Parabelwerkstatt

Sibylle Stachniss-Carp

Parabel – hinter diesem Begriff verbirgt sich mehr als nur der Graph einer quadratischen Funktion! Die folgenden Stationen, angeordnet in zwei Lernzirkeln, sollen einen Einblick in die Vielfalt dieses Themas geben. Ein übergeordnetes Ziel beider Varianten ist die Vernetzung zwischen Geometrie und Algebra bzw. Analysis.
Der Werkstattgedanke begründet sich dadurch, dass an verschiedenen Stationen mit unterschiedlichen „Werkzeugen“ gearbeitet wird. Die jeweiligen „Produkte“ sollen durch ein Poster oder eine Präsentation öffentlich gemacht werden.
Je nach Kenntnisstand der Schülerinnen und Schüler und je nach Zielsetzung können Stationen zur Parabel an unterschiedlichen Stellen im Unterricht eingesetzt werden. Auch Projekttage bieten sich hierfür an.
Der Lernzirkel 1 eignet sich zur Einführung in das Thema und erfordert keine Vorkenntnisse. Als Anwendung, Vertiefung und Wiederholung kann der Lernzirkel 2 eingesetzt werden.

Organisatorische Hinweise
Die Gruppengröße pro Station sollte 3 bis 4 Schüler nicht überschreiten. Die Anzahl der zu bearbeitenden Stationen richtet sich nach Größe der gesamten Lerngruppe und dem zur Verfügung stehenden Zeitrahmen. Als Bearbeitungszeit der Stationen sollten 20 bis 30 Minuten angesetzt werden. Es können auch Stationen doppelt angeboten werden. Bewährt hat es sich, eine zusätzliche Station mehr als „Kompensation“ anzubieten Ein Laufzettel pro Schülergruppe, auf dem Ergebnisse festgehalten oder konkrete Fragen beantwortet werden, hat sich als sinnvoll erwiesen. Eine abschließende Posterpräsentation ermöglicht die notwendige Nachbereitung und Ergebnissicherung.
Es ist hilfreich, wenn die Schülerinnen und Schüler schon einmal mit einer dynamischen Geometriesoftware (DynaGeo-Euklid, Cabri, Cinderella, Geonext...) gearbeitet haben. Ebenso sollten sie mit dem Zeichnen von Funktionsgraphen mit einem GTR oder einem CAS vertraut sein. Hier wird mit DynaGeo gearbeitet. Die Arbeitsaufträge müssen an das verwendete Programm angepasst werden.

Überblick

Lernzirkel 1 – Einführung

1. Leitlinien-Konstruktion	DGS
2. Parabeln auf dem Bildschirm darstellen (Streckung, Verschiebung)	GTR
3. Parametervariation	Excel
4. Parabeln abbilden (Spiegeln, verschieben, Schrägspiegelung)	DGS
5. Der wandernde rechte Winkel	Papier / Bleistift
6. Das Parabelspiel	GTR
7. Parabeln addieren und subtrahieren	--

Ziele:

- Parabel als Ortslinie konstruieren
- Funktionsgleichungen zu vorgegebenen (verschobenen bzw. gestauchten) Parabeln finden
- Die Bedeutung von Parametern in der Funktionsgleichung erkennen
- Bekannte geometrische Abbildungen wie Verschiebung, Spiegelung, ... auf Parabeln anwenden, um unterschiedliche Erscheinungsformen von Parabeln kennen zu lernen

Voraussetzungen: Einfache Grundlagen beim Umgang mit GTR und DGS, ansonsten keine.

Lernzirkel 2 – Anwendung

1. Konstruktion mit Höhensatz	DGS
2. Parabelbilder	GTR
3. Der wandernde Höhenschnittpunkt	DGS
4. Die aufgehängte Kette	--
5. Parabolspiegel (Solarkocher, Sonnenkollektor o.ä.)	GTR/DGS
6. Experimente mit 2 Geraden	GTR
7. Und als Schmankerl ein Blick über den Tellerrand	--

Ziele:

- Bekannte Eigenschaften der Parabel in neuen Zusammenhängen erkennen bzw. überprüfen
- Begründet entscheiden, ob eine Kurve eine Parabel ist
- Parabeln als „Modell“ nutzen
- Üben mit Spaß

Voraussetzungen: Die Parabel als Graph einer quadratischen Funktion sollte bekannt sein, ebenso Verschiebung und Streckung (Scheitelpunktsform).

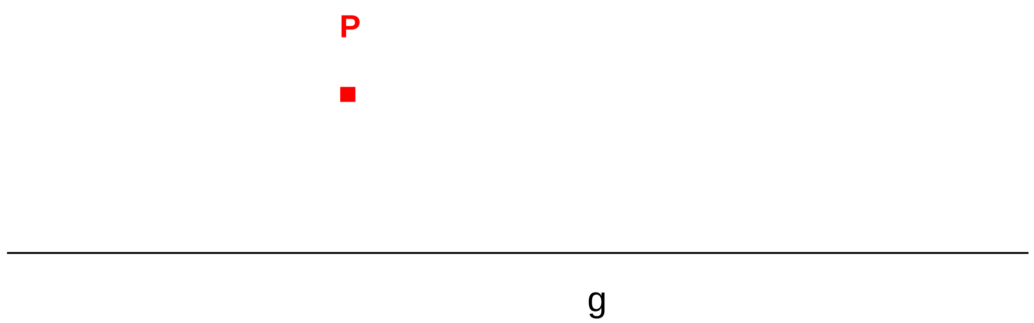
Lernzirkel 1

Gemeinsame Vorübung auf dem Schulhof:
„Stellt euch so auf, dass ihr von der Wand und dem festen Punkt..... den gleichen Abstand habt.“
Dabei muss jeder auf einem Einzelplatz stehen.
Was für eine Kurve entsteht?

Station 1
Konstruktion

Konstruiere diejenigen Punkte, die vom Punkt P und der Gerade g den gleichen Abstand haben. Verbinde die Punkte.

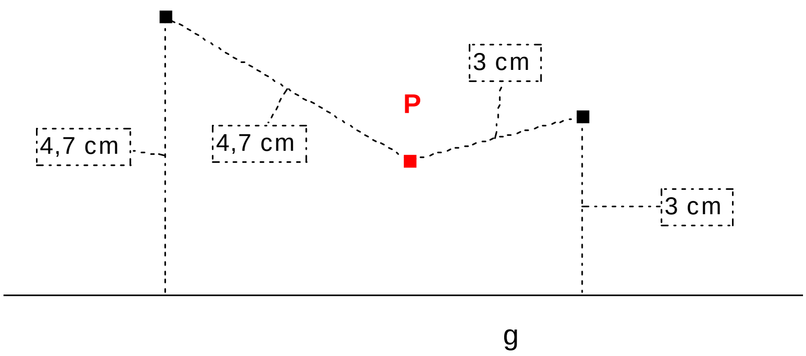
a) Konstruktion mit Bleistift und Geodreieck
b) Konstruktion am Computer mit DGS



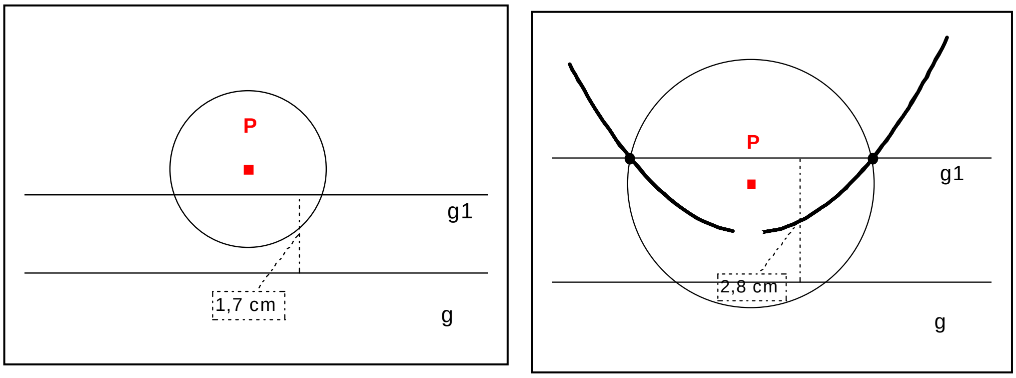
Lösungshinweise

Mögliche Varianten:

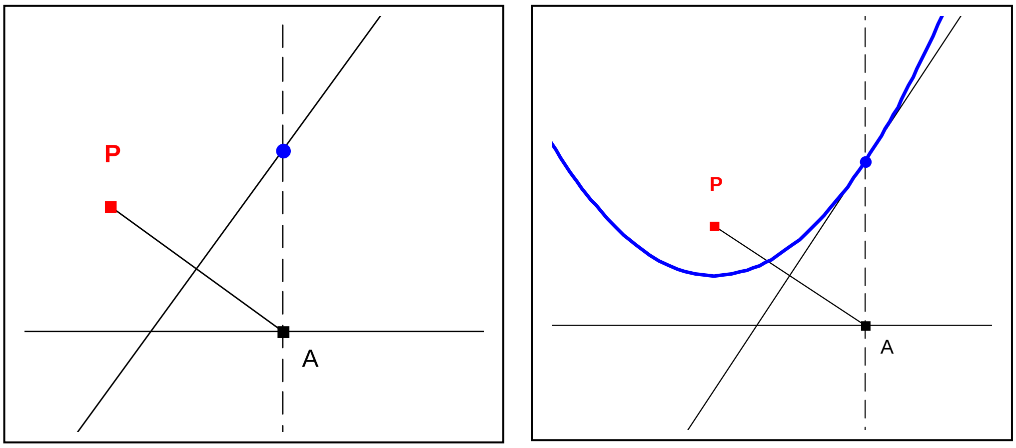
1. Experimentelle Ermittlung einiger Punkte und geradliniges Verbinden.



2. Konstruktion mithilfe konzentrischer Kreise und Parallelen zu g.
Zu g wird eine Parallele g1 konstruiert, der Abstand |g,g1| gemessen und ein Kreis mit Radius |g,g1| um P gezeichnet. Die Ortslinie der Schnittpunkte ist eine Parabel.



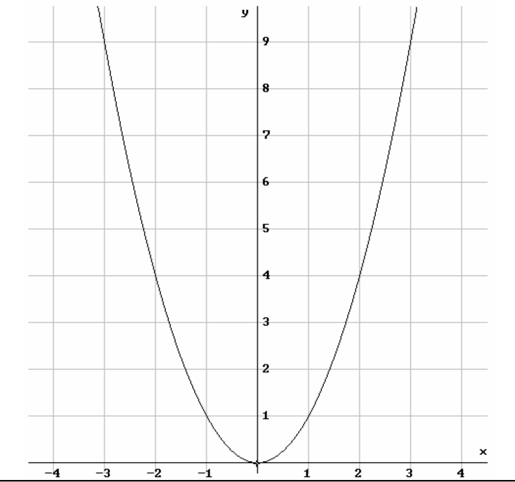
3. Wähle A auf g, konstruiere die Mittelsenkrechte zu |AP| sowie die Senkrechte zu g durch A. Der Schnittpunkt beider Geraden ist ein Parabelpunkt.



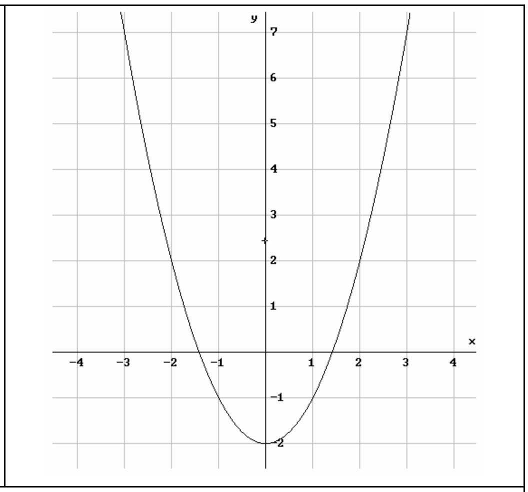
Station 2
Parabeln im Koordinatensystem

In den folgenden Graphen sind verschiedene Parabeln dargestellt. Erstelle für jede Parabel eine Wertetabelle und suche eine Zuordnungsvorschrift. Überprüfe deine Gleichung mit dem GTR

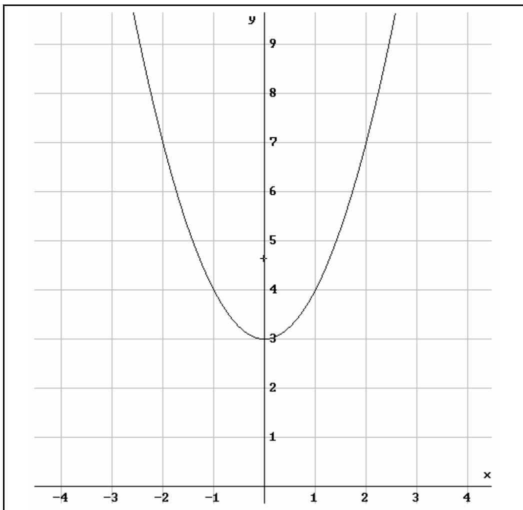
1.



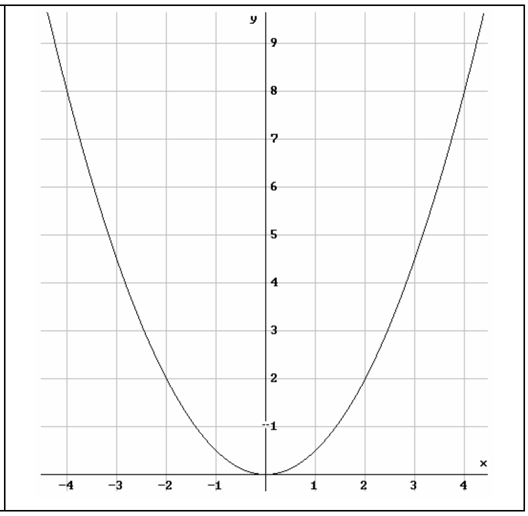
2.



3.



4.

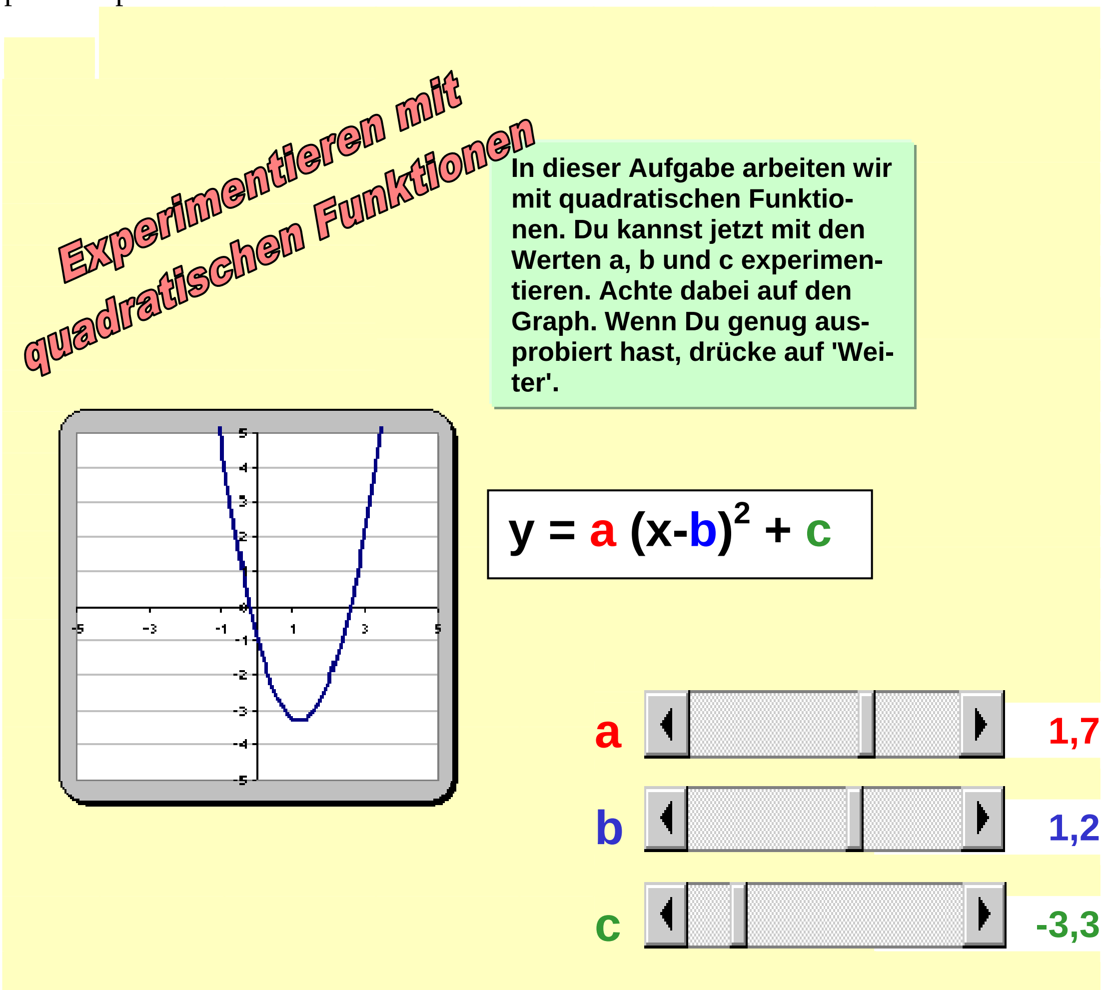


x	-3	-2	-1	0	1	2	3	Gleichung
Y1(x)								y1(x)=
Y2(x)								Y2(x)=
Y3(x)								Y3(x)=
Y4(x)								Y4(x)=

Station 3
Parametervariation

Du findest auf dem Computer eine Excel-Datei. Führe die angegebenen Arbeitsaufträge aus.
Beschreibe, was eine Veränderung der Parameter a, b und c bewirkt.

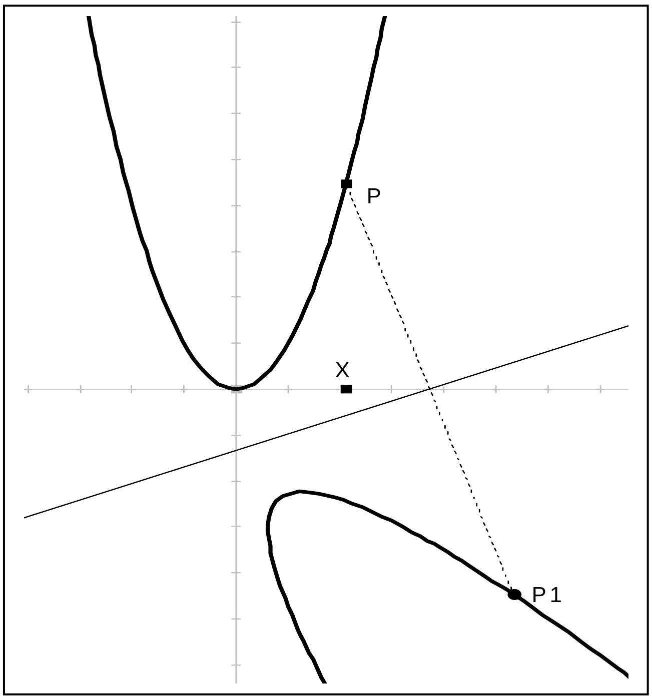
Hinweise
Es handelt sich um eine vorgefertigte Excel-Dateien[1], bei der mittels Schiebereglern die Parameter a, b, c in der Funktionsgleichung $y = a(b - x)^2 + c$ zu variieren sind, siehe Abbildung. In einem zweiten Arbeitsblatt müssen die Parameter so bestimmt werden, dass sie möglichst gut zu vorgegebenen Messpunkten passen.



[1] Quelle: Lehrstuhl f. Didaktik d. Mathematik, Univ. Würzburg, Prof. Dr. H-G. Weigand

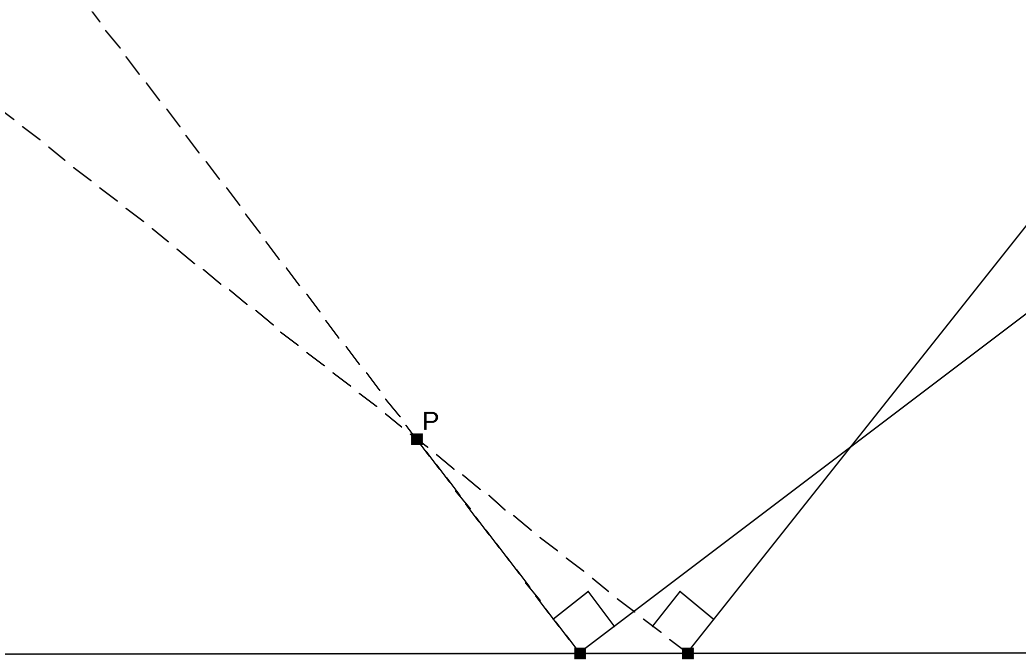
Station 4
Parabeln abbilden

1. Konstruiere mit Euklid/DynaGeo eine Parabel. Gehe dabei folgendermaßen vor:
   - Mache das Koordinatensystem sichtbar und wähle einen Punkt X auf der x-Achse.
   - Konstruiere einen Punkt P(x/y) mit den Koordinaten x: x(X), y: x^2 . (x(X) heißt x-Koordinate von X)
   - Zeichne die Ortslinie von P, die entsteht, wenn X bewegt wird.
2. Mit dem Programm können verschiedene Abbildungen durchgeführt werden (Spiegelungen, Verschiebung, Drehung…). Führe diese Abbildungen mit dem Punkt P durch. Du erhältst einen Bildpunkt P1. Zeichne die Ortslinie von P1, die entsteht, wenn du X bewegst. Du findest als Beispiel eine Achsenspiegelung in der Abbildung.



Station 5
Der wandernde rechte Winkel

Ein rechter Winkel wandert entlang einer Geraden so, dass seine Spitze immer auf der Geraden liegt.
Zeichne mindestens 20 verschiedene rechte Winkel ein und beschreibe dann die entstandene Figur.



Station 6
Parabelspiel

Zu zweit oder alleine

Spielanleitung:

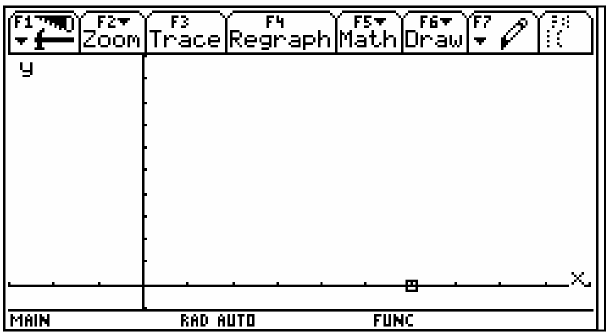
Ein Spieler gibt den Zielpunkt auf der x-Achse vor. Der zweite Spieler versucht, durch Veränderung der Parameter a und b der Wurfparabel

$$y = -\mathbf{a}\cdot x^2 + \mathbf{b}\cdot x$$

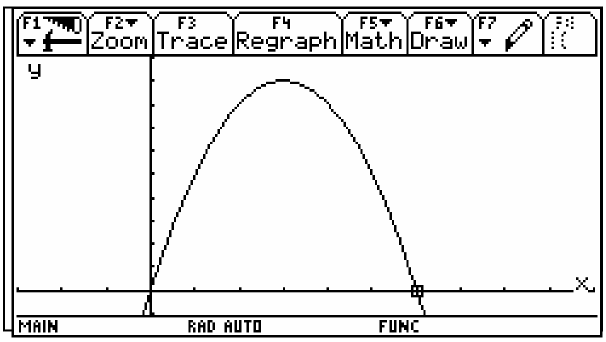
den Zielpunkt genau zu treffen.

Bei Treffer wird gewechselt. a und b müssen nach jedem Wechsel andere Werte annehmen.
Gewonnen hat der Spieler mit der geringsten Anzahl von Würfen.

(Mit ◊y und ◊Graph kann man zwischen den Fenstern hin und her wechseln.)



Hinweis:
Änderung des Zielpunktes mit APPS – 6 – Current – Enter,
c1 ändern,

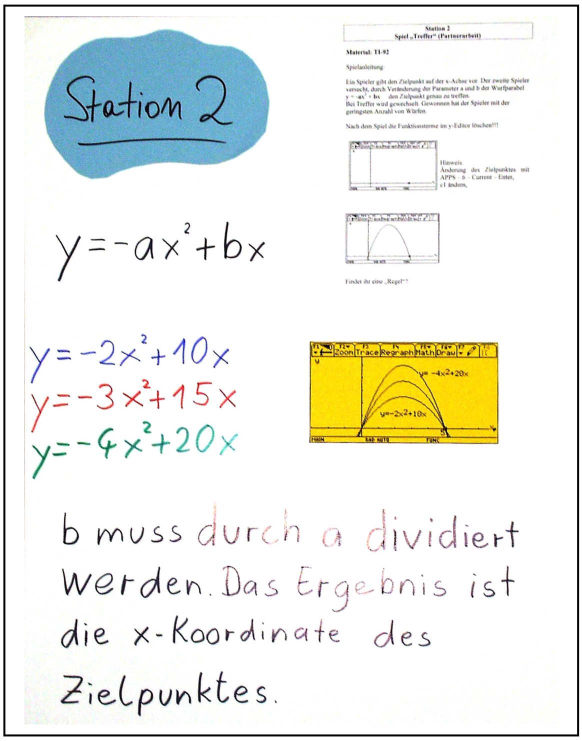


Nach dem Spiel die Funktionsterme im y-Editor löschen!!!

Findet ihr eine „Regel“?

Lösungshinweise

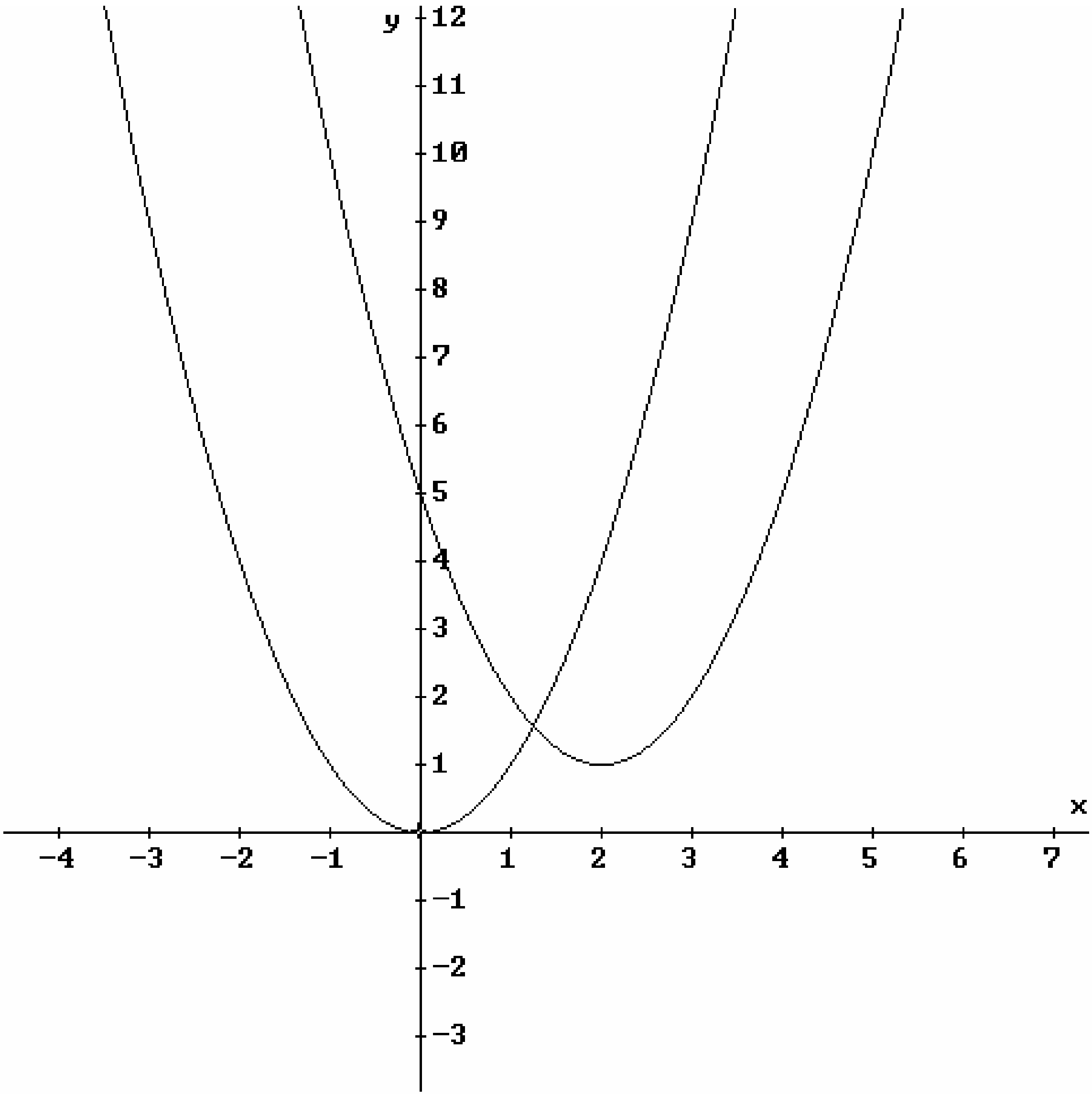
Die Abbildung zeigt ein Schülerposter.



Station 7
Parabeln addieren und subtrahieren

1. Addiere graphisch die beiden Parabeln.

2. Subtrahiere die untere von der oberen Parabel.



Lernzirkel 2

Station 1
Eine besondere Konstruktion

Führe die folgende Konstruktion durch:

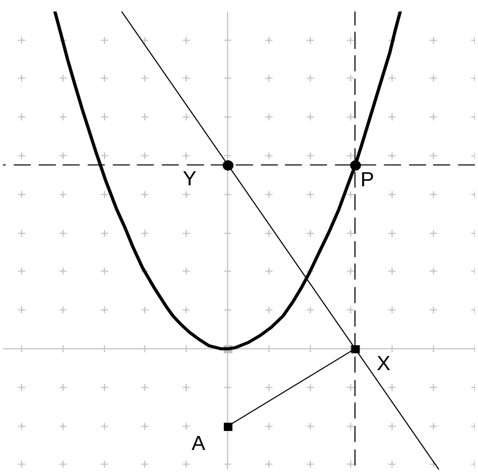
- Wähle im KO-System den Punkt A(0/-2) und einen beliebigen (beweglichen) Punkt X auf der x-Achse.
- Zeichne AX sowie die Senkrechte zu AX durch X. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist Y.
- Zeichne durch X und Y Parallelen zu den Achsen. Als Schnittpunkt entsteht S.
- Zeichne die Ortslinie von S, wenn X auf der x-Achse bewegt wird.

- **Erkläre, warum eine Parabel entsteht.**

Tipp: Betrachte die Koordinaten von S. Welcher dir bekannte geometrische Satz verbirgt sich hinter der Konstruktion?

Lege am Ende im Rechner ein neues Blatt an, nichts speichern!

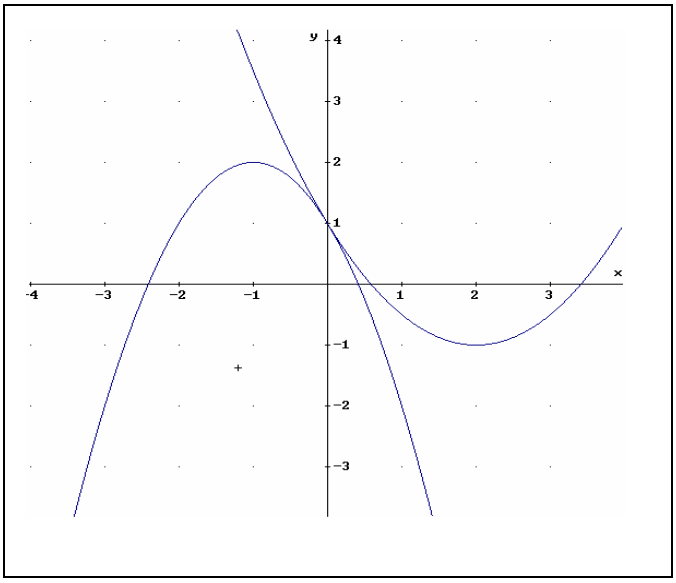
Lösungshinweise



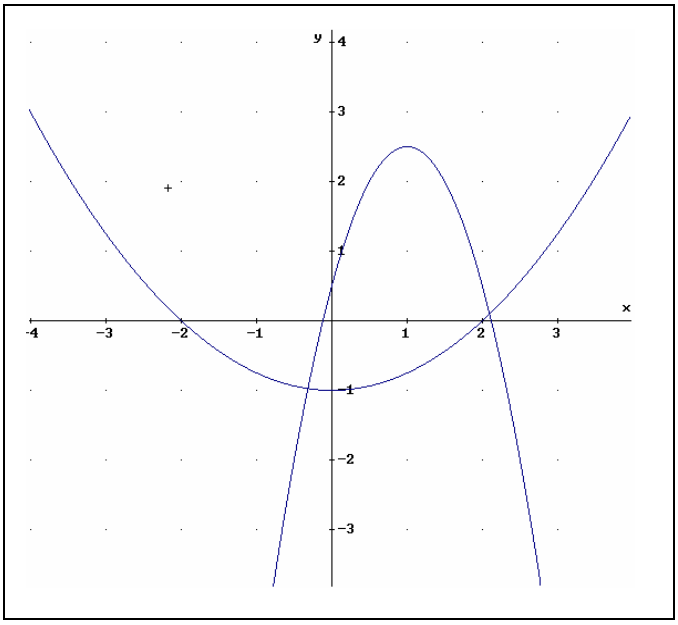
Es handelt sich hier um eine Konstruktion, die den Höhensatz benutzt.
Im rechtwinkligen Dreieck AXY gilt: $x^2 = y \cdot a$ (neg. y-Abschnitt) für alle Punkte P(x/y).

Station 2
Parabelbilder

Stelle die folgenden Parabeln auf dem Bildschirm dar und gib den zugehörenden Funktionsterm an.

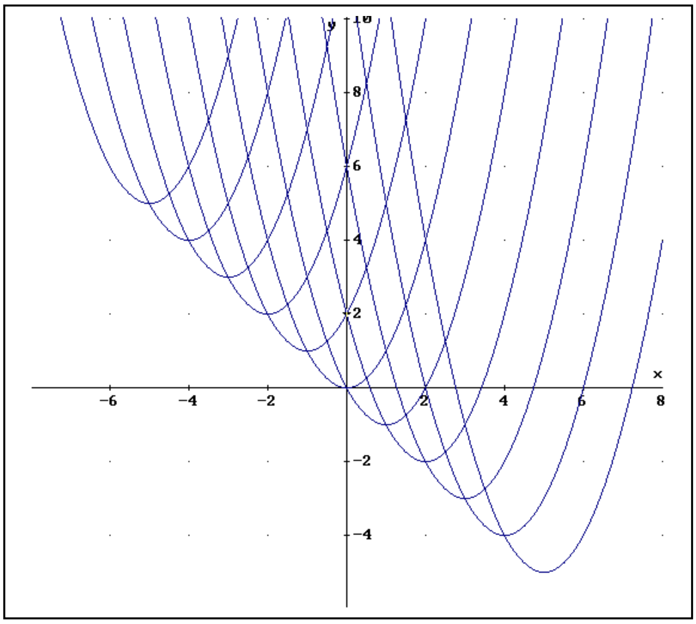


Die Funktionsgleichungen sind:



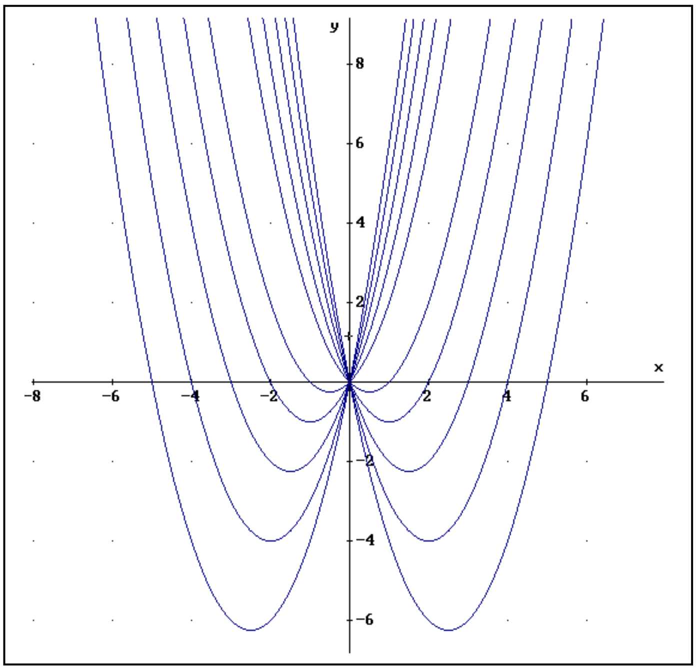
Lösungshinweise
Die gefundenen Funktionsgleichungen sollen angegeben werden.
Anregungen für weitere Bilder, evtl. als **Zusatzaufgabe:**

Die Scheitelpunkte sollen auf der Geraden y = -x liegen



Lösung: $y = (x-k)^2 - k$, im GTR kann man anstelle von k eine Liste anlegen: {-3,-2, ...3} STO L1 und in der Formel k durch L1 ersetzen.

Die Scheitelpunkte liegen auf der Parabel $y = -0{,}25x^2$



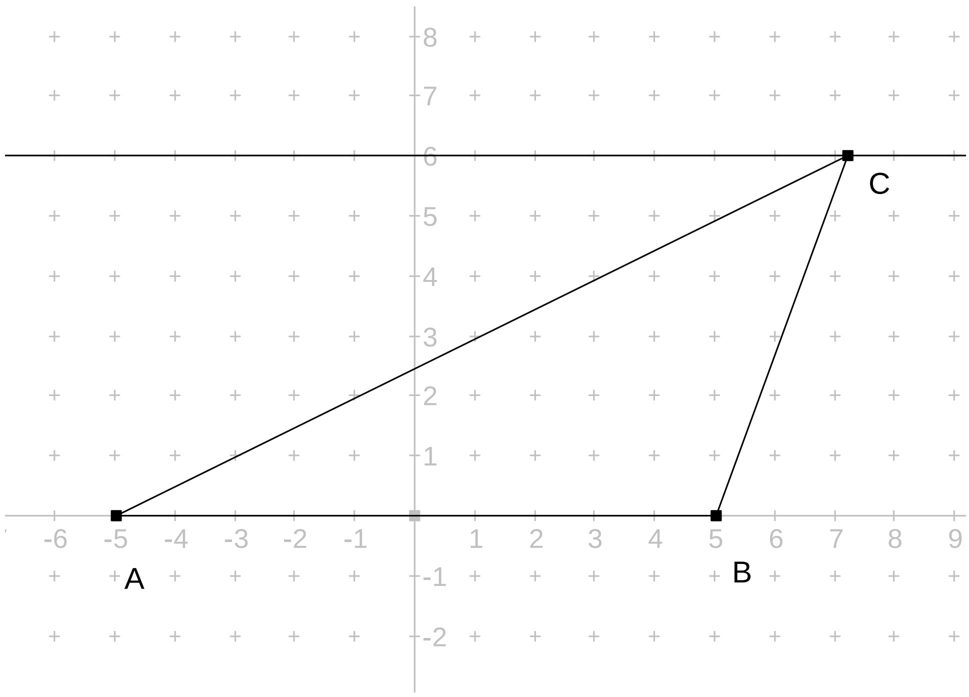
Lösung: $y = (x + k)^2 - 0{,}25k^2$.

Station 3
Der wandernde Höhenschnittpunkt

1. Öffne die Datei „dreieck1“, konstruiere den Höhenschnittpunkt H. Auf welcher Kurve bewegt sich H, wenn C auf der Parallelen zu AB bewegt wird? Zeichne diese Ortslinie.

2. Untersuche, ob es sich bei dieser Ortslinie um eine Parabel handelt.

Hinweis: Menü „Zeichnen“ – Ortslinie eines Punktes – H anklicken – an C ziehen und linke Maustaste dabei halten.

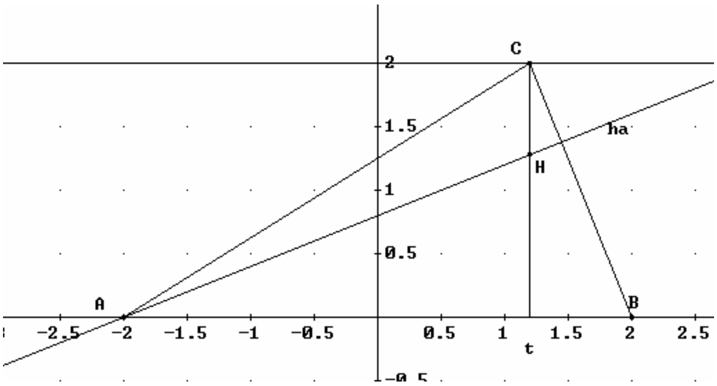


Nach Beendigung der Aufgabe im Rechner ein neues Blatt anlegen, nichts speichern!

Lösungshinweise
Es bieten sich mehrere –qualitativ unterschiedliche- Lösungswege an.

- Die Schüler und Schülerinnen könnten Koordinaten ablesen, mit deren Hilfe eine Parabelgleichung bestimmen und weitere Koordinaten überprüfen
- Man könnte DynaGeo als Funktionenplotter einsetzten und mit einer Gleichung y = -ax^2 + b arbeiten, wobei a und b so wählen sind, dass die zweite Parabel möglichst genau auf die Ortslinie des Höhenschnittpunktes fällt.
- Man könnte den Sachverhalt auch beweisen, allerdings werden Schüler diese Leistung wohl kaum selbstständig erbringen können.

Zum Beweis der Vermutung genügt die Gleichung der Ortskurve von H.



$$m_{BC} = -\frac{2}{2-t} \Rightarrow m_{ha} = \frac{2-t}{2}$$

Die Gleichung der Geraden ha wird bestimmt:

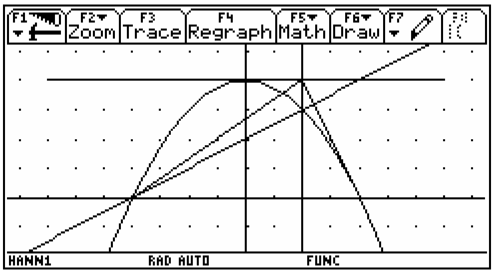
$$ha(x) = \frac{2-t}{2} \cdot x + b$$

Mit $ha(-2) = 0$ wird b berechnet.

$$ha(x) = \frac{2-t}{2} \cdot x + 2 - t$$

Zur Berechnung der y-Koordinate von H muss für x noch t eingesetzt werden:

$$ha(t) = -\tfrac{1}{2} \cdot t^2 + 2$$



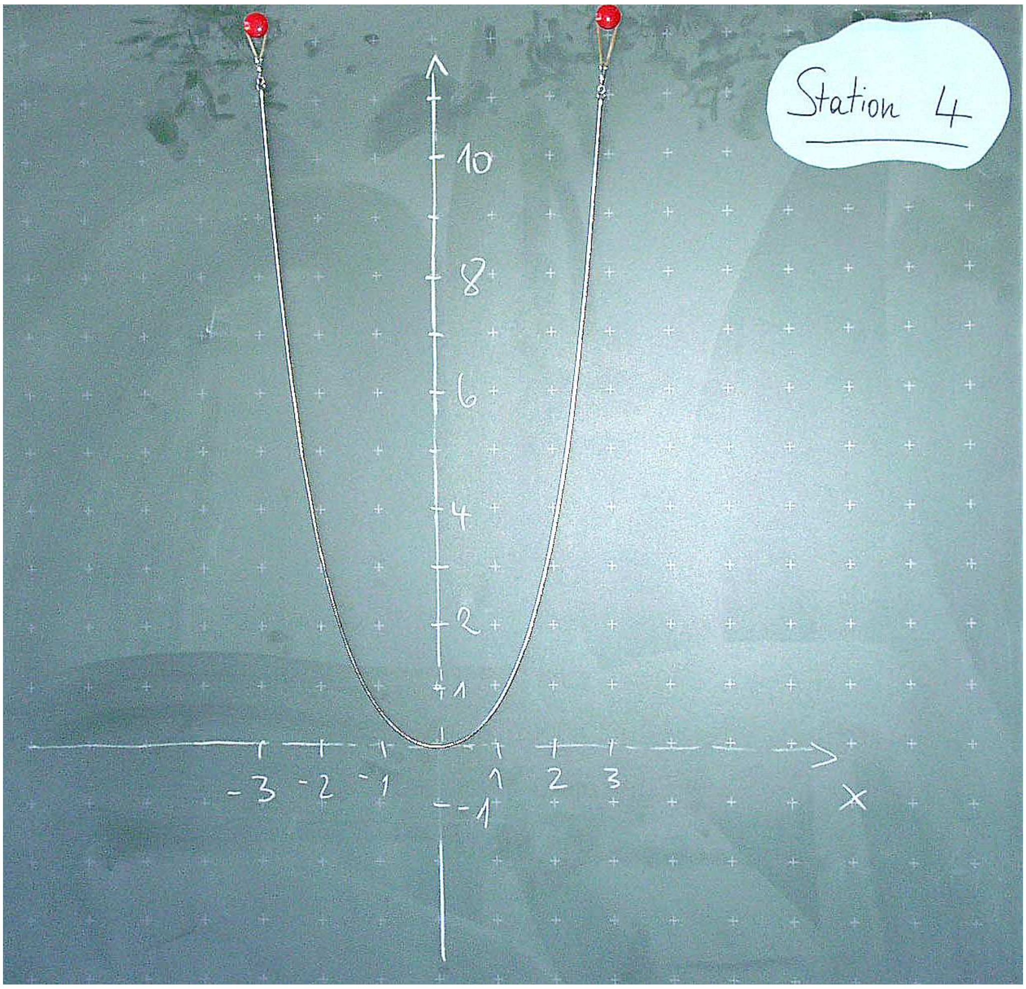
Das ist die Funktionsgleichung einer **quadratischen** Funktion.

Schließlich wird alles noch einmal im Algebrafenster dargestellt.

Weiterführende Fragestellungen

- Welche Kurve ergibt sich, wenn der y-Wert von C gleich 4 , bzw. gleich c ist?
- Lässt sich der Beweis auch verallgemeinern? (A = [-a , 0] , B = [b , 0] und
 C = [t , c])

Station 4
Die aufgehängte Kette



An der Wandtafel ist eine Kette aufgehängt. Kann die Form durch eine Parabel beschrieben werden?

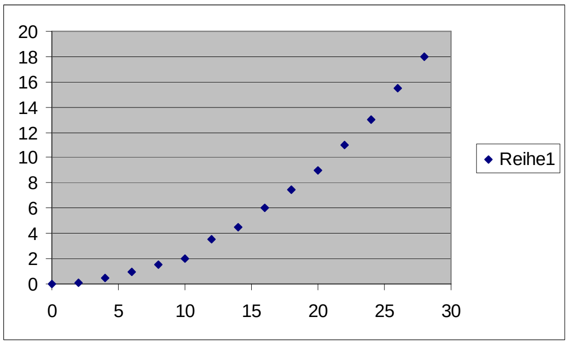
Lösungshinweise
Vermutlich werden zunächst alle Schülerinnen und Schüler die Form für eine Parabel halten. Bei genauerer Prüfung erkennt man, dass die Kurve unterhalb von (1/1) verläuft, also Öffnungsfaktor $a > 1$. Andererseits verläuft die Kurve oberhalb von (3/9), also $a<1$. Damit ergibt sich ein Widerspruch.
Inwieweit die Parabel doch als Näherungskurve verwendet werden kann, sollte diskutiert werden.

Station 5
Der Parabolspiegel

1. Der Querschnitt durch den Kollektor wird durch eine Kurve beschrieben. Beschaffe dir ca. 10 Messpunkte (x/y-Koordinaten), mit denen diese Kurve beschrieben werden kann.

2. Gib deine Messwerte in Excel (oder im Data/Matrixeditor des V200) ein und zeichne einen Plot der Punkte.

   So könnte dein Graph aussehen.



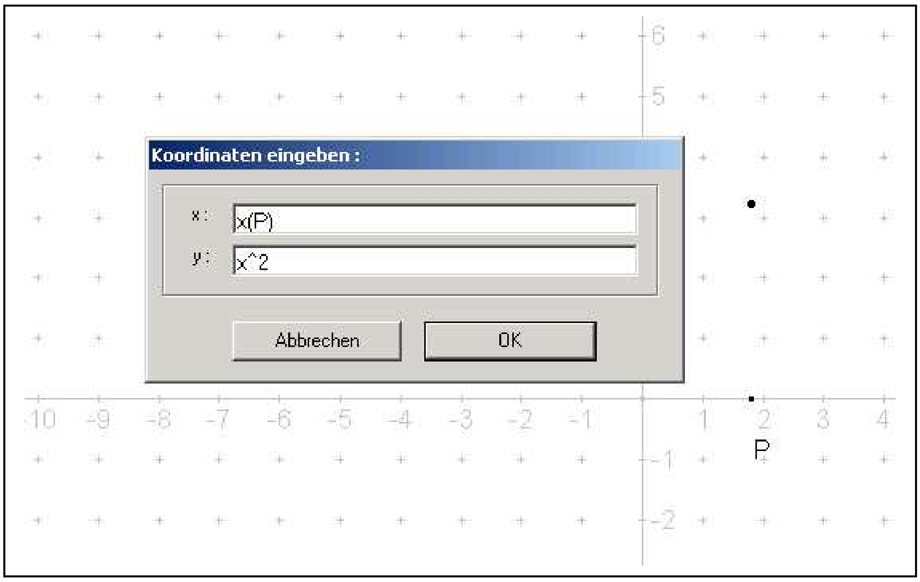
3. Suche eine Funktionsgleichung, die sich den Punkten möglichst gut anpasst.

Lösungshinweise
Anstelle von Excel kann mit dem GTR oder mit einem CAS gearbeitet werden.

Die möglichst gut passende Funktionsgleichung kann in vielfältiger Weise ermittelt werden. In Excel erhält man eine Gleichung durch Hinzufügen der Trendlinie

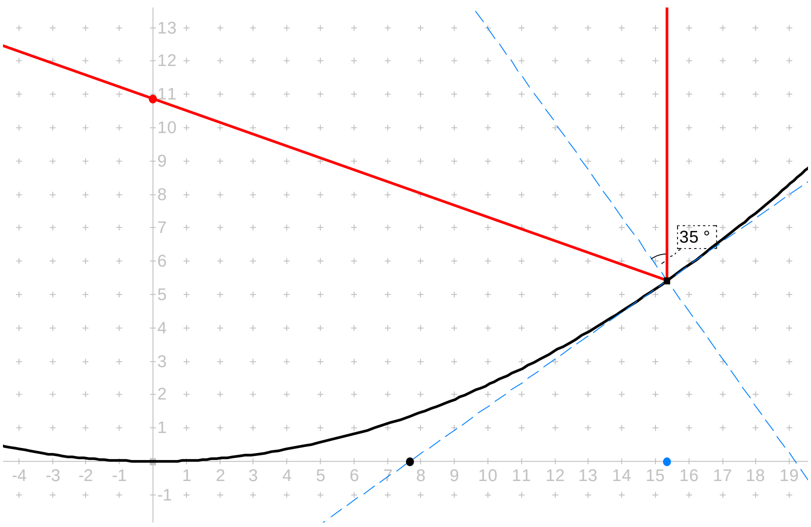
Vertiefung für den nachfolgenden Unterricht:
Diese Kurve soll in Euklid als Ortslinie gezeichnet werden. (Euklid als "Funktionenplotter") und anschließend ein einfallender Sonnenstrahl mit seiner Reflexion konstruiert werden.

Das geht so:
KO-System sichtbar machen, P auf x-Achse wählen und benennen. Punkt mit Koordinaten eingeben: für x: x(P) für y: gewünschte Funktionsgleichung



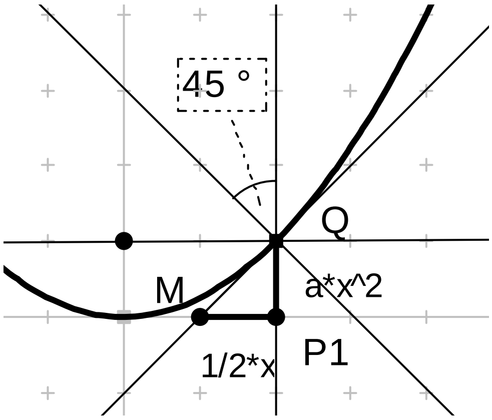
Ein zweiter Punkt erscheint. (Evtl. an P ziehen). Zeichne die Ortslinie diese Punktes, wenn P bewegt wird.

In diesem Punkt kann ein Sonnenstrahl parallel zur y-Achse gezeichnet werden. Die Parabeltangente schneidet die x-Achse in Mitte von 0P, kann also ebenfalls konstruiert werden. Damit finden wir den reflektierten Strahl und betrachten seinen Schnittpunkt mit der y-Achse, wenn P bewegt wird.



Vergleiche den Brennpunkt aus der Konstruktion mit dem unten berechneten Wert und mit dem realen des Kollektors!

Eine Berechnung des y-Wertes des Brennpunktes:



Es gilt:

1/2 x = a x^2
(gleichschenkliges Dreieck
M P1 Q) , also auch für die Quadrate:

1/4 x^2 = a^2 x^4

Teilen durch a und x^2 ergibt:

$\frac{1}{4a} = a \cdot x^2$ (= y-Wert des Brennpunktes)

Station 6
Experimente mit 2 Geraden

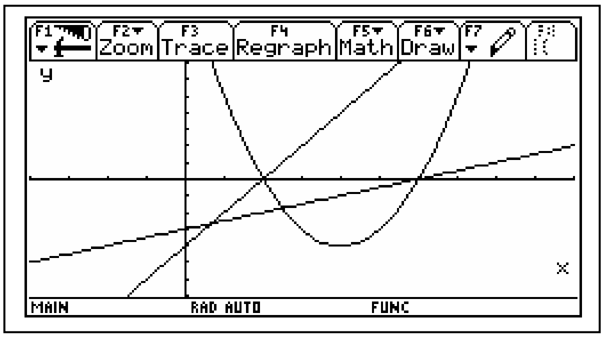
Aufgaben:

Zeichne die beiden Geraden

$y1(x) = 2x - 4$ und
$y2(x) = 1/2\ x - 3$

sowie das Produkt

$y3(x) = y1(x) \cdot y2(x)$



Die Funktionsterme von y1(x) und y2(x) sollen so verändert werden, dass sich der Graph von y3(x) nach bestimmten Regeln verändert.
(Wichtig: An y3(x) darf nichts verändert werden!)

1. Wie kann man die Parabel "auf den Kopf stellen"?

2. Was muss man tun, damit eine Parabel entsteht, die die x-Achse berührt?

3. Was muss man tun, damit der Scheitelpunkt der entstehenden Parabel dieselben x-Koordinaten hat wie der Schnittpunkt der beiden linearen Funktionsgraphen?

4. Welche Art von Parabeln kann man auf diese Art und Weise **nicht** erzeugen?

Lösungshinweise

Zu 1.: Kleine Variation zum Vertrautmachen mit der Fragestellung.

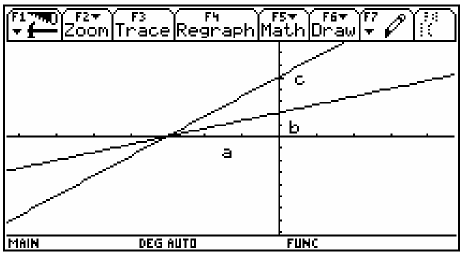
Zu 2.: Verschiedene Lösungen:

a) Nur proportionale Funktionen verwenden (z.b.: y1(x) = 2x und y2(x) = 0.5x) Schnittpunkt und Scheitelpunkt in (0/0).

b) Binomische Formel, etwa: y1(x) = y2(x), also y3(x) = $(x-2)^2$

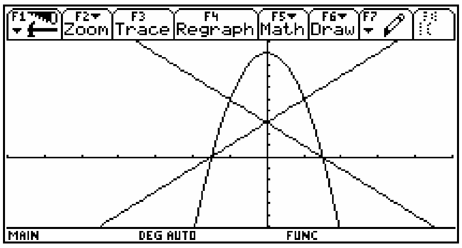
c) Quotient aus Steigung und absolutem Glied muss bei beiden Geraden gleich sein, z.b.: y1(x)= 2x -4 und y2(x)=64x-128.
Oder: Bedingung: Schnittpunkt der Geraden muss auf der x-Achse liegen.

$$y1(x) = \frac{b}{a} \cdot x + b \quad und \quad y2(x) = \frac{c}{a} x + c$$



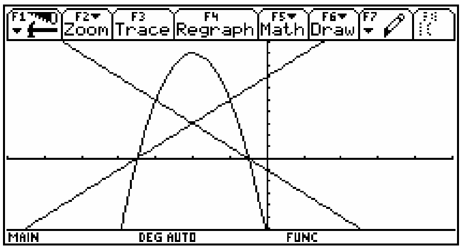
d) Der algebraische Ansatz (Schnitt von y = m1· x + b1 und y = m2· x + b2 und y-Koord. gleich 0 setzen) ergibt die Bedingung: b1·m2 = b2·m1.

Zu 3: Der algebraische Ansatz ist ziemlich aufwändig. Schneller geht´s mit der geometrischen Überlegung, dass der Geradenschnittpunkt symmetrisch bezüglich den Nullstellen der Geraden (also auch der Parabel) liegen muss. Zunächst der einfache Fall (Schnittpunkt auf der y-Achse):



y1(x) = 2x + 3 und y2(x) = -2x + 3

Dann kann das Ganze noch in x-Richtung verschoben werden. Allgemein:



y1(x) = m·(x - a) + b und
y2(x) = -m·(x - a) + b

Zu 4: Eine Parabel, die keine (reellen) Nullstellen hat, kann mit dieser Methode nicht dargestellt werden.

Station 7

Blick über den Tellerrand

Auszug aus Encarta 99:

Parabel (Literatur), (griechisch *parabole:* Gleichnis), literaturwissenschaftliche Bezeichnung für eine Erzählung lehrhaften Charakters, die eine durch Analogieschluss zu enträtselnde allgemeine Wahrheit des menschlichen Lebens enthält.

Diese Wahrheit muss durch einen Vergleich des Textes (dem Dargestellten) mit der außersprachlichen Realität (dem Gemeinten) vom Leser erst gewonnen werden.

Die Parabel ist in manchen Kulturen ein fester Bestandteil der Literatur. Auch im Neuen Testament wird sie als Medium zum Erkennen der göttlichen Wahrheit genutzt. Das berühmteste Beispiel ist die Parabel vom verlorenen Sohn, die auf eine religiöse Botschaft des Glaubens hin interpretiert werden soll.

Und jetzt literarisch...

Schreibe eine „Parabel“ zu einer vorgegebenen Lebensweisheit:

Wer andern eine Grube gräbt,
fällt selbst hinein.

Ein möglicher Anfang: *Das kleine x war verzweifelt, sein großer Bruder, das x^2 benahm sich wieder mal unmöglich.....*

Hinweis
Diese nicht-mathematische Station erfreut sich im allgemeinen großer Beliebtheit und eröffnet einen völlig neuen Blickwinkel auf den Begriff „Parabel“.