ und $\alpha \in (0,1)$ sei der sequentielle Test
mit $t \equiv N$ und

$$\varphi_N^* := \begin{cases} 1 & & & > & \\ \gamma_N & \text{für} & \mathcal{S}_N & = & k \\ 0 & & & < & \end{cases}, \quad \text{mit} \tag{2.4.5}$$

$\gamma_N \in [0,1]$, $k \in \mathbb{R}$ derart, dass $P_{\vartheta_0}(\mathcal{S}_N > k) + \gamma_N P_{\vartheta_0}(\mathcal{S}_N = k) = \alpha$. Weiter sei $\vartheta_1 > \vartheta_0$ mit $E_{\vartheta_1}\varphi_N^* < 1$. (Aufgrund der Stetigkeit der Gütefunktion $\vartheta \mapsto E_{\vartheta_1}\varphi_N^*$ gibt es auch immer einen solchen Parameter.) Dann liefert $(t, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ eine Lösung von

$$((\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\{1,\dots,N\}})) \qquad \begin{cases} E_{\vartheta_1}\,\varphi_t \overset{!}{=} sup \\ E_{\vartheta_0}\,\varphi_t \leq \alpha \\ t \leq N \end{cases} .$$

Für den CIP $\varphi_{t^*}^*$ von φ_t^* gelte $E_\eta t^* < N$. (Dies haben wir zum Beispiel in den Situationen 1.3.4 und 1.3.5).
Schließlich sei $\delta < N$ mit $E_\eta \hat{t} < \delta$, dann liefert der CIP $\varphi_{t^*}^*$ eine Lösung von $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\{1,\dots,N\}})$, welche die Schranke δ nicht voll ausnutzt von Güte kleiner 1. □

Es sei hier bereits erwähnt, dass die Verkürzung eines besten Tests zum festen Stichprobenumfang N auch erste Beispiele für gleichmäßig beste sequentielle Tests für das Problem $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\{1,\dots,N\}})$ für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ ergibt. Das

CI liefert nicht die einzige Möglichkeit beste sequentielle Tests so zu „verkürzen“, dass immer noch eine Lösung von $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\{1,\dots,N\}})$ erhalten wird. Beim CI wird der beste Test zu festem Stichprobenumfang verkürzt ohne, dass die Entscheidungsfunktion sich verändert, gebraucht wird im Beispiel aber nur, dass die Gütefunktion gleich bleibt. Daher werden auch solche „Verkürzungen“ Beispiele dafür bieten, dass die Schranke δ nicht notwendig ausgeschöpft werden muss.
Im Hinblick auf den Beweis von Lemma 2.4.4 liegt die Frage nahe ob man den Zeitpunkt $m > n$, zu dem die Güte verbessert wird, nicht i.a. durch $m = n + 1$ wählen kann. Diese Frage steht eng im Zusammenhang mit der folgenden Frage: Lässt sich die Güte eines besten Tests zu festem Stichprobenumfang N durch eine weitere Beobachtung (bei unabhängigen Versuchswiederholungen) verbessern? Verblüffend ist, dass dies in der Tat nicht immer der Fall sein muss, es gibt Situationen in denen man durch einer weiteren Beobachtung nichts weiter an Güte gewinnt. Eine vollständige Charakterisierung aller solcher Testsituationen haben wir in den Anhang gestellt.

2.4.6 Lemma

Es seien $\mathcal{Q} = \{\mathcal{B}(1,\vartheta) \mid \vartheta \in (0,1)\}$ *und* $\vartheta_1 > \vartheta_0$. *Weiter seien* $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\alpha \in A_{N-1} := \Big\{ \sum\limits_{j=0}^{k-1} \binom{N-1}{j} \vartheta_0^{N-1-j}(1-\vartheta_0)^j \mid k = 1,\dots,N-1 \Big\}$ *und* $\delta \in (N-1, N)$, *dann gilt für die Tests der Gestalt 2.4.5:*

a) $E_\vartheta\, \varphi^*_{N-1} = E_\vartheta\, \varphi^*_N \quad \forall \vartheta \in (0,1)$.

b) Der sequentielle Test $(t, \underset{\sim}{\varphi})$ *mit* $t \equiv N-1$ *und* $\varphi_{N-1} = \varphi^*_{N-1}$ *liefert eine Lösung von* $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\{1,\dots,N\}})$ *mit* $E_\eta t < \delta$ *und* $E_{\vartheta_1} \varphi_t < 1$.

Für den Beweis verweisen wir auf das Korollar 1.8 im Anhang. Die Kernidee für den Beweis der Aussage a) liegt darin, dass durch die spezielle Wahl des Niveaus α der beste Test φ^*_{N-1} für den Horizont $N-1$ nichtrandomisiert ist und der beste Test Test für den Horizont N randomisiert ist.

Schließlich gibt es noch eine dritte Art der Verkürzung, die sich von den beiden erstgenannten unterscheidet, bei der die Gütefunktion des besten Tests sich ebenfalls nicht ändert: Der für $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\{1,\dots,N\}})$ optimale sequentielle Test $(t \equiv N, \varphi^*_N)$ aus 2.4.5 lässt sich für den Fall, dass er (mit positver Wahrscheinlichkeit) randomisiert ist, durch Umschichtung des Randomisierungsbereiches $\{S_N = k\}$ verkürzen: einige Pfade $\{S_N = k\}$, die besonders deutlich auf H_0 hinweisen in dem Sinne, dass

z.B. nacheinander möglichst viele Beobachtungen auftreten, die für H_0 sprechen werden aus dem Randomisierungsbereich herausgenommen und es wird sich hierauf für H_0 entschieden, so z.B. der Pfad, bei dem nacheinander $N-k$-mal die Beobachtungen für H_0 sprechen. Damit sich aber bei solchen Umschichtungen die Gütefunktion des Tests nicht verändert, wird die Randomisierungskonstsante γ_N des Tests entsprechend vergrößert.
Wir führen diese Umschichtungsidee am Beispiel von Bernoulliverteilungen vor:
Es seien $\mathcal{Q} = \{\mathcal{B}(1,\vartheta) \mid \vartheta \in (0,1)\}$ und $\vartheta_1 > \vartheta_0$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
Weiter sei φ_N^* der Test aus (2.4.5) mit $T(X_i) = X_i$ und $\gamma_N \in (0,1)$.
Außerdem fordern wir $E_{\vartheta_0}\varphi_N^* \notin A_{N-1}$, so dass gemäß Korollar 1.8 im Anhang gilt $E_\vartheta\, \varphi_{N-1}^* < E_\vartheta\, \varphi_N^* \quad \forall \vartheta > \vartheta_0$ und daher eine Verkürzung wie in Lemma 2.4.6 nicht möglich wird. Außerdem sei ohne Einschränkung $k \in \{0, \dots, N\}$.

Der Randomisierungsbereich

$$R_k := \{\vec{x} \in \{0,1\}^N \mid \sum_{i=1}^{N} x_i = k\}$$

des Tests φ_N^* besteht dann aus $\binom{N}{k}$ verschiedenen Elementen. Davon gibt es genau ein Element mit $N-k$ Nullen zu Beginn, $(k+1)$ Elemente mit $N-k-1$ Nullen zu Beginn, $\binom{k+2}{2}$ Elemnte mit $N-k-2$ Nullen zu Beginn usw. Auf diese Weise werde der Randomisierungsbereich aufgezählt.
Weiter sei m die größte ganze Zahl mit

$$l := \sum_{i=1}^{m} \binom{k+1}{i} \leq \binom{N-1}{k-1} \text{ und } \gamma_N^{'} := \frac{\gamma_N \binom{N}{k}}{\binom{N}{k} - l} \leq 1. \tag{2.4.6}$$

Und dazu sei

$$R_k^l := \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_l\}$$

die Menge der ersten l Elemente aus der obigen Aufzählung von R_k.
Hierzu betrachten wir die Stoppzeit

$$t_k^l := \inf\{n \leq N \mid \sum_{i=1}^{n} (1 - X_i) = N - k \text{ und } (X_1, \dots, X_n, 1, \dots, 1) \in R_k^l\}.$$

Der CIP $\varphi_{\hat{t}}^*$ zu φ_N^* ist gegeben durch

$$\hat{t} := \inf\{n \leq N \mid \sum_{i=1}^{n} X_i = k+1 \text{ oder } \sum_{i=1}^{n} (1 - X_i) = N - (k-1)\}.$$

Die Stoppzeit $\hat{t}$ lässt sich weiter verkürzen zu

$$t' := \min\{\hat{t}, t_k^l\}.$$

Wir erhalten hiermit:

2.4.7 Lemma

Es gilt für den sequentiellen Test $(t', \underset{\sim}{\varphi'})$ mit

$$\varphi_n' = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \textit{für} \quad S_n \begin{matrix} > 1 \\ \leq 0 \end{matrix} \quad (n < N), \quad \varphi_N' := \begin{cases} 1 & & & > & \\ \gamma_N' & \textit{für} & \mathcal{S}_N & = & k \\ 0 & & & < & \end{cases}$$

a) $E_\vartheta\, \varphi'_{t'} = E_\vartheta\, \varphi^*_N \quad \forall \vartheta \in (0,1)$,

b) $E_\vartheta\, t' < E_\vartheta\, \hat{t} \quad \forall \vartheta \in (0,1)$.

c) Für $\eta \in (0,1)$ sei $\delta := E_\eta \hat{t}$.
Dann liefert der sequentielle Test $(t', \underset{\sim}{\varphi'})$ eine Lösung von $(\mathbb{P}^{\{1,\ldots,N\}}_{\alpha,\delta})$ mit $E_\eta t' < \delta$ von Güte kleiner 1.

Beweis:

Es sei $\vartheta \in (0,1)$, dann gilt aufgrund der Definition von $\varphi'_{t'}$ und von $\hat{\varphi}_{\hat{t}}$:
a)

$$\begin{aligned} E_\vartheta\, \varphi'_{t'} &= P_\vartheta(\exists n \leq N \sum_{i=1}^n X_i = k+1) + \gamma_N' P_\vartheta\big((X_1,\ldots,X_N) \in R_k \setminus R_k^l\big) \\ &= P_\vartheta(\exists n \leq N \sum_{i=1}^n X_i = k+1) + \gamma_n' \vartheta^k (1-\vartheta)^{N-k}\Big(\binom{N}{k} - l\Big) \\ &= P_\vartheta(\exists n \leq N \sum_{i=1}^n X_i = k+1) + \gamma_N \binom{N}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{N-k} \\ &= E_\vartheta\, \hat{\varphi}_{\hat{t}} = E_\vartheta\, \varphi^*_N. \end{aligned}$$

b) folgt aus

$$t' < \hat{t} \text{ auf } \{n \leq N \mid \sum_{i=1}^n (1-X_i) = N-k \text{ und } (X_1,\ldots,X_n,1,\ldots,1) \in R_k^l\}.$$

□

2.4.8 Beispiele

a) Für $N = 3$, $k = 1\,\gamma_N = 1/9$ ist der Randomisierungsbereich von φ_N^* gegeben durch

$$R_k = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}.$$

Es ist hier $m = 0$ und $l = 1$, folglich $R_k^l = \{(0,0,1)\}$.
Die Stoppzeit t^* des CIP's zu φ_N^* ist gegeben durch

$$t^* = \{n \leq 3 \mid \sum_{i=1}^{n} X_i = 2\}.$$

Diese Stoppzeit lässt sich durch Umschichten des Randomisierungsbereiches verkürzen zu

$$t^{'} = \inf\{n \leq 3 \mid \sum_{i=1}^{n} X_i = 2 \text{ oder } \sum_{i=1}^{n}(1 - X_i) = 2\}.$$

Der sequentielle Test $(t^{'}, \underset{\sim}{\varphi}^{'})$ hat als neue Randomisierungskonstante $\gamma_N^{'} = \frac{1}{6}$.
Außerdem gilt für $\vartheta_0 = 0.4\ E_{\vartheta_0}\varphi_N^* = 0.4 \notin A_2 = \{0.16, 0.64\}$.

b) Für $N = 4$, $k = 2$, $\gamma_N = 1/2$ ist der Randomisierungsbereich von φ_N^* gegeben durch

$$R_k = \{(0,0,1,1),(0,1,0,1),(0,1,1,0),(1,0,0,1),(1,0,1,0),(1,1,0,0)\}.$$

Es ist hier $m = 1$ und $l = 3$, folglich

$$R_k^l = \{(0,0,1),(0,1,0,1),(0,1,1,0)\}.$$

Die Stoppzeit t^* des CIP's zu φ_N^* ist gegeben durch

$$t^* = \{n \leq 4 \mid \sum_{i=1}^{n} X_i = 3 \text{ oder } \sum_{i=1}^{n}(1 - X_i) = 3\}.$$

Diese Stoppzeit lässt sich durch Umschichten des Randomisierungsbereiches verkürzen zu

$$t^{'} = \inf\{n \leq 3 \mid \sum_{i=1}^{n} X_i = 3 \text{ oder } \sum_{i=1}^{n}(1 - X_i) = 2\}.$$

Der sequentielle Test $(t^{'}, \underset{\sim}{\varphi}^{'})$ hat als neue Randomisierungskonstante $\gamma_N^{'} = 1$.

□

2.5 Struktur der Lösungen des Stopproblems $(S^{\mathcal{N}}_{a,c})$

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Lösungen der Stopprobleme $(S^{\mathcal{N}}_{a,c})$, die sich beim Neyman-Pearson-Lemma 2.4.1 herausgeschält haben. Die Struktur der Lösungen benötigen wir, um in Kapitel 3 Aussagen über gleichmäßig beste sequentielle Tests für zusammengesetzte Hypothesen machen zu können. Da wir die Untersuchungen in Kapitel 3 zur gleichmäßigen Optimalität im Kontext einparametriger Exponentialfamlien durchführen, beschränken wir uns in diesem Abschnitt auf eine äquivalente Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$.

Zur Lösung der Stopprobleme $(S^{\mathcal{N}}_{a,c})$ müssen wir die Probleme $(S^{\mathcal{N}}_{a,c})$, was Zielfunktion und Nebenbedingung betreffen, unter einem W-Maß behandeln. Die Nebenbedingung, welche an die in Frage kommenden Stoppzeiten gestellt wird, ist gegeben durch $E_\eta t < \infty$. Daher schreiben wir mit Hilfe von Dichten bzgl. des W-Maßes P_η die Probleme $(S^{\mathcal{N}}_{a,c})$ um unter P_η, und zwar in Maximierungsprobleme, weil dies die gängige Darstellung in der Literatur ist.
Dazu bezeichne für $i = 0, 1$:

$$L_n^i := L_n(\vartheta_i, \eta) = \frac{dP_{\vartheta_i}}{dP_\eta}. \tag{2.5.1}$$

Aufgrund der Äquivalenz der Verteilungsklasse existieren auch diese Dichten (vgl. auch 1.9.3).
Damit bekommen die Stopprobleme $(S^{\mathcal{N}}_{a,c})$ die Gestalt:

$$(S^{\mathcal{N}}_{a,b,c}) \quad \left\{ \begin{array}{c} E_\eta\big(-\min(a\, L_t^0, b\, L_t^1) - c\, t\big) \overset{!}{=} \sup \\ t \in \mathcal{S}^{\mathcal{N}}_\eta \end{array} \right\}, \text{ mit } a, c \geq 0 \text{ und } b = 1.$$

Für die Lösungen des Stopproblems $(S^{\mathcal{N}}_{a,c})$ interessieren wir uns im Hinblick darauf, mit Hilfe der hinreichenden Bedingung des sequentiellen Neyman-Pearson-Lemmas 2.4.1 Lösungen von $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ zu bestimmen.
Daher ist das Ziel, eine Lösung $\hat{t}$ von $(S^{\mathcal{N}}_{a,c})$ zu finden, welche das Niveau δ voll ausschöpft, d.h. für die gilt $E_\eta \hat{t} = \delta$. Dafür brauchen wir randomisierte Stoppzeiten.
Es stellt sich die Frage, wie sich mit Hilfe randomisierter Stoppzeiten das Niveau α ausschöpfen lässt. Eine mögliche mögliche Antwort hierauf haben wir in Kapitel 1 (vgl.1.6.13 auf S.78 und 1.9.6 auf S.109) gegeben:

Wir finden für die Aufgabe $(S^{\mathcal{N}}_{a,c})$ neben der frühesten Lösung t^* die spätest mögliche Stoppzeit t^+ als Lösung, welche ebenfalls von den Multiplikatoren a, c abhängt, werden dann die Multiplikatoren a und c so wählen, dass gilt $E_\eta t^* \leq \delta$ und $E_\eta t^+ \geq \delta$, und bilden schließlich eine geeignete Konvexkombination zwischen diesen Stoppzeiten derart, dass δ ausgeschöpft wird.
Allerdings sei darauf hingewiesen, dass das Ausschöpfen von δ sich im allgemeinen nicht so konstruktiv ausführen lassen wird wie z.B. in 1.9.6, da die optimale Stoppzeit hier von zwei Multiplikatoren abhängt. Wir belassen es daher in diesem Kapitel mit dem Erwähnen der Konstruktionsidee, anwenden werden wir sie in Kapitel 3 für besonders einfache Situationen, so z.B. bei der Bestimmung von Tests der Güte 1 unter varierenden Stoppzeiten.

Bei den Problemen $(S^{\mathcal{N}}_{a,1,c})$ unterscheiden wir zwischen endlichem und unendlichem Horizont:
- Die Lösung des Stopproblems $(S^{\mathcal{N}}_{a,1,c})$ für endlichen Horizont (d.h. $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$) erfolgt bekanntlich über Rückwärtsinduktion und ist daher im Prinzip bestimmbar. Wir verweisen hierfür auf z.B. Irle [I1], Satz 2.1.3 auf S. 46.
Praktisch sind die Lösungen im allgemeinen nur iterativ ausrechenbar und das ist meist sehr aufwendig: dieses unerfreuliche Problem liegt an der rekursiven Darstellung der Lösung über eine Kette ineinander verschachtelter bedingter Erwartungswerte.
Zur Lösung dieses Stopproblems verwenden wir die Darstellung (2.4.4). Mit Dichten bzgl. P_η bekommt das Stopproblem $(S^{\mathcal{N}}_{a,1,c})$ dann die Gestalt:

$$\left\{ \begin{array}{c} E_\eta\big(\max(L^1_t - aL^0_t, 0) - c\,t\big) \stackrel{!}{=} \sup \\ t \leq N \end{array} \right\}. \tag{2.5.2}$$

- Für unendlichen Horizont ist das Stopproblem $(S^{\mathcal{N}}_{a,1,c})$ von derselben Struktur, wie das Stopproblem, welches beim Lösen des modifizierten Kiefer-Weiss-Problems heraustritt (vgl. Irle [I1], Seite 131); das modifizierte Kiefer-Weiss-Problem ist ein Stopproblem $(S^{\mathbb{N}}_{a,b,c})$ mit $a, b \geq 0$ und $c = 1$.
Eine Lösung für dieses Stopproblem ist daher allgemein bekannt:
Sie wird - wie üblich bei Stopproblemen mit unendlichem Beobachtungshorizont- mit Hilfe des kleinsten den Auszahlungsprozess

$$Z_n := -\min(aL^0_n, bL^1_n) + ct), \; n \in \mathbb{N}$$

dominierenden Supermartingals

$$U_n := \operatorname*{ess\,sup}_{\substack{t \in \mathcal{S}_\eta^{\overline{\mathbb{N}}} \\ t \geq n}} E_\eta(Z_t | \mathcal{A}_n)$$

(vgl. Chow-Robbins-Siegmund [CSR], S.62f.) beschrieben, in dem man die „Auszahlungen" Z_n zu jedem möglichen Zeitpunkt n vergleicht mit dem, was bei optimaler Fortsetzung erwartet wird (aufgrund der Informationen zum Zeitpunkt n), d.h. mit

$$E_\eta\big(U_{n+1} \mid \mathcal{A}_n\big).$$

So wird in der gängigen Literatur zum optimalen Stoppen (vgl.Chow-Robbins-Siegmund [CRS], Shiryayef [Shir]) die „frühest" mögliche Ersteintrittszeit

$$t^* := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid Z_n \geq E_\eta\big(U_{n+1} | \mathcal{A}_n\big)\}$$

als Lösung genannt, sofern natürlich diese Stoppzeit abgeschlossen unter P_η ist. Da der Auszahlungsprozess $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. $\underset{\sim}{\mathcal{C}}$ adaptiert ist, handelt es sich bei t^* um eine nichtrandomisierte Stoppzeit.
In einer Markovschen Stoppsituation, d.h. der Auszahlungsprozess ist eine Verarbeitung einer stationäre Markovfolge, was bei unserem Stopproblem $(S_{a,1,c}^{\mathcal{N}})$ auch vorliegt, lassen sich die bedingten Erwartungswerte $E_\eta\big(U_{n+1}|\mathcal{A}_n\big)$ in der Defintion von t^* explizit bestimmen (vgl. Irle [I1], Satz 2.3.7 auf S. 66f.).
Und schließlich lässt sich das bei dieser Vereinfachung auftretende Stoppgebiet durch eine auf Lorden zurückgehenden Darstellung mit Hilfe konkaver Funktionen explizit beschreiben(vgl. [Lo]). Der einzige Nachteil an dieser Dartellung liegt darin, dass die konkaven Funktionen nur implizit gegeben sind.

Um randomisierte Stoppzeiten zu konstruieren, die $(S_{a,1,c}^{\overline{\mathbb{N}}})$ lösen, werden wir diesen allgemein bekannten Resultaten als eine weitere Lösung die „spätest" mögliche Stoppzeit

$$t^+ := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid Z_n > E_\eta\big(U_{n+1}|\mathcal{A}_n\big)\}$$

hinzufügen. Ein Beweis befindet sich hierfür im Rahmen des optimalen Mehrfachstoppens im Buch von Cairoli und Dalang [CD] „Sequential Stochastic Optimization".

Wir beginnen mit der Bestimmung randomisierter Lösungen für $(S_{a,1,c}^{\overline{\mathbb{N}}})$. Da wir auch randomisierte Lösungen für das Problem (S_α) mitbehandeln wollen, geben wir zunächst in einem allgemeineren Rahmen randomisierte Lösungen für Markovsche Stoppsituationen (vgl. Irle [I1], Seite 62ff.) an. Die vorherigen Ausführungen werden zusammengefasst von folgendem

2.5.1 Satz: Lösungen für Markovsche Stoppsituationen

Es sei $(E,\mathcal{E})$ *ein messbarer Raum, und für* $a \in E$ *sei* $(Y_n^a)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine stationäre Markovfolge bzgl.* $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ *und* P *mit Zustandsraum* E *(vgl. Irle [I1], Seite 69f.).*
Weiter seien

$$
\begin{aligned}
&Z_n^{a,c} := h(Y_n^a) - cn \textit{ mit } c > 0 \textit{ und}\\
&h : E \to (-\infty, b]\ \mathcal{E} - \textit{messbar } (b \in \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Es sei $S_1 := \{t : \Omega \to \overline{\mathbb{N}} \textit{ Stoppzeit bzgl. } \underset{\sim}{\mathcal{A}} \mid Et < \infty\}$, *dann besitzt das Problem*

$$
(\mathcal{S}^{a,c}) \quad \begin{cases} EZ_t^{a,c} \overset{!}{=} \sup \\ t \in \mathcal{S}_1. \end{cases}
$$

folgende Lösungen:

i) $t(a,c) := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n^a \in B(c)\}, \quad \textit{mit}$

$$
\begin{aligned}
B(c) &:= \{u \in E \mid h(u) \geq \hat{v}_1^c(u)\}, \textit{ wobei}\\
\hat{v}_1^c(u) &:= \sup_{t\in S_1} EZ_t^{u,c},
\end{aligned}
$$

ii) $t^+(a,c) := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n^a \in B^+(c)\}, \quad \textit{mit}$

$$
B^+(c) := \{u \in E \mid h(u) > \hat{v}_1^c(u)\}.
$$

Außerdem liefern für $\gamma \in [0,1]$ *die randomisierten Stoppzeiten* $t_\gamma(a,c)$ *gegeben durch die Abbruchregeln*

$$
g_n := \gamma P_\bullet\big(t^+(a,c) = n \,|\, \mathcal{C}_n\big) + (1-\gamma) P_\bullet\big(t(a,c) = n \,|\, \mathcal{C}_n\big) \ (n \in \overline{\mathbb{N}})
$$

ebenfalls Lösungen für das Problem $(\mathcal{S}^{a,c})$.

Beweis:

i) Für einen Beweis der Optimalität von $t(a,c)$ stützen wir uns z.B. auf Irle [I1], Satz 2.2.3 auf Seite 56 und 2.3.5-2.3.8 auf Seite 65-70:
Zunächst gilt wegen $c > 0$ für jede Stoppzeit $t : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$

$$EZ_t^{a,c-} < \infty \Leftrightarrow Et < \infty,$$

so dass das Problem $(\mathcal{S}^{a,c})$ äquivalent ist zu dem in Irle betrachteten Stopproblem 2.1.1 auf Seite 43. Weiter ist wegen $Z_n^{a,c} \leq b - cn$ trivialerweise $E(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n^+) < \infty$. Die Vorraussetzungen für die Anwendung von Satz 2.2.3 sind damit erfüllt. Da $Z_n^{a,c} \to -\infty$ P_η-f.s. ist die Ersteintrittszeit

$$t^* := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid Z_n^{a,c} \geq E_\eta\big(U_{n+1}|\mathcal{A}_n\big)\}$$

abgeschlossen unter P_η und liefert eine Lösung von $(\mathcal{S}^{a,c})$, wobei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das kleinste den Auszahlungsprozess $(Z_n^{a,c})_{n\in\mathbb{N}}$ dominierende Supermartingal bezeichne.

Aufgrund der Markovschen Stoppsituation gilt außerdem

$$E(U_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = w_n(Y_n^a) \text{ mit} \tag{2.5.3}$$
$$w_n(u) := \sup_{t\in\mathcal{S}_1}\big(Eh(Y_t^u) - (n+t)c\big) = \hat{v}_1^c(u) - cn,$$

woraus schließlich die Behauptung für die „früheste“ Ersteintrittszeit $t(a,c)$ folgt.

ii) Für den Optimalitätsnachweis der „spätesten“ Ersteintrittszeit

$$t^+ := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid Z_n^{a,c} > E_\eta\big(U_{n+1}|\mathcal{A}_n\big)\}$$

verweisen wir auf Cairoli [CD], Theorem 1 auf S.74. Mit (2.5.3) bekommen wir schließlich $t^+ = t^+(a,c)$.

Für die Optimalität von $t_\gamma(a,c)$ ist nur noch folgendes anzumerken: Mit $t(a,c)$ und $t^+(a,c)$ ist auch $t_\gamma(a,c)$ ein Element von $\mathcal{S}_1$, und das Korollar 1.2.9 liefert:

$$\begin{aligned}
E_\eta(Z_{t_\gamma(a,c)}) &= \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} E_\eta(Z_n g_n)\\
&= (1-\gamma)\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} E_\eta(Z_n 1_{\{t^+(a,c)=n\}}) + \gamma\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} E_\eta(Z_n 1_{\{t^*(a,c)=n\}})\\
&= (1-\gamma)E_\eta(Z_{t^+(a,c)}) + \gamma E_\eta(Z_{t^*(a,c)}) = v_1^c(a,1).
\end{aligned}$$

Dabei ist $v_1^c(a,1)$ der Optimalwert von $(\mathcal{S}^{a,c})$.

$\square$

Die randomisierte Stoppzeit $t_\gamma(a,c)$ können wir folgendermaßen interpretieren: Vor dem Beobachten wird ein dichotomes Zusatzexperiment ausgeführt, aufgrund dessen Ausganges eine der beiden Stoppzeiten $t(a,c)$ bzw. $t^+(a,c)$ ausgewählt wird.(Z.B. wirft man eine Münze, bei der Zahl mit Wahrscheinlichkeit γ auftritt und Wappen mit der Restwahrscheinlichkeit $1-\gamma$. Fällt Zahl so wird die Stoppzeit $t(a,c)$ gewählt, ansonsten die Stoppzeit $t^+(a,c)$.)

Im iid-Modell 1.1.1 bildet $\left((aL_n^0, bL_n^1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine stationäre Markovfolge bzgl. P_η und $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ mit Zustandsraum $E = [0,\infty)^2$. Der Satz 2.5.1 liefert angewandt auf die Funktion

$$h(u,v) := -\min(u,v)$$

2.5.2 Korollar

Seien $a \geq 0$ und $c > 0$, dann liefern mit

$$Y_n^a = (aL_n^0, L_n^1)$$

die Stoppzeiten $t(a,c)$ und $t^+(a,c)$ aus 2.5.1 Lösungen von $(S_{a,1,c}^{\overline{\mathbb{N}}})$.
Dabei gilt

$$\begin{aligned} B(c) &= \{(u,v) \in [0,\infty)^2 \mid \min(u,v) \leq v_1^c(u,v)\} \quad \textit{mit} \\ &\quad v_1^c(u,v) := \inf_{t\in\mathcal{S}_\eta^{\overline{\mathbb{N}}}} \{E_\eta \min(uL_t^0, vL_t^1) + ct\} \ (\textit{ der Optimalwert von } (\mathcal{S}_{u,v,c}^{\overline{\mathbb{N}}})) \textit{ und} \\ B^+(c) &= \{(u,v) \in [0,\infty)^2 \mid \min(u,v) < v_1^c(u,v)\}. \end{aligned}$$

$\square$

Jetzt wollen wir nähere Aussagen über die Gestalt des Fortsetzungsgebietes $B(c)^*$ machen. Dazu stellen wir zuerst den Optimalwert $v_1^c(u,v)$ von $(S_{u,v,c})$ etwas anders dar:
Seien $u,v \geq 0$ und $c > 0$ reell, dann gilt:

$$v_1^c(u,v) = \inf_{T\in\mathcal{T}_\eta} \left(u\, E_{\vartheta_0}\, \varphi_t + v\,(1 - E_{\vartheta_1}\, \varphi_t) + c\, E_\eta\, t\right) =: R_1^c(u,v).$$

Begründung:

Da das Minimum zweier reeller Zahlen immer kleiner oder gleich ihrer Konvexkombination ist, gilt $v_1^c(u,v) \leq R_1^c(u,v)$ und mit dem TV

$\varphi_n = 1_{\{uL_n^0 < vL_n^1\}}$ $(n \in \mathbb{N})$ erkennt man, dass sogar Gleichheit gilt. $\square$

Ausgehend von der Darstellung des Optimalwertes des Stopproblem $(S_{u,v,c})$ durch $R_1^c(u,v)$ lassen sich bekanntlich weitere Strukturaussagen über das optimale Fortsetzungsgebiet $B(c)^*$ gewinnen. Hierbei kommt folgenden Ersteintrittszeiten eine wichtige Rolle zu:

2.5.3 Definition

Für $i \in \{0,1\}$ sei $t_i^+ := \{n \in \mathbb{N} \mid L_n(\eta, \vartheta_i) > 1\}$, $\inf \emptyset := \infty$.
Insb. gilt für $\eta = \vartheta_i$: $t_i^+ = \infty$.

Wir erhalten für die Abbildung $(u,v) \mapsto R_1^c(u,v)$ eine auf Lorden [Lo] zurückgehende implizite Darstellung durch konkave und isotone Funktionen gemäß:

2.5.4 Satz (vgl. Irle [I1], Satz 4.2.4 auf Seite 134ff.)

Sei $c > 0$ reell, dann gibt es Abbildungen $U^c, V^c : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

1) Für alle $u, v \in [0,\infty)$ gilt[2]

$$sgn\big(R_1^c(u,v) - u\big) = sgn\big(U^c(v) - u\big)$$
$$sgn\big(R_1^c(u,v) - v\big) = sgn\big(V^c(u) - v\big).$$

2) U^c, V^c sind konkav, stetig und monoton wachsend, mit $U^c(0) = V^c(0) = c$.

3.1)

$$lim_{z\to\infty} U^c(z) = u^c := \frac{cE_\eta t_0^+}{P_{\vartheta_0}(t_0^+ = \infty)}.$$

Insb. ist U^c für $\eta = \vartheta_0$ unbeschränkt und für $\eta \neq \vartheta_0$ nach oben beschränkt durch $u^c < \infty$.

3.2)

$$lim_{z\to\infty} V^c(z) = v^c := \frac{cE_\eta t_1^+}{P_{\vartheta_1}(t_1^+ = \infty)}.$$

Insb. ist V^c für $\eta = \vartheta_1$ unbeschränkt und für $\eta \neq \vartheta_1$ nach oben beschränkt durch $v^c < \infty$.

---

[2] sgn bezeichnet die Vorzeichenabbildung mit $sgn(0) = 0$.

4) Es existiert $z_0^c \geq c$, so daß für alle $z \geq 0$ gilt:

$$sgn(U^c(z) - z) = sgn(z_0^c - z) = sgn(V^c(z) - z).$$

5) Für jedes feste $u \geq 0$ ist $V^c(u)$ monoton wachsend in $c \in (0, \infty)$ mit

$$V^c(u) \downarrow 0 \quad \text{für } c \downarrow 0.$$

Entsprechendes gilt bei jedem festen $v \geq 0$ für $U^c(v)$.

Die oberen Schranken u^c und v^c lassen sich noch mit Hilfe der Spitzerschen Identitäten weiter bestimmen (vgl. Irle [I1], S.140).
Aus Satz 2.5.4 erhalten wir schließlich für das Fortsetzungsgebiet $B(c)$:

2.5.5 Korollar: Gestalt von $t(a, c)$

Es sei $c > 0$, dann ergibt sich für das optimale Stoppgebiet aus 2.5.2:

$$\begin{aligned} B(c) &= \big\{(u,v) \in [0,\infty)^2 \mid \min(u,v) \leq v_1^c(u,v)\big\} \\ &= \big\{(u,v) \in [0,\infty)^2 \mid u \leq R_1^c(u,v) \ \ \textit{oder} \ \ v \leq R_1^c(u,v)\big\} \\ &= \big\{(u,v) \in [0,\infty)^2 \mid u \leq U^c(v) \ \ \textit{oder} \ \ v \leq V^c(u)\big\} \end{aligned}$$

Damit bekommen die Lösungen von $(S_{a,c}^{\mathcal{N}})$ die Form:

$$\begin{aligned} t(a,c) &= \inf\{n \in \mathbb{N} \mid aL_n^0 \leq U^c(L_n^1) \ \textit{oder} \ L_n^1 \leq V^c(aL_n^0)\} \quad (2.5.4) \\ t^+(a,c) &= \inf\{n \in \mathbb{N} \mid aL_n^0 < U^c(L_n^1) \ \textit{oder} \ L_n^1 < V^c(aL_n^0)\} \end{aligned}$$

Soweit zur Gestalt der Lösungen des Stopproblems $(S_{a,c}^{\mathcal{N}})$.
Es sei noch angemerkt, dass für den Spezialfall $\mathcal{Q}$ ist eine einparametrige Exponentialfamilie Hawix und Schmitz in ihren Paper [Ha] „Remark on the modified Kiefer-Weiss problem for exponential families" die Abgeschlossenheit von $t^*(a, c)$ unter P_{ϑ_i} in Abhängigkeit von der Lage von η bzgl. ϑ_0 und ϑ_1 charakterisiert haben.
Diese Aussagen über die Abgeschlossenheit und Beschränktheit von $t(a, c)$ übertragen sich auch auf die randomisierten Stoppzeiten $t_\gamma(a, c)$. Denn anhand der Darstellung 2.5.4 für $t(a, c)$ und $t^+(a, c)$ erkennt man, dass aufgrund der Isotonie von $u \mapsto V^c(u)$ für alle $a \geq 0$ gilt:

$$t(a,c) \leq t_\gamma(a,c) \leq t(a+\epsilon, c) \quad \forall \epsilon > 0.$$

Kapitel 3

Gleichmäßig beste sequentielle Tests für zusammengesetzte Hypothesen

Gibt es gleichmäßig beste sequentielle Tests? Auf diese Frage wollen wir eine Reihe von Antworten geben. Dazu sollen bei einparametrigen Exponentialfamilien $\mathcal{Q}$ die Probleme

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_\zeta \, \varphi_t \stackrel{!}{=} sup & \forall \zeta > \zeta_2 \\ E_\zeta \, \varphi_t \leq \alpha & \forall \zeta \leq \zeta_0 \\ E_\eta \;\; t \leq \delta & \end{array} \right\} \qquad (3.0.1)$$

zum einen für $\zeta_2 = \zeta_0$ untersucht werden, d.h. für aneinander grenzende Hypothesen, und zum anderen für $\zeta_2 > \zeta_0$, d.h. für nicht aneinander grenzende Hypothesen. Wie in Kapitel 2 unterscheiden wir zwischen endlichem und unendlichem Horizont.

Den Untersuchugen wird das iid-Modell aus Kapitel 1 zugrundegelegt. Es wird sich zeigen, dass wir die obige Frage nicht allgemein mit ja oder mit nein beantworten können: Wir werden einerseits eine Anzahl von Beispielen für gleichmäßige Optimalität angeben können und andererseits bereits in besonders gutartigen Situationen zeigen können, dass es dort keine gleichmäßig besten Tests geben kann. Dabei werden wir die in Kapitel 1 und 2 vorbereiteten Hilfsmittel einsetzen: Die Negativaussagen unter unbeschränkten Ersteintrittszeiten 1.5.16, 1.5.17 für Negativaussagen bei unendlichem Horizont, die Negativaussagen unter beschränkten zweiseitigen Ersteintrittszeiten 1.5.16 für Negativausagen bei endlichem Horizont und das sequentielle Neyman-Pearson-Lemma 2.4.1, als Grundstein für den Nachweis von Optimalitätsaussagen bei endlichem Horizont.

- Für endlichen Horizont können wir gleichmäßig beste Tests für aneinandergrenzende Hypothesen angeben. Die wichtigsten Beispiele werden CIPs sein. Darüber hinaus werden wir mit einem weiteren Beispiel zeigen, dass die sequentiellen Tests, die sich durch Verkürzen des besten Tests $\bar{\varphi}_N$ (für festen Stichprobenumfang vgl. 1.3.1) ergeben, nicht die einzigen gleichmäßig besten sequentiellen Tests sind.

- Für unendlichen Horizont ist Curtailing Inspection nicht ausführbar. Es besteht aber hier die Möglichkeit gleichmäßig beste sequentielle Tests der Güte 1 für nicht aneinander grenzende Hypothesen zu erhalten, was bei endlichem Horizont aufgrund der Äquivalenz der Verteilungsklasse nicht möglich ist. Dazu werden wir alle Situationen charakterisieren, in denen das Problem $(\mathbb{P}^{\overline{\mathbb{N}}}_{\alpha,\delta})$ (für einfache Hypothesen) eine Lösung der Güte 1 zulässt. Für diese Situationen werden wir zeigen können, dass die randomisierten rechtsseitigen SPRTs gleichmäßig beste Lösungen des obigen Problems für geeignetes $\zeta_2 > \zeta_0$ ergeben.

3.1 Gleichmäßig beste sequentielle Tests für endlichen Horizont

Die wichtigsten Beipiele für gleichmäßig beste sequentielle Tests für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ liefern sequentielle Tests, die sich durch verkürzen des besten Testes z.N. α bei festem Stichprobenumfang N ergeben vgl. (1.3).
Dieses Resultat liefert folgender Satz:

3.1.1 Satz

Es sei $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Verteilungsklasse, mit der Eigenschaft, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{Q}^n = \{Q^n_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ isotonen Dichtequotienten in einer Statistik $\hat{S}_n : \mathcal{X}^n \to \mathbb{R}$ besitze. Weiter bezeichne $S_n := \hat{S}_n(X_1, \ldots, X_n)$. Zu einem vorgegebenen festen Stichprobenumfang $N \in \mathbb{N}$ und zu $\vartheta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$, $\alpha \in (0,1)$ sei

$$\bar{\varphi}_N := \begin{cases} 1 & & & > & \\ \gamma_N & \text{für} & S_N & = & k \\ 0 & & & < & \end{cases}, \quad \text{mit}$$

$\gamma_N \in [0,1],\ k \in \mathbb{R}$ derart, dass $\quad P_{\vartheta_0}(S_N > k) + \gamma_N P_{\vartheta_0}(S_N = k) = \alpha$.
Zu $\bar{\varphi}_N$ sei $\varphi^*_{t^*}$ ein sequentieller Test mit

$$t^* < N \text{ und } E_\vartheta\, \varphi^*_{t^*} = E_\vartheta\, \bar{\varphi}_N \ \ \forall \vartheta \in \Theta.$$

Es seien $\eta \in \Theta$ und $\delta := E_\eta t^*$. Dann liefert $(t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ eine Lösung für das Problem

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_\vartheta\, \varphi_t \overset{!}{=} sup & \forall \vartheta > \vartheta_0 \\ E_\vartheta\, \varphi_t \le \alpha & \forall \vartheta \le \vartheta_0 \\ E_\eta \ \ t \le \delta & \\ \quad t \le N & \end{array} \right\} \tag{3.1.1}$$

Beweis:

Bekannterweise (vgl. Witting [Wi], Satz 2.24 auf S.210) liefert der Test $\bar{\varphi}_N$ eine Lösung von

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_\vartheta\, \varphi_N \overset{!}{=} sup & \forall \vartheta > \vartheta_0 \\ E_\vartheta\, \varphi_N \le \alpha & \forall \vartheta \le \vartheta_0 \\ \varphi_N : \Omega \to [0,1]\ \mathcal{C}_N\text{-messbar} & \end{array} \right. .$$

Damit gilt für jeden sequentiellen Test $(t, \underset{\sim}{\varphi})$ mit $t \le N$ und $E_{\vartheta_0}\varphi_t \le \alpha$

$$E_\vartheta\, \varphi_t \le E_\vartheta \bar{\varphi}_N \ \ \forall \vartheta > \vartheta_0.$$

Da der sequentielle Test $\varphi^*_{t^*}$ die gleiche Gütefunktion wie $\bar{\varphi}_N$ besitzt, folgt daraus die Behauptung. □

Damit erhalten wir folgenden

3.1.2 Beispiele

a) Für Verteilungsklassen, die Curtailing Inspection zulassen, liefert der CIP $\varphi^*_{t^*}$ zu $\bar{\varphi}_N$ eine Lösung von (3.1.1). Damit erhalten wir eine Fülle von Beipspielen: Zum einen einseitige CIPs (vgl. 1.3.4) z.B. für die Klasse der Poissonverteilungen, der Gammaverteilungen und der Rechteckverteilungen, zum anderen zweiseitige CIPs (vgl. 1.3.5) z.B. für die Klasse der Binomialverteilungen.

b) Weiter erhalten wir für die Klasse der Binomialverteilungen mit Lemma 2.4.6 und Lemma 2.4.7 weitere Beispiele für gleichmäßig beste sequentielle Tests, welche dieselbe Gütefunktion besitzen wie der Test $\bar{\varphi}_N$. □

Als nächstes erhebt sich die Frage, ob das „Verkürzen“ des besten Tests $\bar{\varphi}_N$ gemäß Satz 3.1.1 die einzige Möglichkeit ist, gleichmäßig beste sequentielle Tests für endlichen Horizont zu erhalten?
Dass dies nicht der Fall ist, zeigt das anschließende Beispiel: Nämlich im Falle von Bernoulliverteilungen lassen sich bereits für den Horizont $N = 2$ gleichmäßig beste sequentielle Tests angeben, deren Gütefunktion kleiner ist als die des besten Tests $\bar{\varphi}_N$. Allgemeiner zeigen wir zunächst:

3.1.3 Lemma

Es seien $\mathcal{Q} = \{\mathcal{B}(1, \vartheta) \mid \vartheta \in (0, 1)\}$ und $\eta \in (0, 1)$. Weiter seien $N = 2$, $\alpha \in (0, 1)$ und $\delta \in (1, N)$. Dann besitzt das Problem (3.1.1) eine Lösung $(t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$.

Beweis:

Es sei $\vartheta_1 = \mu\vartheta_0$ mit $1 < \mu < \frac{1}{\vartheta_0}$, d.h. $\vartheta_1 > \vartheta_0$.
Dann liefert das sequentielle Neyman-Pearson-Lemma 2.4.1 die Existenz einer Lösung $(t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ für die einfachen Hypothesen $\{\vartheta_0\}$ gegen $\{\vartheta_1\}$.
Wir zeigen im folgenden, dass eine solche Lösung $(t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ unabhängig von μ, also von ϑ_1 gewählt werden kann, woraus dann die Optimalität für $\overline{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ folgt.

Gemäß 2.4.1 gibt es Multiplikatoren $a = a(\mu),\ c = c(\mu) \geq 0$, so dass der Test $(t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ notwendig die folgende Gestalt besitzt:

$$\varphi_n^* \quad = \quad \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \quad \text{für} \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{f_{\vartheta_1}}{f_{\vartheta_0}}(X_k) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} a \right\} \quad P_{|\mathcal{C}_n}\text{-f.s. auf } \{t^* = n\}$$

und t^* ist gemäß (2.5.2) eine Lösung des Stopproblems

$$\left\{\begin{matrix} E_{\vartheta_0}\Big(\prod_{k=1}^{t} \frac{f_{\vartheta_1}}{f_{\vartheta_0}}(X_k) - a\Big)^+ - cE_\eta t \overset{!}{=} \sup \\ t \leq 2, \end{matrix}\right\} \tag{3.1.2}$$

wobei f_ϑ die Zähldichte von $\mathcal{B}(1, \vartheta)$ bezeichne.
Aufgrund der Äquivalenz der Verteilungsklasse ist $E_{\vartheta_1}\varphi_{t^*}^* < 1$, so dass notwendig gilt $E_{\vartheta_0}\varphi_{t^*}^* = \alpha$ und $a > 0$.
Wir schreiben zunächst das TV und das Stopproblem um.
Dazu verwenden wir für den Dichtequotienten folgende Dartellung:

$$\frac{f_{\vartheta_1}}{f_{\vartheta_0}}(x) = b\Big(\frac{\mu}{b}\Big)^x, \ x \in \{0, 1\} \ \text{ mit } b := \frac{1 - \mu\vartheta_0}{1 - \vartheta_0}.$$

Wegen $1 < \mu < \frac{1}{\vartheta_0}$ gilt $b \in (0,1)$ und somit $\frac{\mu}{b} > 1$. Mit diesen Vorbereitungen bekommen wir für das TV notwendig die Gestalt

$$\varphi_1^* = \begin{cases} 1 & & > & & \\ \gamma_1 & \text{für} \quad b\left(\frac{\mu}{b}\right)^{X_1} & = & a & P_{|\mathcal{C}_1}\text{-f.s. auf } \{t^* = 1\} \\ 0 & & < & & \end{cases}$$

$$\varphi_2^* = \begin{cases} 1 & & > & & \\ \gamma_2 & \text{für} \quad b^2\left(\frac{\mu}{b}\right)^{X_1+X_2} & = & a & P_{|\mathcal{C}_2}\text{-f.s. auf } \{t^* = 2\}, \\ 0 & & < & & \end{cases}$$

wobei $\gamma_i : \Omega \to [0,1]$ $\mathcal{C}_i$-messbare Abbildungen bezeichnen. Zur Umformulierung des Stopproblems nutzen wir die Darstellung randomisierter Stoppzeiten mit Hilfe von Abbruchregeln:
Für eine randomisierte Stoppzeit $t : \Omega \to \{1,2\}$ bezeichne

$$\epsilon_i := P_\bullet(t = 1 \mid X_1 = i), \quad i = 0, 1.$$

Elementare Rechnungen liefern für die Zielfunktion des Stopproblems 3.1.2:

$$\begin{aligned} & E_{\vartheta_0}\Big(\prod_{k=1}^{t} \frac{f_{\vartheta_1}}{f_{\vartheta_0}}(X_k) - a\Big)^+ - cE_\eta t = E_{\vartheta_0}\Big(\big[b(\frac{\mu}{b})^{X_1} - a\big]^+ 1_{\{t=1\}}\Big) + \\ & E_{\vartheta_0}\Big(\big[b(\frac{\mu}{b})^{X_1+X_2} - a\big]^+ 1_{\{t=2\}}\Big) - 2c + c(1-\eta)\epsilon_0 + c\eta\epsilon_1 \\ = \quad & (1-\vartheta_0)\Big(\Lambda_0 + \epsilon_0\big[(b-a)^+ - \Lambda_0\big]\Big) + \vartheta_0\Big(\Lambda_1 + \epsilon_1\big[(\mu-a)^+ - \Lambda_1\big]\Big) \\ & -2c + c(1-\eta)\epsilon_0 + c\eta\epsilon_1, \text{ wobei} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &:= (1-\vartheta_0)(b^2-a)^+ + \vartheta_0(b\mu - a)^+ \\ \Lambda_1 &:= (1-\vartheta_0)(b\mu-a)^+ + \vartheta_0(\mu^2 - a)^+. \end{aligned}$$

Damit lässt sich das Stopproblem auffassen als Maximierung einer stetigen Funktion $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\epsilon_0, \epsilon_1) := (1-\vartheta_0)\Big(\Lambda_0' + \epsilon_0\big[2q_0c - \Lambda_0''\big]\Big) + \vartheta_0\Big(\Lambda_1' + \epsilon_1\big[2q_1c - \Lambda_1''\big]\Big), \text{ wobei}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_0'' &= \Lambda_0' - (b-a)^+, \qquad \Lambda_0' = \Lambda_0 - q_0c, \qquad q_0 = \frac{1-\eta}{1-\vartheta_0} \\ \Lambda_1'' &= \Lambda_1' - (\mu-a)^+ \qquad \Lambda_1' = \Lambda_1 - q_1c, \qquad q_1 = \frac{\eta}{\vartheta_0}. \end{aligned}$$

Da $X_i \in \{0,1\}$, können wir uns bei den möglichen Werten für den Multiplikator a auf die vier Werte

$$b,\ \mu,\ \mu b,\ \mu^2$$

beschränken. Durch diese Werte werden alle von der Struktur her möglichen optimalen sequentiellen Tests gegeben.
Der Nachweis der Unabhängigkeit der Lösung $(t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ vom Parameter μ lässt sich dann durch eine Fallunterscheidung nach den vier Werten von a erreichen, indem

- zum einen gezeigt wird, dass das TV unabhängig von μ wird und
- zum anderen durch eine weitere Fallunterscheidung nach den möglichen Werten für $c \geq 0$, die optimale Stoppzeit aus dem obigen Maximierungsproblem herausgerechnet wird und an der Gestalt die Unabhängigkeit von μ abgelesen wird.

Wir werden hier exemplarisch den Fall $a = \mu$ vorrechnen, an dem alle Besonderheiten heraustreten, die anderen Fälle werden völlig analog behandelt.
Zunächst bekommen wir für das TV $\underset{\sim}{\varphi}^*$ die Gestalt:

$$\varphi_1^* = \begin{cases} \gamma_1 \\ 0 \end{cases} \text{für } X_1 = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}, \qquad \varphi_2^* = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für } X_1 + X_2 \begin{matrix} = 2 \\ < 2 \end{matrix}.$$

Dabei ist die $\mathcal{C}_1$-messbare Abbildung $\gamma_1 : \Omega \to [0,1]$ unabhängig von μ wählbar, da γ_1 nur durch die Bedingung $E_{\vartheta_0}\varphi_{t^*}^* = \alpha$ bestimmt ist.
Für die Berechnung der optimalen Stoppzeit t^* bestimmen wir ϵ_0 und ϵ_1 aus $[0,1]$ derart, dass an diesen Stellen die obige Funktion f maximiert wird.
Zunächst erhalten wir für $a = \mu$:

$$\Lambda_0 = 0, \quad \Lambda_0^{''} = q_0 c, \qquad \Lambda_1 = \vartheta_0 \mu(\mu - 1), \quad \Lambda_1^{''} = \Lambda_1 + q_1 c.$$

Damit bekommt f die Form

$$f(\epsilon_0, \epsilon_1) = (1 - \vartheta_0)\Big(\Lambda_0^{'} + \epsilon_0 q_0 c]\Big) + \vartheta_0\Big(\Lambda_1^{'} + \epsilon_1\big[q_1 c - \vartheta_0\mu(\mu-1)\big]\Big)$$

1.Fall: $c = 0$

Da $\vartheta_0\mu(\mu - 1) > 0$ muss notwendig gelten $\epsilon_=1$, um die Funktion f zu maximieren, d.h. für $X_1 = 0$ ist $t^* = 2$ und somit $\varphi_{t^*}^* = 0$.
Die Festlegung von ϵ_0 erfährt durch das Stopproblem keine Einschränkungen, ϵ_0 wird einzig durch die Bedingung $E_\eta t^* \leq \delta$ festgelegt und ist daher unabhängig von μ wählbar.

2.Fall: $c > 0$

Um f zu maximieren, muss zunächst notwendig $\epsilon_0 = 1$ gelten, d.h. für $X_1 = 0$ ist $t^* = 1$ und somit $\varphi^*_{t^*} = 0$.
Weiter ist die Wahl von ϵ_1 abhängig davon welchen Wert größer 0 der Multiplikator c annimmt.
Dabei kommen nur folgende drei Fälle in Frage:

i) $c < \frac{\vartheta_0}{q_1}\mu(\mu-1)$, dann muss notwendig $\epsilon_1 = 0$ gelten, d.h. für $X_1 = 1$ ist $t^* = 2$ und somit $\varphi^*_{t^*} = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right.$ für $X_2 = \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}$.

ii) $c > \frac{\vartheta_0}{q_1}\mu(\mu-1)$, dann muss notwendig $\epsilon_1 = 1$ gelten, d.h. für $X_1 = 1$ ist $t^* = 1$ und somit $\varphi^*_{t^*} = \gamma_1$.

iii) $c = \frac{\vartheta_0}{q_1}\mu(\mu-1)$, so erfährt ϵ_1 durch das Stopproblem keine Beschränkung. ϵ_1 wird nur durch die Bedingung $E_\eta t^* \leq \delta$ bestimmt.

In allen drei Fällen ist also ϵ_1 unabhängig von μ wählbar.

Daraus ergibt sich die Behauptung für $a = \mu$. □

3.1.4 Beispiel

In der Situation von Satz 3.1.3 seien $\eta = \vartheta_0 = \frac{1}{3}$ und $\alpha = \frac{1}{4}\vartheta_0 + \frac{1}{2}\vartheta_0^2 = \frac{5}{36}$ sowie $\delta = 1 + \frac{\vartheta_0}{2} = 1\frac{1}{6}$.
Dann liefert der sequentielle Test $(t^*, \underset{\sim}{\varphi})$ mit $t^* = 1$, falls $X_1 = 0$ oder $t^* = 1$ mit Wahrscheinlichkeit $1/2$, falls $X_1 = 1$ und

$$\varphi_1 = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } X_1 = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \\ 0, & \end{cases}, \qquad \varphi_2 = \begin{cases} 1, & \text{falls } X_1 + X_2 \begin{matrix} 1 = 2 \\ < 2 \end{matrix} \\ 0, & \end{cases}$$

eine gleichmäßig beste Lösung für das Problem in Satz 3.1.3. Das folgt unmittelbar aus dem Beweis von Satz 3.1.3 mit $a = \mu$ und $c = \vartheta_0\mu(1-\mu)$ und $\epsilon_1 = 1/2$ und daraus, dass er die vorgegeben Niveaus α und δ offensichtlich ausschöpft.
Die Gütefunktion von $(t^*, \underset{\sim}{\varphi})$ hat die Gestalt:

$$E_\vartheta \varphi^*_{t^*} = \frac{1}{4}\vartheta + \frac{1}{2}\vartheta^2.$$

Diese Gütefunktion ist auf $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ zum einen kleiner als die des klassischen besten Tests φ^*_2 z.N. α bei festem Stichprobenumfang $N = 2$ und zum anderen größer als die des besten klassischen besten Tests φ_1^* z.N. α bei festem Stichprobenumfang $N = 1$, denn:

$$\varphi_2^* = \begin{cases} 1 & & > \\ \frac{1}{16} & \text{für} \quad X_1 + X_2 & = & 1 \\ 0 & & < \end{cases}, \quad E_\vartheta \, \varphi_2^* = \frac{15}{16}\vartheta^2 + \frac{1}{16}\vartheta,$$

$$\varphi_1^* = \begin{cases} \frac{5}{12} \\ 0 \end{cases} X_1 = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}, \qquad E_\vartheta \, \varphi_1^* = \frac{5}{12}\vartheta.$$

□

Dieses Beispiel weckt vielleicht die Hoffnung, dass es neben den CIPs noch weitere Beispielklassen für gleichmäßig beste sequentielle Tests gibt. Dass dazu wenig Hoffnung besteht, zeigt das folgende Beispiel, dass nämlich selbst in den gutartigsten und einfachsten Fällen wie für die Klasse der Normalverteilungen für Horizont $N = 2$ keine gleichmäßig besten sequentiellen Tests gibt.

3.1.5 Satz

Es seien $\mathcal{Q} = \{\mathcal{N}(\vartheta, \sigma^2) \mid \vartheta \in \mathbb{R}\}, \sigma, \vartheta\zeta_0 \in \mathbb{R}$ *und* $\eta = \vartheta_0$. *Weiter seien* $N = 2$, $\alpha \in (0,1)$ *und* $\delta \in (1, N)$. *Dann besitzt das Problem (3.1.1)*
keine Lösung.

Beweis:

Der Beweis erfolgt mit Hilfe der Negativaussage 1.5.16, dass unter zweiseitigen beschränkten Ersteintrittszeiten für Normalverteilungen keine gleichmäßig besten Lösungen für $H_0 : \zeta \le \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$ existieren.
Wir führen den Beweis für den Spezialfall $\vartheta_0 = 0$ und $\sigma^2 = 1$ durch. Den allgemeinen Fall bekommen wir durch positive lineare Transformation.
$\underline{\mathbb{A}}$: Es gibt eine Lösung $(t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ des obigen Problems. So ist $(t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ Lösung des Problems $(\mathbb{P}_{\alpha,\delta}^{\{1,\ldots,N\}})$ mit $\vartheta_1 = 1$.
Nach dem sequentiellen Neyman-Pearson-Lemma 2.4.1 gibt es dann Multiplikatoren $a = a(\vartheta_1), c = c(\vartheta_1) \ge 0$, so dass t^* notwendig eine Lösung des Stopproblems (2.5.2) liefert und $\underset{\sim}{\varphi}^*$ die folgende 1-0-Gestalt besitzt

$$\varphi_n^* = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{für} \quad L_n^1 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} a \, L_n^0 \Bigg\} \quad P_{|\mathcal{C}_n}\text{-f.s. auf } \{t^* = n\}.$$

Aufgrund der Äquivalenz der Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ gilt $E_{\vartheta_1} \varphi_{t^*}^* < 1$, so dass notwendig $a > 0$ folgt.

Behauptung: $t^* = t^N(d_1, d_2)$ (vgl. 1.5.4) mit $d_1 < d_2$ und
$S_n = \sum_{i=1}^n X_i - n\vartheta_0 = \sum_{i=1}^N X_i$.

Damit folgt aber aus 1.5.16, dass für das Problem 1.5.1 unter der festen Stoppzeit t^*

$$\begin{cases} E_\vartheta \varphi_{t^*} \overset{!}{=} \sup & \forall \vartheta_1 > \vartheta_0 \\ E_{\vartheta_0} \varphi_{t^*} \leq \alpha \end{cases}$$

keine Lösung existiert. Da $(t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ als gleichmäßig optimale Lösung unter variierenden Stoppzeiten, auch eine Lösung von 1.5.1 unter seiner eigenen Stoppzeit t^* liefern muss, erhalten wir den erwünschten Widerspruch zur Annahme.
Es bleibt daher noch die Behauptung zu zeigen:

Dazu bestimmen wir die Stoppzeit t^* mit Hilfe von Rückwärtsinduktion (vgl. Irle [I1], Satz 2.1.3 auf Seite 46). Für die Dichtequotienten bzgl. $P_\eta = P_{\vartheta_0}$ bekommen wir

$$L_n^1 = \exp\big(S_n - n/2\big) \text{ und } L_n^0 = 1.$$

Damit erhält der unter allen Stoppzeiten $t \leq 2$ zu maximierende Auszahlungsprozess Z_n aus (2.5.2) die Gestalt

$$Z_n = \max\big(L_1 - a, 0\big) - cn.$$

Als Lösung für das Problem $(S_{a,c}^{\mathcal{N}})$ bekommen wir

$$t^* = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad \text{falls} \quad Z_1 \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} E_\eta\big(Z_2 \,|\, X_1\big)\right\};$$

diese Löung ist wegen Lebesque-Stetigkeit des Dichtequotienten L_n^i auch P_{ϑ_0}-f.s. eindeutig.
Für den erwarteten Wert bei optimaler Fortsetzung errechnet man mit Hilfe der Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte zu:

$$E_\eta(Z_2|X_1 = x) = exp(x-1/2)\Phi(x-lna) - a\Phi(x-lna-1) - 2c \text{ für } \lambda\!\!\lambda^1\text{−fast alle } x \in \mathbb{R}.$$

Damit bekommen wir $t^* = 1$, falls eine der beiden Fälle eintritt:

1.Fall: $X_1 < x_a$ und $f_{a,c}(X_1) \leq 0$ P_η-f.s., wobei

$$x_a := lna + 1/2 \text{ und } f_{a,c}(x) := exp(x-1/2)\Phi(x-lna) - a\Phi(x-lna-1) - c.$$

2.Fall: $X_1 \geq x_a$ und $g_{a,c}(X_1) \geq 0$ P_η-f.s., wobei

$$g_{a,c}(x) := exp(x - 1/2)\Phi\big(-(x - lna)\big) - a\Phi\big(-(x - lna - 1)\big) + c.$$

Eine Kurvendiskussion von $f_{a,c}$ und $g_{a,c}$ liefert:

i) $f_{a,c}$ definiert eine strikt konvexe Funktion mit $f_{a,c}(x_a) > 0$ und

$$\lim_{x \to -\infty} f_{a,c}(x) = -c.$$

Daher besitzt $f_{a,c}$ genau eine Nullstelle $d_1 = d_1(a,c) < x_a$.

ii) $g_{a,c}$ liefert für $x \geq x_a$ eine strikt konkave Funktion mit $g_{a,c}(x_a) < 0$ und

$$\lim_{x \to -\infty} g_{a,c}(x) = c.$$

Daher hat $g_{a,c}$ genau eine Nullstelle $d_2 = d_2(a,c) > x_a$.

Hieraus folgt schließlich die Behauptung. □

Wir wollen an dieser Stelle auf eine Vermutung hinweisen, welche durch die Ergebnisse von Kapitel 1 für feste Stoppzeit gestützt wird:
Wenn es auch für die Klasse der Normalverteilungen unter einer zweiseitigen beschränkten Ersteintrittszeiten keine gleichmäßig besten sequentiellen Tests für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ geben kann (vgl.1.5.16), so gibt es immerhin unter diesen Stoppzeiten lokal gleichmäßig beste sequentielle Tests (vgl. 1.7.6). Daher besteht die Vermutung, dass für die Klasse der Normalverteilungen lokal gleichmäßig beste sequentielle Tests geben können, d.h. Lösungen des Problems

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_\vartheta\, \varphi_t \overset{!}{=} sup & \forall \vartheta \in (\vartheta_0, \vartheta_0 + \Delta) \\ E_\vartheta\, \varphi_t \leq \alpha & \forall \vartheta \leq \vartheta_0 \\ E_\eta\;\, t \leq \delta & \\ \quad t \leq N & \end{array} \right\},$$

für ein $\Delta = \Delta(N) > 0$. Eine entsprechende Vermutung besteht aus demselben Grunde für die Klasse der Gammaverteilungen und für die Klasse der Bernoulliverteilungen.

3.2 Eine Charakterisierung von besten Tests der Güte 1 für das Problem $(\mathbb{P}^{\overline{\mathbb{N}}}_{\alpha,\delta})$

In der sequentiellen Statistik (bei Testproblemen mit variierenden Stoppzeiten) kommt bekannterweise den SPRT's eine ausgezeichnete Rolle zu. Nach dem Satz von Wald und Wolfowitz (vgl. Irle [I1], Satz 4.2.8 auf Seite 148) besitzen zweiseitige SPRTs folgende Optimalitätseigenschaft: Sie minimieren unter allen sequentiellen Tests mit Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art und 2. Art nicht größer als die der eigenen Niveaus den erwarteten Stichprobenumfang unter ϑ_0 und ϑ_1.
Eine entsprechende Aussage ist für rechtsseitige SPRTs bekannt im Hinblick auf Tests der Güte 1: Sie minimieren nämlich unter allen Tests der Güte 1 mit Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art nicht größer als das eigene Niveau, den erwarteten Stichprobenumfang unter ϑ_0 und ϑ_1 (vgl. Khan [Kh], S.253f.). Die zu den rechtsseitigen SPRTs gehörigen Stoppzeiten sind unbeschränkte rechtsseitige Ersteintrittszeiten.
Wir werden in diesem Abschnitt die Untersuchungen über Tests der Güte 1 dahingegend erweitern, dass wir zu beliebig vorgegebenen Niveau α Tests der Güte 1 für das Problem $(\mathbb{P}^{\overline{\mathbb{N}}}_{\alpha,\delta})$ bestimmen (falls sie existieren) und zeigen, dass für das Problem $(\mathbb{P}^{\overline{\mathbb{N}}}_{\alpha,\delta})$ die einseitigen SPRTs auch die ausgezeichneten Lösungen der Güte 1 liefern in dem obigen Sinne.
In 1.9 haben wir unter randomisierten rechtsseitigen unbeschränkten Ersteintrittszeiten $t_\gamma(a,\eta)$ Lösungen der Güte 1 für das Problem (P^t_α) im Falle einer äquivalenten Verteilungsklasse $\mathcal{Q}$ betrachtet. Dort hatten wir schon auf ihre ausgezeichnete Rolle für das Problem $(\mathbb{P}^{\overline{\mathbb{N}}}_{\alpha,\delta})$ bei variierenden Stoppzeiten hingewiesen: Lässt das Problem $(\mathbb{P}^{\overline{\mathbb{N}}}_{\alpha,\delta})$ eine Lösung der Güte 1 zu, so kann sie immer in der Form $(t_\gamma(a,\eta), \underset{\sim}{\varphi})$ mit $\varphi_n = 1,\ n \in \mathbb{N}$ gewählt werden. Das soll hier bewiesen werden. Dazu werden wir vollständig charakterisieren, wann das Problem $(\mathbb{P}^{\overline{\mathbb{N}}}_{\alpha,\delta})$ durch einen Test der Güte 1 gelöst werden kann. Darüberhinaus werden wir in den Situationen, für die $(\mathbb{P}^{\overline{\mathbb{N}}}_{\alpha,\delta})$ Güte 1 als Optimalwert besitzt, einen Test der Güte 1 konstruktiv in der obigen Form angeben.

Nur in diesem Abschnitt gehen wir von der eingangs gestellten Forderung ab, dass $\mathcal{Q}$ eine einparametrige Exponentialfamilie sei. Es sei daher jetzt $\mathcal{Q}$ eine beliebige äquivalente Verteilungsklasse.

Entsprechend zum Problem (P^t_α) in 1.9 (bei fester Stoppzeit) werden wir für diese

Untersuchungen das Problem $(\mathbb{P}^{\overline{\mathbb{N}}}_{\alpha,\delta})$ modifizieren zur Aufgabe

$$(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta}) \quad \begin{cases} E_{\vartheta_1}\varphi_t 1_{\{t<\infty\}} + P_{\vartheta_1}(t=\infty) \stackrel{!}{=} \sup \\ E_{\vartheta_0}\varphi_t 1_{\{t<\infty\}} \le \alpha \\ E_\eta\, t \le \delta. \end{cases}$$

Das Problem $(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta})$ besitzt dieselben Lösungen wie die Aufgabe $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ (vgl. 1.9 S.103). Die Lösungen von $(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta})$ werden daher vollständig durch das Neyman-Pearson-Lemma von $(\mathbb{P}^{\overline{\mathbb{N}}}_{\alpha,\delta})$ charakterisiert, wobei das Randomisieren im Unendlichen aufgrund der Definition der Fehlerwahrscheilichkeit 1.Art und der Güte im Problem $(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta})$ entfällt. Auf die Probleme bei der Festlegung der Güte eines sequentiellen Tests $(t, \underset{\sim}{\varphi})$ in $(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta})$ durch $E_{\vartheta_1}\varphi_t = E_{\vartheta_1}(\varphi_t 1_{\{t<\infty\}})$ haben wir bereits in 1.9 S.111 hingewiesen:
Hier zeigt das Beispiel 2.1.4, dass es Situationen gibt, in denen eine Lösung der Aufgabe $(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta})$ unter P_{ϑ_1} mit positiver Wahrscheinlichkeit nie stoppt und dennoch die Güte 1 besitzt. Einen solchen Test haben wir in 1.9.9 als nicht ausführbar bezeichnet. Im Hinblick auf gleichmäßige Optimalität interessieren wir uns im Falle einparametriger Exponentialfamilien für optimale Tests, die ausführbar auf H_1 sind, d.h.welche unter P_{ϑ_1} abgeschlossen sind.

Eine erste Charakterisierung, wann $(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta})$ durch einen Test der Güte gelöst wird, bekommen wir folgendermaßen:
Da für eine Lösung φ_t der Güte 1 von $(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta})$ notwendig gilt
$\varphi_t = 1 \;\; P_{\vartheta_0|\mathcal{C}_t} + P_{\vartheta_1|\mathcal{C}_t}$-f.s., erhalten wir die Charakterisierung

$$(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta}) \text{ wird von einem Test der Güte 1 gelöst genau dann,} \tag{3.2.1}$$

$$\text{wenn es eine Stoppzeit gibt } t^* \text{ bzgl. } \underset{\sim}{\mathcal{A}} \text{ mit } \begin{cases} P_{\vartheta_0}(t^*<\infty) \le \alpha \\ E_\eta t^* \le \delta. \end{cases}$$

Im weiteren seien $\alpha \in (0,1)$ und $\vartheta_0 \in \mathring{\Theta}$ fest vorgegeben. Mit der obigen Äquivalenz geht es dann darum zu charakterisieren, für welche $\eta \in \Theta$ und $\delta \in (1,\infty)$ es Stoppzeiten t^* gibt mit $P_{\vartheta_0}(t^*<\infty) \le \alpha$ und $E_\eta t^* \le \delta$. Dazu betrachten wir das Stopproblem

$$(S_\alpha) \quad \begin{cases} E_\eta t \stackrel{!}{=} \inf \\ P_{\vartheta_0}(t<\infty) \le \alpha. \end{cases}$$

Den Minimalwert von (S_α) bezeichnen wir mit δ_α.
Für $\eta \neq \vartheta_0$ ist das Problem (S_α) sinnvoll, d.h. es besitzt endlichen Minimalwert

δ_α, denn gemäß Lemma 1.9.2 ist eine für (S_α) zulässige Stoppzeit z.B. gegeben durch

$$t(a,\eta) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid L_n(\eta,\vartheta_0) \geq a\}$$

für hinreichend großes $a > 1$.
Ziel der nachfolgenden Ausführungen ist der Beweis der Aussage:

3.2.1 Satz

Es seien $\alpha \in (0,1)$ und $\eta \neq \vartheta_0$, dann besitzt das Problem (S_α) eine Lösung t^*.

□

Der Beweis diesen Satzes wird im Rest des Abschnittes geliefert, indem wir für (S_α) eine Lösung t^* konstruktiv bestimmen werden. Ein solches Vorgehen ist für $(\mathbb{P}^{\mathcal{N}}_{\alpha,\delta})$ im allgemeinen nicht möglich (vgl. 2.4.3).

Mit Satz 3.2.1 können wir dann eine Charakterisierung für Tests der Güte 1 von $(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta})$ angeben:

3.2.2 Lemma: Charakterisierung für beste Tests der Güte 1 für $(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta})$

Es seien $\vartheta_0, \vartheta_1 \in \Theta$ und $\alpha \in (0,1)$, $\delta \in (1,\infty)$. Ferner bezeichne δ_α den Minimalwert von (S_α). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) $(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta})$ wird durch einen Test der Güte 1 gelöst.

2) $\eta \neq \vartheta_0$ und $\delta \geq \delta_\alpha$.

Beweis:

$1) \Rightarrow 2)$: Sei $\varphi^*_{t^*}$ eine Lösung von $(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta})$ mit $E_{\vartheta_1}\varphi^*_{t^*} = 1$, dann gilt aufgrund der Äquivalenz der eingeschränkten Maße $\varphi^*_{t^*} = 1$ auf $\{t^* < \infty\}$ P_{ϑ_i}-f.s $(i = 0,1)$. Daraus folgt $P_{\vartheta_0}(t^* < \infty) = E_{\vartheta_0}\varphi^*_{t^*} \leq \alpha$ und $E_\eta t^* \leq \delta$ und somit ist notwendig $\eta \neq \vartheta_0$ und t^* zulässig für (S_α), so dass $\delta \geq \delta_\alpha$ gelten muss.

$2) \Rightarrow 1)$: Es sei $\eta \neq \vartheta_0$, dann gibt es gemäß Satz 3.2.1 eine Lösung t^* von (S_α) mit Minimalwert $\hat{\delta} = E_\eta t^*$. Der sequentielle Test $T^* = (t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ mit $\varphi^*_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ liefert einen Test der Güte 1, der für $\delta \geq \delta_\alpha$ zulässig für $(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta})$ ist.

□

3.2.3 Bemerkung zur Optimalität

Die Lösungen $\varphi^*_{t^*}$ der Güte 1 für $(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta})$, welche man mit einer Stoppzeit t^* erhält, die (S_α) löst, besitzt die Optimaltiätseigenschaft, dass sie unter allen Tests der Güte 1 zum Niveau α den erwarteten Stichprobenumfang unter P_η minimiert.

□

Als nächstes wenden wir uns dem Problem (S_α) zu und werden mit Hilfe des Dualitätssatzes aus 2.3 in ein Stopproblem ohne Nebenbedingungen umschreiben und so hinreichende und notwendige Bedingungen dafür formulieren, wann eine Stoppzeit das Problem (S_α) löst.
Dazu wenden wir den Dualitätssatz 2.3.2 auf den Spezialfall $n = 1$ an mit

$$\begin{aligned} &R = \mathcal{S}_\eta^{\overline{\mathbb{N}}} = \{t : \Omega \to \overline{\mathbb{N}} \text{ Stoppzeit bzgl. } \big(\mathcal{A}_n\big)_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \mid E_\eta t < \infty\}, \\ &F(t) := -E_\eta t,\ A(t) := P_{\vartheta_0}(t < \infty). \end{aligned}$$

Aufgrund der Randomisierungen für die Stoppentscheidungen genügen die Abbildungen F und A den Bedingungen $D1 - D3$ (vgl. 2.4) und die Voraussetzungen für die Anwendung des Dualititätssatzes sind erfüllt. Wir erhalten daher folgende Charakterisierung der Lösungen von (S_α):

3.2.4 Satz: Dualitätssatz für (S_α)

Es seien $\eta \neq \vartheta_0$ und $\alpha \in (0,1)$ sowie $t^* \in \mathcal{S}_\eta^{\overline{\mathbb{N}}}$, dann gilt:
t^* ist Lösung von (S_α) genau dann, wenn

1) $P_{\vartheta_0}(t^* < \infty) = \alpha$ und

2) $\exists\, a > 0$: t^* ist Lösung von

$$(S^a) \quad \left\{ \begin{array}{c} E_\eta\big(aL_t(\zeta_0, \eta) + t\big) \stackrel{!}{=} \inf \\ t \in \mathcal{S}_\eta^{\overline{\mathbb{N}}}. \end{array} \right.$$

Beweis:

Es sei $t^* \in \mathcal{S}_\eta^{\overline{\mathbb{N}}}$ mit $P_{\vartheta_0}(t^* < \infty) \leq \alpha$, und es sei $a \in [0, \infty)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} F(t^*) = -E_\eta t^* &\stackrel{(1)}{\leq} E_\eta t^* + \big(\alpha - A(t^*)\big) \cdot a \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \sup_{t\in\mathcal{S}_\eta^{\overline{\mathbb{N}}}} \big(F(t) - A(t)\cdot a\big) + \alpha \cdot a = H^\alpha(a). \end{aligned}$$

Zusammen mit dem starken Dualitätssatz 2.3.2 resultiert

$$(*)\ \ t^* \text{ ist optimal für } (S_\alpha) \Longleftrightarrow \exists a \in [0,\infty): \ F(t^*) = H^\alpha(a).$$

Dabei ist $F(t^*) = H^\alpha(a)$ dazu äquivalent, dass Gleichheit in den Ungleichungen (1) und (2) auftritt.

i) Gleichheit in (1) ist äquivalent zu

$$\big(\alpha - P_{\vartheta_0}(t^* < \infty)\big) \cdot a = 0.$$

ii) Gleicheit in (2) ist äquivalent dazu, dass t^* eine Lösung für folgendes Stopproblem ergibt

$$\begin{cases} -E_\eta t - P_{\vartheta_0}(t < \infty) \cdot a \overset{!}{=} \sup \\ t \in \mathcal{S}^{\overline{\mathbb{N}}}_\eta. \end{cases}$$

Da $P_{\vartheta_0}(t < \infty) = E_\eta\big(L_t(\vartheta_0, \eta) 1_{\{t<\infty\}}\big)$, erhalten wir, dass t^* eine Lösung von (S^a) liefert.

Es bleibt nur noch anzumerken, dass der Multiplikator a größer als Null sein muss, dann folgt mit i) die Behauptung:
Es sei t^* eine Lösung von (S_α), wegen $\eta \neq \vartheta_0$ gilt $E_\eta t^* < \infty$, und aus $(*)$ folgt, dass es ein $a \geq 0$ gibt, so dass t^* eine Lösung von (S^a) liefert.
$\mathbb{A}:$ $a = 0$, dann ist t^* eine Lösung von

$$\begin{cases} E_\eta t \overset{!}{=} \inf \\ t \in \mathcal{S}^{\overline{\mathbb{N}}}_\eta, \end{cases}$$

somit muss aber $t^* = 1$ P_η-f.s. sein, wegen der Äquivalenz der eingeschränkten Maße gilt dies insb. auch P_{ϑ_0}-f.s., was aber einen Widerspruch zur Bedingung $P_{\vartheta_0}(t^* < \infty) \leq \alpha$ liefert. □

Mit Satz 3.2.4 haben wir das ursprüngliche Problem (S_α) in ein Problem des optimalen Stoppens ohne Nebenbedingungen (S^a) überführt.
Zur Lösung von (S_α) werden wir im ersten Schritt für $a > 0$ Lösungen $t^*(a)$ für (S^a) bestimmen und dann im zweiten Schritt den Multiplikator a passend so wählen, dass eine geeignete Lösung von (S^a) das Niveau α voll ausschöpft, d.h. der Bedingung 1) aus Satz 3.2.4 genügt.
Da wir uns im iid-Modell befinden, liegt hier eine Markovsche Stoppsituation vor (vgl. 2.5.1) und die Lösungen von (S^a) lassen sich wie folgt explizit angeben:

3.2.5 Satz: Lösungen von (S^a)

Für $u \geq 0$ bezeichne

$$v_1(u) := \inf_{t \in \mathcal{S}_\eta^{\overline{\mathbb{N}}}} E_\eta\big(u \cdot L_t(\vartheta_0, \eta) + t\big), \text{ dann gilt :}$$

1) *Die Abbildung $u \mapsto v_1(u) - u$ besitzt eine eindeutig bestimmte Nullstelle $a^* > 0$.*

2) *Die Stoppzeiten*

$$t(\frac{a^*}{a}, \eta) = \{n \in \mathbb{N} \mid L_n(\eta, \vartheta_0) \geq \frac{a^*}{a}\} \quad \text{und}$$
$$t^+(\frac{a^*}{a}, \eta) = \{n \in \mathbb{N} \mid L_n(\eta, \vartheta_0) > \frac{a^*}{a}\}$$

liefern Lösungen der Aufgabe (S^a).

Außerdem liefern für $\gamma \in [0,1]$ die randomisierten Stoppzeiten $t_\gamma(a, \eta)$ gegeben durch die Abbruchregeln

$$g_n := \gamma P_\bullet\big(t_\gamma(a,\eta)^+ = n | \, \mathcal{C}_n\big) + (1-\gamma) P_\bullet\big(t_\gamma(a,\eta) = n | \, \mathcal{C}_n\big) \; (n \in \overline{\mathbb{N}})$$

ebenfalls Lösungen für das Problem (S^a).

Beweis:

1) Die Abbildung $u \mapsto v_1(u)$ ist als Infimum linearer Funktionen konkav. Außerdem gilt $v_1(0) = 1$ und $v_1(u) - u < 0$ für hinreichend großes u.
Z.B. gilt dies für $u > E_\eta t(2, \eta)$ mit

$$t(2, \eta) := \{n \in \mathbb{N} \mid L_n(\eta, \vartheta_0) \geq 2\},$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} & E_\eta\big(u \cdot L_{t(2,\eta)}(\vartheta_0, \eta) + t(2,\eta)\big) \leq \frac{u}{2} + E_\eta t(2,\eta) < \infty \\ \Rightarrow \qquad & v_1(u) \leq \frac{u}{2} + E_\eta t(2, \eta). \end{aligned}$$

Zusammen mit der Konkavität von $u \mapsto v_1(u)$ folgt daraus, dass $u \mapsto v_1(u)$ genau eine Nullstelle $a^* > 0$ besitzt.

2) $Y_n^a := aL_n(\vartheta_0, \eta)$ $(n \in \mathbb{N})$ liefert eine stationäre Markovfolge bzgl. P_η und $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ mit Zustandsraum $E = [0, \infty)$. Damit liefert der Satz 2.5.1 mit

$$h(u) = -u \text{ und } c = 1$$

für (S^a) die Lösungen:

i) $t(a) := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n^a \in B\}$ mit $B = \{u \geq 0 \mid u \leq v_1(u)\}$,

ii) $t^+(a) := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n^a \in B^+\}$ mit $B^+ = \{u \geq 0 \mid u > v_1(u)\}$,

iii) $t_\gamma(a, \eta)$.

Wegen 1) gilt $u \leq v_1(u) \Leftrightarrow u \in [0, a^*]$. Daraus folgt schließlich

$$\begin{aligned} t(a) &= \{n \in \mathbb{N} \mid a \cdot L_n(\vartheta_0, \eta) \leq a^*\} \\ &= t(\frac{a^*}{a}, \eta); \end{aligned}$$

entsprechend erhalten wir $t^+(a) = t^+(\frac{a^*}{a}, \eta)$.

□

Mit den beiden Lösungen $t(\frac{a^*}{a}, \eta)$ und $t^+(\frac{a^*}{a}, \eta)$ des Stopproblems (S^a) können wir durch geeignete Konvexkombination zu jedem Niveau $\alpha \in (0,1)$ eine Lösung $t_\gamma(\frac{a^*}{a}, \eta)$ von (S_α) nach dem Vorbild von Satz 1.9.6 konstruieren. Wir halten fest:

3.2.6 Satz: Lösungen von (S_α)

Es seien $\alpha \in (0,1)$ *und für* $a \geq 0$

$$t(a, \eta) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid L_n(\eta, \vartheta_0) \geq a\} \ (vgl. Def. 1.9.2).$$

Es sei $a_0 := \inf\{a > 0 \mid P_{\vartheta_0}(t(a, \eta) < \infty) \leq \alpha\}$, *dann ist* $a_0 > 0$ *und es gilt:*

a) Es gibt ein $\gamma_0 \in [0,1]$ *mit*

$$\gamma_0 P_{\vartheta_0}(t^+(a_0, \eta) < \infty) + (1 - \gamma_0) P_{\vartheta_0}(t(a_0, \eta) < \infty) = \alpha \tag{3.2.2}$$

b) Es sei $\gamma_0 \in [0,1]$ *mit 3.2.2, dann liefert die randomisierte Stoppzeit* $t_{\gamma_0}(a_0, \eta)$ *definiert durch die Abbruchregel*

$$g_n = \gamma_0 P_\bullet\big(t^+(a_0, \eta) = n \,|\, \mathcal{C}_n\big) + (1 - \gamma_0) P_\bullet\big(t(a_0, \eta) = n \,|\, \mathcal{C}_n\big) \ (n \in \overline{\mathbb{N}}) \ (\ vgl.\ 1.9.5)$$

eine Lösung von (S_α).

Beweis:

Teil a) ist die Aussage des Satzes 1.9.5.

b) Wegen a) haben wir zunächst, dass gilt $P_{\vartheta_0}(t_{\gamma_0}(a_0, \eta) < \infty) = \alpha$.
Mit dem Satz 3.2.5 erhalten wir, dass $t_{\gamma_0}(a_0, \eta)$ eine Lösung von

$$(\mathcal{S}^{\hat{a}}) \text{ mit } \hat{a} = \frac{a^*}{a_0} \text{ liefern.}$$

Aus dem Dualitätssatz 3.2.4 folgt schließlich die Behauptung. □

Mit Satz 3.2.6 haben wir natürlich auch Satz 3.2.1 bewiesen.

Resümierend können wir festhalten, dass das Problem $(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta})$ durch einen Tests der Güte 1 gelöst wird genau dann, wenn $\eta \neq \vartheta_0$ und die Schranke δ größer oder gleich dem Minimalwert δ_α des Stopproblems (S_α) ist.
Es lässt sich in dieser Sitation durch den sequentiellen Test der Form $\varphi^*_{t_{\gamma_0}(a_0,\eta)}$ mit $\varphi^*_n = 1$, $(n \in \mathbb{N})$ und $a_0 > 0$, $\gamma_0 \in [0, 1]$ passend wie in Satz 3.2.6 gewählt, eine Lösung von $(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta})$ der Güte 1 konstruktiv angeben.
Ausgehend von diesen sequentiellen Tests machen wir abschließend Aussagen über gleichmäßige Optimalität hinsichtlich des Problems $(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta})$ im Falle einparametriger Exponentialfamilien.

3.3 Gleichmäßig beste sequentielle Tests für unendlichen Horizont

Im folgenden sei also $\mathcal{Q} = \{Q_\zeta \mid \zeta \in \mathcal{Z}\}$ eine einparametrige Exponentialfamilie in natürlicher Parametrisierung.
Weiter unterstellen wir für den Rest der Untersuchungen die Annahmen:
Es seien $\zeta_0, \eta \in \overset{\circ}{\mathcal{Z}}$ mit $\zeta_0 < \eta$, und zu $\alpha \in (0,1)$ sei δ größer oder gleich dem Minimalwert δ_α von (S_α).
Unter $\mathcal{Q}$ soll dann das Problem $(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta})$ für die einseitigen Hypothesen $H_0 : \zeta \leq \zeta_0$, $\hat{H}_1 : \zeta \geq \zeta_2$ untersucht werden, d.h. wir interessieren uns für das Problem

$$\left\{ \begin{aligned} E_\zeta \varphi_t 1_{\{t<\infty\}} + P_\zeta(t=\infty) &\overset{!}{=} \sup \quad \forall \zeta > \zeta_2 \\ E_\zeta \varphi_t 1_{\{t<\infty\}} &\leq \alpha \qquad \forall \zeta \leq \zeta_0 \\ E_\eta t &\leq \delta, \end{aligned} \right. \tag{3.3.1}$$

Im Hinblick darauf, für welche Parameter $\zeta_1 \geq \zeta_0$ der sequentielle Test $\varphi^*_{t_{\gamma_0}(a_0,\eta)}$ mit $t_{\gamma_0}(a_0, \eta)$ aus 3.2.6 und $\varphi^*_n = 1,\ n \in \mathbb{N}$ das Problem 3.3.1 löst, stellt sich wie in 1.10 für das Problem bei fester Stoppzeit (1.2.2) die Frage unter welchen Parametern $\zeta_1 \in \mathcal{Z}$ die Stoppzeit $t_{\gamma_0}(a_0, \eta)$ abgeschlossen ist? Eine vollständige Antwort haben wir hierauf bereits in 1.10 erhalten durch die Isotonieaussage der Gütefunktion $\zeta \mapsto P_\zeta(t_{\gamma_0}(a_0, \eta) < \infty)$ (vgl. Lemma 1.10.2) zusammen mit dem Satz 1.10.5. Wir bekommen damit folgende Optimalitätsaussage (vgl. Korollar 1.10.6):

3.3.1 Satz

Es sei $\zeta^* \in (\zeta_0, \eta)$ mit $b'(\zeta^*) = \frac{b(\eta)-b(\zeta_0)}{\eta-\zeta_0}$.
Dann liefern die sequentiellen Tests $\varphi^*_{t_{\gamma^*}(a_0,\eta)}$ mit $\gamma^* \geq \gamma_0$ Lösungen der Güte 1 für das Problem

$$\left\{ \begin{aligned} E_\zeta \varphi_t 1_{\{t<\infty\}} + P_\zeta(t=\infty) &\overset{!}{=} \sup \quad \forall \zeta \geq \zeta^* \\ E_\zeta \varphi_t 1_{\{t<\infty\}} &\leq \alpha \qquad \forall \zeta \leq \zeta_0 \\ E_\eta t &\leq \delta. \end{aligned} \right.$$

Und für $\zeta < \zeta^*$ gilt $E_\zeta \varphi^*_{t_{\gamma^*}(a_0,\eta)} < 1$. □

Diese Optimalitätsaussage lässt sich noch etwas verbessern, indem wir ausnutzen, dass die ASN(Average-Sample-Number)-Funktion von $t_{\gamma^*}(a_0, \eta)$

$$\mathcal{Z} \ni \zeta \mapsto E_\zeta t_{\gamma^*}(a_0, \eta)$$

monoton fallend ist.
Für einen Beweis der Antitonie-Aussage der ASN-Funktion der frühesten Ersteintrittszeit $t(a_0, \eta)$ verweisen wir auf Khan [Kh], Cor.2 auf Seite 252: der Beweis wird mit Hilfe verteilungsgleicher Ersetzung (vgl. 1.7.7) durchgeführt. Dieser Beweis lässt sich auch auf die späteste Ersteintrittszeit $t^+(a_0, \eta)$ übertragen, folglich auch auf die Konvexkombination $t_{\gamma^*}(a_0, \eta)$ von $t(a_0, \eta)$ und $t^+(a_0, \eta)$.
Wir erhalten damit:

3.3.2 Korollar

In der Situtation von Satz 3.3.2 liefern die sequentiellen Tests $\varphi^*_{t_{\gamma^*}(a_0,\eta)}$ *mit* $\gamma^* \geq \gamma_0$ *Lösungen der Güte 1 für das Problem*

$$\begin{cases} E_\zeta \varphi_t 1_{\{t<\infty\}} + P_\zeta(t = \infty) & \stackrel{!}{=} \sup \quad \forall \zeta \geq \zeta^* \\ E_\zeta \varphi_t 1_{\{t<\infty\}} & \leq \alpha \quad \forall \zeta \leq \zeta_0 \\ E_\zeta \, t & \leq \delta \quad \forall \zeta \geq \eta. \end{cases}$$

□

Abschließend wenden wir uns der Frage zu, ob diese Optimatiätsaussage im allgemeinen sogar soweit verbessert werden kann, dass es unter den obigen Nebenbedingungen immer Tests gibt, welche die Güte auf ganz $H_1 : \zeta > \zeta_0$ maximieren. Zunächst liefert der Satz 1.10.8, dass die obigen Tests $\varphi^*_{t_{\gamma^*}(a_0,\eta)}$ keine gleichmäßig besten Lösungen für $H_0 : \zeta \leq \zeta_0$ gegen $H_1 : \zeta > \zeta_0$ für $(\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\delta})$ geben können .
Und der folgende Satz zeigt sogar, dass das Problem (3.3.1) für δ gleich dem Mininmalwert δ_α von (S_α) keine auf $H_1 : \zeta > \zeta_0$ gleichmäßig beste Lösung besitzt.

3.3.3 Satz

Es sei $\mathcal{Q}$ *eine einparametrige Exponentialfamilie, für die* $Q^T_{\zeta_0}$ *keine Laplace-Verteilung über* $\{-u, u\}$ *ist für ein* $u > 0$.
Weiter seien $\alpha \in (0, 1)$ *und* $\delta = \delta_\alpha$. *Dann besitzt das Problem*

$$\begin{cases} E_\zeta \varphi_t 1_{\{t<\infty\}} + P_\zeta(t = \infty) & \stackrel{!}{=} \sup \quad \forall \zeta > \zeta_0 \\ E_\zeta \varphi_t 1_{\{t<\infty\}} & \leq \alpha \quad \forall \zeta \leq \zeta_0 \\ E_\eta \, t & \leq \delta. \end{cases}$$

keine Lösung.

Beweis:

$\mathbb{A}$: Es gibt eine Lösung $(t^*, \underset{\sim}{\varphi}^*)$ des obigen Problems. Gemäß Satz 3.3.1 gilt dann $E_\zeta \varphi^*_{t^*} = 1$ für $\zeta \geq \zeta^*$. Damit haben wir notwendig $\varphi^*_n = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, so dass $P_{\zeta_0}(t^* < \infty) = E_{\zeta_0}\varphi^*_{t^*} \leq \alpha$. Da zudem $E_\eta t^* \leq \delta_\alpha$, ergibt die Stoppzeit t^* eine Lösung des Stopproblems (S_α). Die Lösungen von (S_α) sind mit dem Dualitätssatz 3.2.4 gegeben durch die Lösungen des Stopproblems (S^a) mit geeignetem $a > 0$. Daher ist t^* notwendig eine Lösung des Stopproblems (S^a) mit geeignetem $a > 0$. Als ausgezeichnete Lösungen haben wir die früheste und späteste Ersteintrittszeit $t(a, \eta)$ bzw. $t(a, \eta)^+$ angegeben. Für den Fall, dass der Dichtequotient $L_n(\eta, \zeta_0)$ stetige Verteilungsfunktion besitzt, stimmen diese beiden Stoppzeiten P-f.s. überein und somit ist $t^* = t(a, \eta)$. Gemäß Satz 1.5.17 gibt es aber unter einseitigen unbeschränkten Ersteintrittszeiten keine Lösung für das Problem 1.5.1, sofern $Q^T_{\zeta_0}$ keine Laplace-Verteilung über $\{-u, u\}$ für ein $u > 0$ bildet, woraus der gewünschte Widerspruch für den Stetigkeitsfall folgt.

Im Falle, dass der Dichteqoutient keine stetige Verteilungsfunktion besitzt, ist t^* immerhin notwendig wie folgt festgelegt: t^* muss spätestens dann stoppen, wenn der Dichtequotient $L_n(\eta, \zeta_0)$ eine geeignete Schwelle $a > 0$ zum ersten Mal überschritten hat. Für den Fall, dass der Dichtequotient gleich der Schwelle a ist, hat t^* die Möglichkeit zu stoppen oder fortzusetzen. t^* liegt somit zwischen der frühesten und spätesten Stoppzeit. Der Beweis von Satz 1.5.17 lässt sich daher auch auf diese Stoppzeit übertragen, so dass wir auch für den Unstetigkeitsfall den gewünschten Widerspruch erhalten. □

Anhang A

A.1 Einführung

Es sollen einfache Hypothesen $H = \{Q_0\}$ gegen $K = \{Q_1\}$ bei unabhängigen Versuchswiederholungen z.N. $\alpha \in (0,1)$ getestet werden. Dabei seien Q_0, Q_1 zwei verschiedene Wahrscheinlichkeitsmaße über einen messbaren Raum $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$.
Für festen Stichprobenumfang $n \in \mathbb{N}$ betrachte man die Optimierungsaufgabe:

$$(\mathbb{P}_n^\alpha) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_1\, \varphi_n \stackrel{!}{=} sup \\ E_0\, \varphi_n \leq \alpha \\ \varphi_n : \mathcal{X}^n \to [0,1] \text{ messbar} \end{array} \right\}.$$

Es sei φ_n^* ein nach dem klassischen Neyman-Pearson-Lemma existierender optimaler Test für $(\mathbb{P}_n^\alpha)$. Wir wollen hier im Anhang eine Antwort auf folgende Frage liefern: Unter welchen Bedingungen kann es auftreten, dass durch zusätzliche Beobachtungen der Maximalwert von $(\mathbb{P}_n^\alpha)$ nicht verbessert wird, d.h. die Güten $g(n) := E_1\, \varphi_n^*$ $(n \in \mathbb{N})$ nicht streng monoton wachsen?

A.2 Bemerkung

Für den Fall $Q_1 \not\gg Q_0$ (d.h. Q_0 ist nicht Q_1-stetig) gibt es ein $A \in \mathcal{B}$ mit $Q_1(A) = 1$ und $Q_0(A) < 1$ und somit existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $Q_0(A)^{n_0} \leq \alpha$. Der Test $\varphi_{n_0}^* := 1_{A^{n_0}}$ liefert dann einen für $(\mathbb{P}_n^\alpha)$ optimalen Test von Güte 1, so dass die Güten $g(n)$ ab n_0 konstant 1 bleiben.
Es ist noch der Fall $Q_1 \gg Q_0$ zu untersuchen.
Dabei lässt sich in der Situation $Q_0 \not\gg Q_1$ die existierende Q_0-Nullmenge N mit $Q_1(N) > 0$ stets zum Ablehnungsbereich von φ_n^* nehmen, so dass im folgenden o.b.d.A. Q_0 *und* Q_1 *als zueinander äquivalent* vorausgesetzt werden.
Wegen $Q_0 \neq Q_1$ können daher Q_0 und Q_1 keine Einpunktverteilungen sein.

A.3 Bezeichnungen

Es seien μ ein zu $\{Q_0, Q_1\}$ äquivalentes σ-endliches Maß über $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ (z.B. $\mu = Q_0$) und f_i μ-Dichten von Q_i $(i = 0, 1)$.
Dann gilt aufgrund der Äquivalenz von Q_0 und Q_1 für die Wertemenge des Dichtequotienten:

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{T} := \dfrac{f_1}{f_0}(\mathcal{X}) & \subseteq & (0,\infty) & \mu\text{-f.s. und somit} \\ L_n(x_1,\ldots,x_n) := \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{f_1}{f_0}(x_k) & \in & (0,\infty) & \text{für } \mu^n\text{-fast alle } (x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{X}^n. \end{array}$$

Zusätzlich werden zur vereinfachenden Schreibweise folgende Bezeichnungen gewählt:

$$\widetilde{L}_n(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) := L_n(x_1,\ldots,x_n), \quad l_n(x_1,\ldots,x_n) := \frac{f_1}{f_0}(x_n).$$

Gemäß dem einfachen Neyman-Pearson-Lemma (hinreichende Bedingung) ist ein für $(\mathbb{P}_n^\alpha)$ optimaler Test gegeben durch

$$(A.3.1) \qquad \varphi_n^*(x_1,\ldots,x_n) := \left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & & & > & \\ \gamma_n & \text{für} & L_n(x_1,\ldots,x_n) & = & k_n \\ 0 & & & < & \end{array} \right\},$$

wobei $k_n \in [0,\infty)$ das kleinste α-Fraktil von L_n unter Q_0^n ist und $\gamma_n \in [0,1]$ derart gewählt wird, dass $Q_o^n(L_n > k_n) + \gamma_n Q_0^n(L_n = k_n) = \alpha$. Dabei kann der Fall $k_n = 0$ nicht auftreten,
denn sonst erhält man wegen $L_n > 0$ μ^n-f.s., dass $\varphi_n^* = 1$ μ^n-f.s. und dies liefert einen Widerspruch zu $E_0\,\varphi_n^* = \alpha < 1$.

Den Schlüssel für die Untersuchung des Wachstumsverhaltens der Güten $g(n)$ liefert die folgende

A.4 Bemerkung

Es sei φ_n ein für $(\mathbb{P}_n^\alpha)$ optimaler Test. Aus der notwendigen Bedingung des Neyman-Pearson-Lemmas folgt dann:

$$\varphi_n = \left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & & & > & \\ & \text{für} & L_n & & c_n \\ 0 & & & < & \end{array} \right\} \quad \mu^n\text{-f.s.} \quad \text{mit } c_n \in (0,\infty).$$

Daher gibt es eine μ^n-Nullmenge $N \in \mathcal{B}^n$, so dass für alle $x, y, z \in N^c$ mit

$$x \in \{\varphi_n = 1\},\ y \in \{0 < \varphi_n < 1\},\ z \in \{\varphi_n = 0\} \text{ gilt}$$

$$(A.4.1) \qquad L_n(x) \geq L_n(y) = c_n \geq L_n(z).$$

Damit läßt sich zeigen, dass die Güten zu einem Zeitpunkt n nur dann über mindestens eine Stufe stehen bleiben können, d.h. $E_1\, \varphi_n^* = E_1\, \varphi_{n+m}^*$ $(m \geq 1)$, wenn der Test φ_n^* nicht randomisiert ist und der Test φ_{n+1}^* mit positiver Wahrscheinlichkeit randomisiert ist. Diese Aussage wird durch das folgende Lemma präzisiert.

A.5 Lemma

Seien $\alpha \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ mit $E_1\, \varphi_n^* = E_1\, \varphi_{n+1}^*$ (mit φ_n^* aus (A. 3.1)); dann gilt :

a) Jeder für $(\mathbb{P}_n^\alpha)$ optimale Test $\hat{\varphi}_n$ ist nicht-randomisiert, d.h. es gilt $\mu^n(0 < \hat{\varphi}_n < 1) = 0$.
Insbesondere gilt für den Test φ_n^*, dass $\gamma_n \in \{0,1\}$ und somit :

$i)$ Ist $\gamma_n = 0$, dann $\qquad \varphi_n^* = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \quad \text{für} \quad L_n \begin{matrix} > \\ \leq \end{matrix} k_n \right\}$ und $0 < k_n < (\sup \mathcal{T})^n$.

$ii)$ Ist $\gamma_n = 1$, dann $\qquad \varphi_n^* = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \quad \text{für} \quad L_n \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} k_n \right\}$ und $(\inf \mathcal{T})^n < k_n < \infty$.

b) Es gibt einen für $(\mathbb{P}_{n+1}^\alpha)$ optimalen Test $\tilde{\varphi}_{n+1}$ der Gestalt

$$\tilde{\varphi}_{n+1} = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \quad \text{für} \quad L_n \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} c_{n+1} \right\} \quad \mu^{n+1}\text{-f.s.},\ c_{n+1} \in (0, \infty) \ \text{ mit :}$$

$\mu^{n+1}(\tilde{\varphi}_{n+1} = 0, L_{n+1} = c_{n+1}) > 0$ und $\mu^{n+1}(\tilde{\varphi}_{n+1} = 1, L_{n+1} = c_{n+1}) > 0$.

Beweis:

a) Sei $\hat{\varphi}_n$ ein für $(\mathbb{P}_n^\alpha)$ optimaler Test, dann gilt $E_1\, \hat{\varphi}_n = E_1\, \varphi_n^* = E_1\, \varphi_{n+1}^*$
sowie nach $(A.4.1)$ $\quad \hat{\varphi}_n = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \ \text{für} \ L_n \begin{smallmatrix} > \\ < \end{smallmatrix} c_n \right\}$ $\quad \mu^n$-f.s., $c_n \in (0, \infty)$
$\Longrightarrow$ Ein für $(\mathbb{P}_{n+1}^\alpha)$ optimaler Test ist gegeben durch

$$\tilde{\varphi}_{n+1}(x, x_{n+1}) = \left\{ \begin{matrix} 1 & & & > & \\ \hat{\varphi}_n(x) & \text{für} & L_n(x) & = & c_n,\ \frac{f_1}{f_0}(x_{n+1}) \in \mathcal{T} \\ 0 & & & < & \end{matrix} \right\}.$$

$\overset{(A.4.1)}{\Longrightarrow}$ Es gilt für μ^{n+1}-fast alle

$$\begin{array}{rcl} (x, x_{n+1}), (x', x'_{n+1}) & \in & \{(y, y_{n+1}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{X} \ : \ \tilde{\varphi}_{n+1}(y, y_{n+1}) \in (0,1)\} \\ & = & \{y \in \mathcal{X}^n \ : \ \hat{\varphi}_n(y) \in (0,1)\} \times \mathcal{X} \\ L_n(x) \cdot \dfrac{f_1}{f_0}(x_{n+1}) & = & L_n(x') \cdot \dfrac{f_1}{f_0}(x'_{n+1}) \in (0, \infty). \end{array}$$

$\mathbb{A} \ : \ \mu^n(0 < \hat{\varphi}_n < 1) > 0 \Longrightarrow$

Speziell für $x' = x$ aus $\{0 < \hat{\varphi}_n < 1\}$ erhält man $\frac{f_1}{f_0}(z) = \frac{f_1}{f_0}(z')$ für μ-fast alle $z, z' \in \mathcal{X}$. $\Longrightarrow$ $\frac{f_1}{f_0}$=const μ-f.s. und dies liefert einen Widerspruch zu $Q_0 \neq Q_1$; daher folgt $\mu^n(0 < \hat{\varphi}_n < 1) = 0$.
Insbesondere gilt für den Test φ_n^*, dass $\gamma_n \in \{0,1\}$ wählbar ist. Für $\gamma_n = 0$ muss gelten $k_n < (\sup \mathcal{T})^n$, denn sonst wäre $\varphi_n^* = 0$, und entprechend muss für $\gamma_n = 1$ gelten $k_n > (\inf \mathcal{T})^n$, sonst wäre $\varphi_n^* = 1$. $\Longrightarrow$ a).

b) Zunächst betrachte man für φ_n^* den Fall $\gamma_n = 0$:
Wegen $E_1\, \varphi_n^* = E_1\, \varphi_{n+1}^*$ ist ein für $(\mathbb{P}_{n+1}^\alpha)$ optimaler Test gegeben durch

$$\tilde{\varphi}_{n+1}(x, x_{n+1}) := \varphi_n^*(x) \overset{a)}{=} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \quad \text{für} \quad L_n(x) \begin{matrix} > \\ \leq \end{matrix} k_n, \ \frac{f_1}{f_0}(x_{n+1}) \in \mathcal{T} \right\},$$

und aufgrund der notwendigen Bedingung des Neyman-Pearson-Lemmas hat er die Gestalt

$$\tilde{\varphi}_{n+1} = \left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & & & > & \\ \tilde{\varphi}_{n+1} & \text{für} & L_{n+1} & = & c_{n+1} \\ 0 & & & < & \end{array} \right\} \quad \mu^{n+1}\text{-f.s.}, \ c_{n+1} \in (0, \infty).$$

<u>1.Fall</u> $\mathbb{A}: \ \mu^{n+1}(\tilde{\varphi}_{n+1} = 1, L_{n+1} = c_{n+1}) = 0 \Longrightarrow$

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\varphi}_{n+1} & = & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \ \text{für} \ \widetilde{L}_n \cdot l_{n+1} \begin{matrix} > \\ \leq \end{matrix} c_{n+1} \right\} \quad \mu^{n+1}\text{-f.s.} \\ & = & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \ \text{für} \ \widetilde{L}_n \begin{matrix} > \\ \leq \end{matrix} k_n, \ l_{n+1} \in \mathcal{T} \right\} \end{array}$$

$\Longrightarrow$ Für μ^{n+1}-fast alle $(x, x_{n+1}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{X}$ gilt:

$$L_n(x) \begin{matrix} > \\ \leq \end{matrix} \frac{c_{n+1}}{\frac{f_1}{f_0}(x_{n+1})} \iff L_n(x) \begin{matrix} > \\ \leq \end{matrix} k_n$$

Daher gibt es eine μ^n-Nullmenge $N \in \mathcal{B}^n$, so dass für alle $x \in N^c$ und für μ-fast alle $t \in \mathcal{T}$ gilt: $L_n(x) \gtrless \frac{c_{n+1}}{t} \ \Leftrightarrow \ L_n(x) \gtrless k_n$, und dies liefert den gewünschten Widerspruch.

<u>2.Fall</u> $\mathbb{A}: \; \mu^{n+1}(\tilde{\varphi}_{n+1} = 0, L_{n+1} = c_{n+1}) = 0 \implies$

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{n+1} &= \left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix} \quad \text{für} \quad L_n \cdot l_{n+1} \begin{matrix}\geq\\<\end{matrix} c_{n+1}\right\} \quad \mu^{n+1}\text{-f.s.}\\ &= \left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix} \quad \text{für} \quad L_n \begin{matrix}>\\\leq\end{matrix} k_n, \; l_{n+1} \in \mathcal{T}\right\}\end{aligned}$$

Entsprechend zum ersten Fall findet man eine μ^n-Nullmenge $N \in \mathcal{B}$, so dass für alle $x \in N^c$ und für μ-fast alle $t \in \mathcal{T}$ gilt: $L_n(x) \gtrless \frac{c_{n+1}}{t} \Leftrightarrow L_n(x) \begin{smallmatrix}>\\\leq\end{smallmatrix} k_n$, woraus wieder der gewünschte Widerspruch folgt. Völlig analog beweist man die Aussage für den Fall $\gamma_n = 1. \implies$ b). □

Aus A.5 erkennt man bereits, dass die Güten $g(n)$ über höchstens eine Stufe stehen bleiben können.

A.6 Korollar

Für beliebiges $\alpha \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $E_1\,\varphi_n^* < E_1\,\varphi_{n+2}^*$.

Begründung:

$\mathbb{A}: \; \exists n \in \mathbb{N} \; : \; E_1\,\varphi_n^* = E_1\,\varphi_{n+2}^* \implies E_1\,\varphi_n^* = E_1\,\varphi_{n+1}^* \overset{A.5b)}{\implies}$

Es gibt einen für $(\mathbb{P}_{n+1}^\alpha)$ optimalen Test $\tilde{\varphi}_{n+1}$ der mit positiver Wahrscheinlichkeit randomisiert.

Wegen $E_1\,\varphi_{n+1}^* = E_1\,\varphi_{n+2}^*$ kann der Test φ_{n+1}^* gemäß A.5a) nicht optimal für $(\mathbb{P}_{n+1}^\alpha)$ sein, was einen Widerspruch zur Annahme liefert. □

A.7 Bemerkung

a) Die Gütefunktion von φ_n^* hängt nur von der Verteilung des Dichtequotienten f_1/f_0 unter Q_0 und Q_1 ab. Bezeichne $X_k : \mathcal{X}^n \to \mathcal{X}$ die Projektion auf die k-te Komponente, dann gilt nämlich für $B \in \mathbb{B}_{|(0,\infty)}$:

$$\begin{aligned}Q_i^n(L_n \in B) &= Q_i^n\Big(\prod_{k=1}^n \frac{f_1}{f_0}(X_k) \in B\Big)\\ &= (Q_i^n)^{\left(\frac{f_1}{f_0}(X_1),\dots,\frac{f_1}{f_0}(X_n)\right)}\Big(\{y \in (0,\infty)^n : \prod_{i=1}^n y_i \in B\}\Big)\\ &= \bigotimes_{k=1}^n (Q_i^n)^{\frac{f_1}{f_0}(X_k)}\Big(\{y : \prod_{i=1}^n y_i \in B\}\Big) = (Q_i^{\frac{f_1}{f_0}})^n\Big(\{y : \prod_{i=1}^n y_i \in B\}\Big).\end{aligned}$$

b) Aufgrund der Äquivalenz von Q_0 und Q_1 gilt:
Ist U die Menge der Unstetigkeitsstellen der Verteilungsfunktion von $Q_1^{f_1/f_0}$, so ist U dies auch für die Verteilungsfunktion von $Q_0^{f_1/f_0}$.

Es wird sich zeigen, dass nur für den Fall, dass $Q_1^{f_1/f_0}$ eine 2-Punkt-Verteilung ist (somit dann auch $Q_0^{f_1/f_0}$), die Güten über eine Stufe stehen bleiben können, in allen anderen Fällen ist $n \mapsto g(n)$ streng monoton wachsend.

A.8 Satz

Seien $\mathcal{T} = \{a, b\}$ mit $a < b$, $n \in \mathbb{N}$ und $A_n := \{\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} p_0^{n-j} q_0^j \mid k = 1, \ldots, n\}$, wobei $p_i := Q_i(f_1/f_0 = b)$, $q_i := 1 - p_i$ $(i = 0, 1)$.

Dann gilt nur für $\alpha \in A_n$: $E_1\, \varphi_n^* = E_1\, \varphi_{n+1}^*$.

Beweis:

1.Fall: $\alpha \notin A_n$

$\mathbb{A}:\ E_1\, \varphi_n^* = E_1\, \varphi_{n+1}^* \overset{A.5a)}{\Longrightarrow} \varphi_n^* = \left\{\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \quad \text{für} \quad L_n \underset{\leq}{>} k_n\right\}$,
wobei wegen der Endlichkeit von $\mathcal{T}$ o.b.d.A. $\gamma_n = 0$ gesetzt werden kann und k_n wählbar ist in der Form $k_n = a^k b^{n-k}$, $k \geq 1$. Damit ergibt sich aber der folgende Widerspruch

$$\alpha = Q_0^n(L_n > k_n) = \sum_{j=1}^{k} Q_0^n(L_n = a^{k-j} b^{n-k+j}) = \sum_{j=1}^{k} \binom{n}{k-j} p_0^{n-k+j} q_0^{k-j} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} p_0^{n-j} q_0^j$$

2.Fall: $\alpha = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} p_0^{n-j} q_0^j$ für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$

Dann folgt aus der Rechnung im 1.Fall, dass $Q_0(L_n > a^k b^{n-k}) = \alpha \implies$
$\tilde{\varphi}_{n+1} = \left\{\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \quad \text{für} \quad \tilde{L}_n \underset{\leq}{>} a^k b^{n-k},\ l_{n+1} \in \{a, b\}\right\}$ ist ein für $(\mathbb{P}_n^\alpha)$ zulässiger Test mit den Eigenschaften:

1) $E_0\, \tilde{\varphi}_{n+1} = \alpha$

2) Für $L_{n+1} = \tilde{L}_n \cdot l_{n+1} > a^k b^{n+1-k}$ muss wegen $l_{n+1}/b \leq 1$ gelten:

$$\tilde{L}_n \geq \tilde{L}_n \cdot \frac{l_{n+1}}{b} > a^k b^{n-k} \implies \tilde{\varphi}_{n+1} = 1.$$

Und für $L_{n+1} < a^k b^{n+1-k}$ muss wegen $l_{n+1}/a \geq 1$ gelten:

$$\tilde{L}_n \leq \tilde{L}_n \cdot \frac{l_{n+1}}{a} < a^{k-1} b^{n+1-k} \text{ also } \tilde{L}_n \leq a^k b^{n-k} \implies \tilde{\varphi}_{n+1} = 0.$$

$$\implies \tilde{\varphi}_{n+1} = \left\{\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \quad \text{für} \quad \tilde{L}_{n+1} \underset{<}{>} a^k b^{n+1-k}\right\} \quad \mu^{n+1}\text{-f.s.} \overset{1)+2)}{\Longrightarrow}$$

$\tilde{\varphi}_{n+1}$ ist nach dem hinreichendem Kriterium des Neyman-Pearson-Lemmas optimal für $(\mathbb{P}^{\alpha}_{n+1})$. □

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass bei zwei äquivalenten Verteilungen Q_0 und Q_1, deren Dichtequotient unter Q_1 eine 2-Punkt-Verteilung bildet, die Ursprungsmaße Q_i natürlich selber nicht wieder notwendig 2-punktverteilt sein müssen. Zum Beispiel liefern die $\lambda_{|[0,1]}$-stetigen Verteilungen mit den Dichten $f_0 = 1_{[0,1]}$ und $f_1 = \frac{1}{2}1_{[0,\frac{1}{2}]} + \frac{3}{2}1_{(\frac{1}{2},1]}$ unter Q_1 einen 2-punktverteilten Dichtequotienten f_1/f_0 mit den Werten $a = 1/2$ und $b = 3/2$.
Ein Beispiel mit einem diskreten Anteil liefern die Verteilungen
$Q_0 = \frac{1}{2}\mathcal{R}(0,\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\delta_1$ und $Q_1 = P + \frac{1}{4}\delta_1$, wobei P ein $\lambda_{|[0,\frac{1}{2}]}$-stetiges Maß bezeichnet mit der Dichte $\frac{3}{2}1_{[0,\frac{1}{2}]}$. Hier besitzt der Dichtequotient f_1/f_0 unter Q_1 ebenfalls wieder die beiden Werte $a = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{3}{2}$.
Als letztmöglicher Fall ergibt sich die Situation, dass beide Verteilungen Q_0 und Q_1 diskret sind, in dem wegen der Äquivalenz der beiden Verteilungen Q_0 und Q_1 bereits 2-punktverteilt sein müssen. Dies ist auch der interessanteste Fall, denn er läßt sich auf $\mathcal{B}(1,p)$-verteilte einfache Hypothesen reduzieren und damit auf die Untersuchung zusammengesetzter Hypothesen sinnvoll ausdehnen.
Für diesen Fall lässt sich die Aussage von Satz A.8 verschärfen:

A.9 Korollar

Für den Spezialfall, dass in Satz A.8 für die Verteilung der zu testenden einfachen Hypothese Q_0 eine $\mathcal{B}(1,p_0)$-Verteilung mit $p_0 \in (0,1)$ zugrunde liegt, liefern die besten Tests

von $(\mathbb{P}^{\alpha}_{n})$ (für das Testen einfacher Hypothesen) sogar gleichmäßig beste Tests z. N. α für

die zusammengesetzten Hypothesen $\widetilde{H} = (0,p_0]$ gegen $\widetilde{K} = (p_0,1)$.

Bezeichnet man für $\vartheta \in (0,1)$ mit $E_\vartheta\varphi^*_n$ die Güte von φ^*_n unter der $\mathcal{B}(1,\vartheta)$-Verteilung, so erhält man folgende Verschärfung von A.8:

i) Für $\alpha \in A_n$ gilt: $E_\vartheta\varphi^*_n = E_\vartheta\varphi^*_{n+1} \quad \forall\vartheta \in (0,1)$,
d.h. die Gütefunktionen der besten Tests von $(\mathbb{P}^{\alpha}_{n})$ und $(\mathbb{P}^{\alpha}_{n+1})$ stimmen überein.

ii) Für $\alpha \notin A_n$ gilt: $E_\vartheta\varphi^*_n < E_\vartheta\varphi^*_{n+1} \quad \forall\vartheta > p_0$.

Beweis:

Seien $Q_i = \mathcal{B}(1, p_i)$ $(i = 0, 1)$ mit $p_1 \neq p_0$, dann gilt für die beiden Werte des Dichte-

quotienten:

$$b = \frac{p_1}{p_0} > a = \frac{q_1}{q_0} \iff p_1 > p_0.$$

Sei nun $p_1 \in (0, 1)$ mit $p_1 > p_0$ gewählt, dann lässt sich der für $(\mathbb{P}_n^\alpha)$ optimale Test φ_n^* durch Reduktion über die suffiziente Summenstatistik $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ äquivalent in den einseitigen Binomialtest umformen, der nicht mehr von der speziellen Wahl von p_1 abhängt.

Damit liefert φ_n^* sogar einen gleichmäßig besten Test z. N. α für die zusammengesetzten

Hypothesen $\widetilde{H} = (0, p_0]$ und $\widetilde{K} = (p_0, 1)$ bei festem Stichprobenumfang n.

Auch im Beweis von Satz A.8 geht nur die Voraussetzung ein, dass $p_1 > p_0$ ist, was ja äquivalent zu $b > a$ ist, und nicht die spezielle Wahl von p_1.

i) Für den Fall $\alpha \in A_n$ erhält man damit sogar die Aussage:
   $E_\vartheta \varphi_n^* = E_\vartheta \varphi_{n+1}^* \; \forall \vartheta > p_0$.
   Da $\vartheta \mapsto E_\vartheta \varphi_n^*$ eine Polynomfunktion (vom Grade $\leq n$) bildet, folgt schließlich aus

   dem Identitätssatz für Potenzreihen die obere Gleichheit der Güten für alle $\vartheta \in (0, 1)$.

ii) Für den Fall $\alpha \notin A_n$ erhält man aus dem Beweis von A.8 (1. Fall) die Aussage: $E_\vartheta \varphi_n^* < E_\vartheta \varphi_{n+1}^* \; \forall \vartheta > p_0$. □

Es sei noch angemerkt, dass es in der Situation A.9 für $\alpha \notin A_n$ durchaus auftreten kann, dass für $\vartheta < p_0$ gilt $E_\vartheta \varphi_n^* = E_\vartheta \varphi_{n+1}^*$, nämlich genau dann, wenn ϑ in A_n liegt (man beachte, dass hier ϑ die Rolle von p_0 übernimmt).

In der Situation von Satz A.8 kann es sogar auftreten, dass für festes $\alpha \in A_m$ die Güten $n \mapsto g(n)$ zu mehreren Zeitpunkten über eine Periode stehenbleiben.

A.10 Beispiel

Es seien $Q_i := \mathcal{B}(1, p_i)$ mit $p_0 = \frac{1}{3},\ p_1 = \frac{2}{3}$ und $\alpha = \frac{1}{9}$.
Dann gilt $a = \frac{p_1}{p_0} = 2 > b = \frac{q_1}{q_0} = \frac{1}{2}$ sowie $\alpha = p_0^2 = \frac{1+8}{81} = p_0^4 + 4p_0^3 q_0 \in A_2 \cap A_4$.
Aus Satz A.8 folgt dann $E_1\,\varphi_2^* = E_1\,\varphi_3^*$ und $E_1\,\varphi_4^* = E_1\,\varphi_5^*$. □

Weiter erhält man aus A.8 die folgende Charakterisierung:
Die Güten $n \mapsto g(n)$ bleiben zu genau l Zeitpunkten über jeweils eine Periode der Länge eins stehen genau dann, wenn gilt

$$\alpha \in \bigcap_{k=1}^{l} A_{n+m_k} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N},\ m_k \geq 2 \text{ und } \alpha \notin A_k \quad \forall k \notin \{n+m_1, \ldots, n+m_l\}.$$

Die Antwort auf die Ausgangsfrage wird schließlich durch das folgende Resultat vervollständigt.

A.11 Satz

Ist $Q_1^{f_1/f_0}$ keine 2-Punkt-Verteilung, dann gilt für alle $\alpha \in (0,1)$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad E_1\,\varphi_n^* < E_1\,\varphi_{n+1}^*.$$

Beweis:

Ist $Q_1^{f_1/f_0}$ keine 2-Punkt-Verteilung, so kann wegen $Q_0 \approx Q_1$ und $Q_0 \neq Q_1$ keine 1-Punkt-Verteilung vorliegen und daher lassen sich $e_2, e_3 \in [0, \infty)$ finden derart, dass gilt:

$$(A.11.1) \quad \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3, \text{ wobei } \mathcal{T}_1 := [e_1, e_2],\ \mathcal{T}_2 := (e_2, e_3],\ \mathcal{T}_3 := (e_3, e_4] \text{ mit}$$
$$e_1 := \inf \mathcal{T},\ e_4 := \sup \mathcal{T},\ Q_1(T_i) > 0,\ \text{somit auch } Q_0(T_i) > 0,\ \mu(T_i) > 0.$$

Außerdem gilt offensichtlich $Q_j(\sum_{i=1}^{3} \mathcal{T}_i) = 1$.
$\mathbb{A}:\quad \exists n \in \mathbb{N},\ \alpha \in (0,1):\quad E_1\,\varphi_n^* = E_1\,\varphi_{n+1}^* \overset{A.5a)}{\Longrightarrow}$
Ein weiterer für $(\mathbb{P}_{n+1}^{\alpha})$ optimaler Test ist gegeben durch
i) $\tilde{\varphi}_{n+1} = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \text{ für } \widetilde{L}_n \gtrless k_n,\ l_{n+1} \in \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 \right\}$ mit
$k_n = (a_1 \cdot \ldots \cdot a_k) \cdot (b_1 \cdot \ldots \cdot b_m) \cdot (c_1 \cdot \ldots \cdot c_r)$, wobei $k, r, m \in \mathbb{N}_0 :\ k+m+r = n$ und $a_i \in \mathcal{T}_1,\ b_i \in \mathcal{T}_2,\ c_i \in \mathcal{T}_3$.

Weiterhin kann man stets eine passende Zerlegung von $\mathcal{T}$ gemäß (A.11.1) finden, so dass $r < n$ wählbar ist, sonst wäre der Test $\varphi_{n+1} \equiv \alpha$ besser als $\tilde{\varphi}_{n+1}$.

(A.4.1) $\Longrightarrow$ Für μ^{n+1}-fast alle $x', y' \in \mathcal{X}^{n+1}$ mit $x' \in \{\tilde{\varphi}_{n+1} = 1\} = \{\widetilde{L}_n > k_n, l_{n+1} \in \mathcal{T}\}$, $y' \in \{\tilde{\varphi}_{n+1} = 0\} = \{\widetilde{L}_n \leq k_n, l_{n+1} \in \mathcal{T}\}$ gilt :

$$L_n(x') \cdot l_{n+1}(x') \geq \widetilde{L}_n(y') \cdot l_{n+1}(y').$$

Damit gibt es O.b.d.A. eine μ^n-Nullmenge $N \in \mathcal{B}^n$ und eine μ-Nullmenge $M \in \mathcal{B}$ mit

$$(A.11.2) \quad \forall x \in \{L_n > k_n\} \cap N^c,\ y \in \{L_n \leq k_n\} \cap N^c$$
$$L_n(x) \cdot s \geq L_n(y) \cdot t \quad \forall s, t \in M^c \cap \mathcal{T}.$$

<u>1.Fall</u> : $\quad m \geq 1$

Wegen $\mu(\mathcal{T}_i) > 0$ gibt es mindestens ein $y \in \{L_n \leq k_n\} \cap N^c$ mit $L_n(y) = (\tilde{a}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_k) \cdot (\tilde{b}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{b}_m) \cdot (\tilde{c}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{c}_r)$ und $\tilde{a}_1 \leq \ldots \leq \tilde{a}_k$ aus $\mathcal{T}_1$, $\tilde{b}_1 \leq \ldots \leq \tilde{b}_m$ aus $\mathcal{T}_2$, $\tilde{c}_1 \leq \ldots \leq \tilde{c}_r$ aus $\mathcal{T}_3$ sowie mindestens ein $x \in \{L_n > k_n\} \cap N^c$ mit $L_n(x) = (\tilde{a}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_k) \cdot (\tilde{b}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{b}_{m-1}) \cdot (\tilde{c}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{c}_r \cdot \tilde{c}_r)$.

$\Longrightarrow$ Für $s = \tilde{a}_1$ und $t = \tilde{c}_r$ folgt aus (A.11.2) $\tilde{a}_1 \geq \tilde{b}_m$, was einen Widerspruch zu $\tilde{a}_1 \in \mathcal{T}_1$, $\tilde{b}_m \in \mathcal{T}_2$ liefert.

<u>2.Fall</u> : $\quad m = 0 \implies k \geq 1$ (wegen $r < n$)

$\Longrightarrow \exists y \in \{L_n \leq k_n\} \cap N^c$ mit $L_n(y) = (\tilde{a}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_k) \cdot (\tilde{c}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{c}_r)$,

$\exists x \in \{L_n > k_n\} \cap N^c$ mit $L_n(y) = (\tilde{a}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_{k-1}) \cdot \tilde{b}_1 \cdot (\tilde{c}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{c}_r)$ mit $\tilde{a}_i \in \mathcal{T}_1$, $\tilde{b}_1 \in \mathcal{T}_2$, $\tilde{c}_i \in \mathcal{T}_3$.

$\Longrightarrow$ Für $s = \tilde{a}_k$ und $t = \tilde{c}_1$ folgt aus (A.11.2) $\tilde{b}_1 \geq \tilde{c}_1$, was ebenfalls wieder einen Widerspruch liefert.

ii) $\tilde{\varphi}_{n+1} = \{ {}^1_0 \quad \text{für} \quad \widetilde{L}_n \gtrless k_n,\ l_{n+1} \in \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 \}$ mit k_n wie in i).

Man kann stets eine passende Zerlegung von $\mathcal{T}$ gemäß (A.11.1) finden, so dass $k < n$ wählbar ist, sonst hätte der Test $\tilde{\varphi}_{n+1}$ die Güte 1.

Alles weitere folgt dann entsprechend wie in i). $\square$

Fasst man die Aussagen (A.8-A.11) zusammen, so ergibt sich, dass die Güten $n \mapsto g(n)$ nur für den Fall, dass der Dichtequotient f_1/f_0 unter Q_0 eine 2-Punkt-Verteilung bildet, über höchstens eine Stufe stehenbleiben können. Dies geschieht nur für vorgegebene Niveaus α aus der abzählbaren Menge

$$\bigcup_{n\geq 1}\{\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j}p_0^{n-j}q_0^j \mid k=1,\ldots,n\};$$

dabei kann die Güte auch zu mehreren Zeitpunkten genau einmal stehenbleiben. In allen anderen Fällen wachsen die Güten stets streng monoton.

Literaturverzeichnis

[Al 1] **Alsmeyer, G.** *Stochastische Prozesse.*
Universität Münster (2000)

[Al 2] **Alsmeyer, G.** *Wahrscheinlichkeitstheorie.*
Universität Münster (1998)

[CD] **Cairoli, Dalang** *Sequential Stochastic Optimization.*
John Wiley & Sons, Inc., New York (1996)

[CRS] **Chow, Y.S./Robbins, H./Siegmund, G.** *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping.*
Houghton Mifflin Company, Boston (1971)

[CT] **Chow, Y.S./Teicher H.** *Probability Theory.*
Springer, New York (1978)

[DS] **Dunford, N./Schwartz, J.T.** *Linear Operators: Part I.*
Interscience, New York (1958)

[Gh] **Ghosh, B.K.** *Sequential Tests of Statistical Hypotheses.*
Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1970)

[Ha] **Hawix, A.; Schmitz, N.** *Remark on the modified Kiefer-Weiss problem for exponential families*
Sequential Analysis, 17(3&4), 297-303 (1996)

[I1] **Irle, A.** *Sequentialanalyse: Optimale Sequentielle Tests.*
Teubner, Stuttgart (1990)

[I2] **Irle, A.** *Minimax stoppimg times and games of stopping*
Transactions, Prague Conference Vol.B; 11-22 (1990)

[Kh] **Khan, R.A.** *Monotonic expectations, Neyman-Pearson lemma and some properties of the SPRT*
Journal of Statistical Planning and Inference 62 (1997) 247-254

[Le] **Lerche, H.R.** *The shape of Bayes tests of power one.*
The Annals of Statistics, Vol.14, No.3,1030-1048 (1986)

[Lo] **Lorden, G.** *Structure of Sequential Tests minimizing an expected sample size.*
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 51, 291-302

[MF] **Müller-Funk, U.** *Habilitationsschrift: Mathematical Programming and Optimal Stopping in Sequential Testing Theory.*
Universität Freiburg (1986)

[Ne] **Neveu, J.** *Discrete-Parameter Martingales*
North-Holland Company (1975)

[R] **Rockafellar, R.T.** *Convex Analysis.*
Princeton, New Jersey (1970)

[P] **Pfanzagl, J.** *Parametric Statistical Theory*
Walter de Gruyter, Berlin, New York 1994

[Po] **Pollak, M.** *On the asymptotic formula for the probability of a type 1 error of mixture type power one tests*
The Annals of Statistics, Vol. 14, No.3, 1012-1029 (1986)

[Sh] **Shiryayev, A.N.** *Optimal Stopping Rules.*
Springer-Verlag, New York (1978)

[Sch] **Schmitz, N.** *Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitstheorie.*
Teubner, Stuttgart (1996)

[Si] **Siegmund, D.** *Sequential Analysis: Tests and Confidence Intervals*
Springer-Verlag, New York (1985)

[Wi] **Witting, H.** *Mathematische Statistik I*
Teubner, Stuttgart (1985)