Christian Blex

# Eine explizite Version der Jacquet-Langlands-Korrespondenz für den dreidimensionalen hyperbolischen Raum

**-2003-**

Reine Mathematik

# Eine explizite Version der Jacquet-Langlands-Korrespondenz für den dreidimensionalen hyperbolischen Raum

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
durch den Fachbereich Mathematik und Informatik
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Christian Blex
aus Lippstadt
-2003-

| | |
|---|---|
| Dekan: | Prof. Dr. Frank Natterer |
| Erster Gutachter: | Prof. Dr. Jürgen Elstrodt |
| Zweiter Gutachter: | Prof. Dr. Meinhard Peters |
| Tage der mündlichen Prüfungen: | 20.11.03, 26.11.03, 02.12.03 |
| Tag der Promotion: | 17.12.03 |

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Jeder Eigenfunktion des Laplace-Beltrami-Operators zu einer kokompakten Quaternionengruppe auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}^2$ entspricht nach einer Teilaussage der sogenannten Jacquet-Langlands-Korrespondenz eine Spitzenfunktion zu einer Hecke-Gruppe $\Gamma_0(N)$ mit *gleichem* Eigenwert. D.A. Hejhal hat diese Zuordnung in seiner Arbeit „A classical approach to a well-known spectral correspondence on quaternion groups“ [14] in klassischer Terminologie ausgearbeitet. Die Zuordnung wird dabei bewirkt durch einen Integraloperator, dessen Kern eine Siegelsche Thetafunktion

$$\Phi_\psi(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^4} e^{\pi i (uS[n+\psi] + ivP[n+\psi])}$$

bildet. Dabei ist $S \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{R}) \cap \mathrm{M}(2;\mathbb{Z})$ eine gerade Matrix und $P$ eine Majorante von $S$. Ferner ist $\tau = u + iv \in \mathbb{H}^2$ und $\psi \in S^{-1}\mathbb{Z}^4$.
Durch eine geeignete Wahl von $S$ und $P$, wobei $P$ in Abhängigkeit von $z, w \in \mathbb{H}^2$ bestimmt wird, gilt dann

$$\Phi_0(Tz;\tau) = \Phi_0(z;\tau) \text{ für } T \in \Gamma_{\mathcal{O}},$$

$$\mathrm{Im}(L\tau)\Phi_0(z;L\tau) = \mathrm{Im}(\tau)\Phi_0(z;\tau) \text{ für } L \in \Gamma_0(4qr)$$

und

$$\Delta^z\Phi_0(z;\tau) = \Delta^\tau\Phi_0(z,\tau).$$

Dabei ist $\Gamma_{\mathcal{O}} := \{x \in \mathcal{O};\ \mathrm{n}(x) = 1\}$ die Norm-1-Gruppe einer gewissen Ordnung $\mathcal{O}$ in der Divisionsalgebra $\left(\frac{q,r}{\mathbb{Q}}\right)$ und $\Delta^z$, $\Delta^\tau$ der Laplace-Beltrami-Operator in Bezug auf die Variablen $z$ bzw. $\tau$.
Die oben genannten Eigenschaften von $\Phi_0$ spielen eine zentrale Rolle im weiteren Vorgehen von D.A. Hejhal.
Eine überarbeitete Darstellung seiner Ergebnisse wird in [2] und [6] gegeben.

In dieser Arbeit werden die grundlegenden Ideen von D.A. Hejhal auf den dreidimensionalen hyperbolischen Halbraum $\mathbb{H}$ übertragen. Eine Schlüsselrolle fällt dabei wieder der Konstruktion einer geeigneten Thetafunktion zu. Dafür werden nach einem kurzen Überblick über die Grundlagen im zweiten Kapitel zwei leicht verschiedene Familien von Thetafunktionen eingeführt und ihr Transformationsverhalten bestimmt. Für die erste Familie geschieht dies mit Hilfe einer Arbeit von O.K. Richter [26], während für die zweite Familie eine Verallgemeinerung eines Transformationssatzes von C.L. Siegel [32] auf beliebige imaginär-quadratische Zahlkörper und beliebige ganze Hauptideale bewiesen wird.
Die Transformationseigenschaften beider Familien lassen sich dann für Thetafunktionen der Form

$$\Theta_{S,R}(\zeta) = \sum_{n \in A^m} e^{\pi i \left( 2\mathrm{Re}(u \frac{\tau_D}{\gamma^2} S[n]) + 2iv |\frac{\tau_D}{\gamma^2}| R\{n\} \right)}$$

kombinieren. Dabei ist $\zeta = u + jv \in \mathbb{H}$, $u \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{R}^+$, $A = \gamma\mathfrak{o}_K$, $\gamma \in \mathfrak{o}_K$, $\mathfrak{o}_K$ der Ring der ganzen Zahlen im imaginär-quadratischen Zahlkörper $K$, $\tau_D = \frac{1}{\sqrt{D_K}}$, $D_K$ die Diskriminante von $K$, $S$ eine gerade Matrix aus $\mathrm{GL}(m;K) \cap \mathrm{M}(m;\mathfrak{o}_K)$ und $R$ eine komplexe Majorante von $S$. Ist $\mathcal{N}$ die Stufe von $S$, so ergibt sich aus den Ergebnissen von [26] ein einfaches Transformationsverhalten von $\Theta_{S,R}(\zeta)$ unter $\Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(A^2\tau_D^{-1})$, wohingegen der verallgemeinerte Transformationssatz ein komplexeres Transformationsverhalten für beliebige Matrizen aus $\mathrm{SL}(2;\mathfrak{o}_K)$ liefert. Durch eine geeignete Parametrisierung der Majorante $R$ von $S$ lässt sich die Thetafunktion schließlich als eine von zwei Punkten $P$ und $P_0$ aus $\mathbb{H}$ abhängige Funktion auffassen.

Im dritten Kapitel wird für eine Ordnung $\mathcal{R}$ in einer Divisionsalgebra $\mathcal{A}[q,r]$ die für den Theta-Lift geeignete genaue Form der Thetafunktion angegeben. Dazu wird $m = 4$, $A = \mathfrak{o}_K$ und $S$ als Matrix der der Normfunktion auf $\mathcal{R}$ zugeordneten Bilinearform gewählt. Da sich $\mathcal{R}$ mittels einer Einbettung $\Psi$ als Teilmenge von $\mathrm{M}(2;\mathbb{C})$ auffassen lässt, ergibt sich für $\Phi_{\mathcal{R}}(P,P_0,\zeta) := v^2\Theta_{S,R}(P,P_0,\zeta)$:

$$\Phi_{\mathcal{R}}(P,P_0,\zeta) = v^2 \sum_{W=\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{R}} e^{4\pi i \mathrm{Re}((\alpha\delta-\beta\gamma)\tau_D u)} e^{-4\pi v |\tau_D| |\alpha\delta-\beta\gamma| \delta(P,WP_0)}.$$

Weiterhin gilt

$$\Phi_{\mathcal{R}}(TP,P_0,\zeta) = \Phi_{\mathcal{R}}(P,P_0,\zeta) \text{ für } T \in \Gamma_{\mathcal{R}},$$

$$\Phi_{\mathcal{R}}(P,P_0,L\zeta) = \nu(L)\Phi_{\mathcal{R}}(P,P_0,\zeta) \text{ für } L \in \Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1})$$

und

$$\Delta^P \Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta) = \Delta^\zeta \Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta).$$

Dabei sind $\delta(P, WP_0) = \cosh(d(P, WP_0))$, $d(P, WP_0)$ der hyperbolische Abstand von $P$ und $WP_0$, $\nu(L)$ eine achte Einheitswurzel und $\Delta^P$, $\Delta^\zeta$ der dreidimensionale hyperbolische Laplace-Beltrami-Operator in Bezug auf $P$ bzw. $\zeta$.
Im zweiten Abschnitt des dritten Kapitels wird dann für $f \in C^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H}, \lambda)$ und einen Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ von $\Gamma_{\mathcal{R}}$ der Theta-Lift

$$\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta) := \int_{\mathcal{F}} \Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta) f(P) d\mu(P)$$

eingeführt und sowohl seine Transformationseigenschaften als auch seine Fourierentwicklung angegeben. Hat $K$ die Klassenzahl $h = 1$, so gilt dabei bei geeigneter Wahl von $P_0 \in \mathbb{H}$, dass $\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta)$ eine Spitzenform zu $\Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1})$ mit Eigenwert $\lambda$ ist.
Im dritten Abschnitt wird für eine geeignete Untergruppe $\Gamma_{\mathcal{N}}$ von $\Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1})$ und für eine Spitzenform $g$ zu dieser Gruppe zum gleichen Eigenwert wie $f$ ein Theta-Lift

$$\mathcal{J}_g^{P_0}(P) := \int_{\mathcal{F}_N} \overline{\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)} g(\zeta) d\mu(\zeta)$$

definiert. Dabei gilt

$$\left\langle \mathcal{I}_f^{P_0}, g \right\rangle_{\Gamma_{\mathcal{N}}} = \left\langle f, \mathcal{J}_g^{P_0} \right\rangle_{\Gamma_{\mathcal{R}}}.$$

Mit Hilfe der Hecke-Theorie wird dann im vierten Kapitel für den Fall der Klassenzahl $h = 1$ und einer *maximalen* Ordnung $\mathcal{R}$ in $\mathcal{A}[q, r]$ die Existenz einer geeigneten Orthonormalbasis $\{f_k^\lambda\}$ von $C^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H}, \lambda)$ gezeigt, so dass die Fourierkoeffizienten der zugehörigen Theta-Lifts $\mathcal{I}_{f_k^\lambda}^{P_0}$ gewisse multiplikative Eigenschaften aufweisen.
Dazu werden im ersten Abschnitt kurz die abstrakte Hecke-Algebra und einige ihrer wesentlichen Eigenschaften in Erinnerung gerufen.
Nachdem der zweite Abschnitt zur Nennung einiger bekannter Ergebnisse über $\mathcal{P}$-adische Vervollständigungen imaginär-quadratischer Zahlkörper und Ordnungen dient, wird damit im dritten Abschnitt die Hecke-Algebra der Norm-1-Gruppe einer maximalen Ordnung über imaginär-quadratischen Zahlkörpern der Klassenzahl $h = 1$ untersucht. Das Vorgehen orientiert sich dabei im Wesentlichen an den Ergebnissen von G. Shimura für maximale Ordnungen über $\mathbb{Q}$ in [29].
Die Ergebnisse des dritten Abschnitts bilden dann im vierten Abschnitt die Grundlage zur Definition geeigneter Hecke-Operatoren. Es zeigt sich,

dass diese Operatoren mit dem Laplace-Beltrami-Operator eine Familie kommutierender normaler Operatoren auf $C^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H}, \lambda)$ bilden und somit eine geeignete Orthonormalbasis $\{f_k^\lambda\}$ aus gemeinsamen Eigenfunktionen existiert. Mit Hilfe der multiplikativen Eigenschaften der Hecke-Operatoren können dann entsprechende multiplikative Eigenschaften der Fourierkoeffizienten der $\mathcal{I}_{f_k^\lambda}^{P_0}$ nachgewiesen werden.

Die Anregung zu dieser Arbeit stammt von Herrn Prof. Dr. Jürgen Elstrodt. Für seine stets freundliche Begleitung und Betreuung während der Anfertigung dieser Arbeit danke ich ihm herzlich. Weiterhin möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Fritz Grunewald bedanken, der mir insbesondere bei Fragen bezüglich der $\mathcal{P}$-adischen Vervollständigungen von Ordnungen bereitwillig zur Hilfe stand. Mein Dank gilt auch der Deutschen Forschungsgemeinschaft, deren Förderung im Rahmen des Graduiertenkollegs „Analytische Topologie und Metageometrie" es mir gestattete, mich dieser Arbeit voll zu widmen. Schließlich möchte ich mich bei meinen Freunden und Mitkommilitonen bedanken, die mich durch mein Studium und diese Arbeit begleitet haben. Namentlich möchte ich hier Barbara Dickhut erwähnen, mit der ich von 1998 bis jetzt eng zusammengearbeitet habe und die nicht unwesentlich zu meinem Entschluss, diese Arbeit zu schreiben, beigetragen hat.

# Symbolverzeichnis

| | |
|---|---|
| $\mathcal{A} = \mathcal{A}[q,r]$ | Quaternionenalgebra, meist noch Divisionsalgebra, S. 9 |
| $C_{\Gamma_{\mathcal{R}}}$ | S. 50 |
| $C_{\mathcal{N}}$ | S. 48 |
| $\mathbb{C}$ | Körper der komplexen Zahlen |
| $d(\alpha)$ | Anzahl der Rechtsnebenklassen $\Gamma\alpha_j$ in $\Gamma\alpha\Gamma$, S. 56 |
| $d(N)$ | Anzahl der Rechtsnebenklassen von $\Gamma_{\mathcal{R}}$ in $\mathcal{R}^{(N)}$, S. 11 |
| $d(\mathcal{R})$ | Diskriminante von $\mathcal{R}$, S. 61 |
| $\deg(T)$ | Grad von $T \in R(\Gamma, S)$, S. 58 |
| $\delta_K$ | Differente von $K$, S. 6 |
| $\delta(P,Q)$ | S. 3 |
| $\Delta$ | Laplace-Beltrami-Operator, S. 2 |
| $e_i$ | S. 87 |
| $\epsilon_i$ | S. 87 |
| $e(\alpha)$ | Anzahl der Linksnebenklassen $\alpha_i\Gamma$ in $\Gamma\alpha\Gamma$, S. 56 |
| $f\|_M$ | Peterssonscher Strichoperator, S. 7 |
| $\Phi_{\mathcal{R}}(P,P_0,\zeta)$ | $= v^2\Theta_{S_1,R_1}(P,P_0,\zeta)$, S. 32 |
| $\tilde{\Gamma}$ | Kommensurator von $\Gamma$ in $G$, S. 55 |
| $\Gamma^0(N)$ | S. 6 |
| $\Gamma_0(N)$ | S. 6 |
| $\Gamma_{\mathcal{N}}$ | $= \{L \in \Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1});\ \nu(L) = 1\}$, S. 48 |
| $\Gamma_{\mathcal{R}}$ | Norm-1-Gruppe von $\mathcal{R}$, 10 |
| $\mathbb{H}$ | dreidimensionaler hyberbolischer Raum, S. 1 |
| $\mathcal{H}(-1,-1)$ | vierdimensionale Divisionsalgebra der Hamiltonschen Quaternionen, S. 1 |
| $\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta)$ | $= \int\limits_{\mathcal{F}} \Phi_{\mathcal{R}}(P,P_0,\zeta)f(P)d\mu(P)$, S. 36 |
| $\mathcal{J}_g^{P_0}(P)$ | $= \int\limits_{F_{\mathcal{N}}} \overline{\Phi_{\mathcal{R}}(P,P_0,\zeta)}g(\zeta)d\mu(\zeta)$, S. 48 |
| $K$ | $= \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ mit $D < 0$ quadratfreie ganze Zahl, S. 5 |

| | |
|---|---|
| $K_s(r)$ | modifizierte Besselfunktion, S. 7 |
| $L(\Gamma, S)$ | S. 57 |
| $\lambda(r,\psi)$ | $= \sum\limits_{g\in A^m \bmod cA^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[g+\psi]+\frac{d}{c}\gamma^* S^{-1}[r]+\frac{2}{c}\gamma^*(g+\psi)^t r\right)}$, S. 15 |
| $\mathcal{M}_P$ | $= \begin{pmatrix} r^{\frac{1}{2}} & zr^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & r^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$, S. 26 |
| $\mathcal{M}_{P_0}$ | $= \begin{pmatrix} r_0^{\frac{1}{2}} & z_0 r_0^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & r_0^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$, S. 26 |
| $\mathrm{n}(x)$ | (reduzierte) Norm von $x \in \mathcal{A}[q,r]$, S. 9 |
| $\mathcal{N}$ | Stufe der geraden Matrix $S \in \mathrm{GL}(m;K) \cap \mathrm{M}(m;\mathfrak{o}_K)$, S. 13 |
| $\mathcal{N}(z)$ | Norm von $z \in K$, S. 5 |
| $\mathbb{N}$ | $= \{x \in \mathbb{Z};\ x > 0\}$, Menge der natürlichen Zahlen |
| $\mathbb{N}_0$ | $= \{x \in \mathbb{Z};\ x \geq 0\}$ |
| $\mathfrak{o}_K$ | Ring der in $K$ ganzen Zahlen, S. 5 |
| $\omega_D$ | S. 5 |
| $\omega_{k\epsilon_j}$ | spezieller Eigenwert des Hecke-Operators $T_{\epsilon_i}$, S. 94 |
| $\omega_{kN}$ | spezieller Eigenwert des Hecke-Operators $T_N$, S. 94 |
| $P \to MP$ | erweiterte Möbiustransformation von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ auf $\mathbb{H}$, S. 3 |
| $P \to \underline{MP}$ | Operation von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ auf $\mathcal{H}(-1,-1) \setminus \mathbb{C}$, S. 2 |
| $\mathbb{P}$ | S. 60 |
| $\Psi$ | Einbettung von $A[q,r]$ in $\mathrm{M}(2;\mathbb{C})$, S. 9 |
| $\mathbb{Q}$ | Körper der rationalen Zahlen |
| $R_1$ | $= B^t R_{PP_0}\overline{B}$, Majorante von $S_1$, S. 31 |
| $R_{PP_0}$ | $= A(\mathcal{M}_P^{-1}, \mathcal{M}_{P_0}^{-1})^t \overline{A(\mathcal{M}_P^{-1}, \mathcal{M}_{P_0}^{-1})}$, S. 26 |
| $R\{n\}$ | $= n^t R\overline{n}$, S. 13 |
| $R(\Gamma, S)$ | S. 57 |
| $\mathcal{R}$ | Ordnung in $\mathcal{A}[q,r]$, S. 10 |
| $\mathcal{R}^{(N)}$ | $= \{x \in \mathcal{R};\ \mathrm{n}(x) = N\}$, S. 11 |
| $\mathcal{R}^*$ | $= \{x \in \mathcal{R};\ \mathrm{n}(x) \in \mathfrak{o}_K^*\}$, S. 66 |
| $\mathbb{R}$ | Körper der reellen Zahlen |
| $S_1$ | $= (\mathrm{tr}(e_i\overline{e_j}))$, Matrix der der Normfunktion auf $\mathcal{R}$ zugeordneten Bilinearform, S. 29 |
| $S[n]$ | $= n^t S n$, S. 13 |
| $\mathfrak{S}$ | $= \{x \in \mathcal{R}, \mathrm{n}(x) \in \mathfrak{T}\}$, S. 65 |
| $\mathrm{tr}(x)$ | (reduzierte) Spur von $x \in \mathcal{A}[q,r]$, S. 9 |
| $T_{\epsilon_i}$ | Hecke-Operator, S. 87 |
| $T_N$ | Hecke-Operator, S. 87 |
| $T(N)$ | S. 75 |
| $T(p^{c_1}, p^{c_2})$ | S. 77 |
| $\mathfrak{T}$ | S. 60 |
| $\tau_D$ | $= \frac{1}{\sqrt{D_K}}$, S. 6 |

| | |
|---|---|
| $\theta_{S,R}(\zeta)$ | $= \sum\limits_{n \in A^m} e^{\pi i \left( uS[n] + \overline{u}\overline{S}[\overline{n}] + 2ivR\{n\} \right)}$, S. 13 |
| $\Theta^{\psi}_{S,R}(\zeta)$ | $= \sum\limits_{n \in A^m} e^{\pi i \left( u\gamma^* S[n+\psi] + \overline{u}\overline{\gamma^* S}[\overline{n}+\overline{\psi}] + 2iv\lvert\gamma^*\rvert R\{n+\psi\} \right)}$, S. 14 |
| $\overline{x}$ | konjugiertes Element von $x \in \mathcal{A}[q,r]$, S. 9 |
| $\xi_{kN}$ | Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von $\Gamma_{\mathcal{R}}$ in $\mathcal{R}^{(N)}$, S. 11 |
| $\mathbb{Z}$ | Ring der ganzen Zahlen in $\mathbb{Q}$ |

# Kapitel 1

# Grundlegendes

## 1.1 Die Hamiltonquaternionen und der dreidimensionale hyperbolische Raum

**Bezeichnungen 1.1.1.** *Es sei $\mathcal{H}(-1,-1)$ die vierdimensionale Divisionsalgebra der Hamiltonschen Quaternionen mit der Standard-$\mathbb{R}$-Basis $1, i, j, k$, d.h.*

$$i^2 = j^2 = -1 \text{ und } ij = -ji = k.$$

*Punkte $P$ aus $\mathcal{H}(-1,-1)$ lassen sich also schreiben in der Form*

$$P = z_P + r_P j + l_P k \text{ mit } z_P \in \mathbb{C} \text{ und } r_P, l_P \in \mathbb{R}.$$

*Falls keine Verwechslungen zu befürchten sind, verwenden wir im Folgenden auch einfach nur $z, r, l$ statt $z_P, r_P, l_P$.*
*Der dreidimensionale hyperbolische Halbraum $\mathbb{H}$ lässt sich nun als Teilraum von $\mathcal{H}(-1,-1)$ auffassen:*

$$\mathbb{H} = \{P = z + rj \in \mathcal{H}(-1,-1);\ z \in \mathbb{C},\ r > 0\}.$$

*Die zugehörige hyperbolische Metrik ist gegeben durch*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dr^2}{r^2}.$$

*Das induzierte Lebesgue-Stieltjessche Maß $\mu$ ergibt sich aus dem Volumenelement*

$$d\mu = \frac{dxdydr}{r^3},$$

*und der zur obigen Metrik gehörige Laplace-Beltrami-Operator $\Delta$ hat die Gestalt*
$$\Delta = r^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) - r \frac{\partial}{\partial r}.$$
*Für einen Punkt $P \in \mathbb{H}$ bezeichnen wir mit $\|P\|$ die euklidische Norm des Vektors $P \in \mathbb{R}^4$. Ist $\overline{P}$ das zu $P$ in $\mathcal{H}(-1,-1)$ konjugierte Element, so gilt für die Norm $\mathrm{n}(P) := P\overline{P}$*
$$\mathrm{n}(P) = \|P\|^2 = |z_P|^2 + |r_P|^2.$$

Bekanntermaßen operiert die Gruppe $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ mittels der Möbiustransformation
$$P \to MP := (aP + b)(cP + d)^{-1}$$
für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ auf $\mathbb{H}$. Dabei ist die Inversenbildung im Schiefkörper der Hamiltonquaternionen durchzuführen und der Ineffektivitätskern ist gleich $\{\pm I\}$. Diese Operation lässt sich nun zu einer Operation von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ auf $\mathcal{H}(-1,-1) \setminus \mathbb{C}$ erweitern:

**Lemma 1.1.2.** *Es seien $P = z + rj + lk \in \mathcal{H}(-1,-1)$ und $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$. Dann operiert die Gruppe $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ vermöge*
$$\begin{aligned} P \to \underline{MP} &:= (aP + b)(cP + d)^{-1} \\ &= z_{\underline{MP}} + r_{\underline{MP}}j + l_{\underline{MP}}k \end{aligned}$$
*auf $\mathcal{H}(-1,-1) \setminus \mathbb{C}$.*
*Der Ineffektivitätskern dieser Operation ist $\{aI,\ a \in \mathbb{R}^*\}$ und es gilt:*
$$z_{\underline{MP}} = \frac{(az + b)(\overline{cz} + \overline{d}) + a\overline{c}(r^2 + l^2)}{\|cP + d\|^2},$$
$$r_{\underline{MP}} = \frac{\mathrm{Re}(ad - bc)r - \mathrm{Im}(ad - bc)l}{\|cP + d\|^2},$$
$$l_{\underline{MP}} = \frac{\mathrm{Re}(ad - bc)l + \mathrm{Im}(ad - bc)r}{\|cP + d\|^2}.$$

*Beweis.* Zuerst machen wir uns mittels Fallunterscheidungen klar, dass für $P \in \mathcal{H}(-1. - 1) \setminus \mathbb{C}$ stets $cP + d \neq 0$ und somit auch $\|cP + d\| \neq 0$ gilt, da $\mathcal{H}(-1,-1)$ eine Divisionsalgebra ist.
Eine explizite Berechnung von $(aP + b)(cP + d)^{-1} = (aP + b)\frac{\overline{(cP+d)}}{\|cP+d\|^2}$ ergibt dann schließlich die angegebenen Formeln für $z_{\underline{MP}}$, $r_{\underline{MP}}$ und $l_{\underline{MP}}$. Aus diesen Formeln folgt nun, dass $\underline{MP}$ stets wieder in $\mathcal{H}(-1,-1) \setminus \mathbb{C}$ liegt. Die Assoziativität der Abbildung ergibt sich durch elementares Nachrechnen.

$\square$

Lemma 1.1.2 ermöglicht es uns nun, eine Operation der Gruppe $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ auf $\mathbb{H}$ zu erklären, welche die bekannte Operation von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ auf $\mathbb{H}$ erweitert.

**Lemma 1.1.3.** *Für $P = z + rj \in \mathbb{H}$ und $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ seien $z_{\underline{MP}}$, $r_{\underline{MP}}$ und $l_{\underline{MP}}$ gemäß Lemma 1.1.2 gegeben.*
*Mit*

$$z_{MP} := z_{\underline{MP}}$$

*und*

$$r_{MP} := \sqrt{r_{\underline{MP}}^2 + l_{\underline{MP}}^2} = \frac{|ad - bc|}{\|cP + d\|^2} r$$

*operiert die Gruppe $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ vermöge*

$$P \to MP = z_{MP} + r_{MP} j$$

*auf $\mathbb{H}$. Der Ineffektivitätskern ist dabei $\{aI;\ a \in \mathbb{C}^*\}$.*

*Beweis.* Nachrechnen.

□

**Satz 1.1.4.** *Die hyperbolische Metrik ist invariant unter der obigen Operation von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ auf $\mathbb{H}$. Somit ist auch der hyperbolische Abstand, das hyperbolische Volumen und der Laplace-Beltrami-Operator invariant unter dieser Operation.*

*Beweis.* Für die Gruppe $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ lassen sich diese Aussagen leicht mittels ihrer Erzeuger

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ a \in \mathbb{C} \right\}$$

nachweisen. Da die Operation aus Lemma 1.1.3 invariant unter $\{aI;\ a \in \mathbb{C}^*\}$ ist, erhalten wir die Behauptung.

□

**Satz und Definition 1.1.5.** *Für $P = z_P + r_P j$ und $Q = z_Q + r_Q j$ aus $\mathbb{H}$ ist der hyperbolische Abstand d(P,Q) gegeben durch*

$$\cosh d(P,Q) = \delta(P,Q),$$

*wobei $\delta$ definiert ist als*

$$\delta(P,Q) := \frac{|z_P - z_Q|^2 + r_P^2 + r_Q^2}{2 r_P r_Q}.$$

*Beweis.* Das ist die Aussage von [9], Seite 6, Proposition 1.6. □

**Definition 1.1.6.** *Eine Abbildung* $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ *heißt eine Punkt-Paar-Invariante genau dann, wenn für alle* $P, Q \in \mathbb{H}$ *und* $M \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ *gilt:*

$$f(MP, MQ) = f(P, Q).$$

**Lemma 1.1.7.** *Eine Abbildung* $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ *ist genau dann eine Punkt-Paar-Invariante, wenn es eine Abbildung* $\phi : [1, \infty] \to \mathbb{C}$ *gibt, so dass* $f = \phi \circ \delta$ *ist.*

*Beweis.* [9], S. 8, Proposition 1.9. □

## 1.2 Imaginär-quadratische Zahlkörper

In diesem Abschnitt stellen wir allgemein bekannte Aussagen über die im weiteren Verlauf der Arbeit vorkommenden imaginär-quadratischen Zahlkörper zusammen. Hintergrundinformationen findet man z.B. in [9], [12] und [19].

**Voraussetzung 1.2.1.** *In der gesamten Arbeit sei stets $D < 0$ eine quadratfreie ganze Zahl und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ der zugehörige imaginär-quadratische Zahlkörper.*

Für die Diskriminante $D_K$ von $K$ gilt:

$$D_K = \begin{cases} D, & \text{falls } D \equiv 1 \mod 4, \\ 4D, & \text{falls } D \equiv 2,3 \mod 4. \end{cases}$$

Der Ring der in $K$ ganzen Zahlen wird wie üblich mit $\mathfrak{o}_K$ bezeichnet. Er ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rank 2 mit $\mathbb{Z}$-Basis $\{1, \omega_D\}$, wobei

$$\omega_D = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{D}}{2}, & \text{falls } D \equiv 1 \mod 4, \\ \sqrt{D}, & \text{falls } D \equiv 2,3 \mod 4 \end{cases} \tag{1.1}$$

ist.

Das euklidische Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ist der Realteil des hermiteschen Standard-Skalarproduktes in $\mathbb{C}^1$. Deshalb wird für ein Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$ das duale Gitter $\Lambda^\#$ definiert durch

$$\Lambda^\# := \{z \in \mathbb{C} :\ 2\mathrm{Re}(z\overline{a}) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } a \in \Lambda\}.$$

*Anmerkung:* Das duale Gitter wird manchmal auch durch

$$\Lambda^\circ := \{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}(z\overline{a}) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } a \in \Lambda\}$$

definiert. Offenbar ist $2\Lambda^\# = \Lambda^\circ$. Dies führt bei den entsprechenden Fourierentwicklungen zu um den Faktor 2 verschiedenen Darstellungen.

Für ein Element $z$ in $K$ wird die Norm definiert durch

$$\mathcal{N}(z) := z\overline{z}.$$

Dabei gilt

$$\mathcal{N}(z) \in \mathbb{Z} \text{ für } z \in \mathfrak{o}_K \text{ und } \mathcal{N}(z) = 1 \Leftrightarrow z \in \mathfrak{o}_K^*.$$

Eine Teilmenge $A \subset K$, $A \neq \{0\}$, heißt ein (gebrochenes) Ideal wenn gilt:
a) $A$ ist eine additive Gruppe,
b) $a \in A,\ b \in \mathfrak{o}_K \Rightarrow ab \in A$,
c) es existiert ein Element $a \in \mathfrak{o}_K \setminus \{0\}$ mit $aA \subset \mathfrak{o}_K$.

Ein Ideal $A$ heißt ganz, wenn $A \subset \mathfrak{o}_K$ ist.
Ein Hauptideal ist ein Ideal $A$, welches von einem Element erzeugt wird. Es existiert also ein $a \in A$ mit $A = (a) := a\mathfrak{o}_K$.
Das Inverse $A^{-1}$ eines Ideals $A$ ist gegeben durch $A^{-1} := \{z \in K :\ zA \subset \mathfrak{o}_K\}$.
Es ist wieder ein Ideal.

Es sei $\delta_K = (\omega_D - \overline{\omega_D})\mathfrak{o}_K = \sqrt{D_K}\mathfrak{o}_K$ die Differente des Zahlkörpers $K$. Dann ist

$$\delta_K^{-1} = \mathfrak{o}_K^{\#} = \tau_D \mathfrak{o}_K$$

mit

$$\tau_D := \frac{1}{\sqrt{D_K}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{D}}, & \text{falls } D \equiv 1 \mod 4, \\ \frac{1}{2\sqrt{D}}, & \text{falls } D \equiv 2,3 \mod 4. \end{cases}$$

Wir betrachten nun im Folgenden Untergruppen von $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{C}) := \mathrm{SL}(2;\mathbb{C}) / \{\pm I\}$, wobei $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$ gemäß Lemma 1.1.2 auf $\mathbb{H}$ operiert.

**Lemma 1.2.2.** *Für* $\mathrm{PSL}(2;\mathfrak{o}_K) := \mathrm{SL}(2;\mathfrak{o}_K) / \{\pm I\} \subset \mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$ *gilt:*
*a)* $\mathrm{PSL}(2;\mathfrak{o}_K)$ *ist eine diskrete Untergruppe von* $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$.
*b)* $\mathrm{PSL}(2;\mathfrak{o}_K)$ *ist kofinit, aber nicht kokompakt.*

*Beweis.* [9], S. 311, Theorem 1.1. □

Für ein ganzes Ideal $A \subset \mathfrak{o}_K$ seien

$$\Gamma_0(A) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2;\mathfrak{o}_K) :\ c \in A \right\}$$

und entsprechend

$$\Gamma^0(A) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2;\mathfrak{o}_K) :\ b \in A \right\}.$$

Als Untergruppen von $\mathrm{PSL}(2;\mathfrak{o}_K)$ vom endlichen Index (vgl. [15], S. 22) sind sie ebenfalls kofinit.
Für $N \in \mathfrak{o}_K$ setzen wir ferner

$$\Gamma_0(N) := \Gamma_0(N\mathfrak{o}_K) \text{ und } \Gamma^0(N) := \Gamma^0(N\mathfrak{o}_K).$$

**Definition 1.2.3.** *Es sei* $\zeta \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *Fixpunkt eines parabolischen Elements einer diskreten Untergruppe* $\Gamma$ *von* $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$. *Ferner sei* $\zeta = M\infty$ *mit* $M \in \mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$. *Ist nun* $\left\{ z \in \mathbb{C} : \left( \begin{smallmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \in M^{-1}\Gamma M \right\}$ *ein Gitter in* $\mathbb{C}$, *so heißt* $\zeta$ *eine Spitze von* $\Gamma$.

**Definition 1.2.4.** *Für eine Funktion* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ *und* $M \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ *bzw.* $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$ *werde der Peterssonsche Strichoperator* $|_M$ *definiert durch*

$$f|_M(P) := f(MP) \text{ mit } P \in \mathbb{H}.$$

*Ist* $\Gamma$ *eine diskrete Untergruppe von* $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$, *so heißt* $f$ $\Gamma$-invariant, *wenn*

$$f|_M = f \text{ für alle } M \in \Gamma$$

*ist. Gilt für einen Charakter* $\nu$ *zur Gruppe* $\Gamma$

$$f|_M = \nu(M)f \text{ für alle } M \in \Gamma,$$

*so heißt* $f$ im Wesentlichen $\Gamma$-invariant.

**Satz 1.2.5.** *Es sei* $\Lambda$ *ein Gitter in* $\mathbb{C}$ *und* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ *eine* $\Lambda$*-invariante* $C^2$*-Funktion, d.h.* $f(P+\gamma) = f(P)$ *für alle* $\gamma \in \Lambda$. *Weiterhin sei* $f$ *eine Eigenfunktion des Laplace-Beltrami-Operators zum Eigenwert* $\lambda = 1 - s^2 \in \mathbb{C}$ $(s \in \mathbb{C})$. *Hat nun* $f(z+rj)$ *polynomiales Wachstum für* $r \to \infty$, *d.h. existiert eine Konstante* $c$ *mit*

$$f(z+rj) = O(r^c) \text{ für } r \to \infty$$

*gleichmäßig bezüglich* $z \in \mathbb{C}$, *so besitzt* $f$ *eine Fourier-Entwicklung der Form*

$$f(z+rj) = \alpha(r,s) + \sum_{0 \neq \mu \in \Lambda^\#} a_\mu r K_s(4\pi|\mu|r) e^{4\pi i \mathrm{Re}(\overline{\mu} z)}.$$

*Dabei ist* $K_s$ *die modifizierte Besselfunktion wie in* [21], *S. 66 und*

$$\alpha(r,s) := \begin{cases} a_0 r^{1+s} + b_0 r^{1-s} & \text{für } s \neq 0, \\ a_0 r + b_0 r \log(r) & \text{für } s = 0. \end{cases}$$

*Beweis.* [9], S. 105, Theorem 3.1.

□

**Definition 1.2.6.** *Es sei* $\Gamma$ *eine diskrete Untergruppe von* $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$.
$f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ *heißt eine* automorphe Form (bzw. verallgemeinerte automorphe Form) *zur Gruppe* $\Gamma$ *mit Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{C}$, *wenn gilt:*

1. *$f$ ist $\Gamma$-invariant (bzw. im Wesentlichen $\Gamma$-invariant),*

2. *$f \in C^2(\mathbb{H})$ und $f$ genügt der Differentialgleichung $-\Delta f = \lambda f$,*

3. *$f$ ist von polynomialem Wachstum in allen Spitzen von $\Gamma$, d.h. für jede Spitze $\zeta = A^{-1}\infty$, $A \in \mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$, von $\Gamma$ gibt es eine Konstante $c>0$ mit*

$$f(A^{-1}(z+rj)) = O(r^c) \text{ für } r \to \infty$$

*gleichmäßig bezüglich $z \in \mathbb{C}$.*

**Definition 1.2.7.** *Es sei $\Gamma$ eine kofinite Untergruppe von $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$ und $f$ eine (verallgemeinerte) automorphe Form zur Gruppe $\Gamma$ mit Eigenwert $\lambda \neq 0$. Verschwindet der nullte Fourier-Koeffizient $\alpha(r,s)$ in der Fourier-Entwicklung von $f$ zu jeder Spitze von $\Gamma$, so heißt $f$ eine (verallgemeinerte) Spitzenform zu $\Gamma$ mit Eigenwert $\lambda$.*

## 1.3 Quaternionenalgebren

Wir erinnern nun an die Definition der Quaternionenalgebren und ihre wichtigsten Eigenschaften. Dabei beschränken wir uns im Hinblick auf spätere Anwendungen gleich auf Quaternionenalgebren über dem imaginär-quadratischen Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Mit Hilfe solcher Algebren konstruieren wir kokompakte Untergruppen von $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$. Weitergehende Informationen finden sich z.B. in [5], [8] und [35].

**Definition 1.3.1.** *Es seien $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ und $q, r \in \mathfrak{o}_K \setminus \{0\}$. Die Quaternionenalgebra*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}[q,r]$$

*ist definiert als 4-dimensionaler $K$-Vektorraum mit Basis $1, J_1, J_2, J_3$, welcher mit der durch*

$$J_1^2 = q, \quad , J_2^2 = r, \quad J_1 J_2 = -J_2 J_1 = J_3$$

*induzierten Multiplikation versehen ist.*

$\mathcal{A}$ ist eine assoziative, zentral einfache $K$-Algebra. Sie ist entweder eine Divisionsalgebra (d.h. ein Schiefkörper) oder isomorph zur vollen Matrixalgebra $\mathrm{M}(2;K)$.
$\mathcal{A}$ lässt sich mittels des $K$-Algebra-Monomorphismus

$$\Psi : \mathcal{A}[q,r] \to \mathrm{M}(2;\mathbb{C})$$

$$x_0 + x_1 J_1 + x_2 J_2 + x_3 J_3 \to \begin{pmatrix} x_0 + x_1\sqrt{q} & \sqrt{r}(x_2 + x_3\sqrt{q}) \\ \sqrt{r}(x_2 - x_3\sqrt{q}) & x_0 - x_1\sqrt{q} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

als eine Unteralgebra von $\mathrm{M}(2;\mathbb{C})$ auffassen, wobei die Wurzeln beliebig aus $\mathbb{C}$ gewählt sind.

Die Konjugation $^-$ auf $\mathcal{A}[q,r]$ ist erklärt durch

$$^- : \mathcal{A}[q,r] \to \mathcal{A}[q,r], \quad \overline{x} = \overline{x_0 + x_1 J_1 + x_2 J_2 + x_3 J_3} := x_0 - x_1 J_1 - x_2 J_2 - x_3 J_3.$$

Für $x, y \in \mathcal{A}$ ist $\overline{yx} = \overline{x}\,\overline{y}$.
Mittels der obigen Konjugation werden wir nun die (reduzierte) Norm n und die (reduzierte) Spur tr auf $\mathcal{A}$ definieren:

$$\mathrm{n} : \mathcal{A}[q,r] \to K, \ \mathrm{n}(x) := x\overline{x} = x_0^2 - qx_1^2 - rx_2^2 + qrx_3^2 = \det \Psi(x),$$

und

$$\mathrm{tr} : \mathcal{A}[q,r] \to K, \ \mathrm{tr}(x) := x + \overline{x} = 2x_0 = \mathrm{Tr}(\Psi(x)).$$

Die Normfunktion ist multiplikativ auf $\mathcal{A}$, d.h. für $x, y \in \mathcal{A}$ ist

$$\mathrm{n}(xy) = \mathrm{n}(x)\mathrm{n}(y) = \mathrm{n}(y)\mathrm{n}(x) = \mathrm{n}(yx).$$

Von zentraler Bedeutung in der weiteren Arbeit sind spezielle Unterringe in $\mathcal{A}[q,r]$, die sogenannten Ordnungen:

**Definition 1.3.2.** *Ein Unterring (mit Einselement) $\mathcal{R}$ in $\mathcal{A}[q,r]$, der eine $K$-Basis von $\mathcal{A}[q,r]$ enthält, heißt eine* Ordnung *in $\mathcal{A}[q,r]$, wenn er ein $\mathfrak{o}_K$-Untermodul von $\mathcal{A}[q,r]$ ist und als $\mathfrak{o}_K$-Modul endlich erzeugt wird.*

**Definition und Lemma 1.3.3.** *Es sei $\mathcal{A}[q,r]$ wie in Definition 1.3.1 eine Quaternionenalgebra über $K$ mit Basis $1, J_1, J_2, J_3$. Dann ist*

$$\mathcal{O} := \{x = x_0 + x_1 J_1 + x_2 J_2 + x_3 J_3 \in \mathcal{A}[q,r];\ x_i \in \mathfrak{o}_K\}$$

*eine Ordnung in $\mathcal{A}[q,r]$.*

*Beweis.* Klar.

□

**Lemma 1.3.4.** *Es sei $\mathcal{R}$ eine Ordnung. Dann gilt für $x \in \mathcal{R}$*

$$\mathrm{n}(x) \in \mathfrak{o}_K\ ,\ \mathrm{tr}(x) \in \mathfrak{o}_K,$$

*also auch*

$$\overline{x} \in \mathcal{R}.$$

*Beweis.* [35], S. 19f., insbesondere Lemme 4.1.

□

**Definition 1.3.5.** *Es sei $\mathcal{A}[q,r]$ eine Quaternionenalgebra über $K$. Für eine Ordnung $\mathcal{R}$ in $\mathcal{A}[q,r]$ heißt dann*

$$\Gamma_{\mathcal{R}} := \{x \in \mathcal{R};\ \mathrm{n}(x) = 1\}$$

*die Norm-1-Gruppe von $\mathcal{R}$. Mittels der Einbettung $\Psi$ aus (1.2) fassen wir $\Gamma_{\mathcal{R}}$ gegebenenfalls als Untergruppe von $\mathrm{M}(2;\mathbb{C})$ auf.*

*Anmerkung:* $\Gamma_{\mathcal{R}}$ ist offensichtlich eine Gruppe, da für jedes $x \in \Gamma_{\mathcal{R}}$ gilt $x^{-1} = \overline{x} \in \mathcal{R}$.

**Satz 1.3.6.** *Für die Norm-1-Gruppe $\Gamma_{\mathcal{R}}$ einer Ordnung $\mathcal{R}$ in $\mathcal{A}[q,r]$ gilt:*
*a) $\Gamma_{\mathcal{R}}$ ist eine diskrete Untergruppe von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$,*
*b) $\Gamma_{\mathcal{R}}$ ist kofinit,*
*c) $\Gamma_{\mathcal{R}}$ ist genau dann kokompakt, wenn $\mathcal{A}[q,r]$ eine Divisionsalgebra ist.*

*Beweis.* [9], S. 446 Theorem 1.2. □

**Voraussetzung 1.3.7.** *Im Hinblick auf Satz 1.3.6 gilt von nun an für die* gesamte *weitere Arbeit:*

$$\mathcal{A}[q,r] \text{ sei eine Divisionsalgebra.}$$

*Dies ist gleichbedeutend mit: Für jedes $x \in \mathcal{A}[q,r]$ gilt*

$$\mathrm{n}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

**Lemma und Definition 1.3.8.** *Es sei $\mathcal{R}$ eine Ordnung in der Quaternionenalgebra $\mathcal{A}[q,r]$ über $K$. Für $N \in \mathfrak{o}_K$ zerfallen die Mengen*

$$\mathcal{R}^{(N)} := \{x \in \mathcal{R};\ \mathrm{n}(x) = N\}$$

*bezüglich der Linksmultiplikation mit Elementen aus $\Gamma_{\mathcal{R}}$ als Äquivalenzrelation in endlich viele Rechtsnebenklassen $\Gamma_{\mathcal{R}}\xi_{kN}$, $k \in \{1, \dots, d(N)\}$. Es gilt also*

$$\mathcal{R}^{(N)} = \sum_{k=1}^{d(N)} \Gamma_{\mathcal{R}}\xi_{kN}$$

*mit $d(N) = 0$ für $\mathcal{R}^{(N)} = \varnothing$.*

*Beweis.* Das ist die Aussage von [9], S. 450, Lemma 1.4. □

# Kapitel 2

## Thetafunktionen auf $\mathbb{H}$

### 2.1 Thetatransformationen

In diesem Abschnitt stellen wir zwei leicht verschiedene Familien von Thetafunktionen und ihr Transformationsverhalten unter gewissen Untergruppen von $\mathrm{SL}(m;\mathfrak{o}_K)$ vor.

**Definition 2.1.1.** *Eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(m;K) \cap \mathrm{M}(m;\mathfrak{o}_K)$, $m \in \mathbb{N}$, heißt* gerade, *falls $S$ symmetrisch ist und die Diagonaleinträge von $S$ in $2\mathfrak{o}_K$ liegen.*

**Definition 2.1.2.** *Es sei $S \in \mathrm{GL}(m;K) \cap \mathrm{M}(m;\mathfrak{o}_K)$ gerade. Die Matrix $S$ hat die* Stufe $\mathcal{N}$, *$\mathcal{N} \in \mathfrak{o}_K$, falls die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:*

1. *$\mathcal{N}S^{-1} \in \mathrm{GL}(m;K) \cap \mathrm{M}(m;\mathfrak{o}_K)$ und $\mathcal{N}S^{-1}$ ist gerade;*
2. *für alle $M \in \mathfrak{o}_K$ mit geradem $MS^{-1} \in \mathrm{GL}(m;K) \cap \mathrm{M}(m;\mathfrak{o}_K)$ ist $M \in \mathcal{N}\mathfrak{o}_K$.*

**Definition 2.1.3.** *Es sei $S \in \mathrm{GL}(m;K) \cap \mathrm{M}(m;\mathfrak{o}_K)$ gerade. Ferner sei $R$ eine komplexe Majorante von $S$, d.h.*

$$R^t = \overline{R} > 0 \textit{ und}$$

$$\overline{R}S^{-1}R = \overline{S}.$$

*Für ein Ideal $A \subset \mathfrak{o}_K$ und $\zeta = u + vj \in \mathbb{H}$ definieren wir die nachfolgende Thetafunktion $\theta_{S,R}(\zeta)$ durch*

$$\theta_{S,R}(\zeta) := \sum_{n \in A^m} e^{\pi i \left(uS[n] + \overline{u}\overline{S}[\overline{n}] + 2ivR\{n\}\right)},$$

*wobei $S[n] := n^t S n$ ist und $R\{n\} := n^t R \overline{n}$.*

*Anmerkung*: Da $R$ positiv definit ist, konvergiert $\theta_{S,R}(\zeta)$ offensichtlich kompakt gleichmäßig absolut auf $\mathbb{H}$.

**Satz 2.1.4 (Richter).** *Es seien die Bezeichnungen wie in der obigen Definition. Ferner seien $\mathcal{N}$ die Stufe von $S$ und $\delta_K$ die Differente von $K$. Dann gilt:*

*a)* $\theta_{S,R}(\zeta+t) = \theta_{S,R}(\zeta)$ *für* $t \in \mathfrak{o}_K$,

*b)* $\theta_{S,R}(M\zeta) = \nu_S(M)\|c\zeta+d\|^m\theta_{S,R}(\zeta)$ *für* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(A^2\delta_K\mathcal{N})$,

*wobei $\nu_S(M)$ eine achte Einheitswurzel ist, die von $M$ und $S$ abhängt.*

*Beweis.* Da $R$ eine Majorante von $S$ ist, existiert nach [32], S. 365 ein $L \in \mathrm{GL}(m;\mathbb{C})$ mit $S = L^tL$ und $R = L^t\overline{L}$.
Der Beweis ist dann (unter Beachtung der leicht unterschiedlichen Definition von $\theta_{S,R}$) ein Spezialfall von [26], S. 35ff.. Man vergleiche auch [27].

□

**Definition 2.1.5.** *Es sei $S$ wie oben gerade und $R$ eine komplexe Majorante von $S$. Ferner seien $\tau_D$ die oben gewählte Erzeugende von $\mathfrak{o}_K^\#$ und $\zeta = u+vj \in \mathbb{H}$. Für $\gamma \in \mathfrak{o}_K$ seien $A := \gamma\mathfrak{o}_K$ und $\gamma^* := \frac{\tau_D}{\gamma^2}$. Schließlich gelte $\psi \in S^{-1}A^m$. Wir definieren damit die Thetafunktion $\Theta^\psi_{S,R}(\zeta)$ durch*

$$\Theta^\psi_{S,R}(\zeta) := \sum_{n\in A^m} e^{\pi i\left(u\gamma^* S[n+\psi]+\overline{u}\overline{\gamma^* S}[\overline{n}+\overline{\psi}]+2iv|\gamma^*|R\{n+\psi\}\right)}.$$

Für die soeben definierte Thetafunktion stellt nun der nachfolgende Satz eine Erweiterung der Ergebnisse von C.L. Siegel in [32], S. 369, Hilfssatz 1 auf beliebige imaginär-quadratische Zahlkörper dar. Ferner erfolgt die Summation über beliebige ganze Hauptideale und nicht nur über den Ring der ganzen Zahlen.

**Satz 2.1.6 (Transformationssatz nach Siegel).** *Es seien die Bezeichnungen wie in Definition 2.1.5. Für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathfrak{o}_K)$ gilt dann:*

*a)* *Für $c = 0$ ist $M\zeta = (a^2u+ab)+|a|^2vj$ mit $a \in \mathfrak{o}_K^*$ und somit*

$$\Theta^\psi_{S,R}(M\zeta) = e^{\pi i 2\mathrm{Re}(ab\gamma^* S[\psi])}\Theta^{a\psi}_{S,R}(\zeta).$$

*b)* *Für $c \neq 0$ ist*

$$\Theta^\psi_{S,R}(M\zeta) = \|c\zeta+d\|^m|\det S|^{-1}|c|^{-m}\sum_{\omega\in S^{-1}A^m \bmod A^m}\lambda(S\omega,\psi)\Theta^\omega_{S,R}(\zeta)$$

*mit*

$$\lambda(r,\psi) := \sum_{g\in A^m \bmod cA^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[g+\psi]+\frac{d}{c}\gamma^* S^{-1}[r]+\frac{2}{c}\gamma^*(g+\psi)^t r\right)}.$$

*Ist zusätzlich $cS^{-1}$ gerade, so gilt insbesondere*

$$\begin{aligned}&\Theta^{\psi}_{S,R}(M\zeta)\\ &\qquad = \|c\zeta+d\|^m |\det S|^{-1}|c|^{-m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}(\gamma^* abS[\psi])} \sum_{g\in A^m \bmod cA^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}(\gamma^* \frac{a}{c} S[g])}\Theta^{a\psi}_{S,R}(\zeta).\end{aligned}$$

*Beweis.* Für $\zeta = u + jv$ setzen wir

$$\hat{\zeta} := M\zeta$$

und

$$U := \begin{pmatrix} \gamma^* uS & iv|\gamma^*|R \\ iv|\gamma^*|\overline{R} & \overline{\gamma^*}\overline{u}\overline{S}\end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2m,\mathbb{C}).$$

Ferner sei für $x \in \mathbb{C}^m$

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} x \\ \overline{x}\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2m}.$$

Somit gilt unter Beachtung von $\overline{R} = R^t$

$$U[\underline{n+\psi}] = \gamma^* uS[n+\psi] + \overline{\gamma^*}\overline{u}\overline{S}[\overline{n+\psi}] + 2iv|\gamma^*|R\{n+\psi\},$$

also

$$\Theta^{\psi}_{S,R}(\hat{\zeta}) = \sum_{n\in A^m} e^{\pi i U[\underline{n+\psi}]}.$$

a) Es ist

$$\begin{aligned}\Theta^{\psi}_{S,R}(\hat{\zeta}) &= \sum_{n\in A^m} e^{\pi i\left(\gamma^*(a^2u+ab)S[n+\psi]+\overline{\gamma^*}\,\overline{(a^2u+ab)}\,\overline{S}[\overline{n+\psi}]+2iv|a|^2|\gamma^*|R\{n+\psi\}\right)}\\ &= \sum_{n\in A^m} e^{\pi i\begin{pmatrix}(a^2u+ab)\gamma^* S & iv|a|^2|\gamma^*|R\\ iv|a|^2|\gamma^*|\overline{R} & \overline{(a^2u+ab)\gamma^* S}\end{pmatrix}[\underline{n+\psi}]}\\ &= \sum_{n\in A^m} e^{\pi i U[\underline{a(n+\psi)}]} e^{\pi i 2\mathrm{Re}(ab\gamma^* S[n+\psi])}\\ &= \sum_{n\in A^m} e^{\pi i U[\underline{an+a\psi}]} e^{\pi i 2\mathrm{Re}(ab\gamma^* S[\psi])} e^{2\pi i 2\mathrm{Re}\left(\gamma^* ab\left[n^t S\psi+\frac{1}{2}S[n]\right]\right)}.\end{aligned}$$

Hier sind $n^t S\psi \in \gamma^2\mathfrak{o}_K$ und $\frac{1}{2}S[n] \in \gamma^2\mathfrak{o}_K$. Da $\tau_D \in \mathfrak{o}_K^{\#}$ ist, gilt also $2\mathrm{Re}\left(\gamma^* ab\left[n^t S\psi + \frac{1}{2}S[n]\right]\right) \in \mathbb{Z}$. Wegen $a \in \mathfrak{o}_K^*$ ergibt dies

$$\Theta^{\psi}_{S,R}(\hat{\zeta}) = \sum_{n\in A^m} e^{\pi i U[\underline{n+a\psi}]} e^{\pi i 2\mathrm{Re}(ab\gamma^* S[\psi])} = e^{\pi i 2\mathrm{Re}(ab\gamma^* S[\psi])}\Theta^{a\psi}_{S,R}(\zeta).$$

b) Da $c \neq 0$ ist, schreiben wir

$$\hat{\zeta} = \frac{a}{c} + c^{-1}\zeta_1 c^{-1} \text{ mit } \zeta_1 := -\zeta_2^{-1} \text{ und } \zeta_2 := \zeta + \frac{d}{c}.$$

Setzen wir $\hat{\zeta} = \hat{u} + \hat{v}j$ und $\zeta_1 = u_1 + v_1 j$, so folgt

$$\hat{u} = \frac{a}{c} + \frac{1}{c^2}u_1 \text{ und } \hat{v} = \frac{1}{|c|^2}v_1,$$

also

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \gamma^*\left(\frac{a}{c} + \frac{1}{c^2}u_1\right)S & i\frac{1}{|c|^2}v_1|\gamma^*|R \\ i\frac{1}{|c|^2}v_1|\gamma^*|\overline{R} & \overline{\gamma^*\left(\frac{a}{c} + \frac{1}{c^2}u_1\right)S} \end{pmatrix}.$$

Mit $U_1 := \begin{pmatrix} \gamma^* u_1 S & iv_1|\gamma^*|R \\ iv_1|\gamma^*|\overline{R} & \overline{\gamma^* u_1 S} \end{pmatrix}$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \Theta^{\psi}_{S,R}(\hat{\zeta}) &= \sum_{n\in A^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[n+\psi]\right)} e^{\pi i U_1\left[\frac{1}{c}(n+\psi)\right]} \\ &= \sum_{g\in A^m \bmod cA^m}\ \sum_{r\in A^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[rc+g+\psi]\right)} e^{\pi i U_1\left[r+\frac{g+\psi}{c}\right]}. \end{aligned}$$

Hier ist

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[rc+g+\psi]\right) &= 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^*\left[S[rc] + 2(rc)^t S(g+\psi) + S[g+\psi]\right]\right) \\ &= 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[g+\psi]\right) \\ &\quad +2\cdot \underbrace{2\mathrm{Re}\left(\gamma^*\left[\frac{1}{2}ac\overbrace{S[r]}^{\in 2\gamma^2\mathfrak{o}_K} + \overbrace{ar^t S(g+\psi)}^{\in\gamma^2\mathfrak{o}_K}\right]\right)}_{\in\mathbb{Z},\text{ da } \tau_D\in\mathfrak{o}_K^{\#}}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\Theta^{\psi}_{S,R}(\hat{\zeta}) = \sum_{g\in A^m \bmod cA^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[g+\psi]\right)} \sum_{r\in A^m} e^{\pi i U_1\left[r+\frac{g+\psi}{c}\right]}.$$

Hierbei ist nach der verallgemeinerten Theta-Transformationsformel aus Lemma 2.1.8

$$\begin{aligned} &\sum_{r\in A^m} e^{\pi i U_1\left[r+\frac{g+\psi}{c}\right]} \\ &\qquad = |\det S|^{-1}\left\|\gamma^* u_1 + |\gamma^*|v_1 j\right\|^{-m}|\gamma^*|^m \sum_{r\in A^m} e^{-\pi i U_1^{-1}[\overline{\gamma^* r}] + 2\pi i\left(\overline{\frac{g+\psi}{c}}\right)^t(\overline{\gamma^* r})}. \end{aligned}$$

Setzen wir für zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}(m;\mathbb{C})$

$$A[B] := B^t AB,$$

so gilt

$$U_1 \quad = \quad \begin{pmatrix} u_1 S & iv_1 R \\ iv_1 \overline{R} & \overline{u_1} \overline{S} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma^*} I_m & 0 \\ 0 & \overline{\sqrt{\gamma^*} I_m} \end{pmatrix} \right].$$

Weil $u_2 + v_2 j := \zeta_2 = -\frac{\overline{\zeta_1}}{\mathrm{n}(\zeta_1)} = \frac{-\overline{u_1} + v_1 j}{\mathrm{n}(\zeta_1)}$ ist, und wir somit nach [32], S. 369 oben

$$-\begin{pmatrix} u_1 S & iv_1 R \\ iv_1 \overline{R} & \overline{u_1} \overline{S} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} u_2 S^{-1} & iv_2 \overline{R}^{-1} \\ iv_2 R^{-1} & \overline{u_2} \overline{S}^{-1} \end{pmatrix}$$

erhalten, folgt

$$\begin{aligned} -U_1^{-1} &= \begin{pmatrix} u_2 S^{-1} & iv_2 \overline{R}^{-1} \\ iv_2 R^{-1} & \overline{u_2} \overline{S}^{-1} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\gamma^*}} I_m & 0 \\ 0 & \frac{1}{\overline{\sqrt{\gamma^*}}} I_m \end{pmatrix} \right] \\ &= \left( \begin{pmatrix} \frac{d}{c} S^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{\left(\frac{d}{c}\right)} \overline{S}^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u S^{-1} & iv \overline{R}^{-1} \\ iv R^{-1} & \overline{u} \overline{S}^{-1} \end{pmatrix} \right) \left[ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\gamma^*}} I_m & 0 \\ 0 & \frac{1}{\overline{\sqrt{\gamma^*}}} I_m \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Dies führt uns zu

$$\begin{aligned} -U_1^{-1}[\underline{\gamma^* r}] &= \begin{pmatrix} \frac{d}{c} S^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{\left(\frac{d}{c}\right)} \overline{S}^{-1} \end{pmatrix} [\underline{\sqrt{\gamma^*} r}] + \begin{pmatrix} u S^{-1} & iv \overline{R}^{-1} \\ iv R^{-1} & \overline{u} \overline{S}^{-1} \end{pmatrix} [\underline{\sqrt{\gamma^*} r}] \\ &= 2\mathrm{Re}\left( \gamma^* \frac{d}{c} S^{-1}[r] \right) + 2\mathrm{Re}\left( u\gamma^* S^{-1}[r] \right) + 2iv|\gamma^*| \overline{R}^{-1} \{r\} \\ &= 2\mathrm{Re}\left( \gamma^* \frac{d}{c} S^{-1}[r] \right) + 2\mathrm{Re}\left( u\gamma^* S[S^{-1} r] \right) + 2iv|\gamma^*| R \left\{ S^{-1} r \right\} \\ &= 2\mathrm{Re}\left( \gamma^* \frac{d}{c} S^{-1}[r] \right) + U[\underline{S^{-1} r}]. \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} \left\| \gamma^* u_1 + |\gamma^*| v_1 j \right\|^{-m} |\gamma^*|^m &= \left( |\gamma^* u_1|^2 + |\gamma^* v_1|^2 \right)^{\frac{-m}{2}} |\gamma^*|^m \\ &= \|u_1 + v_1 j\|^{-m} \\ &= \|\zeta_1\|^{-m} \\ &= \|\zeta_2\|^m \\ &= |c|^{-m} \|c\zeta + d\|^m \end{aligned}$$

ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sum_{r\in A^m} e^{\pi i U_1\left[\underline{r+\frac{g+\psi}{c}}\right]}\\
&\quad= |\det S|^{-1}\,\|c\zeta+d\|^m |c|^{-m} \sum_{r\in A^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\gamma^*\frac{d}{c}S^{-1}[r]\right)+\pi i U\left[\underline{S^{-1}r}\right]+\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{2}{c}\gamma^*(g+\psi)^t r\right)}.
\end{aligned}$$

Für $\Theta^{\psi}_{S,R}(\hat{\zeta})$ folgt also mit den im Satz definierten $\lambda(r,\psi)$

$$\begin{aligned}
\Theta^{\psi}_{S,R}(\hat{\zeta}) &= |\det S|^{-1}\,\|c\zeta+d\|^m |c|^{-m}\\
&\quad\cdot \sum_{g\in A^m \bmod cA^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[g+\psi]\right)} \sum_{r\in A^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{d}{c}\gamma^* S^{-1}[r]+\frac{2}{c}\gamma^*(g+\psi)^t r\right)} e^{\pi i U\left[\underline{S^{-1}r}\right]}\\
&= |\det S|^{-1}\,\|c\zeta+d\|^m |c|^{-m} \sum_{r\in A^m} \lambda(r,\psi) e^{\pi i U\left[\underline{S^{-1}r}\right]}\\
&= |\det S|^{-1}\,\|c\zeta+d\|^m |c|^{-m} \sum_{n\in A^m}\ \sum_{\omega\in S^{-1}A^m \bmod A^m} \lambda(S(n+\omega),\psi) e^{\pi i U\left[\underline{n+\omega}\right]}.
\end{aligned}$$

Unter Beachtung von $ad-bc=1$ und $nd\in A^m$ ist nun

$$\begin{aligned}
\lambda(S(n+\omega),\psi) &= \sum_{g\in A^m \bmod cA^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[g+\psi]+\frac{d}{c}\gamma^* S[n+\omega]+\frac{2}{c}\gamma^*(g+\psi)^t S(n+\omega)\right)}\\
&= \sum_{g\in A^m \bmod cA^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[g+\psi]+\frac{d}{c}\gamma^*(ad-bc)S[n]+2\frac{d}{c}\gamma^*\omega^t Sn\right)}\\
&\qquad\qquad \cdot e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{d}{c}\gamma^* S[\omega]+\frac{2}{c}\gamma^*(ad-bc)(g+\psi)^t Sn+\frac{2}{c}\gamma^*(g+\psi)^t S\omega\right)}\\
&= \sum_{g\in A^m \bmod cA^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[g+\psi]+\frac{a}{c}\gamma^* S[nd]-\gamma^* bdS[n]+\frac{2}{c}\gamma^*(nd)^t S\omega\right)}\\
&\qquad \cdot e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{d}{c}\gamma^* S[\omega]+2\frac{a}{c}\gamma^*(g+\psi)^t S(nd)-2\gamma^* b(g+\psi)^t Sn+\frac{2}{c}\gamma^*(g+\psi)^t S\omega\right)}\\
&= \sum_{g\in A^m \bmod cA^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[g+\psi+nd]+\frac{2}{c}\gamma^*(g+\psi+nd)^t S\omega+\frac{d}{c}\gamma^* S[\omega]\right)}\\
&\qquad\qquad\qquad \cdot e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(-\gamma^* bdS[n]-2\gamma^* bn^t S(g+\psi)\right)}\\
&= \sum_{g\in A^m \bmod cA^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[g+\psi]+\frac{d}{c}\gamma^* S^{-1}[S\omega]+\frac{2}{c}\gamma^*(g+\psi)^t S\omega\right)}\\
&\qquad\qquad\qquad \cdot e^{-2\pi i\,\underbrace{2\mathrm{Re}\left(\gamma^*\left(\frac{1}{2}bd\overbrace{S[n]}^{\in 2\gamma^2\mathfrak{o}_K}+b\overbrace{n^t S(g+\psi)}^{\in\gamma^2\mathfrak{o}_K}\right)\right)}_{\in\mathbb{Z}}}\\
&= \lambda(S\omega,\psi).
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\Theta^{\psi}_{S,R}(\hat{\zeta}) = |\det S|^{-1} \|c\zeta + d\|^m |c|^{-m} \sum_{\omega \in S^{-1}A^m \bmod A^m} \lambda(S\omega, \psi) \sum_{n \in A^m} e^{\pi i U\boxed{[n+\omega]}}$$
$$= |\det S|^{-1} \|c\zeta + d\|^m |c|^{-m} \sum_{\omega \in S^{-1}A^m \bmod A^m} \lambda(S\omega, \psi) \Theta^{\omega}_{S,R}(\zeta).$$

Es sei nun $cS^{-1}$ gerade.
Für beliebiges $l \in A^m$ erhalten wir mit der Substitution $g = g_0 + cS^{-1}l$

$$\lambda(r,\psi) = \sum_{g_0 \in A^m \bmod cA^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[g_0 + cS^{-1}l + \psi] + \frac{d}{c}\gamma^* S^{-1}[r] + \frac{2}{c}\gamma^*(g_0 + cS^{-1}l + \psi)^t r\right)}$$
$$= \sum_{g_0 \in A^m \bmod cA^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[g_0+\psi] + \frac{d}{c}\gamma^* S^{-1}[r] + \frac{2}{c}\gamma^*(g_0+\psi)^t r\right)}$$
$$\cdot e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(2\frac{a}{c}\gamma^*(g_0+\psi)^t S(cS^{-1}l) + \frac{a}{c}\gamma^* S[cS^{-1}l] + \frac{2}{c}\gamma^* r^t cS^{-1}l\right)}$$
$$= \sum_{g_0 \in A^m \bmod cA^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[g_0+\psi] + \frac{d}{c}\gamma^* S^{-1}[r] + \frac{2}{c}\gamma^*(g_0+\psi)^t r\right)}$$
$$\cdot e^{2\pi i \underbrace{2\mathrm{Re}\left(\gamma^*\left(a g_0^t l + \frac{1}{2} a c S^{-1}[l]\right)\right)}_{\in \mathbb{Z},\text{ da } cS^{-1} \text{ gerade}}} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(2\gamma^* a\psi^t l + 2\gamma^* r^t S^{-1} l\right)}$$
$$= \lambda(r,\psi) e^{2\pi i 2\mathrm{Re}\left(\gamma^* l^t (a\psi + S^{-1}r)\right)}.$$

Somit folgt

$$\lambda(r,\psi) = 0, \text{ falls } (a\psi + S^{-1}r) \not\equiv 0 \mod A^m,$$

bzw.

$$\lambda(S\omega,\psi) = 0, \text{ falls } \omega \not\equiv -a\psi \mod A^m.$$

Es sei nun also $\omega \equiv -a\psi \mod A^m$.
Da $\lambda(S\omega,\psi) = \lambda(S(\omega+n),\psi)$ für alle $n \in A^m$ ist, ergibt sich

$$\lambda(S\omega,\psi) = \lambda(S(-a\psi),\psi)$$
$$= \sum_{g \in A^m \bmod cA^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[g+\psi] + \frac{d}{c}\gamma^* S[-a\psi] + \frac{2}{c}\gamma^*(g+\psi)^t S(-a\psi)\right)}$$
$$= \sum_{g \in A^m \bmod cA^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[g]\right)} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{d}{c}\gamma^* S[-a\psi] - \frac{a}{c}\gamma^* S[\psi]\right)}$$
$$= \sum_{g \in A^m \bmod cA^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[g]\right)} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* (\underbrace{ad-1}_{=bc}) S[\psi]\right)}$$
$$= \sum_{g \in A^m \bmod cA^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[g]\right)} e^{\pi i 2\mathrm{Re}(\gamma^* ab S[\psi])}.$$

Ferner ist für $l \in A^m$

$$\begin{aligned}\Theta_{S,R}^{-a\psi+l}(\zeta) &= \sum_{n\in A^m} e^{\pi i U[\underline{n-a\psi+l}]} \\ &= \sum_{n\in A^m} e^{\pi i U[\underline{n-a\psi}]} \\ &= \sum_{n\in A^m} e^{\pi i U[\underline{-n+a\psi}]} \\ &= \sum_{n\in A^m} e^{\pi i U[\underline{n+a\psi}]} \\ &= \Theta_{S,R}^{a\psi}(\zeta).\end{aligned}$$

Für gerades $cS^{-1}$ erhalten wir also

$$\begin{aligned}\Theta_{S,R}^{\psi}(\hat{\zeta}) &= |\det S|^{-1} \, \|c\zeta + d\|^m |c|^{-m} \sum_{\omega \in S^{-1}A^m \bmod A^m} \lambda(S\omega, \psi)\Theta_{S,R}^{\omega}(\zeta) \\ &= |\det S|^{-1} \, \|c\zeta + d\|^m |c|^{-m} \lambda(S(-a\psi), \psi)\Theta_{S,R}^{a\psi}(\zeta) \\ &= |\det S|^{-1} \, \|c\zeta + d\|^m |c|^{-m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}(\gamma^* abS[\psi])} \sum_{g\in A^m \bmod cA^m} e^{\pi i 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\gamma^* S[g]\right)}\Theta_{S,R}^{a\psi}(\zeta).\end{aligned}$$

□

Es sei $\mathcal{H}_m := \{U \in \mathrm{M}(m;\mathbb{C});\ U^T = U,\ \mathrm{Im}(U) > 0\}$ der Siegelsche Halbraum. Nach [10], S. 19, Hilfssatz 0.10 existiert eine eindeutig bestimmte stetige Funktion $h : \mathcal{H}_m \to \mathbb{C}$ mit $h^2(U) = \det(-iU)$ und $h(i\mathrm{Im}(U)) = \sqrt{\det(\mathrm{Im}(U))} > 0$ für $U \in \mathcal{H}_m$. Zur Fixierung der Wurzel von $\det(-iU)$ setzen wir deshalb

$$\sqrt{\det(-iU)} := h(U).$$

**Lemma 2.1.7 (Theta-Transformationsformel).** *Es sei $U \in \mathrm{GL}(m;\mathbb{C})$ symmetrisch. Hat $U$ einen positiven Imaginärteil und ist $\alpha \in \mathbb{C}^m$, dann gilt*

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}^m} e^{\pi i U[r+\alpha]} = |-iU|^{-\frac{1}{2}} \sum_{r\in\mathbb{Z}^m} e^{-\pi i U^{-1}[r] + 2\pi i r^t \alpha}.$$

*Beweis.* Das ist die Aussage von [33], S.122, Lemma 1 mit $P = -iU$.

□

**Lemma 2.1.8 (Verallgemeinerte Theta-Transformationsformel).** *Es seien $S \in \mathrm{GL}(m;K) \cap \mathrm{M}(m;\mathfrak{o}_K)$ gerade und $R$ eine (komplexe) Majorante von $S$. Mit $U = \begin{pmatrix} uS & ivR \\ iv\overline{R} & \overline{uS}\end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2m,\mathbb{C})$, $u \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{C}^{2m}$, $\underline{r} := \begin{pmatrix} r \\ \overline{r}\end{pmatrix} \in$*

$\mathbb{C}^{2m}$, $\gamma \in \mathfrak{o}_K$, $A := \gamma\mathfrak{o}_K$, $\gamma^* := \frac{\tau_D}{\gamma^2}$ *und* $\tau_D = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{D}} & \text{für } D \equiv 1 \mod 4, \\ \frac{1}{2\sqrt{D}} & \text{für } D \equiv 2,3 \mod 4 \end{cases}$

*gilt:*

$$\sum_{r \in A^m} e^{\pi i U[\underline{r}+\alpha]} = |\det S|^{-1} \, \|u + vj\|^{-m} |\gamma^*|^m \sum_{r \in A^m} e^{-\pi i U^{-1}[\underline{\gamma^* r}] + 2\pi i (\underline{\gamma^* r})^t \alpha}.$$

*Beweis.* Mit $\omega_D$ wie in (1.1) gilt für $r = \gamma(a + b\omega_D) \in A^m$ und $a, b \in \mathbb{Z}^m$:

$$\begin{pmatrix} r \\ \overline{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma I_m & \gamma\omega_D I_m \\ \overline{\gamma} I_m & \overline{\gamma\omega_D} I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Um Lemma 2.1.7 anwenden zu können, setzen wir deshalb

$$U_1 := \begin{pmatrix} \gamma I_m & \gamma\omega_D I_m \\ \overline{\gamma} I_m & \overline{\gamma\omega_D} I_m \end{pmatrix}^t U \begin{pmatrix} \gamma I_m & \gamma\omega_D I_m \\ \overline{\gamma} I_m & \overline{\gamma\omega_D} I_m \end{pmatrix} = U \left[ \begin{pmatrix} \gamma I_m & \gamma\omega_D I_m \\ \overline{\gamma} I_m & \overline{\gamma\omega_D} I_m \end{pmatrix} \right].$$

Wegen $\overline{R} = R^t$ ist $U$ und somit $U_1$ symmetrisch, und es ist $\mathrm{Im}\,(U_1)$ positiv, da für $\binom{a}{b} \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,(U_1) \left[ \binom{a}{b} \right] &= \mathrm{Im} \left( U_1 \left[ \binom{a}{b} \right] \right) \\ &= \mathrm{Im} \left( U \left[ \binom{r}{\overline{r}} \right] \right) \\ &= 2vR\{r\} > 0 \end{aligned}$$

ist.
Ferner ist

$$U_1^{-1} = U^{-1} \left[ \begin{pmatrix} -\overline{\gamma\omega_D} I_m & \overline{\gamma} I_m \\ \gamma\omega_D I_m & -\gamma I_m \end{pmatrix} \frac{\tau_D}{|\gamma|^2} \right].$$

Mit Lemma 2.1.7 ergibt sich nun

$$
\begin{aligned}
\sum_{r\in A^m} e^{\pi i U[\underline{r}+\alpha]} &= \sum_{a,b\in\mathbb{Z}^m} e^{\pi i U_1\left[\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\gamma I_m & \gamma\omega_D I_m \\ \overline{\gamma} I_m & \overline{\gamma\omega_D} I_m\end{pmatrix}^{-1}\alpha\right]} \\
&= |-iU_1|^{-\frac{1}{2}} \sum_{a,b\in\mathbb{Z}^m} e^{-\pi i U_1^{-1}\left[\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}\right] + 2\pi i \begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix}\gamma I_m & \gamma\omega_D I_m \\ \overline{\gamma} I_m & \overline{\gamma\omega_D} I_m\end{pmatrix}^{-1}\alpha} \\
&= |-iU_1|^{-\frac{1}{2}} \sum_{a,b\in\mathbb{Z}^m} e^{-\pi i U^{-1}\left[\begin{pmatrix}-\overline{\gamma\omega_D} I_m & \overline{\gamma} I_m \\ \gamma\omega_D I_m & -\gamma I_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}\frac{\tau_D}{|\gamma|^2}\right]} \\
&\qquad\qquad \cdot e^{2\pi i \begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix}-\overline{\gamma\omega_D} I_m & \gamma\omega_D I_m \\ \overline{\gamma} I_m & -\gamma I_m\end{pmatrix}\frac{\tau_D}{|\gamma|^2}\alpha} \\
&= |-iU_1|^{-\frac{1}{2}} \sum_{a,b\in\mathbb{Z}^m} e^{-\pi i U^{-1}\left[\begin{pmatrix}\gamma^*\gamma(b-a\overline{\omega_D}) \\ \overline{\gamma^*}\,\overline{\gamma}(b-a\omega_D)\end{pmatrix}\right] + 2\pi i \begin{pmatrix}\gamma^*\gamma(b-a\overline{\omega_D}) \\ \overline{\gamma^*}\,\overline{\gamma}(b-a\omega_D)\end{pmatrix}^t\alpha} \\
&= |-iU_1|^{-\frac{1}{2}} \sum_{c,d\in\mathbb{Z}^m} e^{-\pi i U^{-1}\left[\begin{pmatrix}\gamma^*\gamma(c+d\omega_D) \\ \overline{\gamma^*}\,\overline{\gamma}(c+d\overline{\omega_D})\end{pmatrix}\right] + 2\pi i \begin{pmatrix}\gamma^*\gamma(c+d\omega_D) \\ \overline{\gamma^*}\,\overline{\gamma}(c+d\overline{\omega_D})\end{pmatrix}^t\alpha} \\
&\quad \left(\text{da } -\overline{\omega_D} = \begin{cases} -1+\omega_D, & D\equiv 1 \mod 4 \\ \omega_D, & D\equiv 2,3 \mod 4\end{cases}\right) \\
&= |-iU_1|^{-\frac{1}{2}} \sum_{r\in A^m} e^{-\pi i U^{-1}\left[\begin{pmatrix}\gamma^* r \\ \overline{\gamma^*}\,\overline{r}\end{pmatrix}\right] + 2\pi i \begin{pmatrix}\gamma^* r \\ \overline{\gamma^*}\,\overline{r}\end{pmatrix}^t\alpha} \\
&= |-iU_1|^{-\frac{1}{2}} \sum_{r\in A^m} e^{-\pi i U^{-1}[\underline{\gamma^* r}] + 2\pi i (\underline{\gamma^* r})^t\alpha}.
\end{aligned}
$$

Es bleibt die Berechnung von $|-iU_1|$:
Wir haben

$$\det(-iU_1) = (-i)^{2m}\det(U)\left[\det\left(\begin{pmatrix}\gamma I_m & \gamma\omega_D I_m \\ \overline{\gamma} I_m & \overline{\gamma\omega_D} I_m\end{pmatrix}\right)\right]^2.$$

Weil

$$\det\left(\begin{pmatrix}\gamma I_m & \gamma\omega_D I_m \\ \overline{\gamma} I_m & \overline{\gamma\omega_D} I_m\end{pmatrix}\right) = (-1)^{2(m-1)}\left[\det\left(\begin{pmatrix}\gamma & \gamma\omega_D \\ \overline{\gamma} & \overline{\gamma\omega_D}\end{pmatrix}\right)\right]^m = \left(\frac{-|\gamma|^2}{\tau_D}\right)^m$$

ist und nach [32], S. 369 Mitte

$$\det(U) = |\det(S)|^2 \|(u+vj)^m\|^2$$

gilt, erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\det(-iU_1) &= \det(U)\left(\frac{-|\gamma|^2}{\tau_D}\right)^{2m}(-i)^{2m}\\ &= \det(U)\left(\frac{|\gamma|^2}{|\tau_D|}\right)^{2m}\\ &= \left(|\det(S)|\|u+vj\|^m|\gamma^*|^{-m}\right)^2.\end{aligned}$$

□

Summieren wir bei $\theta_{S,R}(\zeta)$ speziell über ein ganzes Hauptideal $A$, so ergibt sich folgende Beziehung zu $\Theta^0_{S,R}(\zeta)$:

**Lemma 2.1.9.** *Es seien $A = \gamma\mathfrak{o}_K$ ein ganzes Hauptideal und $\gamma^* = \frac{\tau_D}{\gamma^2}$. Mit $T := \begin{pmatrix}\sqrt{\gamma^*}^{-1} & 0\\ 0 & \sqrt{\gamma^*}\end{pmatrix}$ gilt dann:*

$$\theta_{S,R}(\zeta) = \Theta^0_{S,R}(T\zeta).$$

*Ist nun $\mathcal{N}$ die Stufe von $S$, so folgt für $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(A^2\delta_K) = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathfrak{o}_K);\ c \in \mathcal{N}\mathfrak{o}_K,\ b \in \frac{\gamma^2}{\tau_D}\mathfrak{o}_K\right\}$:*

$$\Theta^0_{S,R}(M\zeta) = \nu_S(T^{-1}MT)\|c\zeta+d\|^m\Theta^0_{S,R}(\zeta).$$

*Beweis.* Es gilt

$$M \in \Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(A^2\delta_K) \Leftrightarrow T^{-1}MT \in \Gamma_0(A^2\delta_K\mathcal{N}).$$

Mit Satz 2.1.4 erhalten wir deshalb für obiges $M$

$$\begin{aligned}\Theta^0_{S,R}(M\zeta) &= \theta_{S,R}(T^{-1}M\zeta)\\ &= \theta_{S,R}([T^{-1}MT]T^{-1}\zeta)\\ &= \nu_S(T^{-1}MT)\left\|\frac{c}{\gamma^*}T^{-1}\zeta+d\right\|^m\theta_{S,R}(T^{-1}\zeta)\\ &= \nu_S(T^{-1}MT)\left\|\frac{c}{\gamma^*}T^{-1}\zeta+d\right\|^m\Theta^0_{S,R}(\zeta).\end{aligned}$$

Nun ist $T^{-1}\zeta = \gamma^*u + |\gamma^*|vj$ und somit

$$\left\|\frac{c}{\gamma^*}T^{-1}\zeta+d\right\| = \left\|cu + c\frac{|\gamma^*|}{\gamma^*}vj+d\right\| = \sqrt{|cu+d|^2+|c|^2v^2} = \|c\zeta+d\|.$$

□

## 2.2 Majoranten und Konvergenz der Thetafunktion

In diesem Abschnitt wählen wir für geeignete symmetrische Matrizen spezielle Majoranten. Diese werden bestimmt durch Punkte aus $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$, so dass die zugehörige Thetafunktion von drei Parametern aus $\mathbb{H}$ abhängt.

Über $\mathbb{C}$ sind alle symmetrischen Matrizen aus $\mathrm{GL}(m;\mathbb{C})$ zueinander kongruent. Existiert nun für eine symmetrische Matrix $S \in \mathrm{GL}(m;\mathbb{C})$ eine Majorante, so lassen sich damit auch Majoranten für die zu $S$ kongruenten Matrizen konstruieren.

**Lemma 2.2.1.** *Es seien $S, S^* \in \mathrm{GL}(m;\mathbb{C})$ symmetrische Matrizen und $R$ eine Majorante von $S$. Ist $S^* = B^tSB$ mit $B \in \mathrm{GL}(m;\mathbb{C})$, so ist $R^* := B^tR\overline{B}$ eine Majorante für $S^*$.*

*Beweis.* Nachrechnen der Bedingungen aus der Definition einer Majorante aus Definition 2.1.3.

□

**Voraussetzung 2.2.2.** *Da wir im weiteren Verlauf Ordnungen in einer Divisionsalgebra über $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ betrachten wollen, die als $\mathfrak{o}_K$-Modul den Rang 4 haben, wählen wir von nun an*

$$m = 4.$$

Im Hinblick auf die Einbettung $\Psi$ aus (1.2) läßt sich eine Ordnung $\mathcal{R}$ als Untergruppe von $\mathrm{M}(2;\mathbb{C})$ auffassen. Nun ist die Determinantenabbildung $\det : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to ad - bc$ eine quadratische Form auf $\mathbb{C}^4$ mit zugehöriger symmetrischer Matrix $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Wir werden im Weiteren geeignete Majoranten von

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

mit $S\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right] = 2\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$ betrachten. Majoranten für $S$ lassen sich mit Hilfe der orthogonalen Gruppe von $S$ über $\mathbb{C}$ berechnen. Dafür brauchen wir die nachfolgende Definition.

**Definition 2.2.3.** *Für* $L_1, L_2 \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ *wird* $A(L_1, L_2) \in \mathrm{GL}(4;\mathbb{C})$ *definiert durch:*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} = A(L_1, L_2) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix},$$

*wobei*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} = L_1 \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} L_2^{-1}$$

*gilt.*

**Lemma 2.2.4.** *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} g : \mathrm{SL}(2;\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2;\mathbb{C}) &\to \mathrm{GL}(\mathrm{M}(2;\mathbb{C})) \\ (L_1, L_2) &\to f_{L_1,L_2} : U \to L_1 U L_2^{-1} \end{aligned}$$

*ist ein Gruppenhomomorphismus.*
*Fassen wir* $\mathrm{M}(2;\mathbb{C})$ *als vierdimensionalen* $\mathbb{C}$*-Vektorraum auf, so liegen die Matrizen* $A(L_1, L_2)$ *der durch* $g$ *induzierten Abbildung* $f_{L_1,L_2}$ *in der orthogonalen Gruppe von* $S$ *über* $\mathbb{C}$*. Also:*

$$A(L_1, L_2) \in \mathrm{O}(S;\mathbb{C}) := \{V \in \mathrm{GL}(4;\mathbb{C});\ V^t S V = S\}.$$

*Beweis.* Die Homomorphismuseigenschaften von $g$ lassen sich elementar überprüfen.
Mit $L_1 = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \end{pmatrix}$ und $L_2 = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} A(L_1, L_2) &= \begin{pmatrix} l_1 k_4 & -l_1 k_3 & l_2 k_4 & -l_2 k_3 \\ -l_1 k_2 & l_1 k_1 & -l_2 k_2 & l_2 k_1 \\ l_3 k_4 & -l_3 k_3 & l_4 k_4 & -l_4 k_3 \\ -l_3 k_2 & l_3 k_1 & -l_4 k_2 & l_4 k_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} l_1 I_2 & l_2 I_2 \\ l_3 I_2 & l_4 I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(L_2^{-1}\right)^t & 0 \\ 0 & \left(L_2^{-1}\right)^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\det(A(L_1, L_2)) = (-1)^2 \det(L_1)^2 \det(L_2)^{-2} = 1.$$

Eine elementare Rechnung ergibt nun

$$A(L_1, L_2)^t S A(L_1, L_2) = S. \tag{2.2}$$

□

Wegen $\det(A(L_1, L_2)) \neq 0$ ist

$$A(L_1, L_2)^t A(\overline{L_1, L_2})$$

eine positiv definite hermitesche Matrix.
Eine kurze Rechnung unter Benutzung von (2.2) und $S^{-1} = S$ liefert weiterhin

$$\overline{A(L_1, L_2)^t \overline{A(L_1, L_2)}} S^{-1} A(L_1, L_2)^t \overline{A(L_1, L_2)} = \overline{S}.$$

Zusammen erhalten wir:

**Lemma 2.2.5.** *$A(L_1, L_2)^t \overline{A(L_1, L_2)}$ ist eine* Majorante *von $S$.*

Durch eine geeignete Wahl von $L_1, L_2$ konstruieren wir nun die oben erwähnten Majoranten.

**Definition und Lemma 2.2.6.** *Für $P, P_0 \in \mathbb{H}$, $P = z + jr, P_0 = z_0 + jr_0$, seien*

$$\mathcal{M}_P := \begin{pmatrix} r^{\frac{1}{2}} & zr^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & r^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

*und*

$$\mathcal{M}_{P_0} := \begin{pmatrix} r_0^{\frac{1}{2}} & z_0 r_0^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & r_0^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

*Es gilt dabei $\mathcal{M}_P j = P$ und $\mathcal{M}_{P_0} j = P_0$.*
*Damit definieren wir*

$$R_{PP_0} := A(\mathcal{M}_P^{-1}, \mathcal{M}_{P_0}^{-1})^t \overline{A(\mathcal{M}_P^{-1}, \mathcal{M}_{P_0}^{-1})} \in \mathrm{SL}(4; \mathbb{C}).$$

*$R_{PP_0}$ ist eine Majorante von $S$.*

**Definition 2.2.7.** *Für $S, R_{PP_0}$ wie oben und $S_1 = B^t S B$ mit $B \in \mathrm{GL}(4; \mathbb{C})$ sei*

$$R_1 := B^t R_{PP_0} \overline{B}.$$

Im Hinblick auf Lemma 2.2.1 ergibt sich sofort:

**Lemma 2.2.8.** *$S_1$ ist eine symmetrische invertierbare $4 \times 4$-Matrix und $R_1$ ist eine Majorante von $S_1$.*

**Definition 2.2.9.** *Es seien $S_1, R_1$ wie oben, $\zeta = u + jv \in \mathbb{H}$ und $P, P_0 \in \mathbb{H}$. Da $\Theta^0_{S_1,R_1}(\zeta)$ aus Definition 2.1.5 über $R_1$ von $P$ und $P_0$ abhängt, setzen wir*

$$\Theta_{S_1,R_1}(P, P_0, \zeta) := \Theta^0_{S_1,R_1}(\zeta).$$

**Lemma 2.2.10.** *Für festes* $P_0 \in \mathbb{H}$ *konvergiert* $\Theta_{S_1,R_1}(P, P_0, \zeta)$ *kompakt gleichmäßig absolut in* $(P, \zeta)$ *auf* $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$.

*Beweis.* Es sei $K \times K' \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ mit kompakten Mengen $K, K'$. Ferner seien $\zeta \in K$ und $P \in K'$.
Es genügt zu zeigen: Es existiert ein $a > 0$ mit

$$x^t R_1 \overline{x} \geq a\|x\|^2 \text{ für alle } P \in K' \text{ und } x \in \mathbb{C}^4.$$

Da $R_1$ positiv definit ist, gibt es für alle $P \in K'$ ein $U = U(P) \in \mathrm{SO}(4; \mathbb{C})$ und $\lambda_i = \lambda_i(P) > 0$, $(1 \leq i \leq 4)$ mit

$$R_1 = U^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \overline{U}.$$

Ist nun $P \in K'$ fest und $\lambda_0 = \lambda_0(P)$ der kleinste Eigenwert von $R_1$ so gilt

$$\lambda_0 = \min\{x^t R_1 \overline{x};\ x \in \mathbb{C}^4,\ \|x\| = 1\}.$$

Begründung: Es sei $\{v_1, \ldots, v_4\}$ eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren zu $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_4\}$. Für $x = \sum_{j=1}^4 \alpha_i v_i \in \mathbb{C}^4$, $\|x\| = 1$ ergibt sich

$$x^t R_1 \overline{x} = \sum_{j=1}^4 |\alpha_i|^2 \lambda_j \geq \left( \sum_{j=1}^4 |\alpha_i|^2 \right) \lambda_0 = \lambda_0.$$

Für $L := \{x \in \mathbb{C}^4;\ \|x\| = 1\}$ ist

$$\begin{aligned} f : K' \times L &\to \mathbb{R} \\ (P, x) &\to x^t R_1 \overline{x} \end{aligned}$$

eine stetige Funktion mit $f(P, x) > 0$ für alle $(P, x) \in K' \times L$. Somit hat $F$ ein positives Minimum auf $K' \times L$, und es gilt für geeignetes $a$

$$\min_{P \in K'} \lambda_0(P) = \min_{P \in K'} \min_{x \in L} f(P, x) \geq a > 0.$$

Also folgt für alle $P \in K'$ und $x \in \mathbb{C}^4$

$$x^t R_1 \overline{x} \geq \lambda_0(P) \|Ux\|^2 = \lambda_0(P) \|x\| \geq a\|x\|^2.$$

$\square$

# Kapitel 3

## Der Theta-Lift

Mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse werden wir in diesem Kapitel eine geeignete Thetafunktion zu einer Ordnung $\mathcal{R}$ konstruieren, die unter der Norm-1-Gruppe dieser Ordnung invariant ist. Es wird sich dann zeigen, dass der mit ihr erfolgte Theta-Lift eine Eigenform zu einer kofiniten Untergruppe von $\mathrm{PSL}(2; \mathfrak{o}_K)$ ist.

### 3.1 Die Thetafunktion einer Ordnung

Die Normfunktion definiert eine quadratische Form auf der Divisionsalgebra $\mathcal{A}[q, r]$. Ihr zugeordnet ist die symmetrische Bilinearform

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{A}[q, r] \times \mathcal{A}[q, r] \to K, \ \langle x, y \rangle = \mathrm{tr}(x\overline{y}) = x\overline{y} + y\overline{x}.$$

Für $x \in \mathcal{A}[q, r]$ ist also

$$2\mathrm{n}(x) = \ \langle x, x \rangle \, .$$

Ist nun die Ordnung $\mathcal{R}$ in $\mathcal{A}[q, r]$ ein freier $\mathfrak{o}_K$-Modul mit Basis $e_0, e_1, e_2, e_3$ (Bei Klassenzahl $h = 1$ gilt dies für jede Ordnung, da dann $\mathfrak{o}_K$ ein Hauptidealring ist.), so können wir auf Grund von Lemma 1.3.4 die auf $\mathcal{R}$ eingeschränkte Normfunktion als ganze quadratische Form auf $\mathfrak{o}_K^4$ auffassen. Die ihr zugeordnete Bilinearform ist dann gegeben durch die *gerade* Matrix

$$S_1 := (\mathrm{tr}(e_i\overline{e_j})). \tag{3.1}$$

*Anmerkung:* Für $\mathcal{R} = \mathcal{O}$ aus Definition 1.3.3 gilt:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2qr \end{pmatrix} \text{ und } S_1 \text{ hat die Stufe } \mathcal{N} = 4qr.$$

**Voraussetzung 3.1.1.** *Im weiteren Verlauf der Arbeit gelte von nun an:*

*$\mathcal{R}$ ist eine Ordnung in der Divisionsalgebra $\mathcal{A}[q,r]$ mit $\mathfrak{o}_K$-Basis $e_0, e_1, e_2, e_3$.*

**Definition 3.1.2.** *Für die $\mathfrak{o}_K$-Basis $e_0, \ldots, e_3$ von $\mathcal{R}$ sei*

$$\begin{aligned} k : \mathcal{R} &\to \mathfrak{o}_K^4 \\ x = \sum_{i=0}^{3} x_i e_i &\to k(x) := \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*der zugehörige $\mathfrak{o}_K$-Modul-Isomorphismus. Ferner setzen wir*

$$k_x := k(x).$$

Es gilt also für alle $x \in \mathcal{R}$:

$$k_x^t S_1 k_x = \mathrm{tr}(x\overline{x}) = 2\mathrm{n}(x).$$

Ist $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} := \Psi(x)$ das Bild von $x \in \mathcal{R}$ unter der Einbettung $\Psi$ aus (1.2), so vermittelt $\Psi$ eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi \circ k^{-1} : \mathfrak{o}_K^4 &\to \mathrm{M}(2; \mathbb{C}) \\ k_x &\to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit existiert ein eindeutig bestimmtes $B \in \mathrm{GL}(4; \mathbb{C})$ mit

$$Bk_x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

für alle $x \in \mathfrak{o}_K^4$.

*Anmerkung:* Für $\mathcal{R} = \mathcal{O}$ folgt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{r} & \sqrt{rq} \\ 0 & 0 & \sqrt{r} & -\sqrt{rq} \\ 1 & -\sqrt{q} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Lemma 3.1.3.** *Es seien $e_0, \dots, e_3$ die $\mathfrak{o}_K$-Basis von $\mathcal{R}$, $S_1 = (\mathrm{tr}(e_i \overline{e_j}))$ die Matrix der der Normfunktion auf $\mathcal{R}$ zugeordneten Bilinearform auf $\mathfrak{o}_K^4$ und $S$ aus* (2.1). *Dann folgt mit $B \in \mathrm{GL}(4; \mathbb{C})$ aus* (3.2)*:*

$$S_1 = B^t S B.$$

*Somit ist mit $R_{PP_0}$ aus Definition 2.2.6 die Matrix*

$$R_1 := B^t R_{PP_0} \overline{B}$$

*eine Majorante für $S_1$.*

*Beweis.* Für alle $k_x \in \mathfrak{o}_K^4$ gilt

$$k_x^t S_1 k_x = 2\mathrm{n}(x) = 2\det(\Psi(x)) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) S \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = (Bk_x)^t S (Bk_x)$$
$$= k_x^t \left(B^t S B\right) k_x.$$

Aus Lemma 2.2.1 folgt die Behauptung.

□

**Satz 3.1.4.** *Für $P, P_0 \in \mathbb{H}$, $x \in \mathcal{R}$, $\Psi(x) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) =: W$ aus* (1.2)*, $R_1$ aus Lemma 3.1.3 und $\delta$ aus Satz und Definition 1.1.5 ist*

$$R_1\{k_x\} = 2|\alpha\delta - \beta\gamma| \delta(P, WP_0).$$

*Beweis.* Wir schreiben Punkte $P \in \mathbb{H}$ in der Form $P = z_P + jr_P$ und setzen

$$W_1 := \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} := \mathcal{M}_P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mathcal{M}_{P_0}.$$

Damit gilt

$$\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 = \alpha\delta - \beta\gamma$$

und

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} = A(\mathcal{M}_P^{-1}, \mathcal{M}_{P_0}^{-1}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = A(\mathcal{M}_P^{-1}, \mathcal{M}_{P_0}^{-1}) B k_x.$$

Für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ ergibt eine kurze Rechnung

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = \|\alpha j + \beta + j(\gamma j + \delta)\|^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

In den Bezeichnungen von Lemma 1.1.2 und 1.1.3 erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
R_1\{k_x\} &= (\alpha, \beta, \gamma, \delta) R_{PP_0} \overline{(\alpha, \beta, \gamma, \delta)}^t \\
&= (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1) \overline{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)}^t \\
&= |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 + |\gamma_1|^2 + |\delta_1|^2 \\
&= \|\alpha_1 j + \beta_1 + j(\gamma_1 j + \delta_1)\|^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1) \\
&= \|\underline{W_1 j} + j\|^2 \|\gamma_1 j + \delta_1\|^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1) \\
&= \|\underline{W_1 j} + j\|^2 \|\gamma_1 j + \delta_1\|^2 - 2 r_{\underline{W_1 j}} \|\gamma_1 j + \delta_1\|^2 .
\end{aligned}$$

Da

$$r_j = 1$$

und

$$\|\gamma_1 j + \delta_1\|^2 = \frac{|\alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1|}{r_{W_1 j}}$$

ist, folgt

$$\begin{aligned}
R_1\{k_x\} &= \|\gamma_1 j + \delta_1\|^2 (\|\underline{W_1 j} + j\|^2 - 2 r_{\underline{W_1 j}}) \\
&= \|\gamma_1 j + \delta_1\|^2 (|z_{\underline{W_1 j}}|^2 + (r_{\underline{W_1 j}} + 1)^2 + l^2_{\underline{W_1 j}} - 2 r_{\underline{W_1 j}}) \\
&= \|\gamma_1 j + \delta_1\|^2 (|z_{\underline{W_1 j}}|^2 + r^2_{\underline{W_1 j}} + l^2_{\underline{W_1 j}} + 1) \\
&= 2|\alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1| \frac{|z_{W_1 j}|^2 + r^2_{W_1 j} + r_j^2}{2 r_j r_{W_1 j}} \\
&= 2|\alpha\delta - \beta\gamma| \delta(j, W_1 j) \\
&= 2|\alpha\delta - \beta\gamma| \delta(\mathcal{M}_P j, \mathcal{M}_P W_1 j) \\
&= 2|\alpha\delta - \beta\gamma| \delta(P, W P_0).
\end{aligned}$$

□

**Definition 3.1.5.** *Für $\Theta_{S_1,R_1}(P, P_0, \zeta)$ aus Definition 2.2.9 sei $\gamma = 1$, so dass die Summation über $A^4 = \mathfrak{o}_K^4$ erfolgt. Mit $S_1, R_1$ aus Lemma 3.1.3, $\zeta = u + jv \in \mathbb{H}$ und $P, P_0 \in \mathbb{H}$ setzen wir*

$$\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta) := v^2 \Theta_{S_1,R_1}(P, P_0, \zeta).$$

**Lemma 3.1.6.** *Es seien $x \in \mathcal{R}$ mit zugehörigem Koordinatenvektor $k_x \in \mathfrak{o}_K^4$, $W := \Psi(x) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$ aus (1.2) und $\delta$ aus Satz 1.1.5.*

*Dann gilt für* $\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)$

$$\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta) = v^2 \sum_{k_x \in \mathfrak{o}_K^4} e^{4\pi i \mathrm{Re}((\alpha\delta-\beta\gamma)\tau_D u)} e^{-4\pi v|\tau_D||\alpha\delta-\beta\gamma|\delta(P,WP_0)}$$
$$= v^2 \sum_{W=\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{R}} e^{4\pi i \mathrm{Re}((\alpha\delta-\beta\gamma)\tau_D u)} e^{-4\pi v|\tau_D||\alpha\delta-\beta\gamma|\delta(P,WP_0)}.$$

*Beweis.* Die Summation über $k_x \in \mathfrak{o}_K^4$ lässt sich mittels $\Psi$ auch als Summation über $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{R}$ auffassen. Da $S_1[k_x] = 2\mathrm{n}(x) = (\alpha\delta - \beta\gamma)$ ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 3.1.4.

□

**Satz 3.1.7.** *Die Reihendarstellung für* $\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)$ *konvergiert bei festem* $P_0 \in \mathbb{H}$ *kompakt gleichmäßig absolut in* $(P, \zeta)$ *auf* $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$. $\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)$ *ist beliebig oft stetig partiell differenzierbar bezüglich* $P = x + iy + jr$ *und* $\zeta = u_r + iu_i + jv$, *und es gilt mit der Stufe* $\mathcal{N}$ *von* $S_1$:

*i)* $\Phi_{\mathcal{R}}(TP, P_0, \zeta) = \Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)$ *für* $T \in \Gamma_{\mathcal{R}}$,

*ii)* $\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, L\zeta) = \nu(L)\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)$ *für* $L \in \Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1})$,
*wobei* $\nu(L)$ *eine achte Einheitswurzel ist.*

*Beweis.* Die Konvergenzaussage erhalten wir sofort aus Lemma 2.2.10.
Da die bei jeder partiellen Differentation hinzukommenden Terme nur polynomial in $\lambda \in \mathfrak{o}_K^4$ wachsen, folgt die Konvergenz der differenzierten Summen weiterhin durch die Abschätzung

$$\lambda^t R_1 \overline{\lambda} \geq a\|\lambda\|^2,\ a > 0 \text{ geeignet},\ P \in K' \text{ kompakt}, \lambda \in \mathbb{C}^4$$

aus dem Beweis von Lemma 2.2.10.
Die Behauptung *ii)* folgt unmittelbar aus Lemma 2.1.9.
Zu *i)*:
Wir setzen $W := \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{smallmatrix}\right) := TW$ mit $T \in \Gamma_{\mathcal{R}} \subset \mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$.
Da $\delta(P, P_0)$ eine Punkt-Paar-Invariante (siehe Definition 1.1.6) ist, folgt nun:

$$\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta) = v^2 \sum_{W\in\mathcal{R}} e^{4\pi i \mathrm{Re}((\alpha\delta-\beta\gamma)\tau_D u)} e^{-4\pi|\tau_D||\alpha\delta-\beta\gamma|\delta(P,WP_0)}$$
$$= v^2 \sum_{W\in\mathcal{R}} e^{4\pi i \mathrm{Re}((\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1)\tau_D u)} e^{-4\pi|\tau_D||\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1|\delta(TP,TWP_0)}$$
$$= v^2 \sum_{W\in T\mathcal{R}} e^{4\pi i \mathrm{Re}((\alpha\delta-\beta\gamma)\tau_D u)} e^{-4\pi|\tau_D||\alpha\delta-\beta\gamma|\delta(TP,WP_0)}$$
$$= \Phi_{\mathcal{R}}(TP, P_0, \zeta).$$

□

**Satz 3.1.8.** *Es seien* $P = x + iy + jr, \zeta = u_r + iu_i + jv \in \mathbb{H}$,

$$\Delta^P := r^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) - r \frac{\partial}{\partial r}$$

*und*

$$\Delta^\zeta := v^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial {u_r}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {u_i}^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) - v \frac{\partial}{\partial v}.$$

*Dann gilt*

$$\Delta^P \Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta) = \Delta^\zeta \Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta).$$

*Beweis.* Auf Grund der kompakt gleichmäßigen Konvergenz der Reihendarstellung von $\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)$ und der partiellen Ableitungen reicht es, die Behauptung für die einzelnen Summanden zu überprüfen.
Dazu betrachten wir für $P_1 := WP_0 \in \mathbb{H}$

$$v^2 e^{ciB} e^{-cvA}$$

mit

$$\begin{aligned} c &:= 4\pi |\tau_D|, \\ B &:= \mathrm{Re}\left( (\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{\tau_D}{|\tau_D|} u \right) \text{ und} \\ A &:= |\alpha\delta - \beta\gamma| \delta(P, P_1) = |\alpha\delta - \beta\gamma| \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + r^2 + r_1^2}{2rr_1}. \end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$v^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial {u_r}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {u_i}^2} \right] v^2 e^{ciB} e^{-cvA} = v^2 e^{ciB} e^{-cvA} [-c^2 v^2 |\alpha\delta - \beta\gamma|]$$

und

$$\begin{aligned} \left[ v^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} - v \frac{\partial}{\partial v} \right] v^2 e^{ciB} e^{-cvA} &= 3v^2 e^{ciB} e^{-cvA} [-cvA] \\ &\quad + v^2 e^{ciB} e^{-cvA} c^2 v^2 A^2, \end{aligned}$$

zusammen also

$$\begin{aligned} \Delta^\zeta v^2 e^{ciB} e^{-cvA} &= v^2 e^{ciB} e^{-cvA} c^2 v^2 [A^2 - |\alpha\delta - \beta\gamma|^2] \\ &\quad + 3v^2 e^{ciB} e^{-cvA} [-cvA]. \end{aligned}$$

Zu $\Delta^P v^2 e^{ciB} e^{-cvA}$:
Es ist

$$r^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]v^2e^{ciB}e^{-cvA} = v^2e^{ciB}e^{-cvA}c^2v^2|\alpha\delta-\beta\gamma|^2\frac{4|z-z_1|^2r^2}{4r^2r_1^2} + v^2e^{ciB}e^{-cvA}(-cv)|\alpha\delta-\beta\gamma|\frac{4r^2}{2rr_1}.$$

Weiterhin ergibt sich

$$\begin{aligned}\left[r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}-r\frac{\partial}{\partial r}\right]&v^2e^{ciB}e^{-cvA}\\ &= v^2e^{ciB}e^{-cvA}c^2v^2|\alpha\delta-\beta\gamma|^2\left(\frac{|z-z_1|^2+r_1^2-r^2}{2rr_1}\right)^2\\ &\quad + v^2e^{ciB}e^{-cvA}(-cv)|\alpha\delta-\beta\gamma|\frac{3|z-z_1|^2+3r_1^2-r^2}{2rr_1}.\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}\Delta^P &v^2e^{ciB}e^{-cvA}\\ &= v^2e^{ciB}e^{-cvA}c^2v^2|\alpha\delta-\beta\gamma|^2\frac{\left(|z-z_1|^2+r_1^2-r^2\right)^2+4|z-z_1|^2r^2}{4r^2r_1^2}\\ &\quad + v^2e^{ciB}e^{-cvA}(-cv)|\alpha\delta-\beta\gamma|3\frac{|z-z_1|^2+r_1^2+r^2}{2rr_1}\\ &= v^2e^{ciB}e^{-cvA}c^2v^2|\alpha\delta-\beta\gamma|^2\frac{\left(|z-z_1|^2+r_1^2+r^2\right)^2-4r^2r_1^2}{4r^2r_1^2}\\ &\quad + 3v^2e^{ciB}e^{-cvA}[-cvA]\\ &= v^2e^{ciB}e^{-cvA}c^2v^2[A^2-|\alpha\delta-\beta\gamma|^2]\\ &\quad + 3v^2e^{ciB}e^{-cvA}[-cvA].\end{aligned}$$

□

## 3.2 Eigenfunktionen zu $\Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1})$

Die im vorherigen Abschnitt konstruierte Thetafunktion $\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)$ benutzen wir nun dazu, Funktionen aus $C^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H}, \lambda) := \{f \in C^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H});\ -\Delta f = \lambda f\}$ zu Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami-Operators zu $\Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1})$ mit gleichem Eigenwert $\lambda$ zu liften.

**Definition 3.2.1.** *Es seien $f \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H})$ und $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich von $\Gamma_{\mathcal{R}}$ (vgl. [9], S.41ff). Für $\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)$ aus Definition 3.1.5 setzen wir*

$$\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta) := \int_{\mathcal{F}} \Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta) f(P) d\mu(P).$$

*Anmerkung:* Da $\Gamma_{\mathcal{R}}$ kokompakt ist, konvergiert das Integral auf der rechten Seite absolut.

Für die Berechnung von $\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta)$ brauchen wir die nachfolgenden Lemmata:

**Lemma 3.2.2.** *Es seien $f \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H})$ und $\xi_{kN}, d(N)$ wie in Lemma 1.3.8. Dann ist $\sum_{k=1}^{d(N)} f(\xi_{kN} P_0)$ unabhängig von der speziellen Wahl der Vertreter $\xi_{kN}$.*

*Beweis.* Es seien $\{\xi_{1N}, \ldots, \xi_{d(N)N}\}$ und $\{\xi_{1N}^*, \ldots, \xi_{d(N)N}^*\}$ zwei Vertretersysteme der Rechtsnebenklassen von $\mathcal{R}^{(N)}$ bezüglich $\Gamma_{\mathcal{R}}$. O.B.d.A. seien jeweils $\xi_{kN}^* = \alpha_k \xi_{kN}$ mit $\alpha_k \in \Gamma_{\mathcal{R}}$.
Dann gilt

$$f(\xi_{kN}^* P_0) = f(\alpha_k \xi_{kN} P_0) = f(\xi_{kN} P_0),$$

da $f$ invariant unter $\Gamma_{\mathcal{R}}$ ist.

□

**Lemma 3.2.3.** *Es sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine Lösung der Differentialgleichung $-\Delta f = \lambda f$ mit $\lambda = 1 - s^2$. Ferner seien $P_0 \in \mathbb{H}$, $c > 0$ und $K_s$ die modifizierte Besselfunktion. Ist dann $e^{-2\pi c \delta(\cdot, P_0)} f(\cdot)$ $\mu$-integrabel über $\mathbb{H}$, so gilt*

$$\int_{\mathbb{H}} e^{-2\pi c \delta(P, P_0)} f(P) d\mu(P) = \frac{2}{c} K_s(2\pi c) f(P_0).$$

*Beweis.* Wir setzen

$$k(u) := e^{-2\pi c u}.$$

Offensichtlich ist für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$u^m \frac{d^n}{du^n} k(u) \text{ beschränkt für } u \to \infty.$$

Die Selberg-Transformation gemäß [9], S. 119, Theorem 5.3 und S. 121, Lemma 5.5 lässt sich also durchführen und ergibt

$$\begin{aligned}
Q(x) &= 2\pi \int_0^\infty k(x+t)dt \\
&= 2\pi \int_0^\infty e^{-2\pi c(x+t)}dt \\
&= \frac{1}{c}e^{-2\pi cx}, \\
g(x) := Q\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) &= \frac{1}{c}e^{-2\pi c\cosh(x)}
\end{aligned}$$

und schließlich mit [13], S. 22, Lemma 4.8. (iii) bzw. [21], S. 85

$$\begin{aligned}
h(1+t^2) &= \int_{-\infty}^\infty g(x)e^{itx}dx \\
&= \frac{2}{c}\int_0^\infty e^{-2\pi c\cosh(x)}\cosh(itx)dx \\
&= \frac{2}{c}K_{it}(2\pi c).
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}} e^{-2\pi c\delta(P,P_0)}f(P)d\mu(P) &= h(\lambda)f(P_0) \\
&= h(1+(is)^2)f(P_0) \\
&= \frac{2}{c}K_{-s}(2\pi c)f(P_0) \\
&= \frac{2}{c}K_s(2\pi c)f(P_0).
\end{aligned}$$

□

Wir sind nun in der Lage, zu einem ersten zentralen Ergebnis unser bisherigen Betrachtungen zu kommen. Der Übersicht wegen fassen wir die Voraussetzungen und Bezeichnungen hierfür noch einmal zusammen:
Es sei $\mathcal{R}$ eine Ordnung (siehe Definition 1.3.2) in der Quaternionenalgebra $\mathcal{A}[q,r]$ über dem imaginär-quadratischen Zahlkörper $K$ (Definition 1.3.1). Mit der Norm-1-Gruppe $\Gamma_{\mathcal{R}}$ sei wie in Lemma 1.3.8

$$\mathcal{R}^{(N)} := \{x \in \mathcal{R};\ \mathrm{n}(x) = N\} = \sum_{k=1}^{d(N)} \Gamma_{\mathcal{R}}\xi_{kN}.$$

Wir setzen voraus, dass $\mathcal{A}[q,r]$ eine Divisionsalgebra ist und $\mathcal{R}$ die $\mathfrak{o}_K$-Basis $e_0, e_1, e_2, e_3$ besitzt. Dazu betrachten wir mit $S_1 = (\mathrm{tr}(e_i\overline{e_j}))$ die Matrix der der Normfunktion auf $\mathcal{R}$ zugeordneten Bilinearform auf $\mathfrak{o}_K^4$ (siehe (3.1)). Es ist $S_1 \in \mathrm{GL}(4;K) \cap \mathrm{M}(4;\mathfrak{o}_K)$ gerade. Mit $\mathcal{N}$ bezeichnen wir die Stufe von $S_1$ (Definition 2.1.2) und mit $R_1$ die in Abhängigkeit von $P, P_0 \in \mathbb{H}$ speziell gewählte Majorante von $S_1$ (Definition 3.1.3). Mit der zu $S_1$ und $R_1$ gehörigen Thetafunktion

$$\Phi_{\mathcal{R}}(P,P_0,\zeta) = v^2 \sum_{W=\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{R}} e^{4\pi i\mathrm{Re}((\alpha\delta-\beta\gamma)\tau_D u)} e^{-4\pi v|\tau_D||\alpha\delta-\beta\gamma|\delta(P,WP_0)}$$

(Definition 3.1.5), wobei $\zeta = u + jv \in \mathbb{H}$ ist, definieren wir dann den Theta-Lift

$$\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta) := \int_{\mathcal{F}} \Phi_{\mathcal{R}}(P,P_0,\zeta) f(P)\, d\mu(P)$$

(Definition 3.2.1).

**Theorem 3.2.4.** *Unter den obigen Voraussetzungen gilt mit* $f \in C^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\diagdown\mathbb{H},\lambda)$*:*

*i)* $\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta) \in C^2(\mathbb{H})$ *und*

$\mathcal{I}_f^{P_0}(M\zeta) = \nu(M)\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta)$ *für alle* $M \in \Gamma_0(\mathcal{N})\cap\Gamma^0(\tau_D^{-1})$,

*wobei* $\nu(M)$ *eine achte Einheitswurzel ist.*

*ii)* $-\Delta\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta) = \lambda\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta)$.

*Ist ferner* $\lambda = 1 - s^2 \neq 0$*, so ergibt sich mit der Besselfunktion* $K_s$*:*

*iii)* $$\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta) = 2v \sum_{N\in\mathfrak{o}_K\setminus\{0\}} \frac{1}{|N\tau_D|} \sum_{k=1}^{d(N)} f(\xi_{kN}P_0) K_s(4\pi v|N\tau_D|) e^{4\pi i\mathrm{Re}(N\tau_D u)}.$$

*iv) Bei geeigneter Wahl von* $P_0 \in \mathbb{H}$ *gilt* $\mathcal{I}_f^{P_0} \not\equiv 0$.

*v) Die Reihendarstellung von* $\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta)$ *in iii) konvergiert kompakt gleichmäßig absolut auf* $\mathbb{H}$*. Es gilt für alle* $\epsilon > 0$ *und* $s \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(s) > 4$

$$d(N) = O[e^{|N|\epsilon}] \quad \textit{und} \quad \sum_{N\in\mathfrak{o}_K\setminus\{0\}} \frac{d(N)}{|N|^s} < \infty.$$

*vi) Hat* $K$ *die Klassenzahl* $1$*, so gilt für geeignetes* $P_0 \in \mathbb{H}$*:*

$\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta)$ *ist eine (erweiterte) Spitzenform zu* $\Gamma_0(\mathcal{N})\cap\Gamma^0(\tau_D^{-1})$ *mit Eigenwert* $\lambda$.

*Beweis.*
*i)* Da $\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)$ nach Satz 3.1.7 beliebig oft stetig partiell differenzierbar ist, ergibt sich aus der Integraldarstellung von $\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta)$ unter Beachtung der relativen Kompaktheit des Fundamentalbereichs $\mathcal{F}$ mittels majorisierter Konvergenz

$$\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta) \in C^2(\mathbb{H}).$$

Aus demselben Satz folgt auch sofort das angegebene Transformationsverhalten von $\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta)$ unter $\Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1})$.

*ii)* Im Folgenden bezeichne $\Delta^P$ den Laplace-Beltrami-Operator bezüglich $P$ und entsprechend $\Delta^\zeta$ den Laplace-Beltrami-Operator bezüglich $\zeta$ (vgl. Satz 3.1.8).
Unter Beachtung der relativen Kompaktheit des Fundamentalbereichs und der Invarianz von $\Delta$ unter Konjugation ergibt sich mit Satz 3.1.8 und [9], S. 136, Theorem 1.7

$$\begin{aligned}
\Delta^\zeta \mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta) &= \int_{\mathcal{F}} \Delta^\zeta \Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta) f(P) d\mu(P) \\
&= \int_{\mathcal{F}} \left(\Delta^P \Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)\right) f(P) d\mu(P) \\
&= \int_{\mathcal{F}} \Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta) \Delta^P f(P) d\mu(P) \\
&= -\lambda \int_{\mathcal{F}} \Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta) f(P) d\mu(P) \\
&= -\lambda \mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta).
\end{aligned}$$

*iii)* Da $\lambda \neq 0$ ist, folgt auf Grund der Orthogonalität der Eigenfunktionen von $\Delta$ zu verschiedenen Eigenwerten bezüglich des Peterssonschen Skalarproduktes

$$\int_{\mathcal{F}} f(P) d\mu(P) = \langle f, 1 \rangle = 0.$$

Damit ergibt sich nun wegen der kompakt gleichmäßigen Konvergenz von

$\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)$ in Abhängigkeit von $(P, P_0)$ aus Lemma 3.1.6:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta) &= \int_{\mathcal{F}} \left[ v^2 + v^2 \sum_{W \in \mathcal{R}\setminus\{0\}} e^{4\pi i \mathrm{Re}((\alpha\delta-\beta\gamma)\tau_D u)} e^{-4\pi v |\tau_D| |\alpha\delta-\beta\gamma| \delta(P, WP_0)} \right] f(P) d\mu(P) \\
&= v^2 \int_{\mathcal{F}} \sum_{W \in \mathcal{R}\setminus\{0\}} e^{4\pi i \mathrm{Re}((\alpha\delta-\beta\gamma)\tau_D u)} e^{-4\pi v |\tau_D| |\alpha\delta-\beta\gamma| \delta(P, WP_0)} f(P) d\mu(P) \\
&= v^2 \int_{\mathcal{F}} \sum_{N \in \mathfrak{o}_K\setminus\{0\}} \sum_{W \in \mathcal{R}^{(N)}} e^{4\pi i \mathrm{Re}(N\tau_D u)} e^{-4\pi v |\tau_D| |N| \delta(P, WP_0)} f(P) d\mu(P) \\
&= v^2 \sum_{N \in \mathfrak{o}_K\setminus\{0\}} \int_{\mathcal{F}} \sum_{T \in \Gamma_{\mathcal{R}}} \sum_{k=1}^{d(N)} e^{4\pi i \mathrm{Re}(N\tau_D u)} e^{-4\pi v |\tau_D| |N| \delta(P, T\xi_{kN} P_0)} f(P) d\mu(P) \\
&= v^2 \sum_{N \in \mathfrak{o}_K\setminus\{0\}} e^{4\pi i \mathrm{Re}(N\tau_D u)} \int_{\mathcal{F}} \sum_{T \in \Gamma_{\mathcal{R}}} \sum_{k=1}^{d(N)} e^{-4\pi v |\tau_D| |N| \delta(T^{-1}P, \xi_{kN} P_0)} f(P) d\mu(P) \\
&= v^2 \sum_{N \in \mathfrak{o}_K\setminus\{0\}} e^{4\pi i \mathrm{Re}(N\tau_D u)} \int_{\mathcal{F}} \sum_{T \in \Gamma_{\mathcal{R}}} \sum_{k=1}^{d(N)} e^{-4\pi v |\tau_D| |N| \delta(TP, \xi_{kN} P_0)} \underbrace{f(TP)}_{=f(P)} d\mu(P) \\
&= 2v^2 \sum_{N \in \mathfrak{o}_K\setminus\{0\}} e^{4\pi i \mathrm{Re}(N\tau_D u)} \int_{\mathbb{H}} \sum_{k=1}^{d(N)} e^{-4\pi v |\tau_D| |N| \delta(P, \xi_{kN} P_0)} f(P) d\mu(P) \\
&\quad (\text{da } -I \in \Gamma_R) \\
&= 2v^2 \sum_{N \in \mathfrak{o}_K\setminus\{0\}} e^{4\pi i \mathrm{Re}(N\tau_D u)} \sum_{k=1}^{d(N)} \frac{1}{v|N\tau_D|} K_s(4\pi v |N\tau_D|) f(\xi_{kN} P_0) \\
&\quad (\text{nach Lemma 3.2.3 mit } c = 2v|N\tau_D|) \\
&= 2v \sum_{N \in \mathfrak{o}_K\setminus\{0\}} \frac{1}{|N\tau_D|} \sum_{k=1}^{d(N)} f(\xi_{kN} P_0) K_s(4\pi v |N\tau_D|) e^{4\pi i \mathrm{Re}(N\tau_D u)}.
\end{aligned}$$

*iv)* Wir betrachten den Summanden für $N = 1$. Es gilt $\mathcal{R}^{(1)} = \Gamma_{\mathcal{R}}$. Somit ist bei geeigneter Wahl von $P_0$

$$\sum_{k=1}^{d(1)} f(\xi_{kN} P_0) = f(P_0) \neq 0,$$

da $f \not\equiv 0$ ist.

*v)* Wir zeigen zuerst
$$d(N) = O[e^{|N|\epsilon}]$$
für jedes $\epsilon > 0$.
Dazu betrachten wir den Fall
$$\lambda = 0 \text{ und } f \equiv 1.$$
Ein Nachahmen der Umformungen aus *iii)* unter Beachtung der kompakt gleichmäßig absoluten Konvergenz von $\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)$ auf $\mathbb{H}$ und der relativen Kompaktheit von $\mathcal{F}$ liefert uns nun:

$$\begin{aligned}
\infty &> \int_{\mathcal{F}} v^2 \sum_{W \in \mathcal{R}} \left| e^{4\pi i \mathrm{Re}((\alpha\delta - \beta\gamma)\tau_D u)} e^{-4\pi v |\tau_D| |\alpha\delta - \beta\gamma| \delta(P, WP_0)} \right| d\mu(P) \\
&= \sum_{N \in \mathfrak{o}_K} \sum_{W \in \mathcal{R}^{(N)}} \int_{\mathcal{F}} \left| v^2 e^{4\pi i \mathrm{Re}(N\tau_D u)} e^{-4\pi v |\tau_D| |N| \delta(P, WP_0)} \right| d\mu(P) \\
&= \sum_{N \in \mathfrak{o}_K \setminus \{0\}} \sum_{W \in \mathcal{R}^{(N)}} \int_{\mathcal{F}} \left| v^2 e^{-4\pi v |\tau_D| |N| \delta(P, WP_0)} \right| d\mu(P) + v^2 \int_{\mathcal{F}} d\mu(P) \\
&\geq \sum_{N \in \mathfrak{o}_K \setminus \{0\}} \left| \sum_{W \in \mathcal{R}^{(N)}} \int_{\mathcal{F}} v^2 e^{-4\pi v |\tau_D| |N| \delta(P, WP_0)} d\mu(P) \right| + v^2 \mu(\mathcal{F}) \\
&= \sum_{N \in \mathfrak{o}_K \setminus \{0\}} \left| 2v^2 \sum_{k=1}^{d(N)} \int_{\mathbb{H}} e^{-4\pi v |N\tau_D| \delta(P, WP_0)} d\mu(P) \right| + v^2 \mu(\mathcal{F}) \\
&= \sum_{N \in \mathfrak{o}_K \setminus \{0\}} \left| 2v^2 d(N) \frac{1}{v |N\tau_D|} K_1(4\pi v |N\tau_D|) \right| + v^2 \mu(\mathcal{F}) \\
&= \sum_{N \in \mathfrak{o}_K \setminus \{0\}} 2v \frac{d(N)}{|N\tau_D|} \left| K_1(4\pi v |N\tau_D|) \right| + v^2 \mu(\mathcal{F}).
\end{aligned}$$

Im Hinblick auf Lemma 3.2.5 erhalten wir deshalb
$$\sum_{N \in \mathfrak{o}_K \setminus \{0\}} 2v \frac{d(N)}{|N\tau_D|} \frac{e^{-4\pi v |N\tau_D|}}{8\pi v |N\tau_D|} + v^2 \mu(\mathcal{F}) < \infty.$$
Für beliebiges $\zeta = jv \in \mathbb{H}$ gilt also
$$\sum_{N \in \mathfrak{o}_K \setminus \{0\}} \frac{d(N)}{|N|^2} e^{-4\pi v |N\tau_D|} < \infty.$$
Somit folgt für alle $\epsilon > 0$
$$d(N) = O[e^{|N|\epsilon}].$$

Da die Besselfunktion $K_s(4\pi v|N\tau_D|)$ für $|N| \to \infty$ nach Lemma 3.2.5 exponentiell verschwindet, ergibt sich die kompakt gleichmäßig absolute Konvergenz der Reihe aus *iii*).

Zur Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{N \in \mathfrak{o}_K \setminus \{0\}} \frac{d(N)}{|N|^s} < \infty$ für $\mathrm{Re}(s) > 4$:
Es seien

$$\lambda = 0,\ f \equiv 1, \zeta = jv \in \mathbb{H} \text{ und } M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2; \mathfrak{o}_K).$$

Wir setzen jetzt $\zeta_1 := M^{-1}\zeta$, so dass $\zeta_1 = jv_1$ ist und $v = \frac{1}{v_1}$.
Aus dem Transformationssatz 2.1.6 erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1^{P_0}(jv) &= \mathcal{I}_1^{P_0}(M\zeta_1) \\
&= \int_{\mathcal{F}} v^2 \Theta^0_{S_1,R_1}(M\zeta_1) d\mu(P) \\
&= \int_{\mathcal{F}} v_1^2 |\det(S_1)|^{-1} \sum_{\omega \in S_1^{-1}\mathfrak{o}_K^4 \bmod \mathfrak{o}_K^4} \lambda(S_1\omega, 0) \Theta^\omega_{S_1,R_1}(\zeta_1) d\mu(P) \\
&= |\det(S_1)|^{-1} \sum_{\omega \in S_1^{-1}\mathfrak{o}_K^4 \bmod \mathfrak{o}_K^4} \lambda(S_1\omega, 0) \int_{\mathcal{F}} v_1^2 \Theta^\omega_{S_1,R_1}(\zeta_1) d\mu(P).
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir:
Für alle $\omega \in S_1^{-1}\mathfrak{o}_K^4 \mod \mathfrak{o}_K^4$ gilt:

$$\int_{\mathcal{F}} v_1^2 \Theta^\omega_{S_1,R_1}(\zeta_1) d\mu(P) = O[v_1^2] \text{ für } v_1 \to \infty.$$

Der Fall $\omega \equiv 0 \mod \mathfrak{o}_K^4$ ergibt nach einer Rechnung wie im Beweis von *iii*)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{F}} v_1^2 \Theta^0_{S_1,R_1}(\zeta_1) d\mu(P) &= v_1^2 \mu(\mathcal{F}) + 2v_1 \sum_{N \in \mathfrak{o}_K \setminus \{0\}} \frac{d(N)}{|N\tau_D|} K_1(4\pi v_1 |N\tau_D|) \\
&= O[v_1^2] \text{ für } v_1 \to \infty,
\end{aligned}$$

da $d(N) = O[e^{|N|\epsilon}]$ für beliebige $\epsilon > 0$ ist und nach Lemma 3.2.5 $K_1(r) = O[e^{-r}]$ gilt.

Für $\omega \not\equiv 0 \mod \mathfrak{o}_K^4$ wählen wir

$$A = 4 \det(S_1)\overline{\det(S_1)}.$$

Ist nun $S_1^\# \in \mathrm{GL}(4;K) \cap \mathrm{M}(4;\mathfrak{o}_K)$ die Komplementärmatrix von $S_1$, so folgt wegen $S_1^{-1} = \frac{1}{\det(S_1)} S_1^\#$, dass $\det(S_1)\omega \in \mathfrak{o}_K^4$ ist für alle $\omega \in S_1^{-1}\mathfrak{o}_K^4$.
Für $A = 4|\det(S_1)|^2$ gilt also

$$A \in \mathbb{Z} \text{ und } k_\nu := A\omega \in \mathfrak{o}_K^4 \text{ für alle } \omega \in S_1^{-1}\mathfrak{o}_K^4.$$

Unter Beachtung von $u_1 = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{F}} v_1^2 \Theta^\omega_{S_1,R_1}(\zeta_1) d\mu(P) &= v_1^2 \int_{\mathcal{F}} \sum_{k_x \in \mathfrak{o}_K^4} e^{-2\pi|\tau_D| v_1 R_1\{k_x+\omega\}} d\mu(P) \\
&= A^4 \frac{v_1^2}{A^4} \int_{\mathcal{F}} \sum_{k_x \in \mathfrak{o}_K^4} e^{-2\pi|\tau_D| \frac{v_1}{A^2} R_1\{Ak_x+A\omega\}} d\mu(P) \\
&= A^4 \frac{v_1^2}{A^4} \int_{\mathcal{F}} \sum_{k_x \equiv k_\nu \bmod A\mathfrak{o}_K^4} e^{-2\pi|\tau_D| \frac{v_1}{A^2} R_1\{k_x\}} d\mu(P) \\
&= \frac{A^4}{[\Gamma_{\mathcal{R}} : \Gamma_A]} \frac{v_1^2}{A^4} \int_{\mathcal{F}_A} \sum_{k_x \equiv k_\nu \bmod A\mathfrak{o}_K^4} e^{-2\pi|\tau_D| \frac{v_1}{A^2} R_1\{k_x\}} d\mu(P),
\end{aligned}$$

wobei entsprechend Lemma 3.2.6 $\Gamma_A := \Gamma_{\mathcal{R}} \cap \{x \in \mathcal{R};\ x \in (1 + A\mathcal{R})\}$ und $\mathcal{F}_A$ ein Fundamentalbereich für $\Gamma_A$ ist.
Im Hinblick auf Lemma 3.2.6 verläuft die Berechnung des Integrals analog zur Berechnung von $\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta)$ in *iii*). Dabei ist die Summation über $\mathcal{R}^{(N)}$ zu ersetzen durch die Summation über $\mathcal{R}_A^{(N)} = \sum_{k=1}^{d(N)} \Gamma_A \xi_{kN}$. Da $0 \notin (\nu + A\mathcal{R})$ ist, ergibt sich schließlich wegen $d(N) = O[e^{|N|\epsilon}]$ für alle $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{F}} v_1^2 \Theta^\omega_{S_1,R_1}(\zeta_1) d\mu(P) &= \frac{A^4}{[\Gamma_{\mathcal{R}} : \Gamma_A]} \cdot 2\frac{v_1}{A^2} \sum_{N \in \mathfrak{o}_K \setminus \{0\}} \frac{d(N)}{|N\tau_D|} K_1(4\pi \frac{v_1}{A^2} |N\tau_D|) \\
&= O[v_1^2] \text{ für } v_1 \to \infty.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1^{P_0}(jv) &= O[v_1^2] \text{ für } v_1 \to \infty \\
&= O[v^{-2}] \text{ für } v \to 0.
\end{aligned}$$

Aus dem Beweis von $d(N) = O[e^{|N|\epsilon}]$ folgt

$$\mathcal{I}_1^{P_0}(jv) = v^2\mu(\mathcal{F}) + \sum_{N \in \mathfrak{o}_K \setminus \{0\}} 2vd(N) \frac{1}{|N\tau_D|} K_1(4\pi v |N\tau_D|),$$

also
$$\sum_{N\in\mathfrak{o}_K\setminus\{0\}} v\frac{d(N)}{|N|}K_1(4\pi v|N\tau_D|) = O[v^{-2}] \text{ für } v\to 0.$$
Aus Lemma 3.2.5 erhalten wir
$$\sum_{N\in\mathfrak{o}_K\setminus\{0\}} \frac{d(N)}{|N|^2}e^{-4\pi|N\tau_D|v} = O[v^{-2}] \text{ für } v\to 0$$
und somit
$$\sum_{N\in\mathfrak{o}_K\setminus\{0\}} \frac{d(N)}{|N|^2}e^{-4\pi|N\tau_D|\frac{1}{T}} = O[T^2] \text{ für } T\to\infty.$$
Wegen
$$\sum_{N\in\mathfrak{o}_K\setminus\{0\}} \frac{d(N)}{|N|^2}e^{-4\pi|N\tau_D|\frac{1}{T}} \geq \sum_{1\leq|N|\leq T} \frac{d(N)}{|N|^2}e^{-4\pi|N\tau_D|\frac{1}{T}} \geq e^{-4\pi|\tau_D|}\sum_{1\leq|N|\leq T}\frac{d(N)}{|N|^2}$$
ergibt sich also
$$\sum_{1\leq|N|\leq T}\frac{d(N)}{|N|^2} = O[T^2].$$
Wir zählen nun die Menge $\{|N|;\ N\in\mathfrak{o}_K,\ N\neq 0\}$ ab zu einer mononton wachsenden Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und setzen
$$a_n = \sum_{|N|=\lambda_n}\frac{d(N)}{|N|^2},$$
$$A(t) = \sum_{1\leq\lambda_n\leq t} a_n = \sum_{1\leq|N|\leq t}\frac{d(N)}{|N|^2}$$
und
$$g(t) = \frac{1}{t^{x-2}}.$$
Mit [24], S. 371, Satz 1.4 folgt nun
$$\begin{aligned}\sum_{1\leq|N|\leq T}\frac{d(N)}{|N|^x} &= \sum_{1\leq\lambda_n\leq T} a_n g(\lambda_n)\\ &= A(T)g(T) - \int_1^T A(t)g'(t)dt\\ &= A(T)T^{2-x} + (x-2)\int_1^T A(t)t^{1-x}dt.\end{aligned}$$

Da $A(T) = O[T^2]$ ist, erhalten wir für $x > 4$

$$\sum_{N \in \mathfrak{o}_K \setminus \{0\}} \frac{d(N)}{|N|^x} = (x-2) \int_1^\infty A(t) t^{1-x} dt < \infty.$$

*vi)* Wir wählen $P_0 \in \mathbb{H}$ im Hinblick auf *iv)* so, dass $\mathcal{I}_f^{P_0} \not\equiv 0$ ist. Nach *i)* und *ii)* ist dann nur noch das Verhalten von $\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta)$ in den Spitzen von $\Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1})$ zu überprüfen.
In $\infty$ hat $\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta)$ nach *iii)* bereits die benötigte Gestalt.
Da die Klassenzahl 1 ist, sind die übrigen Spitzen unter $\mathrm{SL}(2; \mathfrak{o}_K)$ äquivalent zu $\infty$.
Es sei also $\zeta' \neq \infty$ eine Spitze von $\Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1})$ mit $\zeta' = M\infty$ für ein $M \in \mathrm{SL}(2; \mathfrak{o}_K)$. Mittels des Transformationssatzes 2.1.6 gilt nun

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_f^{P_0}(M\zeta) &= \int_{\mathcal{F}} \Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, M\zeta) f(P) d\mu(P) \\
&= \int_{\mathcal{F}} v_{M\zeta}^2 \Theta^0_{S_1,R_1}(M\zeta) f(P) d\mu(P) \\
&= \int_{\mathcal{F}} v^2 |\det(S_1)|^{-1} |c|^{-4} \sum_{\omega \in S_1^{-1}\mathfrak{o}_K^4 \bmod \mathfrak{o}_K^4} \lambda(S_1\omega, 0) \Theta^\omega_{S_1,R_1}(\zeta) f(P) d\mu(P) \\
&= |\det(S_1)|^{-1} |c|^{-4} \sum_{\omega \in S_1^{-1}\mathfrak{o}_K^4 \bmod \mathfrak{o}_K^4} \lambda(S_1\omega, 0) v^2 \int_{\mathcal{F}} \Theta^\omega_{S_1,R_1}(\zeta) f(P) d\mu(P).
\end{aligned}$$

Es ist also

$$v^2 \int_{\mathcal{F}} \Theta^\omega_{S_1,R_1}(\zeta) f(P) d\mu(P)$$

zu untersuchen:
Den Fall $\omega \equiv 0 \mod \mathfrak{o}_K^4$ können wir *i)* entnehmen.
Für $\omega \not\equiv 0 \mod \mathfrak{o}_K^4$ wählen wir analog zum Beweis von *v)* $A \in \mathbb{Z}$ so, dass $k_\nu := A\omega \in \mathfrak{o}_K^4$ ist
und erhalten

$$\begin{aligned}
&v^2 \int_{\mathcal{F}} \Theta^\omega_{S_1,R_1}(\zeta) f(P) d\mu(P) \\
&= \frac{A^4}{[\Gamma_{\mathcal{R}} : \Gamma_A]} \frac{v^2}{A^4} \int_{\mathcal{F}_A} \sum_{k_x \equiv k_\nu \bmod A\mathfrak{o}_K^4} e^{\pi i 2 \mathrm{Re}\left(\tau_D \frac{u}{A^2} S_1[k_x]\right)} e^{-2\pi |\tau_D| \frac{v}{A^2} R_1\{k_x\}} f(P) d\mu(P).
\end{aligned}$$

Mittels Lemma 3.2.6 verläuft die Berechnung des Integrals wieder wie die Berechnung von $\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta)$ in *iii)*. Dabei ist die Summation über $\mathcal{R}^{(N)}$ zu ersetzen durch die Summation über $\mathcal{R}_A^{(N)} = \sum_{k=1}^{d(N)} \Gamma_A \xi_{kN}$.

Es folgt

$$v^2 \int_{\mathcal{F}} \Theta^{\omega}_{S_1,R_1}(\zeta) f(P) d\mu(P)$$
$$= \frac{A^4}{[\Gamma_{\mathcal{R}} : \Gamma_A]} \cdot 2\frac{v}{A^2} \sum_{N \in \mathfrak{o}_K \setminus \{0\}} \frac{1}{|N\tau_D|} \sum_{k=1}^{d(N)} f(\xi_{kN} P_0) K_s(4\pi \frac{v}{A^2}|N\tau_D|) e^{4\pi i \mathrm{Re}(N\tau_D \frac{u}{A^2})}.$$

$\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta)$ hat somit in jeder Spitze von $\Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1})$ die erforderliche Gestalt.

□

**Lemma 3.2.5.** *Es gilt für die modifizierte Besselfunktion $K_s(r)$ mit $r \in \mathbb{R}^+$:*

*i)* $K_1(r) \geq \dfrac{e^{-r}}{2r}$.

*ii)* $|K_s(r)| \leq \dfrac{3e^{-r}}{\sqrt{r}} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{r}}\right)$ *für* $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$.

*Beweis.*
*i)* Mit [21], S. 85 folgt

$$K_1(r) = \int_0^\infty e^{-r\cosh(t)} \cosh(t) dt \geq \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-re^t} e^t dt = \frac{1}{2} \int_1^\infty e^{-rx} dx = \frac{e^{-r}}{2r}.$$

*ii)* [9], S. 290, Lemma 4.8 oder [13], S. 149, Lemma 12.1.

□

**Lemma 3.2.6.** *Es seien $A, N \in \mathfrak{o}_K$ und $\nu \in \mathcal{R}$.*
*Für*

$$\Gamma_A := \Gamma_{\mathcal{R}} \cap \{x \in \mathcal{R};\ x \in (1 + A\mathcal{R})\}$$

*und*

$$\mathcal{R}_A^{(N)} := \mathcal{R}^{(N)} \cap \{x \in \mathcal{R};\ x \in (\nu + A\mathcal{R})\}$$

*gilt:*

*i)* $\Gamma_A$ *ist eine Untergruppe von* $\Gamma_{\mathcal{R}}$ *mit* $[\Gamma_{\mathcal{R}} : \Gamma_A] < \infty$,

*ii)* $\mathcal{R}_A^{(N)} = \sum_{k=1}^{d(N)} \Gamma_A \xi_{kN}$ *mit* $\xi_{kN} \in \mathcal{R}_A^{(N)}$.

*Beweis.*
*i)* Da $\Gamma_A$ Kern des Gruppenhomomorphismus $\Gamma_{\mathcal{R}} \to (\mathcal{R}/A\mathcal{R})^*$ ist und $(\mathcal{R}/A\mathcal{R})^*$ endlich ist, erhalten wir die Behauptung.

*ii)* Aus Lemma 1.3.8 folgt, dass es endlich viele $\xi_1, \ldots, \xi_l \in \mathcal{R}_A^{(N)}$ gibt mit

$$\mathcal{R}_A^{(N)} \subset \sum_{k=1}^{l} \Gamma_{\mathcal{R}} \xi_k.$$

Da nach *i)* $[\Gamma_{\mathcal{R}} : \Gamma_A] < \infty$ ist, existieren $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma_{\mathcal{R}}$ mit

$$\Gamma_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_A \gamma_i.$$

Also gilt

$$\mathcal{R}_A^{(N)} \subset \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n} \Gamma_A \gamma_i \xi_k.$$

Es seien nun $y \in \Gamma_A$ und $x \in \mathcal{R}_A^{(N)}$. Da $\mathrm{n}(xy) = n(x) = N$ ist, folgt

$$yx \in \mathcal{R}_A^{(N)}.$$

Somit erhalten wir für $\gamma_i \xi_k \in \mathcal{R}_A^{(N)}$

$$\Gamma_A \gamma_i \xi_k \subset \mathcal{R}_A^{(N)}.$$

Für $\gamma_i \xi_k \notin \mathcal{R}_A^{(N)}$ gilt nun

$$\Gamma_A \gamma_i \xi_k \cap \mathcal{R}_A^{(N)} = \varnothing.$$

Begründung: Existiert ein $\alpha \in \Gamma_A$ mit $\alpha \gamma_i \xi_k \in \Gamma_A \gamma_i \xi_k \cap \mathcal{R}_A^{(N)}$, so folgt $\gamma_i \xi_k = \alpha^{-1} \alpha \gamma_i \xi_k \in \mathcal{R}_A^{(N)}$, da $\Gamma_A$ eine Untergruppe von $\Gamma_{\mathcal{R}}$ ist.

Insgesamt existieren also $\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_m} \in \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ und $\xi_{k_1}, \ldots, \xi_{k_h} \in \{\xi_1, \ldots, \xi_l\}$ mit $\gamma_{i_a} \xi_{k_b} \in \mathcal{R}_A^{(N)}$ für alle $a \in \{i_1, \ldots, i_m\}$ und $b \in \{k_1, \ldots, k_h\}$, so dass

$$\mathcal{R}_A^{(N)} = \sum_{b=1}^{h} \sum_{a=1}^{m} \Gamma_A \gamma_{i_a} \xi_{k_b}.$$

$\square$

*Anmerkung:* $d(N)$ und $\xi_{kN}$ hängen von $A$ und $\nu$ ab und sind i.A. verschieden von $d(N)$ und $\xi_{kN}$ aus Lemma 1.3.8.

## 3.3 Der inverse Theta-Lift

Im vorherigen Abschnitt haben wir gezeigt, dass sich für den Fall $h = 1$ und $\lambda \neq 0$ Eigenfunktion des Laplace-Beltrami-Operators zu $\Gamma_{\mathcal{R}}$ mit Eigenwert $\lambda$ durch einen geeigneten Theta-Lift in (erweiterte) Spitzenfunktionen zu $\Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1})$ überführen lassen. Dieses Verfahren lässt sich in gewisser Weise auch umkehren. Dafür benötigen wir die Äquivalenz aller Spitzen unter $\mathrm{SL}(2; \mathfrak{o}_K)$.

**Voraussetzung 3.3.1.** *Im weiteren Verlauf gelte für die Klassenzahl h stets*

$$h = 1.$$

**Definition 3.3.2.** *Es sei* $\nu : \Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1}) \to \mu_8 \subset \mathbb{C}^*$ *der zu* $\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)$ *gehörende Charakter aus Satz 3.1.7, wobei* $\mu_8$ *die Menge der achten Einheitswurzeln in* $\mathbb{C}$ *bezeichne. Damit definieren wir*

$$\Gamma_{\mathcal{N}} := \{L \in \Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1});\ \nu(L) = 1\} = \ker \nu.$$

**Lemma 3.3.3.** $\Gamma_{\mathcal{N}}$ *ist eine Untergruppe von* $\Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1})$ *mit*

$$[\Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1}) : \Gamma_{\mathcal{N}}] \leq 8.$$

*Insbesondere ist* $\Gamma_{\mathcal{N}}$ *kofinit.*

*Beweis.* Die Behauptung folgt unmittelbar, da $\Gamma_{\mathcal{N}}$ Kern des Gruppenhomomorphismus $\nu : \Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1}) \to \mu_8$ ist.

□

**Definition 3.3.4.** *Es sei* $C_{\mathcal{N}}$ *der von den Spitzenformen zu* $\Gamma_{\mathcal{N}}$ *erzeugte abgeschlossene Unterraum von* $L^2(\Gamma_{\mathcal{N}} \diagdown \mathbb{H})$.

**Definition 3.3.5.** *Es seien* $g \in C_{\mathcal{N}}$ *zweimal stetig differenzierbar mit* $-\Delta g = \lambda g$ *und* $\mathcal{F}_{\mathcal{N}}$ *ein Fundamentalbereich von* $\Gamma_{\mathcal{N}}$. *Für* $P \in \mathbb{H}$ *und* $\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)$ *aus Definition 3.1.5 sei*

$$\mathcal{J}_g^{P_0}(P) := \int_{F_{\mathcal{N}}} \overline{\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)} g(\zeta) d\mu(\zeta).$$

**Lemma 3.3.6.** *Die Integraldarstellung von* $\mathcal{J}_g^{P_0}(P)$ *konvergiert absolut.*

*Beweis.* Wir müssen das Verhalten von $\overline{\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)}g(\zeta)$ in den Spitzen von $\Gamma_{\mathcal{N}}$ untersuchen:
Für die Spitze in $\infty$ ergibt sich

$$\begin{aligned} |\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)| &= \left| v^2 \sum_{n \in \mathfrak{o}_K^4} e^{\pi i 2 \mathrm{Re}(u \tau_D S_1[n])} e^{-2\pi v |\tau_D| R_1\{n\}} \right| \\ &\leq v^2 \sum_{n \in \mathfrak{o}_K^4} e^{-2\pi v |\tau_D| R_1\{n\}}. \end{aligned}$$

Es sei nun $\zeta' = M\infty$, $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2; \mathfrak{o}_K)$, $c \neq 0$, eine von $\infty$ verschiedene Spitze von $\Gamma_{\mathcal{N}}$.
Aus Satz 2.1.6 folgt dann

$$\begin{aligned} &|\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, M\zeta)| \\ &\quad = v^2 |\det S_1|^{-1} |c|^{-4} \\ &\qquad \cdot \left| \sum_{\omega \in S_1^{-1}\mathfrak{o}_K^4 \bmod \mathfrak{o}_K^4} \lambda(S_1\omega, 0) \sum_{n \in \mathfrak{o}_K^4} e^{\pi i 2 \mathrm{Re}(u \tau_D S_1[n+\omega])} e^{-2\pi v |\tau_D| R_1\{n+\omega\}} \right| \\ &\quad \leq v^2 |\det S_1|^{-1} |c|^{-4} \sum_{\omega \in S_1^{-1}\mathfrak{o}_K^4 \bmod \mathfrak{o}_K^4} \sum_{g \in \mathfrak{o}_K^4 \bmod c\mathfrak{o}_K^4} \sum_{n \in \mathfrak{o}_K^4} e^{-2\pi v |\tau_D| R_1\{n+\omega\}}. \end{aligned}$$

Da $g$ als Spitzenform exponentiell in den Spitzen verschwindet, folgt die Behauptung.

□

**Lemma 3.3.7.** *Für $g \in C_{\mathcal{N}}$ mit $-\Delta g = \lambda g$ ist*

$$\mathcal{J}_g^{P_0}(\cdot) \in C^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H}, \lambda).$$

*Beweis.* Laut dem Beweis von Lemma 2.2.10 existiert für kompakte Mengen $K, K' \subset \mathbb{H}$ ein $a > 0$, so dass für alle $P \in K'$ und $x \in \mathbb{C}^4$

$$x^t R_1 \overline{x} \geq a \|x\|^2$$

ist. Mit der Siegelschen Transformationsformel 2.1.6 lassen sich nun ähnlich den Abschätzungen im Beweis von Lemma 3.3.6 geeignete Majoranten für die partiellen Ableitungen von $\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)$ finden, so dass analog zu Theorem 3.2.4 gilt:

$$\mathcal{J}_g^{P_0} \in C^2(\mathbb{H})$$

und
$$\Delta^P \mathcal{J}_g^{P_0}(P) = \int_{\mathcal{F}_\mathcal{N}} \overline{\Phi_\mathcal{R}(P, P_0, \zeta)} \Delta^\zeta g(\zeta) d\mu(\zeta) = -\lambda \mathcal{J}_g^{P_0}(P).$$
Mit Satz 3.1.7 folgt die Behauptung.

□

**Definition 3.3.8.** *Es sei $C_{\Gamma_\mathcal{R}}$ der von den Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami-Operators zu Eigenwerten $\lambda \neq 0$ erzeugte abgeschlossene Unterraum von $L^2(\Gamma_\mathcal{R} \backslash \mathbb{H})$.*

**Satz 3.3.9.** *Die Funktionen $\mathcal{I}_f^{P_0}$ aus Definition 3.2.1 und $\mathcal{J}_g^{P_0}$ aus Definition 3.3.5 lassen sich für festes $P_0 \in \mathbb{H}$ zu beschränkten linearen Abbildungen*
$$\mathcal{I}^{P_0} : C_{\Gamma_\mathcal{R}} \to C_\mathcal{N} \ \text{ und } \ \mathcal{J}^{P_0} : C_\mathcal{N} \to C_{\Gamma_\mathcal{R}}$$
*erweitern.*

*Beweis (vgl. [3], S. 57, Proposition 5.2).*
Zu $\mathcal{I}^{P_0} : C_{\Gamma_\mathcal{R}} \to C_\mathcal{N}$:
Es sei zunächst $f \in C_{\Gamma_\mathcal{R}}$ eine Eigenfunktion von $\Delta$.
Da $\mathcal{F}$ kokompakt ist, existiert wie im Beweis von Lemma 2.2.10 ein $a > 0$, so dass für alle $P \in \mathcal{F}$ und $x \in \mathbb{C}^4$
$$2\pi |\tau_D| R_1\{x\} \geq a \|x\|^2$$
ist. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt damit
$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta)| &\leq v^2 \sum_{n \in \mathfrak{o}_K^4 \backslash \{0\}} \int_\mathcal{F} e^{-2\pi v |\tau_D| R_1\{n\}} |f(P)| d\mu(P) \\
&\leq v^2 \sum_{n \in \mathfrak{o}_K^4 \backslash \{0\}} e^{-a\|n\|^2 v} \int_\mathcal{F} |f(P)| d\mu(P) \\
&= v^2 \sum_{n \in \mathfrak{o}_K^4 \backslash \{0\}} e^{-a\|n\|^2 v} \int_\mathcal{F} |f(P)| \cdot 1 d\mu(P) \\
&\leq v^2 \sum_{n \in \mathfrak{o}_K^4 \backslash \{0\}} e^{-a\|n\|^2 v} \left( \int_\mathcal{F} 1^2 d\mu(P) \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_\mathcal{F} |f(P)|^2 d\mu(P) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= v^2 \mu(\mathcal{F})^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Gamma_\mathcal{R} \backslash \mathbb{H})} \sum_{n \in \mathfrak{o}_K^4 \backslash \{0\}} e^{-a\|n\|^2 v}.
\end{aligned}$$
Ist nun $M\infty$, $M \in \mathrm{SL}(2; \mathfrak{o}_K)$, eine komplexe Spitze von $\mathcal{F}_\mathcal{N}$, so ergibt sich mit Satz 2.1.6
$$|\mathcal{I}_f^{P_0}(M\zeta)| \leq v^2 |\det S_1|^{-1} |c|^{-4} \sum_{\omega \in S_1^{-1} \mathfrak{o}_K^4 \bmod \mathfrak{o}_K^4} \mu(\mathcal{F})^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Gamma_\mathcal{R} \backslash \mathbb{H})} \sum_{n \in \mathfrak{o}_K^4 \backslash \{0\}} e^{-a\|n+\omega\|^2 v}.$$

Mit diesen Abschätzungen erhalten wir schließlich für ein geeignetes $C > 0$, das nicht von $f$ abhängt,

$$\|\mathcal{I}_f^{P_0}\|^2_{L^2(\Gamma_\mathcal{N}\diagdown\mathbb{H})} = \int_{\mathcal{F}_\mathcal{N}} |\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta)|^2 d\mu(\zeta) \leq C\|f\|^2_{L^2(\Gamma_\mathcal{R}\diagdown\mathbb{H})}.$$

Es sei nun $f \in C_{\Gamma_\mathcal{R}}$ beliebig.
Für einen Eigenwert $\lambda_n$ von $\Delta$ sei $\hat{f}_n \in C_{\Gamma_\mathcal{R}}$ die Projektion von $f$ auf den zugehörigen Eigenraum, so dass im Sinne der Konvergenz in $L^2(\Gamma_\mathcal{R}\diagdown\mathbb{H})$

$$f = \sum_n \hat{f}_n$$

ist mit $\lambda_n \neq \lambda_m$ für $n \neq m$. Da nach Theorem 3.2.4 alle $\mathcal{I}_{\hat{f}_n}^{P_0}$ Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_n$ und deshalb zueinander orthogonal sind, folgt dann mit der Stetigkeit des Skalarproduktes

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{I}_f^{P_0}\right\|^2_{L^2(\Gamma_\mathcal{N}\diagdown\mathbb{H})} &= \left\langle \mathcal{I}_f^{P_0}, \mathcal{I}_f^{P_0}\right\rangle_{\Gamma_\mathcal{N}} \\
&= \left\langle \mathcal{I}^{P_0}_{\sum_n \hat{f}_n}, \mathcal{I}^{P_0}_{\sum_n \hat{f}_n}\right\rangle_{\Gamma_\mathcal{N}} \\
&= \left\langle \sum_n \mathcal{I}^{P_0}_{\hat{f}_n}, \sum_n \mathcal{I}^{P_0}_{\hat{f}_n}\right\rangle_{\Gamma_\mathcal{N}} \\
&= \sum_n \left\langle \mathcal{I}^{P_0}_{\hat{f}_n}, \mathcal{I}^{P_0}_{\hat{f}_n}\right\rangle_{\Gamma_\mathcal{N}} \\
&= \sum_n \left\|\mathcal{I}^{P_0}_{\hat{f}_n}\right\|^2_{L^2(\Gamma_\mathcal{N}\diagdown\mathbb{H})} \\
&\leq C\sum_n \left\|\hat{f}_n\right\|^2_{L^2(\Gamma_\mathcal{R}\diagdown\mathbb{H})} \\
&= C\left\|\sum_n \hat{f}_n\right\|^2_{L^2(\Gamma_\mathcal{R}\diagdown\mathbb{H})} \\
&= C\|f\|^2_{L^2(\Gamma_\mathcal{R}\diagdown\mathbb{H})},
\end{aligned}$$

und $\mathcal{I}^{P_0}$ ist beschränkt.

Zur Beschränktheit von $\mathcal{J}_g^{P_0}$:
Auch hier lässt sich eine Konstante $a > 0$ finden, so dass für alle $P \in \mathcal{F}$ und $x \in \mathbb{C}^4$

$$2\pi|\tau_D|R_1\{x\} \geq a\|x\|^2$$

ist. Es sei nun zunächst $g \in C_\mathcal{N}$ mit $-\Delta g = \lambda g$.
Die bei der Bildung von $\mathcal{J}_g^{P_0}$ durchgeführte Integration über einen nicht

kompakten Fundamentalbereich $\mathcal{F}_{\mathcal{N}}$ lässt sich nach [9], S. 51, Proposition 3.9 aufteilen in eine Integration über einen kompakten Teilbereich $K_{\mathcal{N}} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{N}}$ und endlich viele Spitzensektoren $S_i$.
Bei der Integration über $K_{\mathcal{N}}$ ergibt sich für $P \in \mathcal{F}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left|\int_{K_{\mathcal{N}}} \overline{\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)} g(\zeta) d\mu(\zeta)\right| &\leq \sum_{n \in \mathfrak{o}_K^4} \int_{K_{\mathcal{N}}} v^2 e^{-a\|n\|^2 v} |g(\zeta)| d\mu(\zeta) \\ &\leq \sum_{n \in \mathfrak{o}_K^4} c_1 e^{-\|n\|^2 c_2} \int_{K_{\mathcal{N}}} |g(\zeta)| d\mu(\zeta)\end{aligned}$$

mit geeigneten $c_1, c_2 > 0$.
Für einen Spitzensektor

$$S_i = M_i\{u + jv;\ u \in \mathcal{P}_i, v \geq Y_i\}$$

(vgl. [9], S. 51 Mitte) zur Spitze $M_i\infty$ erhalten wir mit Satz 2.1.6

$$\begin{aligned}&\left|\int_{S_i} \overline{\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)} g(\zeta) d\mu(\zeta)\right| \\ &\leq \int_{M_i^{-1} S_i} \left|\overline{\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, M_i\zeta)}\right| |g(M_i\zeta)| d\mu(\zeta) \\ &\leq \int_{M_i^{-1} S_i} v^2 c_3 \sum_{\omega \in S_1^{-1} \mathfrak{o}_K^4 \bmod \mathfrak{o}_K^4} \sum_{n \in \mathfrak{o}_K^4} e^{-a\|n+\omega\|^2 v} |g(M_i\zeta)| d\mu(\zeta) \\ &\leq \sum_{\omega \in S_1^{-1} \mathfrak{o}_K^4 \bmod \mathfrak{o}_K^4} \sum_{n \in \mathfrak{o}_K^4} c_4 e^{-a\|n+\omega\|^2 Y_i} \int_{S_i} |g(\zeta)| d\mu(\zeta)\end{aligned}$$

mit geeigneten $c_3, c_4$.
Insgesamt folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und einer geeigneten von $g$ unabhängigen Konstanten $C > 0$

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{J}_g^{P_0}\right\|^2_{L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \setminus \mathbb{H})} &\leq \int_{\mathcal{F}} \left(C \int_{\mathcal{F}_{\mathcal{N}}} |g(\zeta)| d\mu(\zeta)\right)^2 d\mu(P) \\ &\leq \mu(\mathcal{F}) \mu(\mathcal{F}_{\mathcal{N}}) C^2 \|g\|^2_{L^2(\Gamma_{\mathcal{N}} \setminus \mathbb{H})}.\end{aligned}$$

Für beliebiges $g \in C_{\mathcal{N}}$ ist das weitere Verfahren nun völlig analog zur Abschätzung von $\left\|\mathcal{I}_f^{P_0}\right\|^2_{L^2(\Gamma_{\mathcal{N}} \setminus \mathbb{H})}$ für beliebiges $f \in C_{\Gamma_{\mathcal{R}}}$.

□

**Lemma 3.3.10.** *Die Abbildungen $\mathcal{I}^{P_0}$ und $\mathcal{J}^{P_0}$ aus Satz 3.3.9 sind in folgendem Sinne zueinander adjungiert: Für $f \in C_{\Gamma_{\mathcal{R}}}$ und $g \in C_{\mathcal{N}}$ gilt*

$$\left\langle \mathcal{I}_f^{P_0}, g \right\rangle_{\Gamma_{\mathcal{N}}} = \left\langle f, \mathcal{J}_g^{P_0} \right\rangle_{\Gamma_{\mathcal{R}}}.$$

*Beweis.* Wegen der absoluten Konvergenz der auftretenden Integrale folgt

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{I}_f^{P_0}, g \right\rangle_{\Gamma_{\mathcal{N}}} &= \int_{\mathcal{F}_{\mathcal{N}}} \int_{\mathcal{F}} \Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta) f(P) d\mu(P) \overline{g(\zeta)} d\mu(\zeta) \\
&= \int_{\mathcal{F}} f(P) \overline{\int_{\mathcal{F}_{\mathcal{N}}} \overline{\Phi_{\mathcal{R}}(P, P_0, \zeta)} g(\zeta) d\mu(\zeta)} d\mu(P) \\
&= \left\langle f, \mathcal{J}_g^{P_0} \right\rangle_{\Gamma_{\mathcal{R}}}.
\end{aligned}$$

□

Aus dem obigen Lemma ergibt sich:

**Lemma 3.3.11.**

*1.* $C_{\Gamma_{\mathcal{R}}} = \mathrm{Im}\, \mathcal{J}^{P_0} \oplus \ker \mathcal{I}^{P_0}$,

*2.* $C_{\mathcal{N}} = \mathrm{Im}\, \mathcal{I}^{P_0} \oplus \ker \mathcal{J}^{P_0}$.

*Beweis.* Klar, vgl. auch [3], S. 60, Lemma 5.3.

□

# Kapitel 4

# Hecke-Theorie

Hat $K$ die Klassenzahl 1 und ist $f \in C^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H}, \lambda)$, so ist nach Theorem 3.2.4 $\mathcal{I}_f^{P_0}(\zeta)$ eine erweiterte Spitzenform zu $\Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1})$ mit Eigenwert $\lambda$ und einer Fourierentwicklung gemäß Theorem 3.2.4 iii). Ist nun die Ordnung $\mathcal{R}$ maximal in $\mathcal{A}[q, r]$, so werden wir in diesem Kapitel mit Hilfe der Hecke-Theorie die Existenz einer geeigneten Orthonormalbasis $\{f_k^\lambda\}$ von $C^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H}, \lambda)$ zeigen, so dass für die Fourierkoeffizienten der zugehörigen Theta-Lifts $\mathcal{I}_{f_k^\lambda}^{P_0}$ gewisse multiplikative Eigenschaften nachgewiesen werden können.

*Für das gesamte Kapitel setzen wir $h = 1$ voraus.*

## 4.1 Die abstrakte Hecke-Algebra

In diesem Abschnitt stellen wir die Definition der abstrakten Hecke-Algebra vor und rufen einige ihrer wesentlichen Grundeigenschaften in Erinnerung. Unser Vorgehen wird sich dabei häufig an [10] und [30] orientieren.

**Definition 4.1.1.** *Es seien $G$ eine Gruppe und $\Gamma, \Gamma'$ Untergruppen von $G$. Falls $\Gamma \cap \Gamma'$ von endlichem Index in jeder der beiden Untergruppen ist, d.h. falls gilt*

$$[\Gamma : \Gamma \cap \Gamma'] < \infty \ \textit{ und } \ [\Gamma' : \Gamma \cap \Gamma'] < \infty,$$

*so heißen $\Gamma$ und $\Gamma'$* kommensurabel, *in Zeichen $\Gamma \sim \Gamma'$.*

**Definition 4.1.2.** *Es sei $\Gamma$ eine Untergruppe von $G$. Dann heißt*

$$\tilde{\Gamma} := \{g \in G;\ g^{-1}\Gamma g \sim \Gamma\}$$

*der* Kommensurator *von* $\Gamma$ *in* $G$*.*

**Satz 4.1.3.** *Es seien* $\alpha \in \tilde{\Gamma}$*,* $d(\alpha) := [\Gamma : \Gamma \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha]$ *und* $e(\alpha) := [\Gamma : \Gamma \cap \alpha\Gamma\alpha^{-1}]$*. Dann existieren* $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{d(\alpha)} \in \Gamma$ *und* $\eta_1, \dots \eta_{e(\alpha)} \in \Gamma$*, so dass sich die disjunkten Zerlegungen*

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{d(\alpha)} (\Gamma \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha)\epsilon_j = \bigcup_{i=1}^{e(\alpha)} \eta_i(\Gamma \cap \alpha\Gamma\alpha^{-1})$$

*und*

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{j=1}^{d(\alpha)} \Gamma\alpha\epsilon_j = \bigcup_{i=1}^{e(\alpha)} \eta_i\alpha\Gamma$$

*ergeben.*

*Beweis.* [30], S. 51, Proposition 3.1. □

**Lemma 4.1.4.** *Es sei* $\alpha \in \tilde{\Gamma}$*. Ist* $d(\alpha) = e(\alpha)$*, so existiert in* $\Gamma\alpha\Gamma$ *ein gemeinsames Vertretersystem* $\alpha_1, \dots, \alpha_{d(\alpha)}$ *der Rechts- und Linksnebenklassen, d.h.*

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{j=1}^{d(\alpha)} \Gamma\alpha_j = \bigcup_{i=1}^{e(\alpha)} \alpha_i\Gamma.$$

*Beweis.* [30], S. 53, Lemma 3.5 . □

**Definition 4.1.5.** *Es sei* $S$ *eine Halbgruppe mit* $\Gamma \subset S \subset \tilde{\Gamma}$*. Dann bezeichnen wir mit* $R(\Gamma, S)$ *den von allen Doppelnebenklassen* $\Gamma\alpha\Gamma$ *mit* $\alpha \in S$ *erzeugten freien* $\mathbb{Z}$*-Modul. Ferner sei* $L(\Gamma, S)$ *der freie* $\mathbb{Z}$*-Modul, dessen Erzeuger über* $\mathbb{Z}$ *alle Rechtsnebenklassen* $\Gamma\alpha$ *mit* $\alpha \in S$ *sind.*

Ordnen wir nun jeder Doppelnebenklasse

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{j=1}^{d(\alpha)} \Gamma\alpha_j \text{ mit } \alpha \in S$$

das Element

$$j(\Gamma\alpha\Gamma) := \sum_{j=1}^{d(\alpha)} \Gamma\alpha_j \in L(\Gamma, S)$$

zu, so lässt sich dies zu einer eindeutig bestimmten $\mathbb{Z}$-linearen, injektiven Abbildung

$$j : R(\Gamma, S) \to L(\Gamma, S)$$

erweitern. Offenbar operiert $S$ vermöge Multiplikation von rechts auf den Nebenklassen $\Gamma\alpha$ $(\alpha \in S)$ und damit auf $L(\Gamma, S)$.

**Lemma 4.1.6.** *Es sei* $L(\Gamma, S)^\Gamma := \{T \in L(\Gamma, S);\ T\gamma = T \text{ für alle } \gamma \in \Gamma\}$ *der* $\mathbb{Z}$*-Untermodul aller* $\Gamma$*-invarianten Elemente von* $L(\Gamma, S)$*. Dann definiert die Abbildung* $j$ *einen Isomorphismus*

$$j : R(\Gamma, S) \xrightarrow{\sim} L(\Gamma, S)^\Gamma.$$

*Beweis.* [10], S. 228, Bemerkung 1.5.

□

Im Hinblick auf das obige Lemma identifizieren wir im Weiteren, soweit keine Verwechslungen zu befürchten sind, $\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{j=1}^{d(\alpha)} \Gamma\alpha_j$ mit $\sum_{j=1}^{d(\alpha)} \Gamma\alpha_j \in L(\Gamma, S)^\Gamma$.

**Definition 4.1.7.** *Es seien* $\alpha, \beta \in S$. *Ist* $\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{j=1}^{d(\alpha)} \Gamma\alpha_j$*, so ist das Produkt* $(\Gamma\alpha\Gamma)\Gamma\beta$ *wie folgt definiert:*

$$(\Gamma\alpha\Gamma)\Gamma\beta := \sum_{j=1}^{d(\alpha)} \Gamma\alpha_j\beta \in L(\Gamma, S).$$

*Anmerkung:* Das obige Produkt ist wohldefiniert, da bei der Zuordnung $\Gamma\alpha_j \to \Gamma\alpha_j\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, die in $\Gamma\alpha\Gamma$ enthaltenen Rechtsnebenklassen permutiert werden. Es gilt also

$$\sum_{j=1}^{d(\alpha)} \Gamma\alpha_j(\gamma\beta) = \sum_{j=1}^{d(\alpha)} \Gamma\alpha_j\beta,\ \gamma \in \Gamma.$$

Somit ist $\sum_{j=1}^{d(\alpha)} \Gamma\alpha_j\beta$ unabhängig von der speziellen Wahl der Repräsentanten $\alpha_j, \beta$.

Dehnen wir das Produkt nun bilinear aus zu einer Verknüpfung

$$R(\Gamma, S) \times L(\Gamma, S) \to L(\Gamma, S),$$

so erhalten wir:

**Lemma 4.1.8.** *Das Produkt zweier Elemente aus $R(\Gamma, S)$ ist wieder in $R(\Gamma, S)$ enthalten. Weiterhin ist die Verknüpfung $R(\Gamma, S) \times L(\Gamma, S) \to L(\Gamma, S)$ assoziativ in folgendem Sinne:*

$$(T_1 T_2)L = T_1(T_2 L) \text{ für } T_1, T_2 \in R(\Gamma, S),\ L \in L(\Gamma, S).$$

*Somit ist $R(\Gamma, S)$ eine assoziative Algebra mit Einselement $\Gamma 1 \Gamma$, die sogenannte* Hecke-Algebra *des Paares $(\Gamma, S)$.*

*Beweis.* [10], S. 228, Hilfsatz 1.6 und Folgerung 1.7. □

**Lemma 4.1.9.** *Für $\alpha, \beta \in S$ ist das Produkt zweier Doppelnebenklassen $\Gamma\alpha\Gamma = \sum_{j=1}^{d(\alpha)} \Gamma\alpha_j$ und $\Gamma\beta\Gamma = \sum_{k=1}^{d(\beta)} \Gamma\beta_k$ gegeben durch*

$$(\Gamma\alpha\Gamma)(\Gamma\beta\Gamma) := \sum c_{\Gamma\xi\Gamma}(\Gamma\alpha\Gamma, \Gamma\beta\Gamma) \cdot \Gamma\xi\Gamma,$$

*wobei $\xi$ ein Vertretersystem der in $\Gamma\alpha\Gamma\beta\Gamma = \bigcup_{k=1}^{d(\beta)} \Gamma\alpha\Gamma\beta_k = \bigcup_{\substack{1\le j\le d(\alpha)\\ 1\le k\le d(\beta)}} \Gamma\alpha_j\beta_k$ enthaltenen Doppelnebenklassen durchläuft und $c_{\Gamma\xi\Gamma}(\Gamma\alpha\Gamma, \Gamma\beta\Gamma)$ die Anzahl der Paare $(j,k)$ ist, so dass $\Gamma\alpha_j\beta_k = \Gamma\xi$ gilt.*
*$c_{\Gamma\xi\Gamma}(\Gamma\alpha\Gamma, \Gamma\beta\Gamma)$ ist dabei unabhängig von der speziellen Wahl der Repräsentanten $\alpha_j$, $\beta_k$, $\xi$ und ungleich 0, falls $\Gamma\xi\Gamma \subset \Gamma\alpha\Gamma\beta\Gamma$ ist.*

*Beweis.* [10], S. 229, Hilfssatz 1.8. □

**Definition 4.1.10.** *Für $\alpha \in \tilde{\Gamma}$ bezeichne*

$$\begin{aligned} \deg(\Gamma\alpha\Gamma) &:= d(\alpha) \\ &= [\Gamma : \Gamma \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha] \\ &= \textit{Anzahl der Rechtsnebenklassen } \Gamma\alpha_j \textit{ in } \Gamma\alpha\Gamma \end{aligned}$$

*den* Grad *von $\Gamma\alpha\Gamma$.*

**Definition 4.1.11.** *Für $T = \sum_k c_k \Gamma\alpha_k\Gamma \in R(\Gamma, S)$ sei*

$$\deg(T) := \sum_k c_k \deg(\Gamma\alpha_k\Gamma)$$

*der* Grad *von $T$.*

**Lemma 4.1.12.** *Mit den obigen Bezeichnungen gilt*

$$\deg(\Gamma\xi\Gamma) c_{\Gamma\xi\Gamma}(\Gamma\alpha\Gamma, \Gamma\beta\Gamma) = \textit{Anzahl der Paare } (j,k) \textit{ mit } \Gamma\xi\Gamma = \Gamma\alpha_j\beta_k\Gamma.$$

*Beweis.* [30], S. 52, Proposition 3.2. □

**Lemma 4.1.13.** *Für $T_1, T_2 \in R(\Gamma, S)$ gilt*

$$\deg(T_1 T_2) = \deg(T_1)\deg(T_2).$$

*Beweis.* [30], S. 52, Proposition 3.3. □

**Definition 4.1.14.** *Ein Antiautomorphismus des Paares $(\Gamma, S)$ ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned} S &\to S \\ s &\to s^* \end{aligned}$$

*mit den Eigenschaften*

1. $(s^*)^* = s$ *für* $s \in S$,
2. $(st)^* = t^* s^*$ *für* $s, t \in S$,
3. $s \in \Gamma \Rightarrow s^* \in \Gamma$.

**Satz 4.1.15.** *Existiert ein Antiautomorphismus $\alpha \to \alpha^*$ von $(\Gamma, S)$, der $\Gamma\alpha\Gamma$ für jedes $\alpha \in S$ auf sich selbst abbildet, d.h. für den $\Gamma\alpha^*\Gamma = \Gamma\alpha\Gamma$ für alle $\alpha \in S$ gilt, so ist die Hecke-Algebra $R(\Gamma, S)$ kommutativ.*

*Beweis.* [30], S. 54, Proposition 3.8. □

## 4.2 Lokalisierungen

Wir erinnern in diesem Abschnitt an einige bekannte Ergebnisse über $\mathcal{P}$-adische Vervollständigungen von imaginär-quadratischen Zahlkörpern und Ordnungen. Weitergehende Informationen finden sich z.B. bei [5], [25], [35] und im neu erschienenen Buch von Maclachlan und Reid [20].
Da wir voraussetzen, dass die Klassenzahl $h$ von $K$ gleich 1 ist, sind alle Ideale in $K$ Hauptideale. Im Folgenden identifizieren wir deshalb die Primstellen/$-$ideale $\mathcal{P}$ mit geeigneten Erzeugenden $p$ der entsprechenden Ideale.

**Definition 4.2.1.** *Wir wählen jeweils einen Vertreter $p$ der in $\mathfrak{o}_K$ assoziierten Primzahlen. Die Menge dieser Primzahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{P}$.*

*Anmerkung:* Werden keine weiteren Angaben gemacht, so bezeichnen wir nachfolgend mit $p$ *stets* Elemente aus $\mathbb{P}$.

**Definition 4.2.2.** *Es sei $\mathfrak{T}$ die Menge der endlichen Produkte $\prod\limits_{p\in\mathbb{P}} p^{c_p}$ mit $p \in \mathbb{P}$ und $c_p \in \mathbb{N}_0$. Somit gilt:*

1. *Für jedes $x \in \mathfrak{o}_K \setminus \{0\}$ existiert* genau ein *$\epsilon \in \mathfrak{o}_K^*$ mit $\epsilon x \in \mathfrak{T}$.*
2. *Sind $x_1, x_2 \in \mathfrak{T}$, so folgt $x_1 x_2 \in \mathfrak{T}$.*

**Definition 4.2.3.** *Es sei $\mathcal{R}$ eine Ordnung in der Divisionsalgebra $\mathcal{A}$. Eine Teilmenge $\mathcal{I}$ von $\mathcal{A}$ heißt ein Links- (Rechts-, zweiseitiges) Ideal von $\mathcal{R}$, wenn*

1. *$\mathcal{I}$ ein links- (rechts-, zwei-) seitiger $\mathcal{R}$-Modul ist,*
2. *$\mathcal{I} \cap K^* \neq \varnothing$ ist und*
3. *ein $x \in K^*$ existiert mit $x\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$.*

**Satz und Definition 4.2.4.** *Es sei $\mathcal{I}$ ein Ideal von $\mathcal{R}$. Dann sind $\mathcal{I}^l := \{x \in \mathcal{A};\ x\mathcal{I} \subset \mathcal{I}\}$ und $\mathcal{I}^r := \{x \in \mathcal{A};\ \mathcal{I}x \subset \mathcal{I}\}$ Ordnungen in $\mathcal{A}$. $\mathcal{I}^l$ heißt die Linksordnung von $\mathcal{I}$ und entsprechend $\mathcal{I}^r$ die Rechtsordnung von $\mathcal{I}$. $\mathcal{I}$ ist ein Linksideal von $\mathcal{I}^l$ und ein Rechtsideal von $\mathcal{I}^r$.*

*Beweis.* [5], S. 71, Satz 10.

□

**Definition 4.2.5.** *Ein Ideal $\mathcal{I}$ von $\mathcal{R}$ heißt ganz, falls $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}^l$ ist (und somit auch $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}^r$ ist ).*

Eine Primstelle $\mathcal{P}$ von $K$ ist eine Äquivalenzklasse von Bewertungen von $K$, wobei wir die triviale Bewertung $\phi$ mit $\phi(0) = 0$ und $\phi(a) = 1$ für $a \in K^*$ ausschließen.
Unendliche/archimedische Primstellen kommen her von den Einbettungen von $K$ in $\mathbb{C}$, während die nichtarchimedischen/endlichen Primstellen von $K$ von den $\mathcal{P}$-adischen Bewertungen herrühren.
In unserem Fall hat $K$ genau eine unendliche Primstelle $\mathcal{P} = \infty$. Diese ist komplex. Da $h = 1$ ist, identifizieren wir die endlichen Primstellen $\mathcal{P}$ mit den zu den Primidealen gehörenden Primzahlen $p \in \mathbb{P}$.

**Definition 4.2.6.** *Für eine Primstelle $\mathcal{P}$ sei $K_{\mathcal{P}}$ die Vervollständigung von $K$ bezüglich der durch die Primstelle induzierten Metrik.*
*Für eine endliche Primstelle $\mathcal{P}$ schreiben wir für $K_{\mathcal{P}}$ auch $K_p$. Entsprechend bezeichnet $\mathfrak{o}_{K_p}$ die $\mathcal{P}$-adische Vervollständigung von $\mathfrak{o}_K$. $\mathfrak{o}_{K_p}$ ist ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{o}_{K_p}p$, so dass $\mathfrak{o}_{K_p}$ modulo Einheiten genau $p$ als Primzahl hat.*
*Für eine Primstelle $\mathcal{P}$ sei $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \mathcal{A}[q,r]_{\mathcal{P}} := \mathcal{A}[q,r] \otimes K_{\mathcal{P}}$ die zugehörige Vervollständigung von $\mathcal{A}[q,r]$. Ist $p \in \mathbb{P}$, so schreiben wir dabei auch $\mathcal{A}_p$ an Stelle von $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$. Für eine Ordnung $\mathcal{R}$ in $\mathcal{A}$ und ein $\mathcal{R}$-Ideal $\mathcal{I}$ seien dementsprechend $\mathcal{R}_p := \mathcal{R} \otimes \mathfrak{o}_{K_p}$ und $\mathcal{I}_p := \mathcal{I} \otimes \mathfrak{o}_{K_p}$.*
*Eine Primstelle $\mathcal{P}$ heißt* verzweigt, *falls $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ eine Divisionsalgebra ist.*

**Satz und Definition 4.2.7.** *Es gibt nur endlich viele Primstellen, an denen $\mathcal{A}$ verzweigt ist.*
*Für die unverzweigten Primstellen gilt*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}} \cong \mathrm{M}(2; K_{\mathcal{P}}).$$

*Da die archimedische Primstelle komplex ist, ist $\mathcal{A}$ dort unverzweigt. Die Verzweigungsstellen heißen auch* charakteristische Primstellen.

*Beweis.* [8], S. 7, Theorem 4 b) und [25], S. 273, Theorem 32.2. Vgl. auch [35], S. 58, Lemme 3.1.

□

**Definition 4.2.8.** *Es sei $\mathcal{R}$ eine Ordnung in $\mathcal{A}$ mit $\mathfrak{o}_K$-Basis $e_0, e_1, e_2, e_3$. Dann heißt*

$$d(\mathcal{R}) := \det(\mathrm{tr}(e_i e_j))$$

*die* Diskriminante *von $\mathcal{R}$.*

*Anmerkung*: $d(\mathcal{R})$ ist modulo $\mathfrak{o}_K^*$ nach [25], S. 126, Theorem 10.2 eindeutig bestimmt.

**Satz 4.2.9.** *Es sei $\mathcal{R}$ eine maximale Ordnung in $\mathcal{A}$. Dann gilt:*

$$p \text{ ist eine charakteristische Primstelle von } \mathcal{A} \Leftrightarrow p \mid d(R).$$

*Beweis.* [25], S. 273, Theorem 32.1 oder auch [35], S. 84, Corollaire 5.3. Dort ist allerdings die Diskriminante etwas anders definiert.

□

**Lemma 4.2.10.** *Es seien $\mathcal{R}$ eine Ordnung in $\mathcal{A}$, $\alpha \in \mathcal{R}$ und $p \in \mathbb{P}$. Dann gilt*

$$(\mathcal{R}\alpha)_p = \mathcal{R}_p\alpha.$$

*Beweis.* Es ist $\mathcal{R}_p\alpha \subset (\mathcal{R}\alpha)_p$. Da beide vollständig sind und $\mathcal{R}\alpha$ enthalten, folgt die Gleichheit.

□

**Satz 4.2.11.** *Es seien $\mathcal{R}$ eine Ordnung in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{I}$ ein Linksideal von $\mathcal{R}$.*

*a) Es ist $\mathcal{I} = \mathcal{A} \cap \bigcap_{p\in\mathbb{P}} \mathcal{I}_p$.*

*b) Ist $\mathcal{R}$ maximal und sind für alle $p \in \mathbb{P}$ Linksideale $\mathcal{J}_p$ von $\mathcal{R}_p$ gegeben, von denen nur endlich viele ungleich $\mathcal{R}_p$ sind, so existiert ein Linksideal $\mathcal{I}$ von $\mathcal{R}$ mit*

$$\mathcal{I}_p = \mathcal{J}_p \text{ für alle } p \in \mathbb{P}.$$

*Beweis.* [5], S. 105, Satz 22 und Satz 23.

□

**Satz 4.2.12.** *Es sei $\mathcal{R}$ eine maximale Ordnung in $\mathcal{A}$.*

*a) Jedes Linksideal in $\mathcal{R}_p$, $p \in \mathbb{P}$, ist ein Hauptideal.*

*b) Für Klassenzahl 1 ist jedes linke $\mathcal{R}$-Ideal ein Hauptideal.*

*Beweis.*

a) $p \mid d(\mathcal{R})$: [25], S. 139, Theorem 13.2.
$p \nmid d(\mathcal{R})$: [35], S. 38, Theorem 2.3 (3) oder [25], S. 171, Theorem 17.3 iii).

b) [35], S. 89, Theoreme 5.7 und Corollaire 5.7 (1) oder [25], S. 307ff, insbesondere S. 313, Theorem 35.14, auch S. 309, Theorem 35.6.

□

**Satz 4.2.13.** *Es sei $\mathcal{I}$ ein ganzes zweiseitiges Ideal der maximalen Ordnung $\mathcal{R}$. Ferner seien $\alpha \in \mathcal{R}$ und $b \in \mathfrak{o}_K$ mit $b \equiv \mathrm{n}(\alpha) \mod \mathcal{I}$. Dann existiert ein $\beta \in \mathcal{R}$ mit $\mathrm{n}(\beta) = b$ und $\beta \equiv \alpha \mod \mathcal{I}$.*

*Beweis.* Dies ist ein Spezialfall von [7], S. 239, Satz 5. □

Wählen wir im obigen Satz speziell $\mathcal{I} = \mathcal{R}$, so gilt insbesondere:

**Lemma 4.2.14.** *Es seien $\mathcal{R}$ eine maximale Ordnung in $\mathcal{A}$ und $b \in \mathfrak{o}_K$. Dann existiert ein $\beta \in \mathcal{R}$ mit $\mathrm{n}(\beta) = b$.*

Wir betrachten nun eine *maximale* Ordnung $\mathcal{R}$ in $\mathcal{A}$ und eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$.

Für $p \nmid d(\mathcal{R})$ gilt nach Satz 4.2.7 und Satz 4.2.9 $\mathcal{A}_p \cong \mathrm{M}(2; K_p)$. Nach [35], S. 38, Theorem 2.3 (1) sind alle maximalen Ordnungen in $\mathrm{M}(2; K_p)$ konjugiert zu $\mathrm{M}(2; \mathfrak{o}_{K_p})$, so dass also

$$\mathcal{R}_p \cong \mathrm{M}(2; \mathfrak{o}_{K_p}) \tag{4.1}$$

ist. Jedes $\alpha \in \mathcal{R}$ mit $\mathrm{n}(\alpha) \neq 0$ lässt sich deshalb als Element von $\mathrm{GL}(2; K_p) \cap \mathrm{M}(2; \mathfrak{o}_{K_p})$ auffassen. Nach dem Elementarteilersatz für Hauptidealringe existieren somit Einheiten $\epsilon_1, \epsilon_2$ von $\mathrm{M}(2; \mathfrak{o}_{K_p})$ mit

$$\epsilon_1 \alpha \epsilon_2 = \begin{pmatrix} p^{c_1} & 0 \\ 0 & p^{c_2} \end{pmatrix}, \text{ wobei } 0 \leq c_1 \leq c_2 \text{ gilt.} \tag{4.2}$$

Dabei sind $c_1, c_2$ eindeutig bestimmt.

Für $p \mid d(\mathcal{R})$ ist $\mathcal{A}_p$ eine Divisionsalgebra der Dimension 4 über ihrem Zentrum $K_p$. Nach [36], S. 20, Proposition 5 enthält $\mathcal{R}_p$ modulo Einheiten genau ein Primelement $\pi_p$, so dass $\pi_p^2$ prim in $\mathfrak{o}_{K_p}$ ist. Es existiert also ein $\epsilon \in \mathfrak{o}_{K_p}^*$ mit $\pi_p^2 = \epsilon p$.

Das maximale Ideal in $\mathcal{A}_p$ ist nach [25], S. 139, Theorem 13.2 durch $\mathcal{R}_p \pi_p = \mathcal{R}_p \pi_p \mathcal{R}_p = \pi_p \mathcal{R}_p$ gegeben. Im Hinblick auf Lemma 4.2.14 können wir dabei $\pi_p$ so wählen, dass $\pi_p \in \mathcal{R}$ ist mit $\mathrm{n}(\pi_p) = p$.

Für $\alpha \in \mathcal{R}$ mit $\mathrm{n}(\alpha) \neq 0$ existiert nun ein eindeutig bestimmtes $c > 0$ mit

$$\mathcal{R}_p \alpha = (\mathcal{R}_p \pi_p)^c = \mathcal{R}_p \pi_p^c. \tag{4.3}$$

**Definition 4.2.15.** *Es seien $\mathcal{R}$ eine maximale Ordnung in $\mathcal{A}$ und $\alpha \in \mathcal{R}$ mit $\mathrm{n}(\alpha) \neq 0$.*

*Für $p \nmid d(\mathcal{R})$ heißt das durch (4.2) bestimmte Paar $(p^{c_1}, p^{c_2})$ der $p$-te Elementarteiler von $\alpha$. Gilt $p \mid d(\mathcal{R})$, so nennen wir $\pi_p^c$ aus (4.3) den $p$-ten Elementarteiler von $\alpha$.*

**Lemma 4.2.16.** *Es sei $\alpha \in \mathcal{R}$. Für $p \nmid \mathrm{n}(\alpha)$ ist $\alpha \in \mathcal{R}_p^*$ und der $p$-te Elementarteiler von $\alpha$ ist* $\begin{cases} (1,1) & \text{für } p \nmid d(\mathcal{R}), \\ 1 & \text{für } p \mid d(\mathcal{R}). \end{cases}$

*Beweis.* Klar.

□

## 4.3 Die Hecke-Algebra der Norm-1-Gruppe einer maximalen Ordnung

Ziel dieses Abschnittes ist es, die allgemeine Theorie der abstrakten Hecke-Algebra auf den Fall der Norm-1-Gruppe einer maximalen Ordnung anzuwenden und gewisse multiplikative Eigenschaften herauszuarbeiten, die wir im nächsten Abschnitt zur Definition von geeigneten Hecke-Operatoren auf $L^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\diagdown\mathbb{H})$ gebrauchen werden. Dieser Abschnitt stellt im Wesentlichen eine Übertragung der Ergebnisse von G. Shimura für maximale Ordnungen über $\mathbb{Q}$ in [29], S. 279-283 auf den hier behandelten Fall von Ordnungen über imaginär-quadratischen Zahlkörpern dar.
Um die Ergebnisse des letzten Abschnitts verwenden zu können, gilt in diesem Abschnitt stets:

**Voraussetzung 4.3.1.** *$\mathcal{R}$ ist eine* maximale *Ordnung in der als Divisionsalgebra vorausgesetzten Quaternionenalgebra $\mathcal{A}[q,r]$.*

Für die zu $\mathcal{R}$ gehörende Norm-1-Gruppe $\Gamma_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathcal{R};\ \mathrm{n}(x) = 1\}$ ist der Kommensurator $\tilde{\Gamma}_{\mathcal{R}}$ von $\Gamma_{\mathcal{R}}$ nach [35], S. 106, Proposition 1.4 gegeben durch

$$\tilde{\Gamma}_{\mathcal{R}} = \mathcal{A}[q,r]^*.$$

Da $\mathcal{A}[q,r]$ eine Divisionsalgebra ist, gilt also

$$\tilde{\Gamma}_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathcal{A}[q,r];\ \mathrm{n}(x) \neq 0\}. \tag{4.4}$$

**Definition und Lemma 4.3.2.** *Unter den obigen Voraussetzungen sei*

$$\mathfrak{S} := \{x \in \mathcal{R}, \mathrm{n}(x) \in \mathfrak{T}\}$$

*mit $\mathfrak{T}$ aus Definition 4.2.2.*
*$\mathfrak{S}$ ist eine Halbgruppe mit $\Gamma_{\mathcal{R}} \subset \mathfrak{S} \subset \tilde{\Gamma}_{\mathcal{R}}$, so dass $R(\Gamma_{\mathcal{R}}, \mathfrak{S})$ eine Hecke-Algebra ist.*

*Beweis.* Klar.

□

**Lemma 4.3.3.** *Es sei $\alpha \in \tilde{\Gamma}_{\mathcal{R}}$. Dann ist $d(\alpha) = e(\alpha)$. Es existiert also ein gemeinsames Vertretersystem $\alpha_1, \dots, \alpha_{d(\alpha)}$ der Rechts- und Linksnebenklassen in $\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}$.*

*Beweis.* Es seien $\mathcal{F}_\mathcal{R}$ ein Fundamentalbereich von $\Gamma_\mathcal{R}$, $\mathcal{F}_{\alpha\mathcal{R}}$ ein Fundamentalbereich von $(\Gamma_\mathcal{R} \cap \alpha^{-1}\Gamma_\mathcal{R}\alpha)$ und $\mathcal{F}_\alpha$ ein Fundamentalbereich von $(\alpha^{-1}\Gamma_\mathcal{R}\alpha)$. Da $\Gamma_\mathcal{R}$ kokompakt ist, haben alle hier auftretenden Fundamentalbereiche endlichen hyperbolischen Flächeninhalt. Ferner ist

$$d(\alpha) = [\Gamma_\mathcal{R} : \Gamma_\mathcal{R} \cap \alpha^{-1}\Gamma_\mathcal{R}\alpha]$$

und

$$e(\alpha) = [\Gamma_\mathcal{R} : \Gamma_\mathcal{R} \cap \alpha\Gamma_\mathcal{R}\alpha^{-1}] = [\alpha^{-1}\Gamma_\mathcal{R}\alpha : \alpha^{-1}\Gamma_\mathcal{R}\alpha \cap \Gamma_\mathcal{R}].$$

Somit gilt

$$d(\alpha)\mu(\mathcal{F}_\mathcal{R}) = \mu(\mathcal{F}_{\alpha\mathcal{R}}) = e(\alpha)\mu(\mathcal{F}_\alpha).$$

Da $\mu(\mathcal{F}_\mathcal{R}) = \mu(\mathcal{F}_\alpha) < \infty$ ist, folgt mit Lemma 4.1.4 die Behauptung.

□

**Satz 4.3.4.** *Es seien $\alpha, \beta \in \mathfrak{S}$. Dann sind äquivalent:*
*a)* $\Gamma_\mathcal{R}\alpha\Gamma_\mathcal{R} = \Gamma_\mathcal{R}\beta\Gamma_\mathcal{R}$.
*b) $\alpha, \beta$ haben die gleichen Elementarteiler (Definition 4.2.15).*
*c) $\mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha$ und $\mathcal{R}/\mathcal{R}\beta$ sind isomorph als linke $\mathcal{R}$-Moduln.*
*d) Es existiert ein $\gamma \in \Gamma_\mathcal{R}$ mit $\mathcal{R}\alpha\gamma = \mathcal{R}\beta$.*

*Beweis.*

a) $\Rightarrow$ d):
Klar.

d) $\Rightarrow$ a):
Aus d) folgt, dass es ein $\gamma' \in \mathcal{R}^* := \{x \in \mathcal{R};\ \mathrm{n}(x) \in \mathfrak{o}_K^*\}$ gibt mit $\gamma'\alpha\gamma = \beta$. Wegen $\mathrm{n}(\alpha) \in \mathfrak{T}$ und $\mathrm{n}(\beta) \in \mathfrak{T}$ folgt notwendigerweise $\mathrm{n}(\gamma') \in \mathfrak{T} \cap \mathfrak{o}_K^* = 1$ und somit $\gamma' \in \Gamma_\mathcal{R}$.

a) $\Rightarrow$ b):
1. $p \nmid d(\mathcal{R})$.
Klar.
2. $p \mid d(\mathcal{R})$.
Es gelte $\gamma_1\alpha\gamma_2 = \beta$ mit $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_\mathcal{R}$. Da nach [25], S. 139, Theorem 13.2 jedes einseitige Ideal ein zweiseitiges Ideal ist, folgt

$$\mathcal{R}_p\beta = \mathcal{R}_p\alpha\gamma_2 = \alpha\gamma_2\mathcal{R}_p = \alpha\mathcal{R}_p = \mathcal{R}_p\alpha.$$

b) $\Rightarrow$ d):
Da $\alpha$ und $\beta$ die gleichen Elementarteiler haben, muss zwangsläufig $\mathrm{n}(\alpha) = \mathrm{n}(\beta)$ sein.
Wir zeigen nun:

Gilt b), so existieren für jedes $p \in \mathbb{P}$ Einheiten $\epsilon_1^{(p)}, \epsilon_2^{(p)} \in \mathcal{R}_p^*$ mit $\mathrm{n}(\epsilon_1^{(p)}) = \mathrm{n}(\epsilon_2^{(p)}) = 1$, so dass

$$\epsilon_1^{(p)} \alpha \epsilon_2^{(p)} = \beta.$$

Für $p \mid d(\mathcal{R})$ ist dies klar.
Wir betrachten also den Fall $p \nmid d(\mathcal{R})$. Nach (4.1) identifizieren wir $\mathcal{R}_p$ mit $\mathrm{M}(2; \mathfrak{o}_{K_p})$. Unter b) existieren somit Einheiten $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4 \in \mathcal{R}_p^*$, so dass

$$\epsilon_1 \alpha \epsilon_2 = \begin{pmatrix} p^{c_1} & 0 \\ 0 & p_2^c \end{pmatrix} = \epsilon_3 \beta \epsilon_4.$$

Da für $i \in \{1,2,3,4\}$ $\mathrm{n}(\epsilon_i) \in \mathfrak{o}_{K_p}^*$ ist, folgt mit

$$\begin{aligned}
\eta_1 &:= \begin{pmatrix} n(\epsilon_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \epsilon_1, \\
\eta_2 &:= \epsilon_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n(\epsilon_2)^{-1} \end{pmatrix}, \\
\eta_3 &:= \begin{pmatrix} n(\epsilon_3)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \epsilon_3, \\
\eta_4 &:= \epsilon_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{n}(\epsilon_4)^{-1} \end{pmatrix}:
\end{aligned}$$

Für $i \in \{1,2,3,4\}$ ist $\eta_i \in \mathcal{R}_p^*$ mit $\mathrm{n}(\eta_i) = 1$ und

$$\begin{aligned}
\eta_1 \alpha \eta_2 &= \begin{pmatrix} \mathrm{n}(\epsilon_1)^{-1} p^{c_1} & 0 \\ 0 & \mathrm{n}(\epsilon_2)^{-1} p^{c_2} \end{pmatrix}, \\
\eta_3 \beta \eta_4 &= \begin{pmatrix} \mathrm{n}(\epsilon_3)^{-1} p^{c_1} & 0 \\ 0 & \mathrm{n}(\epsilon_4)^{-1} p^{c_2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{n}(\alpha) = \mathrm{n}(\beta)$ gilt ferner

$$\mathrm{n}(\epsilon_1)^{-1} \mathrm{n}(\epsilon_2)^{-1} = \mathrm{n}(\epsilon_3)^{-1} \mathrm{n}(\epsilon_4)^{-1},$$

und wir erhalten mit $\mu := \mathrm{n}(\epsilon_3)^{-1} \mathrm{n}(\epsilon_1)$:

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \eta_1 \alpha \eta_2 = \eta_3 \beta \eta_4,$$

womit unsere Zwischenbehauptung für $p \nmid d(\mathcal{R})$ bewiesen ist.
Für jedes $p \in \mathbb{P}$ existieren also Einheiten $\epsilon_1^{(p)}, \epsilon_2^{(p)} \in \mathcal{R}_p^*$ mit

$$\mathrm{n}(\epsilon_1^{(p)}) = \mathrm{n}(\epsilon_2^{(p)}) = 1 \text{ und } \epsilon_1^{(p)} \alpha \epsilon_2^{(p)} = \beta.$$

Es sei nun $\prod_{i=1}^{s} p_i^{e_i} = q$ die Primfaktorzerlegung von $q := \mathrm{n}(\alpha) = \mathrm{n}(\beta) \in \mathfrak{T}$. Nach dem Starken Approximationssatz in der Version von [34], S. 176, Theorem 8.1' existieren nun $\gamma_l \in \mathcal{A}[q,r]$ mit $\mathrm{n}(\gamma_l) = 1$ für $l \in \{1,2\}$, so dass gilt:

$$\gamma_l - \epsilon_l^{(p_i)} \in p_i^{e_i}\mathcal{R}_p \text{ für } i \in \{1,\ldots,s\}$$

und

$$\gamma_l \in \mathcal{R}_p \text{ für } p \nmid q.$$

Im Hinblick auf Satz 4.2.11 a) sind somit auch $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A} \cap \bigcap_{p\in\mathbb{P}} \mathcal{R}_p = \mathcal{R}$. Da $q \in \mathfrak{o}_{K_p}^*$ für $p \nmid q$ ist, ergibt sich also für alle $p \in \mathbb{P}$

$$\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{R} \text{ mit } \mathrm{n}(\gamma_1) = \mathrm{n}(\gamma_2) = 1$$

und

$$\gamma_1 \equiv \epsilon_1^{(p)},\ \gamma_2 \equiv \epsilon_2^{(p)} \mod q\mathcal{R}_p.$$

Insbesondere ist

$$\gamma_1\alpha\gamma_2 \equiv \epsilon_1^{(p)}\alpha\epsilon_2^{(p)} = \beta \mod q\mathcal{R}_p.$$

Nach Lemma 4.2.10 und Satz 4.2.11 a) folgt somit

$$\gamma_1\alpha\gamma_2 \equiv \beta \mod q\mathcal{R}.$$

Wegen $q = \mathrm{n}(\beta) = \mathrm{n}(\alpha\gamma_2)$ ist nun $q\mathcal{R}$ sowohl in $\mathcal{R}\alpha\gamma_2$ als auch in $\mathcal{R}\beta$ enthalten, und wir erhalten schließlich

$$\mathcal{R}\alpha\gamma_2 = \mathcal{R}\beta.$$

d) $\Rightarrow$ c)
Wir betrachteten den durch $\phi : \mathcal{R} \to \mathcal{R},\ x \to x\gamma$ induzierten Homomorphismus $\tilde{\phi} : \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha \to \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha\gamma$. Eine elementare Rechnung zeigt, dass $\tilde{\phi}$ ein linker $\mathcal{R}$-Modul-Isomorphismus ist.

c) $\Rightarrow$ b)
Nach c) existiert nun für alle $p \in \mathbb{P}$ ein linker $\mathcal{R}_p$-Modul-Isomorphismus $\phi_p : \mathcal{R}_p/\mathcal{R}_p\alpha \to \mathcal{R}_p/\mathcal{R}_p\beta$, und es ist $\mathrm{n}(\alpha) = \mathrm{n}(\beta)$.
Da für $p \nmid \mathrm{n}(\alpha)$ die $p$-ten Elementarteiler von $\alpha$ und $\beta$ bereits gleich sind, reicht es zu zeigen:
Für alle $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid \mathrm{n}(\alpha)$ existieren $\epsilon_1^{(p)}, \epsilon_2^{(p)} \in \mathcal{R}_p$, so dass $\epsilon_1^{(p)}\alpha\epsilon_2^{(p)} = \beta$ ist.

Bezeichnen wir im Weiteren mit $[x]$ bzw. $[x]'$ die zu $x \in \mathcal{R}_p$ gehörigen Restklassen modulo $\mathcal{R}_p\alpha$ bzw. $\mathcal{R}_p\beta$, so existieren wegen

$$\phi_p([r]) = \phi_p(r[1]) = r\phi_p([1]) \text{ für alle } r \in \mathcal{R}_p$$

$e_p, t_p \in \mathcal{R}_p$ mit

$$\phi_p([r]) = r[t_p]' \text{ und } \phi_p^{-1}([r]') = r[e_p] \text{ für alle } r \in \mathcal{R}_p.$$

Wegen

$$0 = \phi_p([\alpha]) = [\alpha t_p]' \text{ bzw. } 0 = \phi_p^{-1}([\beta]') = [\beta e_p]$$

gibt es ferner $k_p, l_p \in \mathcal{R}_p$ mit

$$\begin{aligned} \alpha t_p &= k_p \beta, \\ \beta e_p &= l_p \alpha. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha t_p e_p &= k_p l_p \alpha, \\ \beta e_p t_p &= l_p k_p \beta. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Aus

$$[1] = \phi_p^{-1} \circ \phi_p([1]) = [t_p e_p], \text{ bzw. } [1]' = [e_p t_p]'$$

erhalten wir schließlich die Existenz von $m_p, n_p \in \mathcal{R}_p$ mit

$$\begin{aligned} t_p e_p &= 1 + m_p \alpha, \\ e_p t_p &= 1 + n_p \beta. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ist nun $t_p e_p$ bzw. $e_p t_p$ eine *Einheit* in $\mathcal{R}_p$, so müssen schon $e_p$ und $t_p$ Einheiten in $\mathcal{R}_p$ sein. Da nach (4.6) $\mathrm{n}(t_p e_p) = \mathrm{n}(k_p l_p)$ ist, folgt dann, dass $k_p l_p$ und somit $k_p, l_p$ Einheiten in $\mathcal{R}_p$ sind. Aus (4.5) erhalten wir dann die Behauptung.

Wir zeigen also, dass $t_p e_p$ eine Einheit in $\mathcal{R}_p$ ist:
i) $p \mid d(\mathcal{R})$.
Ist $t_p e_p$ keine Einheit in $\mathcal{R}_p$, so existiert ein $\epsilon_1 \in \mathcal{R}_p^*$ und ein $c_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$t_p e_p = \epsilon_1 \pi_p^{c_1}.$$

Wegen $p \mid \mathrm{n}(\alpha)$ ist $m_p \alpha \notin \mathcal{R}_p^*$, und es gibt ein $\epsilon_2 \in \mathcal{R}_p^*$ und ein $c_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$m_p \alpha = \epsilon_2 \pi_p^{c_2}.$$

Aus (4.7) erhalten wir nun

$$1 = \epsilon_1 \pi_p^{c_1} - \epsilon_2 \pi_p^{c_2} = \pi_p \left( \epsilon_1 \pi_p^{c_1 - 1} - \epsilon_2 \pi_p^{c_2 - 1} \right)$$

und somit $\pi_p \in \mathcal{R}_p^*$, was zum Widerspruch führt.

ii) $p \nmid d(\mathcal{R})$.
Es seien $(p^{c_1}, p^{c_2})$ und $(p^{c_3}, p^{c_4})$ die $p$-ten Elementarteiler von $\alpha$ und $\beta$. Wir identifizieren $\mathcal{R}_p$ wieder mit $\mathrm{M}(2; \mathfrak{o}_{K_p})$.
Ist $c_1 = c_3 = 0$, so folgt wegen $\mathrm{n}(\alpha) = \mathrm{n}(\beta)$ schon $c_2 = c_4$. Wir nehmen also o.B.d.A. $c_1 \geq 1$ an.
Ist nun $t_p e_p \notin \mathcal{R}_p^*$, so existieren $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{R}_p^*$ mit

$$\gamma_1 t_p e_p \gamma_2 = \begin{pmatrix} p^{c_5} & 0 \\ 0 & p^{c_6} \end{pmatrix} \text{ und } c_6 \geq 1.$$

Weiterhin ist dann $m_p \neq 0$. Für $\alpha = \epsilon_1 \left(\begin{smallmatrix} p^{c_1} & 0 \\ 0 & p^{c_2} \end{smallmatrix}\right) \epsilon_2$ gilt somit

$$p^{-1} m_p \alpha = m_p \epsilon_1 \begin{pmatrix} p^{c_1 - 1} & 0 \\ 0 & p^{c_2 - 1} \end{pmatrix} \epsilon_2 \in \mathrm{M}(2; \mathfrak{o}_{K_p}),$$

so dass es Einheiten $\gamma_3, \gamma_4$ von $\mathcal{R}_p$ gibt mit

$$\gamma_3 m_p \alpha \gamma_4 = \begin{pmatrix} p^{c_7} & 0 \\ 0 & p^{c_8} \end{pmatrix} \text{ und } c_8 \geq c_7 \geq 1.$$

Aus (4.7) erhalten wir nun

$$\begin{pmatrix} p^{c_5} & 0 \\ 0 & p^{c_6} \end{pmatrix} = \underbrace{\gamma_1 \gamma_2}_{:=\eta} + \underbrace{\gamma_1 \gamma_3^{-1}}_{:=\nu_1} \begin{pmatrix} p^{c_7} & 0 \\ 0 & p^{c_8} \end{pmatrix} \underbrace{\gamma_4^{-1} \gamma_2}_{\nu_2}.$$

Daraus folgt

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} p^{c_5} & 0 \\ 0 & p^{c_6 - 1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nu_1 \begin{pmatrix} p^{c_7 - 1} & 0 \\ 0 & p^{c_8 - 1} \end{pmatrix} \nu_2 \right].$$

Wegen $\eta \in \mathcal{R}_p^*$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right) \notin \mathcal{R}_p^*$ ergibt dies einen Widerspruch.
Es muss also $t_p e_p \in \mathcal{R}_p^*$ gelten.

□

**Lemma 4.3.5.** *Es sei $\alpha \in \mathfrak{S}$. Dann haben $\alpha$ und $\overline{\alpha}$ dieselben Elementarteiler.*

*Beweis.*
1. $p \nmid d(\mathcal{R})$.
In diesem Fall fassen wir $\alpha$ als Element von $\mathrm{M}(2; \mathfrak{o}_{K_p})$ auf mit

$$\epsilon_1 \alpha \epsilon_2 = \begin{pmatrix} p^{c_1} & 0 \\ 0 & p^{c_2} \end{pmatrix}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{N}, \; c_1 \leq c_2, \; \epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathrm{M}(2; \mathfrak{o}_{K_p})^*.$$

Da nun

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ist, folgt

$$\overline{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \epsilon_2^{-1^t} \begin{pmatrix} p^{c_1} & 0 \\ 0 & p^{c_2} \end{pmatrix}^t \epsilon_1^{-1^t} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weil $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ Einheiten in $\mathrm{M}(2; \mathfrak{o}_{K_p})$ sind, ist der $p$-te Elementarteiler von $\overline{\alpha}$ auch $(p^{c_1}, p^{c_2})$.

2. $p \mid d(\mathcal{R})$.
Da mit $\pi_p$ auch $\overline{\pi_p}$ ein Primelement von $\mathcal{R}_p$ ist und $\mathcal{R}_p$ modulo Einheiten nur ein Primelement enthält, folgt

$$\mathcal{R}_p\overline{\alpha} = \mathcal{R}_p\overline{\pi_p^{c_\alpha}} = \mathcal{R}_p\overline{\pi_p}^{c_\alpha} = \mathcal{R}_p\pi_p^{c_\alpha} = \mathcal{R}_p\alpha.$$

Der $p$-te Elementarteiler von $\overline{\alpha}$ ist also auch in diesem Fall der $p$-te Elementarteiler von $\alpha$.

□

**Satz 4.3.6.** *$R(\Gamma_{\mathcal{R}}, \mathfrak{S})$ ist kommutativ.*

*Beweis.* Für $\alpha \in \mathfrak{S}$ haben nach dem vorherigen Lemma $\alpha$ und $\overline{\alpha}$ dieselben Elementarteiler und nach Satz 4.3.4 folgt $\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}} = \Gamma_{\mathcal{R}}\overline{\alpha}\Gamma_{\mathcal{R}}$. Also ist $\alpha \to \overline{\alpha}$ ein Antiautomorphismus von $(\Gamma_{\mathcal{R}}, \mathfrak{S})$, der $\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}$ für alle $\alpha \in \mathfrak{S}$ auf sich selbst abbildet. Aus Satz 4.1.15 erhalten wir die Behauptung.

□

**Lemma 4.3.7.** *Es sei $\alpha \in \mathfrak{S}$.*
*a) $\deg(\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}})$ ist gleich der Anzahl ganzer Linksideale $\mathcal{I}$ von $\mathcal{R}$ mit*

$$\mathcal{R}/\mathcal{I} \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha.$$

*b) Ist $\mathrm{n}(\alpha) = p$ eine Primzahl, dann gilt wegen $\mathcal{N}(p) = |p|^2$*

$$\deg(\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}) = \begin{cases} 1, & \text{für } p \mid d(\mathcal{R}) \\ |p|^2 + 1, & \text{für } p \nmid d(\mathcal{R}) \end{cases}.$$

*Beweis.*
a) Da nach Satz 4.2.12 jedes Linksideal von $\mathcal{R}$ ein Hauptideal ist, definiert die Abbildung $\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha \to \mathcal{R}\alpha$ eine Bijektion zwischen den in $R(\Gamma_{\mathcal{R}}, \mathfrak{S})$ enthaltenen Rechtsnebenklassen und den ganzen Linksidealen von $\mathcal{R}$. Nach Satz 4.3.4 gehören $\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha$ und $\Gamma_{\mathcal{R}}\beta$ zu derselben Doppelnebenklasse $\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}$ genau dann, wenn $\mathcal{R}/\mathcal{R}\beta \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha$ ist.

b) 1. $p \mid d(\mathcal{R})$.
Für $p' \neq p$ ist $p \in \mathfrak{o}^*_{K_{p'}}$. Somit ist $\mathcal{R}_{p'}\alpha = \mathcal{R}_{p'}$ schon das einzige ganze Linksideal von $\mathcal{R}_{p'}$ mit reduzierter Norm $\mathrm{n}(\mathcal{R}_{p'}) = \mathfrak{o}_{K_{p'}} = \mathfrak{o}_{K_{p'}}p$.
Nach [25], S. 139 Theorem 13.2 ist $\mathcal{R}_p\alpha$ das einzige ganze Linksideal von $\mathcal{R}_p$ mit reduzierter Norm $\mathrm{n}(\mathcal{R}_p\alpha) = \mathfrak{o}_{K_p}p$.
Aus Satz 4.2.11 folgt, dass $\mathcal{R}\alpha$ also das einzige ganze Linksideal von $\mathcal{R}$ mit reduzierter Norm $\mathfrak{o}_K p$ ist. Da für jedes ganze Linksideal $\mathcal{I}$ von $\mathcal{R}$ mit $\mathcal{R}/\mathcal{I} \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha$ notwendigerweise $\mathrm{n}(\mathcal{I}) = \mathrm{n}(\mathcal{R}\alpha)$ gelten muss, erhalten wir mit a) die Behauptung.

2. $p \nmid d(\mathcal{R})$.
Nach [35], S. 38, Theorem 2.3.(4) ist die Anzahl ganzer Linksideale von $\mathrm{M}(2;\mathfrak{o}_{K_p}) \cong \mathcal{R}_p$ mit reduzierter Norm $\mathfrak{o}_{K_p}p$ gleich $1+q$, wobei $q$ die Anzahl der Elemente in $\mathfrak{o}_{K_p}/p\mathfrak{o}_{K_p}$ bezeichnet. Also ist $q = \mathcal{N}(p) = |p|^2$.
Für $p' \neq p$ ist $\mathcal{R}_{p'} = \mathcal{R}_{p'}p$ schon das einzige ganze Linksideal von $\mathcal{R}_{p'}$ mit reduzierter Norm $\mathfrak{o}_{K_{p'}} = \mathfrak{o}_{K_{p'}}p$.
Mit Satz 4.2.11 existieren somit genau $1 + |p|^2$ ganze Linksideale $\mathcal{I}_l$, $l \in \{1, \ldots, 1 + |p|^2\}$, mit reduzierter Norm $\mathfrak{o}_K p$. Nach Satz 4.2.12 gilt dabei $\mathcal{I}_l = \mathcal{R}\alpha_l$ mit $\mathrm{n}(\alpha_l) = p$. Somit haben alle $\alpha_l$, $l \in \{1, \ldots, 1 + |p|^2\}$, die gleichen Elementarteiler. Nach Satz 4.3.4 gilt also

$$\mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha_l \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha.$$

Die $\mathcal{R}\alpha_l$ sind aber auf Grund der Gleichheit der Normen notwendigerweise schon alle ganzen Linksideale $\mathcal{I}$ mit

$$\mathcal{R}/\mathcal{I} \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha.$$

Aus Teil a) erhalten wir nun die Behauptung.

□

**Lemma 4.3.8.** *Es seien $\Gamma_\mathcal{R}\alpha\Gamma_\mathcal{R}, \Gamma_\mathcal{R}\beta\Gamma_\mathcal{R}$ und $\Gamma_\mathcal{R}\xi\Gamma_\mathcal{R}$ aus $R(\Gamma_\mathcal{R}, \mathfrak{S})$. Dann ist $c_{\Gamma_\mathcal{R}\xi\Gamma_\mathcal{R}}(\Gamma_\mathcal{R}\alpha\Gamma_\mathcal{R}, \Gamma_\mathcal{R}\beta\Gamma_\mathcal{R})$ aus Lemma 4.1.9 gleich der Anzahl ganzer Linksideale $\mathcal{I}$ von $\mathcal{R}$, für die gilt:*

*i) $\mathcal{I} \supset \mathcal{R}\xi$,*

*ii) $\mathcal{R}/\mathcal{I} \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\beta$ und*

*iii) $\mathcal{I}/\mathcal{R}\xi \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha$.*

*Beweis.* Es seien $\Gamma_\mathcal{R}\alpha\Gamma_\mathcal{R} = \bigcup_i \Gamma_\mathcal{R}\alpha_i$, $\Gamma_\mathcal{R}\beta\Gamma_\mathcal{R} = \bigcup_j \Gamma_\mathcal{R}\beta_j$ und $\Gamma_\mathcal{R}\xi\Gamma_\mathcal{R} = \bigcup_k \Gamma_\mathcal{R}\xi_k$ disjunkte Zerlegungen. Dann ist nach Lemma 4.1.9 $c_{\Gamma_\mathcal{R}\xi\Gamma_\mathcal{R}}(\Gamma_\mathcal{R}\alpha\Gamma_\mathcal{R}, \Gamma_\mathcal{R}\beta\Gamma_\mathcal{R})$ gleich der Anzahl der Paare $(i,j)$ mit $\Gamma_\mathcal{R}\alpha_i\beta_j =$

$\Gamma_{\mathcal{R}}\xi$. Wegen der Disjunktheit der Zerlegung existiert dabei für festes $j$ höchstens ein $i$ mit $\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha_i\beta_j = \Gamma_{\mathcal{R}}\xi$.
Gilt nun $\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha_i\beta_j = \Gamma_{\mathcal{R}}\xi$, so folgt

$$\mathcal{R} \supset \mathcal{R}\beta_j \supset \mathcal{R}\alpha_i\beta_j = \mathcal{R}\xi.$$

Ferner ergibt sich aus Satz 4.3.4

$$\mathcal{R}/\mathcal{R}\beta_j \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\beta,$$

denn mit geeignetem $\epsilon \in \Gamma_{\mathcal{R}}$ gilt $\mathcal{R}\beta_j = \mathcal{R}\beta\epsilon$.
Schließlich ist

$$\mathcal{R}\beta_j/\mathcal{R}\alpha_i\beta_j \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha_i \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha.$$

Das ganze Linksideal $\mathcal{R}\beta_j$ erfüllt also die angegebenen Bedingungen.
Es sei nun umgekehrt ein ganzes Linksideal $\mathcal{I}$ von $\mathcal{R}$ gegeben, welches die Bedingungen i), ii) und iii) erfüllt.
Aus ii) folgt mit Satz 4.3.4 und Satz 4.2.12

$$\mathcal{I} = \mathcal{R}\beta\epsilon = \mathcal{R}\beta_j \text{ für ein } j \in \{1, \ldots, \deg(\Gamma_{\mathcal{R}}\beta\Gamma_{\mathcal{R}})\}.$$

Da nach i) $\mathcal{R}\beta_j \supset \mathcal{R}\xi$ ist, gibt es ein $\alpha_0 \in \mathfrak{S}$ mit $\xi = \alpha_0\beta_j$.
Nach iii) gilt dabei

$$\mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha \cong \mathcal{R}\beta_j/\mathcal{R}\alpha_0\beta_j \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha_0.$$

Mit Satz 4.3.4 folgt also mit geeigneten $\epsilon \in \Gamma_{\mathcal{R}}$ und $i \in \{1, \ldots, \deg(\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}})\}$

$$\mathcal{R}\alpha_0 = \mathcal{R}\alpha\epsilon = \mathcal{R}\alpha_i.$$

Da $\alpha_0, \alpha_i \in \mathfrak{S}$ sind und somit $\mathrm{n}(\alpha_0) = \mathrm{n}(\alpha_i)$ ist, folgt $\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha_0 = \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha_i$, also

$$\Gamma_{\mathcal{R}}\xi = \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha_0\beta_j = \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha_i\beta_j.$$

□

*Anmerkung:* Da nach Satz 4.3.6 $R(\Gamma_{\mathcal{R}}, \mathfrak{S})$ kommutativ ist, können wir in Lemma 4.3.8 $\alpha$ und $\beta$ in ii) und iii) miteinander vertauschen und gelangen so zu einer äquivalenten Charakterisierung.

**Lemma 4.3.9.** *Es seien $\alpha, \beta \in \mathfrak{S}$, $\alpha' \in \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}$ und $\beta' \in \Gamma_{\mathcal{R}}\beta\Gamma_{\mathcal{R}}$. Ist* $\mathrm{n}(\alpha)$ *prim zu* $\mathrm{n}(\beta)$*, so haben $\alpha'\beta'$ und $\alpha\beta$ dieselben Elementarteiler. Insbesondere ist dann $\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha'\beta'\Gamma_{\mathcal{R}} = \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\beta\Gamma_{\mathcal{R}}$.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung existieren $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \Gamma_{\mathcal{R}}$ mit $\alpha'\beta' = \epsilon_1\alpha\epsilon_2\beta\epsilon_3$.
1. $p \nmid d(\mathcal{R})$.
i) $p \mid \mathrm{n}(\alpha)$.
Damit folgt $p \nmid \mathrm{n}(\beta)$, und $\beta$ ist eine Einheit in $\mathcal{R}_p$. Nun gilt

$$\epsilon_1^{-1}\alpha'\beta'(\epsilon_2\beta\epsilon_3)^{-1}\beta = \alpha\beta$$

mit Einheiten $\epsilon_1^{-1}$ und $(\epsilon_2\beta\epsilon_3)^{-1}\beta$ in $\mathcal{R}_p$.
ii) $p \nmid \mathrm{n}(\alpha)$, $p \mid \mathrm{n}(\beta)$.
Wie oben.
iii) $p \nmid \mathrm{n}(\alpha)$, $p \nmid \mathrm{n}(\beta)$.
Klar, da dann $\alpha, \beta \in \mathcal{R}_p^*$ sind.
2. $p \mid d(\mathcal{R})$.
Da sich nach [25], S. 139 jedes $x \in \mathcal{R}_p$ eindeutig schreiben lässt als $x = x'\pi_p^{c_x} = \pi_p^{c_x}x''$ mit $x', x'' \in \mathcal{R}_p^*$, folgt

$$\mathcal{R}_p\alpha'\beta' = \mathcal{R}_p\epsilon_1\alpha\epsilon_2\beta\epsilon_3 = \mathcal{R}_p\alpha\beta.$$

Also haben $\alpha'\beta'$ und $\alpha\beta$ dieselben Elementarteiler, und wir erhalten die Behauptung aus Satz 4.3.4.

□

**Lemma 4.3.10.** *Es seien $\alpha, \beta \in \mathfrak{S}$. Ist $\mathrm{n}(\alpha)$ prim zu $\mathrm{n}(\beta)$, so gilt*

$$(\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}})(\Gamma_{\mathcal{R}}\beta\Gamma_{\mathcal{R}}) = \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\beta\Gamma_{\mathcal{R}}.$$

*Beweis.* Es seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ zwei ganze Linksideale von $\mathcal{R}$, welche die Bedingungen i), ii) und iii) aus Lemma 4.3.8 für ein $\xi \in \mathfrak{S}$ erfüllen.
Weil $(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2)/\mathcal{I}_2 \subset \mathcal{R}/\mathcal{I}_2$ ist, ergibt sich aus Bedingung ii), dass $(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2)/\mathcal{I}_2$ isomorph zu einem Untermodul von $\mathcal{R}/\mathcal{R}\beta$ ist.
Da nach i) $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \supset \mathcal{R}\xi$ ist, folgt mit iii), dass $\mathcal{I}_1/(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$ isomorph zu einem Untermodul von $\mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha$ ist.
Nach dem ersten Isomorphiesatz gilt nun

$$\mathcal{I}_1/(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2) \cong (\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2)/\mathcal{I}_2.$$

Somit ist also $(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2)/\mathcal{I}_2$ sowohl zu einem Untermodul von $\mathcal{R}/\mathcal{R}\beta$ als auch zu einem Untermodul von $\mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha$ isomorph.
Auf Grund der Teilerfremdheit der Normen muss also

$$\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 \text{ und } \mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$$

gelten. Entsprechend erhalten wir

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 \text{ und } \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2.$$

Somit folgt

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2.$$

Nach Lemma 4.3.8 ist also $c_{\Gamma_\mathcal{R}\xi\Gamma_\mathcal{R}}(\Gamma_\mathcal{R}\alpha\Gamma_\mathcal{R}, \Gamma_\mathcal{R}\beta\Gamma_\mathcal{R}) = 1$.
Da nach Lemma 4.3.9 $(\Gamma_\mathcal{R}\alpha\Gamma_\mathcal{R})(\Gamma_\mathcal{R}\beta\Gamma_\mathcal{R})$ nur die Komponente $\Gamma_\mathcal{R}\alpha\beta\Gamma_\mathcal{R}$ hat und dort dann $c_{\Gamma_\mathcal{R}\xi\Gamma_\mathcal{R}}(\Gamma_\mathcal{R}\alpha\Gamma_\mathcal{R}, \Gamma_\mathcal{R}\beta\Gamma_\mathcal{R}) = 1$ ist, ergibt sich die Behauptung.
□

**Lemma 4.3.11.** *Es seien $\gamma \in \mathfrak{S}$ und $N, M \in \mathfrak{T}$ mit $\mathrm{n}(\gamma) = NM$. Ist $N$ prim zu $M$, dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathfrak{S}$ mit $\mathrm{n}(\alpha) = N$, $\mathrm{n}(\beta) = M$ und $\gamma = \alpha\beta$. Die Zerlegung ist bis auf Elemente aus $\Gamma_\mathcal{R}$ eindeutig.*

*Beweis.*
Für $p \nmid M$ ist $\gamma \in \mathcal{R}_p$, wobei $\mathcal{R}_p$ das einzige ganze Linksideal von $\mathcal{R}_p$ mit reduzierter Norm $\mathfrak{o}_{K_p}M = \mathfrak{o}_{K_p}$ ist.
Gilt $p \mid M$, $p \mid d(\mathcal{R})$, so existiert wegen $p \nmid N$ genau ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $\gamma \in \mathcal{R}_p\pi_p^m$ und $\mathrm{n}(\mathcal{R}_p\pi_p^m) = \mathfrak{o}_{K_p}p^m = \mathfrak{o}_{K_p}M$.
Für $p \mid M$, $p \nmid d(\mathcal{R})$ sei $(p^{c_1}, p^{c_2})$ der $p$-te Elementarteiler von $\gamma$. Wegen $p \nmid N$ ist dann $\mathcal{R}_p\gamma$ das einzige ganze Linksideal von $\mathcal{R}_p$ mit reduzierter Norm $\mathfrak{o}_{K_p}p^{c_1+c_2} = \mathfrak{o}_{K_p}M$, welches $\gamma$ enthält.
Nach Satz 4.2.11 gibt es also genau ein ganzes Linksideal $\mathcal{I}$ von $\mathcal{R}$ mit reduzierter Norm $\mathfrak{o}_K M$ und $\gamma \in \mathcal{I}$. Wegen Satz 4.2.12 existiert also bis auf Linksmultiplikation mit Elementen aus $\Gamma_\mathcal{R}$ genau ein $\beta \in \mathcal{R}$ mit $\gamma \in \mathcal{R}\beta$ und $\mathrm{n}(\beta) = M$.
□

**Definition und Lemma 4.3.12.** *Es sei wie in Lemma 1.3.8 $\mathcal{R}^{(N)} = \{x \in \mathcal{R};\ \mathrm{n}(x) = N\}$. Ist $N \in \mathfrak{T}$ und damit $\mathcal{R}^{(N)} \subset \mathfrak{S}$, so sei*

$$T(N) := \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^{(N)}} \Gamma_\mathcal{R}\alpha\Gamma_\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{\deg(T(N))} \Gamma_\mathcal{R}\alpha_i.$$

*Mit der disjunkten Zerlegung*

$$\mathcal{R}^{(N)} = \bigcup_{k=1}^{d(N)} \Gamma_\mathcal{R}\xi_{kN}$$

*aus Lemma 1.3.8 gilt dann*

$$T(N) = \sum_{k=1}^{d(N)} \Gamma_\mathcal{R}\xi_{kN}.$$

*Beweis.* Klar, da $\mathcal{R}^{(N)}$ rechtsinvariant unter $\Gamma_{\mathcal{R}}$ ist und sich somit $\sum_{k=1}^{d(N)} \Gamma_{\mathcal{R}}\xi_{kN} \in L(\Gamma_{\mathcal{R}}, \mathfrak{S})^{\Gamma_{\mathcal{R}}}$ ergibt.

□

**Lemma 4.3.13.** *Es seien $N, M \in \mathfrak{T}$ relativ prim. Dann gilt:*

$$T(N)T(M) = T(NM).$$

*Beweis.* Die Behauptung erhalten wir unmittelbar aus Lemma 4.3.10 und Lemma 4.3.11.

□

**Lemma 4.3.14.** *Es sei $\alpha \in \mathcal{R}$ mit $\mathrm{n}(\alpha) = p \in \mathbb{P}$ und $p \mid d(\mathcal{R})$.*
*Dann ist für $m \in \mathbb{N}$*

$$(\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}})^m = \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^m\Gamma_{\mathcal{R}} = \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^m.$$

*Beweis.* Den Beweis führen wir mittels Induktion nach $m$.
Da nach Lemma 4.3.7 $\deg(\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}) = 1$ ist, folgt $\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}} = \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha$.
Es sei nun also die Behauptung für $m$ bewiesen.
Somit gilt

$$(\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}})^{m+1} = (\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}})(\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}})^m = (\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}})(\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^m\Gamma_{\mathcal{R}}).$$

Wegen $\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}} = \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha$ ist ferner

$$\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^m\Gamma_{\mathcal{R}} = \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^{m+1}\Gamma_{\mathcal{R}},$$

so dass aus Lemma 4.1.9

$$(\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}})(\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^m\Gamma_{\mathcal{R}}) = c_{\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^{m+1}\Gamma_{\mathcal{R}}}(\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}, \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^m\Gamma_{\mathcal{R}})\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^{m+1}\Gamma_{\mathcal{R}}$$

folgt.
Ferner ergibt sich aus der Voraussetzung

$$(\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}})(\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^m\Gamma_{\mathcal{R}}) = (\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha)(\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^m) = \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^{m+1}.$$

Somit ist $c_{\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^{m+1}\Gamma_{\mathcal{R}}}(\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}, \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^m\Gamma_{\mathcal{R}}) = 1$, und wir erhalten die Behauptung.

□

**Satz 4.3.15.** *Es sei $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid d(\mathcal{R})$. Für $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathfrak{S}$ mit $\mathrm{n}(\alpha) = p$ folgt dann*

$$T(p)^m = T(p^m) = \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^m.$$

*Beweis.* Es sei $\gamma \in \mathcal{R}$ mit $\mathrm{n}(\gamma) = p^m$. Der $p$-te Elementarteiler von $\gamma$ ist somit $\pi_p^m$. Da für $p' \neq p$ $\gamma$ eine Einheit in $\mathcal{R}_{p'}$ ist, sind die übrigen Elementarteiler alle $(1,1)$ bzw. 1. Im Hinblick auf Satz 4.3.4 gilt also für $\gamma, \gamma' \in \mathfrak{S}$ mit $\mathrm{n}(\gamma) = \mathrm{n}(\gamma') = p^m$ schon $\Gamma_{\mathcal{R}}\gamma\Gamma_{\mathcal{R}} = \Gamma_{\mathcal{R}}\gamma'\Gamma_{\mathcal{R}}$ und somit $T(p^m) = \Gamma_{\mathcal{R}}\gamma\Gamma_{\mathcal{R}}$ für beliebiges $\gamma \in \mathfrak{S}$ mit $\mathrm{n}(\gamma) = p^m$.
Nach Lemma 4.2.14 gibt es nun ein $\alpha \in \mathcal{R}$ mit $\mathrm{n}(\alpha) = p$. Damit folgt $T(p^m) = \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^m\Gamma_{\mathcal{R}}$. Die Behauptung erhalten wir nun aus Lemma 4.3.14.

□

**Definition 4.3.16.** *Für $p \in \mathbb{P}$ mit $p \nmid d(\mathcal{R})$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $c_1 \leq c_2$ sei*

$$T(p^{c_1}, p^{c_2}) := \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha_{c_1,c_2}\Gamma_{\mathcal{R}},$$

*wobei nach Lemma 4.2.14 $\alpha_{c_1,c_2} \in \mathfrak{S}$ ist mit $\mathrm{n}(\alpha_{c_1,c_2}) = p^{c_1+c_2}$ und $\alpha_{c_1,c_2}$ den $p$-ten Elementarteiler $(p^{c_1}, p^{c_2})$ hat.*

*Anmerkung*: Nach Lemma 4.2.16 sind wegen $\mathrm{n}(\alpha_{c_1,c_2}) = p^{c_1+c_2}$ die übrigen Elementarteiler von $\alpha_{c_1,c_2}$ dann $(1,1)$ bzw. 1 und $\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha_{c_1,c_2}\Gamma_{\mathcal{R}}$ ist nach Satz 4.3.4 eindeutig bestimmt.
Es gilt ferner $T(p) = T(1,p)$ und $T(p^m) = \sum_{\substack{0 \leq c_1 \leq c_2 \\ c_1 + c_2 = m}} T(p^{c_1}, p^{c_2})$.

**Lemma 4.3.17.** *Es gelte $p \nmid d(\mathcal{R})$ für $p \in \mathbb{P}$. Im Hinblick auf Lemma 4.3.7 sei ferner $T(1,p) = \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha_{0,1}\Gamma_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{|p|^2+1} \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha_{0,1_i}$.*
*Dann gilt*

*a)* $\mathcal{R}p \subset \mathcal{R}\alpha_{0,1_i}$ *für alle* $i \in \{1, \ldots, |p|^2 + 1\}$,

*b)* $\mathcal{R}\alpha_{c_1,c_2} \subset \mathcal{R}p \Leftrightarrow c_1 \geq 1$,

*c)* $\mathcal{R}\alpha_{0,c_2} + \mathcal{R}p = \mathcal{R}\alpha_{0,1_i}$ *für ein* $i \in \{1, \ldots, |p|^2 + 1\}$, *falls* $c_2 \geq 1$ *ist.*

*Beweis.*
a) Für $p' \neq p$ sind $\mathrm{n}(p), \mathrm{n}(\alpha_{0,1_i}) \in \mathfrak{o}_{K_{p'}}^*$, also $p, \alpha_{0,1_i} \in \mathcal{R}_{p'}^*$. Somit gilt

$$\mathcal{R}_{p'}p = \mathcal{R}_{p'} = \mathcal{R}_{p'}\alpha_{0,1_i}.$$

Identifizieren wir nun $\mathcal{R}_p$ wieder mit $\mathrm{M}(2; \mathfrak{o}_{K_p})$, so folgt für $p \in \mathcal{R}_p$

$$p = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \epsilon_1\alpha_{0,1_i}\epsilon_2$$

mit Einheiten $\epsilon_1, \epsilon_2$ von $\mathrm{M}(2; \mathfrak{o}_{K_p})$.
Somit ist

$$\epsilon_2^{-1}p = p\epsilon_2^{-1} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \epsilon_1\alpha_{0,1_i},$$

also
$$\mathcal{R}_p p \subset \mathcal{R}_p \alpha_{0,1_i}.$$
Aus Satz 4.2.11 folgt die Behauptung.

b) Es sei $c_1 \geq 1$.
Für $p' \neq p$ erhalten wir wie unter a)
$$\mathcal{R}_{p'} p = \mathcal{R}_{p'} = \mathcal{R}_{p'} \alpha_{c_1,c_2}.$$
Fassen wir $\mathcal{R}_p$ wie üblich als $\mathrm{M}(2; \mathfrak{o}_{K_p})$ auf, so existieren Einheiten $\epsilon_1$ und $\epsilon_2$ von $\mathrm{M}(2; \mathfrak{o}_{K_p})$ mit
$$\epsilon_1 \alpha_{c_1,c_2} \epsilon_2 = \begin{pmatrix} p^{c_1} & 0 \\ 0 & p^{c_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{c_1-1} & 0 \\ 0 & p^{c_2-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}.$$
Da $c_1 \geq 1$ ist, erhalten wir
$$\alpha_{c_1,c_2} = \epsilon_1^{-1} \begin{pmatrix} p^{c_1-1} & 0 \\ 0 & p^{c_2-1} \end{pmatrix} \epsilon_2^{-1} p \in \mathcal{R}_p p.$$
Folglich ist
$$\mathcal{R}_p \alpha_{c_1,c_2} \subset \mathcal{R}_p p,$$
und mit Satz 4.2.11 ergibt sich
$$\mathcal{R} \alpha_{c_1,c_2} \subset \mathcal{R} p.$$
Es gelte nun $\mathcal{R}\alpha_{c_1,c_2} \subset \mathcal{R}p$. Insbesondere ist dann $\alpha_{c_1,c_2} \in \mathcal{R}_p p$. Deshalb existiert ein $\gamma \in \mathcal{R}_p$ mit $\left(\begin{smallmatrix} p^{c_1} & 0 \\ 0 & p^{c_2} \end{smallmatrix}\right) = \gamma p$, also
$$\gamma = \begin{pmatrix} p^{c_1-1} & 0 \\ 0 & p^{c_2-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_p.$$
Damit folgt $c_1 \geq 1$.

c) Für $p' \neq p$ gilt für alle $i \in \{1, \ldots, |p|^2 + 1\}$
$$\mathcal{R}_{p'} \alpha_{0,1_i} = \mathcal{R}_{p'} p = \mathcal{R}_{p'} \alpha_{0,c_2} = \mathcal{R}_{p'}.$$
Somit ist
$$\mathcal{R}_{p'} \alpha_{0,c_2} + \mathcal{R}_{p'} p = \mathcal{R}_{p'} \alpha_{0,1_i}.$$

Betrachten wir nun $\mathcal{R}_p \cong \mathrm{M}(2; \mathfrak{o}_{K_p})$.
Es existieren Einheiten $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{M}(2; \mathfrak{o}_{K_p})$ mit
$$\epsilon_1 \alpha_{0,c_2} \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{c_2} \end{pmatrix}$$

und
$$\gamma_1\alpha_{0,1}\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}.$$
Daraus folgt
$$\begin{aligned}\mathcal{R}_p\alpha_{0,c_2} &= \mathcal{R}_p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{c_2} \end{pmatrix} \epsilon_2^{-1} = \mathcal{R}_p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}^{c_2} \epsilon_2^{-1} = \mathcal{R}_p(\gamma_1\alpha_{0,1}\gamma_2)^{c_2}\epsilon_2^{-1} \\ &\subset \mathcal{R}_p\alpha_{0,1}\gamma_2\epsilon_2^{-1}.\end{aligned}$$
Nun ist aber
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p^{c_2-1} \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{c_2} \end{pmatrix}.$$
Also gilt
$$\gamma_1\alpha_{0,1}\gamma_2\epsilon_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p^{c_2-1} \end{pmatrix} \epsilon_2^{-1} p + \begin{pmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \epsilon_1\alpha_{0,c_2}.$$
Wir erhalten somit wegen $c_2 - 1 \geq 0$
$$\mathcal{R}_p\alpha_{0,1}\gamma_2\epsilon_2^{-1} \subset \mathcal{R}_p p + \mathcal{R}_p\alpha_{0,c_2}.$$
Mit Teil a) ergibt sich daraus
$$\mathcal{R}_p\alpha_{0,1}\gamma_2\epsilon_2^{-1} = \mathcal{R}_p p + \mathcal{R}_p\alpha_{0,c_2}.$$
Nach Satz 4.2.11 existiert also ein $\alpha^* \in \mathfrak{S}$ mit
$$\mathcal{R}p + \mathcal{R}\alpha_{0,c_2} = \mathcal{R}\alpha^*,\ \mathcal{R}_p\alpha^* = \mathcal{R}_p\alpha_{0,1}\gamma_2\epsilon_2^{-1} \text{ und } \mathcal{R}_{p'}\alpha^* = \mathcal{R}_{p'} \text{ für alle } p' \neq p.$$
Da $\alpha_{0,1}$ und $\alpha^*$ die selben Elementarteiler haben, muss es somit nach Satz 4.3.4 ein $i \in \{1, \dots, |p|^2 + 1\}$ geben mit
$$\mathcal{R}\alpha^* = \mathcal{R}\alpha_{0,1_i}.$$
$\square$

**Satz 4.3.18.** *Es gelte $p \nmid d(\mathcal{R})$ für $p \in \mathbb{P}$. Ist $m \in \mathbb{N}$ und sind $c_1, c_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $c_1 \leq c_2$, so gilt*

*a)* $T(p,p)T(p^{c_1}, p^{c_2}) = T(p^{c_1+1}, p^{c_2+1})$,

*b)* $$\begin{aligned}T(p)T(p^m) &= T(p^{m+1}) + |p|^2 T(p^{m-1})T(p,p) \\ &= T(1, p^{m+1}) + \left(|p|^2 + 1\right) T(p^{m-1})T(p,p).\end{aligned}$$

*Beweis.*
a) Da $R(\Gamma_{\mathcal{R}}, \mathfrak{S})$ nach Satz 4.3.6 kommutativ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} T(p,p)T(p^{c_1},p^{c_2}) &= T(p^{c_1},p^{c_2})T(p,p) \\ &= \sum_{\substack{0\le l\le k \\ l+k=c_1+c_2+2}} c_{T(p^l,p^k)}(T(p^{c_1},p^{c_2}),T(p,p))T(p^l,p^k). \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.3.8 ist dabei $c_{T(p^l,p^k)}(T(p^{c_1},p^{c_2}),T(p,p))$ gleich der Anzahl ganzer Linksideale $\mathcal{I}$ von $\mathcal{R}$ mit i) $\mathcal{I} \supset \mathcal{R}\alpha_{l,k}$, ii) $\mathcal{R}/\mathcal{I} \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}p$ und iii) $\mathcal{I}/\mathcal{R}\alpha_{l,k} \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha_{c_1,c_2}$.
Erfüllt nun ein $\mathcal{I}$ diese Bedingungen so folgt aus ii) und Satz 4.3.4

$$\mathcal{I} = \mathcal{R}p\epsilon = \mathcal{R}\epsilon p = \mathcal{R}p \text{ mit einem } \epsilon \in \Gamma_{\mathcal{R}}.$$

Ist nun i) für $\mathcal{I} = \mathcal{R}p$ erfüllt, so muss im Hinblick auf das vorherige Lemma zwangsläufig $l \ge 1$ sein.
Für $l \ge 1$ gibt es nun aber ein $\delta \in \mathcal{R}$ mit $\delta p = \alpha_{l,k}$ und $\mathrm{n}(\delta) = p^{l+k-2}$. Da $\begin{pmatrix} p^l & 0 \\ 0 & p^k \end{pmatrix} p^{-1} = \begin{pmatrix} p^{l-1} & 0 \\ 0 & p^{k-1} \end{pmatrix}$ ist, hat $\delta$ notwendigerweise den $p$-ten Elementarteiler $(p^{l-1}, p^{k-1})$.
Aus iii) ergibt sich

$$\mathcal{R}/\mathcal{R}\delta \cong \mathcal{R}p/\mathcal{R}\delta p = \mathcal{R}p/\mathcal{R}\alpha_{l,k} \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha_{c_1,c_2}.$$

Nach Satz 4.3.4 haben $\delta$ und $\alpha_{c_1,c_2}$ also die gleichen Elementarteiler und es folgt

$$l = c_1 + 1 \text{ und } k = c_2 + 1.$$

Für $l = c_1 + 1$ und $k = c_2 + 1$ erfüllt $\mathcal{I} = \mathcal{R}p$ die Bedingungen i), ii) und iii) und wir erhalten die Behauptung.

b) Wegen der Kommutativität von $R(\Gamma_{\mathcal{R}}, \mathfrak{S})$ ist

$$\begin{aligned} T(p)T(p^m) &= T(p^m)T(p) \\ &= \left( \sum_{\substack{0\le i\le j \\ i+j=m}} T(p^i,p^j) \right) T(1,p) \\ &= \sum_{\substack{0\le i\le j \\ i+j=m}} \sum_{\substack{0\le l\le k \\ l+k=m+1}} c_{T(p^l,p^k)}(T(p^i,p^j),T(1,p))T(p^l,p^k) \\ &= \sum_{\substack{0\le l\le k \\ l+k=m+1}} \underbrace{\left( \sum_{\substack{0\le i\le j \\ i+j=m}} c_{T(p^l,p^k)}(T(p^i,p^j),T(1,p)) \right)}_{=:c_{lk}} T(p^l,p^k). \end{aligned}$$

Es sei nun $\alpha_{i,j} \in \mathfrak{S}$ mit $\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha_{i,j}\Gamma_{\mathcal{R}} = T(p^i, p^j)$. Aus Lemma 4.3.8 erhalten wir dann, dass $c_{lk}$ gleich der Anzahl ganzer Linksideale $\mathcal{I}$ von $\mathcal{R}$ ist, für die gilt i) $\mathcal{I} \supset \mathcal{R}\alpha_{l,k}$, ii) $\mathcal{R}/\mathcal{I} \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha_{0,1}$ und iii) $\mathcal{I}/\mathcal{R}\alpha_{l,k} \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha_{i,j}$ für geeignete $i + j = m,\ 0 \leq i \leq j$.
Nun ist aber iii) eine Konsequenz der Bedingungen i) und ii):
Aus ii) folgt mit Satz 4.3.4 und Lemma 4.3.7

$$\mathcal{I} = \mathcal{R}\alpha_{0,1_i} \text{ für ein } i \in \{1, \ldots, |p|^2 + 1\}.$$

Ist nun auch i) erfüllt, so folgt

$$\alpha_{l,k} = \gamma\alpha_{0,1_i}$$

für ein geeignetes $\gamma \in \mathcal{R}$ mit $\mathrm{n}(\gamma) = p^m$. Bedingung iii) lässt sich somit durch eine geeignete Wahl von $i, j$ stets erfüllen. Also ist $c_{lk}$ gleich der Anzahl ganzer Linksideale $\mathcal{I}$ von $\mathcal{R}$ mit

$$\mathcal{I} \supset \mathcal{R}\alpha_{l,k} \text{ und } \mathcal{R}/\mathcal{I} \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha_{0,1}.$$

Es sei nun $l \geq 1$.
Dann folgt aus $\mathcal{R}/\mathcal{I} \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha_{0,1}$ mit Satz 4.3.4 und Lemma 4.3.7

$$\mathcal{I} = \mathcal{R}\alpha_{0,1_i} \text{ für ein } i \in \{1, \ldots, |p|^2 + 1\},$$

und nach dem vorherigen Lemma ergibt sich bereits

$$\mathcal{R}\alpha_{l,k} \subset \mathcal{R}\alpha_{0,1_i}.$$

Also entspricht $c_{lk}$ der Anzahl der ganzen Linksideale $\mathcal{I}$ von $\mathcal{R}$ mit $\mathcal{R}/\mathcal{I} \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha_{0,1}$. Nach Lemma 4.3.7 gilt somit für $l \geq 1$:

$$c_{lk} = |p|^2 + 1.$$

Für $l = 0$ ergibt sich aus $\mathcal{R}/\mathcal{I} \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}\alpha_{0,1}$ mit Satz 4.3.4

$$\mathcal{I} = \mathcal{R}\alpha_{0,1_i} \text{ für ein } i \in \{1, \ldots, |p|^2 + 1\}.$$

Nach dem vorherigen Lemma folgt dann aus $\mathcal{I} \supset \mathcal{R}\alpha_{0,m+1}$ bereits

$$\mathcal{I} = \mathcal{R}\alpha_{0,m+1} + \mathcal{R}_p.$$

Es ist somit

$$c_{0m+1} = 1.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} T(p)T(p^m) &= c_{0m+1}T(1,p^{m+1}) + \sum_{\substack{1\le l\le k\\ l+k=m+1}} c_{lk}T(p^l,p^k) \\ &= T(1,p^{m+1}) + \left(|p|^2+1\right) \sum_{\substack{1\le l\le k\\ l+k=m+1}} T(p^l,p^k). \end{aligned}$$

Mit Teil a) ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} T(p)T(p^m) &= T(1,p^{m+1}) + \sum_{\substack{1\le l\le k\\ l+k=m+1}} T(p^l,p^k) + |p|^2 \sum_{\substack{1\le l\le k\\ l+k=m+1}} T(p^{l-1},p^{k-1})T(p,p) \\ &= \sum_{\substack{0\le l\le k\\ l+k=m+1}} T(p^l,p^k) + |p|^2 \left( \sum_{\substack{0\le l\le k\\ l+k=m-1}} T(p^l,p^k) \right) T(p,p) \\ &= T(p^{m+1}) + |p|^2 T(p^{m-1})T(p,p), \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} T(p)T(p^m) &= T(1,p^{m+1}) + \left(|p|^2+1\right) \sum_{\substack{1\le l\le k\\ l+k=m+1}} T(p^{l-1},p^{k-1})T(p,p) \\ &= T(1,p^{m+1}) + \left(|p|^2+1\right) T(p^{m-1})T(p,p). \end{aligned}$$

□

**Lemma 4.3.19.** *Für $p \in \mathbb{P}$ mit $p \nmid d(\mathcal{R})$ gilt*

*a)* $T(1,p)T(1,p^m) = T(1,p^{m+1}) + |p|^2 T(1,p^{m-1})T(p,p)$, *falls $m \geq 2$ ist,*

*b)* $\deg(T(1,p^m)) = |p^2|^{m-1}(|p|^2+1)$, *falls $m \geq 1$ ist.*

*Beweis.*
a) Es sei $m \geq 2$.
Dafür gilt

$$\begin{aligned} T(p)T(p^m) &= T(1,p) \sum_{\substack{0\le l\le k\\ l+k=m}} T(p^l,p^k) \\ &= T(1,p)T(1,p^m) + \sum_{\substack{1\le l\le k\\ l+k=m}} T(1,p)T(p^l,p^k) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}T(p^{m+1}) + |p|^2 T(p^{m-1}) T(p,p) &= \sum_{\substack{0\le l\le k\\ l+k=m+1}} T(p^l,p^k) + |p|^2 \sum_{\substack{0\le l\le k\\ l+k=m-1}} T(p^l,p^k)T(p,p)\\ &= T(1,p^{m+1}) + |p|^2 T(1,p^{m-1})T(p,p)\\ &\quad + \sum_{\substack{1\le l\le k\\ l+k=m+1}} T(p^l,p^k) + |p|^2 \sum_{\substack{1\le l\le k\\ l+k=m-1}} T(p^l,p^k)T(p,p).\end{aligned}$$

Im Hinblick auf den vorausgegangenen Satz müssen wir also

$$\sum_{\substack{1\le l\le k\\ l+k=m}} T(1,p)T(p^l,p^k) = \sum_{\substack{1\le l\le k\\ l+k=m+1}} T(p^l,p^k) + |p|^2 \sum_{\substack{1\le l\le k\\ l+k=m-1}} T(p^l,p^k)T(p,p)$$

für $m \ge 2$ zeigen.
Für $m = 2$ erhalten wir dies unmittelbar mit Hilfe von Satz 4.3.18 a).
Für $m \ge 3$ ergibt sich mit Satz 4.3.18 a)

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\le l\le k\\ l+k=m}} T(1,p)T(p^l,p^k) &= \sum_{\substack{1\le l\le k\\ l+k=m}} T(1,p)T(p^{l-1},p^{k-1})T(p,p)\\ &= T(1,p) \sum_{\substack{0\le l\le k\\ l+k=m-2}} T(p^l,p^k)T(p,p)\\ &= T(1,p)T(p^{m-2})T(p,p)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{1\le l\le k\\ l+k=m+1}} T(p^l,p^k) + |p|^2 \sum_{\substack{1\le l\le k\\ l+k=m-1}} T(p^l,p^k)T(p,p)\\ &\quad= \sum_{\substack{1\le l\le k\\ l+k=m+1}} T(p^{l-1},p^{k-1})T(p,p) + |p|^2 \sum_{\substack{1\le l\le k\\ l+k=m-1}} T(p^{l-1},p^{k-1})T(p,p)T(p,p)\\ &\quad= \sum_{\substack{0\le l\le k\\ l+k=m-1}} T(p^l,p^k)T(p,p) + |p|^2 \sum_{\substack{0\le l\le k\\ l+k=m-3}} T(p^l,p^k)T(p,p)T(p,p)\\ &\quad= T(p^{m-1})T(p,p) + |p|^2 T(p^{m-3})T(p,p)T(p,p),\end{aligned}$$

so dass wir die Behauptung mit Satz 4.3.18 b) erhalten.

b) Der Fall $m = 1$ ist die Aussage von Lemma 4.3.7.
Für $m = 2$ folgt aus Satz 4.3.18 b)

$$T(1,p^2) = T(1,p)T(1,p) - (|p^2| + 1)T(p,p).$$

Somit erhalten wir mit Lemma 4.3.7

$$\begin{aligned}\deg(T(1,p^2)) &= \deg(T(1,p))\deg(T(1,p)) - (|p|^2+1)\deg(T(p,p))\\ &= (|p|^2+1)(|p|^2+1) - (|p|^2+1)\cdot 1\\ &= |p|^2(|p|^2+1).\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Teil a) ergibt sich die Behauptung für $m > 2$ nun per Induktion. □

**Lemma 4.3.20.** *Es sei $\mathfrak{T}$ aus Definition 4.2.2. Dann lässt sich die formale Dirichlet-Reihe $\sum_{N\in\mathfrak{T}} T(N)|N|^{-s}$ als Euler-Produkt darstellen:*

$$\sum_{N\in\mathfrak{T}} T(N)|N|^{-s} = \prod_{\substack{p\mid d(\mathcal{R})\\ p\in\mathbb{P}}} \left(1 - T(p)|p|^{-s}\right)^{-1} \cdot \prod_{\substack{p\nmid d(\mathcal{R})\\ p\in\mathbb{P}}} \left(1 - T(p)|p|^{-s} + T(p,p)|p|^{2-2s}\right)^{-1}.$$

*Beweis.* Wegen der Multiplikativität der $T(N)$ (Lemma 4.3.13) ist

$$\sum_{N\in\mathfrak{T}} T(N)|N|^{-s} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} T(p^m)|p|^{-ms}\right).$$

Mit Satz 4.3.15 erhalten wir nun für $p \mid d(\mathcal{R})$

$$\sum_{m=0}^{\infty} T(p^m)|p|^{-ms} = \sum_{m=0}^{\infty} T(p)^m|p|^{-ms} = \left(1 - T(p)|p|^{-s}\right)^{-1}.$$

Für $p \nmid d(\mathcal{R})$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} T(p^m)|p|^{-ms} &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} T(p^m)|p|^{-ms}\\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{0\le l\le k\\ l+k=m}} T(p^l,p^k)|p|^{-ms}\\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} T(1,p^m)|p|^{-ms} + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{\substack{1\le l\le k\\ l+k=m}} T(p^l,p^k)|p|^{-ms}\\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} T(1,p^m)|p|^{-ms} + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{\substack{0\le l\le k\\ l+k=m-2}} T(p,p)T(p^l,p^k)|p|^{-ms}\\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} T(1,p^m)|p|^{-ms} + T(p,p)\sum_{m=0}^{\infty} T(p^m)|p|^{-ms}|p|^{-2s}.\end{aligned}$$

Nun gilt wegen Satz 4.3.18

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} T(1,p^m)|p|^{-ms} &= T(1,p)|p|^{-s} + \sum_{m=1}^{\infty} T(1,p^{m+1})|p|^{-ms}|p|^{-s} \\
&= T(1,p)|p|^{-s} + \sum_{m=1}^{\infty} T(p)T(p^m)|p|^{-ms}|p|^{-s} \\
&\quad - (|p|^2+1)T(p,p)\sum_{m=1}^{\infty} T(p^{m-1})|p|^{-ms}|p|^{-s} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} T(p)T(p^m)|p|^{-ms}|p|^{-s} \\
&\quad - (|p|^2+1)T(p,p)|p|^{-2s}\sum_{m=0}^{\infty} T(p^m)|p|^{-ms}.
\end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir

$$\sum_{m=0}^{\infty} T(p^m)|p|^{-ms} = 1 + \big(T(p)|p|^{-s} - |p|^2T(p,p)|p|^{-2s}\big)\sum_{m=0}^{\infty} T(p^m)|p|^{-ms},$$

also

$$1 = \big(1 - T(p)|p|^{-s} + |p|^2T(p,p)|p|^{-2s}\big)\sum_{m=0}^{\infty} T(p^m)|p|^{-ms}.$$

Es folgt die Behauptung.

□

**Lemma 4.3.21.** *Es seien $M, N \in \mathfrak{T}$, $\epsilon \in \mathcal{R}^*$ und $e := \mathrm{n}(\epsilon)$. Dann gilt:*

*a)* $\epsilon\Gamma_{\mathcal{R}} = \Gamma_{\mathcal{R}}\epsilon,\ \mathcal{R}^{(eN)} = \epsilon\mathcal{R}^{(N)} = \mathcal{R}^{(N)}\epsilon,$

*b)* $d(N)d(M) = d(NM)$, *falls $N$ prim zu $M$ ist,*

*c)* $d(N) = \sum_{\substack{t\in\mathfrak{T},\ t|N,\\ (t,d(\mathcal{R}))=1}} |t|^2.$

*Beweis.*
a) Einfaches Nachrechnen der behaupteten Identitäten.
b) Die Behauptung folgt unmittelbar aus Lemma 4.1.13 und Lemma 4.3.13.
c) Für $p \nmid d(\mathcal{R})$ folgt aus Lemma 4.1.13 und Satz 4.3.18

$$\deg(T(p))\deg(T(p^m)) = \deg(T(1,p^{m+1})) + (|p|^2+1)\deg(T(p^{m-1}))\deg(T(p,p)).$$

Wegen $T(p,p) = \Gamma_{\mathcal{R}} p \Gamma_{\mathcal{R}} = \Gamma_{\mathcal{R}} p$ und Lemma 4.3.19 ergibt sich daraus

$$(|p|^2+1)\deg(T(p^m)) = |p^2|^m(|p|^2+1) + (|p|^2+1)\deg(T(p^{m-1}))$$

und somit

$$\begin{aligned}\deg(T(p^m)) &= |p^m|^2 + \deg(T(p^{m-1}))\\ &= \sum_{i=0}^{m} |p^i|^2.\end{aligned}$$

Für $p \mid d(\mathcal{R})$ gilt mit Lemma 4.3.7 und Satz 4.3.15

$$\deg(T(p^m)) = \deg(T(p))^m = 1.$$

Zusammen mit Teil b) erhalten wir die Behauptung.

$\square$

## 4.4 Hecke-Operatoren auf $L^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\backslash\mathbb{H})$

Die bisherigen Ergebnisse dieses Kapitels werden wir in diesem Abschnitt zur Definition geeigneter Hecke-Operatoren nutzen. Wir werden dann die Existenz einer gemeinsamen Orthonormalbasis $\{f_k^\lambda\}$ von $C^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\backslash\mathbb{H},\lambda)$ bezüglich dieser Hecke-Operatoren und des Laplace-Beltrami-Operators zeigen. Schließlich werden wir nachweisen, dass die Fourierkoeffizienten der zu dieser Basis gehörenden Theta-Lifts $\mathcal{I}_{f_k^\lambda}^{P_0}$ gewisse multiplikative Eigenschaften aufweisen.

**Definition 4.4.1.** *Es sei $e$ ein Erzeuger der Einheitengruppe von $\mathfrak{o}_K$. Im Hinblick auf Lemma 4.2.14 wählen wir dazu ein $\epsilon \in \mathcal{R}^*$ mit $\mathrm{n}(\epsilon) = e$. Für $j \in \{1,\dots,|\mathfrak{o}_K^*|\}$ seien dann*

$$\epsilon_j := \epsilon^j \textit{ und } e_j := e^j = \mathrm{n}(\epsilon_j).$$

**Definition 4.4.2.** *Für $N \in \mathfrak{o}_K$ mit $e_jN \in \mathfrak{T}$, $f \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\backslash\mathbb{H})$ und $\mathcal{R}^{(N)} = \sum_{k=1}^{d(N)} \Gamma_{\mathcal{R}}\xi_{kN}$ (Definition 1.3.8) werden die Hecke-Operatoren $T_N$ definiert durch*

$$T_N f := \sum_{k=1}^{d(N)} f|_{\epsilon_j\xi_{kN}},$$

*wobei die Elemente von $\mathcal{R}\setminus\{0\}$ mittels der Einbettung $\Psi$ aus (1.2) als Elemente von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ aufzufassen sind und der Strichoperator $|$ gemäß Definition 1.2.4 zu verstehen ist.*

*Anmerkung:* Die $T_N$ sind wohldefiniert, da sie nach Lemma 3.2.2 unabhängig vom speziellen Vertretersystem $\xi_{kN}$ sind.

**Definition 4.4.3.** *Mit $\epsilon_j$ aus Definition 4.4.1 und $f \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\backslash\mathbb{H})$ wird der Hecke-Operator $T_{\epsilon_j}$ definiert durch*

$$T_{\epsilon_j} f := f|_{\epsilon_j}.$$

*Anmerkung:* Nach Wahl der $\epsilon_j$ gilt also $T_{\epsilon_j} = (T_{\epsilon_1})^j$.

**Satz 4.4.4.** *Die Hecke-Operatoren $T_N$ und $T_{\epsilon_j}$ sind beschränkte lineare Operatoren, die $L^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\backslash\mathbb{H})$ wieder nach $L^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\backslash\mathbb{H})$ abbilden. Eingeschränkt auf $C^\infty(\Gamma_{\mathcal{R}}\backslash\mathbb{H})$ sind sie mit dem Laplace-Beltrami-Operator $\Delta$ vertauschbar.*

*Beweis.* Im Hinblick auf Lemma 4.4.6 und Lemma 4.4.7 sei o.B.d.A. $N \in \mathfrak{T}$.

i) Die Linearität ist klar ersichtlich.

ii) Zum Transformationsverhalten:
Es seien $f \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H})$ und $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{R}}$. Dann gilt mit Lemma 4.4.5

$$\begin{aligned} T_N f(\gamma P) &= \sum_{k=1}^{d(N)} f(\xi_{kN}\gamma P) \\ &= \sum_{k=1}^{d(N)} f(\beta_k \xi_{\pi(k)N} P) \\ &= \sum_{k=1}^{d(N)} f(\xi_{\pi(k)N} P) \\ &= T_N f(P) \end{aligned}$$

und

$$T_{\epsilon_j} f(\gamma P) = f(\epsilon_j \gamma P) = f(\beta \epsilon_j P) = f(\epsilon_j P) = T_{\epsilon_j} f(P)$$

mit geeignetem $\beta \in \Gamma_{\mathcal{R}}$, da nach Lemma 4.3.21 $\epsilon_j \gamma \in \epsilon_j \Gamma_{\mathcal{R}} = \Gamma_{\mathcal{R}} \epsilon_j$ ist.

iii) Zur Beschränktheit:
Es seien $f \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H})$ und $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich von $\Gamma_{\mathcal{R}}$. Da $\mathcal{F}$ relativ kompakt ist, liegt $\xi_{kN}\mathcal{F}$ für jedes $k \in \{1, \ldots, d(N)\}$ in einer endlichen Vereinigung $\sum_{l=1}^{M_k} \beta_{lk}\mathcal{F}$ mit geeignetem $\beta_{lk} \in \Gamma_{\mathcal{R}}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathcal{F}} |T_N f(P)|^2 d\mu(P) \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_{k=1}^{d(N)} \left( \int_{\mathcal{F}} |f(\xi_{kN} P)|^2 d\mu(P) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{k=1}^{d(N)} \left( \int_{\xi_{kN}\mathcal{F}} |f(P)|^2 d\mu(P) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_{k=1}^{d(N)} \left( \int_{\sum_{l=1}^{M_k} \beta_{lk}\mathcal{F}} |f(P)|^2 d\mu(P) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_{k=1}^{d(N)} M_k \left( \int_{\mathcal{F}} |f(P)|^2 d\mu(P) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C \|f\|_{L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H})} \end{aligned}$$

mit $C := \sum_{k=1}^{d(N)} M_k$. Ferner ist

$$\int_{\mathcal{F}} |T_{\epsilon_j} f(P)|^2 d\mu(P) = \int_{\epsilon_j \mathcal{F}} |f(P)|^2 d\mu(P) = \|f\|^2_{L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H})},$$

da $\epsilon_j \mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich von $\epsilon_j \Gamma_{\mathcal{R}} \epsilon_j^{-1} = \Gamma_{\mathcal{R}}$ ist.

iv) Zur Vertauschbarkeit mit $\Delta$:
Nach Satz 1.1.4 gilt für $f \in C^\infty(\Gamma_{\mathcal{R}}\diagdown\mathbb{H})$ und $A \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$

$$(\Delta f)|_A = \Delta(f|_A).$$

Die Behauptung folgt unmittelbar.

□

**Lemma 4.4.5.** *Es seien $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{R}}$ und $d(N), \xi_{kN}$ wie oben. Dann gibt es eine Permutation $\pi$ von $\{1,\dots,d(N)\}$ und für jedes $k \in \{1,\dots,d(N)\}$ ein $\beta_k \in \Gamma_{\mathcal{R}}$, so dass*

$$\xi_{kN}\gamma = \beta_k \xi_{\pi(k)N}$$

*ist.*

*Beweis.* Für alle $k \in \{1,\dots,d(N)\}$ ist $\xi_{kN}\gamma \in \mathcal{R}^{(N)}$. Also gibt es ein $l \in \{1,\dots,d(N)\}$ mit

$$\xi_{kN}\gamma \in \Gamma_{\mathcal{R}}\xi_{lN}.$$

Wir nehmen an, dass es nun noch ein $k' \in \{1,\dots,d(N)\}$, $k \neq k'$ gibt mit

$$\xi_{k'N}\gamma \in \Gamma_{\mathcal{R}}\xi_{lN}.$$

Dann muss ein $\beta \in \Gamma_{\mathcal{R}}$ existieren mit $\xi_{k'N} = \beta\xi_{kN}$. Dies führt uns aber zu einem Widerspruch in Bezug auf die Disjunktheit der Rechtsnebenklassen $\Gamma_{\mathcal{R}}\xi_{kN}$.

□

**Lemma 4.4.6.** *Es sei $e' \in \mathfrak{o}_K^*$. Dann gilt für $N \in \mathfrak{o}_K$*

$$d(e'N) = d(N).$$

*Beweis.* Die Aussage ergibt sich unmittelbar aus Lemma 4.3.21 a).

□

**Lemma 4.4.7.** *Für die obigen $T_N$ gilt mit $f \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\diagdown\mathbb{H})$*

*a)* $T_1 f = f$,

*b)* $T_{e'N} f = T_N f$ *für* $e' \in \mathfrak{o}_K^*$.

*Beweis.*
a) Klar.
b) Es sei $\epsilon' \in \mathcal{R}^*$ mit $\mathrm{n}(\epsilon') = e'$, wobei wir o.B.d.A $e'N \in \mathfrak{T}$ annehmen. Mit Lemma 4.3.21 erhalten wir

$$\mathcal{R}^{(N)} = \mathcal{R}^{((e')^{-1}e'N)} = (\epsilon')^{-1}\mathcal{R}^{(e'N)} = \sum_{k=1}^{d(N)} (\epsilon')^{-1}\Gamma_{\mathcal{R}}\xi_{ke'N} = \sum_{k=1}^{d(N)} \Gamma_{\mathcal{R}}(\epsilon')^{-1}\xi_{ke'N}.$$

Die Behauptung folgt aus der Definition der $T_N$.

□

*Anmerkung:* Die beiden obigen Lemmata erlauben uns bei den nachfolgenden Beweisen eine Beschränkung auf den Fall $N \in \mathfrak{T}$.

Mit Hilfe des nachfolgenden Satzes werden wir im Weiteren Eigenschaften der $T(N)$ des letzten Abschnitts auf die Hecke-Operatoren $T_N$ übertragen.

**Satz 4.4.8.** *Es sei* $\sum_k c_k \Gamma_{\mathcal{R}} \alpha_k \in L(\Gamma_{\mathcal{R}}, \mathfrak{S})^{\Gamma_{\mathcal{R}}} \simeq R(\Gamma_{\mathcal{R}}, \mathfrak{S})$ *und* $f \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H})$*. Dann definiert die Zuordnung*

$$\sum_k c_k \Gamma_{\mathcal{R}} \alpha_k \to \sum_k c_k f|_{\alpha_k}$$

*einen Ringhomomorphismus*

$$\Phi : R(\Gamma_{\mathcal{R}}, \mathfrak{S}) \to \mathcal{B}(L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H})),$$

*wobei* $\mathcal{B}(L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H}))$ *die Algebra aller beschränkten* $\mathbb{C}$*-linearen Operatoren von* $L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H})$ *in sich bezeichnet.*

*Beweis.* Da $\sum_k c_k \Gamma_{\mathcal{R}} \alpha_k \in L(\Gamma_{\mathcal{R}}, \mathfrak{S})^{\Gamma_{\mathcal{R}}}$ ist, folgt $\sum_k c_k f|_{\alpha_k} \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H})$.
Die Linearität von $\Phi$ ist offensichtlich, ebenso die Beziehung $\Phi(R(\Gamma_{\mathcal{R}}, \mathfrak{S})) \subset \mathcal{B}(L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H}))$.
Für

$$t := \sum_k c_k \Gamma_{\mathcal{R}} \alpha_k, \ s := \sum_l d_l \Gamma_{\mathcal{R}} \beta_l \in L(\Gamma_{\mathcal{R}}, \mathfrak{S})^{\Gamma_{\mathcal{R}}} \simeq R(\Gamma_{\mathcal{R}}, \mathfrak{S})$$

reicht es also für beliebiges $f \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H})$

$$\Phi(s \cdot t)[f] = \Phi(s) \left[\Phi(t)[f]\right]$$

zu zeigen.
Da $R(\Gamma_{\mathcal{R}}, \mathfrak{S})$ eine kommutative Hecke-Algebra ist, erhalten wir

$$s \cdot t = t \cdot s = \sum_k \sum_m c_k d_l \Gamma_{\mathcal{R}} \alpha_k \beta_l.$$

Daraus folgt

$$\Phi(s \cdot t)[f] = \sum_{k,l} c_k d_l f|_{\alpha_k \beta_l} = \Phi(s) \left[ \sum_k c_k f|_{\alpha_k} \right] = \Phi(s) \left[\Phi(t)[f]\right].$$

$\square$

**Satz 4.4.9.** *Es seien $N, M \in \mathfrak{o}_K$ und $p$ eine beliebige Primzahl aus $\mathfrak{o}_K$. Dann gilt für die Hecke-Operatoren auf $L^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\diagdown\mathbb{H})$*

*a)* $T_{NM} = T_N T_M$, *falls $N, M$ relativ prim sind,*

*b)* $T_{p^m} = (T_p)^m$ *für $p \mid d(\mathcal{R})$ und $m \in \mathbb{N}$,*

*c)* $T_{p^m} = T_p T_{p^{m-1}} - |p|^2 T_{p^{m-2}}$ *für $p \nmid d(\mathcal{R})$ und $m \geq 2$.*

*Beweis.* O.B.d.A. seien $N, M \in \mathfrak{T}$ und $p \in \mathbb{P}$.
Mit Hilfe von Satz 4.4.8 ergeben sich die Behauptungen *a)* und *b)* unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen für die $T(N)$ (Lemma 4.3.13, Satz 4.3.15). Behauptung *c)* folgt aus Satz 4.3.18, dabei ist zu beachten, dass auf $L^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\diagdown\mathbb{H})$

$$\Phi(T(p,p)) = \mathrm{id}$$

gilt, denn für $f \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\diagdown\mathbb{H})$ und $P \in \mathbb{H}$ ist

$$\begin{aligned}\Phi(T(p,p))[f(P)] &= \Phi(\Gamma_{\mathcal{R}} p \Gamma_{\mathcal{R}})[f(P)] = \Phi(\Gamma_{\mathcal{R}} p)[f(P)] = f|_p(P) \\ &= f\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} P\right) = f(P).\end{aligned}$$

□

**Definition 4.4.10.** *Es seien $f \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\diagdown\mathbb{H})$ und $\alpha \in \tilde{\Gamma}_{\mathcal{R}}$, also nach (4.4) $\alpha \in \mathcal{A}[q,r]$ mit $\mathrm{n}(\alpha) \neq 0$. Mit der disjunkten Zerlegung $\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}} = \bigcup_{k=1}^{d(\alpha)} \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\epsilon_k$, $\epsilon_k \in \Gamma_{\mathcal{R}}$, (Satz 4.1.3) definieren wir*

$$f|_{[\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}]} := \sum_{k=1}^{d(\alpha)} f|_{\alpha\epsilon_k}.$$

**Satz 4.4.11.** *Es seien $f, g \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\diagdown\mathbb{H})$ und $\alpha \in \tilde{\Gamma}_{\mathcal{R}}$. Dann sind $f|_{[\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}]}$ und $g|_{[\Gamma_{\mathcal{R}}\overline{\alpha}\Gamma_{\mathcal{R}}]}$ in $L^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\diagdown\mathbb{H})$, und es gilt*

$$\left\langle f|_{[\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}]}, g\right\rangle = \left\langle f, g|_{[\Gamma_{\mathcal{R}}\overline{\alpha}\Gamma_{\mathcal{R}}]}\right\rangle.$$

*Beweis.* Da $\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}} = \bigcup_{k=1}^{d(\alpha)} \Gamma_{\mathcal{R}}\alpha_k \in L(\Gamma_{\mathcal{R}}, \mathfrak{S})^{\Gamma_{\mathcal{R}}}$ ist, folgt $\sum_{k=1}^{d(\alpha)} f|_{\alpha_k} \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\diagdown\mathbb{H})$. Entsprechend ist $g|_{[\Gamma_{\mathcal{R}}\overline{\alpha}\Gamma_{\mathcal{R}}]} \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\diagdown\mathbb{H})$.
Wir zeigen nun zuerst

$$\left\langle f|_{[\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}]}, g\right\rangle = \left\langle f, g|_{[\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^{-1}\Gamma_{\mathcal{R}}]}\right\rangle.$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\left\langle f|_{[\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}]}, g\right\rangle &= \int_{\mathcal{F}} \sum_{k=1}^{d(\alpha)} f(\alpha\epsilon_k P)\overline{g(P)}d\mu(P) \\
&= \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \int_{\epsilon_k\mathcal{F}} f(\alpha P)\overline{g(\epsilon_k^{-1}P)}d\mu(P) \\
&= \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \int_{\epsilon_k\mathcal{F}} f(\alpha P)\overline{g(P)}d\mu(P) \\
&= \int_{\mathcal{Q}} f(\alpha P)\overline{g(P)}d\mu(P) \text{ mit } \mathcal{Q} := \bigcup_{k=1}^{d(\alpha)} \epsilon_k\mathcal{F} \\
&= \int_{\alpha\mathcal{Q}} f(P)\overline{g(\alpha^{-1}P)}d\mu(P)
\end{aligned}$$

Wegen $\Gamma_{\mathcal{R}} = \bigcup_{k=1}^{d(\alpha)}(\Gamma \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha)\epsilon_k$ (Satz 4.1.3) ist $\mathcal{Q}$ ein Fundamentalbereich von $\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \alpha^{-1}\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha$. Somit ist $\alpha\mathcal{Q}$ ein Fundamentalbereich von $\alpha(\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \alpha^{-1}\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha)\alpha^{-1} = \alpha\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^{-1} \cap \Gamma_{\mathcal{R}}$.
Für $\Gamma_{\mathcal{R}} = \bigcup_{k=1}^{d(\alpha^{-1})}(\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^{-1} \cap \Gamma_{\mathcal{R}})\eta_k,\ \ \eta_k \in \Gamma_{\mathcal{R}}$ (Satz 4.1.3), ist nun $\tilde{\mathcal{Q}} := \bigcup_{k=1}^{d(\alpha^{-1})} \eta_k\mathcal{F}$ auch ein Fundamentalbereich von $\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^{-1} \cap \Gamma_{\mathcal{R}}$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\left\langle f, g|_{[\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^{-1}\Gamma_{\mathcal{R}}]}\right\rangle &= \int_{\mathcal{F}} f(P) \sum_{k=1}^{d(\alpha^{-1})} \overline{g(\alpha^{-1}\eta_k P)}d\mu(P) \\
&= \int_{\tilde{\mathcal{Q}}} f(P)\overline{g(\alpha^{-1}P)}d\mu(P) \\
&= \int_{\alpha\mathcal{Q}} f(P)\overline{g(\alpha^{-1}P)}d\mu(P),
\end{aligned}$$

so dass wir

$$\left\langle f|_{[\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}]}, g\right\rangle = \left\langle f, g|_{[\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^{-1}\Gamma_{\mathcal{R}}]}\right\rangle$$

erhalten.
Wegen $\alpha^{-1}\mathrm{n}(\alpha) = \overline{\alpha}$ ist $\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^{-1}\Gamma_{\mathcal{R}}\mathrm{n}(\alpha) = \Gamma_{\mathcal{R}}\overline{\alpha}\Gamma_{\mathcal{R}}$. Somit ist $d(\alpha^{-1}) = d(\overline{\alpha})$,

und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
g|_{[\Gamma_{\mathcal{R}}\overline{\alpha}\Gamma_{\mathcal{R}}]} &= \sum_{k=1}^{d(\overline{\alpha})} g|_{\overline{\alpha}\epsilon_k} \\
&= \sum_{k=1}^{d(\alpha^{-1})} g|_{\mathrm{n}(\alpha)\alpha^{-1}\epsilon_k} \\
&= \sum_{k=1}^{d(\alpha^{-1})} g|_{\alpha^{-1}\epsilon_k} \\
&= g|_{[\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha^{-1}\Gamma_{\mathcal{R}}]}.
\end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. □

**Satz 4.4.12.** *Die Hecke-Operatoren $T_N$ sind bezüglich des Peterssonschen Skalarprodukts auf $L^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\diagdown\mathbb{H})$ selbstadjungiert.*
*Die Hecke-Operatoren $T_{\epsilon_j}$ und $T_{\epsilon_j^{-1}}$ sind bezüglich des Peterssonschen Skalarprodukts auf $L^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\diagdown\mathbb{H})$ zueinander adjungiert. Insbesondere sind die $T_{\epsilon_j}$ unitär, also auch normal.*

*Beweis.* Es sei wieder o.B.d.A. $N \in \mathfrak{T}$.
Für $f \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\diagdown\mathbb{H})$ ist dann

$$T_N f = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^{(N)}} f|_{[\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}]}.$$

Ist nun $\alpha \in \mathcal{R}^{(N)}$, $N \in \mathfrak{T}$, so haben nach Lemma 4.3.5 $\alpha$ und $\overline{\alpha}$ die gleichen Elementarteiler. Aus Satz 4.3.4 ergibt sich somit

$$\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}} = \Gamma_{\mathcal{R}}\overline{\alpha}\Gamma_{\mathcal{R}}.$$

Mit Satz 4.4.11 erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\langle T_N f, g\rangle &= \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^{(N)}} \left\langle f|_{[\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}]}, g\right\rangle \\
&= \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^{(N)}} \left\langle f, g|_{[\Gamma_{\mathcal{R}}\overline{\alpha}\Gamma_{\mathcal{R}}]}\right\rangle \\
&= \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^{(N)}} \left\langle f, g|_{[\Gamma_{\mathcal{R}}\alpha\Gamma_{\mathcal{R}}]}\right\rangle \\
&= \langle f, T_N g\rangle .
\end{aligned}$$

Ist $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich von $\Gamma_{\mathcal{R}}$, dann ist nach Lemma 4.3.21 $\epsilon_j^{-1}\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich von $\epsilon_j^{-1}\Gamma_{\mathcal{R}}\epsilon_j = \Gamma_{\mathcal{R}}$. Somit gilt für $f, g \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H})$

$$\langle f, g \rangle = \left\langle T_{\epsilon_j^{-1}} f, T_{\epsilon_j^{-1}} g \right\rangle.$$

Daraus folgt

$$\langle T_{\epsilon_j} f, g \rangle = \left\langle T_{\epsilon_j^{-1}} T_{\epsilon_j} f, T_{\epsilon_j^{-1}} g \right\rangle = \left\langle f, T_{\epsilon_j^{-1}} g \right\rangle.$$

Wegen $T_{\epsilon_j^{-1}} = T_{\epsilon_j}^{-1}$ sind die $T_{\epsilon_j}$ unitär, insbesondere also normal. □

**Satz 4.4.13.** *Die Hecke-Operatoren $T_N$ ($N \in \mathfrak{o}_K$) und $T_{\epsilon_j}$ ($j \in \{1, \ldots, |\mathfrak{o}_K^*|\}$) sind auf $L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H})$ alle miteinander vertauschbar.*

*Beweis.* Wir setzen wieder o.B.d.A. $N \in \mathfrak{T}$ voraus.
Nach Satz 4.3.6 kommutieren insbesondere die $T(N)$. Die Kommutativität der $T_N$ untereinander erhalten wir somit sofort aus Satz 4.4.8.
Nach Definition der $\epsilon_j$ ergibt sich für $f \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H})$

$$T_{\epsilon_j} T_{\epsilon_k} f = f|_{\epsilon^{j+k}} = T_{\epsilon_k} T_{\epsilon_j} f.$$

Für $N \in \mathfrak{T}$ gilt nach Lemma 4.3.21

$$\sum_{k=1}^{d(N)} \Gamma_{\mathcal{R}} \xi_{kN} \epsilon_j = \mathcal{R}^{(N)} \epsilon_j = \epsilon_j \mathcal{R}^{(N)} = \sum_{k=1}^{d(N)} \epsilon_j \Gamma_{\mathcal{R}} \xi_{kN} = \sum_{k=1}^{d(N)} \Gamma_{\mathcal{R}} \epsilon_j \xi_{kN}.$$

Daraus erhalten wir für $f \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H})$

$$T_{\epsilon_j} T_N f = \sum_{k=1}^{d(N)} f|_{\xi_{kN}\epsilon_j} = \sum_{k=1}^{d(N)} f|_{\epsilon_j \xi_{kN}} = T_N T_{\epsilon_j} f.$$

□

**Definition 4.4.14.** *Im Hinblick auf Satz 4.4.4, Satz 4.4.12, Satz 4.4.13 und* [9]*, S. 136, Theorem 1.7 bilden die Operatoren $T_N$ ($N \in \mathfrak{o}_K$), $T_{\epsilon_j}$ ($j \in \{1, \ldots |\mathfrak{o}_K^*|\}$) und $\Delta$ auf $C^\infty(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H})$ eine Familie vertauschbarer normaler Operatoren.*
*Für $\lambda \neq 0$ sei deshalb $\{f_1^\lambda, \ldots, f_A^\lambda\}$ eine Orthonormalbasis von $C^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \diagdown \mathbb{H}, \lambda)$ bestehend aus gemeinsamen Eigenfunktionen der Hecke-Operatoren und des Laplace-Beltrami-Operators. Die zugehörigen Eigenwerte der Hecke-Operatoren werden wir dabei für $f_k^\lambda \in \{f_1^\lambda, \ldots, f_A^\lambda\}$ wie folgt bezeichnen:*

$$T_N f_k^\lambda = \omega_{kN} f_k^\lambda,$$
$$T_{\epsilon_j} f_k^\lambda = \omega_{k\epsilon_j} f_k^\lambda.$$

**Satz 4.4.15.** *Für $\lambda \neq 0$ sei $\{f_1^\lambda, \ldots, f_A^\lambda\}$ die simultane Orthonormalbasis aus Definition 4.4.14. Ferner seien $N, M \in \mathfrak{o}_K$ und $p$ eine beliebige Primzahl aus $\mathfrak{o}_K$. Dann gilt für die Eigenwerte:*

*a)* $\omega_{k\epsilon_j} = (\omega_{k\epsilon_1})^j$,
$\omega_{k\epsilon_j^{-1}} = \overline{\omega_{k\epsilon_j}}$,
$\omega_{k\epsilon_j} \in \mathfrak{o}_K^*$,

*b)* $\omega_{kN} \in \mathbb{R}$,
$\omega_{k1} = 1$,
$\omega_{keN} = \omega_{kN}$ *für* $e \in \mathfrak{o}_K^*$,
$\omega_{kN\cdot M} = \omega_{kN}\omega_{kM}$, *falls* $N, M$ *relativ prim sind,*
$\omega_{kp^m} = (\omega_{kp})^m$ *für* $p \mid d(\mathcal{R})$ *und* $m \in \mathbb{N}$,
$\omega_{kp^m} = \omega_{kp}\omega_{kp^{m-1}} - |p|^2\omega_{kp^{m-2}}$ *für* $p \nmid d(\mathcal{R})$ *und* $m \geq 2$,

*c)* $|\omega_{kN}| \leq d(N)$,

*d)* $$\sum_{N\in\mathfrak{T}} \frac{\omega_{kN}}{|N|^s} = \prod_{\substack{p|d(\mathcal{R})\\ p\in\mathbb{P}}} \frac{1}{1-\omega_{kp}|p|^{-s}} \prod_{\substack{p\nmid d(\mathcal{R})\\ p\in\mathbb{P}}} \frac{1}{1-\omega_{kp}|p|^{-s}+|p|^{2-2s}},$$

*mit absoluter Konvergenz beider Seiten für* $\mathrm{Re}(s) > 4$.

*Beweis.*
*a)* und *b)* folgen sofort aus Satz 4.4.12 und den entsprechenden Eigenschaften der Hecke-Operatoren.

*c)* Da $\Gamma_{\mathcal{R}}\diagdown\mathbb{H}$ relativ kompakt ist, nimmt $|f_k^\lambda|$ dort und somit in einem Punkt $P' \in \mathbb{H}$ ein absolutes Maximum an. Daraus folgt

$$\begin{aligned} |\omega_{kN}||f_k^\lambda(P')| &= |T_N f_k^\lambda(P')| \\ &= \Big|\sum_{l=1}^{d(N)} f_k^\lambda(\xi_{lN}P')\Big| \\ &\leq d(N)|f_k^\lambda(P')|. \end{aligned}$$

Wegen $f_k^\lambda \neq 0$ erhalten wir die Behauptung.

*d)* Nach Theorem 3.2.4 ist $\sum_{N\in\mathfrak{T}} \frac{d(N)}{|N|^s} < \infty$ für $\mathrm{Re}(s) > 4$, so dass mit *c)* die absolute Konvergenz von $\sum_{N\in\mathfrak{T}} \frac{\omega_{kN}}{|N|^s}$ für $\mathrm{Re}(s) > 4$ folgt.
Durch eine elementare Rechnung unter Benutzung der multiplikativen Eigenschaften der $\omega_{kN}$ aus *b)* oder durch eine Anwendung von Lemma 4.3.20 erhalten wir die angegebene Produktdarstellung von $\sum_{N\in\mathfrak{T}} \frac{\omega_{kN}}{|N|^s}$.

Es bleibt, die absolute Konvergenz der Produktentwicklung für $\mathrm{Re}(s) > 4$ zu zeigen:
Wegen der Endlichkeit des Produkts

$$\prod_{\substack{p \mid d(\mathcal{R}) \\ p \in \mathbb{P}}} \frac{1}{1 - \omega_{kp}|p|^{-s}}$$

müssen wir nur noch die absolute Konvergenz von

$$\prod_{\substack{p \nmid d(\mathcal{R}) \\ p \in \mathbb{P}}} \frac{1}{1 - \omega_{kp}|p|^{-s} + |p|^{2-2s}}$$

oder dazu äquivalent von

$$\prod_{\substack{p \nmid d(\mathcal{R}) \\ p \in \mathbb{P}}} \left(1 - \omega_{kp}|p|^{-s} + |p|^{2-2s}\right)$$

beweisen. Dazu reicht es zu zeigen, dass

$$\sum_{\substack{p \nmid d(\mathcal{R}) \\ p \in \mathbb{P}}} \left(\omega_{kp}|p|^{-s} - |p|^{2-2s}\right)$$

absolut konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > 4$. Nun ist für $\mathrm{Re}(s) > 4$

$$\begin{aligned} \left|\omega_{kp}|p|^{-s} - |p|^{2-2s}\right| &\leq \frac{|\omega_{kp}|}{|p|^{\mathrm{Re}(s)}} + \frac{1}{|p|^{2\mathrm{Re}(s)-2}} \\ &\leq 2\frac{d(p)}{|p|^{\mathrm{Re}(s)}}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich die Behauptung, da nach Theorem 3.2.4 $\sum_{N \in \mathfrak{T}} \frac{d(N)}{|N|^s} < \infty$ ist für $\mathrm{Re}(s) > 4$. □

Kehren wir nun zu den Aussagen von Theorem 3.2.4 zurück, so erhalten wir abschließend die als Ziel dieses Kapitels angestrebte vereinfachte Darstellung der Fourierentwicklung von $\mathcal{I}^{P_0}_{f_k^\lambda}$. Zur besseren Übersicht führen wir noch einmal alle hierfür notwendigen Voraussetzungen und Bezeichnungen auf:
Für einen imaginär-quadratischen Zahlkörper $K$ der Klassenzahl 1 sei $\mathcal{R}$ eine *maximale* Ordnung (siehe Definition 1.3.2) in der Quaternionenalgebra

$\mathcal{A}[q,r]$ über $K$ (Definition 1.3.1). Mit der Norm-1-Gruppe $\Gamma_{\mathcal{R}}$ sei wie in Lemma 1.3.8

$$\mathcal{R}^{(N)} := \{x \in \mathcal{R};\ \mathrm{n}(x) = N\} = \sum_{k=1}^{d(N)} \Gamma_{\mathcal{R}}\xi_{kN}.$$

Wir setzen voraus, dass $\mathcal{A}[q,r]$ eine Divisionsalgebra ist und $\mathcal{R}$ die $\mathfrak{o}_K$-Basis $e_0, e_1, e_2, e_3$ besitzt. Dazu betrachten wir mit $S_1 = (\mathrm{tr}(e_i\overline{e_j}))$ die Matrix der der Normfunktion auf $\mathcal{R}$ zugeordneten Bilinearform auf $\mathfrak{o}_K^4$ (siehe (3.1)). Es ist $S_1 \in \mathrm{GL}(4;K) \cap \mathrm{M}(4;\mathfrak{o}_K)$ gerade. Mit $\mathcal{N}$ bezeichnen wir die Stufe von $S_1$ (Definition 2.1.2) und mit $R_1$ die in Abhängigkeit von $P, P_0 \in \mathbb{H}$ speziell gewählte Majorante von $S_1$ (Definition 3.1.3). Mit der zu $S_1$ und $R_1$ gehörigen Thetafunktion

$$\Phi_{\mathcal{R}}(P,P_0,\zeta) = v^2 \sum_{W=\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{R}} e^{4\pi i \mathrm{Re}((\alpha\delta-\beta\gamma)\tau_D u)} e^{-4\pi v|\tau_D||\alpha\delta-\beta\gamma|\delta(P,WP_0)}$$

(Definition 3.1.5), wobei $\zeta = u + jv \in \mathbb{H}$ ist, betrachten wir dann den Theta-Lift

$$\mathcal{I}_{f_k^\lambda}^{P_0}(\zeta) := \int_{\mathcal{F}} \Phi_{\mathcal{R}}(P,P_0,\zeta) f_k^\lambda(P)\, d\mu(P)$$

(Definition 3.2.1). Hierbei ist $f_k^\lambda \in \{f_1^\lambda, \ldots, f_A^\lambda\}$, wobei wir gemäß Definition 4.4.14 $\{f_1^\lambda, \ldots, f_A^\lambda\}$ als simultane Orthonormalbasis von $C^2(\Gamma_{\mathcal{R}}\diagdown\mathbb{H}, \lambda)$ bestehend aus Eigenfunktionen der Hecke-Operatoren und des Laplace-Beltrami-Operators mit Eigenwerten $\omega_{kN}$, $\omega_{k\epsilon_j}$ bzw. $\lambda = 1 - s^2 \neq 0$ wählen.

**Theorem 4.4.16.** *Unter den oben angegebenen Voraussetzungen gilt mit der modifizierten Besselfunktion $K_s$*

$$\mathcal{I}_{f_k^\lambda}^{P_0}(\zeta) = 2v f_k^\lambda(P_0) \sum_{N\in\mathfrak{T}} \frac{\omega_{kN}}{|N\tau_D|} K_s(4\pi v|N\tau_D|) \sum_{j=1}^{|\mathfrak{o}_K^*|} \omega_{k\epsilon_j} e^{4\pi i \mathrm{Re}(e_j N\tau_D u)}.$$

*Dabei besitzen die $\omega_{kN}$, $\omega_{k\epsilon_j}$ die Eigenschaften aus Satz 4.4.15.*
*$\mathcal{I}_{f_k^\lambda}^{P_0}(\zeta)$ ist genau dann eine (erweiterte) Spitzenform zu $\Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1})$ mit Eigenwert $\lambda$, wenn $P_0$ so gewählt wird, dass $f_k^\lambda(P_0) \neq 0$ ist.*
*Ist $f_k^\lambda(P_0) \neq 0$, so gilt für $\mathrm{Re}(w) > 3$*

$$\sum_{N\in\mathfrak{T}} \frac{\omega_{kN}}{|N|^{w+1}} = \frac{2(2\pi)^w|\tau_D|^{w+1}}{\Gamma(\frac{1}{2}w+\frac{1}{2}s)\Gamma(\frac{1}{2}w-\frac{1}{2}s) f_k^\lambda(P_0)\left(\sum_{j=1}^{|\mathfrak{o}_K^*|}\omega_{k\epsilon_j}\right)} \int_0^\infty \mathcal{I}_{f_k^\lambda}^{P_0}(jt)\, t^{w-2}\, dt.$$

*Die rechte Seite der Gleichung ist dabei eine ganze Funktion in $w$.*

*Beweis.* Im Falle der absoluten Konvergenz gilt allgemein

$$\sum_{N \in \mathfrak{o}_K \setminus \{0\}} A_N = \sum_{N \in \mathfrak{T}} \sum_{j=1}^{|\mathfrak{o}_K^*|} A_{e_j N}.$$

Mit Lemma 4.4.7 folgt deshalb für $N \in \mathfrak{T}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{d(e_j N)} f_k^\lambda(\xi_{k e_j N} P_0) &= \sum_{k=1}^{d(e_j N)} f_k^\lambda(\epsilon_j \epsilon_j^{-1} \xi_{k e_j N} P_0) \\ &= T_{\epsilon_j} T_{e_j N} f_k^\lambda(P_0) \\ &= T_{\epsilon_j} T_N f_k^\lambda(P_0) \\ &= \omega_{k\epsilon_j} \omega_{kN} f_k^\lambda(P_0).\end{aligned}$$

Der erste Teil des Theorems ergibt sich damit aus Theorem 3.2.4.

Für $\lambda = 1 - s^2 \neq 0$ ist $-1 < \mathrm{Re}(s) < 1$, und wir erhalten mit [21], S. 91 für $\mathrm{Re}(w) \geq 1$

$$\frac{1}{|N|^{w+1}} = \frac{(4\pi|\tau_D|)^w 2^{(2-w)}}{\Gamma(\frac{1}{2}w + \frac{1}{2}s)\Gamma(\frac{1}{2}w - \frac{1}{2}s)} \int_0^\infty t^{w-1} \frac{1}{|N|} K_s(4\pi|\tau_D N|t)dt.$$

Wegen

$$\mathcal{I}_{f_k^\lambda}^{P_0}(jt) = 2t f_k^\lambda(P_0) \sum_{N \in \mathfrak{T}} \frac{\omega_{kN}}{|N\tau_D|} K_s(4\pi|N\tau_D|t) \left( \sum_{j=1}^{|\mathfrak{o}_K^*|} \omega_{k\epsilon_j} \right)$$

folgt mit Satz 4.4.15 *d*) die für $\mathrm{Re}(w) > 3$ angegebene Identität.
Weil $\mathcal{I}_{f_k^\lambda}^{P_0}$ als Spitzenform exponentiell in jeder Spitze von $\Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1})$ verschwindet, ergibt sich aus $[\mathrm{PSL}(2;\mathfrak{o}_K) : \Gamma_0(\mathcal{N}) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1})] < \infty$ die absolute Konvergenz von $\int_0^\infty \mathcal{I}_{f_k^\lambda}^{P_0}(jt) t^{w-2} dt$ für beliebige $w \in \mathbb{C}$.

□

# Literaturverzeichnis


[1] Andrianov, A.N.; Zhuravlev, V.G.: Modular forms and Hecke operators. Translation of mathematical monographs, Vol. 145. Providence: Am. Math. Soc., 1995.

[2] Blex, C.: Konstruktion von Maaß-Formen zu Hecke-Gruppen mit Hilfe von Maaß-Formen zu Quaternionengruppen. Teil II. Diplomarbeit. Münster 2001.

[3] Bolte, J.; Johansson, S.: Theta-lifts of Maaß waveforms. in: Hejhal, D.A.; Friedman, J.; Gutzwiller, M.C.; Odlyzko, A.M.: Emerging applications of number theory. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1999.

[4] Cassels, J.W.S.; Fröhlich, A.: Algebraic number theory. London, New York: Academic Press, 1967.

[5] Deuring, M.: Algebren. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1968.

[6] Dickhut, B.: Konstruktion von Maaß-Formen zu Hecke-Gruppen mit Hilfe von Maaß-Formen zu Quaternionengruppen. Teil I. Diplomarbeit. Münster 2001.

[7] Eichler, M.: Allgemeine Kongruenzklasseneinteilungen der Ideale einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörpern und ihre L-Reihen. J. Reine u. Angew. Math. 179 (1938), S. 227-251.

[8] Eichler, M.: Lectures on modular correspondences. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1956.

[9] Elstrodt, J.; Grunewald, F.; Mennicke, J.; Groups acting on hyperbolic space. Harmonic analysis and number theory. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1997.

[10] Freitag, E.: Siegelsche Modulfunktionen. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1983.

[11] Fröhlich, A.; Taylor, M.J.: Algebraic number theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[12] Hasse, H.: Number theory. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1980.

[13] Hejhal, D.A.: The Selberg trace formula for $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Volume 2. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1983. = Lecture Notes in Math., Vol. 1001.

[14] Hejhal, D.A.: A classical approach to a well-known spectral correspondence on quaternion groups. in: Chudnovsky, D.; Chudnovsky, G.; Cohn, H.; Nathanson, M.: Number Theory. New York 1983-84. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1985. = Lecture Notes in Math., Vol. 1135.

[15] Hetrodt, G.: Über einen Zusammenhang zwischen der Spektraltheorie automorpher Funktionen auf dem oberen Halbraum und den Klassenzahlen biquadratischer Zahlkörper. Dissertation. Münster, 1993.

[16] Ireland, K.; Rosen, M.: A classical introduction to modern number theory. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1982.

[17] Kneser, M.: Starke Approximation in algebraischen Gruppen. Teil I. J. Reine u. Angew. Math. 218 (1965), S. 190-203.

[18] Krieg, A.: Hecke algebras. Memoirs Am. Math. Soc. 435 (1990).

[19] Lang, S.: Algebraic number theory. Reading: Addison-Wesley, 1970.

[20] Maclachlan, C.; Reid, A.W.: The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2003.

[21] Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Soni, R.P.: Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics. Third edition. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1966.

[22] Miyake, T.: Modular forms. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1989.

[23] O'Meara, O.T.: Introduction to quadratic forms. 3rd printing. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1973.

[24] Prachar, K.: Primzahlverteilung. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1978.

[25] Reiner, I.: Maximal orders. London, New York, San Francisco: Academic Press, 1975.

[26] Richter, O.K.: Theta functions of quadratic forms. PhD thesis. San Diego, CA, 1999.

[27] Richter, O.K.: Theta functions of quadratic forms over imaginary quadratic fields. Acta Arith. 92 (2000), S. 1-9.

[28] Scharlau, W.: Quadratic and hermitian forms. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1985.

[29] Shimura, G.: On the zeta-function of the algebraic curves uniformized by certain automorphic functions. J. Math. Soc. Japan 13 (1961), S. 275-331.

[30] Shimura, G.: Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Princeton: Princeton University Press, 1971.

[31] Siegel, C.L.: Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie I. Math. Ann. 124 (1951), S. 17-54.

[32] Siegel, C.L.: Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie II. Math. Ann. 124 (1952), S. 364-387.

[33] Siegel, C.L.: Lectures on quadratic forms. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1957.

[34] Swan, R.G.: Strong approximation and locally free modules. in: McDonald B.R.: Ring theory and algebra III. Proceedings of the third Oklahoma conference. Basel, New York: Dekker 1980. = Lecture Notes in pure and applied mathematics, Vol. 55.

[35] Vignéras, M.F.: Arithmétique des Algèbres de Quaternions. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1980. = Lecture Notes in Math., Vol. 800.

[36] Weil, A.: Basic number theory. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1967.

# Lebenslauf

| | |
|---|---|
| **Name:** | Christian Blex |
| **geboren:** | 11. November 1975 in Lippstadt |
| **Familienstand:** | ledig |
| **Eltern:** | Angela Blex, geb. Bahr<br>Siegfried Blex |
| **Geschwister:** | Dagmar Blex<br>Klaus Blex |
| **Schulbildung:** | 1982-1986: Besuch der Wilhelm-Hüffer-Grundschule in Liesborn<br>1986-1995: Besuch des Priv. Gymnasiums Johanneum in Wadersloh |
| **Hochschulreife:** | 20. Juni 1995 |
| **Ersatzdienst:** | 1995-1996 in der Westfälischen Klinik für Psychiatrie Benninghausen |
| **Studium:** | ab WS 1996 Mathematik und Physik, Lehramt Sek. II/I an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster<br>ab SS 1999 Diplom-Studiengang Mathematik mit Nebenfach Physik an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster |
| **Prüfungen:** | 05. Dezember 2001: Diplom in Mathematik mit Nebenfach Physik<br>20. Mai 2003: erstes Staatsexamen in Mathematik und Physik (Sek. II/I) |

| | |
|---|---|
| **Tätigkeiten:** | studentische Hilfskraft am Mathematischen Institut der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster von Juli 1999 bis Dezember 1999 und von Juli 2000 bis Dezember 2001<br>wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster von Februar 2002 bis Dezember 2002<br>ab Januar 2002 Stipendiat des Graduiertenkollegs Analytische Topologie und Metageometrie am Mathematischen Institut der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster |
| **Beginn der Dissertation:** | Januar 2002 am Mathematischen Institut der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster bei Prof. Dr. J. Elstrodt |