Funktionen

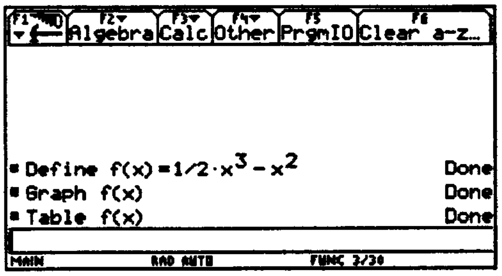
Inhalte	Ziele
• Funktionen und Darstellungsformen: Terme, Graphen und Tabellen • Abschnittsweise definierte Funktionen • Schnittpunkte von Funktionsgraphen und Lösen von Gleichungen • Funktionen zweier Veränderlicher • Parameterabhängige Funktionen • Funktionen und Kurven	• Einen Überblick über das Spektrum von Funktionen erhalten: Funktionen einer und mehrerer Veränderlicher, Funktionen $R \to R^2$, Funktionen $R^2 \to R^2$ • Funktionen in unterschiedlicher Weise darstellen können: als Terme, Graphen, Tabellen • Ein strukturelles Begriffsverständnis entwickeln, d. h. Verknüpfungen von Funktionen in unterschiedlichen Darstellungen erkennen • Mit Funktionen Anwendungsprobleme lösen können • Funktionseigenschaften an verschiedenen Darstellungen erkennen

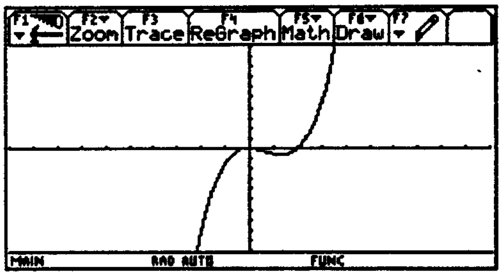
1. Gemeinsame Erarbeitung grundlegender Befehle

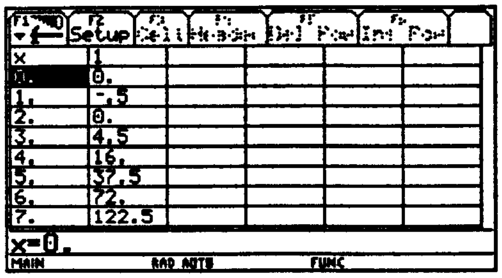
1.1 Darstellungsformen von Funktionen

Definieren Sie die Funktion mit $f(x) = ½\, x^3 - x^2$ und stellen Sie f graphisch und als Tabelle dar.

Befehle: *F4 Define oder STO→ - F4 Graph - F4 Table*



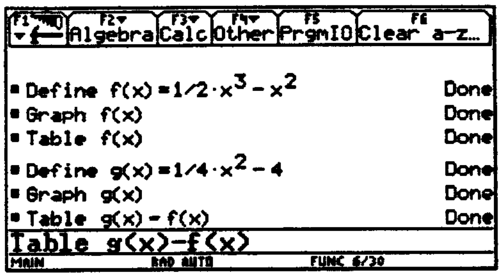


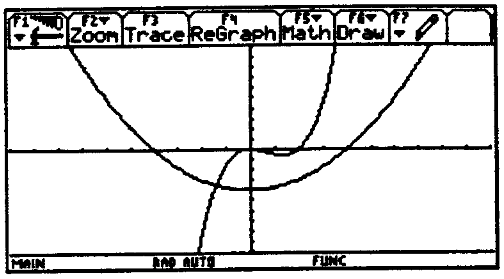


x	y1
0.	0.
1.	-.5
2.	0.
3.	4.5
4.	16.
5.	37.5
6.	72.
7.	122.5

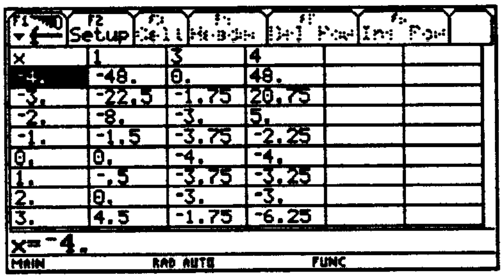
x=0.

Definieren Sie jetzt zusätzlich die Funktion mit $g(x) = \frac{1}{4} x^2 - 4$ und stellen Sie g neben f graphisch und numerisch dar.





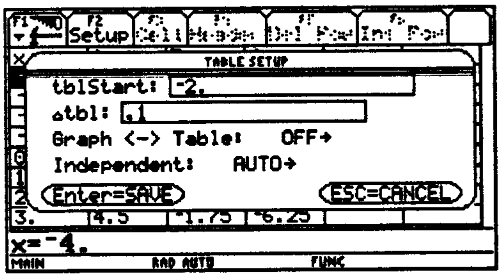
Berechnen Sie den Schnittpunkt der Graphen von f und g auf verschiedene Weisen.

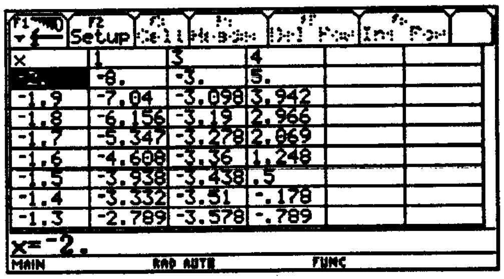


x	1	3	4
-4.	-48.	0.	48.
-3.	-22.5	-1.75	20.75
-2.	-8.	-3.	5.
-1.	-1.5	-3.75	-2.25
0.	0.	-4.	-4.
1.	-.5	-3.75	-3.25
2.	0.	-3.	-3.
3.	4.5	-1.75	-6.25

Hinweis: Hier sind in der 4. Spalte der Tabelle zusätzlich die Funktionswerte von f(x) - g(x) aufgelistet.

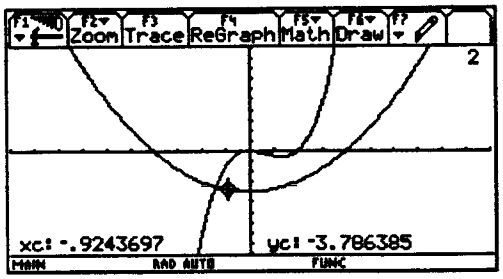
Daraus erkennt man, daß die Nullstelle zwischen -2 und -1 liegt. Die entsprechenden Werte werden nun mit ♦ `TblSet` im 0.1 Abstand aufgelistet.



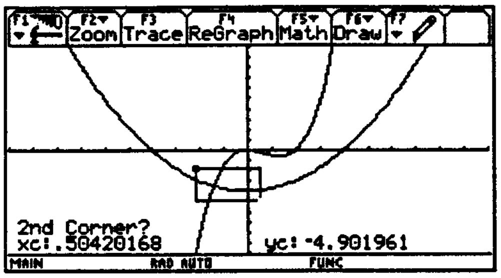


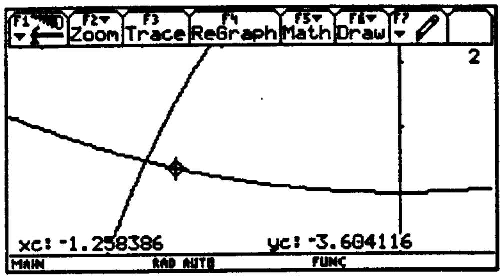
x	1	3	4
-2.	-8.	-3.	5.
-1.9	-7.04	-3.098	3.942
-1.8	-6.156	-3.19	2.966
-1.7	-5.347	-3.278	2.069
-1.6	-4.608	-3.36	1.248
-1.5	-3.938	-3.438	.5
-1.4	-3.332	-3.51	-.178
-1.3	-2.789	-3.578	-.789

Im Graphikfenster läßt sich mit `F3 [Trace]` der Cursor auf einen der beiden Graphen setzen. Mit dem Cursorkreuz kann der Cursor auf den Graphen 'entlanggeschoben' werden. Mit `2nd + Cursortasten` rückt das Cursorkreuz mit größeren Schritten vor.

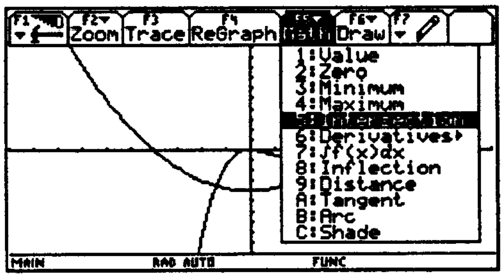


Zoomen

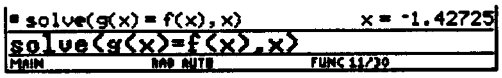




Andere Möglichkeit: Arbeiten direkt im Graphikfenster



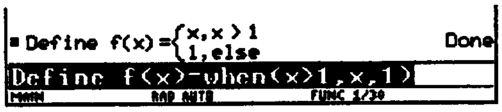
Im Algebrafenster kann die Nullstelle algebraisch und numerisch berechnet werden:



Hinweis: Mit `[2nd-]VAR-LINK` kann die Belegung der Variablen kontrolliert werden

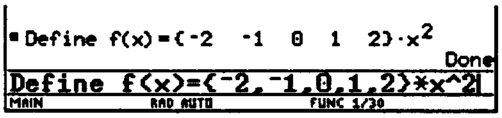
1.2 Abschnittsweise definierte Funktionen

Definieren Sie die Funktion $f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x > 1 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$ und stellen Sie f graphisch dar.

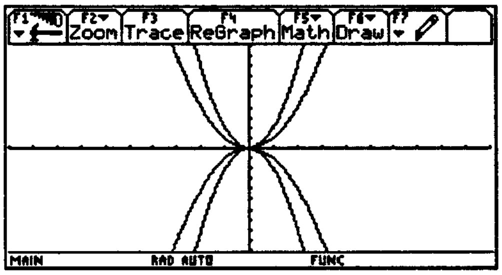


1.3 Funktionsscharen

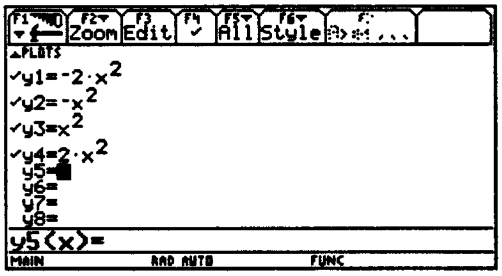
Stellen Sie die Funktionsschar $f_a(x) = a\,x^2$ für a = -2, -1, 0, 1, 2 graphisch und tabellarisch dar.

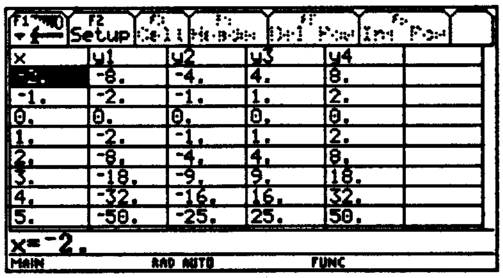


Für die zeichnerische Darstellung: *Graph f(x)*



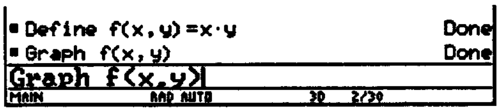
Für die tabellarische Darstellung müssen die einzelnen Funktionen separat im *'y = '-Editor* angegeben werden:

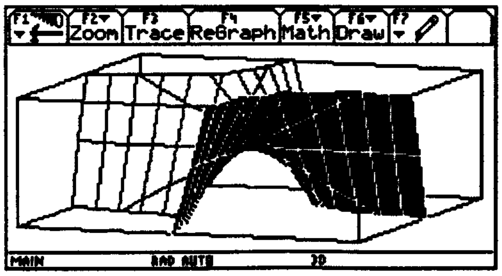




1.4 Funktionen zweier Veränderlicher

Bevor der Graph gezeichnet werden kann, muß zunächst mit `MODE - Graph - 3D` auf die 3-D-Graphik umgestellt werden

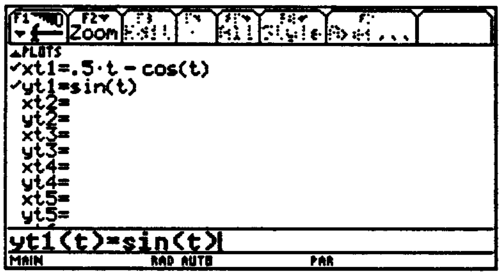




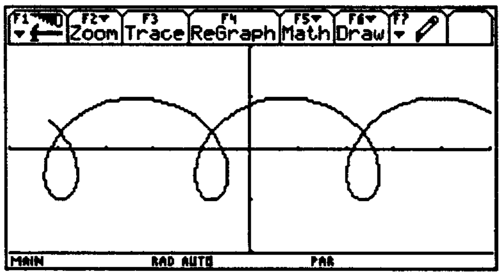
Hier wurde zusätzlich mit `F1 - Format - Axes - Box` eine Umrandung des Graphen erzeugt.

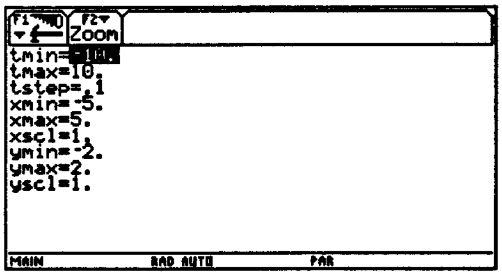
1.5 Funktionen und Kurven

Sie müssen mit `MODE - Graph - Parametric` in die Parameterdarstellung wechseln. Im ‘`y =`‘-*Editor* können Sie nun die Parametergleichungen eingeben.



Für die folgende Graphik müssen Sie die entsprechendenWerte bei ♦ `Window` geändert werden.





2. Arbeitsblatt

2.1 Schnittpunkte

Bestimmen Sie auf verschiedene Weisen die Schnittpunkte von sin(x) und x^2.

2.2 Abschnittsweise definierte Funktion

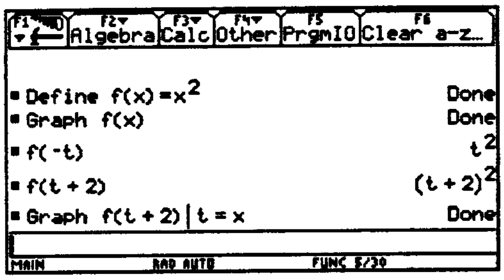
Für das Briefporto P eines Standardbriefes gilt folgende Funktion in Abhängigkeit vom Gewicht G

$$P(G) = \begin{cases} 1{,}10 \text{ DM für } 0\text{ g} \le G \le 20\text{ g} \\ 2{,}20 \text{ DM für } 20\text{ g} < G \le 50\text{ g} \\ 3{,}00 \text{ DM für } 50\text{ g} < G \le 500\text{ g} \end{cases}.$$

Stellen Sie diese Funktion graphisch dar.

2.3 Funktionen als Objekte

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 + 1$.
Wie sehen die Graphen von f(-x), -f(x), f(x+c), 1/f(x), f(x) + a, af(x) aus?



Hinweis: Gelegentlich (?) muß hier zunächst x durch t ersetzt werden!

Gegeben ist die Funktion f mit f(x) = -2x+1. Wie sehen die Funktionen mit. f(|x|), |f(x) |, f(|x-1|) aus?

2.4 Eine Extremwertaufgabe

Aus einem Kreis mit dem Radius r wird ein Sektor mit dem Winkel $\alpha < 180^0$ herausgeschnitten. Aus dem verbleibenden Sektor wird ein Kegel gebastelt. Berechnen Sie dessen Volumen V_1. Die nebenstehenden Formeln können dabei helfen.
Stellen Sie V_1 in Abhängigkeit von α graphisch dar und berechnen Sie das Maximum des Volumens.

$$\mathbf{r_1 = 1 - \frac{\alpha}{2\pi}}$$
$$\mathbf{h_1 = \sqrt{1 - r_1^2}}$$
$$\mathbf{V_1 = \tfrac{1}{3} r_1^2 \pi\, h_1}$$

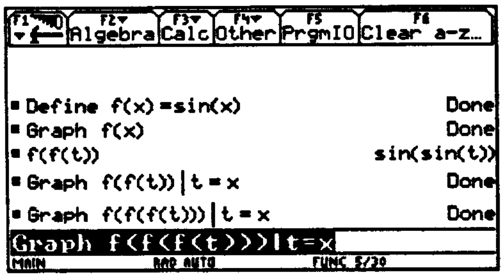
Auch aus dem Kreissektor mit dem Öffnungswinkel $\alpha < 180^0$ kann ein Kegel gebastelt werden.
Zeigen Sie, daß für diesen 2. Kegel gilt:

Berechnung für den 2. Kegel:

$$\mathbf{r_2 = \frac{\alpha}{2\pi}}$$
$$\mathbf{h_2 = \sqrt{1 - r_2^2}}$$
$$\mathbf{h_2 = \sqrt{-\left(\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1}} \quad \text{Substitute}$$
$$\mathbf{V_2 = \tfrac{1}{3} r_2^2 \pi\, h_2}$$
$$\mathbf{V_2 = \tfrac{1}{3} \pi\, h_2 \left(\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\pi}\right)^2} \quad \text{Substitute}$$
$$\mathbf{V_2 = \tfrac{1}{3} \pi \sqrt{-\left(\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1}\left(\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\pi}\right)^2}$$

Stellen Sie auch V_2 graphisch dar. Besitzt $V_1 + V_2$ ein Maximum?

2.5 Gegeben ist die Funktion mit f(x) = sin(x). Zeichnen Sie f(x) und die Iterierten von f.



Tun Sie das Gleiche für die Funktion mit f(x) = $\frac{\pi}{2}$ sin(x).

2.6 Ein Blick zur Infinitesimalrechnung:

Zeichnen Sie die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 5x + \frac{1}{2}$. Geben Sie eine Wertetabelle für diese Funktion an. Bestimmen Sie - näherungsweise - Nullstellen und Extremwerte.

3. Didaktische Fragen

- Welche Bedeutung messen Sie dem Arbeiten mit verschiedenen Darstellungen von Funktionen bei?
- Welche Bedeutung hat das Lösen von Gleichungen auf verschiedene Weisen?
- Wie ist die Wechselbeziehung zwischen den verschiedenen Darstellungen?
- Welche Eigenschaften von Funktionen treten mit Hilfe des Rechners deutlicher hervor?
- Welche Voraussetzungen benötigen Schüler, um mit dem Rechner Funktionen darstellen zu können?
- Welche Funktionstypen können Sie jetzt mit Hilfe des Rechners behandeln, die bisher nur sehr schwer zu behandeln waren.
- Welche Bedeutung messen Sie dem Kurvenbegriff im Mathematikunterricht bei?