

Thomas Kleiner

Entwicklung eines dreidimensionalen numerischen  
*full-Stokes*-Fließmodells und seine Anwendung auf  
ein Inlandeis-Schelfeisystem der Antarktis im  
Bereich des westlichen Dronning Maud Lands

2010



Geophysik

Entwicklung eines dreidimensionalen numerischen  
*full-Stokes*-Fließmodells und seine Anwendung auf  
ein Inlandeis-Schelfeisystem der Antarktis im  
Bereich des westlichen Dronning Maud Lands

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von

**Thomas Kleiner**

aus Eberswalde

- 2010 -

---

Dekan: Prof. Dr. J. P. Wessels  
Erster Gutachter: Prof. Dr. M. A. Lange  
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. U. Hansen

Tag der mündlichen Prüfung: 27.08.2010  
Tag der Promotion: 27.08.2010

# Veröffentlichungen

M. A. Lange, N. Blindow, B. Breuer, K. Grosfeld, T. Kleiner, C. O. Mohrholz, M. Nicolaus, C. Oelke, H. Sandhäger und M. Thoma. Numerical model studies of Antarctic ice-sheet-ice-shelf-ocean systems and ice caps. *Annals of Glaciology*, 41:111 – 120, 2005.

F. Pattyn, L. Perichon, A. Aschwanden, B. Breuer, B. de Smedt, O. Gagliardini, G. H. Gudmundsson, R. C. A. Hindmarsh, A. Hubbard, J. V. Johnson, T. Kleiner, Y. Konovalov, C. Martin, A. J. Payne, D. Pollard, S. Price, M. Rückamp, F. Saito, O. Souček, S. Sugiyama und T. Zwinger. Benchmark experiments for higher-order and full-stokes ice sheet models (ISMIP-HOM). *The Cryosphere*, 2(2):95–108, 2008.

T. Kleiner, A. Humbert, und R. Greve. Rift treatment in ice-shelf modelling: A comparative modelling study of the Brunt Ice Shelf. *FRISP Report*, 18, 2008, in press.

A. Humbert, T. Kleiner, C.-O. Mohrholz, C. Oelke, R. Greve und M. A. Lange. A comparative modelling study of the Brunt Ice Shelf - Stancomb-Wills Ice Tongue System. *Journal of Glaciology*, 55(189):53 – 65, 2009.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Das Untersuchungsgebiet . . . . .	2
1.2 Stand der Forschung . . . . .	2
1.3 Aufbau der Arbeit . . . . .	4
<b>2 Kontinuumsmechanische Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1 Erhaltungsgleichungen . . . . .	5
2.1.1 Kontinuitätsgleichung . . . . .	5
2.1.2 Bewegungsgleichung . . . . .	6
2.1.3 Wärmetransportgleichung . . . . .	7
2.2 Rheologie des Eises - Glen'sches Fließgesetz . . . . .	7
2.3 Randbedingungen . . . . .	11
2.3.1 Eisoberfläche . . . . .	11
2.3.2 Eisbasis . . . . .	12
2.3.3 Schelfeisfront . . . . .	16
2.3.4 Einstromgebiete . . . . .	17
<b>3 Zweidimensionale Simulation des Brunt-Schelfeises und Stancomb-Wills-Eisstroms</b>	<b>19</b>
3.1 Das numerische Schelfeismodell . . . . .	19
3.2 Modellerweiterung . . . . .	20
3.3 Datensätze . . . . .	22
3.4 Referenzsimulation . . . . .	23
3.5 Einfluss der Risse auf das Fließfeld . . . . .	25
3.5.1 Riss 1 . . . . .	25
3.5.2 Riss 2 . . . . .	28
3.5.3 Riss 1 und Riss 2 . . . . .	28
3.6 Diskussion und Motivation eines Stokes-Modells . . . . .	29
<b>4 Das numerische Fließmodell TIM-FD<sup>3</sup></b>	<b>31</b>
4.1 Feldgleichungen des Eismodells . . . . .	31
4.1.1 Horizontale Geschwindigkeit . . . . .	31
4.1.2 Vertikale Geschwindigkeit . . . . .	36
4.1.3 Temperatur . . . . .	36
4.1.4 Eismächtigkeit . . . . .	37
4.2 Koordinatentransformation . . . . .	38
4.2.1 $\sigma$ -Koordinaten . . . . .	39

4.2.2	Rechenregeln . . . . .	40
4.3	Diskretisierung mit Finiten Differenzen . . . . .	42
4.3.1	Horizontalgeschwindigkeit . . . . .	43
4.3.2	Schelfeiskante . . . . .	47
4.3.3	Vertikalgeschwindigkeit und resistive Longitudinalspannung . . . . .	48
4.3.4	Vertikale Longitudinalspannung . . . . .	49
4.3.5	Wärmetransportgleichung . . . . .	49
4.3.6	Eismächtigkeitsentwicklung . . . . .	52
4.4	Überblick über die Implementierung . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Validierung des numerischen Fließmodells</b>	<b>55</b>
5.1	ISMIP-HOM . . . . .	55
5.1.1	Eisschild mit unduliertem Felsbett (Experiment A) . . . . .	56
5.1.2	Eisstrom mit variablem Gleitparameter (Experiment C) . . . . .	61
5.1.3	Alpengletscher (Experiment E) . . . . .	63
5.1.4	Prognostische Simulation (Experiment F) . . . . .	65
5.2	Tafeleisberg . . . . .	68
5.3	Diskussion . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Eiskörpergeometrie und Randbedingungen im Untersuchungsgebiet</b>	<b>71</b>
6.1	Koordinatensysteme und Projektionen . . . . .	71
6.2	Geometrie des Eiskörpers . . . . .	71
6.2.1	Aufsetzlinie, Eisfront und eisfreie Gebiete . . . . .	71
6.2.2	Topographie . . . . .	74
6.2.3	Eismächtigkeit . . . . .	76
6.2.4	Interpolation des Geometriemodells . . . . .	81
6.3	Randbedingungen . . . . .	86
6.3.1	Oberflächentemperatur . . . . .	86
6.3.2	Oberflächenmassenbilanz . . . . .	86
6.3.3	Geothermaler Wärmestrom . . . . .	88
6.3.4	Basale Schmelzraten . . . . .	89
6.4	Fließgeschwindigkeiten . . . . .	90
6.5	Diskussion . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Numerische Modellierung der Eisdynamik im Untersuchungsgebiet</b>	<b>93</b>
7.1	Referenzexperiment . . . . .	93
7.1.1	Oberflächengeschwindigkeitsfeld . . . . .	94
7.1.2	Massenfluss über die Aufsetzlinie . . . . .	96
7.2	Der Einfluss des Gleitgesetzes auf das Fließverhalten . . . . .	98
7.2.1	Gleitgesetz 1 . . . . .	99
7.2.2	Gleitgesetz 2 . . . . .	106
7.2.3	Gleitgesetz 3 . . . . .	106
7.2.4	Gleitgesetz 4 . . . . .	106
7.3	Diskussion . . . . .	107
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>109</b>



<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>119</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>121</b>
<b>Danksagung</b>	<b>123</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>125</b>



# Kurzfassung

Die Antarktis ist von großer Bedeutung für das globale Klimasystem, da sie durch komplexe Wechselwirkungen mit den angrenzenden Komponenten des Systems Erde, dem Ozean, der Atmosphäre und der Lithosphäre, verknüpft ist. Eine Vorhersage des zukünftigen globalen Klimas hängt daher von dem Grad der Kenntnis der Dynamik der Eismassen in der Antarktis und deren Veränderungen ab. Der Beitrag des antarktischen Kontinents zum globalen Meeresspiegelanstieg bestimmt sich aus dem Ungleichgewicht zwischen dem Schneefall über dem Inlandeis und dem Massenfluss über die Grenzlinie zwischen gegründetem Inlandeis und schwimmendem Schelfeis. Belastbare Aussagen über den zukünftigen Meeresspiegel erfordern hochqualitative numerische Modelle der Dynamik der Eismassen.

Das den Stancomb-Wills-Eisstrom umgebende Gebiet stellt ein geeignetes Untersuchungsgebiet dar. Es enthält mehrere mit dem Inlandeis verbundene Schelfeise einschließlich des Stancomb-Wills-Eisstroms als dem Hauptabfluss des Amundsenisen, der eine frei schwimmende Eiszunge ausbildet.

Zunächst wird die Schelfeiskomponente des an der Universität Münster von Sandhäger (2000) entwickelten dreidimensionalen Fließmodells auf das Brunt-Schelfeis, den Stancomb-Wills-Eisstrom und ein Teilgebiet des Riiser-Larsen-Schelfeises angewendet. Dabei liegt der Schwerpunkt des Interesses auf der numerischen Simulation von Bruchstrukturen, die in dieser Region von besonderer Bedeutung für das Fließverhalten des Eises sind. Es wird ein numerisches Verfahren implementiert, mit dem benachbarte Eismassen entlang eines Risses entkoppelt werden können. In einer vergleichenden Modellstudie kann nachgewiesen werden, dass die Entkopplung den gleichen Effekt auf das Fließverhalten hat, wie die Erweichung des Eises im Bereich der Bruchstrukturen. Die Studie zeigt auch, dass die Modellierung eine bessere Kenntnis der Randbedingungen an der Aufsetzlinie erfordert, insbesondere der Temperatur, und motiviert somit die Ausweitung der numerischen Modellierung auf das angrenzende Inlandeis.

Für eine weitergehende Betrachtung der Wechselwirkungen zwischen Inlandeis und Schelfeis wird daher das numerische Fließmodell TIM-FD<sup>3</sup> entwickelt. Es basiert auf den Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie. Das Modell wurde als *multi layer model* konzipiert, welches gegenüber der Flacheisnäherung (*shallow ice approximation*) Spannungsterme höherer Ordnung in der Impulsbilanzgleichung berücksichtigt. Im Verlauf der Arbeit wurde es zu einem *full-Stokes* Modell erweitert, das heißt es löst die Impulsbilanzgleichung für alle Spannungsterme und wird den Eismodellen der neuesten Generation zugerechnet.

Die Rheologie des Eises wird durch das Glen'sche Fließgesetz modelliert und ist folglich spannungs- und temperaturabhängig. Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt mit der Methode der Finiten Differenzen auf einem nichtorthogonalen, der Geometrie des Eises folgenden  $\sigma$ -Koordinatengitter. Die Validierung des Modells erfolgte im Rahmen der internationalen Vergleichsstudie für Modelle höherer Ordnung (ISMIP-HOM). Die Funktionalität des neu entwickelten Fließmodells konnte gezeigt werden.

Die Anwendung auf das Modellierungsgebiet Brunt-Schelfeis, den Stancomb-Wills-Eisstrom, das gesamte Gebiet des Riiser-Larsen-Schelfeises und des dazugehörigen Inlandeisgebietes

Amundsenisen erfordert die Assimilation verschiedener Datensätze: aus Altimeterdaten des ICESat/GLAS-Satelliten wird in Verbindung mit flugzeuggestützten Radarmessungen und weiterer sekundärer Datenquellen ein digitales Geometriemodell (DGM) der Eisober- und Eisunterseite erstellt. Das daraus resultierende Modellgitter besteht bei einer horizontalen Auflösung von 2.5km aus  $281 \times 213 \times 21$  Gitterknoten. Des Weiteren werden als Eingangsgrößen des Modells basale Schmelzraten im Schelfeis, der basale Wärmestrom im Bereich des Inlandeises sowie die Oberflächentemperatur und -akkumulation verwendet.

Erste Simulationen mit dem neuen Fließmodell TIM-FD<sup>3</sup> unter Verwendung der zuvor genannten Datensätze betrachten den Deformationsanteil des Geschwindigkeitsfeldes, indem das basale Gleiten des Inlandeises unterdrückt wird. Sie zeigen eine qualitativ gute Übereinstimmung mit gemessenen Oberflächengeschwindigkeiten im Inlandeis. Dagegen zeigen sich insbesondere im Bereich der Aufsetzlinie Differenzen zwischen den gemessenen und simulierten Daten. Das deutet darauf hin, dass basales Gleiten außer im Bereich der Aufsetzlinie eine untergeordnete Rolle im Inlandeis spielt. Das Themengebiet des basalen Gleitens ist derzeit Gegenstand vielfältiger, internationaler Studien und gilt als Kernproblem numerischer Modellierung von Inlandeis. Aus diesem Grund wurden in dieser Arbeit vier vorgeschlagene Gleitgesetze ausgewählt und ihr Einfluss auf die Dynamik analysiert. Dabei zeigt sich, dass alle Gleitgesetze, abgesehen von dem für das Gleiten über einen deformierbaren Untergrund, die Geschwindigkeit an der Aufsetzlinie erhöhen.

Obwohl die verwendeten Gleitgesetze ganz unterschiedliche Effekte parametrisieren, zeigt sich, dass hier keines der vier verwendeten Gleitgesetze in ihrer vorgeschlagenen Form zu einer realistischeren Beschreibung der Oberflächengeschwindigkeiten führt. Dies bedeutet, dass der Vorteil der Verwendung eines *full-Stokes*-Modells letztendlich durch die mangelnde Kenntnis des basalen Gleitgesetzes kompensiert wird. Ein weiterer limitierender Faktor ist die unzureichende Kenntnis der Bodentopographie des Inlandeises im Einstromgebiet des Stancomb-Wills-Eisstroms. Die numerische Modellierung zeigt deutlich die Notwendigkeit weiterer Messungen der Eismächtigkeit auf.

Zusammenfassend ist daher zu sagen, dass der immense Schritt von Näherungslösungen hin zu *full-Stokes*-Modellen zwar technisch bewerkstelligt werden konnte, der Erkenntnisgewinn durch diese Modelltypen jedoch derzeit durch mangelnde Kenntnis des basalen Gleitens, und damit verbunden der basalen Topographie, limitiert ist.

# Abstract

Antarctica is of major importance for the global climate system, as there are complex interactions with the components of the earth system, namely the ocean, atmosphere and lithosphere. A projection of future climate depends on the level of understanding of the dynamics of ice masses in Antarctica and their changes. The contribution of Antarctica to sea level rise is defined by the imbalance between snow fall on the inland ice and the mass flux across the transition line between grounded inland ice and floating ice shelves. Reliable projections of future sea level require high quality numerical modelling of the dynamics of ice.

The area surrounding the Stancomb-Wills ice stream provides a suitable region for study, containing several ice shelves connected to the inland ice including the major drainage of the Amundsenisen through the Stancomb-Wills ice stream into a floating ice tongue.

Initially, the ice shelf component of a three-dimensional numerical model developed at the University of Muenster, Germany, Sandhäger (2000) was applied to the Brunt Ice Shelf, Stancomb-Wills ice stream and parts of the Riiser-Larsen Ice Shelf. The focus of interest was the numerical simulation of fractures, which are of importance for the ice flow. A numerical scheme to decouple neighbouring ice masses was implemented in that code. A model intercomparison study showed that decoupling and softening of the ice in the rifts leads to a similar effect. This study also revealed a requirement for more precise knowledge of the boundary conditions along the grounding line, in particular the temperature, and this motivates enlarging the area of the numerical modelling to include the inland ice.

For further modelling of the interaction between inland ice and ice shelf a new numerical model TIM-FD<sup>3</sup> was developed. It is based on the balance equations for mass, momentum and energy. This model was initially designed as a multi-layer model including higher order stresses in the momentum balance equations, compared to the shallow ice approximation, and has been extended during this work into a full Stokes model. That is, it solves the momentum balance equations for all stresses, and can be regarded as belonging to the newest generation of models.

The rheology of the ice is modelled by Glen's flow relation and depends on stress and temperature. The solution of the equation system is achieved by applying the method of finite differences on a non-orthogonal mesh in terrain-following  $\sigma$ -coordinates. The validation of the model was done in the context of an international benchmark test for higher order models (ISMIP-HOM). The functionality of the newly developed model was successfully demonstrated.

The application to the Brunt Ice Shelf, the Stancomb-Wills Ice Stream, the entire Riiser-Larsen Ice Shelf and the adjacent inland ice, Amundsenisen, requires the assimilation of several input datasets: altimeter data in combination with airborne radio echo soundings leads to a digital geometry model (DGM) of the upper and lower ice surfaces. Out of this a model mesh of  $281 \times 213 \times 21$  grid points was produced. Furthermore, basal melt rates of the ice shelf, basal heat flux in the interior, as well as surface temperature and snow accumulation data were used as input quantities.

First simulations with the new flow model TIM-FD<sup>3</sup> using the described datasets concen-

trated on the deformational contribution to ice flow by prescribing zero basal sliding for the inland ice. These showed qualitatively reasonable agreement with measured surface velocities of the inland ice. However, along the grounding line the differences between simulated and measured velocities are considerable. This might suggest that sliding is relatively unimportant for the inland ice except near the grounding line. The topic of basal sliding laws is currently the subject of various international studies and is deemed to be a major problem for numerical modelling of inland ice flow. Therefore, four different proposed basal sliding laws were chosen for comparison and analysis of their effect on the dynamics.

Although the applied basal sliding laws parameterize entirely different effects, it can be seen that in this case none of the four applied basal sliding laws in their suggested form lead to a more realistic description of the surface velocity. This means that the advantage of applying a full-Stokes model is ultimately compensated by the lack of knowledge of the basal sliding laws. A further limiting factor is the knowledge of the basal topography in the drainage basin of the Stancomb-Wills ice stream. The numerical modelling clearly shows the requirement for further measurements of the ice thickness to overcome this uncertainty.

In conclusion therefore it can be said that the immense step from approximation solutions to full-Stokes models, despite having been technically accomplishable, has achieved only limited scientific insights as a result of the current lack of scientific knowledge of basal sliding and the related basal topography.

# Kapitel 1

## Einleitung

Der antarktische Eisschild stellt ein bedeutsames Element im System Erde dar. Sein Volumen und seine räumliche Ausdehnung haben Einfluss auf den mittleren Meeresspiegel und das globale Strahlungsgleichgewicht und beeinflussen somit das Klimasystem der Erde. Die Kenntnis von Dynamik und Massenbilanz der antarktischen Eismasse, insbesondere in den klimasensitiven Küstenbereichen, kommt hierbei eine Schlüsselrolle zu. Etwa 44% der antarktischen Küstenlinie werden von Schelfeisen gesäumt, wobei hier ein Großteil des Abflusses von Inlandeis durch Auslassgletscher und Eisströme gebündelt wird. Der Kenntnis der Fließgeschwindigkeiten des Eises im Küstenbereich, insbesondere in der Übergangszone Inlandeis-Schelfeis, der Eismächtigkeiten und der Position der Aufsetzlinie ermöglicht die Bestimmung des Massenflusses, der seinerseits eine fundamentale Größe bei der Bestimmung der Massenbilanz darstellt.

Schelfeise werden durch die von der kontinentalen Inlandvereisung abfließenden Gletscher und Eisströme aufgebaut. Neben ihrer Bedeutung für das globale Strahlungsgleichgewicht sind die Schelfeise auch über die Prozesse an der Eisunterseite unmittelbar mit der globalen Klimadynamik gekoppelt. So bilden sich an der Schelfeisunterseite Kaltwasserkörper, die als kaltes antarktisches Bodenwasser die Zirkulation der Ozeane bis in die nördliche Hemisphäre beeinflussen. Um den gegenwärtigen Zustand eines Schelfeisystems genau beschreiben und beurteilen, sowie wie die zeitlichen Veränderungen frühzeitig detektieren und analysieren zu können, ist eine detaillierte und quantitative Erfassung der Eisdynamik erforderlich.

Die Schelfeise entlang der Antarktischen Halbinsel zeigten in den vergangenen beiden Jahrzehnten das generelle Potenzial von Schelfeisen instabil zu werden. Von zwölf Schelfeisen entlang der Antarktischen Halbinsel haben sich vier zurückgezogen und vier sind vollständig disintegriert. Schelfeisaufbrüche haben gezeigt, dass dieser Prozess stufenförmig und sehr schnell ablaufen kann. Schelfeise üben auf die Gletscher des Inlandeises und der Eisströme eine Rückhaltekraft aus, die durch Disintegration oder stufenweisen Rückzug verringert wird und so zur Beschleunigung der Inlandeis Massen führt. Aus diesem Grund ist die Dynamik entlang der Aufsetzlinie von besonderem Interesse. Ebenso wichtig ist eine präzise Kenntnis der Spannungen innerhalb der Schelfeise, um Zonen potentieller Rissbildung vorhersagen zu können.

Um die Fragestellungen der Massenbilanz und der Stabilität untersuchen zu können, werden Simulationen des Fließfeldes der Eismassen benötigt. Die Geschwindigkeit und Richtung des Fließfeldes in schwimmenden und gegründeten Bereichen stellt damit eine wesentliche eisdynamische Basisgröße dar. Die theoretische Beschreibung des Fließens von Eis beruht auf der Annahme, dass polykristallines Eis eine viskose, inkompressible Flüssigkeit ist. Mit Hilfe kontinuumsmechanischer Methoden werden Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie aufgestellt und durch Stoffgesetze vervollständigt. Dies bildet die Basis der theoretischen Beschreibung des Kriechens von polarem Eis. In der Vergangenheit lösten numerische Modelle

aus Gründen der Rechenleistung zumeist die sogenannte Flacheisnäherung (*shallow ice approximation*, SIA), die sich das Verhältnis zwischen geringer vertikaler Ausdehnung zu großer horizontaler Ausdehnung von Eisschilden und Schelfeisen zu Nutzen macht. Obwohl diese Näherungslösungen in weiten Bereichen ihre Gültigkeit haben, sind sie insbesondere auf schnell fließende Eisströme durch die Vernachlässigung der longitudinalen deviatorischen Spannungen nicht anwendbar. Aus diesem Grund benötigen die oben beschriebenen Fragestellungen den Verzicht auf Näherungslösungen. Dies bildete den Ausgangspunkt dieser Arbeit.

## 1.1 Das Untersuchungsgebiet

Das Untersuchungsgebiet (Abb. 1.1) befindet sich im westlichen Dronning Maud Land, Antarktis zwischen etwa  $0^\circ$  W und  $25^\circ$  W sowie  $71^\circ$  S und  $78^\circ$  S und grenzt im Westen an das Weddell-Meer. Es deckt eine Fläche von rund  $315000 \text{ km}^2$  ab. Es wurde so gewählt, dass die Schelfeisgebiete eine natürliche Abgrenzung durch Kalbungsfront im Westen und Inlandeis im Osten haben. In südlicher Richtung wurde das Gebiet so weit ausgedehnt, dass die Hauptdrainagegebiete abgedeckt sind. Charakteristisch für dieses Untersuchungsgebiet ist ein schnell fließender Eisstrom, der Stancomb-Wills-Eisstrom mit Geschwindigkeiten von bis zu  $750 \text{ m a}^{-1}$  an der Aufsetzlinie und rund  $1500 \text{ m a}^{-1}$  an der Kalbungsfront. Im westlichen Teil schließt sich das Brunt-Schelfeis an, das eine äußerst heterogene Struktur aufweist. Östlich des Stancomb-Wills-Eisstroms befindet sich Lyddan Island, eine ausgedehnte Insel, die den Übergang zum Riiser-Larsen-Schelfeis markiert. Das Riiser-Larsen-Schelfeis ist ein relativ homogenes Schelfeis mit mittleren Fließgeschwindigkeiten. Entlang der Schelfeiskanten befinden sich die größeren *ice rises*<sup>1</sup> Skjoldet, Kvitkuven und Lyddan Island sowie die deutlich kleineren Bakewell Island (BI) und McDonald Ice Rumpel<sup>2</sup>. Letzterer ist entgegen seines Namens ebenfalls ein *ice rise*. Weitere Details werden in späteren Kapiteln beschrieben.

## 1.2 Stand der Forschung

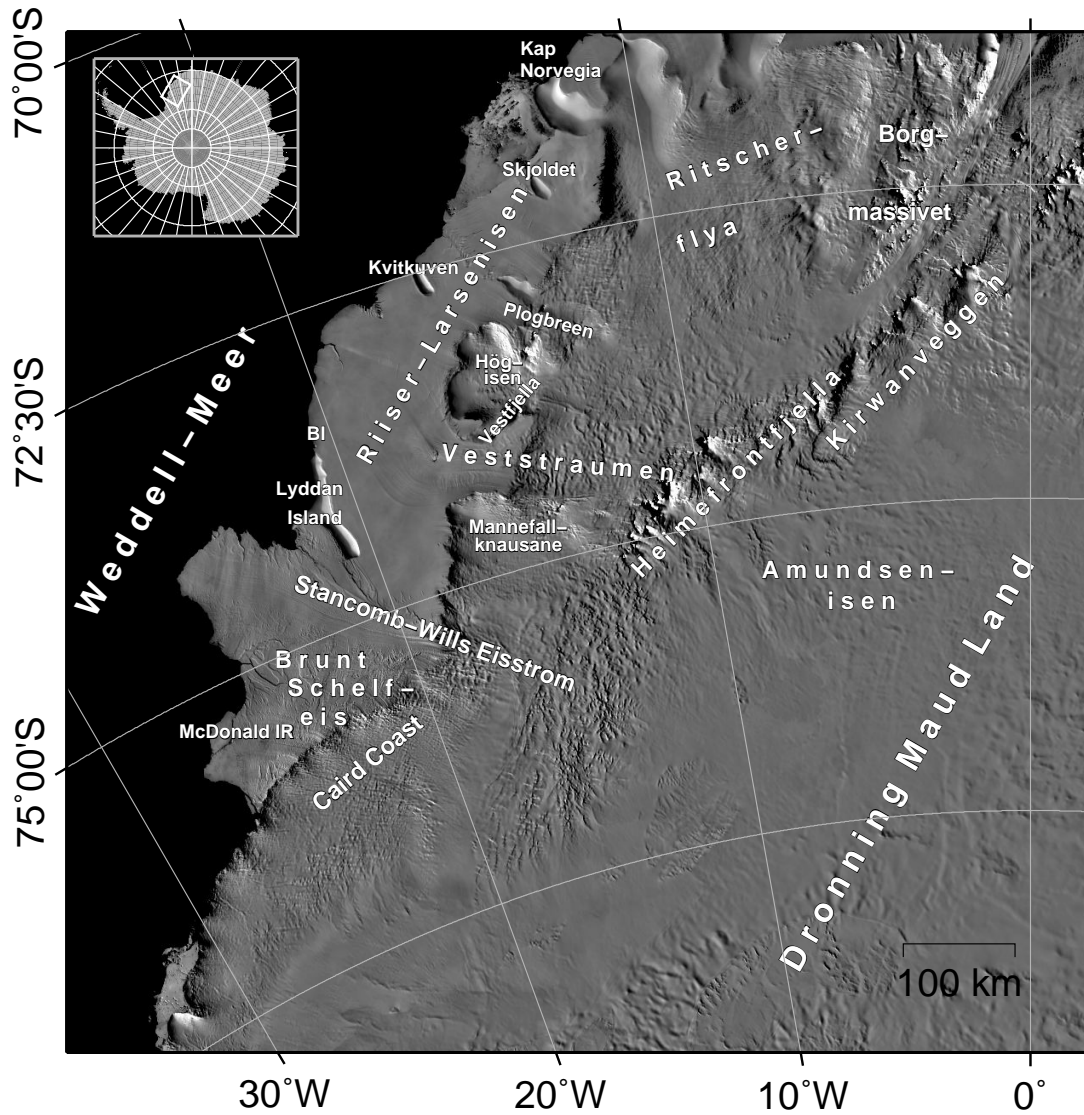
Das Gebiet des Brunt-Schelfeises und des Stancomb-Wills-Eisstroms war Inhalt verschiedener Aktivitäten numerischer Modellierung. Die erste Modellierung war eine Kombination einer fernerkundlichen Studie mit Modellierung des Fließfeldes und wurde von Hulbe et al. (2005) durchgeführt. Ziel dieser Studie war die Einführung von Gebieten mit unterschiedlicher Viskosität insbesondere in Gebieten dicken Meereises zwischen den Eisbergen, die sich im Brunt-Schelfeis befinden, und in der Scherzone zwischen Stancomb-Wills-Eisstrom und Riiser-Larsen-Schelfeis. Humbert und Pritchard (2006) führten eine ähnliche Studie durch, die sich zudem auch auf einen Verlust der heterogenen Zone aus Eisbergen und Meereis im Verbindungsstück zwischen Stancomb-Wills-Eisstrom und Brunt-Schelfeis bezog. Die Motivation hierzu war die Verringerung der Fließgeschwindigkeit des Brunt-Schelfeises in den vergangenen Jahren. Diese Studie konnte zeigen, dass eine niedrigere Viskosität dieses heterogenen Gebiets die Geschwindigkeit des Brunt-Schelfeises in der Tat verringern würde und ein kompletter Verlust (mit neuen Eisfronten) dieser Region ebenso zu einem Abbremsen des Brunt-Schelfeises führen würde.

---

<sup>1</sup>*ice rise* (dt.: Eiskuppel) – Die Fließbewegung des Eises ist weitestgehend von der Bewegung des Schelfeises entkoppelt

<sup>2</sup>*ice rumple* (dt.: Eishöcker) – Wird vom Schelfeis überströmt. Die Fließrichtung und -geschwindigkeit des Eises ist gegenüber dem ungestörten Schelfeis kaum verändert.





**Abbildung 1.1:** Karte des Untersuchungsgebietes, mit den im Text verwendeten Ortsbezeichnungen. Hintergrundbild: MODIS Mosaic of Antarctica (MOA) (Haran et al. 2005).

Fernerkundliche Datensätze für die Horizontalgeschwindigkeiten wurden für eine inverse Modellierung der Viskosität des Brunt-Schelfeises verwendet, die von Khazendar et al. (2009) angefertigt wurde. Diese Autoren schlussfolgern ebenso wie Humbert und Pritchard (2006), dass die heterogenen Zonen mit der Eismelange auf die Stabilität des Brunt-Schelfeises einen erheblichen Einfluss haben.

In der Literatur finden sich zahlreiche Studien, die dreidimensionale thermodynamisch gekoppelte Eismodelle für die Untersuchung klimatologischer und glaziologischer Fragestellungen nutzen (Huybrechts 1990; Ritz et al. 1997; Greve et al. 1998; Budd et al. 1998; Payne 1999). Ihnen ist gemeinsam, dass sie alle auf der Flacheisnäherung (SIA) basieren, welche davon ausgeht, dass longitudinale deviatorische Spannungen im Eis vernachlässigbar klein sind. Diese Modelle werden auch als Modelle nullter Ordnung bezeichnet (Colinge und Blatter 1998). Die SIA wird überwiegend in großskaligen Inlandeismodellen eingesetzt. Die Näherungen der SIA sind jedoch in Eisströmen, in der Nähe von Eisscheiden und im Übergangsbereich zwischen gegründetem Inlandeis und frei schwimmendem Schelfeis nicht mehr gültig (Blatter 1995). Werden horizontale deviatorische Normalspannungen und horizontale Scherspannungen in der Impulsbilanzgleichung berücksichtigt, dann spricht man von Modellen erster Ordnung (Colinge und Blatter 1998) oder unvollständiger zweiter Ordnung (Baral et al. 2001). Werden zusätzliche Terme berücksichtigt, gelangt man dann in den Bereich der Modelle höherer Ordnung (Sandhäger 2000; Pattyn 2003). Eine Klassifizierung der einzelnen Näherungen von nullter Ordnung bis zu den sogenannten *full-Stokes*-Modellen, welche die Impulsbilanz ohne Näherungen bezüglich der Spannungsterme löst, findet sich in Hindmarsh (2004). Die Anzahl der existierenden *full-Stokes*-Modelle ist noch klein (Zwinger et al. 2007; Pattyn 2008) und ihre Erprobung zum Zeitpunkt dieser Arbeit Gegenstand aktueller Forschung (Pattyn et al. 2008).

### 1.3 Aufbau der Arbeit

Zu Beginn der Arbeit werden die kontinuumsmechanischen Grundlagen zur mathematischen Beschreibung des Eises betrachtet. Ausgehend von den Erhaltungsgleichungen von Masse, Impuls und Energie wird ein System gekoppelter Differential- und Integralgleichungen formuliert (Kap. 2). In einer ersten Studie mit vereinfachten Gleichungen wird das von Sandhäger (2000) entwickelte Fließmodell für die numerische Simulation des Fließverhaltens um die Berücksichtigung von Bruchstrukturen erweitert und auf die Region Brunt-Schelfeis und Stancomb-Wills-Eisstrom angewandt (Kap. 3). In Kapitel 4 wird das in dieser Arbeit neu entwickelte dreidimensionale Fließmodell TIM-FD<sup>3</sup> vorgestellt und anschließend (Kap. 5) in einem Modellvergleich für sogenannte Modelle höherer Ordnung und anhand einer vereinfachten Eisberggeometrie, für die eine analytische Lösung bekannt ist, an Fragestellungen gegründeter und frei schwimmender Eiskörper validiert. Für die Untersuchung des Fließverhaltens des Eises im Untersuchungsgebiet ist es im Weiteren erforderlich, konsistente Datensätze für die Geometrie des Eises und der für die numerische Modellierung benötigten Randbedingungen zusammenzustellen. Diese werden in Kapitel 6 vorgestellt. Kapitel 7 beschreibt die Anwendung des neuen Fließmodells auf das Untersuchungsgebiet.

# Kapitel 2

## Kontinuumsmechanische Grundlagen

### 2.1 Erhaltungsgleichungen

Eis kann als inkompressibles, nichtlinear-viskoses, wärmeleitendes Fluid beschrieben werden (Paterson 1994). Zu seiner Beschreibung eignen sich die fluidmechanischen Bilanzgleichungen für Masse (Kap. 2.1.1 Kontinuitätsgleichung), Impuls (Kap. 2.1.2 Bewegungsgleichung) und Energie (Kap. 2.1.3 Wärmetransportgleichung).

#### 2.1.1 Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung als Ausdruck der Massenerhaltung besagt, dass die zeitliche Änderung der Masse in einem raumfesten Volumen  $V$  nur durch den Massenfluss durch die Oberfläche  $\partial V$  des Volumens ausgeglichen wird. Sie lautet in integraler Form

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = 0. \quad (2.1)$$

Mit dem Flächennormalenvektor  $\mathbf{n}$ , der Dichte  $\rho$  und der Geschwindigkeit  $\mathbf{u} = (u, v, w)^\top$ , deren Komponenten bezüglich der kartesischen Basisvektoren  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$  betrachtet werden, ist  $\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$  die Massenstromdichte durch das Flächenelement  $dA$ . Durch Anwendung des Integralsatzes von Gauß

$$\oint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV, \quad (2.2)$$

welcher für ein beliebiges Vektorfeld  $\mathbf{j}$  gilt, kann das Oberflächenintegral in Gleichung 2.1 als Volumenintegral geschrieben werden, wodurch sich

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) dV = 0 \quad (2.3)$$

ergibt. Für alle Volumen, die vollständig im Inneren des Eises liegen, ist die Gleichung erfüllt, wenn der Integrand verschwindet. Dies führt zur differentiellen Form der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.4)$$

und wird als Euler'sche Formulierung bezeichnet. Für inkompressible Fluide ( $\rho = \textit{konstant}$ ) vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung zu

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2.5)$$

In diesem Fall ist das Geschwindigkeitsfeld divergenzfrei.

### 2.1.2 Bewegungsgleichung

Nach dem zweiten Newton'schen Gesetz entspricht die zeitliche Änderung des Impulses der Summe aller Kräfte  $\mathbf{F}$ , die auf das Volumen  $V$  wirken. Für die Impulsdichte  $\rho\mathbf{u}$  gilt daher (Hutter 2003)

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho\mathbf{u} dV = \int_V \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} \rho\mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = \mathbf{F}. \quad (2.6)$$

Mit dem Flächennormalenvektor  $\mathbf{n}$  beschreibt der Term  $\rho\mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$  die advective Impulsstromdichte durch die Oberfläche  $\partial V$  des Volumens. Die wirkenden Kräfte können entweder externe Volumenkräfte (z.B. Gravitation und Corioliskraft) oder Oberflächenkräfte (Druck, Normal- oder Scherspannung) sein. Aufgrund der geringen Fließgeschwindigkeit des Eises von maximal einigen Kilometern pro Jahr kann die Corioliskraft im Vergleich zur Gravitation vernachlässigt werden (Greve und Blatter 2009). Im Weiteren wird daher als einzige Volumenkraft die Gravitation mit der Schwerebeschleunigung  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$  berücksichtigt. Die relevanten Oberflächenkräfte werden durch den Spannungstensor  $\mathbf{S}$  beschrieben. Er ist ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe und beschreibt die Impulsdiffusion. Bezüglich der kartesischen Basisvektoren lauten seine Komponenten  $\sigma_{ij}$  mit  $i, j \in \{x, y, z\}$ . Damit folgt als Impulserhaltungsgleichung in integraler Form (vgl. Ferziger und Perić 2002; Hutter 2003)

$$\int_V \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} \rho\mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \rho\mathbf{g} dV. \quad (2.7)$$

Durch Anwendung des Integralsatzes von Gauß (Gl. 2.2) können die Flächenintegrale in Gl. 2.7 in Volumenintegrale umgewandelt werden, so dass gilt:

$$\int_V \left( \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right) dV = \int_V (\operatorname{div} \mathbf{S} + \rho\mathbf{g}) dV. \quad (2.8)$$

Das Verhältnis von Trägheitskräften zu viskosen Kräften in einer Strömung wird durch die dimensionslose Reynolds-Zahl  $Re$  ausgedrückt. Nach Lliboutry (1987) ist für Gletschersysteme wegen der kleinen Fließgeschwindigkeiten und der hohen Viskosität des Eises typischerweise  $Re \leq 10^{-10}$  und der advective Impulstransport kann gegenüber dem dissipativen Impulstransport vernachlässigt werden. Gleichung 2.7 vereinfacht sich daher zu

$$\int_V (\operatorname{div} \mathbf{S} + \rho\mathbf{g}) dV = 0. \quad (2.9)$$

Da dieser Ausdruck wieder für jedes Volumen im Inneren des Eiskörpers gilt, muss der Integrand verschwinden, wodurch sich die Stokes-Gleichung in differentieller Form ergibt:

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \rho\mathbf{g} = 0. \quad (2.10)$$

In der Strömungsmechanik ist es üblich, den Spannungstensor  $\mathbf{S}$  in einen geschwindigkeitsabhängigen Anteil  $\mathbf{T}$  und einen Druckanteil  $p\mathbf{I}$  zu zerlegen:

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} - p\mathbf{I}, \quad (2.11)$$

wobei  $p$  der Druck und  $\mathbf{I}$  der Einheitstensor ist. Wird der Tensor  $\mathbf{T}$  so gewählt, dass seine Spur verschwindet ( $\text{tr } \mathbf{T} = 0$ ), spricht man auch vom deviatorischen Spannungstensor oder Spannungsdeviator. Für die Impulsbilanz (Gl. 2.10) folgt damit

$$\text{div}(\mathbf{T} - p\mathbf{I}) + \rho\mathbf{g} = 0, \quad (2.12)$$

wobei  $p = -1/3 \text{ tr } \mathbf{S}$  nicht der hydrostatische, sondern der dynamische Druck ist.

### 2.1.3 Wärmetransportgleichung

Die Gesamtenergie des Eises setzt sich aus der kinetischen Energie und der inneren Energie (beide pro Volumeneinheit) zusammen. Ausgehend vom ersten Hauptsatz der Thermodynamik ist die zeitliche Änderung der kinetischen plus inneren Energie gleich der Summe der am System erbrachten Leistung plus der durch die Oberfläche  $\partial V$  zugeführten Wärme und lautet

$$\frac{d}{dt} \int_V E dV = - \oint_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA - \oint_{\partial V} E\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \psi dV, \quad (2.13)$$

wobei  $E$  die Energie,  $\mathbf{q}$  der diffusive Fluss,  $E\mathbf{u}$  der advective Fluss und  $\psi$  innere Wärmequellen oder -senken sind. Durch Anwendung des Integralsatzes von Gauß (Gl. 2.2) können die Oberflächenintegrale in Gleichung 2.13 in Volumenintegrale umgerechnet werden. Im Inneren des betrachteten Volumens gilt dann

$$\frac{dE}{dt} + \text{div}(\mathbf{q} + E\mathbf{u}) - \psi = 0. \quad (2.14)$$

Die Energie ist das Produkt von Dichte und spezifischer interner Energie  $e$  des Eises, welche sich wiederum aus der spezifischen Wärmekapazität des Eises bei konstantem Druck  $c_p$  und der absoluten Temperatur  $T$  zusammensetzt, da bei inkompressiblen Fluiden kein Austausch zwischen innerer Energie und Druck stattfindet (Paterson 1994):

$$\frac{dE}{dt} = \rho c_p \frac{dT}{dt}. \quad (2.15)$$

Ist  $\mathbf{q} = -\kappa \text{ grad } T$  der Wärmestrom nach dem Fourier'schen Gesetz, dann lautet die Wärmetransportgleichung als Ausdruck der Energieerhaltung (Hutter 2003)

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \text{ grad } T \right) = \text{div}(\kappa \text{ grad } T) + \psi, \quad (2.16)$$

wobei  $\kappa$  die thermische Leitfähigkeit ist. Als interne Wärmequelle wird die Arbeit berücksichtigt, die durch interne Deformation erbracht wird. Die Zufuhr von Energie durch Strahlung wird vernachlässigt, da diese nur für die oberen Zentimeter des Eises relevant ist (Paterson 1994). Sowohl die thermische Leitfähigkeit als auch die spezifische Wärmekapazität sind von der Temperatur abhängig (siehe Kap. 4.1.3).

## 2.2 Rheologie des Eises - Glen'sches Fließgesetz

Das Fließgesetz ist für die Beschreibung des Eises eine grundlegende Zustandsgleichung. Es verknüpft Deformationsraten und deviatorische Spannungen im Eis. Im Fall eines Newton'schen Fluids ist

$$\mathbf{T} = 2\mu\dot{\mathbf{E}}, \quad (2.17)$$

wobei die skalare Viskosität  $\mu$  konstant ist. Der Zusammenhang in Gleichung 2.17 wird als tensorlinear bezeichnet. Der Deformationsratentensor  $\dot{\mathbf{E}}$  ist ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe mit den Komponenten

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.18)$$

bezüglich der kartesischen Basisvektoren.

Laborexperimente (z.B. Glen 1955) legen für Spannungen zwischen 50 und 200 kPa, wie sie typischerweise in natürlichen Eiskörpern auftreten, ein Potenzgesetz als Beziehung zwischen den Komponenten des deviatorischen Spannungstensors  $\tau_{ij}$  und denen des Deformationsratentensor  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  nahe. In der von Nye (1957) generalisierten Form lautet es

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = EA(T, p) \tau_e^{n-1} \tau_{ij} \quad (2.19)$$

mit der effektiven deviatorischen Spannung  $\tau_e$  und wird als Glen'sches Fließgesetz bezeichnet. Nach Weertman (1973) kann der Exponent  $n$  im Fließgesetz Werte zwischen 1.5 und 4.2 annehmen. Üblicherweise wird  $n = 3$  verwendet (Paterson 1994).  $E$  bezeichnet den sogenannten Verstärkungsfaktor und  $A$  den Fließparameter. Die Viskosität des Eises hängt im Unterschied zum Newton'schen Fluid ( $\mu = \text{konstant}$ ) von der Temperatur, dem Druck und der effektiven Spannung ab:

$$\mu(T, p, \tau_e) = \frac{1}{2EA(T, p)\tau_e^{n-1}}. \quad (2.20)$$

Mit dem Übergang zur effektiven Deformationsrate  $\dot{\varepsilon}_e$  (zweite Invariante des Deformationsratentensors) ist es möglich, die Spannungsabhängigkeit der Viskosität (Gl. 2.20) mit

$$\dot{\varepsilon}_e = EA(T, p) \tau_e^{n-1} \tau_e \iff \tau_e = [EA(T, p)]^{-1/n} \dot{\varepsilon}_e^{1/n} \quad (2.21)$$

zu ersetzen. Somit ist es möglich, das Glen'sche Fließgesetz in seiner inversen Form

$$\mathbf{T} = 2\mu\dot{\mathbf{E}} \quad \text{mit} \quad \mu(T, p, \dot{\varepsilon}_e) = \frac{1}{2} [EA(T, p)]^{-1/n} \dot{\varepsilon}_e^{(1-n)/n} \quad (2.22)$$

anzugeben, wobei die effektive Deformationsrate

$$\dot{\varepsilon}_e = \left( \dot{\varepsilon}_{xx}^2 + \dot{\varepsilon}_{yy}^2 + \dot{\varepsilon}_{xx}\dot{\varepsilon}_{yy} + \dot{\varepsilon}_{xy}^2 + \dot{\varepsilon}_{xz}^2 + \dot{\varepsilon}_{yz}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.23)$$

ist. Für  $n > 1$  wird Gleichung 2.22 bei verschwindender Deformationsrate singularär. Um dies zu verhindern, wird zur effektiven Deformationsrate  $\dot{\varepsilon}_e$  ein kleiner Wert  $\dot{\varepsilon}_0 = 10^{-30} \text{ a}^{-1}$  addiert, wodurch die Viskosität im diesem Fall einen endlichen Wert  $\mu_0 = \mu(T, p, \dot{\varepsilon}_e = 0) < \infty$  hat (vgl. Pattyn 2002). Die Parameter  $E$  und  $A$  werden im Folgenden diskutiert.

**Fließparameter:** Nach Paterson (1994) kann der Effekt der Temperatur und des Druckes auf den Fließparameter  $A$  im Glen'schen Fließgesetz für Temperaturen unterhalb von 263.15 K in Form einer Arrhenius-Gleichung

$$A(T, p) = \tilde{A}_0 e^{-(Q+pV)/RT} \quad (2.24)$$

beschrieben werden. Die darin enthaltenden Parameter sind die Aktivierungsenergie  $Q$ , der Druck  $p$ , das Aktivierungsvolumen  $V$  und die ideale Gaskonstante  $R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Der Parameter  $\tilde{A}_0$  fasst strukturelle Eigenschaften des Eises zusammen, die nicht von der

Temperatur und dem Druck abhängen. Der Einfluss des Drucks ist nach Paterson (1994) selbst für die hohen hydrostatischen Drücke an der Eisbasis sehr klein. Sein Einfluss auf das Fließgesetz kann ausreichend wiedergegeben werden, wenn die absolute Temperatur  $T$  in der Arrhenius-Gleichung durch die auf den lokalen Druckschmelzpunkt des Eises bezogene homologe Temperatur  $T_{\text{hom}}$  ersetzt wird. Die Druckschmelzpunkttemperatur des Eises

$$T_{\text{pmp}} = T_{\text{trp}} - \gamma(p - p_{\text{trp}}) \quad (2.25)$$

mit  $T_{\text{trp}} = 273.16 \text{ K}$  und  $p_{\text{trp}} = 611.73 \text{ Pa}$  (Temperatur und Druck am Tripelpunkt) kann für die in Eisschilden und Gletschern vorkommenden Drücke ( $p < \approx 50 \text{ MPa}$ ) durch die lineare Beziehung

$$T_{\text{pmp}} = T_0 - \gamma p \quad \text{mit} \quad T_0 = 273.15 \text{ K} \quad (2.26)$$

ausgedrückt werden (z.B. Greve und Blatter 2009). Die Werte für die Clausius-Clapeyron-Konstante  $\gamma$  in Gl. 2.25 und Gl. 2.26 variieren zwischen  $7.42 \times 10^{-8} \text{ K Pa}^{-1}$  für reines Eis (Paterson 1994) und  $9.8 \times 10^{-8} \text{ K Pa}^{-1}$  für luftgesättigtes Eis (Harrison 1972; Llibouty 1993; Hooke 2005; Greve und Blatter 2009). Wenn nicht anders bemerkt, wird in dieser Arbeit der letztere Wert gewählt. Mit der homologen Temperatur

$$T_{\text{hom}} = T - T_{\text{pmp}} + T_0 = T + \gamma p \quad (2.27)$$

wird die Arrhenius-Gleichung (Gl. 2.24) dann üblicherweise als

$$A(T_{\text{hom}}) = A_0 e^{-Q/RT_{\text{hom}}} \quad \text{mit} \quad A_0 = \tilde{A}_0 e^{-pV/RT} \quad (2.28)$$

geschrieben. Die Viskosität ist damit

$$\mu(T_{\text{hom}}, \dot{\epsilon}_e) = \frac{1}{2} [EA(T_{\text{hom}})]^{-1/n} \dot{\epsilon}_e^{(1-n)/n}. \quad (2.29)$$

Obwohl die Arrhenius-Gleichung physikalisch nur für Temperaturen  $T_{\text{hom}} < 263.15 \text{ K}$  motiviert ist, wird die Form des Fließgesetzes bis zum Druckschmelzpunkt durch Anpassung der Parameter  $Q$  und  $A_0$  erweitert. Nach Paterson (1994) liefert folgende Wahl der Parameter  $A_0$  und  $Q$  für polykristallines Eis eine gute Anpassung an Labormessungen:

$$A_0 = \begin{cases} 1.14 \times 10^{-5} \text{ Pa}^{-3} \text{ a}^{-1} & T_{\text{hom}} < 263.15 \text{ K}, \\ 5.47 \times 10^{10} \text{ Pa}^{-3} \text{ a}^{-1} & T_{\text{hom}} \geq 263.15 \text{ K} \quad \text{und} \end{cases} \quad (2.30)$$

$$Q = \begin{cases} 60 \times 10^3 \text{ J mol}^{-1} & T_{\text{hom}} < 263.15 \text{ K}, \\ 139 \times 10^3 \text{ J mol}^{-1} & T_{\text{hom}} \geq 263.15 \text{ K}. \end{cases} \quad (2.31)$$

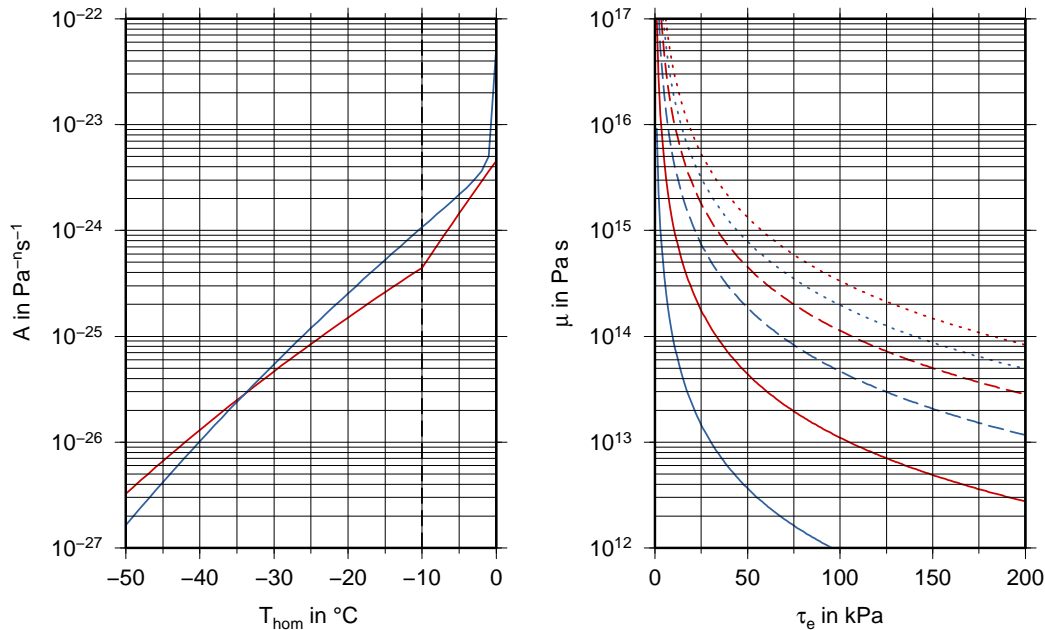
Eine weitere in der Eismodellierung häufig verwendete Form des Fließparameters basiert auf der Anpassung von Hooke (1981) an gemessene Daten, wobei die Summe zweier Exponentialfunktionen

$$A(T_{\text{hom}}) = A_0 e^{-Q/RT_{\text{hom}} + 3C/(T_r - T_{\text{hom}})^k} \quad (2.32)$$

mit den folgenden Parametern verwendet wird:

$$\begin{aligned} A_0 &= 2.9498 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-3} \text{ s}^{-1} & Q &= 78.8 \text{ kJ mol}^{-1} \\ R &= 8.321 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} & T_r &= 273.39 \text{ K} \\ C &= 0.16612 \text{ K}^k & k &= 1.17 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Der Fließparameter  $A$  nach Gleichung 2.30 und Gleichung 2.32 ist in Abbildung 2.1 (links) und die spannungs- und temperaturabhängige Viskosität (rechts) dargestellt. Die Simulationen in dieser Arbeit werden mit der Parametrisierung nach Paterson (1994) berechnet, da die Vergleichsstudie EISMINT zeigte, dass die Parametrisierung nach Hooke (1981) zu unrealistischen Viskositäten an der Eisbasis führt (Payne und Baldwin 2000).



**Abbildung 2.1:** Vergleich des Fließparameters  $A$  nach Paterson (1994, rot) und Hooke (1981, blau) in Abhängigkeit von der homologen Temperatur  $T_{\text{hom}}$  (links). Verlauf der spannungs- und temperaturabhängigen Viskosität  $\mu$  mit dem Fließparameter nach Paterson (1994, rot) und Hooke (1981, blau) mit  $E = 1$  (rechts) für die homologen Temperaturen  $-20^{\circ}\text{C}$  (gepunktete Linie),  $-10^{\circ}\text{C}$  (unterbrochene Linie) und  $0^{\circ}\text{C}$  (durchgezogene Linie).

**Verstärkungsfaktor:** Der Vorfaktor  $E$  im Fließgesetz Gl. 2.19, der auch Verstärkungsfaktor genannt wird, nimmt Einflüsse in das Fließgesetz auf, die nicht von Temperatur, Druck oder Spannung abhängen. Dazu gehören zum Beispiel Verunreinigungen des Eises durch Gesteinseinschlüsse an der Eisbasis, Ablagerungen vulkanischer Aschen oder Anisotropieeffekte aufgrund der bevorzugten Ausrichtung der einzelnen Eiskristalle mit ihren  $c$ -Achsen in Richtung des stärksten Drucks (Payne 1999; Tarasov und Peltier 1999; Peltier et al. 2000). In der Eismodellierung wird der Verstärkungsfaktor oft als Optimierungsparameter eingesetzt, um den Betrag des Geschwindigkeitsfeldes anzupassen. In dieser Arbeit wird, wenn nicht anders angegeben,  $E = 1$  gewählt.



## 2.3 Randbedingungen

Der Übergang von der integralen zur differentiellen Form der Erhaltungsgleichungen in Kap. 2.1 war nur unter der Annahme möglich, dass die betrachteten Volumen vollständig im Inneren des Eises liegen und die auftretenden thermodynamischen Felder in ihnen stetig differenzierbar sind. An den Grenzflächen des Eiskörpers sind die bisher betrachteten Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie nicht mehr gültig. Stattdessen muss um die betrachtete Fläche herum eine allgemeine Sprungbedingung abgeleitet werden, die sicherstellt, dass der Sprung der Normalenkomponente des konduktiven und advektiven Flusses der betrachteten Feldgröße relativ zur Bewegung der Grenzfläche der Oberflächenproduktion entspricht, die hier immer Null ist (Greve 1995). Eine Sprungbedingung schreibt die Änderung der Feldgröße am Rand vor und wird als Neumann-Randbedingung bezeichnet. Die Angabe einer Sprungbedingung ist nicht erforderlich, wenn der Wert der entsprechenden Größe auf dem Rand bekannt ist. In diesem Fall spricht man von Dirichlet-Randbedingungen.

Die betrachteten Grenzflächen sind im Allgemeinen freie Oberflächen. Ihre Beschreibung erfordert eine kinematische Randbedingung, welche die Bewegungen der Oberfläche mit den Fluidgeschwindigkeiten an der freien Oberfläche in Verbindung bringt, eine dynamische Randbedingung, mit der die Kräftebilanz an der Oberfläche berücksichtigt wird und eine thermodynamische Randbedingung. Eine allgemeine Herleitung der Sprungbedingungen für Masse, Impuls und Energie findet sich u.a. in Batchelor (1967), Hutter (1983) oder Hutter (2003). Die für die Eisdynamik relevanten Folgerungen werden im Folgenden dargestellt.

### 2.3.1 Eisoberfläche

Die Eisoberfläche ist eine freie Oberfläche an der Grenze zwischen den beiden Fluiden Eis und Luft. Ihre Position kann in impliziter Form als

$$F_s(x, y, z, t) = z - z_s = z - h(x, y, t) = 0 \quad (2.34)$$

angegeben werden, wobei  $z_s = h(x, y, t)$  die Höhe der Eisoberseite ist. Da dies für alle Zeiten gültig sein muss, ergibt sich die zeitliche Ableitung der Oberfläche

$$\frac{dF_s}{dt} = \frac{\partial F_s}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \text{grad } F_s = 0, \quad (2.35)$$

wobei  $\mathbf{w}$  die Geschwindigkeit der Oberfläche ist, die im Allgemeinen nicht mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  des Eises übereinstimmt. Die Differenz der Geschwindigkeiten führt zu einem Volumenstrom des Eises senkrecht zur Oberfläche, der durch die Akkumulations-/ Ablationsfunktion

$$a_s^\perp = -(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}_s \quad \text{mit} \quad a_s^\perp = \begin{cases} \geq 0 & \text{Akkumulation} \\ < 0 & \text{Ablation} \end{cases} \quad (2.36)$$

beschrieben wird. Mit dem normierten Flächennormalenvektor  $\mathbf{n}_s = \text{grad } F_s / \|\text{grad } F_s\|$  kann Gleichung 2.35 zu

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } F_s = -\|\text{grad } F_s\| a_s^\perp = -a_s \quad (2.37)$$

umgeschrieben werden und ergibt die kinematische Randbedingung an der Eisoberseite (vgl. Greve und Blatter 2009). In kartesischen Koordinaten hat der Flächennormalenvektor die

Form

$$\mathbf{n}_s = \frac{1}{N_s} \left( -\frac{\partial z_s}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial z_s}{\partial y} \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \right) \quad \text{mit } N_s = \sqrt{\left( \frac{\partial z_s}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_s}{\partial y} \right)^2 + 1} \quad (2.38)$$

und zeigt vom Eis in Richtung Atmosphäre. Aus Gleichung 2.35 und Gleichung 2.38 folgt:

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} + u \frac{\partial z_s}{\partial x} + v \frac{\partial z_s}{\partial y} - w = a_s^\perp N_s = a_s. \quad (2.39)$$

Für stationäre Probleme ist  $\partial_t z_s = 0$  und die kinematische Randbedingung lautet dann

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s = 0. \quad (2.40)$$

Diese Formulierung impliziert, dass in Richtung des Normalenvektors kein Massenfluss erfolgt. Im allgemeinen Fall ist die Akkumulations-/ Ablationsfunktion oder auch Oberflächenmassenbilanzfunktion  $a_s(x, y, t)$  eine Eingabgröße für das numerische Fließmodell.

Unter der Annahme, dass weder atmosphärische Strömungen noch der atmosphärische Druck signifikante Einflüsse auf das im Eiskörper herrschende Spannungsfeld haben, kann die Oberfläche als spannungsfrei angesehen werden. Daher müssen Tangential- und Normalspannungen verschwinden:

$$\mathbf{t}_s \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_s) = 0, \quad (2.41a)$$

$$\mathbf{b}_s \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_s) = 0, \quad (2.41b)$$

$$\mathbf{n}_s \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_s) = 0, \quad (2.41c)$$

wobei die Vektoren  $\mathbf{t}_s$  und  $\mathbf{b}_s$  der Tangenteneinheitsvektor und der Bi-Normaleneinheitsvektor an der Oberfläche sind. Obwohl die Vektoren  $\mathbf{t}_s$  und  $\mathbf{b}_s$  beliebige orthogonale Vektoren in der Tangentialebene sein können, werden sie hier so gewählt, dass  $\mathbf{t}_s$  in der  $xz$ -Ebene und  $\mathbf{b}_s$  in der  $yz$ -Ebene liegt:

$$\mathbf{t}_s = \frac{1\mathbf{e}_x + 0\mathbf{e}_y + \frac{\partial z_s}{\partial x} \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial z_s}{\partial x} \right)^2}} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_s = \frac{0\mathbf{e}_x + 1\mathbf{e}_y + \frac{\partial z_s}{\partial y} \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial z_s}{\partial y} \right)^2}}. \quad (2.42)$$

Damit an der Oberfläche sowohl die Normalspannung als auch die Tangentialspannungen verschwinden, muss

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_s = \mathbf{0} \quad (2.43)$$

erfüllt sein. Die Temperatur des Eises wird als mittlere Jahrestemperatur der Luft mit

$$T|_{z=z_s} = T_s(x, y, t) \quad (2.44)$$

vorgeschrieben und geht als Dirichlet-Randbedingung in das Modell ein.

### 2.3.2 Eisbasis

Die kinematische Randbedingung der Eisbasis kann analog zur Eisoberseite abgeleitet werden. Ist

$$F_b(x, y, z, t) = z_b - z = h(x, y, t) - H(x, y, t) - z = 0 \quad (2.45)$$

die implizite Darstellung der Eisbasis, wobei  $z_b$  die Position der Eisbasis und  $H(x, y, t)$  die Eismächtigkeit sind, so folgt

$$\frac{\partial F_b}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } F_b = -\|\text{grad } F_b\| a_b^\perp = -a_b. \quad (2.46)$$

Das Vorzeichen des Volumenstroms senkrecht durch die Eisbasis

$$a_b^\perp = (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}_b \quad \text{mit } a_b^\perp = \begin{cases} \geq 0 & \text{Schmelzen} \\ < 0 & \text{Anfrieren} \end{cases} \quad (2.47)$$

ist so gewählt, dass eine negative Massenbilanz eine positive basale Schmelzrate  $a_b$  ergibt. Mit dem nach außen zeigenden Flächennormaleneinheitsvektor

$$\mathbf{n}_b = \frac{1}{N_b} \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial z_b}{\partial y} \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z \right) \quad \text{mit } N_b = \sqrt{\left( \frac{\partial z_b}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_b}{\partial y} \right)^2 + 1} \quad (2.48)$$

lautet die kinematische Randbedingung an der Eisbasis

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + u \frac{\partial z_b}{\partial x} + v \frac{\partial z_b}{\partial y} - w = a_b^\perp N_b = a_b. \quad (2.49)$$

Für die Bestimmung der dynamischen Randbedingung an der Basis werden neben dem Normaleneinheitsvektor auch der Tangenten- und der Bi-Normaleneinheitsvektor benötigt. Analog zur Betrachtung an der Eisoberseite lauten sie

$$\mathbf{t}_b = \frac{1\mathbf{e}_x + 0\mathbf{e}_y + \frac{\partial z_b}{\partial x}\mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} \right)^2}} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_b = \frac{0\mathbf{e}_x + 1\mathbf{e}_y + \frac{\partial z_b}{\partial y}\mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial z_b}{\partial y} \right)^2}}. \quad (2.50)$$

Sie sind wiederum so gewählt, dass  $\mathbf{t}_b$  in der  $xz$ -Ebene liegt und  $\mathbf{b}_b$  orthogonal dazu. In dieser Orientierung gilt  $\mathbf{n}_b = \mathbf{b}_b \times \mathbf{t}_b$  an der Basis.

### Schelfeisbasis

An der Grenzfläche zwischen Eis und Wasser an der Schelfeisunterseite können die durch Ozeanströmungen hervorgerufen basalen Schubspannungen vernachlässigt werden (Weis et al. 1999). Im Gegensatz zu den Verhältnissen an der Eisoberseite ist die Eisbasis nicht spannungsfrei, denn der Wasserdruck an der Basis muss dem hydrostatischen Druck der überlagerten Eissäule entsprechen, damit das Eis schwimmt (MacAyeal 1997):

$$\mathbf{t}_b \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_b) = 0, \quad (2.51a)$$

$$\mathbf{b}_b \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_b) = 0 \quad \text{und} \quad (2.51b)$$

$$\mathbf{n}_b \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_b) = -\bar{\rho}gH. \quad (2.51c)$$

Die Gleichungen 2.51a bis 2.51c sind für

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_b = -\bar{\rho}gH\mathbf{n}_b \quad (2.52)$$

erfüllt (MacAyeal et al. 1986; Weis et al. 1999). Dabei ist  $\bar{\rho}$  die mittlere Dichte der Eissäule. Die Temperatur an der Eisbasis entspricht der Druckschmelzpunkttemperatur des Ozeans  $T_{\text{ocn}}$ ,

$$T|_{z_b} = T_{\text{ocn}}(x, y, t), \quad (2.53)$$

und hängt vom Salzgehalt und der Dichte der Meerwassers sowie den lokalen Strömungs- und Druckverhältnissen ab. Nach Grosfeld (1993) stellt die Randbedingung  $T|_{z_b} \approx -2^\circ\text{C}$  eine gute Näherung dar.

## Gegründete Bereiche

In den gegründeten Bereichen des Eises hängt die basale Geschwindigkeit von den herrschenden Temperaturbedingungen ab. Unterhalb der Temperatur des Druckschmelzpunktes ist das Eis am Untergrund festgefroren und es gilt

$$\mathbf{u}|_{z=z_b} = \mathbf{0} \quad \text{für } T|_{z=z_b} < T_{\text{pmp}}. \quad (2.54)$$

Entspricht die Temperatur an der Eisbasis dem Druckschmelzpunkt (temperierte Eisbasis), kann der Eiskörper auf dem darunter liegenden Bett gleiten.

Ein allgemeines Gleitgesetz, abhängig von der basalen Schubspannung  $\tau_b$ , der Rauigkeit des Untergrundes  $C_b$ , der effektiven Normalspannung  $\tau_n$  und der Temperatur  $f(T)$ , kann in der Form

$$u_b = C_b |\tau_b|^{p-1} \tau_n^{-q} f(T) \tau_b \quad (2.55)$$

zusammengefasst werden. Die Exponenten  $p$  und  $q$  sind Optimierungsparameter, die an die jeweiligen glaziologischen Verhältnisse angepasst werden. Gleitgesetze dieser Form werden nach Weertman (1957, 1964, 1979) als Weertman-Gleitgesetze bezeichnet.

Die für das basale Gleiten relevante Normalspannung  $\tau_n$  hängt von der Auflast des Eises ( $\bar{\rho}gH$ ) ab. In Bereichen, in denen es z.B. durch erhöhtes basales Schmelzen zur Ausbildung einer nicht abfließenden Wasserschicht kommt, wird die effektive Normalspannung durch die Auftriebswirkung des Wassers reduziert,  $\tau_n = \rho g H - p_w$ , wobei  $p_w$  der innerglaziale Wasserdruck ist (Greve und Blatter 2009). Bei marinen Eisschilden, deren Eismassen sich zum Teil unterhalb des Meeresspiegels befinden und die an der Aufsetzlinie direkt mit dem Ozean verbunden sind, wird nach Huybrechts (1992) die Auftriebskraft vom Meerwasser aufgebracht, so dass die Schwimmgleichgewichtsbeziehung

$$\rho_{\text{sw}} z_b = -\bar{\rho}H \quad \iff \quad \rho_{\text{sw}} z_s = (\rho_{\text{sw}} - \bar{\rho}) \quad (2.56)$$

mit  $\rho_{\text{sw}}$  der Dichte des Meerwassers angewendet werden kann. Die effektive Normalspannung an der Eisbasis ( $z = z_b$ ) ist dann

$$\tau_n \approx \begin{cases} \bar{\rho}gH & z_b \geq 0 \text{ m} \\ \bar{\rho}gH + \rho_{\text{sw}}g z_b & z_b < 0 \text{ m}. \end{cases} \quad (2.57)$$

Eine in numerischen Simulationen häufig verwendete Beschreibung des basalen Gleitens geht davon aus, dass Gleiten nur dann möglich ist, wenn die Temperatur an der Eisbasis den Druckschmelzpunkt erreicht hat. Die Temperaturfunktion im Gleitgesetz (Gl. 2.55) ist in diesem Fall die Sprungfunktion:

$$f(T) = \begin{cases} 1, & T = T_{\text{pmp}} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.58)$$

Nach Fowler (1986) setzt basales Gleiten bereits unterhalb des Druckschmelzpunktes von Eis ein. In der Nähe des Druckschmelzpunktes reichen geringe Druckunterschiede aus, um kleinskalige Unterschiede in der Verteilung von Anfrieren und Schmelzen zu erzeugen, die eine mittlere Gleitgeschwindigkeit zulassen. In Abhängigkeit von der Felsbettneigung und damit von der basalen Schubspannung gibt Fowler (1986) eine Temperatur von  $\delta T_{\text{sl}} < 3 \text{ K}$  unterhalb des Druckschmelzpunktes an, ab der signifikantes Gleiten auftritt. Sandhäger (2000)

parametrisiert den Übergang von Nichtgleiten zu Gleiten unterhalb des Druckschmelzpunktes durch eine Kosinusfunktion,

$$f(T) = \begin{cases} \cos(\pi/2(T - T_{\text{pmp}})/\delta T_{\text{sl}}), & (T + \delta T_{\text{sl}}) \leq T_{\text{pmp}} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.59)$$

die einen kontinuierlichen Anstieg des basalen Gleitparameters im Temperaturbereich  $T + \delta T_{\text{sl}} \leq T_{\text{pmp}}$  gewährleistet. Wenn nicht anders erwähnt, wird hier ein Wert von  $\delta T_{\text{sl}} = 2 \text{ K}$  verwendet. Budd und Jenssen (1987) geben für die Temperaturabhängigkeit des Gleitgesetzes eine Exponentialfunktion an:

$$f(T) = e^{\nu(T - T_{\text{pmp}})}. \quad (2.60)$$

Der von ihnen gewählte Parameter  $\nu = 0.1$  wird hier als zu niedrig eingeschätzt, da er hohe Gleitgeschwindigkeiten auch bei Temperaturen zulässt, die weit unterhalb des Druckschmelzpunktes liegen. In dieser Arbeit wird der Parameter  $\nu = 1$  gewählt, wie er auch von Greve (2005) für die numerische Simulation des Grönländischen Eisschildes verwendet wurde.

Werden dreidimensionale Eisgeometrien betrachtet, dann sind die Gleitgeschwindigkeit des Eises an der Eisbasis  $\mathbf{u}_b$  und die basale Schubspannung zweidimensionale Vektoren mit den Komponenten

$$u_b = \mathbf{t}_b \cdot \mathbf{u}, \quad v_b = \mathbf{b}_b \cdot \mathbf{u} \quad (2.61)$$

und

$$\tau_{b,x} = \mathbf{t}_b \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_b), \quad \tau_{b,y} = \mathbf{b}_b \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_b) \quad (2.62)$$

in der Tangentialebene. In der Flacheisnäherung (SIA) werden horizontale Gradienten der Eisbasis vernachlässigt. Daher liefert das Gleitgesetz nach Weertman (Gl. 2.55) Dirichlet-Randbedingungen für die horizontalen Komponenten der Geschwindigkeit  $u$  und  $v$  an der Basis

$$u_b = \mathbf{t}_b \cdot \mathbf{u} \approx u|_b \quad \text{und} \quad v_b = \mathbf{b}_b \cdot \mathbf{u} \approx v|_b. \quad (2.63)$$

Für Modelle höherer Ordnung kann die Neigung des Felsbettes nicht vernachlässigt werden. Es werden daher alle basalen Effekte durch einen Parameter  $F_b(C_b, |\tau_b|, \tau_n, T) \neq 0$  zusammengefasst, wodurch es möglich wird, das Gleitgesetz in seiner inversen Form

$$\tau_{b,x} = \frac{1}{F_b} u_b = \beta^2 u_b \quad \text{und} \quad \tau_{b,y} = \frac{1}{F_b} v_b = \beta^2 v_b \quad (2.64)$$

zu schreiben, wobei  $\beta^2 \geq 0$  als basaler Gleitparameter bezeichnet wird (MacAyeal 1993; Pattyn 2003; Vieli und Payne 2003; Pattyn 2008). Für den Fall, dass basales Gleiten zulässig ist, lautet die basale Randbedingung somit:

$$\mathbf{t}_b \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_b) = \beta^2 \mathbf{t}_b \cdot \mathbf{u} \quad (2.65a)$$

$$\mathbf{b}_b \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_b) = \beta^2 \mathbf{b}_b \cdot \mathbf{u} \quad (2.65b)$$

Die Gleichungen Gl. 2.65a und Gl. 2.65b schreiben die Tangentialspannungen proportional zur tangentialen Geschwindigkeit vor. Für  $\beta^2 = 0$  sind Gl. 2.65a und Gl. 2.65b auch die Randbedingungen an der Schelfeisbasis. Die Normalspannung wird, wie im Fall der Schelfeisbasis, vom Untergrund aufgebracht und kompensiert die hydrostatische Auflast des Eises.

Für die Formulierung der Temperaturrandbedingung müssen zwei Fälle unterschieden werden. Ist die Eisbasis unterhalb des Druckschmelzpunktes, ergibt sich folgende Neumann-Randbedingung für den vertikalen Temperaturgradienten an der Eisbasis (vgl. Huybrechts 1992; Pattyn 2003):

$$-\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z_b} = \frac{(q_{\text{geo}} + u_b \tau_{b,x} + v_b \tau_{b,y})}{\kappa}, \quad (2.66)$$

wobei  $q_{\text{geo}}$  der geothermale Wärmefluss ist. Der zusätzliche Beitrag zum Temperaturgradienten entsteht durch Reibungswärme an der Eisbasis, die nur dann zu berücksichtigen ist, wenn basales Gleiten unterhalb der Druckschmelzpunkttemperatur zugelassen wird. Ist die Eisbasis temperiert, d.h. die Temperatur erreicht dort den Druckschmelzpunkt, dann ist die Temperatur bekannt und geht als Dirichlet-Randbedingung ein (Greve und Blatter 2009):

$$T|_{z_b} = T_{\text{pmp}}. \quad (2.67)$$

### 2.3.3 Schelfeisfront

Die Schelfeisfront (engl. *calving front*) ist wie die Eisober- und Unterseite im Allgemeinen eine freie Oberfläche. Die zeitabhängige Betrachtung ihrer Position erfordert daher ebenso eine kinematische Randbedingung, welche den Massenfluss durch die Fläche

$$a_{\text{cf}}^{\perp} = -(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}_{\text{cf}} \quad (2.68)$$

berücksichtigt, wobei  $a_{\text{cf}}^{\perp}$  die Kalbungsrate und  $\mathbf{n}_{\text{cf}}$  der Normaleneinheitsvektor sind.

Die dynamische Randbedingung lässt sich in Analogie zu den Verhältnissen an der Schelfeisbasis ableiten. Es wird davon ausgegangen, dass die von den vorherrschenden Ozeanströmungen auf die Schelfeisfront ausgeübten Scherspannungen vernachlässigt werden können und der im Wasser vorherrschende Druck hydrostatisch ist. Die auf die Eisfront wirkende Normalspannung wird durch den hydrostatischen Druck im Wasser  $p_w$  aufgebracht, so dass für jeden Punkt an der Eisfront

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_{\text{cf}} = -p_w \mathbf{n}_{\text{cf}} \quad (2.69)$$

gilt, wobei der Normalenvektor  $\mathbf{n}_{\text{cf}}$  in der  $xy$ -Ebene liegt (Weis et al. 1999). Der hydrostatische Druck im Wasser ist von der Wassertiefe abhängig und führt daher zu einem vertikal variierenden Einfluss auf das Fließfeld im Schelfeis. Dieser Effekt beschränkt sich jedoch auf einen kleinen Bereich im Abstand von wenigen Eisdicken von der Eisfront und kann für die Dynamik des Schelfeises vernachlässigt werden (Morland 1987; Mayer 1996). Für die Massenbilanz des Eises im Gesamtsystem ist es ausreichend, das vertikal integrierte Spannungsgleichgewicht

$$\int_{z_b}^{z_s} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_{\text{cf}} dz = -\frac{\rho_{\text{sw}}}{2} g \left( \frac{\bar{\rho}}{\rho_{\text{sw}}} H \right)^2 \mathbf{n}_{\text{cf}} \quad (2.70)$$

zu betrachten (MacAyeal 1997). Zusätzlich wird ausgenutzt, dass sich das Eis im Schwimmgleichgewicht mit dem Meerwasser befindet, wodurch die Oberflächenhöhe eliminiert werden kann und Gleichung 2.70 nur noch von der lokalen Eismächtigkeit abhängt. Die linke Seite von Gleichung 2.70 beschreibt die über die Eismächtigkeit integrierte Kraft, welche durch deviatorische Spannungsanteile und Druck auf die Eisfront wirkt. Um die Randbedingung an der Schelfeisfront so zu formulieren, dass sie für das Fließmodell verwendet werden kann, müssen

in Gleichung 2.70 mit Hilfe des Fließgesetzes (Gl. 2.22) die Spannungen in Deformationsraten und diese in Geschwindigkeitsgradienten umgerechnet werden (siehe Kap. 4.1.1).

Die Temperaturverteilung an der Schelfeiskante hat keinen Einfluss auf die Dynamik des umgebenden Schelfeises, da der Wärmetransport in dieser Region durch die horizontale Advektion dominiert wird und vom Inneren des Schelfeises zur Schelfeisfront gerichtet ist. Die vertikale Temperaturverteilung wird daher linear zwischen der Oberflächentemperatur und der Temperatur an der Eisbasis interpoliert.

### 2.3.4 Einstromgebiete

Die Ausdehnung des Untersuchungsgebietes ermöglicht es nicht, die seitlichen Ränder so zu wählen, dass sie entlang von Eisscheiden ( $\mathbf{u} = 0$ ) oder entlang von Fließlinien ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ,  $\mathbf{t} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) = 0$ ) verlaufen. Daher werden Teile des Einzugsgebietes als Liefergebiete betrachtet, deren Beitrag zur Massenbilanz als Massenfluss über den Rand des Modellgebietes berücksichtigt wird. Befindet sich der Rand in genügend großer Entfernung zur Aufsetzzone, kann für die Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes auf die Flacheisnäherung (SIA) zurückgegriffen werden (z.B. Huybrechts et al. 1996; Payne et al. 2000):

$$\mathbf{u}(z) = -2(\rho g)^n |\text{grad } z_s|^{n-1} \text{grad}(z_s) \int_{z_b}^{z_s} [A(T_{\text{hom}})(z_s - z)] dz + \mathbf{u}_b, \quad (2.71)$$

wobei  $A(T_{\text{hom}})$  und  $n$  der Fließparameter und Exponent aus dem Glen'schen Fließgesetz (Gl. 2.29) sind.  $\mathbf{u}_b$  ist der horizontale Geschwindigkeitsvektor an der Eisbasis nach dem Wertman-Gleitgesetz (Gl. 2.55). Die vertikale Geschwindigkeit am Rand wird vernachlässigt ( $w = 0$ ). Für die prognostische Simulation wird  $\partial_t H = a_s - a_b$  verwendet. Außerdem wird der horizontale Wärmetransport in Gl. 4.31 vernachlässigt (vgl. Payne 1995; Pattyn 2003; Payne und Dongelmans 1997).





# Kapitel 3

## Zweidimensionale Simulation des Brunt-Schelfeises und Stancomb-Wills-Eisstroms

Mit kontinuumsmechanischen Methoden wurde bereits in verschiedenen Studien, unter anderem von Hulbe et al. (2005), Lange et al. (2005) und Humbert und Pritchard (2006), das Fließverhalten des Brunt-Schelfeises untersucht. In ihnen zeigt sich, dass die Verteilung der horizontalen Geschwindigkeiten des Schelfeises eine Behandlung der im Brunt-Schelfeis vorhandenen Risse erfordert. Die vorliegende Arbeit berücksichtigt dieses, indem die Schelfeis-komponente des an der Universität Münster von Sandhäger (2000) entwickelten dreidimensionalen thermodynamischen Fließmodells für Inlandeis und Schelfeis um eine Methode zur numerischen Entkopplung benachbarter Eisgebiete entlang von Rissen erweitert wird.

Um die Methode der Implementation der Risse in die kontinuumsmechanische Beschreibung des Fließmodells zu testen, wurde sie im Rahmen einer vergleichenden Parameterstudie auf zwei dominante Risse im Brunt-Schelfeis angewandt. Die Ergebnisse der Studie sind bereits Bestandteile der Veröffentlichungen von Kleiner et al. (2008) und Humbert et al. (2009). Sie werden hier in Auszügen wiedergegeben.

### 3.1 Das numerische Schelfeismodell

Für die diagnostische Modellierung des Fließverhaltens im Schelfeis wird das bisher formulierte Gleichungssystem (Kap. 2) des gekoppelten Fließmodells wesentlich vereinfacht. Sowohl der Übergang zwischen Eis und Ozean als auch der zwischen Eis und Atmosphäre ist in guter Näherung scherspannungsfrei, so dass die Scherspannungen  $\tau_{xz}$  und  $\tau_{yz}$  im Eis im Vergleich zu den horizontalen Spannungen  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$  und  $\tau_{xy}$  sehr klein sind und vernachlässigt werden können (Sanderson und Doake 1979). Die Horizontalkomponenten des Geschwindigkeitsfeldes sind daher tiefeninvariant:

$$\frac{\partial u}{\partial z} \approx 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial z} \approx 0. \quad (3.1)$$

Durch diese vereinfachenden Annahmen, die als Schelfeisnäherung (*shallow shelf approximation*, SSA) bezeichnet werden (MacAyeal und Thomas 1982), kann das horizontale Fließgeschwindigkeitsfeld  $(u, v)$  mit

$$4\frac{\partial}{\partial x} \left( \hat{\mu} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2\frac{\partial}{\partial x} \left( \hat{\mu} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \hat{\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \Gamma_x \quad \text{und} \quad (3.2a)$$

$$4\frac{\partial}{\partial y} \left( \hat{\mu} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\frac{\partial}{\partial y} \left( \hat{\mu} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \hat{\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \Gamma_y \quad (3.2b)$$

berechnet werden. Die Antriebsterme  $\Gamma_x$  und  $\Gamma_y$  auf den rechten Seiten von Gl. 3.2a und Gl. 3.2b fassen die Abhängigkeit des Fließfeldes von der Variation der Eismächtigkeit und der Dichte zusammen. In der von Sandhäger (2000) verwendeten Notation für  $\sigma$ -Koordinaten ist

$$\Gamma_x = \bar{\rho}gH \frac{\partial}{\partial x} (h - H) + g \frac{\partial}{\partial x} \left( H^2 \int_0^1 \int_{\zeta}^1 \rho(\zeta') d\zeta' d\zeta \right) \quad (3.3)$$

mit der Eisdicke  $H(x, y)$ , der Oberflächenhöhe  $h(x, y)$ , der Dichte  $\rho(x, y, \zeta)$ , der mittleren Dichte des Eises  $\bar{\rho}(x, y)$ , der Dichte von Meerwasser  $\rho_{\text{sw}} = 1028 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$  und der Schwerebeschleunigung  $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ . Durch die Wahl einer konstanten Dichte und der Annahme, das Eis befinde sich im Schwimmgleichgewicht, folgt

$$\Gamma_x = \frac{\bar{\rho}}{\rho_{\text{sw}}} (\rho_{\text{sw}} - \bar{\rho}) g H \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (3.4)$$

Durch Ableitung in  $y$ -Richtung kann analog  $\Gamma_y$  berechnet werden. Die vertikal integrierte Viskosität  $\hat{\mu}$  als inverse Formulierung des Glen'schen Fließgesetzes (Gl. 2.29) in  $\sigma$ -Koordinaten lautet

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_e^{(1-n)/n} H \int_{\zeta=0}^1 (EA(T_{\text{hom}}))^{-1/n} d\zeta \quad (3.5)$$

mit der effektiven Deformationsrate

$$\dot{\epsilon}_e = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \quad (3.6)$$

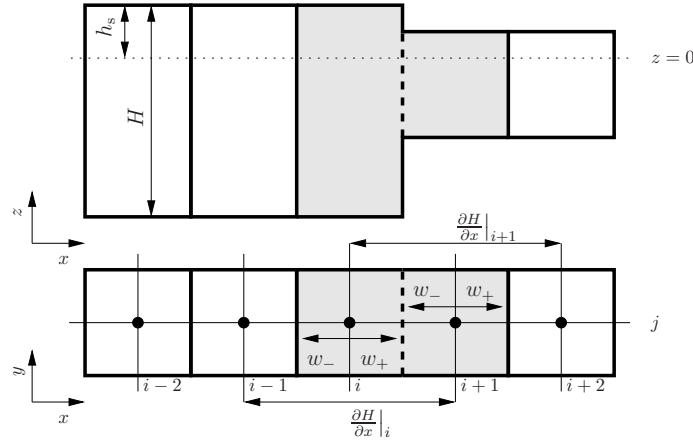
nach der Schelfeishnerung.  $E$ ,  $A(T_{\text{hom}})$  und  $n$  sind der Verstärkungsfaktor, der Fließparameter und der Exponent aus dem Glen'schen Fließgesetz (siehe Kapitel 2.2).

## 3.2 Modellerweiterung

Im Modell werden die Bruchzonen mit einem dimensionslosen Parameter  $0 \leq a \leq 1$  charakterisiert, der den Grad der Kopplung zwischen benachbarten Eisgebieten ausdrückt. Der Grenzfall  $a = 0$  bedeutet die vollständige Entkopplung beider Seiten entlang eines Bruchs. Für die Entkopplung werden sowohl die aus den Spannungen resultierenden Geschwindigkeitsableitungen in Gl. 3.2a und Gl. 3.2b als auch die Antriebsterme  $\Gamma_x$  und  $\Gamma_y$  (Gl. 3.3) berücksichtigt. Aus diesem Grund wird das sonst übliche zentrale Differenzenschema (Ferziger und Perić 2002) für die ersten und zweiten Ableitungen in Gl. 3.2 und Gl. 3.3 durch die Gewichtungsfaktoren  $w_+$  und  $w_-$  so modifiziert, dass im Grenzfall der Entkopplung eine unsymmetrische Diskretisierung erfolgt (vgl. Sandhäger 2003). Das gewählte Diskretisierungsschema hat die Form

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{i,j} \rightarrow \frac{1}{2} \left( w_+ \frac{H|_{i+1,j} - H|_{i,j}}{\Delta x} + w_- \frac{H|_{i,j} - H|_{i-1,j}}{\Delta x} \right), \quad (3.7)$$

wobei die Gewichtungsfaktoren jeweils auf die einseitigen Ableitungen in positive ( $w_+$ ) bzw. negative ( $w_-$ ) Koordinatenrichtung anzuwenden sind. In Abbildung 3.1 ist dies schematisch dargestellt.



**Abbildung 3.1:** Schematische Darstellung des gewichteten Diskretisierungsschemas. Der Riss (gestrichelte Linie) befindet sich an der Gitterposition  $(i + 1/2, j)$ . Ableitungen der Eisdicke und Oberflächenhöhe werden am zentralen Gitterpunkt  $i$  als Differenzenquotient gegenüberliegender Gitterpunkte (schwarze Punkte) auf beiden Seiten des Risses berechnet.

Die Gewichtungsfaktoren sind durch die Beziehungen

$$w_+ = \frac{2 \cdot a}{1 + a} \quad \text{und} \quad w_- = 2 - \frac{2 \cdot a}{1 + a}. \quad (3.8)$$

mit dem Kopplungsparameter  $a$  verknüpft. Im Grenzfall  $a = 1$  ist Gl. 3.7 identisch mit dem üblichen zentralen Differenzschema

$$\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{H|_{i+1,j} - H|_{i-1,j}}{2\Delta x}. \quad (3.9)$$

Die Ableitung in  $y$ -Richtung erfolgt in analoger Weise. Durch die teilweise oder vollständige Entkopplung wird in diesem Fall der Eismächtigkeitsgradient und somit die lokal auf das Eis wirkende Volumenkraft auf beiden Seiten des Bruchs reduziert.

Die Methode der gewichteten Ableitungen wird auch auf die zweiten Ableitungen der horizontalen Geschwindigkeiten übertragen, die in den Termen auf den linken Seiten von Gl. 3.2a und 3.2b auftreten. Diese lassen sich analog als

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \hat{\mu} \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \Big|_{i,j} \rightarrow \frac{1}{\Delta x^2} \left[ w_+ \hat{\mu} \Big|_{i+1/2,j} \left( v_x \Big|_{i+1,j} - v_x \Big|_{i,j} \right) - w_- \hat{\mu} \Big|_{i-1/2,j} \left( v_x \Big|_{i,j} - v_x \Big|_{i-1,j} \right) \right] \quad (3.10)$$

schreiben, wobei die über die Eissäule integrierte Viskosität an der Bruchposition  $(i + 1/2, j)$

$$\hat{\mu} \Big|_{i+1/2,j} = \left( \hat{\mu} \Big|_{i,j} + a \hat{\mu} \Big|_{i+1,j} \right) / (1 + a) \quad (3.11)$$

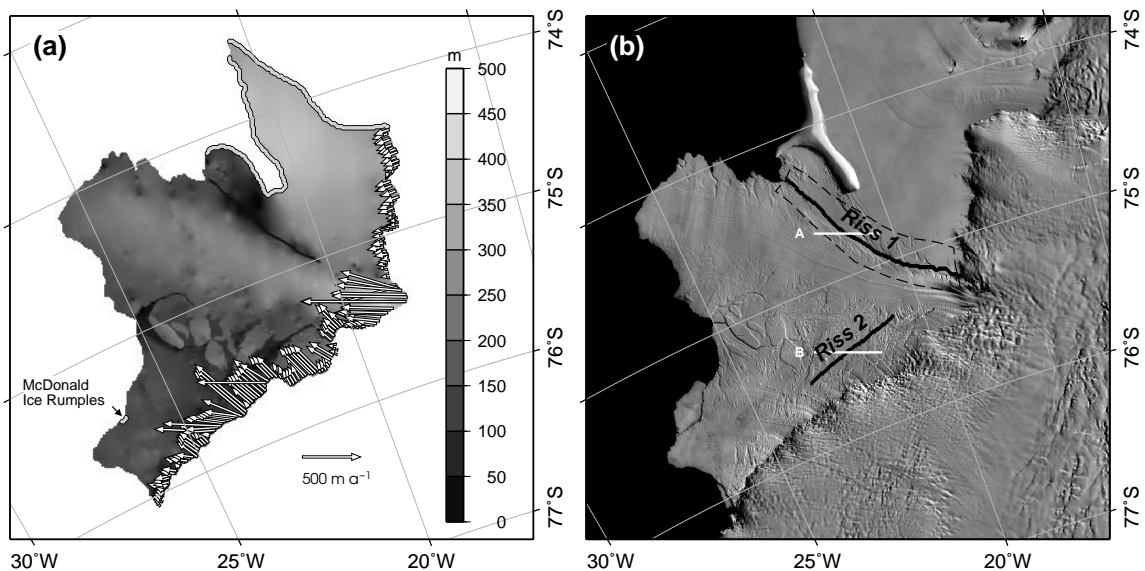
als gewichteter Mittelwert zwischen den beiden benachbarten Gitterpunkten  $(i, j)$  und  $(i+1, j)$  berechnet wird. Auf der dem Bruch gegenüberliegenden Seite  $(i - 1/2, j)$  wird die Viskosität als Mittelwert zwischen den beiden benachbarten Gitterpunkten  $(i, j)$  und  $(i - 1, j)$  mit

$$\hat{\mu} \Big|_{i-1/2,j} = \left( \hat{\mu} \Big|_{i,j} + \hat{\mu} \Big|_{i-1,j} \right) / 2 \quad (3.12)$$

berechnet. Durch diese Vorgehensweise entspricht die Viskosität an der Bruchposition im vollständig entkoppelten Fall ( $a = 0$ ) der Viskosität im Zentrum der Gitterzelle. An allen Gitterpunkten, die nicht an einen Bruch grenzen, ist  $a = 1$ , wodurch das gewichtete Differenzenschema in das übliche Finite Differenzenschema übergeht. An jedem durch einen Bruch beeinflussten Gitterpunkt ist es daher nötig, für jede Kante oder Ecke der entsprechenden Gitterzelle den Verlauf der Bruchs anzugeben und die Gewichte  $w_+$  und  $w_-$  durch den Kopplungsparameter  $a$  festzulegen. Für jede Gitterzelle ergeben sich acht Möglichkeiten des Bruchverlaufs, die bei der Diskretisierung der ersten und zweiten Ableitungen für die  $x$ - und  $y$ -Richtung in Gl. 3.2a und Gl. 3.2b berücksichtigt werden müssen. Im Modell ist pro Gitterzelle jeweils nur eine Kante oder eine Ecke für den Verlauf des Bruchs zulässig.

### 3.3 Datensätze

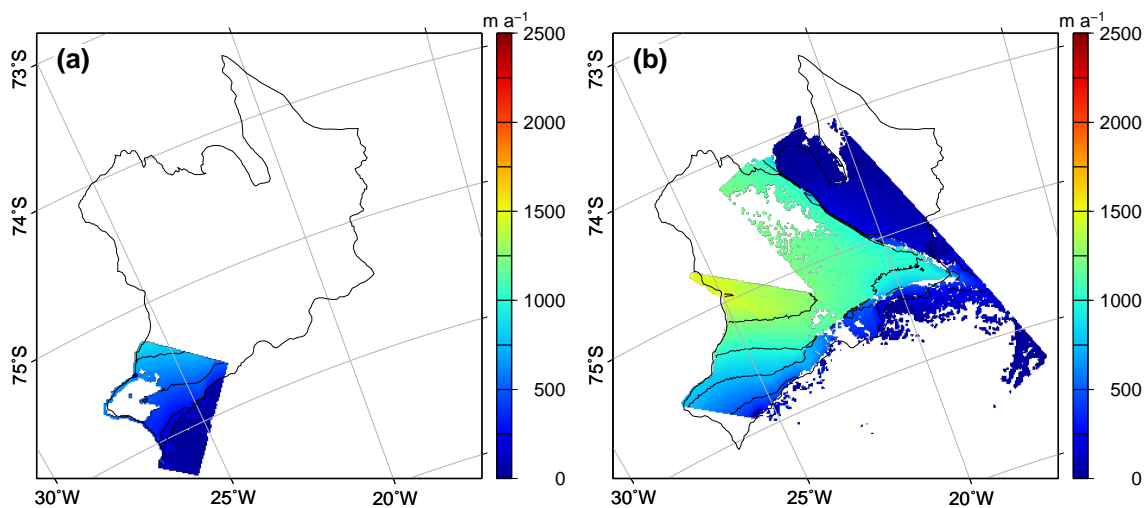
Ausgehend von gemessenen Eisoberflächenhöhen des NASA-Satelliten ICESat/GLAS aus dem Jahr 2003 haben Humbert und Pritchard (2006) und Humbert et al. (2009) einen Datensatz der Eismächtigkeiten erstellt, indem sie die gemessenen Höhen für einzelne Teilgebiete wie Eisberge und Meereisgebiete lokal interpoliert und später zu einem Datensatz zusammengeführt haben. Mit einer im Untersuchungsgebiet konstant angenommenen mittleren Dichte von  $850 \text{ kg m}^{-3}$  und unter Verwendung der Schwimmgleichgewichtsbedingung Gl. 2.56 ergibt sich die in Abbildung 3.2a dargestellte Verteilung der Eismächtigkeiten. Die Eismächtigkei-



**Abbildung 3.2:** (a) Verteilung der Eisdicke  $H$  in m und der Einstromgeschwindigkeiten entlang der Aufsetzlinie in  $\text{m a}^{-1}$ . Die Pfeile geben Betrag und Richtung der Geschwindigkeit an. Die Bereiche, in denen kein Einstrom erfolgt, sind durch eine dicke graue Linie gekennzeichnet. (b) Darstellung der Positionen und Namen der beiden Risse, die in dieser Arbeit untersucht werden. Zusätzlich sind die Querprofile A und B eingezeichnet, die in Kapitel 3.6 betrachtet werden.

ten variieren im Brunt-Schelfeis zwischen 100 und 250 m. In der Region SWIT ist das Eis in der Nähe der Aufsetzlinie dicker als 450 m und nimmt in Fließrichtung bis zur Kalbungslinie auf etwa 200 m ab. Zusätzlich zur Eisgeometrie müssen die Randbedingungen für das Ge-

schwindigkeitsfeld vorgegeben werden. Entlang der Kalbungslinie ist es die vertikal integrierte Spannungsrandbedingung (MacAyeal 1997) aus Kapitel 4.1.1, die Neumann-Randbedingungen für die Horizontalgeschwindigkeiten vorgibt. Entlang der Aufsetzlinie zum Inlandeis und entlang der *ice rises* wird das Geschwindigkeitsfeld als Dirichlet-Randbedingung vorgeschrieben. Dazu werden die Datensätze von Humbert und Pritchard (2006) und Gray (2001) verwendet, die auch im späteren Vergleich mit den simulierten Geschwindigkeiten genutzt werden. H. Pritchard vom British Antarctic Survey (BAS) konnte durch das Verfolgen von charakteristischen Merkmalen der Eisoberfläche in zeitlich aufeinander folgenden Abbildungen (engl. *feature tracking*) das Geschwindigkeitsfeld für den südwestlichen Teil des Brunt-Schelfeises bestimmen (Humbert und Pritchard 2006). Die darin verwendeten Daten stammen aus der Zeit Mai bis Juni 2005 und sind nur für diesen Zeitraum repräsentativ, da die Geschwindigkeit des Eises von 2000 bis 2006, gemessen an der Station Halley, um  $201 \text{ m a}^{-1}$  zurückgegangen ist (H. Gudmundson, 2006, persönliche Mitteilung). Der Datensatz wird im folgenden als  $u_{\text{BAS}}$  bezeichnet und ist in Abbildung 3.3a dargestellt. Die von Gray (2001) abgeleiteten Geschwindigkeiten basieren auf InSAR (*interferometric synthetic aperture radar*)-Messungen aus den Jahren 1997 und 2000 und decken einen großen Teil des Untersuchungsgebietes ab. Der Datensatz ist in Abbildung 3.3b dargestellt und wird als  $u_{\text{CCRS}}$  (Canadian Center for Remote Sensing) bezeichnet. In Abbildung 3.2a sind die verwendeten Einstromgeschwindigkeiten als



**Abbildung 3.3:** Gemessene Eisoberflächengeschwindigkeiten in  $\text{m a}^{-1}$ : (a) durch *feature tracking* abgeleitete Geschwindigkeiten im südwestlichen Brunt-Schelfeis (Humbert und Pritchard 2006) und (b) InSAR-Geschwindigkeiten (Gray 2001). Das Isolinienintervall beträgt  $250 \text{ m a}^{-1}$ .

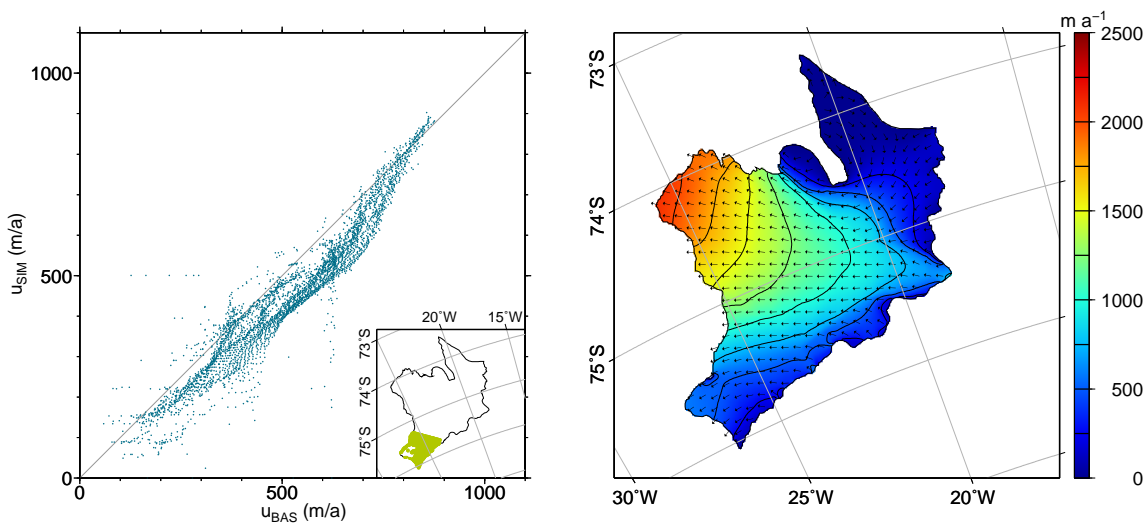
Vektorpfeile mit skaliertem Länge dargestellt. Sie erreichen bis zu  $894 \text{ m a}^{-1}$  im Einstrom der Eiszunge (SWIT). Humbert (2005) hat gezeigt, dass der Einstrom über die Aufsetzlinie von *ice rises* in der Größe von Lyddan Island und kleiner vernachlässigt werden kann.

### 3.4 Referenzsimulation

Im betrachteten Gebiet existieren keine direkt gemessenen Temperaturprofile und indirekte Informationen, wie z.B. gemessene basale Schmelzraten oder Eisdichten, sind widersprüch-

lich (Humbert et al. 2009). Aus diesem Grund wird der Einfluss der Temperatur und anderer Materialeigenschaften auf die Viskosität (Integral in Gl. 3.5) in dem vertikal konstanten  $E_s B = (EA(T_{\text{hom}}))^{-1/n}$  zusammengefasst.  $E_s B$  ist ein Optimierungsparameter, der in der Referenzsimulation an gemessene Geschwindigkeiten angepasst wird. Kleinere Werte von  $E_s B$  bedeuten weiches Eis. Mit der Wahl von  $E_s B$  ist das horizontale Geschwindigkeitsfeld vollständig vertikal unabhängig, wodurch es möglich ist, das numerische Fließmodell mit der minimalen Anzahl von drei Schichten zu betreiben. Horizontal wird eine konstante Auflösung von  $1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$  verwendet, wodurch sich  $375 \times 375$  Gitterpunkte ergeben, von denen 40174 aktive Schelfeispunkte sind, auf denen die Fließgeschwindigkeiten berechnet werden.

Für die gewählte Dichte  $\rho = 850 \text{ kg m}^{-3}$  ergibt sich für den Fließparameter  $E_s B = 1.12 \times 10^8 \text{ Pa s}^{1/3}$  die beste Anpassung der simulierten Geschwindigkeiten  $u_{\text{SIM}}$  an die im Brunt-Schelfeis gemessenen Geschwindigkeiten  $u_{\text{BAS}}$ . Eine Anpassung an die Geschwindigkeiten  $u_{\text{CCRS}}$  ist nicht sinnvoll, da diese nicht aus dem gleichen Zeitraum wie die anderen Eingabegrößen sind. Sie werden nur für die generelle Charakterisierung des Geschwindigkeitsfeldes, insbesondere in der Umgebung der Risse, berücksichtigt. Der Vergleich der simulierten Geschwindigkeiten  $u_{\text{SIM}}$  mit den gemessenen Geschwindigkeiten  $u_{\text{BAS}}$  (Abb. 3.3a) ist in Abbildung 3.4a in Form eines Streudiagramms dargestellt. Dazu wurden die Geschwindigkeiten  $u_{\text{BAS}}$  auf das gleiche Raster des Fließmodells interpoliert. Der Korrelationskoeffizient zwischen



**Abbildung 3.4:** Ergebnisse der Referenzsimulation: (a) Streudiagramm zum Vergleich der simulierten Geschwindigkeiten  $u_{\text{SIM}}$  mit den gemessenen Geschwindigkeiten  $u_{\text{BAS}}$  im südwestlichen Teil des Brunt-Schelfeises (grüner Bereich in verkleinerter Abbildung), (b) simuliertes Geschwindigkeitsfeld in  $\text{m a}^{-1}$  mit einem Isolinienabstand von  $250 \text{ m a}^{-1}$ . Die Pfeile einheitlicher Länge kennzeichnen die Fließrichtung.

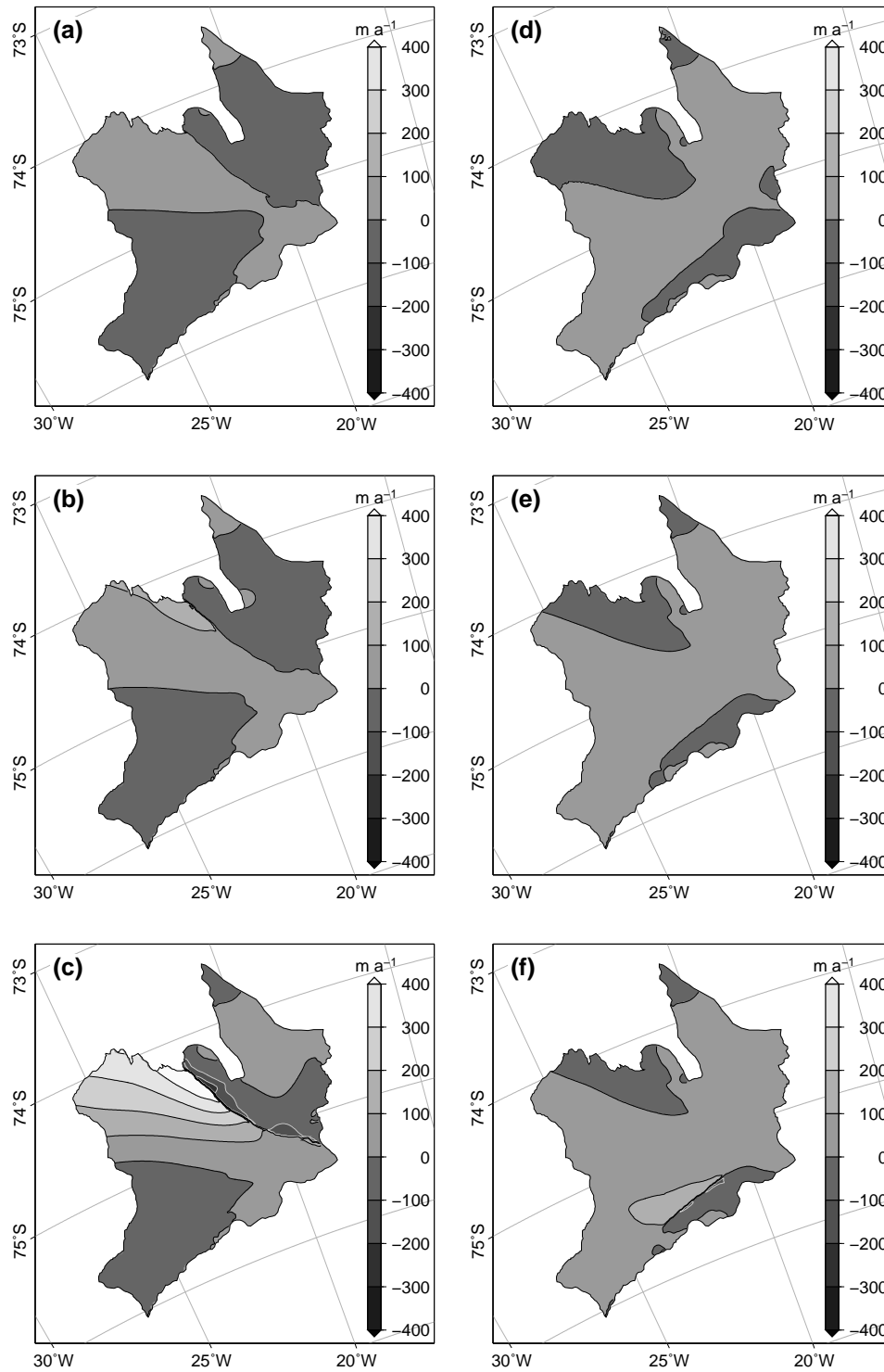
$u_{\text{SIM}}$  und  $u_{\text{BAS}}$  beträgt  $r^2 = 0.905$  bei einer mittleren quadratischen Abweichung (RMS) von  $61 \text{ m a}^{-1}$ . Die mittlere absolute Abweichung beträgt  $-0.13 \text{ m a}^{-1}$ . Außer für sehr hohe Geschwindigkeiten sind die simulierten Geschwindigkeiten niedriger als die gemessenen. Das simulierte Geschwindigkeitsfeld (Abb. 3.4b) zeigt hohe Werte im SWIT mit dem Maximum an der Eisfront von  $2092 \text{ m a}^{-1}$ , das über dem Maximum der gemessenen Geschwindigkeiten  $u_{\text{CCRS}}$  von  $1315 \text{ m a}^{-1}$  in dieser Region liegt. Die simulierten Geschwindigkeiten des SWIT

variieren in Fließrichtung deutlich stärker als die gemessenen  $u_{\text{CCRS}}$  (Abb. 3.3b), welche in dieser Richtung unmittelbar nach der Übergangszone vom Inlandeis nur um 200 bis 250  $\text{m a}^{-1}$  variieren. Eine sprunghafte Verringerung der Geschwindigkeit zwischen der westlichen und östlichen Seite des Risses 1, wie sie in den Geschwindigkeiten  $u_{\text{CCRS}}$  zu beobachten ist, tritt hier nicht auf.

## 3.5 Einfluss der Risse auf das Fließfeld

### 3.5.1 Riss 1

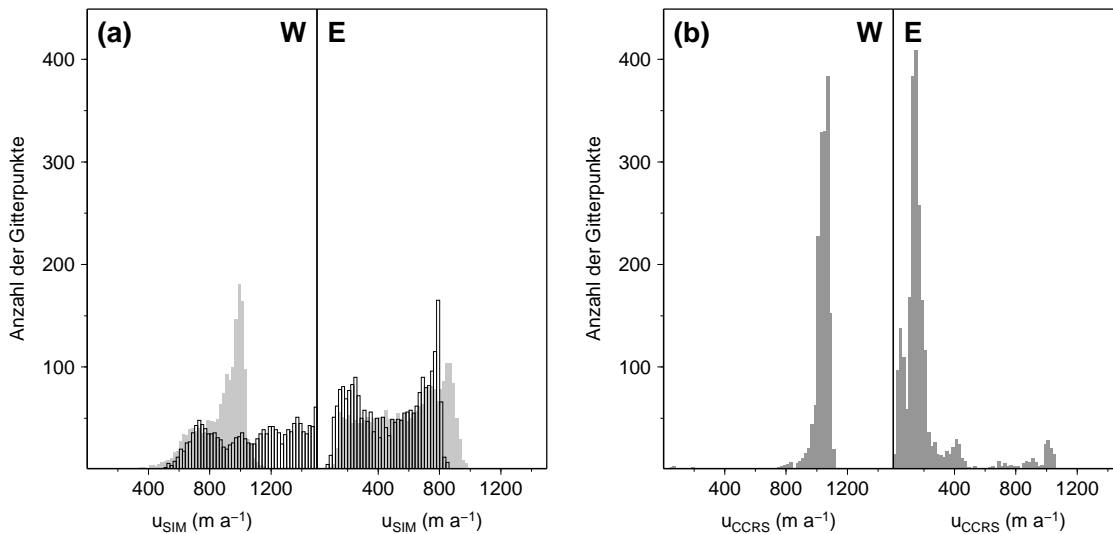
In einer Serie von Experimenten mit variierendem Kopplungsparameter  $a$  zwischen 0.1 und 0.9 in Schritten von 0.1 wird zunächst der Einfluss des zwischen SWIT und RLIS gelegenen Risses 1 (siehe Abb. 3.2b) auf das Fließfeld betrachtet. Die Ergebnisse dieser Simulationen sind exemplarisch für starke ( $a = 0.9$ ), moderate ( $a = 0.5$ ) und schwache ( $a = 0.1$ ) Kopplungen in Abbildung 3.5a bis 3.5c dargestellt. Es wird jeweils die Differenz zum Referenzexperiment (Abb. 3.4) betrachtet.



**Abbildung 3.5:** Änderung der simulierten Geschwindigkeiten im Vergleich zum Referenzexperiment in  $\text{m a}^{-1}$ . Die Teilabbildungen (a) bis (c) zeigen die Ergebnisse für Simulationen, bei denen der Riss 1 mit dem Kopplungsparameter  $a = 0.9, 0.5$  und  $0.1$  (von  $a$  nach  $c$ ) berücksichtigt ist. Die Ergebnisse der Simulation für Riss 2 sind mit den gleichen Abstufungen von  $a$  in den Teilabbildungen (d) bis (f) dargestellt. In allen Fällen beträgt der Isolinienabstand  $100 \text{ m a}^{-1}$ . Negative Differenzen werden durch weiße und positive durch schwarze Isolinien markiert.



Mit zunehmender Entkopplung der Eisregionen SWIT und RLIS entlang von Riss 1 vergrößert sich der Betrag der Geschwindigkeit um bis zu  $756 \text{ m a}^{-1}$  im Bereich der meerseitigen Begrenzung des Risses in Richtung SWIT (Abb. 3.5c). Die größte Abnahme der Geschwindigkeit kann in derselben Region allerdings auf der dem RLIS zugewandten Seite des Risses beobachtet werden. Insgesamt beschränken sich die Veränderungen des Fließfeldes auf die Eiszunge (SWIT) und die unmittelbar an den Riss angrenzenden Regionen des RLIS. Durch die Entkopplung entlang des Risses werden die Geschwindigkeitskontraste größer. Eine sprunghafte Veränderung der Geschwindigkeit kann jedoch nicht in dem Maße beobachtet werden, wie es die CCRS-Daten zeigen. Der Effekt des Risses wird in einer Zone von etwa 40 km um den Riss 1 (gestrichelte Linie in Abb. 3.2b) weiter betrachtet. Im westlichen Teil der Zone nimmt die mittlere Geschwindigkeit im Fall der schwachen Kopplung ( $a = 0.1$ , Abb. 3.5c) von  $876$  auf  $1102 \text{ m a}^{-1}$  zu. Sie ist damit näher am Mittelwert der InSAR-Geschwindigkeiten  $u_{\text{CCRS}}$ , der  $1001 \text{ m a}^{-1}$  beträgt. Im östlich des Risses gelegenen Teil nimmt sie dagegen von  $577$  auf  $487 \text{ m a}^{-1}$  ab. Sie liegt damit noch immer deutlich über dem Mittelwert der  $u_{\text{CCRS}}$ -Geschwindigkeiten, der in diesem Bereich  $211 \text{ m a}^{-1}$  beträgt. In Abbildung 3.6 sind die Häufigkeitsverteilungen der (a) simulierten sowie der (b) gemessenen Geschwindigkeiten auf beiden Seiten östlich (E) und westlich (W) des Risses 1 dargestellt. Westlich des Risses zeigen die



**Abbildung 3.6:** Häufigkeitsverteilungen der (a) simulierten und (b) gemessenen Geschwindigkeiten in einem Gebiet mit etwa 20 km Abstand zum Riss 1 (siehe Abb. 3.2b). Die Geschwindigkeiten der Referenzsimulation sind grau und die bei starker Entkopplung ( $a = 0.1$ ) schwarz umrandet in (a) dargestellt. Die Bezeichnungen E und W beziehen sich auf die Regionen östlich und westlich des Risses.

simulierten Geschwindigkeiten bei starker Entkopplung eine deutliche Verschiebung zu Werten über  $1000 \text{ m a}^{-1}$ . Die Verbreiterung der Verteilung westlich von Riss 1 gegenüber der Referenzsimulation deutet darauf hin, dass das Eis in der Region SWIT durch die Wahl des Fließparameters  $E_s B$ , der an die Geschwindigkeiten im BIS angepasst wurde, zu weich angenommen ist. Östlich des Risses nehmen die Geschwindigkeiten ab. Abbildung 3.6b zeigt die Verteilungen der gemessenen Geschwindigkeiten  $u_{\text{CCRS}}$  von Gray (2001) in der Region um

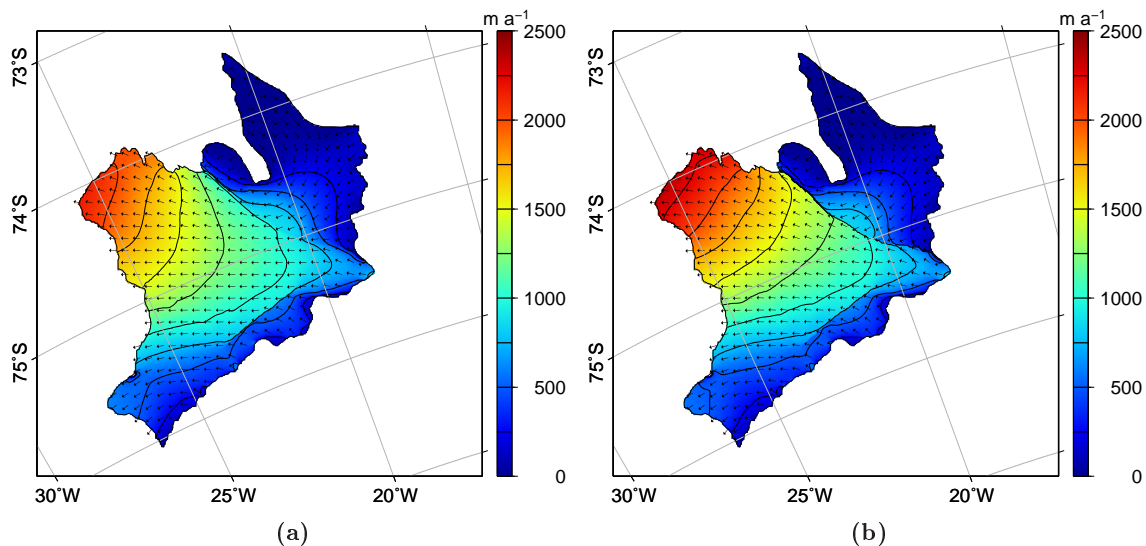
den Riss. Die Verteilungen fallen auf beiden Seiten des Risses deutlich schmäler aus als die der simulierten Geschwindigkeiten. Westlich des Risses tritt die Spitze der Verteilung bei etwa  $1050 \text{ m a}^{-1}$  auf. Der überwiegende Teil der Gitterpunkte in diesem Gebiet hat eine scharf abgegrenzte Geschwindigkeit zwischen etwa  $900$  und  $1100 \text{ m a}^{-1}$ . Im Gegensatz zu den Simulationsergebnissen weisen nur sehr wenige Gitterpunkte östlich des Risses Geschwindigkeiten über  $400 \text{ m a}^{-1}$  auf.

### 3.5.2 Riss 2

Für die Betrachtung des Einflusses von Riss 2 auf das Fließfeld wird der Kopplungsparameter  $a$  in den gleichen Abstufungen wie in Kapitel 3.5.1 variiert. Die Ergebnisse der Simulationen sind auf der rechten Seite von Abbildung 3.5 zusammengefasst. In den einzelnen Abbildungen 3.5d bis 3.5f ist jeweils die Differenz der Geschwindigkeit zum Referenzexperiment (Abb. 3.4) dargestellt. Der Einfluss des Risses auf das Fließfeld ist am stärksten in der heterogenen Zone zwischen BIS und SWIT. Die zunehmende Entkopplung bewirkt abnehmende Geschwindigkeiten in dem Gebiet zwischen der Aufsetzlinie und der Rissposition sowie zunehmende Geschwindigkeiten ( $204 \text{ m a}^{-1}$  für  $a = 0.1$ ) in die entgegengesetzte Richtung.

### 3.5.3 Riss 1 und Riss 2

Die Kombination der Kopplungsparameter für Riss 1 und Riss 2 wurde so gewählt, dass eine gute Übereinstimmung zu den  $u_{\text{BAS}}$ -Daten erreicht wurde. Dazu ist eine moderate Entkopplung ( $a = 0.5$ ) an Riss 1 und eine starke Entkopplung ( $a = 0.1$ ) an Riss 2 für die Anpassung nötig. Die Ergebnisse dieses Experiments sind in Abbildung 3.7 dargestellt. Der sprunghafte



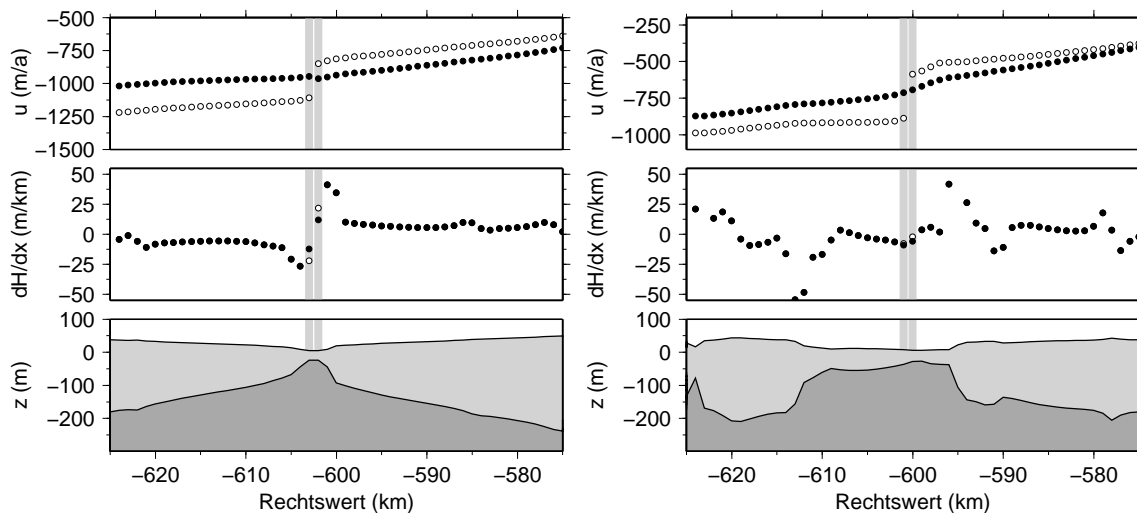
**Abbildung 3.7:** Modellierte Geschwindigkeiten in  $\text{m a}^{-1}$  für Experimente, die beide Risse berücksichtigen: (a) Riss 2 ist stark ( $a = 0.1$ ) und Riss 1 moderat ( $a = 0.5$ ) entkoppelt, (b) beide Risse sind stark entkoppelt ( $a = 0.1$ ). Der Isolinienabstand beträgt  $250 \text{ m a}^{-1}$ . Die Pfeile (nicht längenskaliert) geben die Fließrichtung an.

Geschwindigkeitsanstieg über Riss 1 kann mit moderater Kopplung ( $a = 0.5$ ) nicht in dem Maße erreicht werden, wie sie die gemessenen  $u_{\text{CCRS}}$ -Geschwindigkeiten zeigen (Abb. 3.7a).

Auf der anderen Seite werden die Geschwindigkeiten der Eiszunge (SWIT) bei noch geringerer Kopplung unrealistisch hoch (Abb. 3.7b).

### 3.6 Diskussion und Motivation eines Stokes-Modells

In Abbildung 3.8 sind Querprofile der Eisgeometrie (unten), des Eismächtigkeitsgradienten (Mitte) und der simulierten Geschwindigkeit (oben) in Profilrichtung für (a) Riss 1 und (b) Riss 2 jeweils für die Referenzsimulation (schwarze Punkte) und starke Entkopplung mit  $a = 0.1$  (weiße Punkte) dargestellt. Die Positionen der Gitterzellen, an denen die Ableitungen entkoppelt werden, sind grau hinterlegt. Die Profile verlaufen in  $x$ -Richtung und ihre Positionen sind in Abbildung 3.2b eingezeichnet. Der durch die Entkopplung entstehende Sprung



**Abbildung 3.8:** Querprofil über Riss 1 (links) und Riss 2 (rechts) entlang der Linien A und B in Abb. 3.2b. Von unten nach oben sind die Eisgeometrie, der Gradient der Eismächtigkeit  $\frac{\partial H}{\partial x}$  und die Geschwindigkeit  $u$  in Profilrichtung dargestellt. Schwarze Punkte entsprechen der Referenzsimulation ( $a = 1$ ) und weiße Punkte gehören zum Experiment mit starker Entkopplung ( $a = 0.1$ ).

der Geschwindigkeiten ist für beide Risse gut sichtbar. Der Einfluss der Entkopplung auf den Eismächtigkeitsgradienten fällt an Riss 2 deutlich geringer aus als an Riss 1, da der Gradient insgesamt kleiner ist. Die Entkopplung der Eisbereiche ist auf die Entkopplung der Geschwindigkeiten durch das gewichtete Diskretisierungsschema zurückzuführen. An Riss 1 wird der Betrag des Eismächtigkeitsgradienten durch die Entkopplung auf beiden Seiten des Risses größer (Abb. 3.8a) statt kleiner, wie in Abb. 3.1 dargestellt. Der Einfluss der Mächtigkeitsentkopplung auf das Fließfeld ist kaum vorhersagbar, weil je nach Positionierung des Risses der Gradient und damit der Antriebsterm in Gl. 3.2a und 3.2b durch Entkopplung größer oder kleiner werden kann.

In den vorangegangenen Kapiteln ist die Implementation der Risse in das zweidimensionale numerische Fließmodell beschrieben. Es zeigt sich, dass die Übereinstimmung mit der Struktur des gemessenen Fließfeldes mit der Methode zur Rissimplementation verbessert wird. Dennoch zeigt die Vergleichsstudie (Kleiner et al. 2008; Humbert et al. 2009) auch, dass die thermodynamische Komponente unterrepräsentiert ist und verbessert werden muss. Aus diesem Grund

ist eine Erweiterung des Modelliergebiets auf das in das Schelfeis strömende Inlandeis notwendig. Dies bedingt jedoch eine enorme flächenhafte Ausdehnung des Rechengebiets, da der Großteil des Einstromgebiets des Stancomb-Wills-Eisstroms sowie weitere Zustromgebiete des Brunt-Schelfeises miteinbezogen werden müssen. Die Ausweitung des Rechengebiets auf diese Fläche legt es nahe, eine Erweiterung in den Osten miteinzubeziehen, um so die komplette Schelfeisfläche inklusive des Riiser-Larsen-Schelfeises bis zu ihrer Begrenzung im Osten durch das Kap Norvegia zu simulieren.

Das an der Universität Münster entwickelte dreidimensionale Inlandeis- und Schelfeismodell (Sandhäger 2000) ist aufgrund seines Lösungsverfahrens (*shooting*) auf die im Übergangsbereich zwischen Inlandeis und Schelfeis auftretenden hohen Oberflächen- und Eismächtigkeitsgradienten jedoch nicht anwendbar (Blatter 1995; Klauke 2006; Breuer 2007). Die Entwicklung eines neuen dreidimensionalen Fließmodells, welches die Impulsbilanzgleichung (Stokes-Gleichung, Gl. 2.10) ohne Näherungen bezüglich der berücksichtigten Spannungsterme löst, steht daher im Zentrum dieser Arbeit und bildet den Inhalt der folgenden Kapitel.

# Kapitel 4

## Das numerische Fließmodell TIM-FD<sup>3</sup>

### 4.1 Feldgleichungen des Eismodells

Ausgehend von den kontinuumsmechanischen Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie aus Kapitel 2.1 und den dazugehörigen Randbedingungen aus Kap. 2.3 werden im Folgenden die daraus resultierenden Feldgleichungen für die Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes,  $u$ ,  $v$  und  $w$ , für die vertikale resistive Longitudinalspannung  $R_{zz}$ , für die Temperatur  $T$  sowie für die Eismächtigkeit  $H$  vorgestellt.

#### 4.1.1 Horizontale Geschwindigkeit

Bezogen auf das kartesische Koordinatensystem lauten die einzelnen Komponenten der Impulsbilanzgleichung (Gl. 2.10)

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} - p) + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{xz} = 0, \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yy} - p) + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{yz} = 0 \quad \text{und} \quad (4.1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zz} - p) = \rho g, \quad (4.1c)$$

wobei  $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$  der Betrag der Erdbeschleunigung ist. Durch Integration der Vertikal-komponente der Stokes-Gleichung (Gl. 4.1c) von der Position  $z$  im Eiskörper bis zur Oberfläche  $z_s$ ,

$$\int_z^{z_s} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dz' + \int_z^{z_s} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dz' + \int_z^{z_s} \frac{\partial (\tau_{zz} - p)}{\partial z} dz' = g \int_z^{z_s} \rho(z') dz', \quad (4.2)$$

Vertauschung der Reihenfolge von Integration und Differentiation mit der Leibniz-Regel<sup>1</sup>, Anwendung der Oberflächenrandbedingung (Gl. 4.12c) und unter Berücksichtigung der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes ( $\text{div } \mathbf{u} = \text{tr } \mathbf{T} = 0$ ) kann man erkennen, dass sich der isotope Druck aus einem dynamischen Anteil  $p_d$  und einem hydrostatischen Anteil  $p_h$

---

<sup>1</sup> Leibniz-Regel (Bronstein und Semendjajew 1991):

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial f(x, z, \dots)}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_1}^{z_2} f(x, z, \dots) dz - f(x, z_2, \dots) \frac{\partial z_2}{\partial x} + f(x, z_1, \dots) \frac{\partial z_1}{\partial x}$$

zusammensetzt:

$$p = \underbrace{-\tau_{xx} - \tau_{yy} - \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{z_s} \tau_{xz} dz' - \frac{\partial}{\partial y} \int_z^{z_s} \tau_{yz} dz'}_{p_d} + \underbrace{g \int_z^{z_s} \rho(z') dz'}_{p_h}. \quad (4.3)$$

Alternativ kann jetzt auch die vertikale Longitudinalspannung geschrieben werden als

$$\sigma_{zz} = \tau_{zz} - p = R_{zz} - L \quad (4.4)$$

mit

$$R_{zz} = \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{z_s} \tau_{xz} dz' + \frac{\partial}{\partial y} \int_z^{z_s} \tau_{yz} dz' \quad \text{und} \quad L = g \int_z^{z_s} \rho(z') dz'. \quad (4.5)$$

Die Benennung der Terme  $R_{zz}$  und  $L$  geht auf van der Veen und Whillans (1989a) zurück und ist Ausdruck einer alternativen Aufspaltung des Spannungstensors in einen sogenannten resistiven und einen hydrostatischen Anteil:

$$\mathbf{S} = \mathbf{R} - L\mathbf{I}. \quad (4.6)$$

Da sich Eis duktil verhält, ist die vertikale Normalspannung  $\sigma_{zz}$  immer nahezu gleich der hydrostatischen Auflast. Der Term  $R_{zz}$  ist daher sehr klein. Er spielt aber in kleinskaligen, topographisch unruhigen Gebieten nahe der Eisunterseite oder im Bereich der Aufsetzzone eine Rolle und wird daher im Rahmen dieser Arbeit nicht vernachlässigt.

Eine in Eismodellen höherer Ordnung häufig verwendete Näherung (Blatter 1995; Pattyn 2003) geht davon aus, dass die horizontalen Ableitungen der vertikalen Scherspannungen  $\tau_{xz}$  und  $\tau_{yz}$  vernachlässigt werden können, wodurch die vertikale resistive Longitudinalspannung  $R_{zz} \approx 0$  (Gl. 4.5) wird. Zusätzlich wird angenommen, dass die horizontalen Gradienten der vertikalen Geschwindigkeit bei der Berechnung der vertikalen Scherspannung vernachlässigt werden können:

$$\tau_{xz} \approx \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad \text{und} \quad \tau_{yz} \approx \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right). \quad (4.7)$$

Modelle dieser Art werden nach Hindmarsh (2004) als LMLa-Modelle bezeichnet, d.h. es findet eine Näherung der Longitudinalspannung statt, die auf mehreren vertikalen Schichten (*multi layer*) erfolgt. Da in dieser Arbeit speziell die dynamischen Verhältnisse im Übergang vom Inlandeis zum Schelfeis betrachtet werden, sind diese Näherungen nicht zulässig (Herterich 1987; van der Veen und Whillans 1989a). Daher wird auf die LTSML-Näherung (Hindmarsh 2004) zurückgegriffen oder die Stokes-Gleichung näherungsfrei verwendet (*full Stokes*). In der LTSML-Näherung wird im Gegensatz zur LMLa-Näherung die vertikale resistive Longitudinalspannung nicht vernachlässigt, sondern durch

$$R_{zz} = \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{z_s} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dz' + \frac{\partial}{\partial y} \int_z^{z_s} \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dz' \quad (4.8)$$

angenähert (Mayer 1996; Sandhäger 2000). Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Fließmodell kann sowohl als LTSML- als auch als *full-Stokes*-Modell eingesetzt werden.

Die Aufspaltung des Drucks in seine dynamischen und hydrostatischen Anteile sowie die Einführung der vertikalen resistiven Longitudinalspannung ermöglicht es, den Druck in den Gleichungen für den horizontalen Impulstransport zu eliminieren. Die damit aus den Gleichungen 4.1a und 4.1b resultierende Form der Stokes Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} (2\tau_{xx} + \tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} (L - R_{zz}) \quad (4.9a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xx} + 2\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} (L - R_{zz}) \quad (4.9b)$$

kann nun genutzt werden, um das horizontale Geschwindigkeitsfeld im Inneren des Eiskörpers zu berechnen. Mit dem Fließgesetz (Gl. 2.22) und der Definition des Deformationsratentensors (Gl. 2.18) ergeben sich aus Gleichung 4.9a und Gleichung 4.9b die Gleichungen für die Horizontalkomponenten  $u$  und  $v$  des Geschwindigkeitsfeldes im Inneren des Eiskörpers ( $z_b < z < z_s$ ):

$$4\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} L - \frac{\partial}{\partial x} R_{zz} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 4\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} L - \frac{\partial}{\partial y} R_{zz} - 2\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (4.11)$$

### Eisoberseite

An der Eisoberseite  $z = z_s$  ergibt die Anwendung des Tensor-Vektor-Produktes in Gleichung 2.43 unter Verwendung des Spannungsdeviators folgende drei Gleichungen:

$$-(\tau_{xx} - p) \frac{\partial z_s}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial z_s}{\partial y} + \tau_{xz} = 0, \quad (4.12a)$$

$$-\tau_{xy} \frac{\partial z_s}{\partial x} - (\tau_{yy} - p) \frac{\partial z_s}{\partial y} + \tau_{yz} = 0 \quad \text{und} \quad (4.12b)$$

$$-\tau_{xz} \frac{\partial z_s}{\partial x} - \tau_{yz} \frac{\partial z_s}{\partial y} + (\tau_{zz} - p) = 0. \quad (4.12c)$$

Wird der Druck aus Gleichung 4.12c in die verbleibenden Gleichungen 4.12a und 4.12b eingesetzt, so ergeben sich

$$\left( 2\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{xz} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial z_s}{\partial y} \right) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial z_s}{\partial y} - \tau_{xz} = 0 \quad \text{und} \quad (4.13a)$$

$$\tau_{xy} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \left( \tau_{xx} + 2\tau_{yy} + \tau_{xz} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial z_s}{\partial y} \right) \frac{\partial z_s}{\partial y} - \tau_{yz} = 0 \quad (4.13b)$$

als horizontale Spannungsrandbedingungen. Die einzelnen Terme können mit Hilfe des Fließgesetzes (Gl. 2.22) in Deformationsraten und diese dann in Gradienten der Geschwindigkeit

umgeschrieben werden, wodurch sich die Neumann-Randbedingungen

$$4 \frac{\partial z_s}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z_s}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \left( \frac{\partial z_s}{\partial x} \right)^2 - 1 \right) \frac{\partial u}{\partial z} =$$

$$- \frac{\partial z_s}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial z_s}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial z_s}{\partial x} \frac{\partial z_s}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \left( \left( \frac{\partial z_s}{\partial x} \right)^2 - 1 \right) \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial z_s}{\partial x} \frac{\partial z_s}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y}$$
(4.14a)

und

$$\frac{\partial z_s}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + 4 \frac{\partial z_s}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \left( \frac{\partial z_s}{\partial y} \right)^2 - 1 \right) \frac{\partial v}{\partial z} =$$

$$- 2 \frac{\partial z_s}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial z_s}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial z_s}{\partial x} \frac{\partial z_s}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial z_s}{\partial x} \frac{\partial z_s}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \left( \left( \frac{\partial z_s}{\partial y} \right)^2 - 1 \right) \frac{\partial w}{\partial y}$$
(4.14b)

als Bestimmungsgleichungen für  $u$  und  $v$  an der Eisoberseite ergeben.

### Eisbasis

Die einzelnen Komponenten der dynamischen Randbedingung an der Schelfeisbasis sind nach Gleichung 2.52

$$(\tau_{xx} - p) \frac{\partial z_b}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \tau_{xz} = -\bar{\rho} g H \frac{\partial z_b}{\partial x},$$
(4.15a)

$$\tau_{xy} \frac{\partial z_b}{\partial x} + (\tau_{yy} - p) \frac{\partial z_b}{\partial y} - \tau_{yz} = -\bar{\rho} g H \frac{\partial z_b}{\partial y} \quad \text{und}$$
(4.15b)

$$\tau_{xz} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial z_b}{\partial y} - (\tau_{zz} - p) = \bar{\rho} g H.$$
(4.15c)

Mit Hilfe von Gleichung 4.15c ist es möglich, den Druck in den beiden Gleichungen für den horizontalen Impulstransport (Gl. 4.15a, Gl. 4.15b) zu ersetzen, so dass

$$\left( 2\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{xz} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial z_b}{\partial y} \right) \frac{\partial z_b}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \tau_{xz} = 0 \quad \text{und}$$
(4.16a)

$$\tau_{xy} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \left( \tau_{xx} + 2\tau_{yy} + \tau_{xz} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial z_b}{\partial y} \right) \frac{\partial z_b}{\partial y} - \tau_{yz} = 0$$
(4.16b)

die Spannungsrandbedingungen für den horizontalen Impulstransport an der Eisbasis sind (MacAyeal 1997; Pattyn 2008). Ist die Eisbasis nicht scherspannungsfrei, folgt in analoger Weise die Randbedingung der gegründeten Eisbasis (Pattyn 2008):

$$\left( 2\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{xz} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial z_b}{\partial y} \right) \frac{\partial z_b}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \tau_{xz} = \beta^2 u \quad \text{und}$$
(4.17a)

$$\tau_{xy} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \left( \tau_{xx} + 2\tau_{yy} + \tau_{xz} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial z_b}{\partial y} \right) \frac{\partial z_b}{\partial y} - \tau_{yz} = \beta^2 v.$$
(4.17b)



Die Neumann-Randbedingungen für das horizontale Geschwindigkeitsfeld an der Eisbasis erhält man analog zu den Umformungen der Randbedingungen an der Eisoberseite:

$$4 \frac{\partial z_b}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z_b}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} \right)^2 - 1 \right) \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\beta^2 u}{\mu} \quad (4.18a)$$

$$- \frac{\partial z_b}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial z_b}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial z_b}{\partial x} \frac{\partial z_b}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \left( \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} \right)^2 - 1 \right) \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial z_b}{\partial x} \frac{\partial z_b}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y}$$

und

$$\frac{\partial z_b}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + 4 \frac{\partial z_b}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \left( \frac{\partial z_b}{\partial y} \right)^2 - 1 \right) \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\beta^2 v}{\mu} \quad (4.18b)$$

$$- 2 \frac{\partial z_b}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial z_b}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial z_b}{\partial x} \frac{\partial z_b}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial z_b}{\partial x} \frac{\partial z_b}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \left( \left( \frac{\partial z_b}{\partial y} \right)^2 - 1 \right) \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Für die Bedingungen an der Schelfeisbasis ist  $\beta^2 = 0$  zu setzen.

### Schelfeisfront

Ausgehend von dem Kräftegleichgewicht aus Kapitel 2.3.3 wird exemplarisch eine in  $y$ -Richtung verlaufende Schelfeiskante betrachtet, deren Normalenvektor in positive  $x$ -Richtung  $\mathbf{n}_{cf} = \mathbf{n}_x$  zeigt. In dieser Geometrie vereinfacht sich das Tensor-Vektor-Produkt auf der linken Seite von Gleichung 2.70 zu

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_x = (\tau_{xx} - p) \mathbf{n}_x, \quad (4.19)$$

wobei die für Schelfeise übliche Annahme gemacht wurde, dass  $\sigma_{xz} \approx 0$  ist. Dadurch reduziert sich die vektorwertige Gleichung 2.70 auf

$$\int_{z_b}^{z_s} (\tau_{xx} - p) dz = -\frac{\rho_{sw}}{2} g \left( \frac{\bar{\rho}}{\rho_{sw}} H \right)^2. \quad (4.20)$$

Die Position der Schelfeiskante ist weit genug vom Einfluss der Aufsetzzone entfernt, so dass Stützeffekte im Eis vernachlässigt werden können ( $R_{zz} \approx 0$ , Gl. 4.5). In diesem Fall ist die vertikale Longitudinalspannung  $\sigma_{zz}$  nach Gleichung 4.4 und Gleichung 4.5 hydrostatisch und entspricht dem Gewicht der aufliegenden Eissäule:

$$\sigma_{zz} = \tau_{zz} - p = -L. \quad (4.21)$$

Wird weiterhin die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes ausgenutzt ( $-\tau_{zz} = \tau_{xx} + \tau_{yy}$ ), so folgt für die linke Seite von Gleichung 4.20

$$\int_{z_b}^{z_s} (\tau_{xx} - p) dz = \int_{z_b}^{z_s} (2\tau_{xx} + \tau_{yy} - L) dz = H (2\tau_{xx} + \tau_{yy}) - \bar{\rho} g \frac{H^2}{2} \quad (4.22)$$

und der Vergleich mit Gleichung 4.20 liefert

$$2\tau_{xx} + \tau_{yy} = \frac{\bar{\rho} g H}{2} \left( 1 - \frac{\bar{\rho}}{\rho_{sw}} \right). \quad (4.23)$$

Werden in Gleichung 4.23 die deviatorischen Spannungen mit dem Glen'schen Fließgesetz (Gl. 2.22) durch Deformationsraten ersetzt und diese dann weiter durch die Gradienten der Geschwindigkeit, erhält man folgende Neumann-Randbedingung für die Geschwindigkeitskomponente in Richtung des Normalenvektors, die hier der Fließgeschwindigkeitskomponente  $u$  entspricht:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\text{cf}} = \frac{\bar{\rho}gH}{8\bar{\mu}} \left( 1 - \frac{\bar{\rho}}{\rho_{\text{sw}}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} = G - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (4.24)$$

Unter Berücksichtigung, dass an der Eisfront keine horizontalen Scherdeformationen auftreten können ( $\dot{\epsilon}_{xy} = 0$ ), liefert die Definitionsgleichung der Deformationsraten (Gl. 2.18) unmittelbar die Neumann-Randbedingung für die orthogonale Geschwindigkeitskomponente (hier  $v$ ):

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{\text{cf}} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.25)$$

Die Gleichungen 4.24 und 4.25 sind Neumann-Randbedingungen für die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  für den Fall  $\mathbf{n}_{\text{cf}} = \mathbf{n}_x$ .

### 4.1.2 Vertikale Geschwindigkeit

Die vertikale Geschwindigkeitskomponente  $w$  ergibt sich durch Integration der Kontinuitätsgleichung (Gl. 2.5) von der Eisbasis  $z_b$  bis zur Höhe  $z$  innerhalb des Eises:

$$\int_{z_b}^z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz' + w(z) - w(z_b) = 0. \quad (4.26)$$

Die Geschwindigkeit  $w_b = w(z_b)$  kann durch die kinematische Randbedingung an der Eisbasis (Gl. 2.49) bestimmt werden. Somit folgt dann für die vertikale Geschwindigkeit

$$w(z) = - \int_{z_b}^z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz' + w_b \quad \text{mit} \quad w_b = \frac{\partial z_b}{\partial t} + u \frac{\partial z_b}{\partial x} + v \frac{\partial z_b}{\partial y} - a_b. \quad (4.27)$$

Eine zeitlich veränderliche Deformation des Felsbettes aufgrund von isostatischen Ausgleichsbewegungen durch veränderte Auflast soll in dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden, d.h.  $\partial_t z_b = 0$  für alle gegründeten Bereiche des Eises. Im Schelfeis ist die zeitliche Änderung der Höhe der Eisbasis direkt mit der zeitlichen Änderung der Eisdicke durch das Schwimmgleichgewicht verknüpft.

### 4.1.3 Temperatur

Die spezifische Wärmekapazität  $c_p$  und Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  variieren mit dem Ort im Eis und hängen im Allgemeinen von der Dichte und der Temperatur ab. Nach Paterson (1994) kann die Wärmemenge vernachlässigt werden, die benötigt wird, um die im Eis eingeschlossene Luft zu erwärmen, wodurch  $c_p$  nur von der Temperatur abhängt und mit der empirischen Formel

$$c_p(T) = a + b T \quad \text{mit} \quad a = 152.5 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad \text{und} \quad b = 7.122 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-2} \quad (4.28)$$

berechnet werden kann. In dem für Randbereiche der Antarktis typischen Temperaturbereich von  $-40^\circ\text{C}$  bis  $0^\circ\text{C}$  beträgt die Variation von  $c_p$  etwa 14%. Die Dichteabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit ist nur in der Firnschicht signifikant (Paterson 1994) und wird hier vernachlässigt. Die verbleibende Temperaturabhängigkeit von  $\kappa$  kann durch die ebenfalls empirische Beziehung

$$\kappa(T) = a e^{-bT} \quad \text{mit} \quad a = 9.828 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1} \quad \text{und} \quad b = 5.7 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1} \quad (4.29)$$

approximiert werden (Paterson 1994). Die Variationen im oben genannten Temperaturintervall betragen dann etwa 20%. Die Wärmeleitfähigkeit variiert überwiegend in vertikaler Richtung. In der Wärmetransportgleichung werden daher horizontale Variationen von  $\kappa$  vernachlässigt:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial z} = \underbrace{\frac{\partial \kappa}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}}_{\approx 0} + \frac{\partial \kappa}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \kappa}{\partial x} = \frac{\partial \kappa}{\partial y} = 0. \quad (4.30)$$

Die horizontale Wärmeleitung kann sowohl im Inlandeis (Huybrechts 1992) als auch im Schelfeis (Grosfeld 1993) vernachlässigt werden. Nach Greve und Blatter (2009) ist das Verhältnis von horizontaler zu vertikaler Diffusion etwa  $10^{-6}$ . Werden die genannten Näherungen berücksichtigt, vereinfacht sich die Wärmetransportgleichung (Gl. 2.16) zu

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y} - \left( w - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial \kappa}{\partial z} \right) \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\kappa}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\psi}{\rho c_p}. \quad (4.31)$$

Der Term  $\partial \kappa / \partial z$  liefert einen zusätzlichen Beitrag zur vertikalen Advektion und führt zu einer geringfügig niedrigeren Temperatur an der Eisbasis im Vergleich zur Temperatur mit konstanter thermischer Leitfähigkeit. Die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit ist besonders im Bereich der Eisbasis wichtig, wo die Temperaturgradienten am stärksten und die vertikalen Geschwindigkeiten  $w$  des Eises am geringsten sind (Paterson 1994). Die interne Wärmeproduktion resultiert aus der Deformation des Eises, so dass mit Hilfe des Glen'schen Fließgesetzes die folgende Beziehung gilt (Greve und Blatter 2009):

$$\psi = \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}}) = 4\mu \dot{\epsilon}_e^2. \quad (4.32)$$

#### 4.1.4 Eismächtigkeit

Die Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Eismächtigkeit ist eine direkte Folge der Massenerhaltung im System. Diese wird ausgedrückt durch die Kontinuitätsbedingung für inkompressible Fluide (Gl. 2.5). Die vertikale Integration der Kontinuitätsbedingung von der Eisbasis  $z_b$  bis zur Eisoberfläche  $z_s$ ,

$$\int_{z_b}^{z_s} \text{div} \mathbf{u} \, dz = \int_{z_b}^{z_s} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial v}{\partial y} dz + w|_s - w|_b, \quad (4.33)$$

und anschließende Vertauschung der Integration und Differentiation mit Hilfe der Leibniz-Regel (siehe Fußnote 1, S. 31) führt schließlich zu

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} u \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} v \, dz - u|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} - v|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y} + w|_{z_s} + u|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} + v|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} - w|_{z_b} = 0. \quad (4.34)$$

Die Geschwindigkeiten des Eises an den freien Oberflächen werden durch die kinematischen Randbedingungen (Gl. 2.39 und Gl. 2.49) festgelegt, wodurch sich Gleichung 4.34 zu

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} v dz + \frac{\partial z_s}{\partial t} - a_s - \frac{\partial z_b}{\partial t} + a_b \quad (4.35)$$

vereinfachen lässt. Mit  $\partial_t H = \partial_t z_s - \partial_t z_b$  folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} u dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} v dz + a_s - a_b \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}H) - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}H) + a_s - a_b \\ &= -\operatorname{div}_h \mathbf{q} + a_s - a_b. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Gleichung 4.36 beschreibt eine zweidimensionale Diffusionsgleichung für die Eismächtigkeit, wobei  $\bar{u}$  und  $\bar{v}$  die vertikal gemittelten Horizontalgeschwindigkeiten und  $\operatorname{div}_h \mathbf{q}$  die horizontale Divergenz des diffusiven Volumenstromvektors  $\mathbf{q}$  sind (vgl. Oerlemans und van der Veen 1984; Paterson 1994).

## 4.2 Koordinatentransformation

Aufgrund der im Vergleich zum Erdradius geringen horizontalen Ausdehnung des Untersuchungsgebietes von wenigen hundert Kilometern kann die Krümmung der Erdoberfläche für die Beschreibung der Eiskörpergeometrie vernachlässigt werden. Es wird daher zunächst ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt, dessen  $z$ -Achse vertikal verläuft, d.h. antiparallel zur Schwerebeschleunigung  $\mathbf{g}$ , mit  $z = 0$  auf dem mittleren Meeresniveau. In diesem  $(x, y, z)$ -System wird die Form des Eiskörpers durch die Höhe der Eisoberseite über dem Meeresniveau  $z_s = h(x, y, t)$ , der Eismächtigkeit  $H(x, y, t)$  sowie der seitlichen Begrenzung eindeutig bestimmt. Durch die Angabe von Höhe und Mächtigkeit ist auch die Position der Eisbasis

$$z_b = h(x, y, t) - H(x, y, t) \quad (4.37)$$

festgelegt. Die Positionen von Eisoberfläche und Eisbasis sind von der Zeit abhängig. Sie werden als freie Oberflächen bezeichnet, wobei zu jedem Ort  $(x, y)$  nur jeweils eine Höhe der freien Oberfläche zugelassen wird. Diese Einschränkung ist für die Beschreibung des Eises nicht von Bedeutung, da zum Beispiel brechende Oberflächenwellen nicht berücksichtigt werden müssen. Eine explizite Zeitabhängigkeit der Eisbasis durch isostatische Ausgleichsbewegungen des Felsuntergrundes soll hier nicht betrachtet werden, so dass  $\partial_t z_b$  für alle gegründeten Bereiche gilt.

Für das angestrebte numerische Lösungsverfahren ist es nötig, den Eiskörper mit einem Rechengitter zu überlagern, welches von den einzelnen Berechnungsknoten aufgespannt wird. Die sich zeitlich ändernden freien Oberflächen fallen dabei im Allgemeinen nicht direkt auf die Berechnungsknoten, wodurch Fehler bei der Behandlung der Randbedingungen auftreten. Es ist daher zweckmäßig, ein zeitlich konstantes Koordinatensystem mit den krummlinigen Koordinaten des Ortes  $(\xi, \eta, \zeta)$  und der Zeit  $\tau$  zu wählen. Für eine beliebige skalare Feldgröße

$\phi(x, y, z, t)$  mit  $\phi \in \{u, v, w, T, R_{zz}, \dots\}$  erfolgt die Koordinatentransformation durch Wechsel der unabhängigen Variablen:

$$\phi = \phi(x, y, z, t) = \phi(x(\xi, \eta, \zeta, \tau), y(\xi, \eta, \zeta, \tau), z(\xi, \eta, \zeta, \tau), t(\xi, \eta, \zeta, \tau)). \quad (4.38)$$

Zusätzlich soll die Transformation an jedem regulären Punkt umkehrbar sein:

$$\begin{array}{ll} x = x(\xi, \eta, \zeta, \tau) & \xi = \xi(x, y, z, t) \\ y = y(\xi, \eta, \zeta, \tau) & \eta = \eta(x, y, z, t) \\ z = z(\xi, \eta, \zeta, \tau) & \zeta = \zeta(x, y, z, t) \\ t = t(\xi, \eta, \zeta, \tau) & \tau = \tau(x, y, z, t). \end{array} \quad \text{bzw.} \quad (4.39)$$

Die Koordinatentransformation wird auch auf die Komponenten der vektor- oder tensorwertigen Größen, nicht aber auf die Basisvektoren angewandt. Nach Ferziger und Perić (2002) ist diese Vorgehensweise weniger anfällig für numerische Fehler.

### 4.2.1 $\sigma$ -Koordinaten

Ein für die Art der Geometrie häufig verwendetes Koordinatensystem ist das  $\sigma$ -Koordinatensystem (vgl. Hindmarsh und Hutter 1988; Sandhäger 2000; Greve und Blatter 2009) mit der Transformationsvorschrift

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = \frac{z - z_b}{z_s - z_b} = \frac{z - (h(x, y, t) - H(x, y, t))}{H(x, y, t)} \quad \text{und} \quad \tau = t. \quad (4.40)$$

In ihm wird die vertikale  $\zeta$ -Achse zwischen der Eisbasis und Eisoberfläche auf das Einheitsintervall abgebildet, wobei die Eisoberfläche zu jedem Zeitpunkt durch die Ebene  $\zeta_s = 1$  und die Eisbasis durch  $\zeta_b = 0$  beschrieben wird. Es ist dabei zu beachten, dass die  $\sigma$ -Transformation nur in Gebieten gültig ist, in denen die Eismächtigkeit  $H > 0$  ist. Die Vektor- und Tensorelemente werden weiter bezüglich der kartesischen Basisvektoren betrachtet. Daher ist es notwendig, alle partiellen Ableitungen mit Hilfe der Kettenregel auf die neuen Koordinaten zu übertragen:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (4.41a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (4.41b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (4.41c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (4.41d)$$

Die dabei auftretenden partiellen Ableitungen der Koordinaten sind die Elemente der Jacobi-Matrix  $\mathbf{K} = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{\partial(x, y, z, t)}$  der Transformation. Für die  $\sigma$ -Transformation (Gl. 4.40) sind viele der

Koordinatenableitungen Null, wodurch sich Gleichung 4.41 zu

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{c_x}{H} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad c_x = (1 - \zeta) \frac{\partial H}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \xi} \quad (4.42a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{c_y}{H} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad c_y = (1 - \zeta) \frac{\partial H}{\partial \eta} - \frac{\partial h}{\partial \eta} \quad (4.42b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad (4.42c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{c_t}{H} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad c_t = (1 - \zeta) \frac{\partial H}{\partial \tau} - \frac{\partial h}{\partial \tau} \quad (4.42d)$$

vereinfacht. Die Terme  $c_x$ ,  $c_y$  und  $c_t$  sind für jeden Punkt im Eis zu berechnen und müssen, wird eine zeitabhängige Geometrie betrachtet, zu jedem Zeitpunkt neu bestimmt werden.

Es ist anzumerken, dass sich der Übergang zu den  $\sigma$ -Koordinaten auf alle Ableitungen auswirkt, obwohl sich die Koordinatentransformation auf die vertikale Richtung beschränkt. Für Variablen, die nicht von  $\zeta$  oder  $z$  abhängen (z.B.  $H$  und  $h$ ), ist die Transformation ohne Bedeutung, da sich deren Ableitungen nicht ändern. Der Übergang zu  $\sigma$ -Koordinaten erfolgt hier durch den Wechsel der unabhängigen Variablen:  $h(x, y, t) = h(\xi, \eta, \tau)$  und  $H(x, y, t) = H(\xi, \eta, \tau)$ .

#### 4.2.2 Rechenregeln

In diesem Abschnitt werden die in Kapitel 2.1 und Kapitel 4.1 benutzten Differentialoperatoren in ihrer für  $\sigma$ -Koordinaten gültigen Schreibweise eingeführt. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass nur die Koordinaten, nicht aber die Basisvektoren transformiert wurden, wodurch die sonst übliche Unterscheidung zwischen kovarianten und kontravarianten Basisvektoren sowie den dazugehörigen Vektor- und Tensorkomponenten entfällt (vgl. Ferziger und Perić 2002).

**Gradient:** Der räumliche Gradient einer skalaren Feldvariablen  $\phi(x, y, z, t)$  wurde bereits in Gleichung 4.42a zur Herleitung der Koordinatentransformation genutzt und lautet nach Anwendung der Kettenregel

$$\text{grad } \phi = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \right). \quad (4.43)$$

Der Gradient eines Vektors  $\mathbf{u}$  ist ein Tensor zweiter Stufe, dessen Komponenten sich nach

$$(\text{grad } \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \quad (4.44)$$

transformieren. Die Komponenten des Deformationsratentensors (Gl. 2.18) sind daher

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_k} \right). \quad (4.45)$$

**Divergenz:** Die Divergenz eines Vektors  $\mathbf{u}$  in  $\sigma$ -Koordinaten ist

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}. \quad (4.46)$$

Wird die physikalische Bedeutung des Divergenzoperators berücksichtigt, kann die Divergenz auch als

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( \sum_{i=1}^3 J \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} u_i \right) \quad (4.47)$$

in erhaltender Form geschrieben werden (Ferziger und Perić 2002). In diesem Fall ist  $J$  die Determinante der Jacobi-Matrix  $\mathbf{J} = \frac{\partial(x,y,z,t)}{\partial(\xi,\eta,\zeta,\tau)}$  und hat die Bedeutung eines Volumenzuwachses des infinitesimalen Volumenelements beim Wechsel von kartesischen zu  $\sigma$ -Koordinaten (z.B. Aris 1989). Im Fall der hier betrachteten  $\sigma$ -Transformation ist  $J = \det \mathbf{J} = H$ , wobei  $H$  die lokale Eismächtigkeit ist.

Die Divergenz eines Tensors zweiter Stufe  $\mathbf{T}$  mit den Elementen  $\tau_{ij}$  bezüglich der kartesischen Basisvektoren ist ein Vektor mit

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T} &= \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right] \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right] \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{1}{J} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left( J \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \tau_{ij} \right) \right] \mathbf{e}_i, \end{aligned} \quad (4.48)$$

wobei der letzte Ausdruck wieder der erhaltenden Form (vgl. Gl. 4.47) mit  $J = H(x, y, t)$  entspricht.

**Laplace:** Der Laplace-Operator als zweite räumliche Ableitung eines skalaren Feldes  $\phi$  kann als Spezialfall der allgemeineren Formulierung  $\operatorname{div}(a \operatorname{grad} \phi)$  betrachtet werden, wobei  $a$  ebenfalls vom Ort abhängt. Die Anwendung von Gleichung 4.47 auf Gleichung 4.43 führt zu

$$\operatorname{div}(a \operatorname{grad} \phi) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( \sum_{i=1}^3 J \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} a \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_k} \right). \quad (4.49)$$

Allgemein erhält man die zweite Ableitung  $\partial_{x_i}(a \partial_{x_k} \phi)$ , wenn man die Berechnungsvorschrift für die Divergenz eines Vektors (Gl. 4.47) auf einen Vektor anwendet, dessen  $i$ -te Komponente  $a \partial_{x_k} \phi$  ist (alle anderen sind Null):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( J \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} a \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( J \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} a \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} \right). \quad (4.50)$$

**Vertikale Integration:** Neben der Transformation der partiellen Ableitungen wird auch die Transformation der vertikalen Integration benötigt. Diese kann durch Anwendung der Substitutionsregel für Integrale (z.B. Bronstein und Semendjajew 1991) angegeben werden und lautet für eine beliebige Feldgröße  $\phi$

$$\int_{z_1}^{z_2} \phi dz = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \phi \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta = H \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \phi d\zeta. \quad (4.51)$$

### 4.3 Diskretisierung mit Finiten Differenzen

Für die numerische Lösung der aus der Kontinuumsmechanik resultierenden partiellen Differentialgleichungen ist es nötig, diese in eine diskrete Form zu überführen. Am weitesten verbreitet sind dafür die Finiten Differenzen (FD), die Finiten Volumen (FV) und die Finiten Elemente (FE). In der hier verwendeten Methode der Finiten Differenzen werden die partiellen Ableitungen durch Differenzenquotienten ersetzt, die aus der Taylor-Reihenentwicklung (Marsal 1976) oder aus Polynominterpolationen (Ferziger und Perić 2002) der gesuchten Funktion  $\phi(\xi, \eta, \zeta, \tau)$  abgeleitet werden. Die Methode der Finiten Differenzen ist in der Literatur (z.B. Marsal 1976; Press et al. 1992; Ferziger und Perić 2002; Date 2005) eingehend beschrieben. Hier werden daher nur die diskreten Schreibweisen der partiellen Ableitung aufgeführt, wie sie in den nachfolgenden Abschnitten für die Diskretisierung der Modellgleichungen aus Kap. 4.1 benötigt werden. Dazu wird das in  $\sigma$ -Koordinaten transformierte Modellgebiet mit einem achsenparallelen Rechtecknetz mit  $N_\xi$  und  $N_\eta$  horizontalen sowie  $N_\zeta$  vertikalen Geraden mit variablen Abständen überlagert. Das Netz erzeugt ein Rechteckgitter aus  $N_\xi \times N_\eta \times N_\zeta$  Punkten. Jeder Punkt in dem Gitter ist eindeutig durch ein Indextripel  $(i, j, k)$  gekennzeichnet;  $i$  ist der Laufindex in  $\xi$ -Richtung,  $j$  ist der Laufindex in  $\eta$ -Richtung und  $k$  ist der Laufindex in  $\zeta$ -Richtung.

Im Weiteren werden die in der numerischen Strömungsmechanik üblichen Bezeichnungen FDS (*forward difference scheme*), BDS (*backward difference scheme*) und CDS (*central difference scheme*) verwendet. Nach Payne und Dongelmans (1997) und Ferziger und Perić (2002) lauten die ersten Ableitungen zweiter Ordnung auf einem Gitter mit variierenden Abständen in  $\zeta$ -Richtung

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right)_k^{\text{FDS}} \approx \frac{\zeta_k - \zeta_{k+1}}{(\zeta_{k+1} - \zeta_{k+2})(\zeta_k - \zeta_{k+2})} \phi_{k+2} + \frac{\zeta_{k+2} - \zeta_k}{(\zeta_k - \zeta_{k+1})(\zeta_{k+1} - \zeta_{k+2})} \phi_{k+1} + \frac{2\zeta_k - \zeta_{k+1} - \zeta_{k+2}}{(\zeta_k - \zeta_{k+1})(\zeta_k - \zeta_{k+2})} \phi_k \quad (4.52)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right)_k^{\text{BDS}} \approx \frac{\zeta_k - \zeta_{k-1}}{(\zeta_{k-1} - \zeta_{k-2})(\zeta_k - \zeta_{k-2})} \phi_{k-2} + \frac{\zeta_{k-2} - \zeta_k}{(\zeta_k - \zeta_{k-1})(\zeta_{k-1} - \zeta_{k-2})} \phi_{k-1} + \frac{2\zeta_k - \zeta_{k-1} - \zeta_{k-2}}{(\zeta_k - \zeta_{k-1})(\zeta_k - \zeta_{k-2})} \phi_k \quad (4.53)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right)_k^{\text{CDS}} \approx \frac{\zeta_k - \zeta_{k+1}}{(\zeta_k - \zeta_{k-1})(\zeta_{k+1} - \zeta_{k-1})} \phi_{k-1} + \frac{\zeta_{k+1} - 2\zeta_k + \zeta_{k-1}}{(\zeta_k - \zeta_{k-1})(\zeta_{k+1} - \zeta_k)} \phi_k + \frac{\zeta_k - \zeta_{k-1}}{(\zeta_{k+1} - \zeta_k)(\zeta_{k+1} - \zeta_{k-1})} \phi_{k+1}. \quad (4.54)$$

Die einseitigen Ableitungen FDS und BDS berücksichtigen nicht nur den nächsten, sondern auch den übernächsten Nachbarn. Ableitungen der  $\xi$ - und  $\eta$ -Richtung werden in analoger Weise diskretisiert. Die zweite Ableitung (CDS2) an der Stelle  $k$  ist dann nach Payne und Dongelmans (1997) und Ferziger und Perić (2002)

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta^2}\right)_k^{\text{CDS2}} \approx \frac{2}{(\zeta_k - \zeta_{k-1})(\zeta_{k+1} - \zeta_{k-1})} \phi_{k-1} + \frac{-2}{(\zeta_{k+1} - \zeta_k)(\zeta_k - \zeta_{k-1})} \phi_k + \frac{2}{(\zeta_{k+1} - \zeta_k)(\zeta_{k+1} - \zeta_{k-1})} \phi_{k+1}. \quad (4.55)$$



Außerdem werden Ableitungen der Form

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \right)_i &\approx \frac{\left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_{i-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} (\xi_{i+1} - \xi_{i-1})} \\ &\approx \Gamma_{i+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{(\Delta_f \xi)_i (\Delta_c \xi)_i} - \Gamma_{i-\frac{1}{2}} \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{(\Delta_b \xi)_i (\Delta_c \xi)_i} \end{aligned} \quad (4.56)$$

und

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right)_{i,k} &\approx \frac{\left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right)_{i-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} (\xi_{i+1} - \xi_{i-1})} \\ &\approx \frac{1}{4 (\Delta_c \xi)_i (\Delta_c \zeta)_k} \left( \Gamma_{i+\frac{1}{2}} (\phi_{i,k+1} - \phi_{i,k-1} + \phi_{i+1,k+1} - \phi_{i+1,k-1}) \right. \\ &\quad \left. - \Gamma_{i-\frac{1}{2}} (\phi_{i,k+1} - \phi_{i,k-1} + \phi_{i-1,k+1} - \phi_{i-1,k-1}) \right) \end{aligned} \quad (4.57)$$

mit

$$(\Delta_c \xi)_i = (\xi_{i+1} - \xi_{i-1}) / 2 \quad (\Delta_f \xi)_i = \xi_{i+1} - \xi_i \quad (\Delta_b \xi)_i = \xi_i - \xi_{i-1} \quad (4.58)$$

für die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  (Gl. 4.10 und Gl. 4.11) benötigt (Marsal 1976; Ferziger und Perić 2002). Funktionswerte an den Zwischengitterpunkten  $i \pm \frac{1}{2}$ ,  $j \pm \frac{1}{2}$  und  $k \pm \frac{1}{2}$  werden durch lineare Interpolation bestimmt.

### 4.3.1 Horizontalgeschwindigkeit

Nach Anwendung der Transformationsregeln für den Übergang zu  $\sigma$ -Koordinaten ergibt sich für die horizontale Geschwindigkeitskomponente  $u$  aus Gleichung 4.10

$$\begin{aligned} &4 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( H \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + 4 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( c_x \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( H \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( c_y \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ &+ 4 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( c_x \mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( c_y \mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{4c_x^2 + c_y^2 + 1}{H} \mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = \\ &\frac{\partial}{\partial \xi} (HL) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (c_x L) - \frac{\partial}{\partial \xi} (HR_{zz}) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (c_x R_{zz}) \\ &- \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( c_y \mu \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( H \mu \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( c_y \mu \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( H \mu \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial \eta} \left( c_x \mu \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( c_y \mu \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) - 3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{c_x c_y}{H} \mu \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{c_x}{H} \mu \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \end{aligned} \quad (4.59)$$

und in analoger Weise für  $v$  aus Gleichung 4.11

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \xi} \left( H \mu \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( c_x \mu \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + 4 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( H \mu \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + 4 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( c_y \mu \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \\
 & + 4 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( c_y \mu \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( c_x \mu \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{c_x^2 + 4c_y^2 + 1}{H} \mu \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) = \\
 & \frac{\partial}{\partial \eta} (HL) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (c_y L) - \frac{\partial}{\partial \eta} (HR_{zz}) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (c_y R_{zz}) \\
 & - 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( c_y \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( H \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( c_x \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( H \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\
 & - 2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( c_x \mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( c_y \mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) - 3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{c_x c_y}{H} \mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \\
 & - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{c_y}{H} \mu \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right).
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Der Übergang zur diskreten Schreibweise erfolgt nun durch die Anwendung von Gleichung 4.56 und Gleichung 4.57 sowie deren Entsprechungen für die Ableitungen in andere Koordinatenrichtungen. Auf diese Weise erhält man eine algebraische Gleichung für jeden Gitterpunkt. Diese enthält sowohl die Variable am Gitterpunkt selbst als auch deren Werte an den benachbarten Gitterpositionen. Somit erhält man für  $u$  und  $v$  je ein lineares Gleichungssystem der Form

$$A_{P u P} + \sum_{nb \neq P} A_{nb} u_{nb} = Q_u(v, w, R_{zz}, L, \mu, \dots)_P \tag{4.61}$$

$$B_{P v P} + \sum_{nb \neq P} B_{nb} v_{nb} = Q_v(u, w, R_{zz}, L, \mu, \dots)_P. \tag{4.62}$$

Der Index  $P$  bezeichnet dabei die Gitterposition in Kompassnotation (vgl. Date 2005; Ferziger und Perić 2002), an der die Diskretisierung durchgeführt wird. Summiert wird über die Gitterpositionen der nächsten Nachbarn  $nb$ . Die Bezeichnungen der Positionen im Gitter werden von Ferziger und Perić (2002) übernommen und bedeuten im Einzelnen Ost (E), West (W), Nord (N), Süd (S), oben (T) und unten (B). Sie können auch in Kombination auftreten. Die Terme  $Q_u$  und  $Q_v$  beinhalten jeweils alle weiteren Terme ohne die entsprechende Unbekannte  $u$  in Gleichung 4.61 bzw.  $v$  in Gleichung 4.62. Es ist dabei zu beachten, dass die Viskosität  $\mu$  neben der Temperatur auch von der effektiven Deformationsrate und damit wiederum von den Geschwindigkeiten abhängt ( $\mu = \mu(T, \mathbf{u}, \dots)$ ), wodurch Gleichung 4.61 und Gleichung 4.62 auf nichtlineare Weise miteinander gekoppelt sind. Weitere Kopplungen ergeben sich z.B. durch  $R_{zz}$ , stellvertretend für den Druck (siehe Gl. 4.3 bis Gl. 4.5), und durch die vertikale Geschwindigkeit  $w$ , die mit  $u$  und  $v$  durch die Kontinuitätsgleichung verknüpft ist. Die Koeffizienten  $A$  und  $B$  hängen von geometrischen Größen und von der Viskosität ab. Nach Diskretisierung von Gleichung 4.59 für die Geschwindigkeitskomponente  $u$  ergeben sich für Gleichung 4.61 folgende Koeffizienten:

$$A_{SB} = \frac{(c_y \mu)_{j-\frac{1}{2}} + (c_y \mu)_{k-\frac{1}{2}}}{4 (\Delta_c \eta)_j (\Delta_c \zeta)_k} \tag{4.63a}$$

$$A_S = -\frac{(c_y \mu)_{k+\frac{1}{2}} - (c_y \mu)_{k-\frac{1}{2}}}{4 (\Delta_c \eta)_j (\Delta_c \zeta)_k} + \frac{(H \mu)_{j-\frac{1}{2}}}{(\Delta_c \eta)_j (\Delta_b \eta)_j} \tag{4.63b}$$

$$A_{ST} = -\frac{(c_y\mu)_{j-\frac{1}{2}} + (c_y\mu)_{k+\frac{1}{2}}}{4(\Delta_c\eta)_j(\Delta_c\zeta)_k} \quad (4.63c)$$

$$A_{WB} = \frac{(c_x\mu)_{i-\frac{1}{2}} + (c_x\mu)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta_c\xi)_i(\Delta_c\zeta)_k} \quad (4.63d)$$

$$A_W = -\frac{(c_x\mu)_{k+\frac{1}{2}} - (c_x\mu)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta_c\xi)_i(\Delta_c\zeta)_k} + \frac{4(H\mu)_{i-\frac{1}{2}}}{(\Delta_c\xi)_k(\Delta_b\xi)_i} \quad (4.63e)$$

$$A_{WT} = -\frac{(c_x\mu)_{i-\frac{1}{2}} + (c_x\mu)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta_c\xi)_i(\Delta_c\zeta)_k} \quad (4.63f)$$

$$A_B = \frac{\mu(4c_x^2 + c_y^2 + 1)_{k-\frac{1}{2}}}{H(\Delta_c\zeta)_k(\Delta_b\zeta)_k} + \frac{(c_x\mu)_{i-\frac{1}{2}} - (c_x\mu)_{i+\frac{1}{2}}}{(\Delta_c\xi)_i(\Delta_c\zeta)_k} + \frac{(c_y\mu)_{j-\frac{1}{2}} - (c_y\mu)_{j+\frac{1}{2}}}{(\Delta_c\eta)_j(\Delta_c\zeta)_k} \quad (4.63g)$$

$$A_T = \frac{\mu(4c_x^2 + c_y^2 + 1)_{k+\frac{1}{2}}}{H(\Delta_c\zeta)_k(\Delta_f\zeta)_k} + \frac{(c_x\mu)_{i+\frac{1}{2}} - (c_x\mu)_{i-\frac{1}{2}}}{(\Delta_c\xi)_i(\Delta_c\zeta)_k} + \frac{(c_y\mu)_{j+\frac{1}{2}} - (c_y\mu)_{j-\frac{1}{2}}}{(\Delta_c\eta)_j(\Delta_c\zeta)_k} \quad (4.63h)$$

$$A_{EB} = -\frac{(c_x\mu)_{i+\frac{1}{2}} + (c_x\mu)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta_c\xi)_i(\Delta_c\zeta)_k} \quad (4.63i)$$

$$A_E = \frac{(c_x\mu)_{k+\frac{1}{2}} - (c_x\mu)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta_c\xi)_i(\Delta_c\zeta)_k} + \frac{4(H\mu)_{i+\frac{1}{2}}}{(\Delta_c\xi)_k(\Delta_f\xi)_k} \quad (4.63j)$$

$$A_{ET} = \frac{(c_x\mu)_{i+\frac{1}{2}} + (c_x\mu)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta_c\xi)_i(\Delta_c\zeta)_k} \quad (4.63k)$$

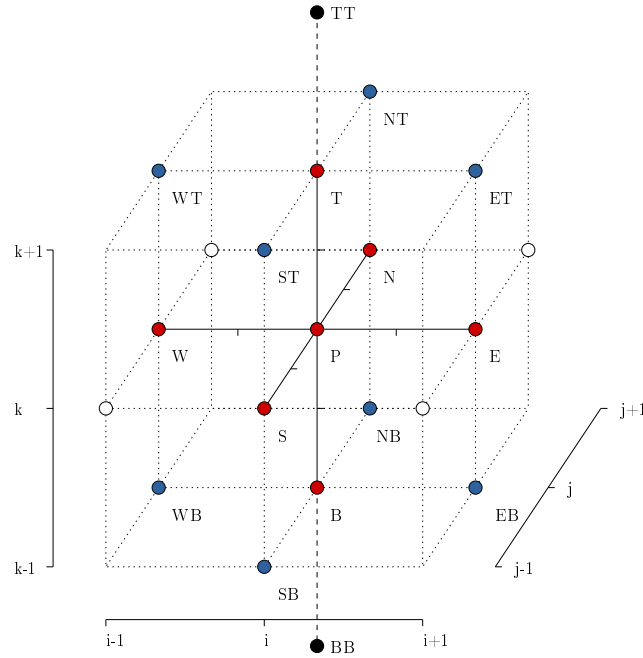
$$A_{NB} = -\frac{(c_y\mu)_{j+\frac{1}{2}} + (c_y\mu)_{k-\frac{1}{2}}}{4(\Delta_c\eta)_j(\Delta_c\zeta)_k} \quad (4.63l)$$

$$A_N = \frac{(c_y\mu)_{k+\frac{1}{2}} - (c_y\mu)_{k-\frac{1}{2}}}{4(\Delta_c\eta)_j(\Delta_c\zeta)_k} + \frac{(H\mu)_{j+\frac{1}{2}}}{(\Delta_c\eta)_j(\Delta_f\eta)_j} \quad (4.63m)$$

$$A_{NT} = \frac{(c_y\mu)_{j+\frac{1}{2}} + (c_y\mu)_{k+\frac{1}{2}}}{4(\Delta_c\eta)_j(\Delta_c\zeta)_k} \quad (4.63n)$$

$$A_P = -\sum_{nb \neq P} A_{nb}. \quad (4.63o)$$

Die in Kapitel 4.1.1 formulierten Neumann-Randbedingungen für das horizontale Geschwindigkeitsfeld an der Eisoberseite (Gl. 4.14a und Gl. 4.14b) sowie an der Eisbasis (Gl. 4.18a und Gl. 4.18b) werden mit den Transformationsregeln aus Kapitel 4.2.1 in das  $\sigma$ -Koordinatensystem transformiert und dann horizontal mit den zentralen Differenzen CDS (Gl. 4.54) und vertikal mit den einseitigen Differenzen FDS (Gl. 4.52) an der Eisbasis sowie BDS (Gl. 4.52) an der Eisoberfläche diskretisiert. Die Koeffizienten  $B$  für die Berechnung von  $v$  ergeben sich in analoger Weise aus Gleichung 4.60 und unterscheiden sich nur durch einzelne Vorfaktoren. Für einen Punkt im Inneren des Rechengebietes ergeben sich demnach 15 Koeffizienten, deren räumliche Zuordnung in Abbildung 4.1 dargestellt ist.



**Abbildung 4.1:** Das Diskretisierungsschema für die Berechnung der horizontalen Geschwindigkeiten enthält 15 Stützstellen im Inneren des Modellgitters (rote und blaue Gitterpositionen), bezogen auf den zentralen Gitterpunkt P an der Stelle  $(i, j, k)$ . Die beiden schwarz markierten Positionen geben an den vertikalen Begrenzungen des Gitters benötigte übernächste Nachbarn an. Weiße Positionen werden zusätzlich für die jeweils rechten Seiten in Gl. 4.61 und Gl. 4.62 benötigt. Die Richtungsindizes stehen für E=Ost, W=West, N=Nord, S=Süd, T=oben und B=unten.

Die rot dargestellten Gitterpositionen entsprechen Einträgen der Diskretisierung in kartesischen Koordinaten. Zusätzliche Einträge, in Abb. 4.1 blau dargestellt, ergeben sich durch die Krümmung der Koordinatenlinien im  $(\xi, \eta, \zeta)$ -System. An den weißen Punkten wird die orthogonale Geschwindigkeitskomponente  $v$  für die Berechnung der rechten Seiten  $Q_u$  in Gleichung 4.61 und  $u$  für  $Q_v$  in Gleichung 4.62 benötigt. Durch diese Abhängigkeit kann eine Diskretisierung nach Gleichung 4.61 und Gleichung 4.62 nur dann erfolgen, wenn ein Gitterpunkt  $(i, j)$  von acht aktiven, d.h. eisbedeckten horizontalen Nachbarpunkten umgeben ist. Die Punkte TT und BB werden an der unteren beziehungsweise oberen Begrenzung des Gitters für die einseitigen Ableitungen berücksichtigt.

Da die äußere Berandung der mit Eis bedeckten Fläche in der Regel unregelmäßig geformt ist, werden einzelne Gitterpunkte als inaktiv behandelt. Für diese Punkte wird dann keine Gleichung nach Gleichung 4.61 oder Gleichung 4.62 aufgestellt, so dass die Anzahl der linearen Gleichungen  $N \leq (N_\xi \times N_\eta) \times N_\zeta$  ist. Werden die Geschwindigkeiten an den Gitterpunkten als Vektoren  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_l, \dots, u_N)^T$  und  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_l, \dots, v_N)^T$  geschrieben, lassen sich Gleichung 4.61 und Gleichung 4.62 sowie die entsprechenden Randbedingungen als Zeilen der Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  mit

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{Q}_u \quad \text{und} \quad \mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{Q}_v \quad (4.64)$$

schreiben. Beide Matrixgleichungen haben dieselbe Struktur. Daher soll im Folgenden auf die Unterscheidung zwischen der Berechnung von  $u$  und  $v$  verzichtet und nur noch der allgemeinere Fall  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{Q}$  behandelt werden. Die Matrix  $\mathbf{A}$  ist quadratisch und dünn besetzt, da nur nächste oder im Fall der unteren bzw. oberen Randbedingung übernächste Nachbarn berück-

sichtigt werden. Ihre Struktur hängt von der Nummerierungsreihenfolge der Gitterpunkte ab. Ausgehend von der Position  $(i, j, k) = (1, 1, 1)$  werden die Punkte hier zunächst in  $\zeta$ -, dann in  $\eta$ - und zuletzt in  $\xi$ -Richtung durchnummeriert. Da nicht alle Punkte berücksichtigt werden, wird die Zuordnung der Gitterposition  $(i, j, k)$  zur Position  $l$  im linearen Gleichungssystem gespeichert. Auf diese Weise werden Indexlücken im Gleichungssystem vermieden, die eine spätere Umsortierung nötig machen würden (vgl. Marsal 1976). Die Zuordnung muss immer dann erneut erfolgen, wenn sich der Eiskörper in seiner horizontalen Ausdehnung verändert. Die Anzahl der aktiven Punkte in vertikale Richtung ist konstant. Die Nummerierung entlang der einzelnen Koordinatenrichtungen erzeugt eine polydiagonale Matrix, die neben der Hauptdiagonalen 16 Nebendiagonalen aufweist, deren Elemente ungleich Null sind. Es werden nur 17 Einträge pro Gitterpunkt gespeichert, wodurch sich der gesamte Speicherbedarf im Vergleich zur vollbesetzten Matrix mit maximal  $N_\xi^2 \times N_\eta^2 \times N_\zeta^2$  Einträgen auf  $17 \times N_\xi \times N_\eta \times N_\zeta$  Einträge reduziert.

### 4.3.2 Schelfeiskante

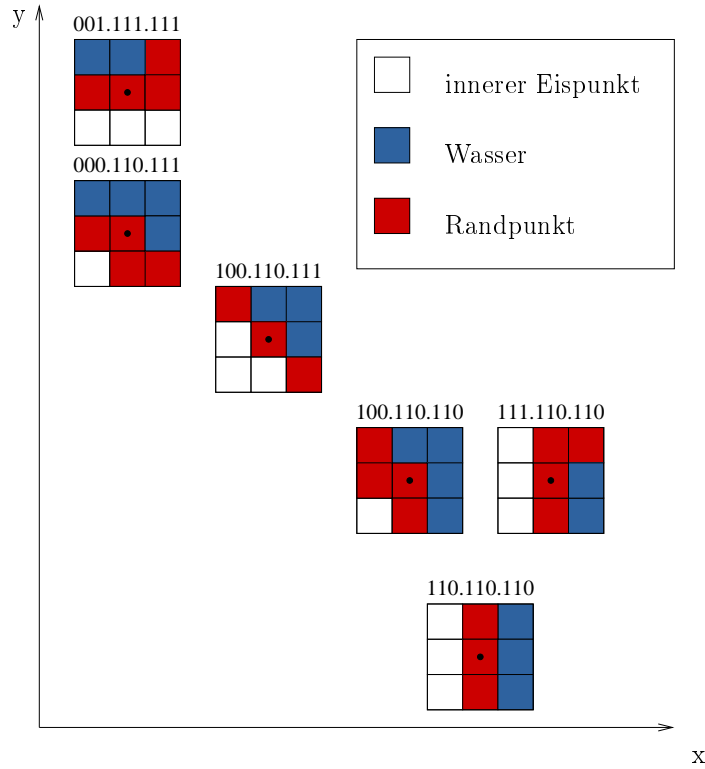
In Kapitel 4.1.1 wurden die Neumann-Randbedingungen für die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  am Beispiel einer in  $y$ -Richtung verlaufenden Schelfeiskante mit Gl. 4.24 und Gl. 4.25 eingeführt. In diskreter Schreibweise lauten sie

$$u_{i,j,k} = u_{i,j} = u_{i-1,j} + \left[ G \Big|_{i,j} - \frac{1}{2} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{\eta_{j+1} - \eta_{j-1}} \right] (\Delta_b \xi)_i \quad (4.65)$$

$$v_{i,j,k} = v_{i,j} = v_{i-1,j} - \left[ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{\eta_{j+1} - \eta_{j-1}} \right] (\Delta_b \xi)_i \quad (4.66)$$

für einen Punkt  $(i, j)$  des Modellgitters an der Schelfeiskante (Sandhäger 2000). Randbedingungen für andere Normalenrichtungen ergeben sich in analoger Weise. Die Richtung des Normalenvektors der Schelfeisfront folgt im Allgemeinen nicht den Koordinatenlinien, so dass entlang der Front eine Vielzahl diskreter Richtungen möglich ist. In Abbildung 4.2 sind die im Modell möglichen Richtungen aus Sicht der zentralen Gitterzelle (durch den schwarzen Punkt gekennzeichnet) in einem  $3 \times 3$  Gitterpunkte umfassenden Gebiet der nächsten Nachbarn dargestellt.

Um eine sich wiederholende Bestimmung der Nachbarschaftsbeziehungen und Normalenrichtungen in der Nähe des betrachteten Gitterpunktes zu vermeiden, wird der Verlauf der Schelfeiskante an der entsprechenden Position durch einen ganzzahligen Wert gespeichert, der sich aus der Besetzung der Gitterpunkte in der  $3 \times 3$  Nachbarschaft ergibt. Einem Eispunkt wird dabei eine 1 und einem Wasserpunkt eine 0 zugewiesen (siehe Abb. 4.2). Die Zuordnung erfolgt von der linken oberen Ecke ausgehend spaltenweise und dann zeilenweise bis zur rechten unteren Ecke. Durch den diskreten Verlauf der Schelfeisfront ergeben sich pro Quadrant sechs verschiedene Fälle für die Randbedingungen (Gl. 4.24 und Gl. 4.25). Die Gleichungen werden daher durch Projektion der Geschwindigkeitskomponenten in die jeweiligen Normalen- und Tangentenrichtungen zur Schelfeisfront und Interpolation der zur Schelfeisfront parallel verlaufenden Geschwindigkeitskomponenten auf Zwischengitterpunkte angepasst. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, die Randbedingungen in ihrer diskreten Schreibweise nicht direkt in die Lösungsmatrix für  $u$  und  $v$  einzutragen, sondern diese Punkte zunächst als Dirichlet-Randbedingung zu belassen und erst in einem späteren Zeitpunkt zu aktualisieren.



**Abbildung 4.2:** Anordnung der Gitterpunkte entlang der Kalbungslinie im ersten Quadranten. Die rot markierten Gitterpunkte sind Punkte entlang der Kalbungslinie, die an die Ozeanpunkte (blau) und an die inneren Eispunkte (weiß) grenzen. Die Zahlenkombinationen über den einzelnen Kantenkonfigurationen dienen der Unterscheidung im numerischen Fließmodell.

### 4.3.3 Vertikalgeschwindigkeit und resistive Longitudinalspannung

Durch den Übergang zu  $\sigma$ -Koordinaten transformiert sich die Bestimmungsgleichung der Vertikalgeschwindigkeit (Gl. 4.27) zu

$$w(\zeta) = -H \int_0^{\zeta} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{c_x}{H} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{c_y}{H} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) d\zeta' + w_b. \quad (4.67)$$

Eine Möglichkeit der numerischen Lösung besteht in der stückweisen Integration der Terme auf der rechten Seite von Gleichung 4.67, ausgehend von der Position  $\zeta_{k=1}$  bis  $\zeta_{k=N_\zeta}$ . Ein alternativer Ansatz besteht in der impliziten Berechnung der Vertikalgeschwindigkeit. Die Kontinuitätsgleichung (Gl. 2.5), die auch in Kapitel 4.1 für die Herleitung der Vertikalgeschwindigkeit verwendet wurde, lässt sich in den transformierten Koordinaten der Form

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = -H \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{c_x}{H} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{c_y}{H} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) = r(\zeta) \quad (4.68)$$

schreiben. Durch Diskretisierung der linken Seite von Gleichung 4.68 mit Hilfe der zentralen Differenzgleichung CDS (Gl. 4.54) für  $2 \leq k < N_\zeta$ , der einseitigen Differenzgleichung BDS (Gl. 4.53) für  $k = N_\zeta$  sowie der Dirichlet-Randbedingung  $w_{k=1} = w_b$  erhält man ein lineares

Gleichungssystem mit  $n = N_\zeta$  Gleichungen für jede horizontale Position  $(i, j)$  im Modellgitter:

$$\begin{pmatrix} c_n & d_n & e_n & 0 & 0 \\ b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_n \\ w_{n-1} \\ \vdots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n \\ r_{n-1} \\ \vdots \\ r_2 \\ w_b \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

Die resultierende Matrix hat insgesamt vier von Null verschiedene Diagonalen. Es ist dabei zu berücksichtigen, dass für den Fall der äquidistanten Verteilung der  $\zeta$ -Schichten die Elemente der Hauptdiagonalen für alle  $1 < k < N_\zeta$  zu Null werden.

#### 4.3.4 Vertikale Longitudinalspannung

In Anlehnung an die Vorgehensweise zur Berechnung der Vertikalgeschwindigkeit  $w$  wird auch für die vertikale Longitudinalspannung  $R_{zz}$  (Gl. 4.5) die vertikale Ableitung diskretisiert. Sie lautet in transformierten Koordinaten

$$\frac{\partial R_{zz}}{\partial \zeta} = H \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \xi} + \frac{c_x}{H} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \zeta} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \eta} + \frac{c_y}{H} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \zeta} \right) = r(\zeta). \quad (4.70)$$

An der Eisoberseite gilt die Dirichlet-Randbedingung

$$R_{zz}|_{\zeta=1} = \tau_{xz} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial z_s}{\partial y}, \quad (4.71)$$

welche man als Folge der spannungsfreien Oberfläche aus Gleichung 4.12c und Gleichung 4.5 erhält (vgl. van der Veen und Whillans 1989a). Die Diskretisierung der linken Seite von Gleichung 4.70 mit Hilfe des zentralen Differenzschemas CDS (Gl. 4.54) für  $2 \leq k < N_\zeta$ , der einseitigen Differenzgleichung FDS (Gl. 4.52) an der Eisbasis ( $k = 1$ ) und der Dirichlet-Randbedingung (Gl. 4.71) an der Eisoberseite führt zu einem System aus  $n = N_\zeta$  Gleichungen für eine Position  $(\xi_i, \eta_j)$  im Rechengebiet. Zur Vereinfachung soll hier die Schreibweise  $R = R_{zz}$  gelten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_n \\ R_{n-1} \\ \vdots \\ R_2 \\ R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n \\ r_{n-1} \\ \vdots \\ r_2 \\ r_1 \end{pmatrix}. \quad (4.72)$$

Die Struktur des Gleichungssystems entspricht im Wesentlichen der in Gl. 4.69, mit dem Unterschied, dass hier einseitige Differenzen an der Eisbasis verwendet werden, wodurch sich die Anordnung der Hauptdiagonalen verschiebt.

#### 4.3.5 Wärmetransportgleichung

Nach Anwendung der Transformationsregeln aus Abschnitt 4.2.1 lautet die Wärmetransportgleichung in den transformierten Koordinaten

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{c_t}{H} \frac{\partial T}{\partial \zeta} = & -u \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{c_x}{H} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) - v \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{c_y}{H} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) - \left( \frac{w}{H} - \frac{1}{\rho c_p H^2} \frac{\partial \kappa}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial T}{\partial \zeta} \\ & + \frac{\kappa}{\rho c_p H^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} + \frac{\psi}{\rho c_p}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Diese kann durch Neuordnung der einzelnen Terme in der verkürzten Form

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = -u \frac{\partial T}{\partial \xi} - v \frac{\partial T}{\partial \eta} - w^* \frac{\partial T}{\partial \zeta} + K \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} + S \quad (4.74)$$

mit

$$w^* = \frac{1}{H} \left( w - \frac{1}{\rho c_p H} \frac{\partial \kappa}{\partial \zeta} + u c_x + v c_y + c_t \right), \quad K = \frac{\kappa}{\rho c_p H^2} \quad \text{und} \quad S = \frac{\psi}{\rho c_p} \quad (4.75)$$

formuliert werden. Die neue vertikale Geschwindigkeit  $w^*$  fasst zusätzliche Beiträge zum vertikalen advektiven Wärmetransport zusammen, die aus der Koordinatentransformation und aus der Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit resultieren. Der Beitrag  $c_t$  kann als vertikale Gittergeschwindigkeit interpretiert werden (vgl. Payne und Dongelmans 1997). Der Term  $K$  ist die skalierte Diffusivität und  $S$  der Beitrag, der durch interne Deformation des Eises zur Erwärmung beiträgt.

### Räumliche Diskretisierung

Für die Diskretisierung des vertikalen diffusiven Transportterms wird das zentrale Differenzschema (CDS2, Gl. 4.55) verwendet. In Kompassnotation (siehe Kapitel 4.3.1) ergibt sich hieraus

$$\left( K \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} \right)_k^{\text{CDS2}} \approx a_B T_B + a_P T_P + a_T T_T \quad (4.76)$$

mit

$$a_B = \frac{2K}{(\zeta_k - \zeta_{k-1})(\zeta_{k+1} - \zeta_{k-1})}, \quad a_T = \frac{2K}{(\zeta_{k+1} - \zeta_k)(\zeta_{k+1} - \zeta_{k-1})} \quad \text{und} \quad (4.77)$$

$$a_P = -(a_B + a_T).$$

Der advektive vertikale Transport kann mit dem zentralen Differenzschema CDS (Gl. 4.54) diskretisiert werden und lautet dann

$$\left( w^* \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right)_k^{\text{CDS}} \approx a_B T_B + a_P T_P + a_T T_T \quad (4.78)$$

mit

$$a_B = \frac{w^* (\zeta_k - \zeta_{k+1})}{(\zeta_k - \zeta_{k-1})(\zeta_{k+1} - \zeta_{k-1})}, \quad a_T = \frac{w^* (\zeta_k - \zeta_{k-1})}{(\zeta_{k+1} - \zeta_k)(\zeta_{k+1} - \zeta_{k-1})} \quad \text{und} \quad (4.79)$$

$$a_P = -(a_B + a_T).$$

Bei der Diskretisierung des Advektionsterms kann das CDS zu numerischen Oszillationen führen. Eine stabile Lösung liefert das CDS nur, wenn die lokale Peclet-Zahl  $Pe = w^* \Delta \zeta_k / K$  für alle Gitterpunkte  $Pe \leq 2$  ist (Patankar 1980). Alternativ zum zentralen Differenzschema CDS kann die Diskretisierung des advektiven Transportes durch das sogenannte UDS-Verfahren (*upwind difference scheme*) erfolgen (Ferziger und Perić 2002). Es handelt sich um ein einseitiges Verfahren, in das die Fließrichtung eingeht. In Kompassnotation ergibt sich

$$\left( w^* \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right)_k^{\text{UDS}} \approx \begin{cases} w^* \frac{T_k - T_{k-1}}{\zeta_k - \zeta_{k-1}}, & w^* < 0 \\ w^* \frac{T_{k+1} - T_k}{\zeta_{k+1} - \zeta_k}, & w^* \geq 0. \end{cases} \quad (4.80)$$



mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_B &= -\frac{\max(0, w^*)}{\zeta_k - \zeta_{k-1}}, & a_T &= \frac{\min(w^*, 0)}{\zeta_{k+1} - \zeta_k} \quad \text{und} \\ a_P &= -(a_B + a_T). \end{aligned} \quad (4.81)$$

In dieser Form ist entweder  $a_B$  oder  $a_T$  Null in Abhängigkeit von der Fließrichtung. Der Nachteil dieses Verfahrens ist die zusätzlich eingeführte Diffusion, die ausgeprägter sein kann als die eigentliche Diffusion (Wesseling 2001).

Die genannten Nachteile des CDS- und des UDS-Verfahrens lassen sich durch Anwendung des Hybrid-Verfahrens nach Spalding (1972) umgehen. Bei diesem Verfahren erfolgt der Übergang vom CDS-Verfahren zum UDS-Verfahren bei einer lokalen Peclet-Zahl  $Pe \geq 2$ , gesteuert durch den Parameter  $s(Pe)$  mit

$$s(Pe) = \begin{cases} 0, & Pe < 1.9 \\ 10(Pe - 1.9), & 1.9 \leq Pe < 2 \\ 1, & Pe \geq 2.0. \end{cases} \quad (4.82)$$

Damit lautet die diskrete Form des vertikalen advektiven Transportes

$$\left( w^* \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right)_k \approx A_B T_B + A_P T_P + A_T T_T \quad (4.83)$$

mit

$$\begin{aligned} A_B &= s a_B^{\text{UDS}} + (1 - s) a_B^{\text{CDS}}, & A_T &= s a_T^{\text{UDS}} + (1 - s) a_T^{\text{CDS}} \quad \text{und} \\ A_P &= -(A_B + A_T). \end{aligned} \quad (4.84)$$

Das Hybrid-Verfahren wird auch auf die horizontalen advektiven Transportterme in der Wärmetransportgleichung (Gl. 4.74) angewandt.

Nach Diskretisierung des vertikalen diffusiven Transportterms sowie der vertikalen und horizontalen advektiven Transportterme ergibt sich somit als räumlich-diskrete Form der Wärmetransportgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \approx A_S T_S + A_W T_W + A_B T_B + A_P T_P + A_T T_T + A_E T_E + A_N T_N + S \quad (4.85)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} A_S &= s_v a_S^{\text{UDS}} + (1 - s_v) a_S^{\text{CDS}}, \\ A_W &= s_u a_W^{\text{UDS}} + (1 - s_u) a_W^{\text{CDS}}, \\ A_B &= s_{w^*} a_B^{\text{UDS}} + (1 - s_{w^*}) a_B^{\text{CDS}} + a_B^{\text{CDS}2}, \\ A_T &= s_{w^*} a_T^{\text{UDS}} + (1 - s_{w^*}) a_T^{\text{CDS}} + a_T^{\text{CDS}2}, \\ A_E &= s_u a_E^{\text{UDS}} + (1 - s_u) a_E^{\text{CDS}}, \\ A_N &= s_v a_N^{\text{UDS}} + (1 - s_v) a_N^{\text{CDS}} \quad \text{und} \\ A_P &= -(A_S + A_W + A_B + A_T + A_E + A_N). \end{aligned} \quad (4.86)$$

An der gegründeten Eisbasis wird die Neumann-Randbedingung (Gl. 2.66) genutzt, um  $T_B$  zu ersetzen. An der Eisbasis im Schelfeis und an der Eisoberseite werden Dirichlet-Randbedingungen verwendet. Ist  $\mathcal{L}$  der räumliche Diskretisierungsoperator, dann folgt in verkürzter Schreibweise für Gl. 4.85

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \mathcal{L}(T) + S. \quad (4.87)$$

### Zeitliche Ableitung

Die Zeit wird mit dem Zeitschritt  $\Delta\tau$  diskretisiert, so dass nach  $n$  Zeitschritten die Zeit  $\tau = n\Delta\tau + \tau_0$  erreicht ist, wobei  $\tau_0$  die Startzeit der numerischen Berechnung darstellt. Die zeitliche Diskretisierung erfolgt mit dem semi-impliziten Crank-Nicolson-Verfahren. Dazu wird die räumliche Diskretisierung zum Zeitschritt  $n$  und zum Zeitschritt  $n + 1$  ausgewertet. Ist

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_n \approx \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta\tau} \quad (4.88)$$

die zeitliche, diskrete Ableitung der Temperatur in der Wärmetransportgleichung, dann ist

$$\frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta\tau} = \omega \mathcal{L}(T_{n+1}) + (1 - \omega) \mathcal{L}(T_n) + S \quad (4.89)$$

die vollständige zeitliche und räumliche Diskretisierung der Wärmetransportgleichung. Der Parameter  $0 \leq \omega \leq 1$  heißt Relaxationsparameter. Für das hier genutzte Crank-Nicolson-Verfahren ist  $\omega = \frac{1}{2}$  voreingestellt. Das Verfahren ist in Bezug auf Rechen- und Diskretisierungsaufwand umfangreicher als ein explizites Verfahren ( $\omega = 0$ ), hat aber den Vorteil, unabhängig von der Zeitschrittgröße  $\Delta\tau$  zu sein. Im Vergleich zu einem rein impliziten Verfahren ( $\omega = 1$ ) weist es eine verbesserte zeitliche Fehlerordnung auf (Marsal 1976; Wesseling 2001). Der Parameter  $\omega$  kann im numerischen Modell frei gewählt werden, wobei der Bereich  $0 < \omega < \frac{1}{2}$  im Allgemeinen nicht von Interesse ist, da ein erhöhter Rechenaufwand für das implizite Lösungsverfahren benötigt wird, ohne eine verbesserte zeitliche Genauigkeit zu erreichen. Die diskrete Form der Wärmetransportgleichung lautet somit

$$\left(\omega A_P - \frac{1}{\Delta\tau}\right) T_{P,n+1} + \sum_{nb \neq P} \omega A_{nb} T_{nb,n+1} = Q_T \quad (4.90)$$

mit

$$Q_T = S - \left((\omega - 1) A_P + \frac{1}{\Delta\tau}\right) T_{P,n} - \sum_{nb \neq P} (\omega - 1) A_{nb} T_{nb,n}. \quad (4.91)$$

Auf diese Weise erhält man für jeden aktiven Gitterpunkt eine algebraische Gleichung, was zu einem linearen Gleichungssystem wie in Kapitel 4.3.1 führt. In diesem Fall werden jedoch nur sieben Einträge pro Zeile benötigt.

### 4.3.6 Eismächtigkeitsentwicklung

Für die Berechnung der zeitlichen Entwicklung der Eismächtigkeit (Gl. 4.36) wird eine *staggered leapfrog*-Methode (Press et al. 1992) verwendet. Ist  $n$  der aktuelle Zeitschritt, dann lässt sich nach Mayer (1996) die neue Eismächtigkeit  $H_{n+1}$  an der Stelle  $(i, j)$  im Rechengitter nach

$$H_{n+1} = H_n + \Delta\tau \left( a_s - a_b - \frac{H_{i+1,n} \bar{u}_{i+1,n} - H_{i-1,n} \bar{u}_{i-1,n}}{\xi_{i+1} - \xi_{i-1}} - \frac{H_{j+1,n} \bar{v}_{j+1,n} - H_{j-1,n} \bar{v}_{j-1,n}}{\eta_{j+1} - \eta_{j-1}} \right) + D \quad (4.92)$$

berechnen. Der Term

$$D = \alpha (H_{j-1,n} + H_{i-1,n} - 4H_n + H_{i+1,n} + H_{j+1,n}) \quad \text{mit } \alpha \ll 1 \quad (4.93)$$

ist eine kleine Additionskonstante, die sogenannte Gitterdrift-Instabilitäten vermeidet. Der maximale Zeitschritt  $\Delta\tau$  ist durch die Courant-Bedingung

$$\Delta\tau \leq \frac{\Delta\xi + \Delta\eta}{2\sqrt{2(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)}} \quad (4.94)$$

vorgegeben, wobei  $\Delta\xi$  und  $\Delta\eta$  die minimalen Gitterabstände in  $\xi$ - und  $\eta$ -Richtung sind. Die Methode wurde von Mayer (1996), Grosfeld und Sandhäger (2004) sowie Breuer (2007) bereits erfolgreich verwendet.

## 4.4 Überblick über die Implementierung

Im Rahmen dieser Arbeit erfolgte die Entwicklung des dreidimensionalen, auf Finiten Differenzen (FD) basierenden thermodynamisch-fließdynamischen, gekoppelten Eismodells (*thermodynamic-ice model*) TIM-FD<sup>3</sup>. Die dazu notwendige numerische Implementierung der diskreten Gleichungen für das Geschwindigkeitsfeld  $(u, v, w)$ , die Temperatur  $T$ , die vertikale resistive Longitudinalspannung  $R_{zz}$  und die Eismächtigkeit  $H$  sowie die dafür benötigten Materialgleichungen und Parametrisierungen erfolgten in den Programmiersprachen FORTRAN 90 und C. Die oben genannten Feldvariablen werden auf einem nichtäquidistanten, regulären Gitter in geometrieangepassten  $\sigma$ -Koordinaten berechnet.

Die durch die Diskretisierung entstandenen linearen Gleichungssysteme für  $u$ ,  $v$  und  $T$  werden in Form dünnbesetzter Matrizen im CSR (*compressed sparse row*)-Format (Barrett et al. 1994) gespeichert. Die Lösung dieser Gleichungssysteme erfolgt mit iterativen Lösern der frei verfügbaren numerischen Bibliotheken Itpack<sup>2</sup> und Sparsekit<sup>3</sup>. In Bezug auf Konvergenzverhalten und Geschwindigkeit hat sich das präkonditionierte *Generalized Minimum Residual* (GMRES)-Verfahren (Saad 2003; Meister 2005) als am geeignetsten erwiesen und wird daher als Standard verwendet. Die vertikale Longitudinalspannung  $R_{zz}$  sowie die vertikale Geschwindigkeit  $w$  wird mit einem direkten Lösungsverfahren für Bandmatrizen nach Press et al. (1992) berechnet. Die Simulationsergebnisse werden im NetCDF-Format<sup>4</sup> binär und von der Computerarchitektur unabhängig gespeichert.

### Programmablauf

Das thermodynamisch-fließdynamische, gekoppelte Eismodell wird in einer Zeitschleife abgearbeitet, deren Zeitschrittlänge durch die Courant-Bedingung (Gl. 4.94) der Eismächtigkeitsentwicklung (Gl.4.92) begrenzt ist. Wird die zeitliche Veränderung der Eismächtigkeit nicht mitberücksichtigt, können die Zeitschritte deutlich größer gewählt werden. Die einzelnen Zeitschritte werden in einer Zeitschleife abgearbeitet, in der zu gegebenen Anfangs- und Randbedingungen in einem iterativen Verfahren unter anderem das Temperaturfeld, das Geschwindigkeitsfeld, die resistive Longitudinalspannung sowie die Viskosität berechnet wird. Die Zeitschleife wird beendet, wenn der letzte Zeitschritt abgeschlossen ist.

Folgende Konvergenzkriterien werden dafür betrachtet:

<sup>2</sup>Itpack: <http://rene.ma.utexas.edu/CNA/ITPACK/manuals/user2c/index.html>

(Datum der letzten Einsichtnahme: 09.05.2010)

<sup>3</sup>Sparsekit: <http://www-users.cs.umn.edu/~saad/software/SPARSKIT/sparskit.html>

(Datum der letzten Einsichtnahme: 09.05.2010)

<sup>4</sup>NetCDF (*network common data form*): <http://www.unidata.ucar.edu/software/netcdf/index.html>

(Datum der letzten Einsichtnahme: 09.05.2010)

### Konvergenz des iterativen Lölers

Ist  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  das zu lösende Gleichungssystem, in dem  $\mathbf{x}$  stellvertretend für die Geschwindigkeitskomponenten  $u, v$  oder die Temperatur  $T$  steht, dann wird das iterative Lösungsverfahren des linearen Gleichungssystems abgebrochen, wenn

$$\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{r}_0\|} < \epsilon_L \quad (4.95)$$

gilt, wobei  $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$  das aktuelle Residuum und  $\mathbf{r}_0$  das Residuum zu Beginn der Iteration ist. Ein Wert  $\epsilon_L < 10^{-6}$  hat sich als zweckmäßig erwiesen.

### Konvergenz der nichtlinearen Kopplung

Die beiden horizontalen Komponenten der Geschwindigkeit hängen jeweils von den weiteren Komponenten sowie von der vertikalen resistiven Longitudinalspannung und der Viskosität ab. Daher ist es nötig, für ein gegebenes Temperaturfeld die Berechnung der einzelnen Geschwindigkeitskomponenten solange zu iterieren, bis die Änderung des betrachteten Feldes unter eine bestimmte Schranke  $\epsilon_{NL}$  fällt. Der Parameter  $\epsilon_{NL}$  wird in dieser Arbeit als Konvergenzkriterium der nichtlinearen Kopplung bezeichnet. Konvergenz wird dann angenommen, wenn die relative Änderung von  $\mathbf{u}$

$$2 \frac{|\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n|}{|\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n|} < \epsilon_{NL} \quad (4.96)$$

und auch die von  $\mathbf{v}$  kleiner ist als  $\epsilon_{NL}$ , wobei  $n$  der Iterationsschritt ist. Um ein besseres Konvergenzverhalten der nichtlinearen Iteration zu erhalten, wird ein Relaxationsverfahren der Form (Hindmarsh und Payne 1996; Pattyn 2003)

$$\mathbf{u}_{n+1} = \alpha \mathbf{u}^* + (1 - \alpha) \mathbf{u}_n \quad (4.97)$$

benutzt. Dabei ist  $\mathbf{u}^*$  die Lösung des linearen Gleichungssystem  $\mathbf{A}_n \mathbf{u}^* = \mathbf{b}_n$  der  $n$ -ten Iteration. Als Relaxationsparameter wird voreingestellt  $\alpha = 0.3$  benutzt. Ebenso wird mit der Lösung von  $\mathbf{v}$  verfahren.

### Konvergenz der prognostischen Kopplung

Konvergenz ist erreicht, wenn die relative Änderung der Temperatur zwischen zwei Zeitschritten  $n$  und  $n + 1$  kleiner ist als das Abbruchkriterium  $\epsilon_T$ :

$$2 \frac{|\mathbf{T}^{n+1} - \mathbf{T}^n|}{|\mathbf{T}^{n+1} + \mathbf{T}^n|} < \epsilon_T < 1 \times 10^{-6}, \quad (4.98)$$

wobei  $\mathbf{T}$  der Vektor aller Temperaturen auf aktiven Gitterzellen ist.

Die Anwendung des neuen Fließmodells ist Bestandteil der nächsten Kapitel.

# Kapitel 5

## Validierung des numerischen Fließmodells

Eine Möglichkeit, die Funktionalität des numerischen Modells zu bewerten, ist der Vergleich mit anderen numerischen Modellen. Bereits in den 1990er Jahren wurde durch die *European Ice Sheet Modelling Initiative* (EISMINT)<sup>1</sup> (Huybrechts et al. 1996; Payne et al. 2000) eine Reihe von Experimenten für den Vergleich verschiedener Fließmodelle erarbeitet, die sich an großskalige Eismodelle, sogenannte Modelle nullter Ordnung oder auch *shallow ice approximation* (SIA)-Modelle (Hutter 1983), richten. Diese Gruppe von Modellen berücksichtigt neben weiteren Näherungen nur vertikale Scherspannungen in der Stokes-Gleichung (Gl. 2.10). Die internationale Vergleichsstudie *Ice Sheet Model Intercomparison Project for Higher Order Models* (ISMIP-HOM)<sup>2</sup> (Pattyn et al. 2008) richtet sich an eine neue Generation numerischer Fließmodelle, zu denen Modelle höherer Ordnung (*higher order*, HO) und Modelle, welche die Stokes-Gleichung ohne Näherungen (*full-Stokes*, FS) lösen, gehören. Für eine detaillierte Klassifizierung einzelner Näherungen sei auf Hindmarsh (2004) verwiesen.

Bei dem in dieser Arbeit entwickelten Fließmodell handelte es sich zum Zeitpunkt der Vergleichsstudie um ein Modell höherer Ordnung (LTSML), in dem bei der Berechnung der vertikalen Scherspannungen (Hindmarsh 2004) die horizontalen Ableitungen der vertikalen Geschwindigkeiten vernachlässigt wurden. Die mit dem Modell erzielten Ergebnisse werden in Kapitel 5.1 dargestellt. Die Experimente wurden zu einem späteren Zeitpunkt zusätzlich mit der *full-Stokes*-Version des numerischen Fließmodells erneut durchgeführt und werden mit den früheren Ergebnissen verglichen. Die Experimente in ISMIP-HOM sind für Eisschild- und Eisstrommodelle ausgelegt. Um das neue Fließmodell zusätzlich auf die Anwendbarkeit auf Schelfeisfragestellungen zu überprüfen, wird in Kapitel 5.2 das Fließgeschwindigkeitsfeld eines isothermalen Tafelgebirgs berechnet, für das Jansen et al. (2005) eine analytische Lösung angeben.

### 5.1 ISMIP-HOM

Die Studie gliedert sich in die Experimente A bis F und ist für gegründetetes Eis konzipiert. Bis auf Experiment F sind die Experimente so angelegt, dass für eine vorgegebene Geometrie und Rheologie das diagnostische Spannungs- und Geschwindigkeitsfeld berechnet wird. Der Eiskörper wird dabei als isothermal betrachtet und der Einfluss der Temperatur auf das Fließgeschwindigkeitsfeld durch einen konstanten Fließparameter  $A$  (siehe Gl. 2.24) vorgegeben. Die Experimente A und B untersuchen den Einfluss der Bodenrauigkeit auf das Fließfeld, wogegen die Experimente C und D den Einfluss des basalen Gleitens behandeln. Die Experimente B

---

<sup>1</sup>EISMINT: <http://homepages.vub.ac.be/~phuybrec/eismint.html>  
(Datum der letzten Einsichtnahme: 09.05.2010)

<sup>2</sup>ISMIP-HOM: <http://homepages.ulb.ac.be/~fpattyn/ismip/>  
(Datum der letzten Einsichtnahme: 09.05.2010)

und D stellen eine Einschränkung der Experimente A und C auf zwei Raumdimensionen ( $x, z$ ) dar. Sie sind für Fließlinienmodelle vorgesehen und werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. In Experiment E wird das Geschwindigkeitsfeld für eine reale Gletschergeometrie entlang der zentralen Fließlinie betrachtet. Im Anschluss wird im Experiment F die prognostische Entwicklung eines Eiskörpers mit Newton'scher Rheologie betrachtet. Die beiden letztgenannten Experimente spielen für die Anwendung des Fließmodells auf das reale Untersuchungsgebiet im westlichen Dronning Maud Land eine untergeordnete Rolle. Sie werden daher nur kurz betrachtet.

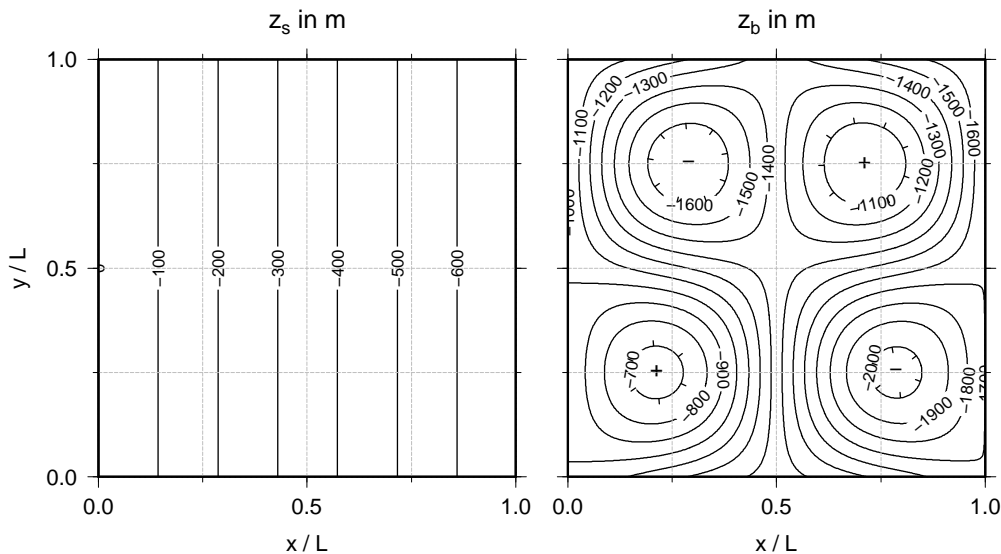
### 5.1.1 Eisschild mit unduliertem Felsbett (Experiment A)

Es wird ein isothermaler Eiskörper betrachtet, der eine mittlere Eismächtigkeit von  $H = 1000$  m aufweist, in  $x$ -Richtung um  $\alpha = 0.5^\circ$  geneigt ist und vollständig auf dem Felsbett aufliegt. Dem Felsbett ist eine sinusförmige Rauigkeit mit einer Amplitude von  $H/2$  und einer Frequenz von  $\omega = 2\pi/L$  überlagert, wobei  $L = 160, 80, 40, 20, 10$  und  $5$  km die horizontale Ausdehnung ist. Für die beschriebene Geometrie ergeben sich die Koordinaten der Eisoberseite  $z_s$  und der Eisunterseite  $z_b$  durch die Funktionen

$$z_s = -x \tan \alpha \quad \text{und} \quad (5.1)$$

$$z_b = z_s - 1000 + 500 \sin(\omega x) \sin(\omega y). \quad (5.2)$$

Die Geometrie des Eiskörpers ist in Abbildung 5.1 exemplarisch für die Kantenlänge  $L = 80$  km dargestellt.



**Abbildung 5.1:** Eisoberseiten- (links) und Felsbetttopographie (rechts) im Experiment A exemplarisch für die Kantenlänge  $L = 80$  km.

Das Eis ist im gesamten Berechnungsgebiet am Untergrund festgefroren, so dass  $\mathbf{u}|_{z_b} = \mathbf{0}$  gilt. Die Oberfläche ist spannungsfrei und am seitlichen Rand des Modellgebietes gelten periodische Randbedingungen.

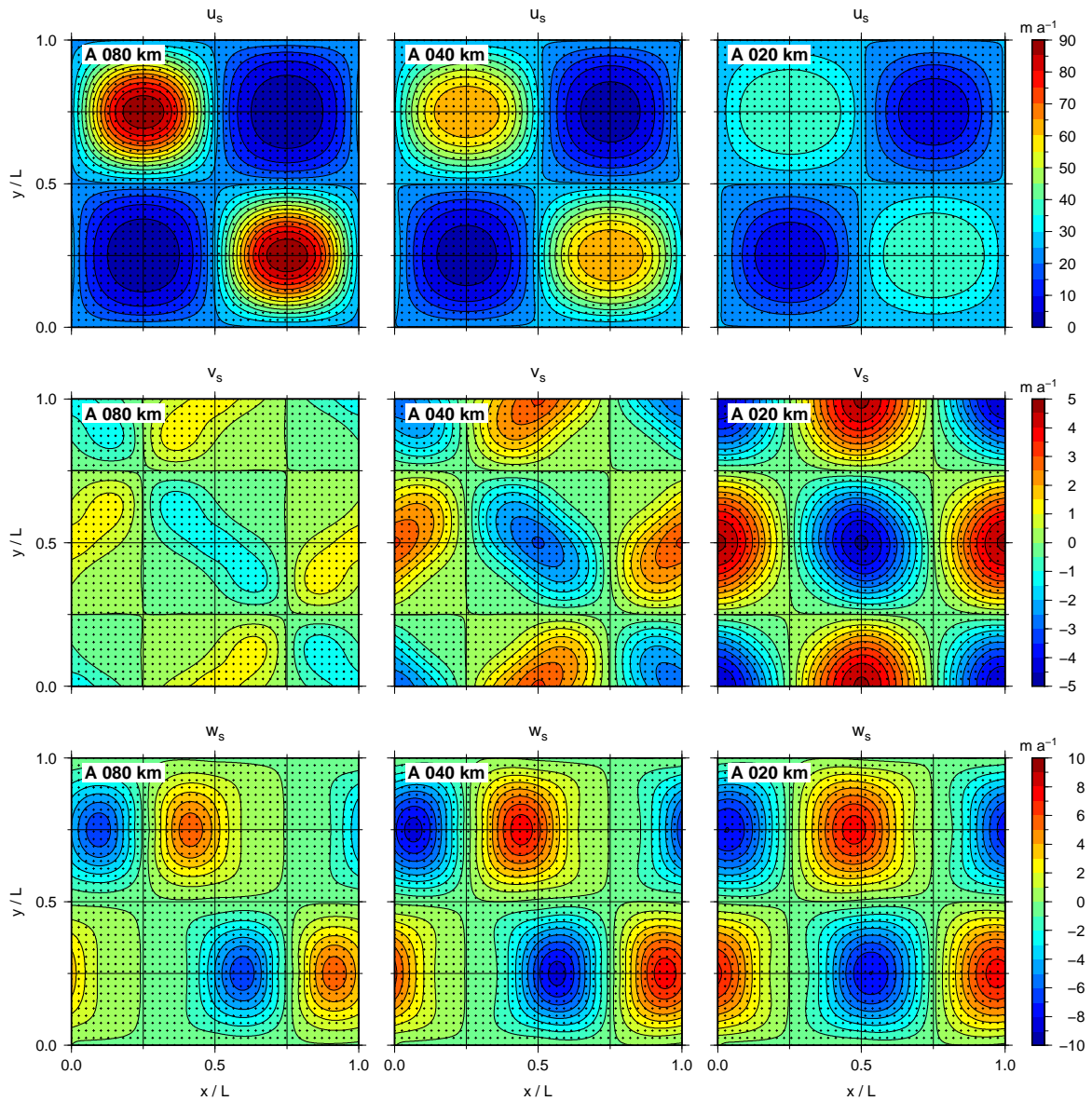
Der Eiskörper wurde auf einem Gitter mit  $41 \times 41 \times 41$  Gitterpunkten diskretisiert. Die horizontale Auflösung variiert mit der Kantenlänge zwischen etwa 125 m für die minimale

Kantenlänge von  $L = 5$  km bis zu etwa 4 km für  $L = 160$  km. Die vertikale Auflösung hängt von der lokalen Eismächtigkeit ab und beträgt im räumlichen Mittel 25 m bei äquidistanter Verteilung der  $\zeta$ -Schichten. Die Ergebnisse der Simulationen sind für die Kantenlängen 80, 40 und 20 km in Abbildung 5.2 exemplarisch dargestellt. Sie repräsentieren den für die spätere Anwendung des Modells auf reale Eiskörper relevanten Bereich der horizontalen Auflösungen von 500 m bis 2000 m. Dargestellt sind die Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes an der Eisoberseite  $u_s$ ,  $v_s$  und  $w_s$  in  $\text{m a}^{-1}$ , angeordnet in den einzelnen Zeilen der Abbildung, geordnet nach der Kantenlänge in den Spalten. Erwartungsgemäß treten die größten Geschwindigkeiten  $u_s$  in der Richtung des Oberflächengradienten auf. Sie sind unabhängig von der Kantenlänge in den Bereichen der Felsbettvertiefungen aufgrund der größeren Eismächtigkeit maximal. Durch die hier vorgenommene Wahl der Materialparameter und der Geometrie vereinfacht sich die Gleichung zur Bestimmung der Geschwindigkeit nach der SIA (Gl. 2.71) und lautet (Pattyn et al. 2008)

$$u_s = u|_{z_s} = \frac{A}{n+1} (\rho g \tan \alpha)^n H^{n+1} + u_b. \quad (5.3)$$

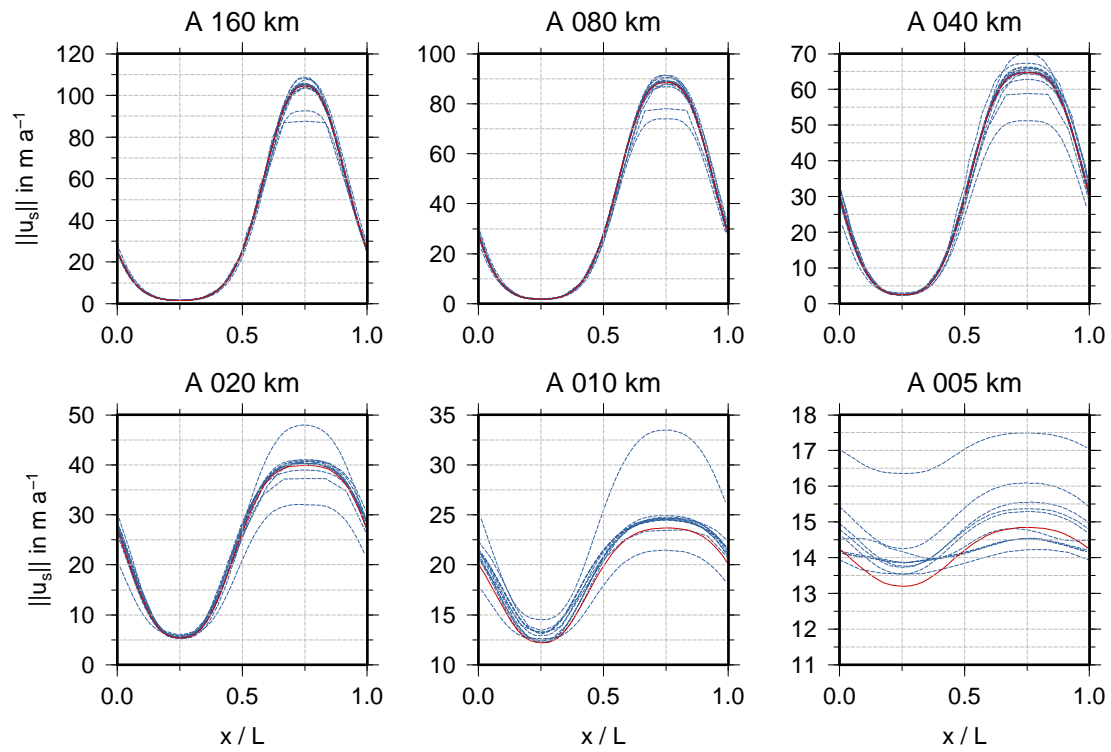
Die Geschwindigkeit ist abhängig von der Neigung der Eisoberfläche  $\alpha$  und der lokalen Eisdicke  $H$ , aber unabhängig von der horizontalen Ausdehnung  $L$ . Die basale Geschwindigkeit  $u_b$  ist in diesem Telexperiment Null. Das Maximum der Oberflächengeschwindigkeit ist demnach für alle  $L$  konstant ( $\max(u_s) = 119.69 \text{ m a}^{-1}$ ). Die Abnahme der Geschwindigkeit  $u_s$  von etwa  $88 \text{ m a}^{-1}$  auf etwa  $40 \text{ m a}^{-1}$  (obere Zeile in Abb. 5.2 und Tab. 5.1) ist ein typisches Merkmal der Modelle höherer Ordnung. Die Ausbildung einer Geschwindigkeitskomponente  $v_s$  in die zur Neigung orthogonale Richtung ist auf die Berücksichtigung horizontaler Longitudinalspannungen zurückzuführen und ebenfalls ein Merkmal der Modelle höherer Ordnung. Ein gravitativer Antrieb in diese Richtung findet nicht statt. Wenn topographische Veränderungen auftreten, entwickeln sich longitudinale Spannungsgradienten, welche zu einer Glättung des Geschwindigkeitsfeldes führen (obere Zeile in Abb. 5.2). Die Wirkung einzelner Undulationen im Felsbett auf die Geschwindigkeit an der Oberfläche wird für größer werdende Verhältnisse von Eisdicke zu horizontaler Ausdehnung  $\epsilon = H/L$  zunehmend kleiner. Die schnelle Abfolge der Felsbettundulationen mit hoher Amplitude wirkt dann wie eine einzelne basale Grenzschicht, die auf die überlagerte ungestörte Eisschicht eine erhöhte Reibung ausübt.

In Abbildung 5.3 ist der Betrag der horizontalen Oberflächengeschwindigkeit  $\|u_s\| = \sqrt{u_s^2 + v_s^2}$  für die in der Vergleichsstudie geforderten Kantenlängen entlang eines Profils in  $x$ -Richtung an der Stelle  $y = L/4$  dargestellt (vgl. Pattyn et al. 2008, Abb. 5). Rot markiert sind die Ergebnisse dieser Arbeit und blau die Ergebnisse der weiteren an der Studie teilnehmenden Modelle. Bei einer Kantenlänge von 160 km ist der Einfluss der Longitudinalspannungen auf das Geschwindigkeitsfeld noch relativ gering. Die erreichten Geschwindigkeiten weichen nur geringfügig von der SIA-Lösung ab. Mit abnehmender Kantenlänge reduziert sich die maximale Oberflächengeschwindigkeit auf etwa  $15 \text{ m a}^{-1}$  ( $L = 5$  km) und liegt damit um eine Größenordnung unter der nach der SIA berechneten Geschwindigkeit. Für alle Kantenlängen liegen die Simulationsergebnisse dieser Arbeit deutlich innerhalb der Standardabweichung der beteiligten Modelle. Die Ergebnisse sind für einen quantitativen Vergleich in Tabelle 5.1 (S. 60) zusammengefasst.



**Abbildung 5.2:** Komponenten des simulierten Fließgeschwindigkeitsfeldes an der Eisoberseite ( $u_s$ ,  $v_s$ ,  $w_s$ ) in  $\text{m a}^{-1}$  (zeilenweise angeordnet) für ausgewählte Kantenlängen  $L = 80, 40$  und  $20$  km des Teilerperiments ISMIP-HOM A. Die  $x$ - und  $y$ -Achsen sind jeweils auf die Kantenlänge normiert.





**Abbildung 5.3:** Betrag der horizontalen Geschwindigkeit  $\|u_s\| = \sqrt{u_s^2 + v_s^2}$  an der Eisoberseite entlang eines Schnittes an  $y = L/4$  für verschiedene Kantenlängen im Intervall  $L = 5$  bis 160 km. Die Ergebnisse der an der Studie teilnehmenden Modelle sind blau und die Ergebnisse dieser Arbeit rot dargestellt.

**Tabelle 5.1:** Vergleich der in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse für die Experimente A und C mit denen der Vergleichsstudie ISMIP-HOM (siehe Pattyn et al. 2008, Tab. 4): Mittelwert  $\mu$ , Standardabweichung  $\sigma$  der maximalen horizontalen Geschwindigkeit an der Eisoberseite  $\max(u_s)$  in  $\text{m a}^{-1}$  sowie die Anzahl der beteiligten Modelle  $n$ . Zum Vergleich sind die Nicht-*full-Stokes* (NFS)- und *full-Stokes* (FS)-Ergebnisse eingetragen. Für mit – gekennzeichnete Experimente kann keine Lösung angegeben werden.

		Exp. A		Exp. C	
		NFS	FS	NFS	FS
<b>160 km</b>	$\max(u_s)$	104.52	104.54	138.23	138.35
	$\mu$	104.77	102.63	141.38	143.75
	$\sigma$	4.99	6.51	22.40	11.81
	$n$	11	8	12	7
<b>80 km</b>	$\max(u_s)$	88.47	88.33	58.68	58.72
	$\mu$	88.33	87.10	60.99	60.15
	$\sigma$	5.15	4.04	6.05	2.25
	$n$	11	8	11	7
<b>40 km</b>	$\max(u_s)$	64.67	64.18	27.67	27.69
	$\mu$	64.73	63.89	28.48	29.32
	$\sigma$	4.83	2.35	1.77	1.09
	$n$	11	8	11	7
<b>20 km</b>	$\max(u_s)$	39.85	-	18.04	18.04
	$\mu$	41.03	39.73	18.31	19.05
	$\sigma$	3.92	1.30	1.02	0.57
	$n$	11	7	11	7
<b>10 km</b>	$\max(u_s)$	23.68	-	15.47	-
	$\mu$	26.04	24.36	15.39	16.53
	$\sigma$	4.26	0.47	1.50	0.31
	$n$	10	6	11	6
<b>5 km</b>	$\max(u_s)$	14.85	-	-	-
	$\mu$	15.33	14.56	12.14	16.00
	$\sigma$	1.76	0.19	5.23	0.01
	$n$	7	6	9	5

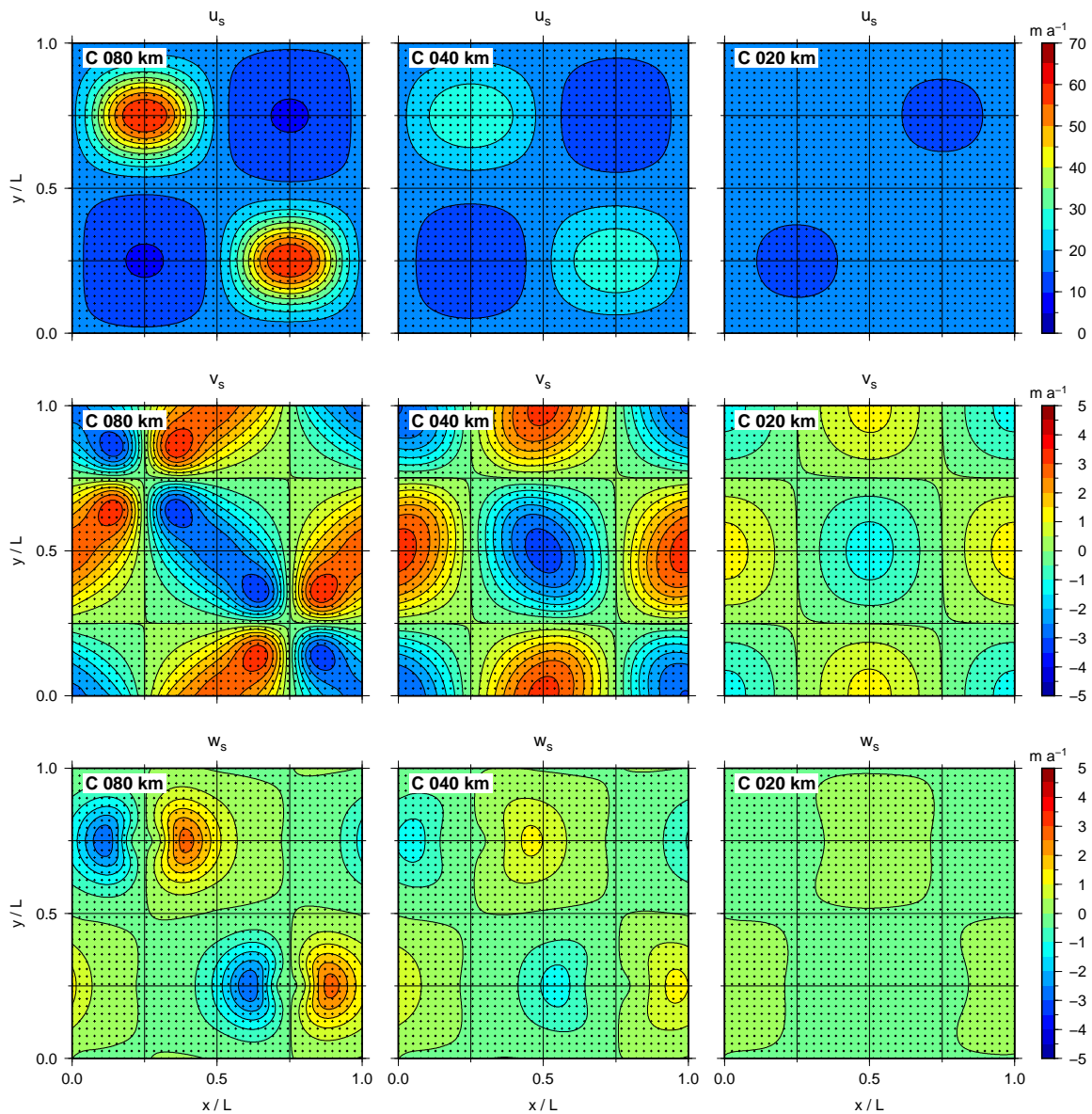
### 5.1.2 Eisstrom mit variablem Gleitparameter (Experiment C)

Reale Eisströme erreichen an ihrer Basis die Druckschmelzpunkttemperatur und gleiten auf dem Untergrund. Der Beitrag der Gleitbewegung an der Gesamtgeschwindigkeit kann deutlich größer sein als der Beitrag, der durch interne Deformation entsteht. Das dabei auftretende Fließverhalten wird im Experiment C berechnet. Der in diesem Fall betrachtete Eiskörper ist in positive  $x$ -Richtung um den Winkel  $\alpha = 0.1^\circ$  geneigt und weist im Gegensatz zum Experiment A eine zur Eisoberfläche parallel verlaufende Eisbasis auf. Es wird der basale Gleitparameter  $\beta^2$  vorgegeben (Gl. 2.64), was einem für Eisströme üblicherweise verwendeten linearen Gleitgesetz entspricht. Der Gleitparameter variiert mit der Frequenz  $\omega = 2\pi/L$  zwischen 0 und  $2000 \text{ Pa a m}^{-1}$  nach

$$\beta^2(x, y) = 1000 + 1000 \sin(\omega x) \sin(\omega y). \quad (5.4)$$

Die Minima des Gleitparameters ( $\beta^2 = 0$ ) liegen bei  $(x/L = 3/4, y/L = 1/4)$  sowie  $(x/L = 1/4, y/L = 3/4)$ . An diesen Stellen ist das Eis vollständig vom Untergrund entkoppelt. Es sei hier darauf hingewiesen, dass im Fall  $\beta^2 = 0$  eine vollständige Entkopplung des Eises vom Untergrund erfolgt, wie sie in Schelfeisen auftritt. Das Experiment ist daher in besonderer Weise geeignet, den kontinuierlichen Übergang zwischen partiellem Gleiten und freiem Gleiten zu simulieren, wie er im Bereich der Aufsetzzone natürlicher Eiskörper erfolgt.

Die Ergebnisse der Simulationen mit dem neu entwickelten Fließmodell sind in Analogie zum Experiment A in Abbildung 5.4 für die Kantenlängen  $L = 80, 40$  und  $20 \text{ km}$  exemplarisch dargestellt.



**Abbildung 5.4:** Komponenten des Fließgeschwindigkeitsfeldes an der Eisoberseite ( $u_s$ ,  $v_s$ ,  $w_s$ ) in  $\text{m a}^{-1}$  (zeilenweise angeordnet) für ausgewählte Kantenlängen  $L \in [80, 40, 20]$  km des Teilerperiments ISMIP-HOM C. Die  $x$ - und  $y$ -Achsen sind jeweils auf die Kantenlänge normiert.

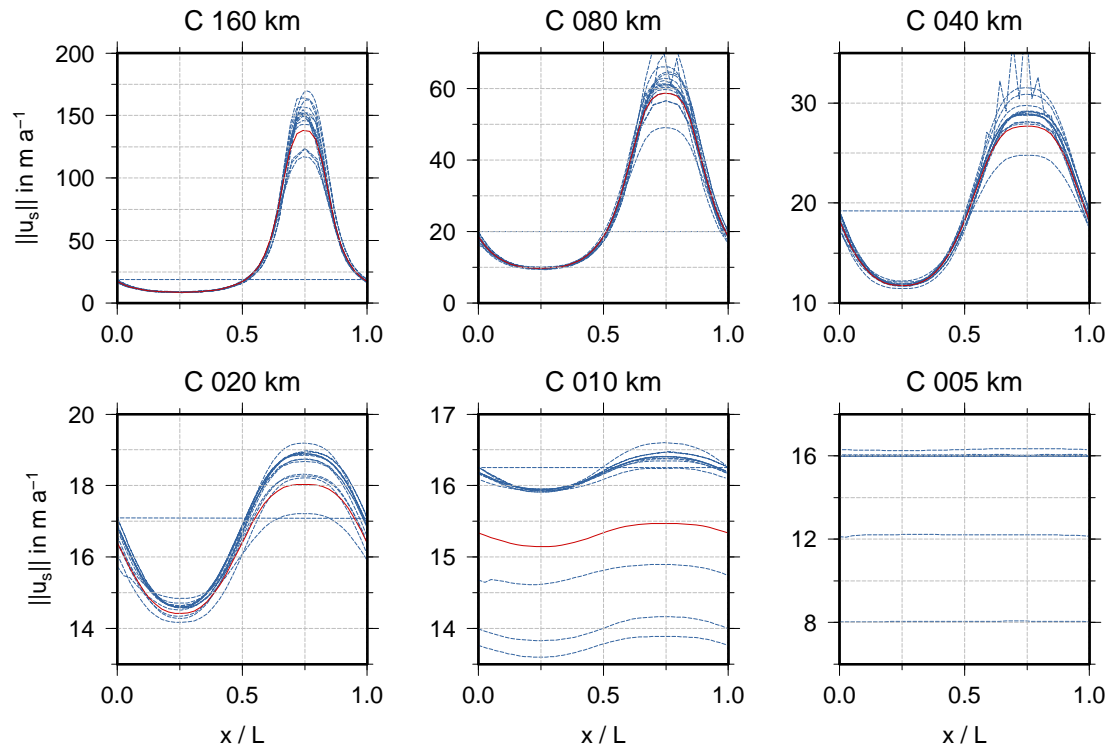
Ohne basales Gleiten würde aufgrund der geringen Oberflächenneigung die horizontale Geschwindigkeit an der Eisoberseite nach der SIA einen Wert von  $0.2 \text{ m a}^{-1}$  nicht übersteigen. Wird basales Gleiten zugelassen, wird im Fall der SIA die durch die Neigung des Eiskörpers hervorgerufene Oberflächenschubspannung durch die an der Basis wirkende Schubspannung ohne die Berücksichtigung der Longitudinalspannungsgradienten kompensiert. Das verwendete lineare Gleitgesetz liefert in diesem Fall eine basale Geschwindigkeit

$$u_b = (\rho g \tan \alpha) / \beta^2 \quad (5.5)$$

als zusätzlichen Beitrag zur Oberflächengeschwindigkeit in Gl. 5.3. Sowohl die basale Ge-

schwindigkeit als auch die Geschwindigkeit an der Eisoberseite sind nach der Theorie der SIA unabhängig von der horizontalen Ausdehnung.

In Abbildung 5.5 ist der Verlauf der Oberflächengeschwindigkeit entlang eines Profils über die Maxima des basalen Gleitparameters an der Stelle  $y = L/4$  für die Kantenlängen  $L = 160$  bis  $10$  km dargestellt. Für  $L = 5$  km konnte mit der gewählten Gitterauflösung keine numerische Lösung gefunden werden.



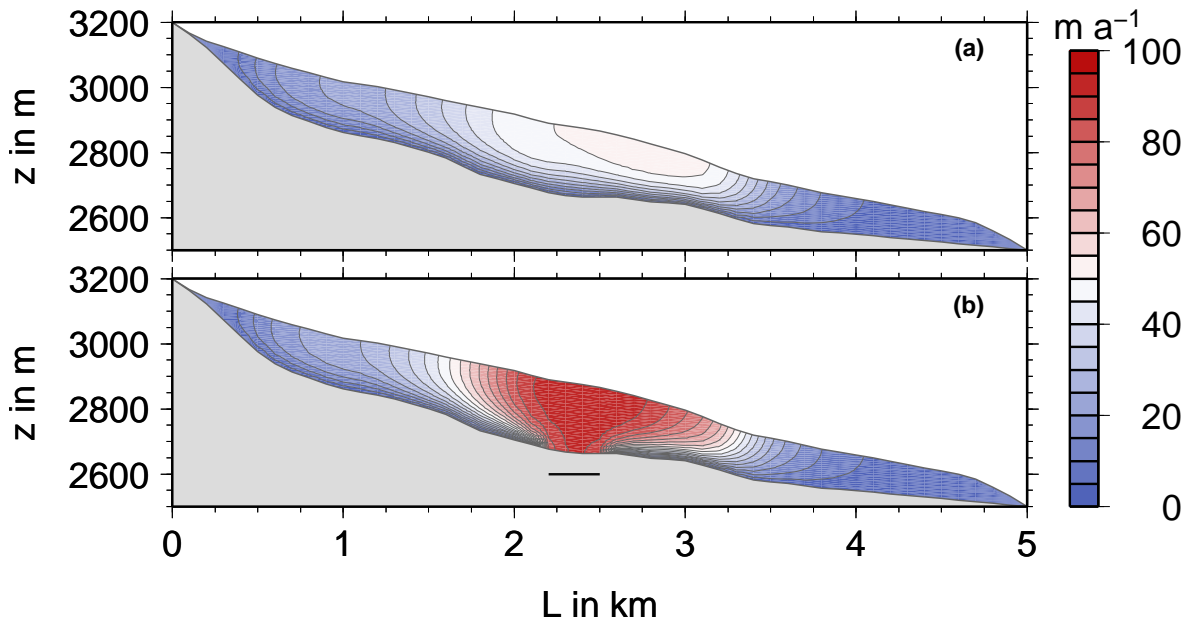
**Abbildung 5.5:** Betrag der horizontalen Geschwindigkeit  $\|u\|_s = \sqrt{u_s^2 + v_s^2}$  an der Eisoberseite entlang eines Schnittes an  $y = L/4$  für verschiedene Kantenlängen  $L \in \{5, 10, 20, 40, 80, 160\}$  km. Die an der Studie teilnehmenden Modelle sind blau und die Ergebnisse dieser Arbeit rot dargestellt. Für  $L = 5$  km konnte in dieser Arbeit keine Lösung gefunden werden.

Wie auch in Experiment A nimmt der Betrag der Oberflächengeschwindigkeit mit zunehmendem Eisdicken- zu Eislängenverhältnis  $\epsilon$  ab. Die Ergebnisse der teilnehmenden Modelle zeigen mit abnehmenden Kantenlängen untereinander deutlich verschiedene Ergebnisse. Dieser Umstand wird in Tabelle 5.1 durch die Angabe der Standardabweichung  $\sigma$  verschleiert, die für abnehmende Kantenlängen ebenfalls abnimmt.

### 5.1.3 Alpengletscher (Experiment E)

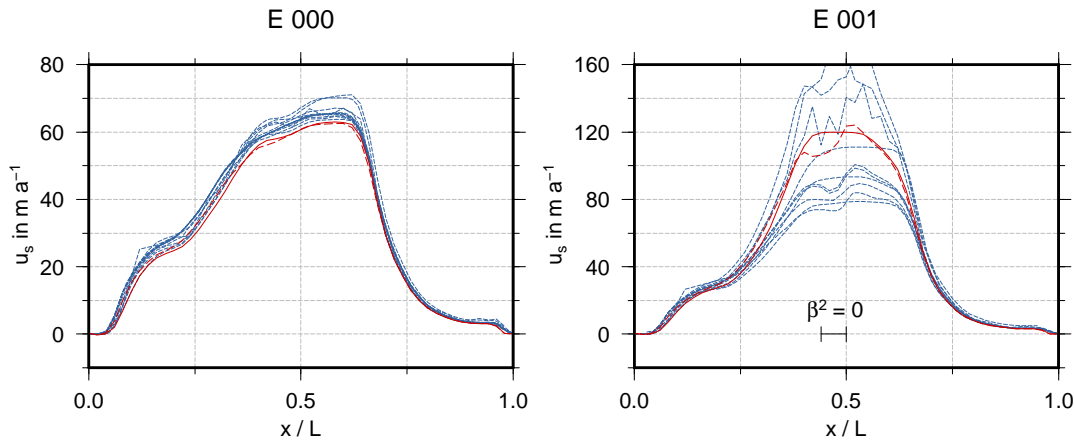
In diesem Experiment werden die Oberflächen- und Felsbetthöhen entlang des in der Schweiz gelegenen Gletschers Haut Glacier d'Arolla in leicht modifizierter Form genutzt, um die Fließdynamik eines realen Eiskörpers zu berechnen. Es ist als zweidimensionales  $(x, z)$  Experiment entlang der zentralen Fließlinie angelegt. Der Gletscher hat in Längsrichtung eine Ausdehnung

von 5 km und wurde auf einem Gitter mit 100 m Gitterabstand diskretisiert. An seiner berg- und talseitigen Begrenzung sind sowohl die Eisdicke als auch die Geschwindigkeit Null. Im ersten Teilexperiment (E000) ist das Eis an der Basis festgefroren. Das zweite Teilexperiment (E001) berücksichtigt eine schmale Zone an der Eisbasis, in der das Eis reibungsfrei gleiten kann ( $\beta^2 = 0$  für  $2220 \text{ m} \leq x \leq 2500 \text{ m}$ ). Die Ergebnisse der Modellsimulation (LTSML) sind für die Teilexperimente E000 und E001 als Vertikalschnitte in Abbildung 5.6 graphisch dargestellt. Abbildung 5.7 zeigt die Verteilung der simulierten horizontalen Geschwindigkeiten an



**Abbildung 5.6:** Vertikalschnitte des horizontalen Geschwindigkeitsfeldes entlang der zentralen Fließlinie in  $\text{m a}^{-1}$  dargestellt für die Teilexperimente (a) E000: ohne basales gleiten und (b) E001: mit lokal freiem Gleiten für  $2220 \text{ m} \leq x \leq 2500 \text{ m}$ .

der Eisoberfläche sowohl für den vollständig am Felsbett angefrorenen Eiskörper (E000) als auch für den an wenigen Gitterpunkten entkoppelten Eiskörper (E001). Die Ergebnisse dieser Arbeit (rot) sind zum Vergleich mit den Ergebnissen anderer Modelle (blau) dargestellt. Dabei erfolgt hier die Unterscheidung zwischen den Simulationen in der LTSML- (rote durchgezogene Linie) und der *full-Stokes*-Version (rote gestrichelte Linie). Die Unterschiede im Betrag der Oberflächengeschwindigkeit zwischen den Teilexperimenten sind sehr deutlich. Im Teilexperiment E000 wird sowohl in der LTSML- als auch in der *full-Stokes*-Lösung des Modells eine maximale Geschwindigkeit von etwa  $62 \text{ m a}^{-1}$  erreicht. Diese liegt geringfügig unter den Geschwindigkeiten der anderen eingereichten Modelle (Abb. 5.7a). Im Teilexperiment E001, in dem in einer kleinen Region freies Gleiten zulässig ist, werden Oberflächengeschwindigkeiten von annähernd  $120 \text{ m a}^{-1}$  erreicht (Abb. 5.7b). In diesem Fall bildet die *full-Stokes*-Lösung an der Grenze zwischen Gleiten und Nichtgleiten ein lokales Minimum aus, welches ein charakteristisches Merkmal der *full-Stokes*-Lösung darstellt (siehe Pattyn et al. 2008, Abb. 10). Die Ergebnisse liegen innerhalb der Bandbreite der eingereichten Modellergebnisse. Insgesamt weisen die Ergebnisse der verschiedenen Modelle eine hohe Streuung auf.



**Abbildung 5.7:** Vergleich der simulierten Oberflächengeschwindigkeiten in  $\text{m a}^{-1}$  für die Telexperimente (a) E000: ohne basales Gleiten und (b) E001: mit lokal freiem Gleiten. Die Ergebnisse dieser Arbeit sind rot, die anderer Modelle blau dargestellt.

#### 5.1.4 Prognostische Simulation (Experiment F)

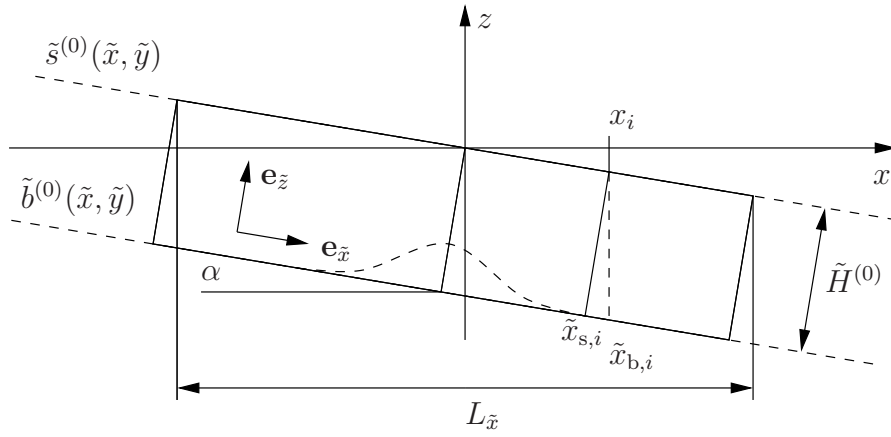
Dieses Experiment betrachtet die zeitabhängige Entwicklung der Eismächtigkeit eines geneigten Eiskörpers über einer gaußförmigen Erhebung im Felsbett. Ausgehend von einer Geometrie, die nicht im stationären Gleichgewicht ist, wird bei Vernachlässigung von Ablation und Akkumulation ( $a_s = a_b = 0$ ) die Eismächtigkeitsgleichung (Gl. 4.36) gelöst. Als Startgeometrie wird ein in  $x$ -Richtung geneigter Eiskörper mit paralleler Eisoberseite und Eisbasis gewählt, der zunächst eine Eisdicke von  $\tilde{H}^{(0)} = 1000$  m aufweist. Das Felsbett wird mit einer gaußförmigen Erhebung überlagert. In einem der Neigung  $\alpha = 3^\circ$  folgenden lokalen Koordinatensystem lassen sich die Koordinaten der Eisbasis  $\tilde{z}_b = \tilde{b}^{(0)}$  und der Eisoberfläche  $\tilde{z}_s = \tilde{s}^{(0)}$  angeben mit

$$\tilde{z}_s = \tilde{s}^{(0)}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \quad \text{und} \quad (5.6)$$

$$\tilde{z}_b = \tilde{b}^{(0)}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\tilde{H}^{(0)} + a_0 e^{-(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)/\sigma^2}. \quad (5.7)$$

Dabei sind  $a_0 = 0.1\tilde{H}^{(0)}$  und  $\sigma = 10\tilde{H}^{(0)}$  die Amplitude und Breite der Gaußfunktion an der Eisbasis. Das Modellgebiet hat eine horizontale Ausdehnung von  $L_{\tilde{x}} = L_{\tilde{y}} = 100\tilde{H}^{(0)}$  mit dem Koordinatenursprung  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$  im Zentrum. Ein zweidimensionaler Schnitt durch die Geometrie entlang  $y = 0$  ist in Abbildung 5.8 dargestellt.

Im Gegensatz zu den Telexperimenten A-E wird hier der Exponent im Fließgesetz (Gl. 2.22)  $n = 1$  gesetzt, wodurch die effektive Viskosität nicht mehr von der effektiven Deformationsrate und damit vom Geschwindigkeitsfeld abhängt. Für den hier betrachteten isothermalen Fall ( $A = \text{konst.}$ ) ist die effektive Viskosität eine Konstante  $\mu = (2A)^{-1}$ . Es werden horizontale periodische Randbedingungen sowie eine spannungsfreie Oberfläche angenommen. Im Telexperiment F000 ist die Eisbasis am Untergrund festgefroren, so dass  $\mathbf{u}|_{z_b} = \mathbf{0}$  gilt. Der basale Gleitparameter  $\beta^2 = (A\tilde{H}^{(0)})^{-1}$  wird für das Telexperiment F001 vorgegeben. Der Parameter  $A = 2.140373 \times 10^{-7} \text{ Pa}^{-1} \text{ a}^{-1}$  im Fließgesetz wird so gewählt, dass sich für den ungestörten Fall der parallelen Ausrichtung von Eisoberseite und -unterseite ohne basales Gleiten als ana-



**Abbildung 5.8:** Geometrie des Eiskörpers in den Telexperimenten F000 und F001.

lytische Lösung eine Oberflächengeschwindigkeit von  $\tilde{u}_s^{(0)} = 100 \text{ m a}^{-1}$  ergibt (Gudmundsson 2003).

Für das in dieser Arbeit verwendete kartesische Koordinatensystem mit  $x$  und  $y$  horizontal sowie  $z$  und  $\zeta$  vertikal ist es nötig, alle Koordinaten  $\tilde{\mathbf{x}}$  in das Koordinatensystem des Fließmodells mit  $\mathbf{x} = \mathbf{R}_\alpha \tilde{\mathbf{x}}$  zu rotieren. Die Rotation erfolgt um die  $y$ -Achse und wird durch die Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

beschrieben. Die horizontalen Koordinaten transformieren sich daher zu

$$x = \tilde{x} \cos \alpha + \tilde{s}^{(0)}(\tilde{x}, \tilde{y}) \sin \alpha = \tilde{x} \cos \alpha \quad \text{und} \quad (5.9)$$

$$y = \tilde{y}. \quad (5.10)$$

Ein Punkt an der Eisoberseite  $\tilde{z}_s = 0$  im lokalen Koordinatensystem hat dann die Höhe

$$z_s = -\tilde{x} \sin \alpha + \tilde{s}^{(0)}(\tilde{x}, \tilde{y}) \cos \alpha = -\tilde{x} \sin \alpha. \quad (5.11)$$

Im kartesischen Koordinatensystem wird die Höhe der Eisbasis an der gleichen Position wie die Höhe der Eisoberfläche benötigt. Daher muss die Position an der Eisbasis  $\tilde{x}_b$  aus der Position an der Eisoberfläche  $\tilde{x}_s$  bestimmt werden (siehe Abb. 5.8):

$$\tilde{x}_b = \tilde{x}_s + \tilde{H}^{(0)} \tan \alpha. \quad (5.12)$$

Für die Höhe der Eisbasis und die Anfangseismächtigkeit gilt zusätzlich

$$z_b = -\tilde{x}_b \sin \alpha + \tilde{b}^{(0)}(\tilde{x}_b, \tilde{y}) \cos \alpha \quad \text{und} \quad H^{(0)} = \frac{\tilde{H}^{(0)}}{\cos \alpha}. \quad (5.13)$$

Im Rahmen der Vergleichsstudie ist es nötig, die Modellergebnisse wieder in den lokalen Koordinaten  $\tilde{\mathbf{x}}$  anzugeben. Eine entsprechende Rücktransformation erfolgt durch die Anwendung der inversen Rotation auf die Ortskoordinaten mit

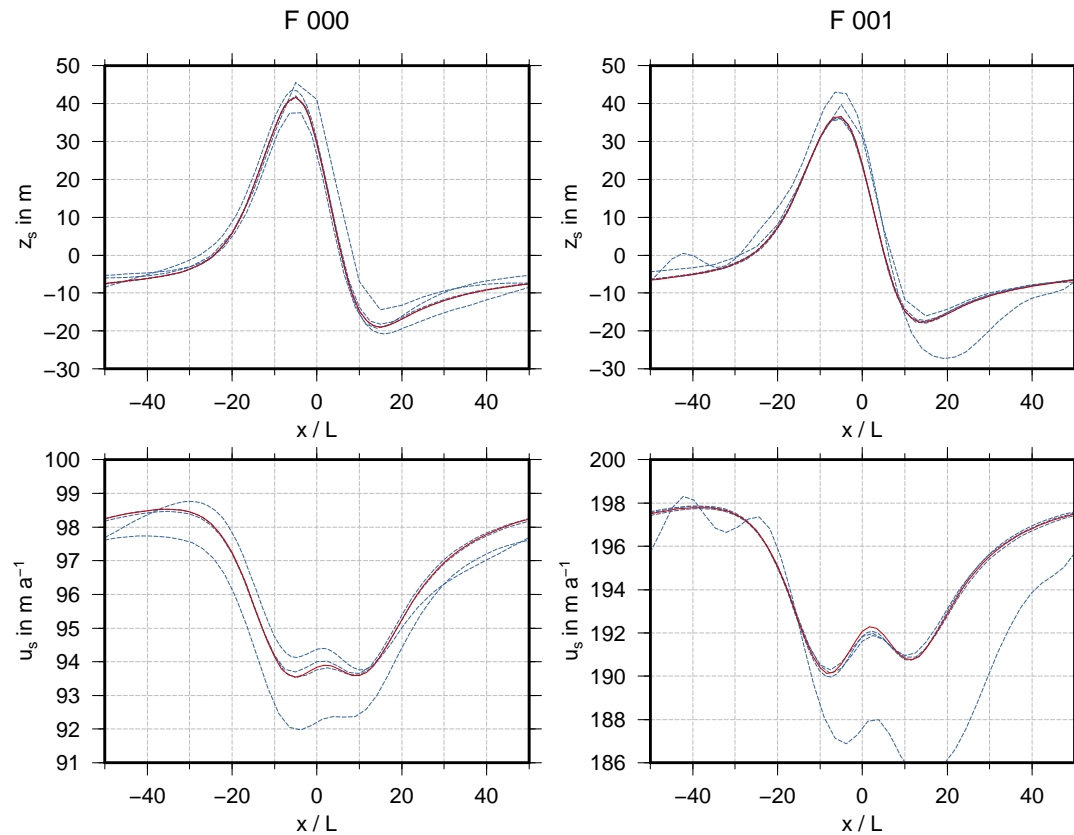
$$\tilde{x}_s = x \cos \alpha - z_s \sin \alpha, \quad (5.14)$$

$$\tilde{y}_s = y \quad \text{und} \quad (5.15)$$

$$\tilde{z}_s = x \sin \alpha + z_s \cos \alpha \quad (5.16)$$



sowie in analoger Weise für die Geschwindigkeitskomponenten. In Abbildung 5.9 sind die Ergebnisse des *full-Stokes*-Modells dieser Arbeit dargestellt. Die Simulationsergebnisse zeigen



**Abbildung 5.9:** Oberflächenhöhe  $z_s$  in m und Oberflächengeschwindigkeit  $u_s$  in  $\text{m a}^{-1}$  für die Teilerperimente F000 ohne basales Gleiten (links) und F001 mit basalem Gleiten (rechts). Die Ergebnisse dieser Arbeit (*full-Stokes*-Lösung) sind rot und die anderer Modelle blau dargestellt.

eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen anderer Modelle. Es zeigt sich insbesondere im Vergleich mit Pattyn et al. (2008, Abb. 12 und 13), dass die hier vorgestellten Ergebnisse sowohl mit als auch ohne basales Gleiten die charakteristischen Eigenschaften eines *full-Stokes*-Modells aufweisen.

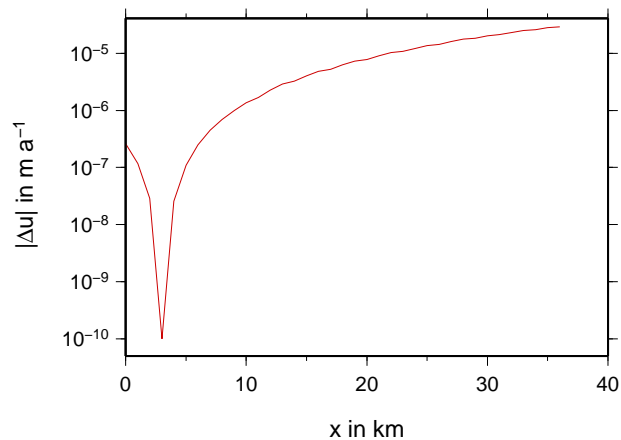
## 5.2 Tafeleisberg

Die Experimente aus der Vergleichstudie ISMIP-HOM behandeln überwiegend die Dynamik der gegründeten Eisgebiete. Experiment C betrachtet das basale Gleiten und damit das Verhalten von Eisströmen. Es geht für den Grenzfall der scherspannungsfreien Eisunterseite ( $\beta^2 = 0$ ) in ein Schelfeisexperiment über. Im Folgenden wird ein idealer rechteckiger Eisberg mit Kantenlänge  $L_x = 72$  km und  $L_y = 40$  km vorausgesetzt, dessen Dichte ( $\rho = 915 \text{ kg m}^{-3}$ ), Temperatur ( $T = -20^\circ\text{C}$ ) und Eismächtigkeit ( $H = 250$  m) konstant sind. Es wird angenommen, dass kein Massenaustausch mit der Umgebung erfolgt ( $a_s = a_b = 0$ ) und sich seine Geometrie nicht verändert, so dass  $\partial_t H = 0$  gilt.

Als horizontale Randbedingung gilt das Kräftegleichgewicht (Gl. 2.70) an der äußeren Berandung (Kalbungslinie), welches bereits in Kapitel 2.3.3 behandelt wurde. Sind sowohl Eisober- als auch Eisunterseite scherspannungsfrei, so ist das horizontale Geschwindigkeitsfeld tiefeninvariant (MacAyeal et al. 1986). Insbesondere bei einer vertikal konstanten Temperatur ( $A(T) = \textit{konst.}$ ) reduziert sich das Problem auf die zweidimensionale Betrachtung des horizontalen Geschwindigkeitsfeldes  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  (vgl. Kap. 3.1). Ziel dieses Experiments ist es, die Gültigkeit des neuen Fließmodells für den scherspannungsfreien Fall zu untersuchen. Aufgrund der einfachen Geometrie und Wahl der Parameter ist es möglich, eine analytische Lösung für das Geschwindigkeitsfeld zu bestimmen. Nach Jansen et al. (2005) ergibt sich ein zum Mittelpunkt des Eisbergs ( $x_0, y_0$ ) rotationssymmetrisches Feld mit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a = 3AH^3 \left[ \frac{g\rho}{6} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{sw}}} \right) \right]^3. \quad (5.17)$$

In Abbildung 5.10a ist der Betrag des resultierenden Geschwindigkeitsfeldes der Modellrechnung auf einem Gitter mit einer horizontalen Auflösung von  $dx = dy = 1000$  m dargestellt. Vertikal wurden fünf Schichten berücksichtigt, die in dem dreidimensionalen Fließmodell minimal nötig sind, um die oberen und unteren Randbedingungen zu diskretisieren. Der Vergleich der analytischen Lösung mit der numerischen Lösung in Abbildung 5.11 zeigt die im Rahmen der numerischen Genauigkeit erreichbare Übereinstimmung.



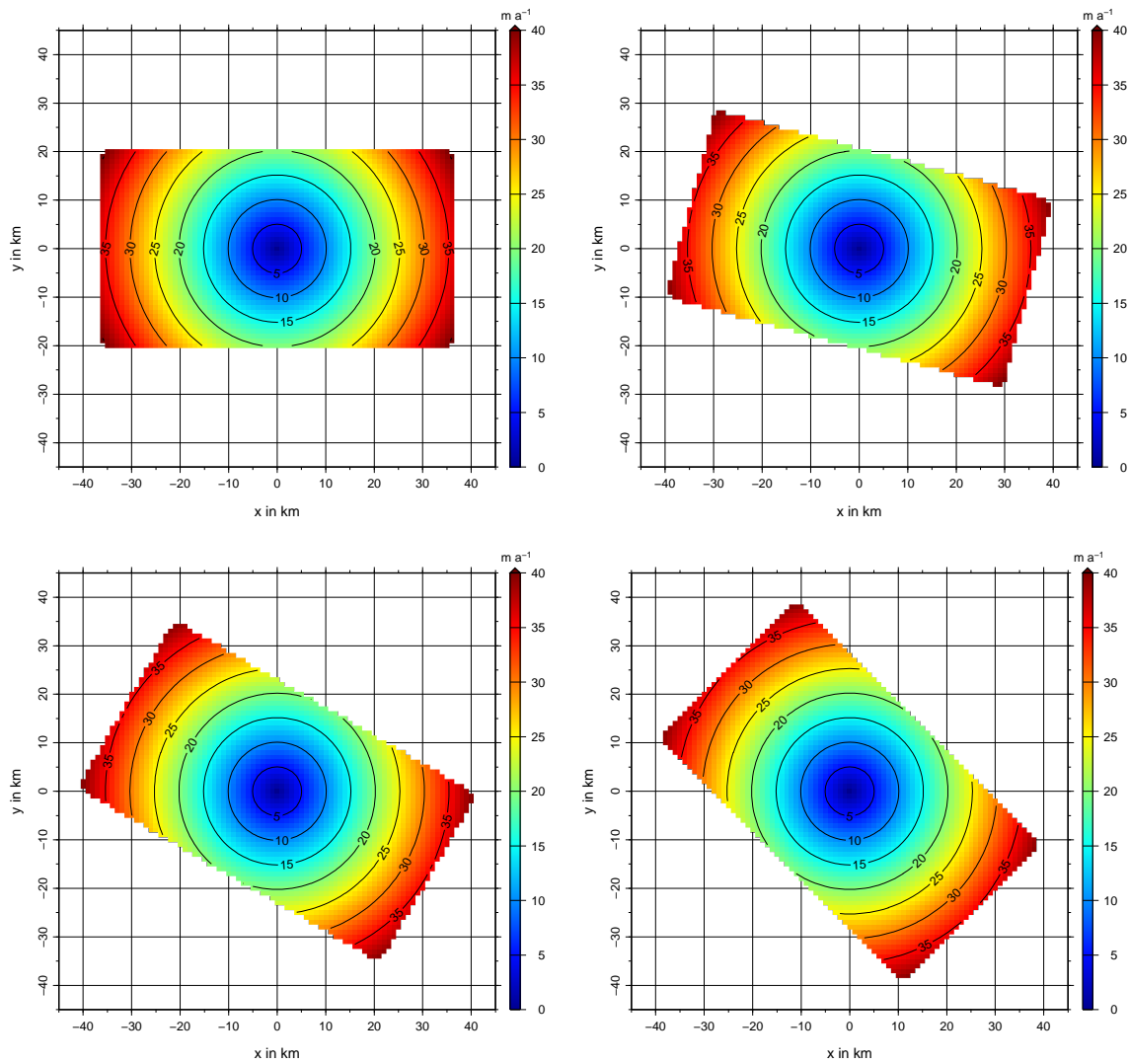
**Abbildung 5.11:** Vergleich zwischen analytischer und numerischer Lösung entlang eines Profils in  $x$ -Richtung, beginnend im Eisbergmittelpunkt  $x = 0$  bis zur äußeren Berandung.

Das in Jansen et al. (2005) verwendete numerische Schelfeismodell nach Grosfeld und Sandhäger (2004) zeigt zusätzlich zum rotationssymmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsfeldes

eine Translationskomponente, um die das Modell im Anschluss korrigiert werden muss. Dieser Effekt tritt hier nicht auf. Insbesondere zeigen weitere Experimente, bei denen der Eisberg um seinen Mittelpunkt rotiert wurde (Abb. 5.10a-d), dass auch für diese Fälle das Geschwindigkeitsfeld die mit Gleichung 5.17 geforderte Gestalt aufweist.

### 5.3 Diskussion

Die Experimente der ISMIP-HOM-Vergleichsstudie, die sich an Modelle höherer Ordnung und *full-Stokes*-Modelle richtet, wurden in dieser Arbeit mit zwei verschiedenen Versionen des neuen Fließmodells TIM-FD<sup>3</sup> gerechnet: (i) die LTSML-Version, welche horizontale Gradienten der vertikalen Geschwindigkeit in der Impulsbilanz der horizontalen Geschwindigkeitskomponenten vernachlässigt und (ii) die *full-Stokes*-Version, welche ohne diese Näherung auskommt. Beide Modellversionen basieren auf dem *multi layer*-Prinzip, bei dem die vertikale Geschwindigkeitskomponente aus den horizontalen Geschwindigkeiten unter Ausnutzung der Kontinuitätsgleichung berechnet wird. Es zeigt sich, dass die LTSML-Version des Fließmodells in allen Experimenten innerhalb der Bandbreite der teilnehmenden Modelle liegt. Lediglich im Experiment C kann für die Kantenlänge 5 km keine konvergierte Lösung angegeben werden. Die *full-Stokes*-Version des Fließmodells scheitert bereits bei einer Kantenlänge von 20 km im Experiment A und bei 10 km im Experiment C. Für die Simulation des realen Eiskörpers in Kapitel 7 ist dies jedoch nicht relevant, da zum einen die Gradienten des subglazialen Felsuntergrunds oder basalen Reibungsparameters nicht so groß sind wie in der Studie und weil zusätzlich die horizontale Auflösung kleiner ist. Es zeigt sich, dass die Integration der Kontinuitätsgleichung zur Bestimmung der Vertikalgeschwindigkeit ursächlich ist für das Versagen des Modells bei sehr kleinen Kantenlängen. Die Anzahl der an der Studie beteiligten Modelle nimmt mit abnehmender Kantenlänge in den Experimenten A und C ebenfalls ab. Im Experiment E zeigen beide Modellversionen die typischen Merkmale der jeweiligen Modellklasse. Der Unterschied zwischen der *full-Stokes*-Lösung und der LTSML-Lösung ist im Fall ohne basales Gleiten sehr gering. Das deutet darauf hin, dass die entsprechenden Ableitungsterme  $\partial_x w$  und  $\partial_y w$  klein sind. Die zeitabhängige Simulation mit dem *full-Stokes*-Modell zeigt gute Übereinstimmung mit den anderen eingereichten Ergebnissen. Es ist nicht klar, ob die Abweichungen der Modelle untereinander auf verschiedenen Näherungen und Implementierungen beruhen oder auf der Wahl der Gitterauflösung und des Konvergenzkriteriums. Dieser Punkt sollte in zukünftigen Vergleichsstudien besser berücksichtigt werden. Das Experiment mit dem Tafelberg zeigt, dass das neue Modell auch für Schelfeissimulationen angewendet werden kann.



**Abbildung 5.10:** Horizontales Fließgeschwindigkeitsfeld in  $\text{m a}^{-1}$  an der Eisbergoberseite für verschiedene Drehwinkel von  $0^\circ$  (oben links) bis  $45^\circ$  (unten rechts) in  $15^\circ$ -Schritten.

# Kapitel 6

## Eiskörpergeometrie und Randbedingungen im Untersuchungsgebiet

### 6.1 Koordinatensysteme und Projektionen

Für die angestrebte numerische Simulation ist es zweckmäßig, das Rechengbiet soweit wie möglich einzuschränken, um unnötige Rechenzeit und Speicherbelegung zu vermeiden. Dazu wird ein lokales Koordinatensystem eingeführt, in dem die  $x$ -Richtung der mittleren Richtung der Aufsetzlinie folgt. Die Länge der  $x$ -Achse ist so gewählt, dass Brunt-Schelfeis und Riiser-Larsen-Schelfeis vollständig enthalten sind. Abbildung 6.1 zeigt das gewählte Rechengbiet (weiße bzw. orange-weiße Linie).

Der Übergang von globalen Koordinaten in Länge, Breite und Höhe zu den lokalen Koordinaten  $x$  und  $y$  erfolgt in zwei Schritten: (i) polarstereographische Projektion (Seeber 2003) mit Nullpunkt im geographischen Südpol und längentreue Abbildung bei  $71^\circ S$  in ein kartesisches Koordinatensystem  $(X, Y)$  und (ii) Translation um  $X_0 = -390$  km,  $Y_0 = 1180$  km und Rotation um den Winkel  $\alpha = 60^\circ$  mit

$$x = X \cos \alpha + Y \sin \alpha - X_0 \quad \text{und} \quad (6.1)$$

$$y = Y \cos \alpha - X \sin \alpha - Y_0. \quad (6.2)$$

Der Ursprung des lokalen Koordinatensystems ist in Abbildung 6.1 durch rote Vektorpfeile gekennzeichnet.

### 6.2 Geometrie des Eiskörpers

#### 6.2.1 Aufsetzlinie, Eisfront und eisfreie Gebiete

Das Untersuchungsgebiet umfasst sowohl gegründetes Eis (Inlandeis, *ice rumples*, *ice rises* und eisbedeckte Inseln) als auch aufschwimmende Bereiche (Schelfeis), die sich bezüglich ihres Fließverhaltens und ihrer physikalischen Randbedingungen stark unterscheiden (siehe Kap. 2). Für die angestrebte numerische Modellierung ist es daher wichtig, zwischen diesen Bereichen zu unterscheiden.

Einzelne Linienabschnitte wurden aus Aufnahmen des im sichtbaren Wellenlängenbereich empfindlichen MODIS-Sensors (*moderate resolution imaging spectroradiometer*) digitalisiert, die zusammengefasst im *mosaic of antarctica* (MOA) (Haran et al. 2005) veröffentlicht wurden. MOA umfasst 260 wolkenfreie Einzelszenen, die zwischen dem 20. November 2003 und 29. Februar 2004 aufgenommen wurden.

In unmittelbarer Nähe zur Kalbungsfront befinden sich die dem Inlandeis vorgelagerten Inseln Lyddan Island, Bakewell Island, Kvitkuven und Skjoldet, ein namenloser *ice rise* sowie der

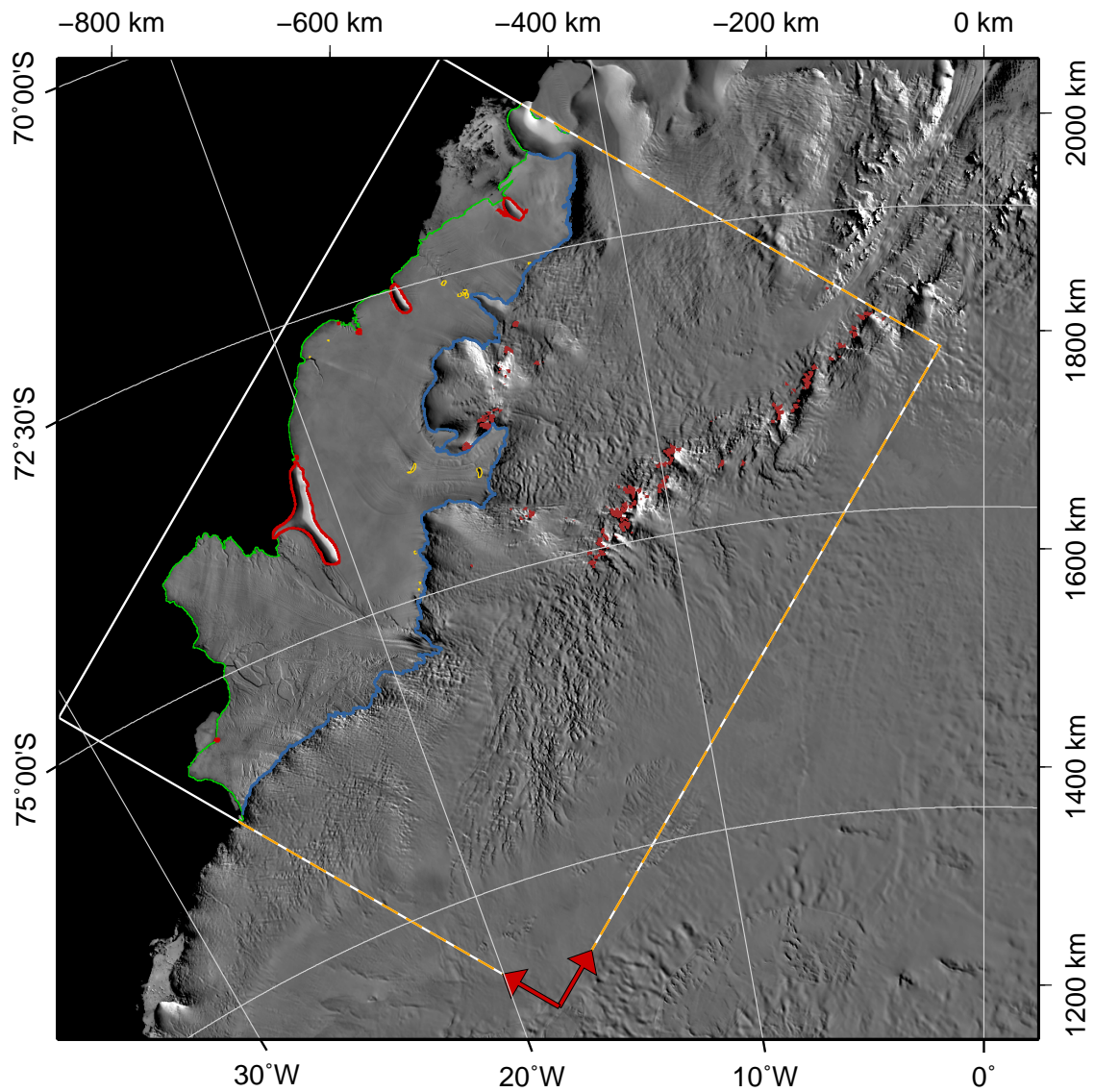
McDonald Ice Rumples, bei dem es sich entgegen seiner Bezeichnung ebenfalls um einen *ice rise* handelt. Von ihnen wird im Allgemeinen angenommen, dass sie das Schelfeis in seiner Ausdehnung stabilisieren und als Ankerpunkte wirken. Der Masseneintrag in das Schelfeis, der von ihnen ausgeht, ist im Vergleich zum Massendurchsatz im Übergang zum Inlandeis zu vernachlässigen. Daher werden sie im Modell als inaktive Bereiche behandelt (siehe Kap. 2.3.4 und rote Markierungen in Abb. 6.1).

Weitere gegründete Bereiche sind vollständig im Schelfeis eingeschlossen (in Abb. 6.1 gelb). Sie verhalten sich entweder wie *ice rises* oder *ice rumples*. Eine genauere Klassifizierung ist zum Teil durch die Auswertung von Informationen aus Radar-Interferogrammen oder einzelner Fließmerkmale wie dem Verlauf von Spalten möglich. Eine Unterscheidung zwischen *ice rise* und *ice rumples* ist in Bezug auf die numerische Modellierung nur insofern nötig, als dass sich die basalen Gleitbedingungen (vgl.  $C_b$  und  $\beta^2$  in Kap. 2.3.2) unterscheiden können.

Obwohl der Übergang zwischen Inlandeis und Schelfeis besonders im Bereich der Auslassgletscher und Eisströme kontinuierlich ist, wird eine Aufsetzlinie festgelegt. Die Position der Aufsetzlinie ist für die gesamte Antarktis in der Antarctic Digital Database (ADD 2006) verzeichnet und dient hier als Basisdatensatz. Zusätzlich werden aus dem MOA digitalisierte Liniensegmente (J. Bohlander, pers. Mitteilung 2008) genutzt. Die Auswertung des Tidensignals in Radar-Interferogrammen (M. Bäessler, 2006, pers. Mitteilung) liefert weitere Anhaltspunkte für den Verlauf der Aufsetzlinie und dient zusammen mit Oberflächeninformationen aus einzelnen ICESat/GLAS-Überflügen (Zwally et al. 2005) der Validierung der beiden erstgenannten Datensätze. Die Aufsetzlinie ist als blaue Linie in Abbildung 6.1 dargestellt.

Eisfreie Berggipfel stellen Barrieren für das Eis dar und kanalisieren den Eisfluss im Inlandeis. Sie werden im numerischen Modell als inaktive Bereiche berücksichtigt. Ihre Positionen sind in der ADD (2006) verzeichnet und in Abbildung 6.1 braun dargestellt.

Die Abgrenzung des zu untersuchenden Drainagesystems vom antarktischen Inlandeisschild erfolgt üblicherweise entlang von Eisscheiden oder Fließlinien. Entlang von Eisscheiden ist die horizontale Fließgeschwindigkeit des Eises über die gesamte Eissäule Null. In die Richtung einer Fließlinie tritt keine horizontale Scherspannung auf, wodurch die horizontale Geschwindigkeit und somit der Massenfluss senkrecht zur Fließlinie verschwindet. Eine derartige Abgrenzung des Untersuchungsgebiets ist hier nicht möglich, da der Stancomb-Wills-Eisstrom neben dem Jutulstraumen, der in das Fimbulisen übergeht, große Teile des Amundsenisen drainiert (Rignot und Thomas 2002). Eine numerische Modellierung mit der angestrebten räumlichen Auflösung ist für das gesamte Einstromgebiet nicht möglich, daher wird der seitliche Rand des Untersuchungsgebietes so gewählt, dass unter Berücksichtigung der Fließrichtung des Eises der Einfluss der seitlichen Ränder auf die Prozesse an der Aufsetzlinie möglichst gering ist. An diesen Rändern müssen das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$ , die Temperatur  $T$  als auch die Eismächtigkeit  $H$  vorgegeben werden. Sie sind in Abbildung 6.1 orange-weiß dargestellt.



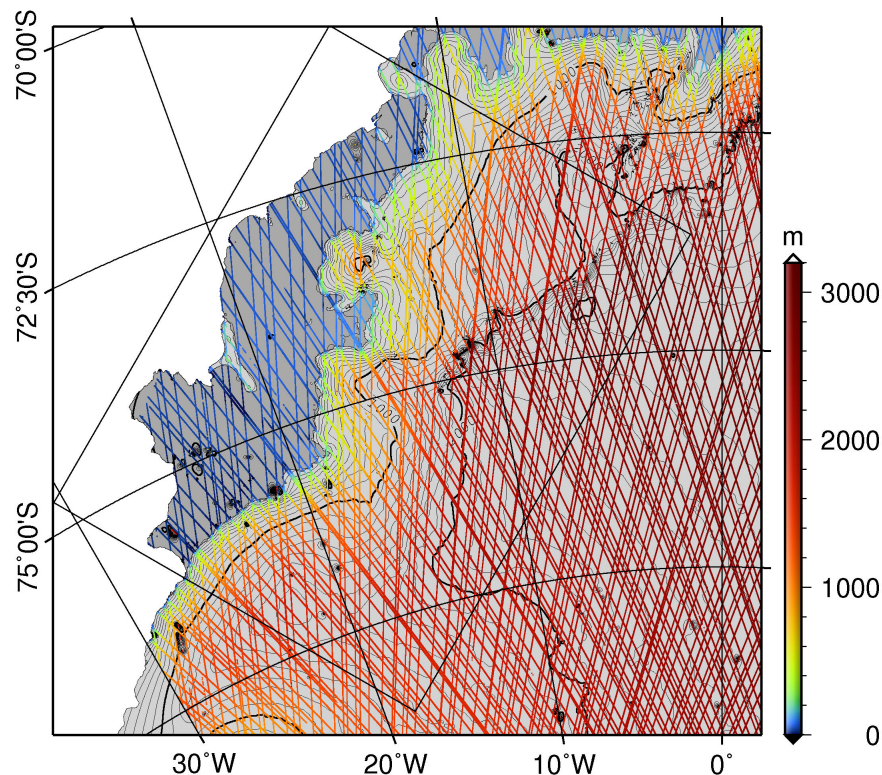
**Abbildung 6.1:** Digitalisierte Liniensegmente zur Einteilung glaziologischer Einheiten: Kalbungslinie (grün), Aufsetzlinie (blau), gegründete Bereiche an der Kalbungslinie (rot) und im Inneren des Schelfeises (gelb), eisfreie Bergipfel (braun) und seitliche Begrenzung des Modellgebiets (orange-weiß). Der Ursprung des lokalen kartesischen Koordinatensystems ist im unteren Bildabschnitt durch rote Vektorpfeile gekennzeichnet. Die zusätzliche Achsenbeschriftung entspricht X und Y in polarstereographischer Projektion. Das Rechengebiet ist gegenüber dem polarstereographischen Koordinatensystem um  $60^\circ$  gedreht.

## 6.2.2 Topographie

### Primärdatensatz ICESat/GLAS

Die Topographie der Eisoberseite hat einen wesentlichen Einfluss auf die Eisdynamik und ist daher eine wichtige Randbedingung für deren numerische Modellierung.

Im Jahr 2003 wurde das Geoscience Laser Altimeter System (GLAS) an Bord des Ice, Clouds and Land Elevation Satellite (ICESat) gestartet. Es vermisst die Eisoberseite der Antarktis zwischen  $63^{\circ}$  S und  $86^{\circ}$  S mit einer gegenüber der Radaraltimetrie (z.B. Rémy und Legrésy 1999) stark verbesserten Genauigkeit. Das auf den GLAS-Daten basierende digitale Höhenmodell (*Digital Elevation Model*, DEM) von DiMarzio et al. (2007) ist für das in dieser Arbeit betrachtete Untersuchungsgebiet nicht geeignet, da das GLAS-DEM die vorgelagerten Inseln Kvitkuven und Skjoldet nicht genügend auflöst. Daher wird ein neues DEM erstellt, das im Wesentlichen auf den GLAS-Daten basiert. Die durch GLAS bestimmte Oberflächenhöhe wird bei einer 60 m durchmessenden Basisfläche des Lasers auf dem Boden auf etwa 15 cm genau bestimmt (Zwally et al. 2002). Die Ungenauigkeit der horizontalen Position der Einzelmessung beträgt 6 m (Massom 2006). Der Messpunktabstand in Profilverichtung beträgt 172 m. Parallele Profile haben einen typischen Abstand von 25 km. In der vorliegenden Arbeit werden GLAS-Daten aus dem Jahr 2003 (Zwally et al. 2005) verwendet, die von M. Bässler und R. Dietrich (2005, pers. Mitteilung) um das Gezeitensignal korrigiert wurden. Eine graphische Darstellung dieser Daten findet sich in Abbildung 6.2. Die Oberflächenhöhen bezüglich des



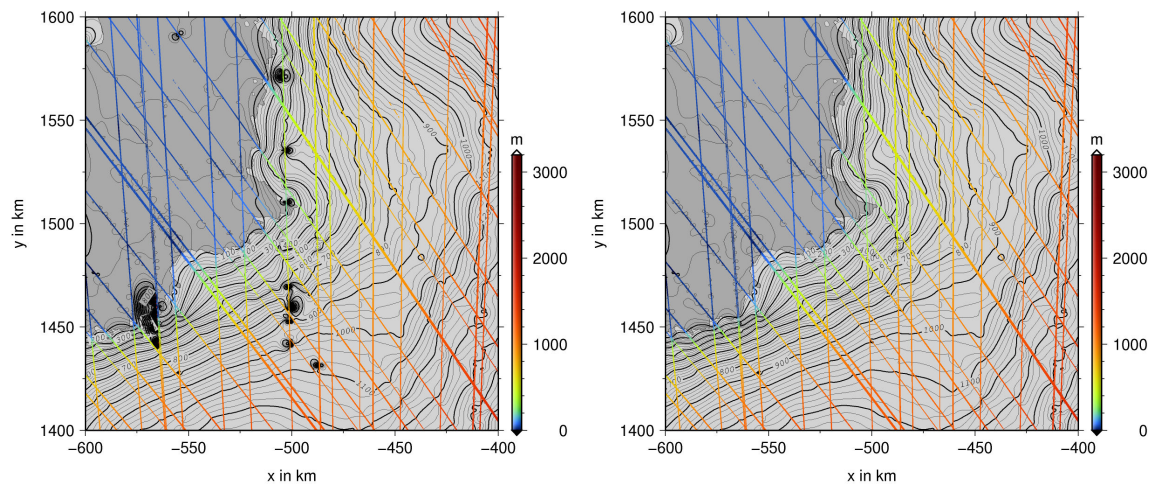
**Abbildung 6.2:** Farbgekodierte ICESat/GLAS-Oberflächenhöhen in m über dem WGS84-Ellipsoid und Isolinien des interpolierten Höhenmodells (schwarz). Das schwarze Rechteck markiert das Untersuchungsgebiet.



WGS84-Ellipsoids (Massom 2006) sind farblich markiert. Das aus den GLAS-Daten interpolierte Höhenmodell wird durch die schwarzen Isolinien gekennzeichnet, die in einem Abstand von 100 m zueinander liegen. Das für die spätere numerische Simulation relevante Gebiet ist schwarz umrandet.

### Datenfilterung

Aufgrund von Wolkenbedeckung enthalten einzelne Profile fehlerhafte Oberflächendaten, die sich im Höhenmodell durch eine Verdichtung der Isolinien zeigen (Abb. 6.2). Diese Punkte wurden entfernt, indem das Gebiet in einzelne Sektoren mit einer Kantenlänge von 25 km unterteilt wurde, in denen diejenigen Punkte entfernt wurden, deren Abstand zur bi-linearen Ausgleichsfläche  $f(x, y) = m_1 + m_2x + m_3y$  mehr als 250 m beträgt. Auf diese Weise wurden etwa 0.1 % der Daten entfernt. Das Ergebnis der Datenfilterung ist in Abbildung 6.3 in einem vergrößerten Ausschnitt der Aufsetzzone des Stancomb-Wills-Eisstroms dargestellt.



**Abbildung 6.3:** ICESat/GLAS-Datenpunkte (farbig) und Isolinien des vorläufigen DEM (schwarz) mit 25 m Isolinienabstand (a) vor und (b) nach der Datenfilterung.

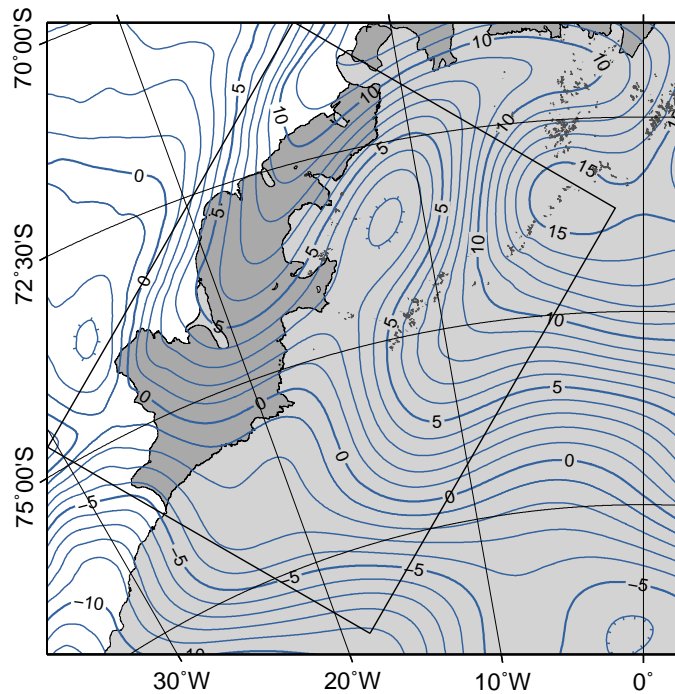
### Geoidmodell

Für die angestrebte numerische Simulation ist es notwendig, die bisher verwendeten ellipsoidischen Höhen in orthometrische, d.h. auf den mittleren Meeresspiegel bezogene Höhen umzurechnen. Dazu muss das lokale Schwerfeld bekannt sein. Ist  $h_e$  die durch ICESat/GLAS bestimmte ellipsoidische Höhe und  $h_g$  die Geoidhöhe, d.h. der Abstand des Geoids vom geodätischen Ellipsoid, dann ist die Höhe über dem Meeresspiegel (Seeber 2003)

$$h = h_e - h_g. \quad (6.3)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das Earth Gravitational Model 2008 (EGM08)<sup>1</sup> verwendet. Die Geoidhöhen bezüglich des WGS84-Ellipsoids sind für das Untersuchungsgebiet in Abbildung 6.4 als Isolinienkarte dargestellt. Die Geoidhöhe beträgt im Untersuchungsgebiet etwa

<sup>1</sup>[http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/egm08\\_wgs84.html](http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/egm08_wgs84.html)  
(Datum der letzten Einsichtnahme: 10.05.2010)



**Abbildung 6.4:** Geoidhöhen des EGM08 in m bezüglich des WGS84-Ellipsoiden. Die Isolinien (blau) haben einen Abstand von 1 m. Das Untersuchungsgebiet ist schwarz umrandet.

–8 m bis +15 m. Im Bereich der Schelfeise befindet sich ein Minimum von etwa –4 m im südwestlichen Teil des Brunt-Schelfeises und ein Maximum von etwa +10 m im nordöstlichen Teil des Riiser-Larsen-Schelfeises.

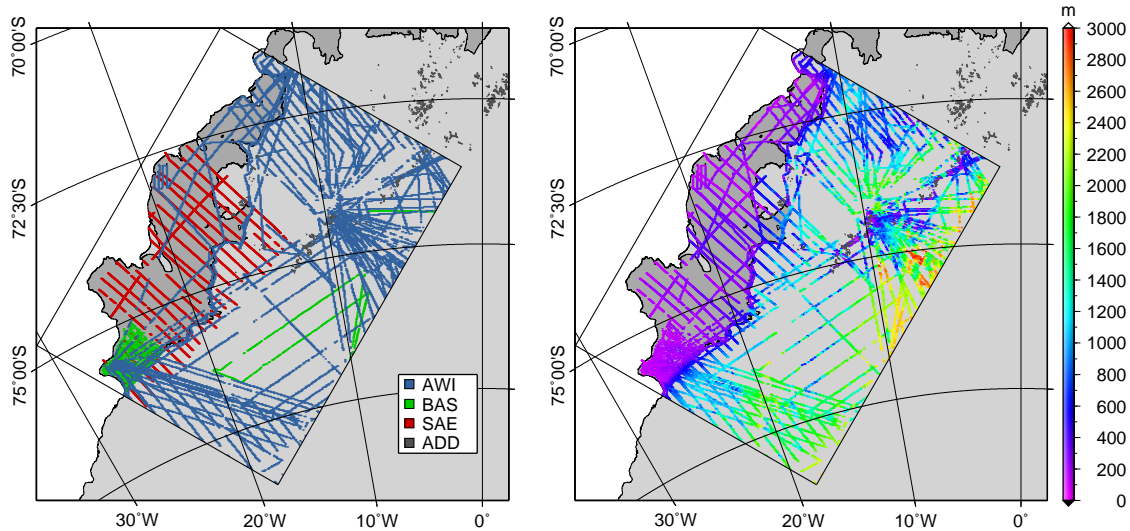
### 6.2.3 Eismächtigkeit

#### Primärdatensätze

Zur Bestimmung der Eismächtigkeitsverteilung im Untersuchungsgebiet werden zum überwiegenden Teil flugzeuggestützte EMR (Elektromagnetische Reflexion)-Messungen des Alfred-Wegener-Instituts für Polar- und Meeresforschung (AWI), Bremerhaven genutzt. Der entsprechende Datensatz wurde von Dr. D. Steinhage (2008 und 2010, pers. Mitteilung) auf einem 2.5 km gemittelten Gitter für das gesamte Untersuchungsgebiet und auf einem 1 km Gitter für die Schelfeisgebiete zur Verfügung gestellt. Die Messungen stammen aus verschiedenen Kampagnen aus den Jahren 1994 bis 2008, die vom AWI unter anderem im Rahmen der Projekte EPICA (*European Project for Ice Coring in Antarctica*) und SEAL (*Sea Level Change*) durchgeführt wurden. Zur genauen Messmethode und Datenbearbeitung sei hier auf Steinhage (2001) und Steinhage et al. (2001) verwiesen. Die Messpunkte sind entlang einzelner Profile angeordnet, deren Abstand bis zu 100 km beträgt. Steinhage et al. (2001) gibt einen vertikalen Messfehler von etwa 20 m an. In Abbildung 6.5a sind die Positionen der einzelnen Datenpunkte in blau eingezeichnet.

Als weitere Datenquelle werden Eisdickenmessungen des British Antarctic Survey (BAS) verwendet, die von D. G. Vaughan (2009, pers. Mitteilung) zur Verfügung gestellt wurden. Diese Daten überdecken das Brunt Schelfeis im südwestlichen Teil des Untersuchungsgebietes im Bereich der Forschungsstation Halley sowie einige Teile des Stancomb-Wills-Eisstroms. Sie sind in Abbildung 6.5a grün markiert. Der Datensatz der *Soviet Antarctic Expedition* (SAE) stammt aus der Saison 1988/89 und ist in Abbildung 6.5a rot gekennzeichnet. Die

Positionsbestimmung per Satellit war zu der damaligen Zeit noch nicht möglich, so dass der Fehler der Position etwa 500 m bis 700 m beträgt (Lythe et al. 2001). Aufgrund der ungenauen Positionsbestimmung und des zeitlichen Abstandes zu den AWI- und BAS- Messungen werden die SAE-Daten nur dann verwendet, wenn sich im Abstand von 5 km kein Datenpunkt der erstgenannten beiden Datensätze befindet. Im Bereich der Schelfeise wird vollständig auf die Verwendung dieser Daten verzichtet.



**Abbildung 6.5:** Räumliche Verteilung (a) der verwendeten Primärdatensätze und (b) der gemessenen Eismächtigkeit  $H$  in m. Das Untersuchungsgebiet ist schwarz umrandet.

### Schwimmgleichgewicht und Eisdichte

Die durch die Steifigkeit des Eises hervorgerufenen Stützeffekte können im Schelfeis in einer Entfernung in der Größenordnung mehrerer Eisdicken vernachlässigt werden (Herterich 1987; van der Veen und Whillans 1989b). Es wird daher angenommen, dass sich das Eis im Schwimmgleichgewicht befindet. Bezeichnet  $\rho_{sw}$  die Dichte des Meerwassers und  $\bar{\rho}$  die mittlere Dichte der Eissäule, so gilt im Schwimmgleichgewicht

$$h(x, y) = \left(1 - \frac{\bar{\rho}(x, y)}{\rho_{sw}}\right) H(x, y). \quad (6.4)$$

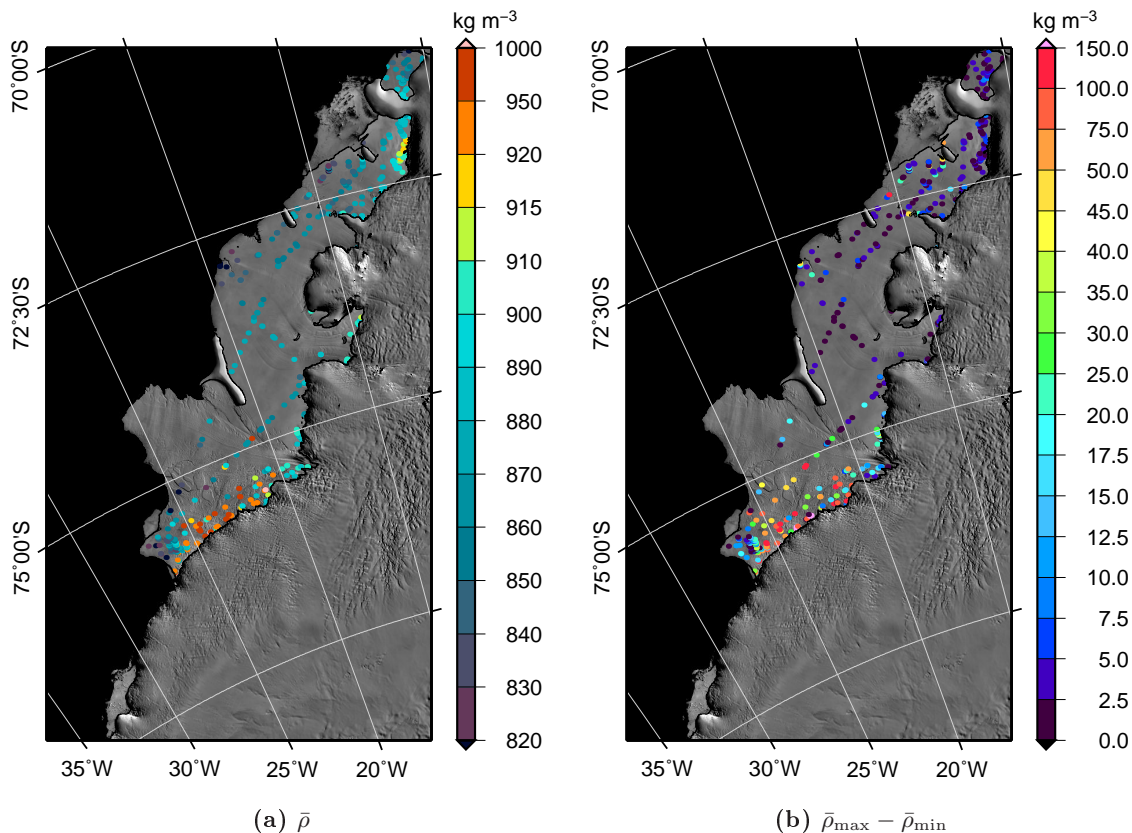
Sind sowohl die Dichte des Meerwassers als auch die mittlere Dichte des Eises bekannt, dann ist es möglich, gemessene Oberflächenhöhen in Eismächtigkeiten umzurechnen, wodurch die Datendichte erheblich verbessert werden kann.

Die Dichte des Meerwassers variiert nur wenig. Für verschiedene Schelfeisregionen werden in der Literatur Werte zwischen  $1027.5$  und  $1030 \text{ kg m}^{-3}$  angegeben (Shabtaie und Bentley 1982; Jenkins und Doake 1991; Vaughan et al. 1995). In dieser Arbeit wird  $\rho_{sw} = 1028 \text{ kg m}^{-3}$  nach Paterson (1994) verwendet.

Der überwiegende Teil des Eises besteht aus konsolidiertem Eis mit konstanter Dichte und wird in der Regel von einer Schnee- und Firnschicht mit geringerer Dichte überlagert. In einigen Bereichen des Schelfeises ist es auch möglich, dass sich an der Eisbasis eine Schicht aus

marinem Eis abgelagert, welches auf Grund von Salzeinschlüssen eine geringfügig höhere Dichte ( $925 \text{ kg m}^{-3}$ ) als konsolidiertes Eis aufweist (Jenkins und Doake 1991). In der Regel variiert die mittlere Dichte verschiedener Schelfeisregionen je nach den vorherrschenden Akkumulations- und Ablationsbedingungen sowie der Entstehungsgeschichte. An Kreuzungspunkten zwischen den ICESat/GLAS-Oberflächenhöhen und den gemessenen Eisdicken ist es möglich, die vertikal gemittelte Eisdichte aus der Schwimmgleichgewichtsbeziehung (Gl. 6.4) zu bestimmen.

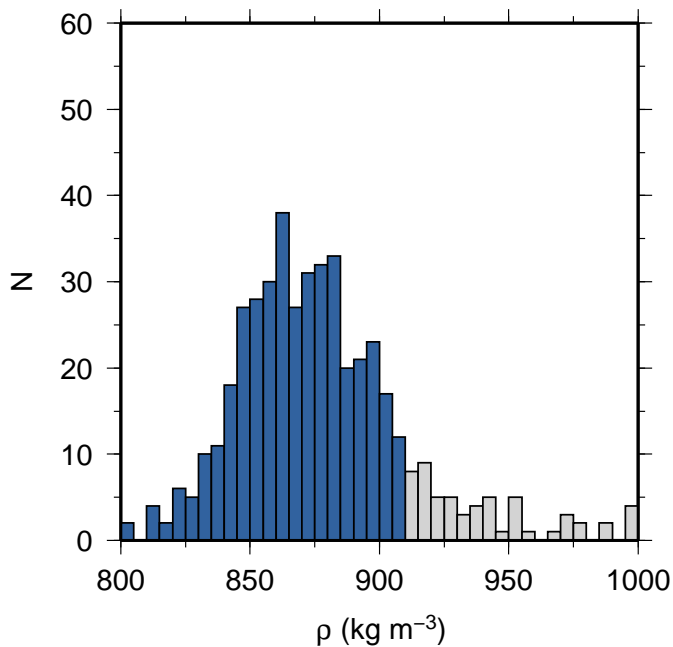
Die vom AWI gemessenen Eisdicken weisen im Untersuchungsgebiet die größte räumliche Abdeckung auf. Sie werden daher zusammen mit den auf den mittleren Meeresspiegel bezogenen ICESat/GLAS-Oberflächenhöhen (siehe Kap. 6.2.2) für die Bestimmung der Dichte genutzt. Zu jedem Datenpunkt des auf einen Kilometer aufgelösten AWI-Datensatzes werden alle ICESat/GLAS-Datenpunkte selektiert, deren Abstand kleiner als 250 m zu diesem Punkt ist. Aufgrund der deutlich höheren Auflösung der Höhendaten kann dem AWI-Datenpunkt eine mittlere Oberflächenhöhe und somit nach Gleichung 6.4 eine mittlere Dichte zugeordnet werden. Auf diese Weise kann an insgesamt 466 Punkten die Eisdichte bestimmt werden, die in Abbildung 6.6a dargestellt ist. Abbildung 6.6a zeigt die Differenz zwischen maximaler und minimaler mittlerer Dichte innerhalb des Radius von 250 m um den jeweiligen AWI-Datenpunkt. Auffallend viele Punkte mit sehr hoher Dichte ( $\bar{\rho} > 1031.6 \text{ kg m}^{-3}$ ) befinden sich im Brunt-



**Abbildung 6.6:** (a) Mittlere Dichte der Eissäule  $\bar{\rho}$  in  $\text{kg m}^{-3}$  an den Kreuzungspunkten der Profile von ICESAT/GLAS und den AWI-Eisdickenmessungen und (b) Differenz zwischen maximaler und minimaler mittlerer Dichte  $\bar{\rho}_{\max} - \bar{\rho}_{\min}$  in einem Radius von 250 m um den Kreuzungspunkt.

Schelfeis in der Nähe der Aufsetzlinie. Diese zeigen zudem auch eine sehr große Variabilität

innerhalb des 250 m umfassenden Suchgebiets. Die Mittelwerte sind histogrammiert in Abbildung 6.7 dargestellt. Die mittlere Dichte des Schelfeises, ermittelt aus den 466 Einzelpunkten,



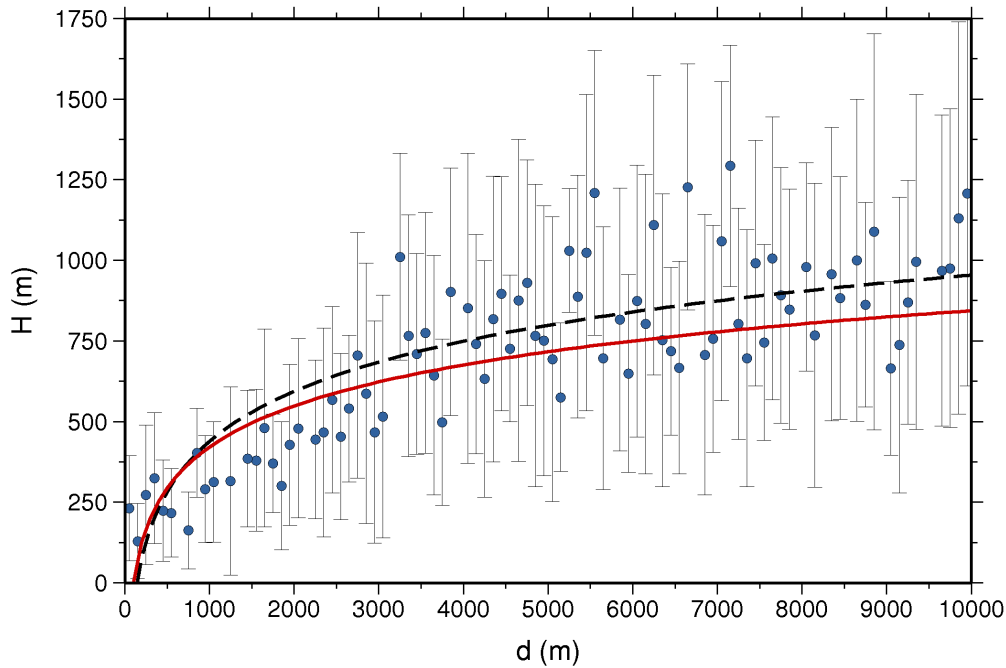
**Abbildung 6.7:** Histogrammierte Dichte im Schelfeis, bestimmt aus den Eisdickenmessungen des AWI und aus ICSat/Glas-Oberflächenhöhen in einer 250 m Umgebung um den Kreuzungspunkt. Dichten größer als  $920 \text{ kg m}^{-3}$  sind grau gezeichnet.

beträgt  $\rho = (875.6 \pm 54.8) \text{ kg m}^{-3}$ . Die niedrigste ermittelte Dichte beträgt  $728.4 \text{ kg m}^{-3}$  und die höchste  $1031.6 \text{ kg m}^{-3}$ .

### Eisfreie Berggipfel

In einigen Bereichen des Untersuchungsgebietes ergeben sich die einzigen Informationen über die Eisdicke aus den Positionen der eisfreien Berggipfel (siehe Abb. 6.5b). Werden an die Positionen der eisfreien Berggipfel Datenpunkte mit der Mächtigkeit  $H = 0 \text{ m}$  eingefügt, so wird die Eismächtigkeit im Eisdickenmodell in diesen Gebieten unrealistisch niedrig. Ohne zusätzliche Annahmen würden größere Teile der Bergregionen im Eisdickenmodell eisfrei wiedergegeben werden. Lythe et al. (2001) beschreiben in einem auf Eisdickenmessungen im Bereich der Prince Charles Mountains und des Dronning Maud Lands basierenden empirischen Modells, wie die Eisdicke  $H$  von der Entfernung  $d$  zum nächsten eisfreien Berggipfel abhängt. In den Bereichen Heimefrontfjella und Kirwanveggen ist die Umgebung der Berggipfel mit AWI-Radarmessungen gut überdeckt (vgl. Abb. 6.5a).

Ausgehend von den Positionen der eisfreien Berggipfel, die in der ADD (2006) verzeichnet sind, werden in einem Abstandsbereich von  $d \leq 10000 \text{ m}$  die mittlere Eismächtigkeit für alle AWI-Datenpunkte, die sich in einem Abstandsintervall  $[d, d + 100 \text{ m}]$  befinden, bestimmt und dem Intervallmittelpunkt zugeordnet (siehe Abb. 6.8). Diese Daten werden für eine Regression berücksichtigt, wenn mehr als 5 Datenpunkte im entsprechenden Intervall vorhanden sind. Das Ergebnis der Anpassung ist in Abbildung 6.8 dargestellt.



**Abbildung 6.8:** Anpassung einer Eisdicken-Abstands-Funktion in der Nähe eisfreier Berggipfel. Die zu jedem Abstandsintervall  $[d, d+100 \text{ m}]$  gehörende mittlere Eisdicke ist blau (mit Standardabweichung) und die angepasste Funktion dieser Arbeit nach Gleichung 6.5 rot sowie nach Lythe et al. (2001) als gestrichelte Linie dargestellt.

Für die Anpassung der Eisdickenfunktion wird der gleiche funktionale Zusammenhang zugrunde gelegt:

$$\begin{aligned}
 H(d) &= 183.56 \log_e(d) - 846.6 && \text{(diese Arbeit) und} && (6.5) \\
 H(d) &= 223.98 \log_e(d) - 1108.4 && \text{(Lythe et al. 2001).}
 \end{aligned}$$

Im Vergleich zu Lythe et al. (2001) ist der Anstieg der Eismächtigkeit mit zunehmendem Abstand besonders im Bereich kleiner Abstände geringer.

### 6.2.4 Interpolation des Geometriemodells

Für die stark heterogenen Regionen Brunt-Schelfeis und Stancomb-Wills-Eisstrom werden die Umrisse einzelner glaziologisch unterscheidbarer Regionen, wie Meereisregionen und eingeschlossene Eisberge, im MOA-Satellitenbild digitalisiert. Für sie wird ein lokales Höhenmodell interpoliert, falls ICESat-Datenpunkte innerhalb der selektierten Region vorhanden sind. Aus den lokalen interpolierten Höhen werden dann Eisdicken nach der Schwimmgleichgewichtsbeziehung (Gl. 2.56) berechnet, wobei für die Meereisgebiete eine Dichte von  $917 \text{ km m}^{-3}$  und für die Eisberge eine Dichte von  $870 \text{ km m}^{-3}$  vorausgesetzt wird. Existieren statt gemessenen Oberflächhöhen lediglich Eisdickenmessungen, so wird in analoger Weise die Höhe mit der Schwimmgleichgewichtsbeziehung berechnet. Wenn weder gemessene Oberflächendaten noch Eisdickendaten vorliegen, werden die Mittelwerte benachbarter Regionen gleichen Typs (Meereis oder meteorisches Eis) herangezogen. Der Prozess der lokalen Interpolation ist in Abbildung 6.9 dargestellt. In den Regionen Riiser-Larsen-Schelfeis und Stancomb-Wills-Eisstrom wird eine Dichte von  $870 \text{ km m}^{-3}$  angenommen, um für die frei schwimmenden Bereiche (Abstand zur Aufsetzlinie größer 5 km) aus der Oberflächhöhe die Eismächtigkeit nach der Schwimmgleichgewichtsbeziehung zu bestimmen.

Die *ice rises* Lyddan Island, Kvitkuven und Skjoldet sind zu klein, um von genügend ICESat-Messungen überdeckt zu werden und zu niedrig, um in der ADD (2006) aufgelöst zu sein (niedrigste Höhenlinie 200 m). In diesen Gebieten wird die 100 m-Höhenlinie manuell so interpoliert, dass die ICESat-Spuren an der korrekten Stelle geschnitten werden. Als weitere Anhaltspunkte werden der Verlauf der Aufsetzlinie und der optische Eindruck des MOA-Satelliten herangezogen. Entlang der Kalbungslinie in der Nähe der oben genannten *ice rises* werden zusätzliche manuell interpolierte Datenpunkte eingefügt, die verhindern, dass die Höhen der *ice rises* zwischen den ICESat-Spuren im Topographiemodell überbewertet werden.

In Gebieten mit eisfreien Berggipfeln, deren Abstand zum nächsten direkten AWI-Eisdickendatenpunkt größer als 5000 m ist, werden im Abstand von 1000 m und 2500 m Datenpunkte eingefügt, die der ermittelten Abstandsfunktion Gleichung 6.5 entsprechen. Durch die zusätzlichen Datenpunkte liefert das Eisdickenmodell plausiblere Werte der Eisdicke in Regionen, für die nur wenige oder keine direkten Eisdickenmessungen vorliegen. Dennoch werden die Eisdicken vermutlich unterschätzt, weil z.B. die Streichrichtung der Gebirgsketten in der Analyse nicht berücksichtigt wurde. Die Höhen der eisfreien Berggipfel (ADD 2006) gehen als zusätzliche Datenpunkte in das Topographiemodell ein.

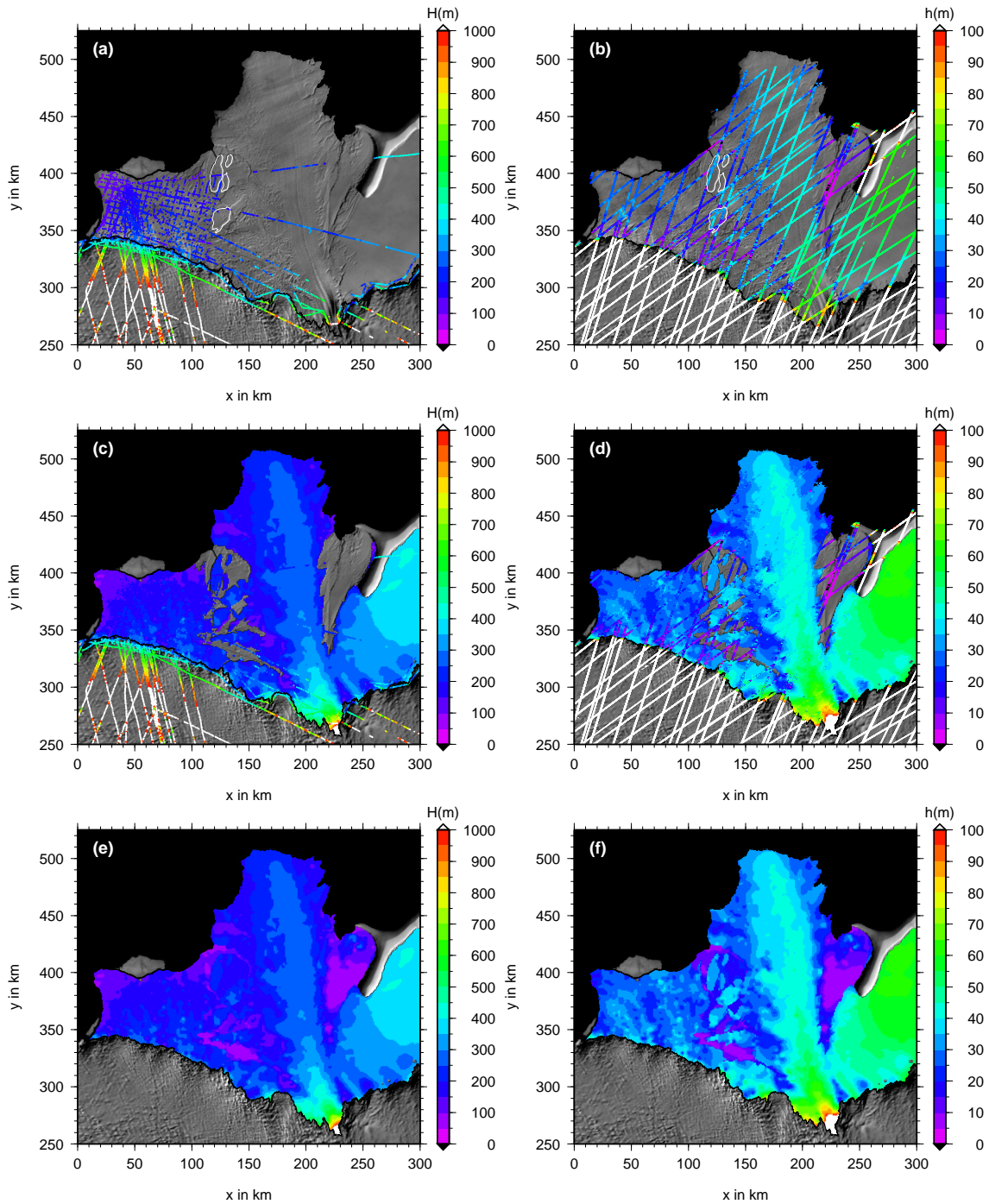
Im Inlandeis ist die Datendichte der Eismächtigkeitsmessungen gering, insbesondere im Einstrom des Stancomb-Wills-Eisstroms (Abb. 6.5). Es lassen sich auch keine zusätzlichen Informationen aus indirekten Daten (Schwimmgleichgewichtsbeziehung) gewinnen. Es wird daher zunächst ein Interpolationsgitter von 5 km als Kompromiss zwischen der Auflösung in Profilrichtung und dem Abstand zwischen den Profilen gewählt. In einem abschließenden Schritt werden die einzelnen Datensätze auf ein einheitliches 2.5 km-Raster interpoliert, wobei der *minimum curvature*-Algorithmus nach Smith und Wessel (1990) verwendet wird. Die aus der Interpolation resultierende Eisoberseitentopographie ist in Abbildung 6.10 dargestellt. Mit zunehmender Entfernung von der Schelfeiskante in Richtung Inlandeis nimmt die Oberflächhöhe des Eiskörpers von weniger als 100 m im Bereich der Schelfeise auf über 3000 m im Amundsenisen südlich des Heimefrontfjella zu. Deutlich zu erkennen sind die starken Oberflächengradienten an der Aufsetzlinie. Der Übergang vom Inlandeis zum Schelfeis weist im Gebiet der Eisströme Stancomb-Wills und Veststraumen sowie im westlichen Ritscherflya geringere Oberflächengradienten auf als der Übergang im Bereich Caird Coat, Mannefallknausane

oder Högis. Durch die lokale Interpolation konnte im Bereich des Brunt-Schelfeises und des Stancomb-Wills-Eisstroms die heterogene Oberflächenstruktur erhalten bleiben. Das Eis auf der strömungsabgewandten Seite (Lee) des *ice rumple* im Veststraumen zeigt eine geringere Höhe auf als benachbarte Eisregionen. Die Oberflächenhöhen der einzelnen eisfreien Berggipfel des Heimefrontfjella bleiben bei der Interpolation nur zum Teil erhalten.

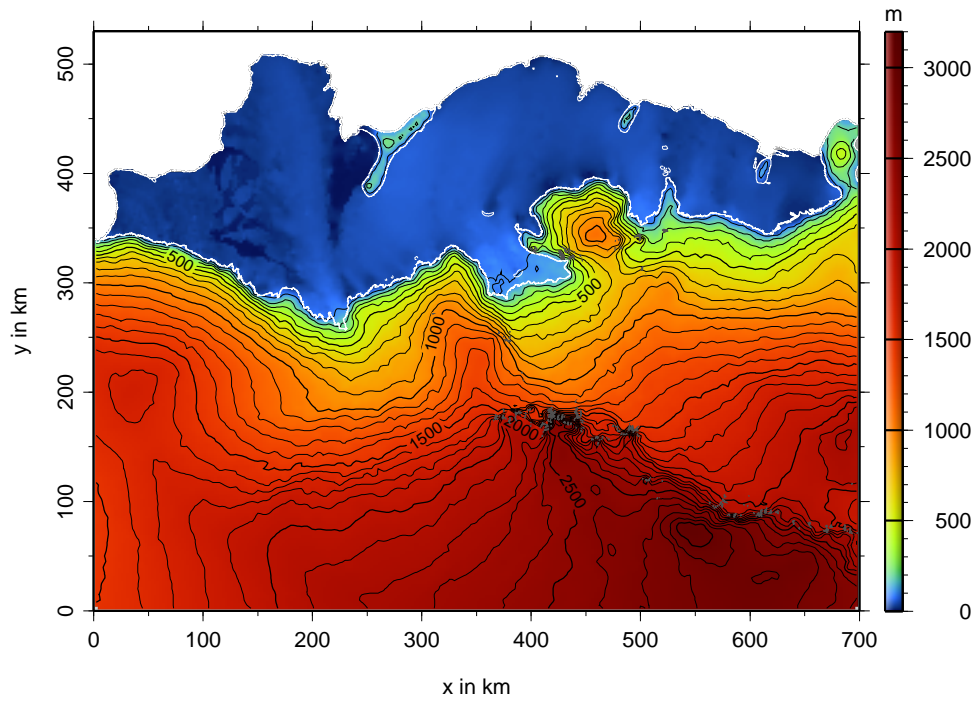
Die interpolierten Eismächtigkeiten sind in Abbildung 6.11 dargestellt. Südlich des Heimefrontfjella werden mit über 2500 m die größten Eismächtigkeiten erreicht. Deutlich treten die geringmächtigen eisfreien Berggipfel hervor. Das Riiser-Larsen-Schelfeis und der Stancomb-Wills-Eisstrom weisen im Durchschnitt eine größere Mächtigkeit auf als das Brunt-Schelfeis.

In Abbildung 6.12 ist die Topographie des subglazialen Felsuntergrundes dargestellt. Große Teile entlang der Aufsetzlinie befinden sich deutlich unter dem Meeresspiegel. Es ist zu erkennen, dass sich das Heimefrontfjella in westliche Richtung unter dem Eis fortsetzt und eine Barriere für den Einstrom vom Amundsenisen darstellt. Dies zeigt sich auch in der Oberflächentopographie (Abb. 6.10), die in dieser Region deutlich unregelmäßiger ist. Südlich der Aufsetzlinie in der Region des Stancomb-Wills-Eisstroms senkt sich der subglaziale Untergrund auf unter  $-1000$  m ab. Dies ist jedoch nur mit wenigen Messdaten (Abb. 6.5) belegt.

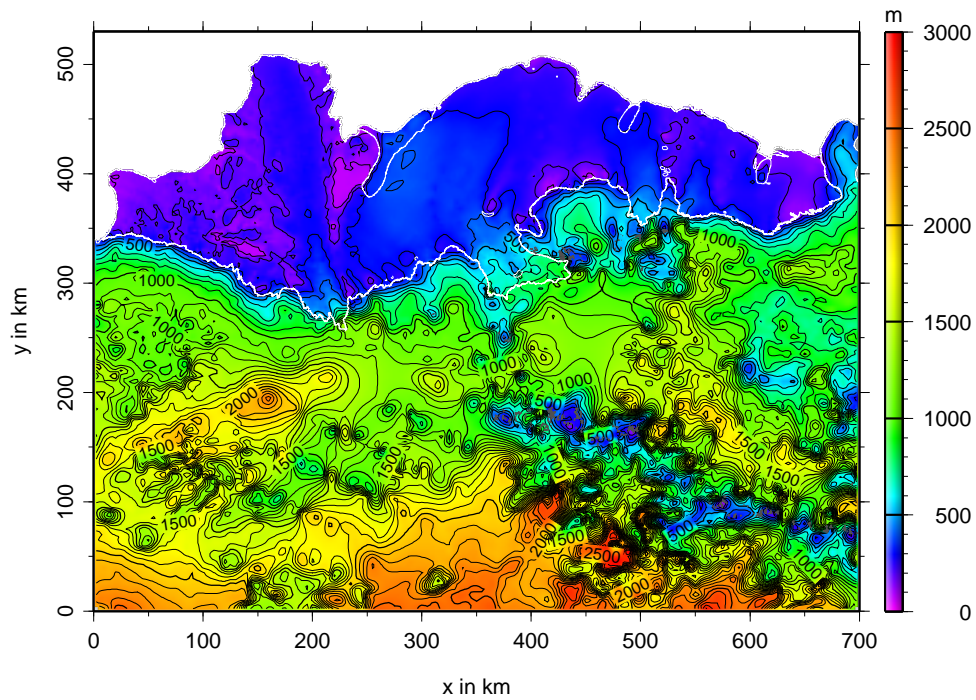




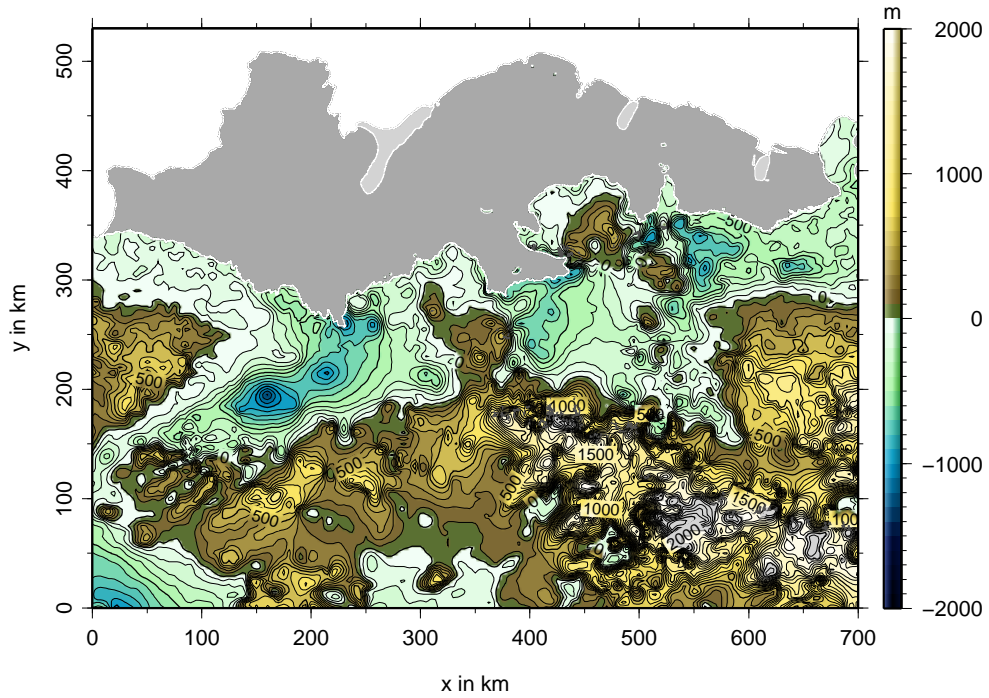
**Abbildung 6.9:** Lokal interpolierte Eismächtigkeiten  $H$  in m und Oberflächenhöhen  $h$  in m (über dem mittleren Meeresspiegel) in der Region Brunt-Schelfeis und Stancomb-Wills-Eisstrom: (a) Gemessene Eisdicken (AWI und BAS) und (b) gemessene Oberflächenhöhen (ICESat/GLAS). Die Umrisse einzelner Eisberge sind in (a) und (b) weiß gekennzeichnet. Ergebnis der lokalen Interpolation ohne Berücksichtigung der als Meereis klassifizierte Gebiete für  $H$  (c) und  $h$  (d). Vollständig interpolierte Mächtigkeiten (e) und Höhen (f) auf einem  $1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$  Gitter.



**Abbildung 6.10:** Interpoliertes Topographiemodell in m über dem Meeresspiegel der Eisoberseite mit einer horizontalen Auflösung von 2500 m. Die Aufsetzlinie ist weiß dargestellt. Das Isolinienintervall beträgt 100 m.



**Abbildung 6.11:** Interpolierte Eismächtigkeit mit einer horizontalen Auflösung von 2500 m. Die Aufsetzlinie ist weiß dargestellt. Das Isolinienintervall beträgt 100 m.

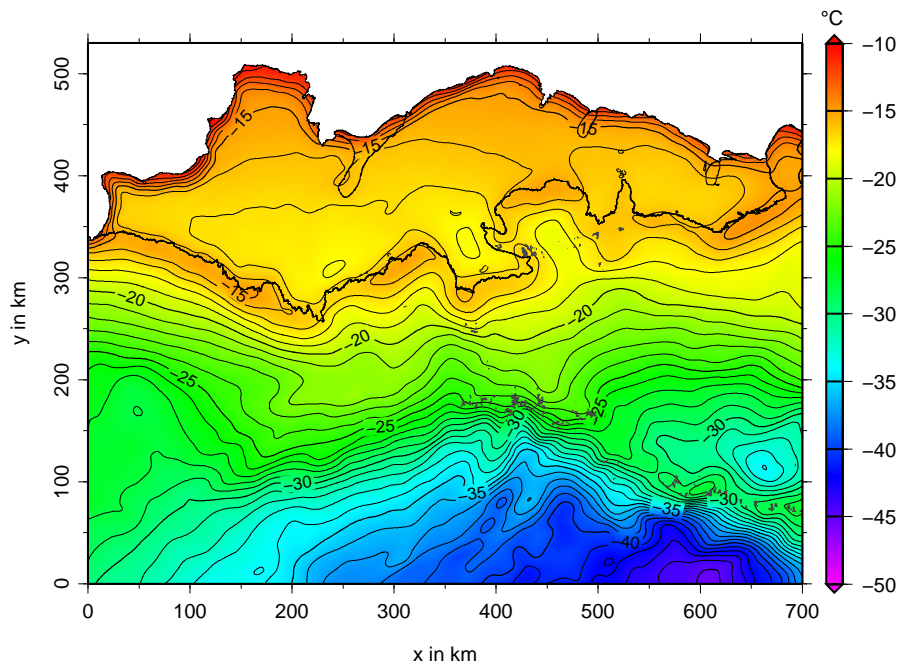


**Abbildung 6.12:** Interpolierte Topographie des subglazialen Felsuntergrundes in m über dem Meeresspiegel mit einer horizontalen Auflösung von 2500 m. Die Aufsetzlinie ist weiß dargestellt. Das Isolinienintervall beträgt 100 m.

## 6.3 Randbedingungen

### 6.3.1 Oberflächentemperatur

Unter wolkenfreien Bedingungen liefern Aufnahmen des im infraroten Wellenlängenbereich messenden *Advanced Very High Resolution Radiometer* (AVHRR), welches sich auf den *National Oceanic and Atmospheric Administration*-Satelliten befindet, flächendeckende Informationen über die Oberflächentemperatur des Eises (Comiso 2000, 2003). Der in dieser Arbeit verwendete Datensatz (J. C. Comiso, 2008, pers. Mitteilung) der über den Zeitraum 1995 bis 2000 gemittelten Oberflächentemperaturverteilung des Eises ist in Abbildung 6.13 dargestellt.



**Abbildung 6.13:** Mittlere Oberflächentemperatur in  $^{\circ}\text{C}$  im Zeitraum 1995 bis 2000 nach Comiso (2000). Der Isolinienabstand beträgt  $1^{\circ}\text{C}$ . Die eisfreien Berggipfel sind dunkelgrau dargestellt.

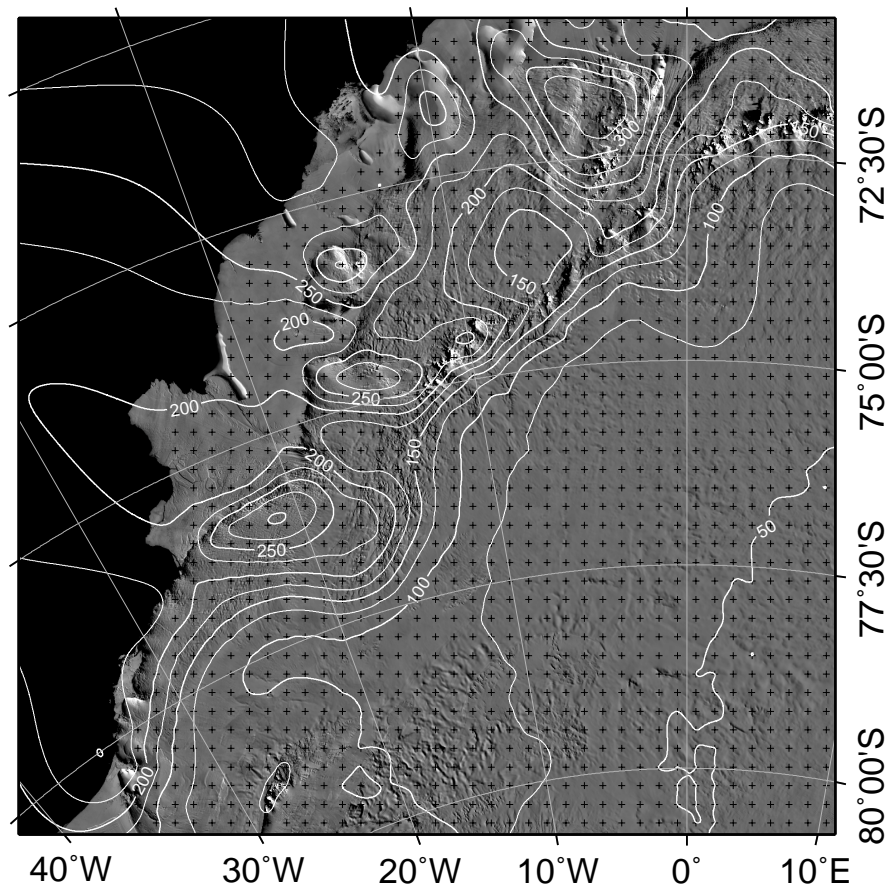
Die niedrigsten Temperaturen treten in den hochgelegenen Gebieten südlich der Heimefrontfjella auf und betragen dort etwa  $-45^{\circ}\text{C}$ . Auf der in das Riiser-Larsen-Schelfeis drainierenden nördlichen Seite der Heimefrontfjella betragen die Temperaturen in den Hochlagen etwa  $-30^{\circ}\text{C}$ . Die Temperaturen nehmen vom Inlandeis kommend in Richtung der Aufsetzlinie zu. Am Übergang vom Inlandeis zum Schelfeis beträgt die Temperatur dann etwa  $-15^{\circ}\text{C}$ . Die höchsten Temperaturen von etwa  $-10^{\circ}\text{C}$  treten an der vom relativ warmen Ozean beeinflussten meeresseitigen Begrenzung des Schelfeises auf. Im räumlichen Mittel beträgt die Oberflächentemperatur  $(-24 \pm 8)^{\circ}\text{C}$ .

### 6.3.2 Oberflächenmassenbilanz

Die Nettoakkumulationsrate kann zum einen durch *in situ*-Messungen in Schneeschächten, mit Hilfe von Stangen oder mit Eiskernen bestimmt werden. Auf diese Weise ist es jedoch nur möglich, einzelne Messpunkte zu erhalten, deren flächenhafte Interpolation aufgrund der räumlich stark variierenden Ablagerungsbedingungen sehr schwierig ist. Für den östlichen

Teil des Untersuchungsgebiets haben Rotschky et al. (2007) eine Vielzahl von Einzelmessungen zusammengetragen und unterschiedliche Interpolationsverfahren für Küstengebiete und kontinentales Inlandeis verwendet, um die flächenhafte Verteilung zu bestimmen. Diese Vorgehensweise ist auf den westlichen Teil des Untersuchungsgebietes nicht übertragbar, da hier deutlich weniger Messwerte zur Verfügung stehen.

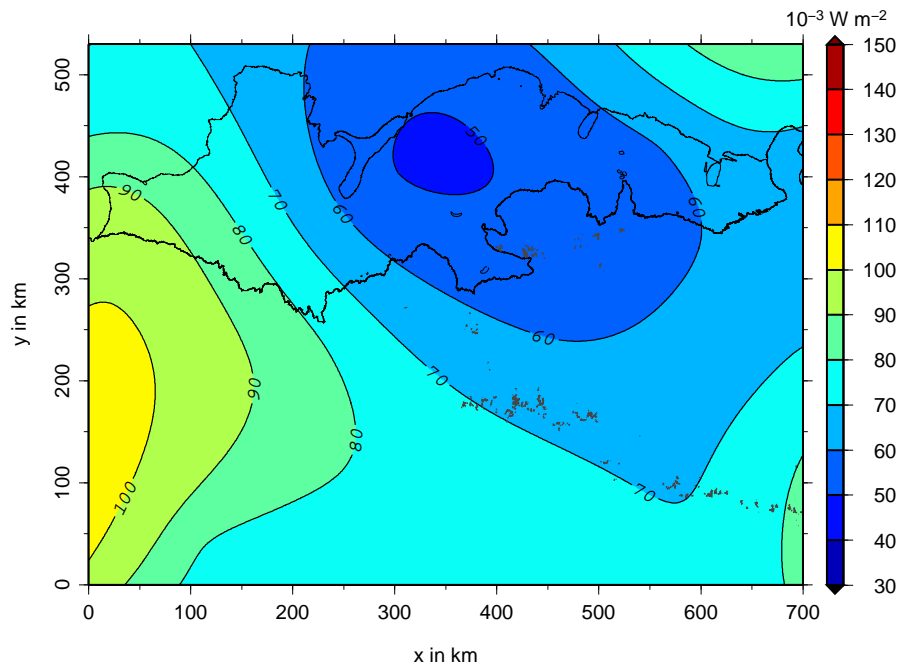
Zum Zeitpunkt der Fertigstellung dieser Arbeit existiert noch keine Methode, um die Akkumulationsrate an der Eisoberseite direkt mit Satelliten zu messen. Es können aber Eigenschaften des Schnees gemessen werden, die die räumliche Interpolation von Einzelmessungen verbessern. Die veränderlichen Wetter- und Klimabedingungen führen zur Ablagerung von wechselnden Schichten hoher und geringerer Schneedichte. Diese Schichtung führt zur Polarisierung der Strahlung des Schnees im Mikrowellenbereich, wobei vertikal polarisierte Anteile bevorzugt zur Oberfläche durchdringen können, wogegen horizontale Anteile in die Tiefe zurück reflektiert werden. Durch die satellitengestützte Messung der Polarisierung der Mikrowellenstrahlung und zusätzlicher *in situ*-Messungen konnte Winnebrenner et al. (2001) die räumliche Verteilung der Akkumulationsrate für das grönländische Inlandeis bestimmen. In dem erweiterten Ansatz von Arthern et al. (2006) wird neben der Akkumulationsrate auch die Temperatur der Schnee- und Firnschicht auf die Polarisierungseigenschaften berücksichtigt. Die kombinierte Nutzung der Polarisierung mit dem *Advanced Microwave Scanning Radiometer* (AMSR-E) des *Aqua*-Satelliten (Cavalieri und Comiso 2004) und der thermischen Infrarotstrahlung (Comiso 2000) erlaubt die Interpolation von *in situ*-Messungen der Akkumulationsrate mit höherer räumlicher Korrelation. Abbildung 6.14 stellt den von Arthern et al. (2006) zur Verfügung gestellten Datensatz im Untersuchungsgebiet dar.



**Abbildung 6.14:** Oberflächenakkumulation in  $\text{kg m}^{-2} \text{a}^{-1}$  nach Arthern et al. (2006). Das Isolinienintervall beträgt  $25 \text{ kg m}^{-2} \text{a}^{-1}$ .

### 6.3.3 Geothermaler Wärmestrom

Durch veränderte geologische Gegebenheiten an der Eisunterseite kann sich der basale Wärmestrom auf Längenskalen von einigen 10er-Kilometern ändern. Insbesondere unter großen Eisschilden wie in Grönland oder der Antarktis sind direkte Messungen sehr aufwändig, da sie Eisbohrungen bis zum Felsuntergrund voraussetzen. Glaubwürdige Messungen sind dann nur möglich, wenn das Eis am Fels festgefroren und die Fließgeschwindigkeit sehr klein oder Null ist, so dass mögliche zusätzliche Wärmequellen durch z.B. Deformationswärme im Eis, Reibungswärme am Untergrund, Wärmetransport durch Advektion oder latente Wärme durch Schmelzen ausgeschlossen werden können. Bisher gibt es nur relativ wenige direkte Messungen des basalen Wärmestroms unter dem Eis (z.B. Dahl-Jensen et al. (1998) in Grönland oder Engelhardt (2004) in der Antarktis). Daher muss auf indirekte Verfahren zurückgegriffen werden. Shapiro und Ritzwoller (2004) haben eine Karte des antarktischen basalen Wärmestroms ableiten können, indem sie seismische Krustendicken und weltweite Wärmestrommessungen kombinierten. Dieser Ansatz wurde von Fox Maule et al. (2005) durch die Verwendung zusätzlicher Informationen der magnetischen Krustendicke erweitert. Der Datensatz ist in Abbildung 6.15 dargestellt.

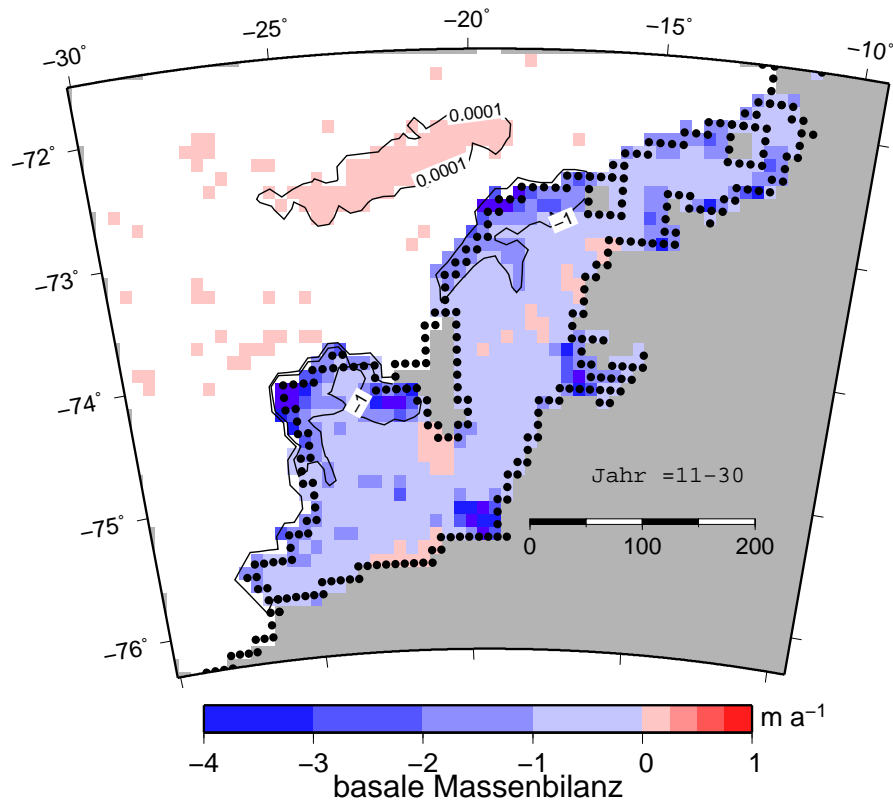


**Abbildung 6.15:** Basaler Wärmestrom nach Fox Maule et al. (2005) in  $10^{-3} \text{ W m}^{-2}$ .

Für die Antarktis werden außerhalb seismisch aktiver Gebiete üblicherweise Werte von etwa  $0.045$  bis  $0.090 \text{ W m}^{-2}$  angenommen (Huybrechts 1992; Budd et al. 1994; Verbitsky 1997). Der verwendete Wärmestromdatensatz weist im Mittel einen basalen Wärmestrom von  $(0.072 \pm 0.013) \text{ W m}^{-2}$  auf und liegt damit im oberen Teil des Wertebereichs.

### 6.3.4 Basale Schmelzraten

Die in dieser Arbeit verwendeten basalen Schmelzraten basieren auf der regionalen Ozean-simulation von Thoma et al. (2006). Das verwendete Ozeanmodell ist ein dreidimensionales *Ocean General Circulation Model* (OGCM), das von Grosfeld et al. (1997) für die Simulation der Ozeanzirkulation in Schelfeiskavernen entwickelt wurde. In einer Sensitivitätsstudie wendet Thoma et al. (2006) das Modell auf die Schelfeiskavernen im Untersuchungsgebiet an. Die dabei verwendete Geometrie der Kavernen basiert auf BEDMAP-Daten (Lythe et al. 2001). Bei einer horizontalen Auflösung des Modells von  $0.1^\circ$  in Nord-Süd-Richtung ( $\approx 11 \text{ km}$ ) und  $0.3^\circ$  in Ost-West-Richtung ( $\approx 7$  bis  $13 \text{ km}$ ) werden die dem Inlandeis vorgelagerten Inseln Lyddan Island, Kvitkuven und Skjoldet als Barrieren für die Wasserzirkulation berücksichtigt. Die räumliche Verteilung der basalen Schmelz- und Anfrierraten ist als zeitliches Mittel über die simulierten Modelljahre 11 bis 30 in Abbildung 6.16 dargestellt. Die höchsten Schmelzraten befinden sich in der Nähe der Aufsetzlinie der beiden großen Eisströme Veststraumen und Stancomb-Wills-Eisstrom sowie an der Schelfeiskante und erreichen an einzelnen Gitterpunkten Werte von maximal  $8.7 \text{ m a}^{-1}$ . Nur in einzelnen Regionen nördlich des Högisen, südlich von Lyddan Island und westlich des Stancomb-Wills-Eisstroms in der Nähe der Aufsetzlinie friert Eis von der Schelfeisunterseite an. Die Anfrierraten überschreiten im Maximum  $0.2 \text{ m a}^{-1}$  nicht. Die Nettoschmelzrate gibt Thoma et al. (2006) mit  $0.88 \text{ m a}^{-1}$  an.



**Abbildung 6.16:** Basale Massenbilanz in  $\text{m a}^{-1}$  nach Thoma et al. (2006). Negative Werte entsprechen einer positiven Schmelzrate.

## 6.4 Fließgeschwindigkeiten

Es existieren mehrere Datensätze der Oberflächengeschwindigkeiten im Untersuchungsgebiet mit unterschiedlicher räumlicher und zeitlicher Abdeckung. Sämtliche Datensätze sind mit fernerkundlichen Methoden ermittelt worden. Insbesondere *feature tracking*- und interferometrische Geschwindigkeiten bilden die Datenbasis, die im Folgenden aufgelistet ist:

**BAS (Abb. 6.17a):** *feature tracking*-Geschwindigkeiten aus der Zeit Mai bis Juni 2005 (Humbert und Pritchard 2006),

**CCRS (Abb. 6.17b):** InSAR (*interferometric synthetic aperture radar*)-Messungen aus den Jahren 1997 und 2000 (Gray 2001),

**MAMM (Abb. 6.17c):** RADARSAT-1 (*modified antarctic mapping mission*) September bis November 2000 (Jezek 2002; Wuite und Jezek 2009) und

**TUD (Abb. 6.17d):** ERS-1 und -2 (*European Remote Sensing Satellites*) aus dem Jahr 1994 (M. Bässler und R. Dietrich, 2006, pers. Mitteilung).

Abbildung 6.17 zeigt die uns zur Verfügung stehenden Datensätze und ihre räumliche Abdeckung. Diese Datensätze wurden verwendet, um die simulierten Oberflächengeschwindigkeiten zu beurteilen.



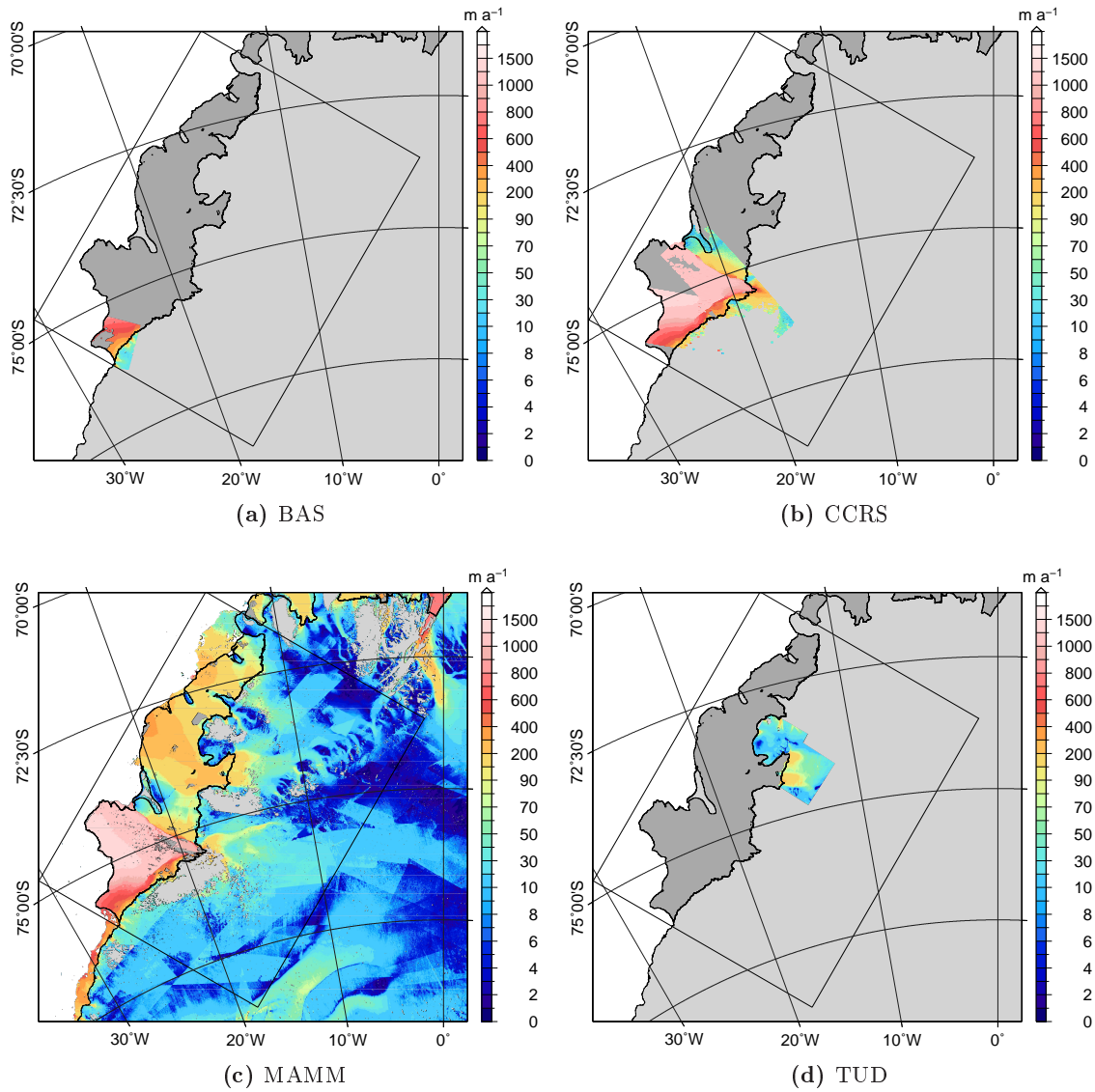


Abbildung 6.17: Übersicht über die gemessenen Fließgeschwindigkeiten im Untersuchungsgebiet.

## 6.5 Diskussion

Der geringe Profilabstand zwischen den ICESat/GLAS-Oberflächenhöhen von etwa 25 km ermöglicht es, sowohl in den Inlandeis- als auch Schelfeisregionen die Eisoberflächentopographie in einem Gitter mit einer räumlichen Auflösung von 2.5 km abzubilden. Obwohl in der Region des Untersuchungsgebietes eine Reihe von EMR-Profilen von hoher Genauigkeit existieren, ist die räumliche Verteilung dieser Profile jedoch nicht hinreichend, um ein hochaufgelöstes Gitter der Eismächtigkeit zu erzeugen. Dies zeigt die Notwendigkeit weiterer EMR-Kampagnen mit dem Ziel, sowohl die Eismächtigkeit im schwimmenden Bereich als auch die Bodentopographie des Inlandeises in einer höheren Auflösung als Eingangsgröße für die Modellierung zur Verfügung zu haben und somit geometriebedingte Ungenauigkeiten der Simulationen zu verringern.

# Kapitel 7

## Numerische Modellierung der Eisdynamik im Untersuchungsgebiet

### 7.1 Referenzexperiment

Das zu simulierende Untersuchungsgebiet hat eine horizontale Ausdehnung von  $700 \text{ km} \times 530 \text{ km}$  und wird mit einer Auflösung von  $2.5 \text{ km}$  diskretisiert. Es werden 21 vertikale  $\sigma$ -Schichten berücksichtigt.

Von einem isothermalen Eiskörper im Ruhezustand auszugehen, hat sich im Fall des gekoppelten Inlandeis-Schelfeis-Systems nicht als zweckmäßig erwiesen, da ein erheblicher Rechenaufwand nötig ist, um das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld vom Inlandeis durch das Schelfeis zu transportieren. Die Notwendigkeit eines auf vereinfachten Annahmen über den Zustand des Eiskörpers basierenden Referenzexperiments ergibt sich aus der Tatsache, dass zwar die Randbedingungen, nicht aber die Anfangsbedingungen für eine zeitabhängige Simulation bekannt sind. Für alle Inlandeispunkte wird daher ein vertikales Anfangstemperaturprofil der Form

$$T(z) = T_s + \alpha (h - z)^2 + \beta (h - z)^4 \quad \text{mit} \quad (7.1)$$
$$\alpha = \frac{5 q_{\text{geo}}}{42 H \kappa} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{4 q_{\text{geo}}}{21 H^3 \kappa}$$

angenommen, welches von der Oberflächentemperatur  $T_s$  und dem basalen Wärmestrom  $q_{\text{geo}}$  abhängt. Dabei sind  $\alpha$  und  $\beta$  so gewählt, dass

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=z_b} = -\frac{q_{\text{geo}}}{\kappa} \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=z_b+H/4} = -\frac{q_{\text{geo}}}{2\kappa} \quad (7.2)$$

gilt. Damit erfüllt das Temperaturprofil die basale Temperaturrandbedingung für einen nichtgleitenden Eiskörper (Gl. 2.66) und berücksichtigt, dass sich die Temperaturänderungen am stärksten im untersten Viertel der Eissäule auswirken. Die Temperatur darf den Druckschmelzpunkt jedoch nicht überschreiten ( $\max(T) = T_{\text{pmp}}$ ). Im Schelfeis wird ein lineares Temperaturprofil zwischen der Eisbasis und der Eisoberfläche angenommen, wodurch ebenfalls die vertikalen Temperaturrandbedingungen erfüllt sind.

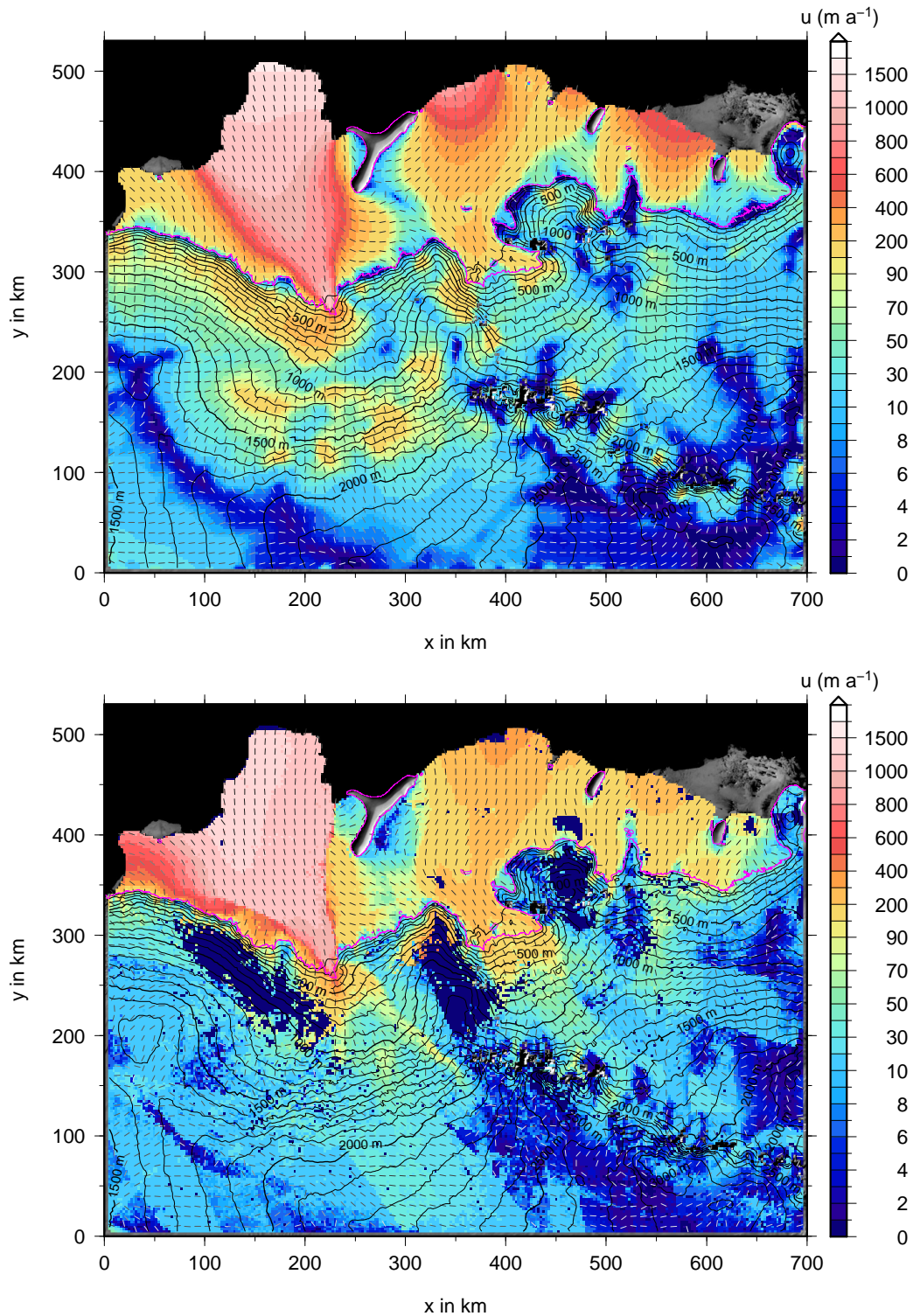
Für das Anfangsgeschwindigkeitsfeld wird aus gemessenen horizontalen Oberflächengeschwindigkeiten (Abb. 6.17)  $u_s$  und  $v_s$  eine Lösung nullter Ordnung nach der *shallow ice approximation* (Hutter 1983) mit

$$u(z) = u_s \left( 1 - \frac{(h - z)^{n+1}}{h^{n+1}} \right) \quad (7.3)$$

und analog für  $v$  berechnet, wobei  $n$  der Exponent aus dem Fließgesetz (Gl. 2.22) ist. Basales Gleiten wird nicht zugelassen. Ausgehend von den Startfeldern für Temperatur und Geschwindigkeit wird dann das System ohne Veränderung des Geschwindigkeitsfeldes angetrieben, bis die relative Änderung der Temperatur (Kap. 4.4) für das gesamte Modellgebiet kleiner ist als  $\epsilon_T < 10^{-6}$ . Bei einer Zeitschrittlänge von  $\Delta\tau = 10$  a wird dieser Zustand nach 38000 Jahren erreicht. In der letzten Phase werden dann die thermodynamische und die fließdynamische Komponente des Modells gekoppelt, bis wiederum  $\epsilon_T < 10^{-6}$  erreicht wird. Dieser Zustand ist nach etwa 2750 Jahren erreicht.

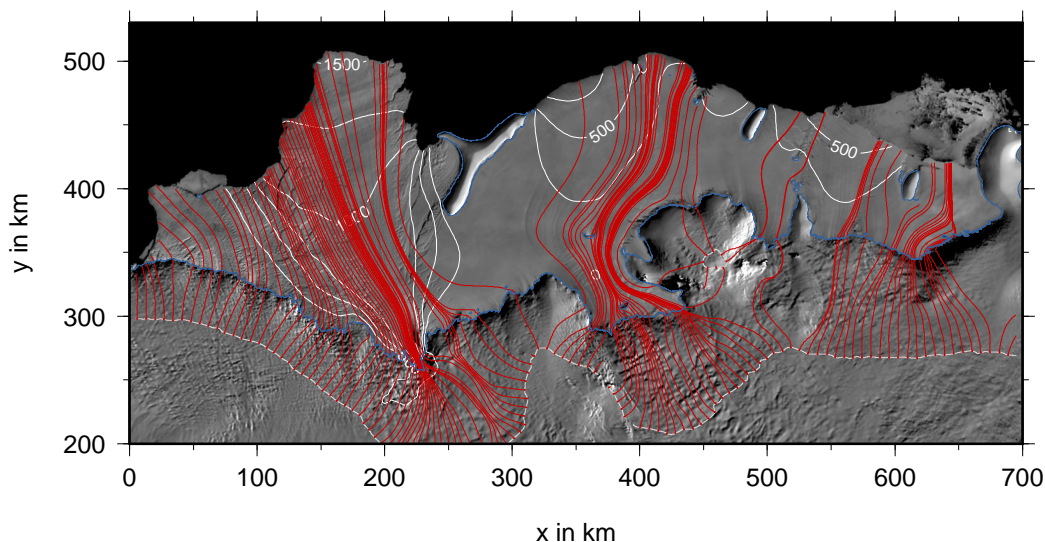
### 7.1.1 Oberflächengeschwindigkeitsfeld

Im oberen Teil der Abbildung 7.1 ist das resultierende Oberflächengeschwindigkeitsfeld der Referenzsimulation dargestellt. Der Betrag der horizontalen Geschwindigkeit ist farbkodiert bis  $2000 \text{ m a}^{-1}$ , wobei die Farbskala nichtlinear gewählt ist, um sowohl die langsam fließenden Inlandeisbereiche (bis etwa  $300 \text{ m a}^{-1}$ ) als auch die Schelfeisregionen (über  $1500 \text{ m a}^{-1}$ ) auflösen zu können. Die gemessenen Geschwindigkeiten (Kap. 6.4) sind zum Vergleich unten in Abbildung 7.1 dargestellt. Bei den homogen dunkelblauen Flächen im mittleren Bereich der unteren Abbildung handelt es sich um Datenlücken, die für den Vergleich der Geschwindigkeiten nicht berücksichtigt werden. Der Stancomb-Wills-Eisstrom erreicht die Aufsetzlinie mit einer simulierten Geschwindigkeit von etwa  $400 \text{ m a}^{-1}$  und wird dann innerhalb von etwa 30 km auf eine Geschwindigkeit von  $900 \text{ m a}^{-1}$  beschleunigt. Die simulierte Maximalgeschwindigkeit im Untersuchungsgebiet beträgt etwa  $1500 \text{ m a}^{-1}$  an der Schelfeiskante des Stancomb-Wills-Eisstroms. Der Veststraumen speist sich aus zwei Hauptfließrichtungen aus dem Inlandeis, die sich erst hinter dem *ice rise* nach der Aufsetzlinie vereinen. Er zeigt unmittelbar nach der Aufsetzlinie eine simulierte Geschwindigkeit von etwa  $100 \text{ m a}^{-1}$  und beschleunigt sich bis zur Schelfeiskante auf bis zu  $900 \text{ m a}^{-1}$ , wobei sich die abbremsende Wirkung des *ice rumple* ( $x, y \approx 360 \text{ km}$ ) deutlich zeigt. Der schnell fließende Stancomb-Wills-Eisstrom ist klar von den langsam fließenden Bereichen Riiser-Larsen-Schelfeis und Brunt-Schelfeis abgegrenzt. Die Abgrenzung fällt in den gemessenen Daten deutlich stärker ausgeprägt aus. Die simulierten Geschwindigkeiten im Brunt-Schelfeis betragen ungefähr 50 bis  $300 \text{ m a}^{-1}$  und sind damit erheblich langsamer als die gemessenen Geschwindigkeiten, die in dieser Region mehr als  $600 \text{ m a}^{-1}$  erreichen. Tendenziell sind die simulierten Geschwindigkeiten im Inland höher als die gemessenen. An der Aufsetzlinie sind, außer im Bereich der Eisströme Veststraumen und Stancomb-Wills, die simulierten Geschwindigkeiten geringer als die gemessenen. Bei den simulierten Geschwindigkeiten ist die Eisscheide in der linken unteren Bildregion im Gegensatz zu den gemessenen Geschwindigkeiten deutlich abgebildet.



**Abbildung 7.1:** Vergleich der simulierten (oben) und gemessenen (unten) Oberflächengeschwindigkeiten in  $\text{m a}^{-1}$ . Der Betrag der Geschwindigkeit ist farbkodiert, die Fließrichtung wird durch die Pfeile (alle 10 km) angegeben. Überlagert sind die Isolinien der Topographie mit einem Abstand von 100 m (schwarz) sowie die Aufsetzlinie (magenta). Einfarbig dunkelblaue Flächen im mittleren Bereich der unteren Abbildung sind Datenlücken.

In Abbildung 7.2 sind die dem Referenzlauf zugehörigen Fließlinien dargestellt. Als Ursprung



**Abbildung 7.2:** Fließlinien des simulierten Geschwindigkeitsfeldes beginnend an der 1000-m-Höhenlinie (rot) und Isolinien der Fließgeschwindigkeit in  $\text{m a}^{-1}$  (weiß). Der Isolinien-Abstand der Geschwindigkeiten beträgt  $250 \text{ m a}^{-1}$ .

der Fließlinien wurde die 1000-m-Höhenlinie der Eisgeometrie gewählt. Die Verdichtung der Fließlinien stellt den Verlauf der beiden Eisströme Stancomb-Wills und Veststraumen graphisch dar. Im Veststraumen stimmen die Fließlinien gut mit den im MOA sichtbaren Fließstrukturen überein. Die Fließlinien im Stancomb-Wills-Eisstrom verlaufen zu weit westlich. Die Region Mannefallknausane bildet die Eisscheide für den Transport in das Riiser-Larsen-Schelfeis und den Stancomb-Wills-Eisstrom.

### 7.1.2 Massenfluss über die Aufsetzlinie

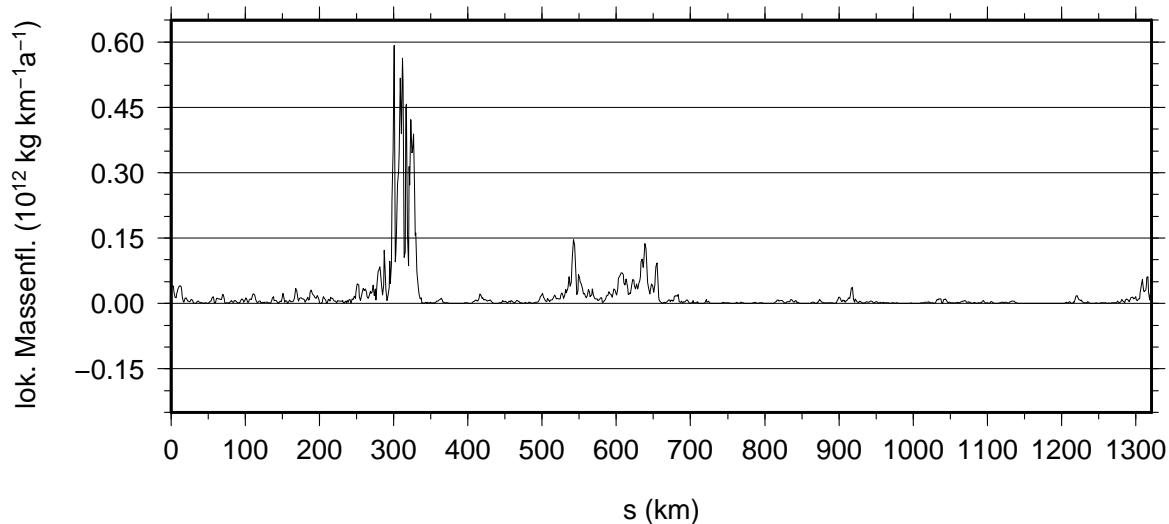
Der lokale Massenfluss über die Aufsetzlinie ist

$$f = \bar{u}_{\perp} \bar{\rho} H, \quad (7.4)$$

wobei  $H$  die lokale Eismächtigkeit,  $\bar{\rho}$  die mittlere Dichte der Eissäule und  $\bar{u}_{\perp}$  die vertikal gemittelte Horizontalkomponente der Geschwindigkeit senkrecht zur Aufsetzlinie ist. Der gesamte Massenfluss über die Aufsetzlinie  $F$  ermittelt sich dann als Integral über die lokalen Massenflüsse entlang der Aufsetzlinie (GL):

$$F = \int_{\text{GL}} \bar{u}(s)_{\perp} \bar{\rho}(s) H(s) ds \quad (7.5)$$

mit der Profillänge  $s(x, y)$ . Der lokale Massenfluss entlang der Aufsetzlinie ist in Abbildung 7.3 dargestellt. Das gezeigte Profil beginnt im Westen (Brunt-Schelfeis) und reicht bis zum Kap Norvegia im äußersten Osten des Untersuchungsgebietes. Die Gesamtlänge der Aufsetzlinie beträgt im Untersuchungsgebiet 1321 km, wobei eine horizontale Auflösung der Aufsetzlinie von einem Kilometer zugrunde gelegt wird. In Abbildung 7.3 sind die beiden dominierenden



**Abbildung 7.3:** Lokaler Massenfluss über die Aufsetzlinie in  $10^{12} \text{ kg km}^{-1} \text{ a}^{-1}$ , beginnend am westlichen Rand des Untersuchungsgebiets.

Eisströme Stancomb-Wills (Profilkilometer 250 bis 350) und Veststraumen (Profilkilometer 500 bis 700) deutlich zu erkennen. Der gesamte Massenfluss über die Aufsetzlinie beträgt  $23.2 \times 10^{12} \text{ kg a}^{-1}$ . Davon entfallen  $12.2 \times 10^{12} \text{ kg a}^{-1}$  auf den Stancomb-Wills-Eisstrom und  $5.9 \times 10^{12} \text{ kg a}^{-1}$  auf den Veststraumen. Die beiden Eisströme zusammen haben einen Anteil von etwa 78 % am Gesamtmassenfluss. Der hier bestimmte Wert für den Massenfluss durch den Veststraumen ist geringer als der mit  $(9.6 \pm 3.8) \times 10^{12} \text{ kg a}^{-1}$  angegebene Wert von Klauke (2006). Rignot et al. (2008, Anhang) gibt für die Gebiete Riiser-Larsen-Schelfeis, Vestststraumen und Stancomb-Wills-Eisstrom einen Gesamtmassenfluss von  $36.3 \times 10^{12} \text{ kg a}^{-1}$  an, der etwa 38 % höher liegt als der in dieser Arbeit bestimmte Massenfluss.

Die Ursache dieser Abweichung liegt an der zu niedrig bestimmten Geschwindigkeit entlang der Aufsetzlinie. Allein der Geschwindigkeitsanteil der durch interne Deformation entsteht, reicht nicht aus, um realistische Geschwindigkeiten an der Aufsetzlinie und damit einen vergleichbaren Massenstrom zu erreichen.

## 7.2 Der Einfluss des Gleitgesetzes auf das Fließverhalten

Das basale Gleiten des Eises leistet einen bedeutenden Beitrag zur Dynamik des Inlandeises. Es tritt insbesondere in Bereichen auf, in denen es durch Schmelzprozesse an der Eisbasis zur Ausbildung eines Wasserfilms kommt oder in der Nähe der Aufsetzlinie, in der Meerwasser den unter dem Meeresspiegel liegenden Eisuntergrund infiltriert und dadurch basales Gleiten ermöglicht. Der Beitrag des basalen Gleitens kann innerhalb der Eisströme deutlich ausgeprägter sein als der durch interne Deformation des Eises erbrachte Anteil an der Gesamtfießgeschwindigkeit (Paterson 1994). In der Literatur wird zwischen zwei grundsätzlichen Gleitmechanismen unterschieden. Es handelt sich hierbei zum einen um das Gleiten über den festen Felsuntergrund und zum anderen um das Gleiten über einen deformierbaren Untergrund, wie z.B. wassergesättigten Geschiebemergel (Till). Beide Fälle sind bereits im Weertman-Gleitgesetz (Gl. 2.55) berücksichtigt. In der Literatur sind eine Vielzahl verschiedener Parametrisierungen des basalen Gleitens zu finden, die auf der verallgemeinerten Form des Weertman-Gleitgesetzes (Gl. 2.55, S. 14) basieren. In Tabelle 7.1 ist die Auswahl der Parameterkombinationen dargestellt, die in dieser Arbeit verwendet werden.

**Tabelle 7.1:** Parameterkombinationen verschiedener Autoren im Gleitgesetz.

Typ	$p$	$q$	$C_b$ in $\text{Pa}^{-(p-q)} \text{m a}^{-1}$	$\tau_n$	Quelle
1	3	1	$2 \times 10^{-7}$	$\bar{\rho}gH - p_w$	van der Veen (1987)
2	1	2	$5 \times 10^9$	$\bar{\rho}gH - p_w$	Budd und Jenssen (1987)
3	2	0	$4 \times 10^{-9}$	-	Klauke (2006)
4	3	2	11.2	$\bar{\rho}gH$	Greve (2005)

Für eine realistische Simulation der Fließdynamik ist es im Allgemeinen nötig, den basalen Gleitparameter  $C_b$  an die glaziologischen Gegebenheiten des Untersuchungsgebietes anzupassen, da dieser durch Feldmessungen nicht zugänglich ist. Im Folgenden wird der Gleitparameter  $C_b$  nicht optimiert, um eine generelle Vergleichbarkeit der Parametrisierungen zu erhalten. Ausgehend vom Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld der Referenzsimulation (Kap. 7.1) wird für jede Parameterkombination aus Tabelle 7.1, die hier jeweils als eigenes Gleitgesetz bezeichnet wird, der Zustand des thermodynamisch-fließdynamischen gekoppelten Systems nach 5000 Jahren betrachtet. Auf den folgenden Seiten werden für alle vier Gleitgesetzparametrisierungen die basalen Geschwindigkeiten  $u_b$ , der basale Gleitparameter  $\beta^2$  und die Oberflächengeschwindigkeiten  $u_s$  dargestellt.



### 7.2.1 Gleitgesetz 1

Das simulierte basale Geschwindigkeitsfeld für das Gleitgesetz 1 ist im oberen Teil der Abbildung 7.4 dargestellt und zeigt nur sehr geringe Werte für weite Teile des Inlandeises. In einem Bereich von etwa 25 km entlang der Aufsetzlinie gibt es deutliche Erhöhungen der basalen Geschwindigkeit, die sich auch auf das Fließfeld im Schelfeis auswirken. In den Regionen der Eisströme werden an der Aufsetzlinie Geschwindigkeiten von etwa  $400 \text{ m a}^{-1}$  erreicht. Lediglich an einigen Stellen des Högisen, östlich des Plogbreen und im östlichen Teil des Riiser-Larsen-Schelfeises bleiben die basalen Geschwindigkeiten an der Aufsetzlinie nahezu unverändert. In diesen Bereichen liegt die Temperatur des Eises mehrere Grad Celsius unter dem Druckschmelzpunkt, so dass die Temperaturfunktion im Gleitgesetz (Gl. 2.60) nur zu geringem basalen Gleiten führt. Bis auf die oben genannten Bereiche an der Aufsetzlinie gleitet das Eis in der Region Högisen vollständig.

Der starke Anstieg der basalen Geschwindigkeit in der Nähe der Aufsetzlinie ist unter anderem auf die dort reduzierte Auflast des Eises durch die Auftriebswirkung des Meerwassers zurückzuführen. Dieser Einfluss ist durch die effektive Normalspannung  $\tau_n$  berücksichtigt. Mit zunehmender Auftriebswirkung in Richtung der Aufsetzlinie reduziert sich die effektive Normalspannung und damit der basale Reibungsparameter  $\beta^2 \sim \tau_n^q$  (Gl. 2.64), bis die Auftriebskraft die Gewichtskraft des Eises kompensiert und der Eiskörper aufschwimmt. In diesem Fall wird  $\beta^2 = 0$  und es herrschen Schelfeisbedingungen (Scherspannungsfreiheit) an der Eisbasis. Die räumliche Verteilung des Gleitparameters ist im oberen Teil der Abbildung 7.8 dargestellt.

Es sei hier darauf hingewiesen, dass der kontinuierliche Übergang zu scherspannungsfreien Randbedingungen mit einem Gleitgesetz der Form  $u_b \sim \tau_n^q$  (Gl. 2.55) nicht möglich ist, da  $\lim_{\tau_n \rightarrow 0} u_b = \infty$ . Das ist ein wesentlicher Vorteil des hier entwickelten numerischen Modells gegenüber dem Modell von Sandhäger (2000) und anderen Modellen, die auf der Lösungsmethode (*shooting*) von Blatter (1995) basieren.

Der basale Reibungsparameter ist neben der effektiven Normalspannung auch von der basalen Schubspannung abhängig ( $\beta^2 \sim \tau_b^{1-p}$ ). Höhere Werte der basalen Schubspannung führen zur Reduzierung des Reibungsparameters  $\beta^2$ . In erster Näherung entspricht die basale Schubspannung dem Antrieb (*driving stress*) und ist proportional zum Gradienten der Oberfläche (vgl. Hutter 1983). Die starken Gradienten der Oberflächentopographie in der Nähe der Aufsetzlinie tragen daher zusätzlich zur Reduzierung des basalen Gleitparameters bei. Die basalen Geschwindigkeiten in einiger Entfernung von der Aufsetzlinie zeigen eine sehr unregelmäßige Verteilung. Einzelne Gitterpunkte weisen signifikante basale Geschwindigkeiten auf ( $> 10 \text{ m a}^{-1}$ ), direkte Nachbarn dagegen nicht. Die Verteilung der einzelnen Punkte variiert von Iteration zu Iteration und beeinflusst das Konvergenzverhalten des numerischen Fließmodells negativ. Die simulierten Oberflächengeschwindigkeiten (Abb. 7.6, oben) sind aufgrund der erhöhten basalen Geschwindigkeiten höher als im Referenzexperiment. Der damit verstärkte Einstrom in die Schelfeise bewirkt eine insgesamt höhere Geschwindigkeit im Schelfeis, ohne jedoch wesentlich das Strömungsmuster zu verändern. Die gegründeten Bereiche innerhalb des Schelfeises (*ice rumples* und *ice rises*) weisen an ihrer Basis nur einen relativ geringen Wert des basalen Gleitparameters auf ( $\beta^2 < 5 \times 10^3 \text{ Pa a m}^{-1}$ ). Ihre stabilisierende Wirkung auf das umgebende Schelfeis ist dadurch reduziert.

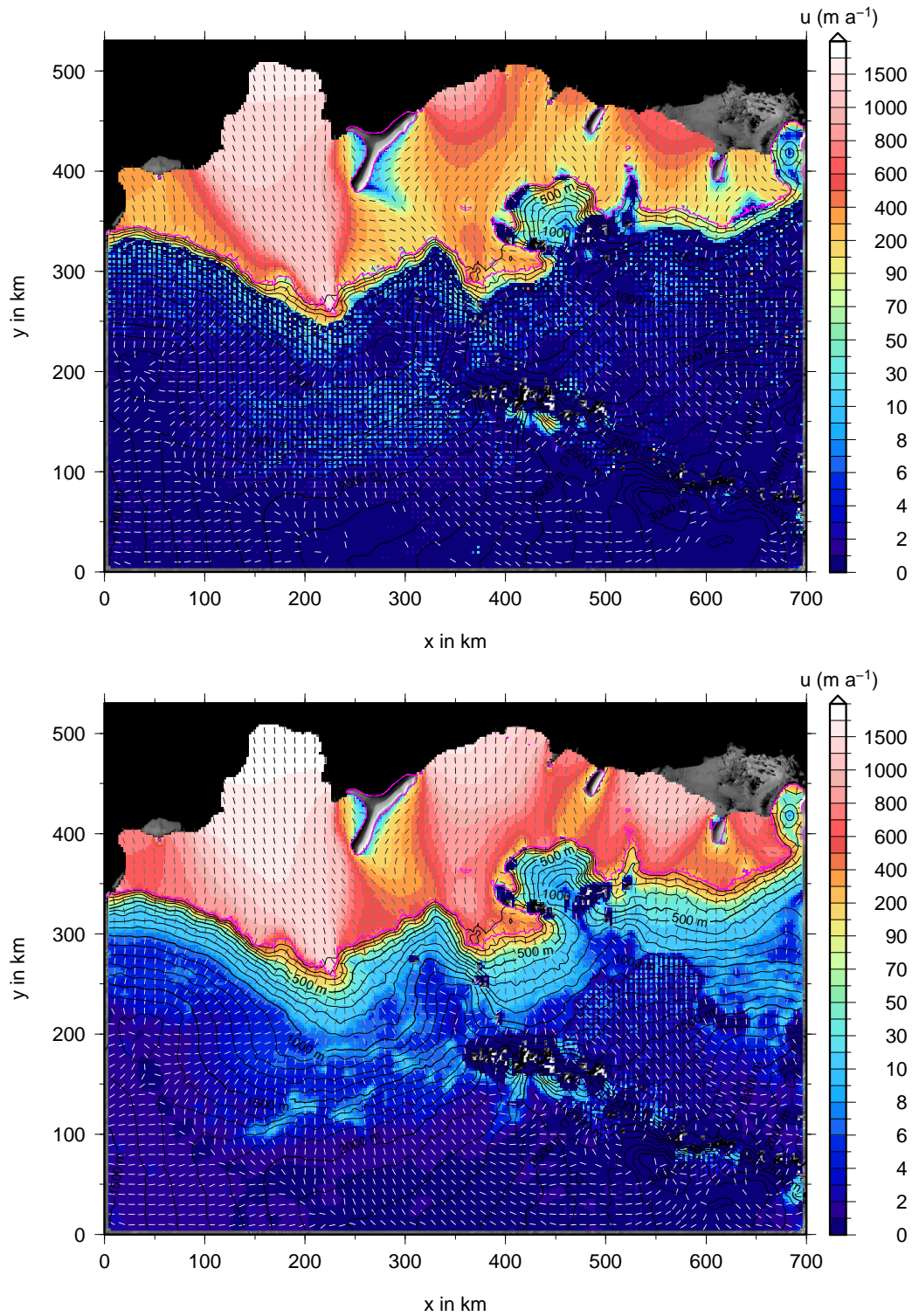


Abbildung 7.4: Simuliertes basales Geschwindigkeitsfeld in  $\text{m a}^{-1}$ . Gleitgesetz 1 (oben) und 2 (unten).

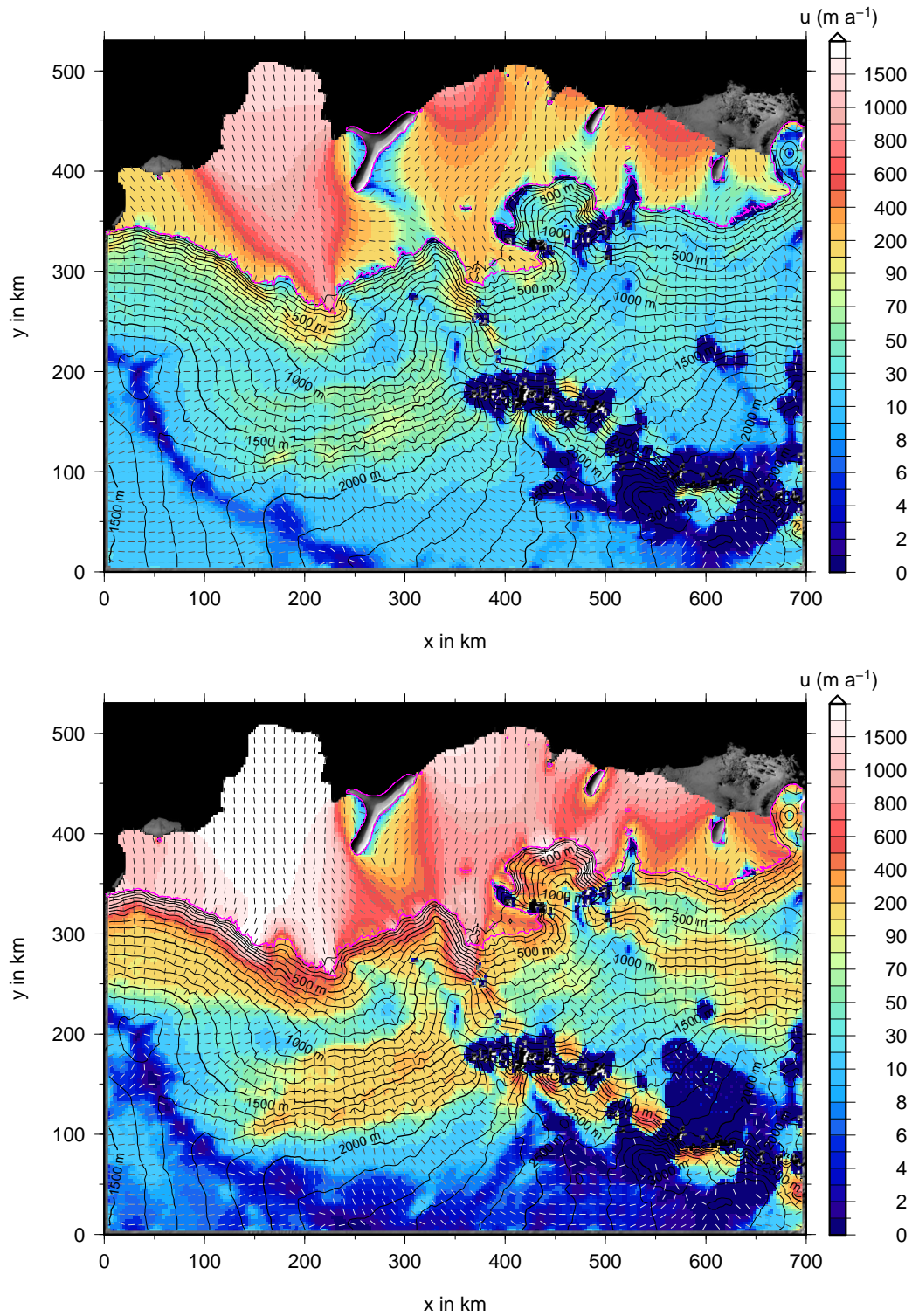


Abbildung 7.5: Simuliertes basales Geschwindigkeitsfeld in  $\text{m a}^{-1}$ . Gleitgesetz 3 (oben) und 4 (unten).

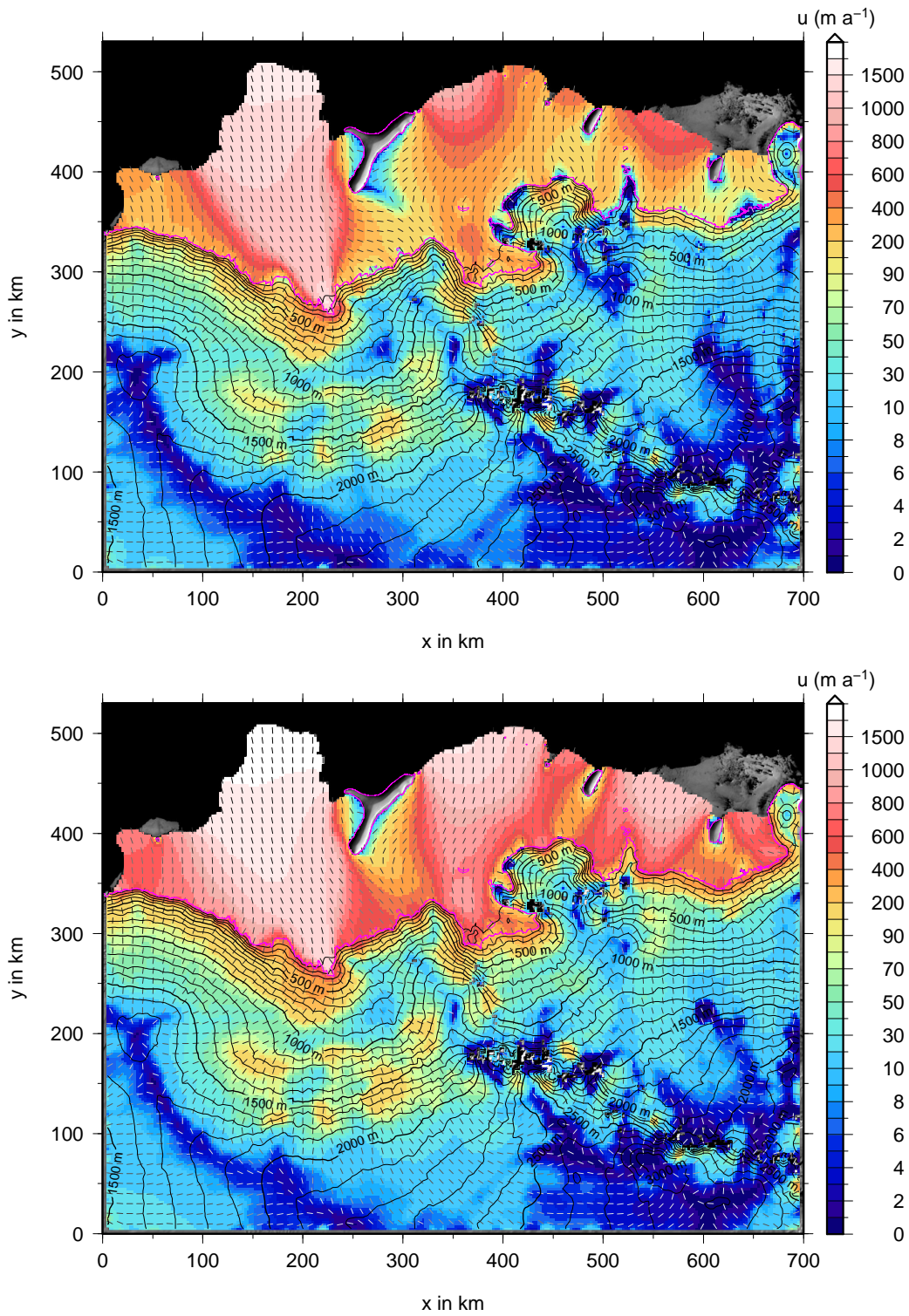


Abbildung 7.6: Simuliertes Oberflächengeschwindigkeitsfeld in  $\text{m a}^{-1}$ . Gleitgesetz 1 (oben) und 2 (unten).

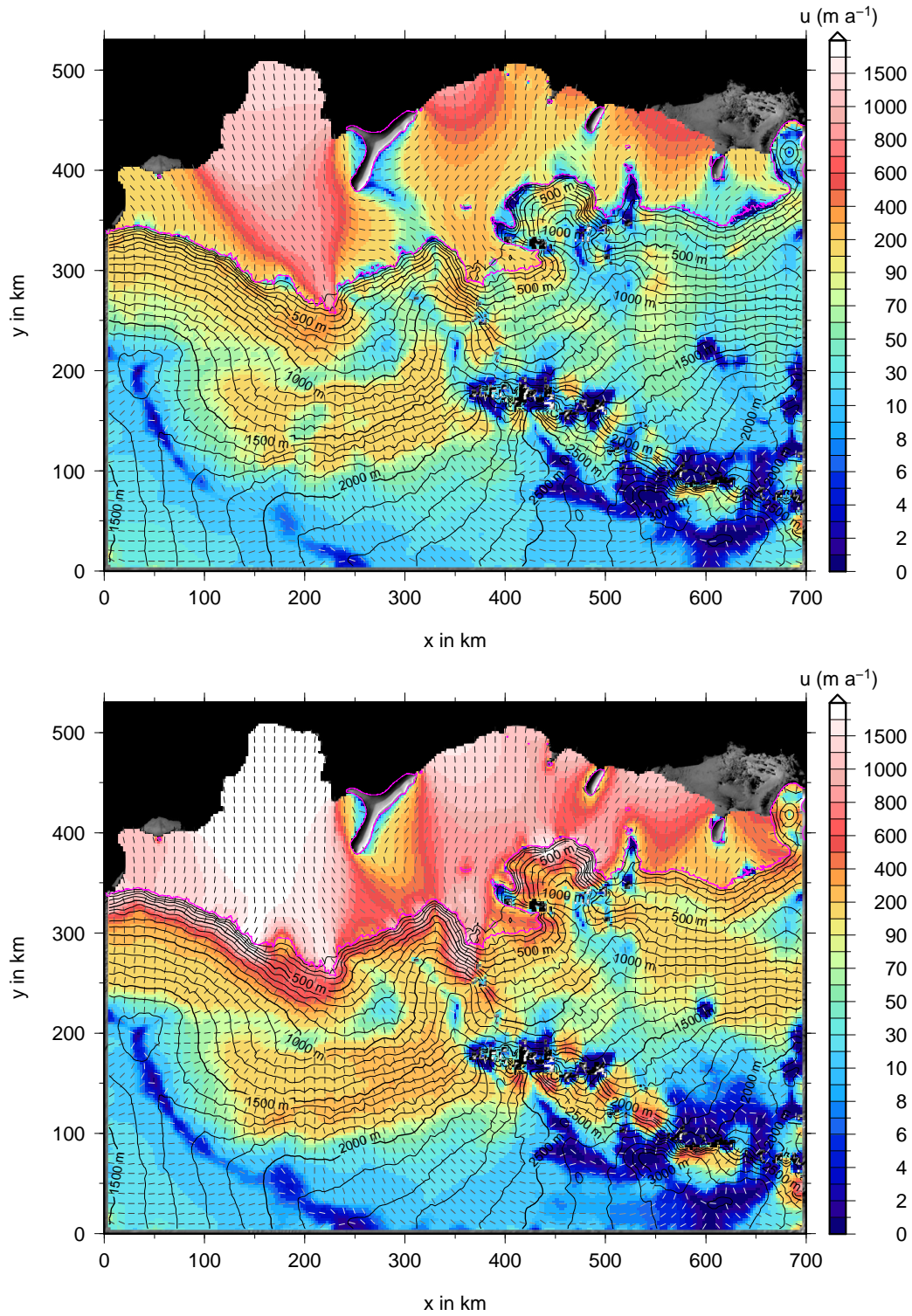
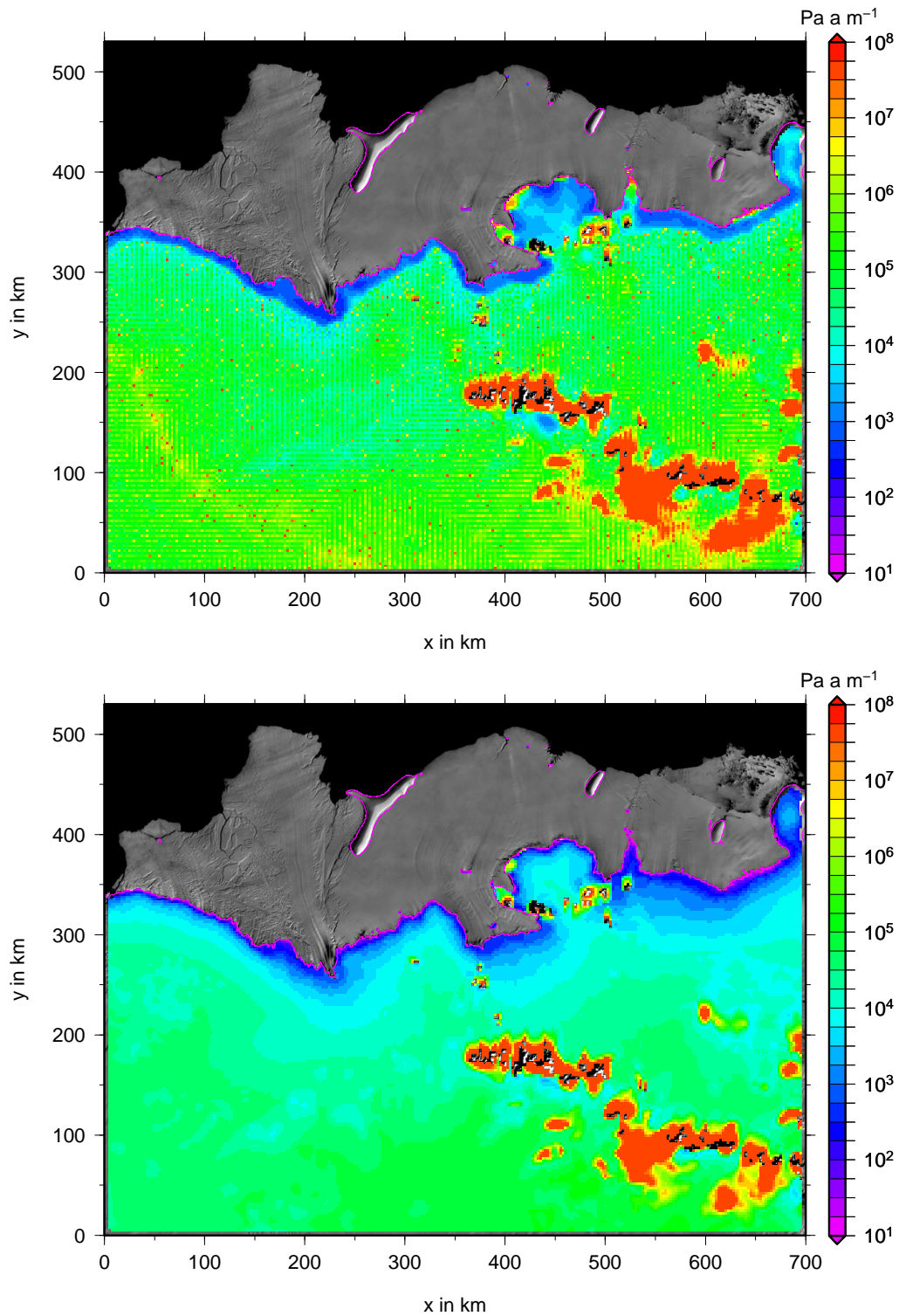
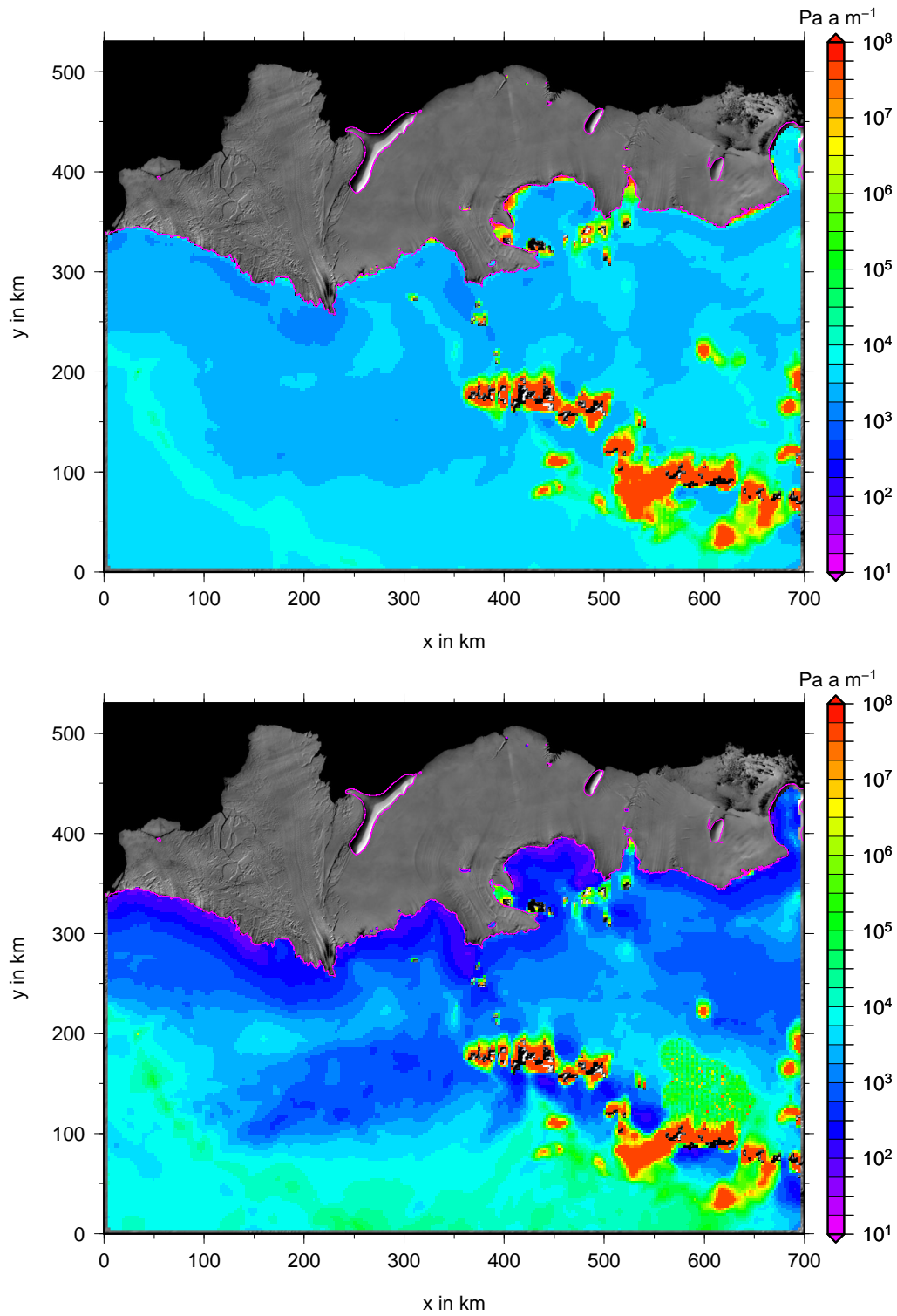


Abbildung 7.7: Simuliertes Oberflächengeschwindigkeitsfeld in  $\text{m a}^{-1}$ . Gleitgesetz 3 (oben) und 4 (unten).



**Abbildung 7.8:** Räumliche Verteilung des basalen Gleitparameters  $\beta^2$  in  $\text{Pa a m}^{-1}$  für die Gleitgesetze 1 (oben) und 2 (unten). Die Farbskala ist logarithmisch.



**Abbildung 7.9:** Räumliche Verteilung des basalen Gleitparameters  $\beta^2$  in  $\text{Pa a m}^{-1}$ . Gleitgesetz 3 (oben) und 4 (unten).

### 7.2.2 Gleitgesetz 2

Die simulierte basale Geschwindigkeit ist im unteren Teil der Abbildung 7.4 graphisch dargestellt. Bis auf an den thermisch regulierten Punkte im Bereich Högisen, deren Temperaturen weiterhin einige Grad Celsius unter dem Druckschmelzpunkt liegen und daher kaum gleiten, findet entlang der Aufsetzlinie basales Gleiten statt. Die Gleitgeschwindigkeit entlang der Aufsetzlinie erreicht fast überall Werte über  $400 \text{ m a}^{-1}$ . Im Gegensatz zum Gleitgesetz 1 ist in diesem Fall mit  $p = 1$  der basale Gleitparameter  $\beta^2$  nicht mehr von der basalen Schubspannung  $\tau_b$  abhängig (Gl. 2.64). Dadurch ist die effektive Normalspannung an der Eisbasis, die in Richtung der Aufsetzlinie abnimmt, allein für die räumliche Variabilität des Gleitparameters verantwortlich (Abb. 7.8, unten). Im Vergleich zum Gleitgesetz 1 fällt der Bereich, in dem basales Gleiten in verstärktem Maße auftritt, deutlich breiter aus. In einer Entfernung von etwa 150 bis 200 km von der Aufsetzlinie erreichen die basalen Geschwindigkeiten durchschnittlich noch mehr als  $10 \text{ m a}^{-1}$ . Die Oberflächengeschwindigkeiten (Abb. 7.6, unten) erreichen durch den stärkeren Einstrom an der Aufsetzlinie sowie die reduzierte Stabilisierung durch die *rumples* und *rises* an der Schelfeiskante des Stancomb-Wills-Eisstroms mehr als  $1750 \text{ m a}^{-1}$  und im Riiser-Larsen-Schelfeis mehr als  $1500 \text{ m a}^{-1}$ .

### 7.2.3 Gleitgesetz 3

In der gewählten Art der Parametrisierung des Gleitgesetzes ist der basale Gleitparameter unabhängig von der basalen Normalspannung  $\tau_n$  ( $q = 0$ ) und umgekehrt proportional zur basalen Schubspannung  $\tau_b$ . Diese Art der Parametrisierung beschreibt im Gegensatz zu den anderen hier verwendeten Parametrisierungen das Gleiten über einen deformierbaren Untergrund mit nicht-Newton'scher Rheologie (Paterson 1994; Greve und Blatter 2009). Die räumliche Verteilung des berechneten Gleitparameters  $\beta^2$  im Untersuchungsgebiet wird im oberen Teil der Abbildung 7.9 gezeigt.

Die simulierten basalen Geschwindigkeiten sind im oberen Teil der Abbildung 7.5 dargestellt. In weiten Teilen des Inlandeises treten basale Geschwindigkeiten von mehr als  $30 \text{ m a}^{-1}$  auf. Lediglich die Bereiche im Inlandeis, deren Temperaturen unterhalb des Druckschmelzpunktes liegen, zu denen die Bergregionen Heimefrontfjella und Kirwanveggen sowie einzelne Zonen im Högisen und an der östlich davon gelegen Landzunge im Riiser-Larsen-Schelfeis gehören, zeigen nur geringe basale Geschwindigkeiten. Das deutlich erhöhte basale Gleiten im Inneren des Inlandeises wirkt sich jedoch nicht auf die Bereiche in unmittelbarer Nähe der Aufsetzlinie aus. Der Grund hierfür ist, dass die Auftriebswirkung des Meerwassers in dieser Parametrisierung nicht berücksichtigt ist. Die Einstromgeschwindigkeiten in die Schelfeisregionen werden daher im Vergleich zum Referenzexperiment nur wenig verändert. Die resultierenden Oberflächengeschwindigkeiten unterscheiden sich aus diesem Grund nur sehr wenig vom Referenzgeschwindigkeitsfeld (vgl. Abb. 7.1 und Abb. 7.7, unten).

### 7.2.4 Gleitgesetz 4

Diese Formulierung des Gleitgesetzes lässt die Auftriebswirkung des umgebenden Meerwassers auf gegründetes Eis unterhalb des Meeresspiegels, im Gegensatz zu den Gleitgesetzen 1 und 2, unberücksichtigt ( $\tau_n = \bar{\rho}gH$ ). Durch die Wahl der Parameter  $p = 3$  und  $q = 2$  im Gleitgesetz (Gl. 2.64) nimmt der basale Gleitparameter  $\beta^2$  mit abnehmender Eisdicke und zunehmender basaler Schubspannung  $\tau_b$  ab. Diese beiden Einflüsse überlagern sich im Bereich der Aufsetzzone, in dem die Eisdicken vom Inlandeis kommend deutlich abnehmen und zusätzlich der



Oberflächengradient und damit in erster Näherung auch die basalen Schubspannungen zunehmen. Die simulierten basalen Geschwindigkeiten dieses Telexperiments sind im unteren Teil der Abbildung 7.5 dargestellt. Die Maxima der basalen Geschwindigkeiten im Inlandeis befinden sich nicht im Bereich der Eisströme Stancomb-Wills, Veststraumen oder Plogbreen, sondern in Bereichen, in denen der Oberflächengradient in der Nähe der Aufsetzlinie am größten ist. Dazu gehören die Regionen westlich des Stancomb-Wills entlang der Caird Coast, der Einstrom im westlichen Teil des Veststraumen sowie einzelne Bereiche im Högisen. In den genannten Regionen werden basale Geschwindigkeiten von über  $1000 \text{ m a}^{-1}$  erreicht. Zusätzlich treten sehr hohe basale Geschwindigkeiten ( $> 600 \text{ m a}^{-1}$ ) in der Nähe der eisfreien Berggipfel im Heimefrontfjella und Kirwanveggen auf, in denen der Gradient der Oberflächentopographie ebenfalls hoch ist.

Einzelne Gebiete an der Aufsetzlinie und in den Gebirgsregionen weisen sehr geringe basale Geschwindigkeiten auf. In diesen Regionen wird das Gleitgesetz von den niedrigen basalen Temperaturen dominiert, die unterhalb des Druckschmelzpunktes liegen.

Die insgesamt hohen basalen Geschwindigkeiten spiegeln sich auch im Oberflächengeschwindigkeitsfeld (unterer Teil von Abb. 7.7) wider. Diese erreichen im Högisen mehr als  $1500 \text{ m a}^{-1}$  und westlich des Stancomb-Wills-Eisstroms mehr als  $2000 \text{ m a}^{-1}$  an der Aufsetzlinie. Da sich die maximalen Einstromgeschwindigkeiten im Vergleich zum Referenzexperiment (Abb. 7.1) an anderen Positionen befinden, verändert sich das Strömungsmuster in den Schelfeisen deutlich. Das generelle Strömungsmuster wurde dagegen in den anderen Parametrisierungen des Gleitgesetzes erhalten. Im unteren Teil der Abbildung 7.9 ist der basale Gleitparameter  $\beta^2$  in  $\text{Pa a m}^{-1}$  dargestellt. Er weist im größten Teil des Untersuchungsgebiets Werte von unter  $5 \times 10^{-3} \text{ Pa a m}^{-1}$  auf, woraus direkt die sehr hohen Geschwindigkeiten resultieren. Zusätzlich zeigt diese Abbildung niedrige Werte des Reibungsparameters an der Basis der beiden gegründeten Bereiche im Veststraumen, wodurch die stabilisierende Wirkung dieser deutlich reduziert ist.

Insgesamt überlagern sich die Effekte der erhöhten Einstromgeschwindigkeit in die Schelfeise mit der reduzierten Rückhaltewirkung der gegründeten Bereiche innerhalb der Schelfeise, woraus sehr hohe Fließgeschwindigkeiten im Schelfeis resultieren.

## 7.3 Diskussion

Die simulierten Oberflächengeschwindigkeiten des Referenzexperiments zeigen entlang der Aufsetzlinie im Vergleich zu den gemessenen Geschwindigkeiten zu geringe Werte (Abb. 7.1).

Die Eistemperaturen erreichen an der Eisbasis überwiegend den Druckschmelzpunkt. Ausgenommen davon sind einige kleinere Regionen in der Nähe der eisfreien Berggipfel und geringmächtige Bereiche an der Aufsetzlinie im Riiser-Larsen-Schelfeis. Zusätzlich befinden sich weite Teile des Eises an der Aufsetzlinie unterhalb des Meeresspiegels (Abb. 6.12). Es ist daher anzunehmen, dass basales Gleiten einen signifikanten Einfluss auf das Fließgeschwindigkeitsfeld hat.

Es wurden insgesamt vier verschiedene Formen des Weertman-Gleitgesetzes (Gl. 2.55) betrachtet. Dabei zeigt sich, dass bis auf Gleitgesetz 2 (Till-Typ) alle Gleitgesetzparametrisierungen die Fließgeschwindigkeit des Eises an der Aufsetzlinie erhöhen. Es zeigt sich zudem, dass sich die Gleitparametrisierung in ihrer räumlichen Verteilung sehr unterschiedlich auf das Fließfeld auswirkt. Während sich unter Verwendung des ersten und zweiten Gleitgesetzes nur eine räumlich sehr begrenzte Zone an der Aufsetzlinie ausbildet, in der basales Gleiten

wesentlich zum Geschwindigkeitsfeld beiträgt, zeigen die Gleitgesetze 3 und 4 basales Gleiten im überwiegenden Teil des Untersuchungsgebietes. Im Unterschied zu den Gleitgesetzen 3 und 4 wurde in den Gleitgesetzen 1 und 2 die um die Auftriebswirkung des Meerwassers reduzierte Normalspannung berücksichtigt. In dieser Arbeit wurden die Eismächtigkeiten und Oberflächenhöhen der *ice rises* und *ice rumples* im Inneren des Schelfeises aus benachbarten Werten im Schelfeis interpoliert, da keine direkten Messungen existieren. Damit befinden sich diese Regionen weitestgehend im Schwimmgleichgewicht. Im Fall der Gleitgesetze 1 und 2 ist der Normalspannungsanteil am basalen Reibungsparameter  $\beta^2 \sim \tau_n^q$  dann sehr klein, wodurch die stabilisierende Wirkung der *rumples* und *rises* entfällt.

Alle untersuchten Gleitgesetze führen zu unrealistisch hohen Geschwindigkeiten im Inlandeis. Im Fall des zweiten Gleitgesetzes entwickeln sich beispielsweise basale Geschwindigkeiten, die allein ausreichen, das gemessene Oberflächengeschwindigkeitsfeld gut wiederzugeben. Es hat sich gezeigt, dass in den hier durchgeführten Experimenten die thermische Komponente im Gleitgesetz keinen dominierenden Einfluss auf das Fließfeld hat, da die Temperatur nur an wenigen Gitterpunkten unterhalb des Druckschmelzpunktes liegt. Für die Antarktis werden außerhalb seismisch aktiver Gebiete üblicherweise Werte von etwa  $0.045$  bis  $0.090 \text{ W m}^{-2}$  angenommen (Huybrechts 1992; Budd et al. 1994; Verbitsky 1997). Der verwendete Wärmestromdatensatz von Fox Maule et al. (2005) weist im Mittel einen basalen Wärmestrom von etwa  $0.072 \text{ W m}^{-2}$  auf und liegt damit im oberen Teil des angegebenen Wertebereichs. Die damit verbundenen hohen basalen Temperaturen sind möglicherweise eine Ursache für die zu hohen Gleitgeschwindigkeiten. Aus Sicht der Modellierung kann bisher keine der betrachteten Parametrisierungen in dem Untersuchungsgebiet bevorzugt werden. Zusätzliche Messungen insbesondere zur vertikalen Temperaturverteilung und zur Beschaffenheit des Untergrundes können helfen, den für das basale Gleiten infrage kommenden Parameterraum einzugrenzen.

# Literaturverzeichnis

- (ADD 2006) British Antarctic Survey: Antarctic Digital Database, Version 3.0. Cambridge, UK, 2006. – digitale Medien. – URL <http://www.add.scar.org>. – Stand: 09.05.2010
- (Aris 1989) Aris, R.: *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*. Dover, 1989
- (Arthern et al. 2006) Arthern, R. J. ; Winebrenner, D. P. ; Vaughan, D. G.: Antarctic snow accumulation mapped using polarization of 4.3-cm wavelength microwave emission. In: *Journal of Geophysical Research* 111 (2006), Nr. D06107
- (Baral et al. 2001) Baral, D. ; Hutter, K. ; Greve, R.: Asymptotic theories of large scale motion, temperature and moisture distributions in land based polythermal ice shields. A critical review and new developments. In: *Applied Mechanics Reviews* 54 (2001), Nr. 3, S. 215 – 256
- (Barrett et al. 1994) Barrett, R. ; Berry, M. ; Chan, T. F. ; Demmel, J. ; Donato, J. ; Dongarra, J. ; Eijkhout, V. ; Pozo, R. ; Romine, C. ; van der Vorst, H.: *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*. 2. Philadelphia, PA : SIAM, 1994
- (Batchelor 1967) Batchelor, G. K.: *An Introduction to Fluid Dynamics*. 1. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 1967
- (Blatter 1995) Blatter, H.: Velocity and stress fields in grounded glaciers: a simple algorithm for including deviatoric stress gradients. In: *Journal of Glaciology* 41 (1995), Nr. 138, S. 333 – 344
- (Breuer 2007) Breuer, B.: *Numerische Untersuchungen zur Dynamik temperierter Eiskappen am Beispiel von King George Island, Antarktis*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Dissertation, 2007
- (Bronstein und Semendjajew 1991) Bronstein, I.N. ; Semendjajew, K.A.: *Taschenbuch der Mathematik*, 25. 1991
- (Budd et al. 1994) Budd, W. ; Jenssen, D. ; Mavrakis, E. ; Coutts, B.: Modelling the Antarctic ice-sheet changes through time. In: *Annals of Glaciology* 20 (1994), S. 291 – 297
- (Budd et al. 1998) Budd, W. F. ; Coutts, B. ; Warner, R. C.: Modelling the Antarctic and Northern Hemisphere ice-sheet changes with global climate through the glacial cycle. In: *Annals of Glaciology* 27 (1998), S. 153 – 160
- (Budd und Jenssen 1987) Budd, W. F. ; Jenssen, D.: Numerical modelling of the large scale basal water flux under the west Antarctic ice sheet. In: Veen, C. J. Van der (Hrsg.) ; Oerlemens, J. (Hrsg.): *Dynamics of the west Antarctic ice sheet*, Dordrecht: Reidel, 1987, S. 293 – 320

- (Cavalieri und Comiso 2004) Cavalieri, D. T. M. ; Comiso, J.: AMSR-E/Aqua Daily L3 12.5 km Brightness Temperature, Sea Ice Concentration, & Snow Depth Polar Grids V002 / National Snow and Ice Data Center. Boulder, Colorado USA, 2004. – digitale Medien. – URL [http://nsidc.org/data/ae\\_si12.html](http://nsidc.org/data/ae_si12.html). – Stand: 09.05.2010
- (Colinge und Blatter 1998) Colinge, J. ; Blatter, H.: Stress and velocity fields in glaciers: Part I. Finite-difference schemes for higher-order glacier models. In: *Journal of Glaciology* 44 (1998), Nr. 148, S. 448 – 456
- (Comiso 2000) Comiso, J. C.: Variability and Trends in Antarctic Surface Temperatures from In Situ and Satellite Infrared Measurements. In: *Journal of Climate* 13 (2000), Nr. 10, S. 1674 – 1696
- (Comiso 2003) Comiso, J. C.: Warming Trends in the Arctic from Clear Sky Satellite Observations. In: *Journal of Climate* 16 (2003), Nr. 21, S. 3498 – 3510
- (Dahl-Jensen et al. 1998) Dahl-Jensen, D. ; Mosegaard, K. ; Gundestrup, N. ; Clow, G. D. ; Johnsen, S. J. ; Hansen, A. W. ; Balling, N.: Past Temperatures Directly from the Greenland Ice Sheet. In: *Science* 282 (1998), Nr. 5387, S. 268 – 271
- (Date 2005) Date, A. W.: *Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2005
- (DiMarzio et al. 2007) DiMarzio, J. ; Brenner, A. ; Schutz, R. ; Shuman, C. A. ; Zwally, H. J.: GLAS/ICESat 500 m laser altimetry digital elevation model of Antarctica / National Snow and Ice Data Center. Boulder, Colorado USA, 2007. – digitale Medien. – URL <http://nsidc.org/data/nsidc-0304.html>. – Stand: 09.05.2010
- (Engelhardt 2004) Engelhardt, H.: Ice temperature and high geothermal flux at Siple Dome, West Antarctica, from borehole measurements. In: *Journal of Glaciology* 50 (2004), S. 251 – 256
- (Ferziger und Perić 2002) Ferziger, J. H. ; Perić, M.: *Computational methods for fluid dynamics*. 3. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2002
- (Fowler 1986) Fowler, A. C.: A Sliding law for Glaciers of Constant Viscosity in the Presence of Subglacial Cavitation. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 407 (1986), Nr. 1832, S. 147 – 170
- (Fox Maule et al. 2005) Fox Maule, C. ; Purucker, M. E. ; Olsen, N. ; Mosegaard, K.: Heat Flux Anomalies in Antarctica Revealed by Satellite Magnetic Data. In: *Science* 309 (2005), Nr. 5733, S. 464 – 467
- (Glen 1955) Glen, J. W.: The Creep of Polycrystalline Ice. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 228 (1955), Nr. 1175, S. 519 – 538
- (Gray 2001) Gray, L.: Monitoring an Antarctic Ice Shelf. In: *Remote Sensing in Canada* 29 (2001), Nr. 2, S. 1
- (Greve 1995) Greve, R.: *Thermomechanisches Verhalten polythermer Eisschilde – Theorie, Analytik, Numerik*. Shaker Verlag, 1995 (Berichte aus der Geowissenschaft)

- (Greve 2005) Greve, R.: Relation of measured basal temperatures and the spatial distribution of the geothermal heat flux for the Greenland ice sheet. In: *Annals of Glaciology* 42 (2005), S. 424 – 432
- (Greve et al. 1998) Greve, R. ; Weis, M. ; Hutter, K.: Paleoclimatic evolution and present conditions of the Greenland Ice Sheet in the vicinity of Summit: An approach by large-scale modelling. In: *Paleoclimates* 2 (1998), Nr. 2-3, S. 133 – 161
- (Greve und Blatter 2009) Greve, Ralf ; Blatter, Heinz: *Dynamics of Ice Sheets and Glaciers*. Springer Berlin Heidelberg, 2009 (Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics)
- (Grosfeld 1993) Grosfeld, K.: *Berichte zur Polarforschung*. Bd. 130: *Untersuchungen zu Temperaturregime und Massenhaushalt des Filchner - Ronne-Schelfeises, Antarktis, unter besonderer Berücksichtigung von Anfrier- und Abschmelzprozessen*. Alfred-Wegener-Institut für Polar und Meeresforschung, 1993
- (Grosfeld et al. 1997) Grosfeld, K. ; Gerdes, R. ; Determann, J.: Thermohaline circulation and interaction beneath ice shelf cavities and the adjacent open ocean. In: *Journal of Geophysical Research* 102 (1997), S. 15595 – 15610
- (Grosfeld und Sandhäger 2004) Grosfeld, K. ; Sandhäger, H.: The evolution of a coupled ice shelf - ocean system under different climate states. In: *Global and Planetary Change* 42 (2004), Nr. 1-4, S. 107 – 132
- (Gudmundsson 2003) Gudmundsson, G. H.: Transmission of basal variability to a glacier surface. In: *Journal of Geophysical Research* 108 (2003), Nr. B5, S. 2253
- (Haran et al. 2005) Haran, T. ; Bohlander, J. ; Scambos, T. ; Fahnenstock, M.: MODIS mosaic of Antarctica (MOA) image map. Boulder, Colorado, USA, 2005. – digitale Medien. – URL <http://nsidc.org/data/moa/index.html>. – Stand: 09.05.2010
- (Harrison 1972) Harrison, W. D.: Temperature of a temperate glacier. In: *Journal of Glaciology* 11 (1972), Nr. 61, S. 15 – 29
- (Herterich 1987) Herterich, K.: On the flow within the transition zone between ice sheet and ice shelf. In: Veen, C. J. Van der (Hrsg.) ; Oerlemans, J. (Hrsg.): *Dynamics of the West Antarctic Ice Sheet*. D. Reidel Publishing Company, Terra Scientific Publishing Company; Dordrecht, Holland, 1987, S. 185 – 202
- (Hindmarsh 2004) Hindmarsh, R. C. A.: A numerical comparison of approximations to the Stokes equations used in ice sheet and glacier modeling. In: *Journal of Geophysical Research* 109 (2004), Nr. F01012
- (Hindmarsh und Payne 1996) Hindmarsh, R. C. A. ; Payne, A. J.: Time-steps limits for stable solutions of the ice-sheet equation. In: *Annals of Glaciology* 23 (1996), S. 74 – 85
- (Hindmarsh und Hutter 1988) Hindmarsh, Richard C. A. ; Hutter, Kolumban: Numerical fixed domain mapping solution of free-surface flows coupled with an evolving interior field. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 12 (1988), Nr. 4, S. 437 – 459

- (Hooke 2005) Hooke, R. L.: *Principles of glacier mechanics*. 2. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2005
- (Hooke 1981) Hooke, R. L.: Flow Law for Polycrystalline Ice in Glaciers: Comparison of Therretical Predictions, Laboratory Data, and Field Measurements. In: *Reviews of Geophysics and Space Physics* 19 (1981), Nr. 4, S. 664 – 672
- (Hulbe et al. 2005) Hulbe, C. L. ; Johnston, R. ; Joughin, I. ; Scambos, T.: Marine Ice Modification of Fringing Ice Shelf Flow. In: *Arctic, Antarctic and Alpine Research* 37 (2005), Nr. 3, S. 323 – 330
- (Humbert 2005) Humbert, A.: *Simulations of the Flow of the Ross Ice Shelf, Antarctica: parameter sensitivity tests and temperature-dependent ratefactor*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2005
- (Humbert et al. 2009) Humbert, A. ; Kleiner, T. ; Mohrholz, C.-O. ; Oelke, C. ; Greve, R. ; Lange, M. A.: A comparatative modelling study of the Brunt Ice Shelf - Stancomb-Wills Ice Tongue System. In: *Journal of Glaciology* 55 (2009), Nr. 189, S. 53 – 65
- (Humbert und Pritchard 2006) Humbert, A. ; Pritchard, H. D.: Numerical simulations of the ice flow dynamics of the Brunt Ice Shelf - Stancomb Wills Ice Tongue System. In: *Frisp Report* 17 (2006), S. 85 – 97
- (Hutter 1983) Hutter, K.: *Theoretical glaciology : material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets*. Dordrecht : Reidel/Terra Pub. Co., 1983
- (Hutter 2003) Hutter, K.: *Fluid und Thermodynamik: Eine Einführung*. 2. Springer, 2003. – 453 S
- (Huybrechts 1990) Huybrechts, P.: A 3-D model for the Antarctic ice sheet: a sensitivity study on the glacial-interglacial contrast. In: *Climate Dynamics* 5 (1990), Nr. 2, S. 79 – 92
- (Huybrechts 1992) Huybrechts, P.: *Berichte zur Polarforschung*. Bd. 99: *The Antarctic ice sheet and environmental change: a three - dimensional modelling study*. Alfred-Wegener-Institut für Polar und Meeresforschung, 1992
- (Huybrechts et al. 1996) Huybrechts, P. ; Payne, T. ; group the EISMINT intercomparison: The EISMINT benchmarks for testing ice-sheet models. In: *Annals of Glaciology* 23 (1996), S. 1 – 12
- (Jansen et al. 2005) Jansen, D. ; Sandhäger, H ; Rack, W.: Model experiments on large tabular iceberg evolution: ablation and strain thinning. In: *Journal of Glaciology* 51 (2005), Nr. 174, S. 363 – 372
- (Jenkins und Doake 1991) Jenkins, A. ; Doake, C. S. M.: Ice–ocean interaction on Ronne Ice Shelf, Antarctica. In: *Journal of Geophysical Research* 96 (1991), Nr. C1, S. 791–813
- (Jezek 2002) Jezek, K. C.: RADARSAT-1 Antarctic Mapping Project: changedetection and surface velocity campaign. In: *Annals of Glaciology* 34 (2002), S. 263 – 268
- (Khazendar et al. 2009) Khazendar, A. ; Rignot, E. ; Larour, E.: Roles of marine ice, rheology, and fracture in the flow and stability of the Brunt/Stancomb-Wills Ice Shelf. In: *Journal of Geophysical Research* 114 (2009), Nr. F4, S. F04007

- (Klauke 2006) Klauke, S.: *Numerische Modellierung eines Antarktischen Eisschild-Schelfeis-Systems – Riiser-Larsen und Einzugsgebiet*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Diplomarbeit, 2006
- (Kleiner et al. 2008) Kleiner, T. ; Humbert, A. ; Greve, R.: Rift treatment in ice-shelf modelling: A comparative modelling study of the Brunt Ice Shelf. In: *FRISP Report, in press* 18 (2008)
- (Lange et al. 2005) Lange, M.A. ; Blindow, N. ; Breuer, B. ; Grosfeld, K. ; Kleiner, T. ; Mohrholz, C.O. ; Nicolaus, M. ; Oelke, C. ; Sandhager, H. ; Thoma, M.: Numerical model studies of Antarctic ice-sheet – ice-shelf – ocean systems and ice caps. In: *Annals of Glaciology* 41 (2005), Nr. 1, S. 111 – 120
- (Lliboutry 1987) Lliboutry, L. A.: *Very slow flows of solids*. Dordrecht : Martinus Nijhoff Publishers, 1987
- (Lliboutry 1993) Lliboutry, L. A.: Internal melting and ice accretion at the bottom of temperate glaciers. In: *Journal of Glaciology* 39 (1993), Nr. 131, S. 50–64
- (Lythe et al. 2001) Lythe, M. ; Vaughan, D. G. ; BEDMAP Consortium the: BEDMAP: A new ice thickness and subglacial topographic model of Antarctica. In: *Journal of Geophysical Research* 106 (2001), Nr. B6, S. 11335 – 11352
- (MacAyeal 1993) MacAyeal, D. R.: A tutorial on the use of control methods in ice sheet modelling. In: *Journal of Glaciology* 39 (1993), S. 91 – 98
- (MacAyeal 1997) MacAyeal, D. R.: *EISMINT: Lessons in Ice-Sheet Modeling*. 1997
- (MacAyeal et al. 1986) MacAyeal, D. R. ; Shabtaie, S. ; Bentley, C. R. ; King, S. D.: Formulation of Ice Shelf Dynamic Boundary Conditions in Terms of Coulomb Rheology. In: *Journal of Geophysical Research* 91 (1986), Nr. B8, S. 8177 – 8191
- (MacAyeal und Thomas 1982) MacAyeal, D. R. ; Thomas, R. H.: Numerical modeling of ice-shelf motion. In: *Annals of Glaciology* 3 (1982), S. 189 – 194
- (Marsal 1976) Marsal, D.: *Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen in Wissenschaft und Technik*. Mannheim : Bibliographisches Institut, 1976
- (Massom 2006) Massom, D.: *Springer Praxis Books*. Bd. 2: *Polar Remote Sensing*. Berlin Heidelberg : Springer, 2006. – 426 S
- (Mayer 1996) Mayer, C.: *Numerische Modellierung der Übergangszone zwischen Eisschild und Schelfeis*. Alfred-Wegener-Institut für Polar und Meeresforschung, 1996 (Berichte zur Polarforschung 214)
- (Meister 2005) Meister, A.: *Numeric linearer Gleichungssysteme*. 2. Wiesbaden : Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, 2005
- (Morland 1987) Morland, L. W.: Unconfined ice-shelf flow. In: Veen, C. J. Van der (Hrsg.) ; Oerlemans, J. (Hrsg.): *Dynamics of the West Antarctic Ice Sheet*. D. Reidel Publishing Company, Terra Scientific Publishing Company; Dordrecht, Holland, 1987, S. 99–116

- (Nye 1957) Nye, J. F.: The Distribution of Stress and Velocity in Glaciers and Ice-Sheets. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 239 (1957), Nr. 1216, S. 113 – 133
- (Oerlemans und van der Veen 1984) Oerlemans, J. ; van der Veen, C. J.: *Ice sheets and climate*. D. Reidel Publishing Company, 1984
- (Patankar 1980) Patankar, S. V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. New York : McGraw-Hill, 1980
- (Paterson 1994) Paterson, W. S. B.: *The Physics of Glaciers*. 3. Oxford, England : Pergamon Press, 1994
- (Pattyn 2002) Pattyn, F.: Transient glacier response with a higher-order numerical ice-flow model. In: *Journal of Glaciology* 48 (2002), Nr. 162, S. 467 – 477
- (Pattyn 2003) Pattyn, F.: A new three-dimensional higher-order thermomechanical ice sheet model: Basic sensitivity, ice stream development, and ice flow across subglacial lakes. In: *Journal of Geophysical Research* 108 (2003), Nr. B8, S. 2382
- (Pattyn et al. 2008) Pattyn, F. ; Perichon, L. ; Aschwanden, A. ; Breuer, B. ; Smedt, B. de ; Gagliardini, O. ; Gudmundsson, G. H. ; Hindmarsh, R. C. A. ; Hubbard, A. ; Johnson, J. V. ; Kleiner, T. ; Konovalov, Y. ; Martin, C. ; Payne, A. J. ; Pollard, D. ; Price, S. ; Rückamp, M. ; Saito, F. ; Souček, O. ; Sugiyama, S. ; Zwinger, T.: Benchmark experiments for higher-order and full-Stokes ice sheet models (ISMIP-HOM). In: *The Cryosphere* 2 (2008), Nr. 2, S. 95 – 108
- (Pattyn 2008) Pattyn, Frank: Investigating the stability of subglacial lakes with a full Stokes ice-sheet model. In: *Journal of Glaciology* 54 (2008), Nr. 185, S. 353 – 361
- (Payne 1995) Payne, A. J.: Limit cycles in the basal thermal regime of ice sheets. In: *Journal of Geophysical Research* 100 (1995), Nr. B3, S. 4249 – 4263
- (Payne 1999) Payne, A. J.: A thermomechanical model of ice flow in West Antarctica. In: *Climate Dynamics* 15 (1999), Nr. 2, S. 115 – 125
- (Payne und Baldwin 2000) Payne, A. J. ; Baldwin, D. J.: Analysis of ice-flow instabilities identified in the EISMINT intercomparison exercise. In: *Annals of Glaciology* 30 (2000), S. 204 – 210
- (Payne und Dongelmans 1997) Payne, A. J. ; Dongelmans, P. W.: Self-organization in the thermomechanical flow of ice sheets. In: *Journal of Geophysical Research* 102 (1997), Nr. B6, S. 12219 – 12233
- (Payne et al. 2000) Payne, A. J. ; Huybrechts, P. ; Abe-Ouchi, A. ; Calov, R. ; Fastook, J. L. ; Greve, R. ; Marshall, S. J. ; Marsiat, I. ; Ritz, C. ; Tarasov, L. ; Thomassen, M. P. A.: Results from the EISMINT model intercomparison: the effects of thermomechanical coupling. In: *Journal of Glaciology* 46 (2000), S. 227 – 238
- (Peltier et al. 2000) Peltier, W.R. ; Goldsby, D.L. ; Kohlstedt, D.L. ; Tarasov, L.: Ice-age, Ice-sheet Rheology: Constraints from the Last Glacial Maximum Form of the Laurentide Ice Sheet. In: *Annals of Glaciology* 30 (2000), S. 163 – 176



- (Press et al. 1992) Press, W. H. ; Flannery, B. P. ; Teukolsky, S. A. ; Vetterling, W. T.: *Numerical Recipes in FORTRAN 77: The Art of Scientific Computing*. 2. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 1992
- (Rémy und Legrésy 1999) Rémy, P. ; Legrésy, B.: Ice flow physical processes derived from the ERS-1 high-resolution map of the Antarctica and Greenland ice sheets. In: *Geophysical Journal International* 139 (1999), Nr. 3, S. 645 – 656
- (Rignot et al. 2008) Rignot, Eric ; Bamber, Jonathan L. ; van den Broeke, Michiel R. ; Davis, Curt ; Li, Yonghong ; van de Berg, Willem J. ; van Meijgaard, Erik: Recent Antarctic ice mass loss from radar interferometry and regional climate modelling. In: *Nature Geoscience* 1 (2008), Nr. 2, S. 106 – 110
- (Rignot und Thomas 2002) Rignot, Eric ; Thomas, Robert H.: Mass Balance of Polar Ice Sheets. In: *Science* 297 (2002), Nr. 5586, S. 1502 – 1506
- (Ritz et al. 1997) Ritz, C. ; Fabre, A. ; Letréguilly, A.: Sensitivity of a Greenland ice sheet model to ice flow and ablation parameters: consequences for the evolution through the last climatic cycle. In: *Climate Dynamics* 13 (1997), Nr. 1, S. 11 – 23
- (Rotschky et al. 2007) Rotschky, G. ; Holmlund, P. ; Isaksson, E. ; Mulvaney, R. ; Oerter, H. ; Van Den Broeke, M. R. ; Winther, Jan-Gunnar: A new surface accumulation map for western Dronning Maud Land, Antarctica, from interpolation of point measurements. In: *Journal of Glaciology* 53 (2007), Nr. 182, S. 385 – 398
- (Saad 2003) Saad, Y.: *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Philadelphia, PA, USA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003
- (Sanderson und Doake 1979) Sanderson, T. J. O. ; Doake, C. S. M.: Is vertical shear in an ice shelf negligible? In: *Journal of Glaciology* 22 (1979), Nr. 87, S. 285 – 292
- (Sandhäger 2000) Sandhäger, H.: *Quantifizierung eisdynamischer und massenhaushaltsrelevanter Basisgrößen eines antarktischen Inlandeis-Schelfeis-Systems unter Einsatz eines numerischen Fließmodells*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Dissertation, 2000
- (Sandhäger 2003) Sandhäger, H.: Numerical study on the influence of fractures and zones of weakness on the flow regime of Larsen Ice Shelf. In: *FRISP Report* 14 (2003), S. 95 – 101
- (Seeber 2003) Seeber, G.: *Satellite Geodesy*. 2. de Gruyter, Berlin, New York, 2003
- (Shabtaie und Bentley 1982) Shabtaie, S. ; Bentley, C. R.: Tabular Icebergs: Implications from geophysical studies of ice shelves. In: *Journal of Glaciology* 28 (1982), Nr. 100, S. 413 – 430
- (Shapiro und Ritzwoller 2004) Shapiro, N.M. ; Ritzwoller, M.H.: Inferring surface heat flux distributions guided by a global seismic model: Particular application to Antarctica. In: *Earth and Planetary Science Letters* 223 (2004), S. 213 – 224
- (Smith und Wessel 1990) Smith, W. ; Wessel, P.: Gridding with continuous curvature splines in tension. In: *Geophysics* 55 (1990), Nr. 3, S. 293 – 305

- (Spalding 1972) Spalding, D. B.: A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 4 (1972), Nr. 4, S. 551 – 559
- (Steinhage 2001) Steinhage, D: *Beiträge aus geophysikalischen Messungen in Dronning Maud Land, Antarktis, zur Auffindung eines optimalen Bohrpunktes für eine Eiskerntiefbohrung*. Alfred-Wegener-Institut für Polar und Meeresforschung, 2001 (Berichte zur Polarforschung 384)
- (Steinhage et al. 2001) Steinhage, Daniel ; Nixdorf, Uwe ; Meyer, Uwe ; Miller, Heinz: Subglacial topography and internal structure of central and western Dronning Maud Land, Antarctica, determined from airborne radio echo sounding. In: *Journal of Applied Geophysics* 47 (2001), Nr. 3-4, S. 183–189
- (Tarasov und Peltier 1999) Tarasov, L. ; Peltier, W. R.: Impact of thermomechanical ice sheet coupling on a model of the 100 kyr ice age cycle. In: *J. Geophys. Res* 104 (1999), S. 9517–9545
- (Thoma et al. 2006) Thoma, M. ; Grosfeld, K. ; Lange, M. A.: Impact of the Eastern Weddell Ice Shelves on water masses in the eastern Weddell Sea. In: *Journal of Geophysical Research* 111 (2006), Nr. C12010
- (van der Veen 1987) van der Veen, C. J.: Longitudinal stresses and basal sliding: a comparative study. In: van der Veen, C. J. (Hrsg.) ; Oerlemans, J. (Hrsg.): *Dynamics of the West Antarctic Ice Sheet*. Dordrecht : D. Reidel, 1987, S. 223 – 248.
- (van der Veen und Whillans 1989a) van der Veen, C. J. ; Whillans, I. M.: Force budget: I. Theory and numerical methods. In: *Journal of Glaciology* 35 (1989), Nr. 19, S. 53 – 60
- (van der Veen und Whillans 1989b) van der Veen, C. J. ; Whillans, I. M.: Force budget: II. Application to two-dimensional flow along Byrd station strain network, Antarctica. In: *Journal of Glaciology* 35 (1989), Nr. 119, S. 61 – 67
- (Vaughan et al. 1995) Vaughan, D. G. ; Sievers, J. ; Doake, C. S. M. ; Hinze, H. ; Mantripp, D. R. ; Pozdeev, V. S. ; Sandhäger, H. ; Schenke, H. W. ; Solheim, A. ; Thyssen, F.: Subglacial and seabed topography, ice thickness and water column thickness in the vicinity of Filchner-Ronne-Schelfeis, Antarctica. In: *Polarforschung* 64 (1995), S. 75–88
- (Verbitsky 1997) Verbitsky, B.: Modelling the Antarctic Ice Sheet. In: *Annals of Glaciology* 25 (1997), S. 259 – 268
- (Vieli und Payne 2003) Vieli, A. ; Payne, A. J.: Application of control methods for modelling the flow of Pine Island Glacier, West Antarctica. In: *Annals of Glaciology* 36 (2003)
- (Weertman 1957) Weertman, J.: On the sliding of glaciers. In: *Journal of Glaciology* 3 (1957), Nr. 21, S. 33 – 38
- (Weertman 1964) Weertman, J.: The theory of glacier sliding. In: *Journal of Glaciology* 5 (1964), Nr. 39, S. 287 – 303

- (Weertman 1973) Weertman, J.: Creep of ice. In: Whalley, E. (Hrsg.) ; Jones, S. J. (Hrsg.) ; Gold, L. W. (Hrsg.): *Physics and Chemistry of Ice-Flow-Parameters*. Ottawa : Royal Society of Canada, 1973, S. 320 – 337
- (Weertman 1979) Weertman, J.: The unsolved general glacier sliding problem. In: *Journal of Glaciology* 23 (1979), Nr. 89, S. 97–115
- (Weis et al. 1999) Weis, M. ; Greve, R. ; Hutter, K.: Theory of Shallow Ice Shelves. In: *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 11 (1999), S. 11 – 50
- (Wesseling 2001) Wesseling, Pieter: *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 2001
- (Winnebrenner et al. 2001) Winnebrenner, D. P. ; Arthern, R. J. ; Shuman, C. A.: Mapping Greenland accumulation rates using observations of thermal emission at 4.5-cm wavelength. In: *Journal of Geophysical Research* 106 (2001), Nr. D24, S. 33919–33934
- (Wuite und Jezek 2009) Wuite, J. ; Jezek, K. C.: Evidence of past fluctuations on Stancomb-Wills Ice Tongue, Antarctica, preserved by relict flow stripes. In: *Journal of Glaciology* 55 (2009), Nr. 190, S. 239 – 244
- (Zwally et al. 2002) Zwally, H. J. ; Schutz, B. ; Abdalati, W. ; Abshire, J. ; Bentley, C. ; Brenner, A. ; Bufton, J. ; Dezio, J. ; Hancock, D. ; Harding, D. ; Herring, T. ; Minster, B. ; Quinn, K. ; Palm, S. ; Spinhirne, J. ; Thomas, R.: ICESat's laser measurements of polar ice, atmosphere, ocean, and land. In: *Journal of Geodynamics* 34 (2002), Nr. 3-4, S. 405 – 445
- (Zwally et al. 2005) Zwally, H. J. ; Giovinetto, Mario B. ; Li, Jun ; Cornejo, Helen G. ; Beckley, Matthew A. ; Brenner, Anita C. ; Saba, Jack L. ; Yi, Donghui: Mass changes of the Greenland and Antarctic ice sheets and shelves and contributions to sea-level rise: 1992–2002. In: *Journal of Glaciology* 51 (2005), Nr. 175, S. 509 – 527
- (Zwinger et al. 2007) Zwinger, T. ; Greve, R. ; Gagliardini, O. ; Shiraiwa, T. ; Lyly, M.: A full Stokes-flow thermo-mechanical model for firn and ice applied to the Gorshkov crater glacier, Kamchatka. In: *Annals of Glaciology* 45 (2007), S. 29 – 37



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Karte des Untersuchungsgebietes . . . . .	3
2.1	Fließparameters nach Paterson (1994) und Hooke (1981) . . . . .	10
3.1	Gewichtetes Diskretisierungsschema . . . . .	21
3.2	Eisdicke und Einstromgeschwindigkeiten BIS und SWIT . . . . .	22
3.3	Gemessene Eisoberflächengeschwindigkeiten in $\text{m a}^{-1}$ . . . . .	23
3.4	Ergebnisse der Referenzsimulation . . . . .	24
3.5	Simulierten Geschwindigkeiten im Vergleich zum Referenzexperiment (BIS) . . . . .	26
3.6	Häufigkeitsverteilungen der simulierten und gemessenen Geschwindigkeiten . . . . .	27
3.7	Modellierte Geschwindigkeiten Riss 1 und Riss 2 . . . . .	28
3.8	Querprofil über Riss 1 und Riss 2 . . . . .	29
4.1	Diskretisierungsschema . . . . .	46
4.2	Anordnung der Gitterpunkte entlang der Kalbungslinie . . . . .	48
5.1	Geometrie ISMIP-A . . . . .	56
5.2	Simuliertes Fließgeschwindigkeitsfeldes (ISMIP-A) . . . . .	58
5.3	Betrag der horizontalen Geschwindigkeit (ISMIP-A) . . . . .	59
5.4	Komponenten des Fließgeschwindigkeitsfeldes (ISMIP-C) . . . . .	62
5.5	Betrag der horizontalen Geschwindigkeit (ISMIP-C) . . . . .	63
5.6	Vertikalschnitte (ISMIP-E000/E001) . . . . .	64
5.7	Vergleich der simulierten Oberflächengeschwindigkeiten (ISMIP-E000/E001) . . . . .	65
5.8	Geometrie (ISMIP-F000/F001) . . . . .	66
5.9	Oberflächenhöhe und -geschwindigkeit (ISMIP-F000/F001) . . . . .	67
5.11	Analytische Lösung (Eisberg) . . . . .	68
5.10	Horizontales Fließgeschwindigkeitsfeld (Eisberg) . . . . .	70
6.1	Digitalisierte Liniensegmente zur Einteilung glaziologischer Einheiten . . . . .	73
6.2	ICESat/GLAS-Oberflächenhöhen . . . . .	74
6.3	ICESat/GLAS-Datenfilter . . . . .	75
6.4	Geoidhöhen EGM08 . . . . .	76
6.5	Räumliche Verteilung der gemessenen Eismächtigkeit . . . . .	77
6.6	Dichteverteilung im Schelfeis . . . . .	78
6.7	Histogrammierte Dichte . . . . .	79
6.8	Anpassung einer Eisdicken-Abstands-Funktion . . . . .	80
6.9	Lokal interpolierte Oberflächenhöhen . . . . .	83
6.10	Topographiemodell . . . . .	84
6.11	Interpolierte Eismächtigkeit . . . . .	84
6.12	Topographie des subglazialen Felsuntergrundes . . . . .	85

6.13	Oberflächentemperatur nach Comiso (2000). . . . .	86
6.14	Oberflächenakkumulation nach Arthern et al. (2006). . . . .	88
6.15	Basaler Wärmestrom nach Fox Maule et al. (2005). . . . .	89
6.16	Basale Massenbilanz nach Thoma et al. (2006) . . . . .	90
6.17	Übersicht über die gemessenen Fließgeschwindigkeiten . . . . .	91
7.1	Simulierte und gemessenen Geschwindigkeiten . . . . .	95
7.2	Fließlinien des simulierten Geschwindigkeitsfeldes . . . . .	96
7.3	Lokaler Massenfluss über die Aufsetzlinie . . . . .	97
7.4	Simuliertes basales Geschwindigkeitsfeld $1/2$ . . . . .	100
7.5	Simuliertes basales Geschwindigkeitsfeld $3/4$ . . . . .	101
7.6	Simuliertes Oberflächengeschwindigkeitsfeld $1/2$ . . . . .	102
7.7	Simuliertes Oberflächengeschwindigkeitsfeld $3/4$ . . . . .	103
7.8	basalen Gleitparameters $\beta^2$ $1/2$ . . . . .	104
7.9	basalen Gleitparameters $\beta^2$ $3/4$ . . . . .	105

# Tabellenverzeichnis

5.1	Vergleich der Ergebnisse (ISMIP-A/C) . . . . .	60
7.1	Parameterkombinationen verschiedener Autoren im Gleitgesetz. . . . .	98





# Danksagung

Hiermit möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. M. A. Lange für die Übertragung der vorliegenden Arbeit sowie das Vertrauen bedanken, mir eine selbstständige Ausarbeitung des Themas ermöglicht zu haben.

Herrn Prof. Dr. U. Hansen danke ich für die Übernahme des zweiten Gutachtens.

Mein besonderer Dank gilt Frau Prof. Dr. A. Humbert, für die zahlreichen Diskussionen und Anregungen, die mir bei der Lösung schwieriger Probleme weitergeholfen haben und das Gelingen dieser Arbeit ermöglicht haben.

Besonders bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Dr. N. Blindow, der mir ein zuverlässiger Ansprech- und Diskussionspartner war und es mir möglich machte, an der DATIC-Antarktisexpedition teilzunehmen.

Für die Überlassung wertvoller Daten bedanke ich mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. R. Dietrich, Herrn M. Bäessler, Herrn Dr. D. Steinhage und Herrn Dr. M. Thoma.

Mein weiterer Dank gilt meinen Arbeitskollegen am Institut für Geophysik an der Universität Münster und Hamburg für die gute Arbeitsatmosphäre und wertvolle fachliche Gespräche. Besonders möchte ich mich bei Herrn M. Rückamp für die langjährige freundschaftliche Zusammenarbeit bedanken. Herrn Dr. J. Schmalzl und Herrn M. Schulz danke ich für die vielen Einblicke in interessante Gebiete der Hard- und Softwareentwicklung. Bei Frau Dr. B. Breuer bedanke ich mich für die wertvollen Hinweise bei der Durchführung dieser Arbeit.

Finanziell wurde die vorliegende Arbeit durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft gefördert.



# Lebenslauf

