Dr. Hubert Weller

Die Geometrie unseres Anschauungsraumes in der Oberstufe – Konzept eines Computerunterstützten Unterrichts

Doch erst zur Tat erregt den tiefsten Sinn
Geometrie, die Allbeherrscherin:
Sie schaut das All durch ein Gesetz belebt,
Sie mißt den Raum und was im Raume schwebt;
Sie regelt streng die Kreise der Natur,
Hiernach die Pulse deiner Taschenuhr;
Sie öffnet geistig grenzenlosen Kreis
Der Menschenhände kümmerlichsten Fleiß.
J. W. Goethe

Ein Unterricht zur Analytischen Geometrie hat in erster Linie mit der Geometrie unseres Anschauungsraumes zu tun, und er hat immer auch die Entwicklung des räumlichen Anschauungsvermögens zum Ziel. Die Objekte dürfen nicht nur in ihrer algebraischen Beschreibung, sondern müssen in Verbindung mit realen Gegenständen und ihren grafischen Darstellungen untersucht werden. Bilder spielen dabei eine große Rolle. Kein Gebiet der Oberstufenmathematik ist so geeignet, eine Verbindung der linken und rechten Gehirnhälfte (Analytisches Denken in der einen, Raumgefühl und Bilder in der anderen) zu fördern.

> Die Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens ist ein altes Ziel der Mathematikdidaktik und findet sich bereits in den Meraner Reformvorschlägen von 1905. Seitdem Thurston 1938 ***Raumvorstellung*** als einen von sieben Primärfaktoren der Intelligenz identifiziert hat, gehört sie sogar zu den wenigen allgemeinen Lernzielen des Mathematikunterrichts, deren Relevanz kognitionspsychologisch nachgewiesen ist.
> W. Kroll in mathematiklehren (Heft 77)

Das „rule of the tool"-Syndrom (*Dominanz der Methode)*

> Es ist keine Frage, dass die heute in der SII vorherrschende Vektormethode derartig zelebriert wird und zum Rückzug auf eine bloße lineare Geometrie geführt hat.
> Eine mathematisch so bedeutsame, in der Natur allgegenwärtige und technisch viel benutzte Form wie die Spirale bleibt unberücksichtigt, weil sie sich nicht in das Prokrustes-Bett einer bloß kartesisch verstandenen Funktion y = f(x) zwingen lässt.
> Wir stehen am Beginn des piktoralen Zeitalters. Kommunikation geschieht mehr und mehr über das Bild. „Alles ist heute im Bild, nur wir sind es nicht mehr.
> H. Schupp Geometrie in der SII (JMD 21 (2000) H.1 S.50-66

> Überhaupt hat man den oft den Eindruck, daß es vor allem auf das Vokabular ankomme, während die Frage, mit welchen Aktivitäten inhaltlich angemessene Vorstellungen aufgebaut werden können, eine ganz untergeordnete Rolle zu spielen scheint.
> W. Kroll in mathematiklehren (Heft 77)

Forderung 1: Wir sollten die Methodendemonstration häufiger ablösen, zumindest unterbrechen durch Objektexploration.

> (Geometrieunterricht wird dadurch gewiß risikoreicher, aber auch genetischer, schülerzentrierter)

Forderung 2: Lernen in sinnstiftenden Kontexten arrangieren

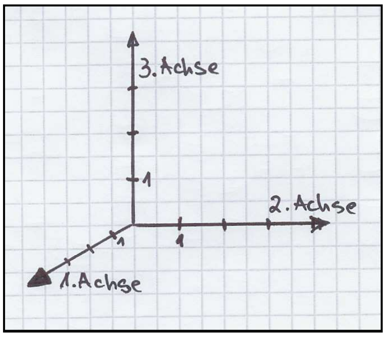
> (historisch, genetisch, Anwendungen, ...)

Deshalb darf ein Unterricht, der dem Rechnung tragen will, nicht nur "Papier- und Bleistiftaufgaben" bearbeiten, sondern er muss reale Objekte einbeziehen und den Computer als mächtiges Werkzeug zur Visualisierung nutzen. Matrizen sind dabei ein wichtiges Werkzeug - sie sind eine Klammer zwischen Geometrie und Algebra. Die Bilder von realen Gegenständen sind immer Projektionen eines 3D-Objektes in einen 2D-Raum (Zeichenblatt, Bildschirm,...), diese werden mit Matrizen realisiert. Lineare Abbildungen (zunächst 2-dimensional, dann auch 3-dimensional) bringen Bewegung ins Spiel, hier werden die Grundlagen der Computergraphik erarbeitet.

Ziel: Geometrische Objekte werden mit Hilfe von Zahlen und Gleichungen beschrieben, untersucht und studiert. Die Darstellung ermöglicht auch die Rekonstruktion der Objekte mit Hilfe von Zahlen und Gleichungen.

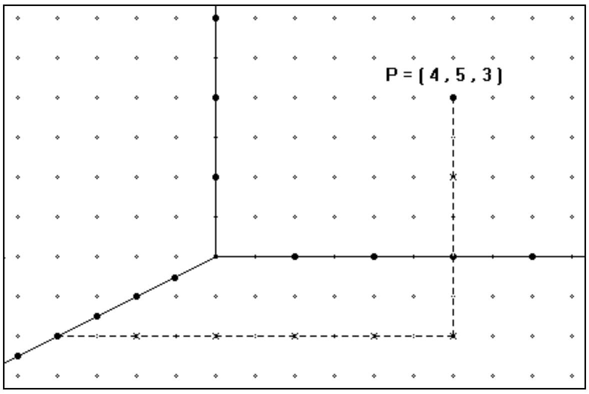
Was ist ein Vektor?

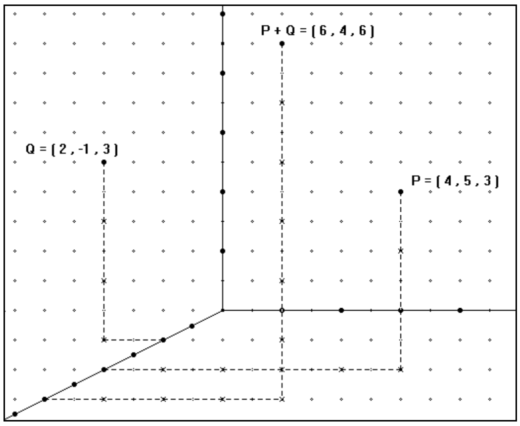
"Ein Element eines Vektorraumes!" ist eine völlig korrekte Antwort, die uns aber in einem Kurs Analytische Geometrie überhaupt nicht hilft. Wir gehen zunächst einmal von einem Zahlentripel aus, das man bei der Koordinatisierung des Raums erhält. Bei der Darstellung von dreidimensionalen Objekten auf dem (zweidimensionalen) Zeichenblatt orientieren wir uns an dem üblicherweise verwendeten Karopapier: die erste Achse zeigt nach vorne (sie wird schräg gezeichnet - eine Einheit mit einem Kästchen nach links und einem halben Kästchen nach unten), die zweite Achse zeigt nach rechts (eine Einheit mit zwei Kästchen), die dritte Achse zeigt nach oben (eine Einheit mit zwei Kästchen).



Dies scheint zwar "kleinkariert" zu sein, es erleichtert aber die Arbeit ungemein. Außerdem werden wir diese Art der Darstellung später wieder aufgreifen, wenn wir mit Hilfe von Projektionsmatrizen die Bilder von 3D-Objekten mit DERIVE in dem 2D-Grafikfenster erzeugen.

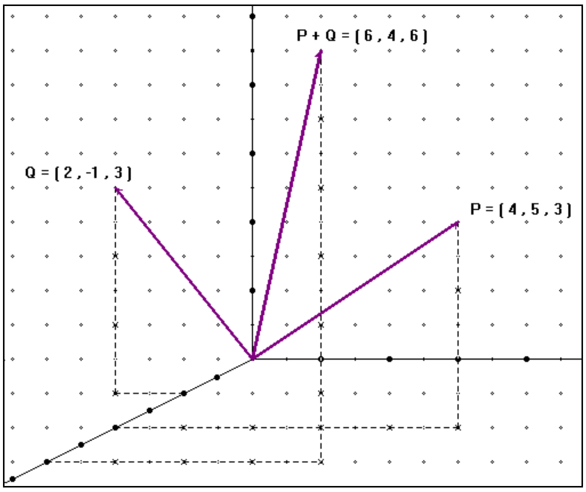
Um die Lage eines Punktes im Raum eindeutig festzulegen braucht man nach der Wahl eines Koordinatensystems drei Zahlen, die den Ort eindeutig beschreiben.

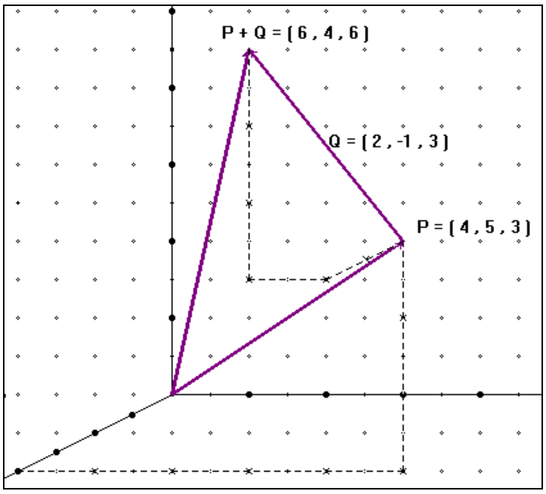




Mit diesen **ZAHLENTRIPELN** kann man rechnen (Addieren, Vervielfachen,...).

Zur Veranschaulichung der Rechenoperationen benutzen wir die Pfeile als **ORTSVEKTOREN** bzw. **VERSCHIEBUNGSVEKTOREN**: (an den Punkt P wird der Pfeil Q angehängt.)





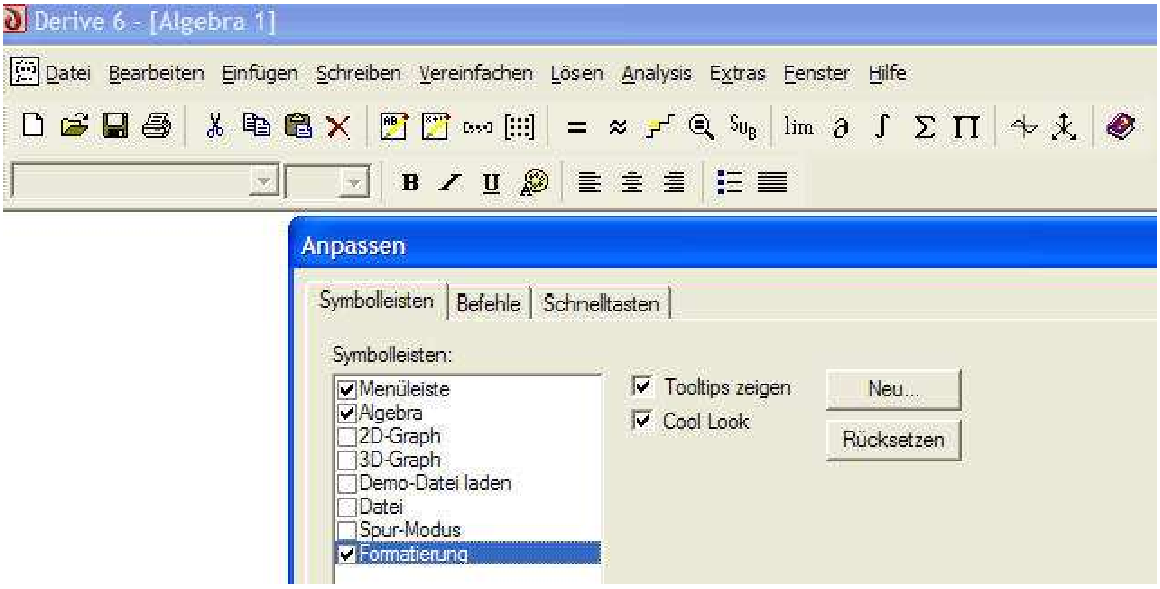
Wir sehen dies als unterschiedliche Interpretation des Begriffs **VEKTOR** und nutzen je nach Situation die geeignete Grundvorstellung:

- Zahlentripel
- Punkt im Raum
- Ortsvektor (Pfeil vom Ursprung)
- Verschiebungsvektor (Pfeil als Verschiebungsprogramm)

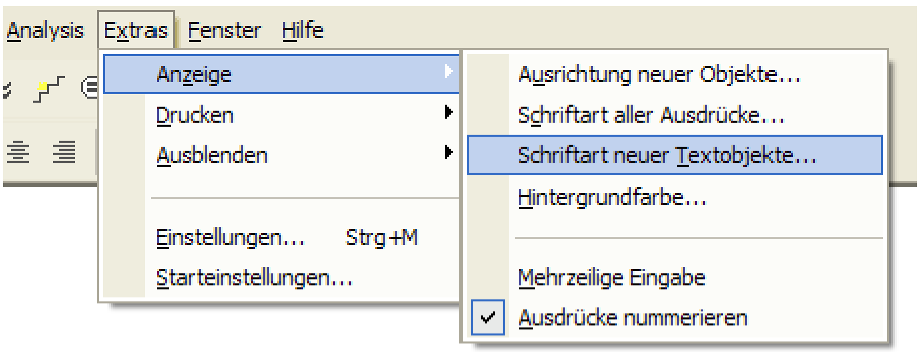
Hinweise zu den Einstellungen von DERIVE

Bevor die Arbeit beginnt...

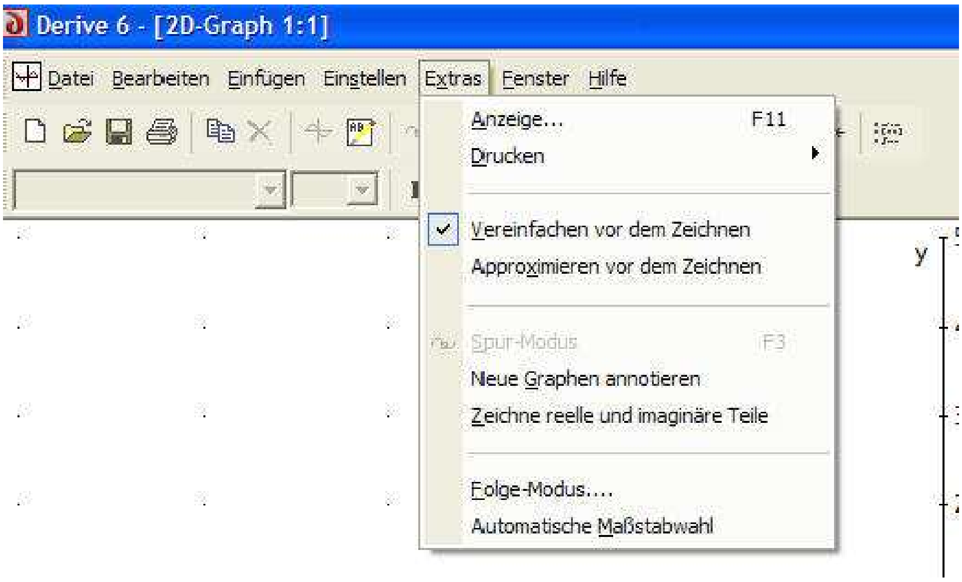
Wir aktivieren im Algebra-Fenster über *"Fenster"* *"Anpassen"* die Symbolleiste zur Formatierung in dem entsprechenden Kontrollkästchen.



Im Algebra-Fenster lassen sich über *"Einfügen"* *"Textobjekt"* Kommentare, Erläuterungen, Problemstellungen, Fragen formulieren und einfügen. Darauf sollte bei der Arbeit im Unterricht von Anfang an geachtet werden! Das Algebra-Fenster soll nicht als reines Rechenblatt genutzt werden, sondern ein Leser soll hinterher verstehen können, was sich der Bearbeiter bei der Lösung der Aufgabe gedacht hat - das Worksheet ist eher im Sinne eines Lösungsprotokolls zu verstehen. Die Texte können - wie man das von einem Textverarbeitungsprogramm kennt - bearbeitet und formatiert werden (auch noch nachträglich). Dabei kann die Schriftart für die Textobjekte vorher eingestellt werden:



In beiden Grafikfenstern wird über Extras die Option *"Vereinfachen vor dem Zeichnen"* aktiviert



Diese Einstellungen werden automatisch als Statusvariable gespeichert und brauchen später nicht wieder eingestellt werden.

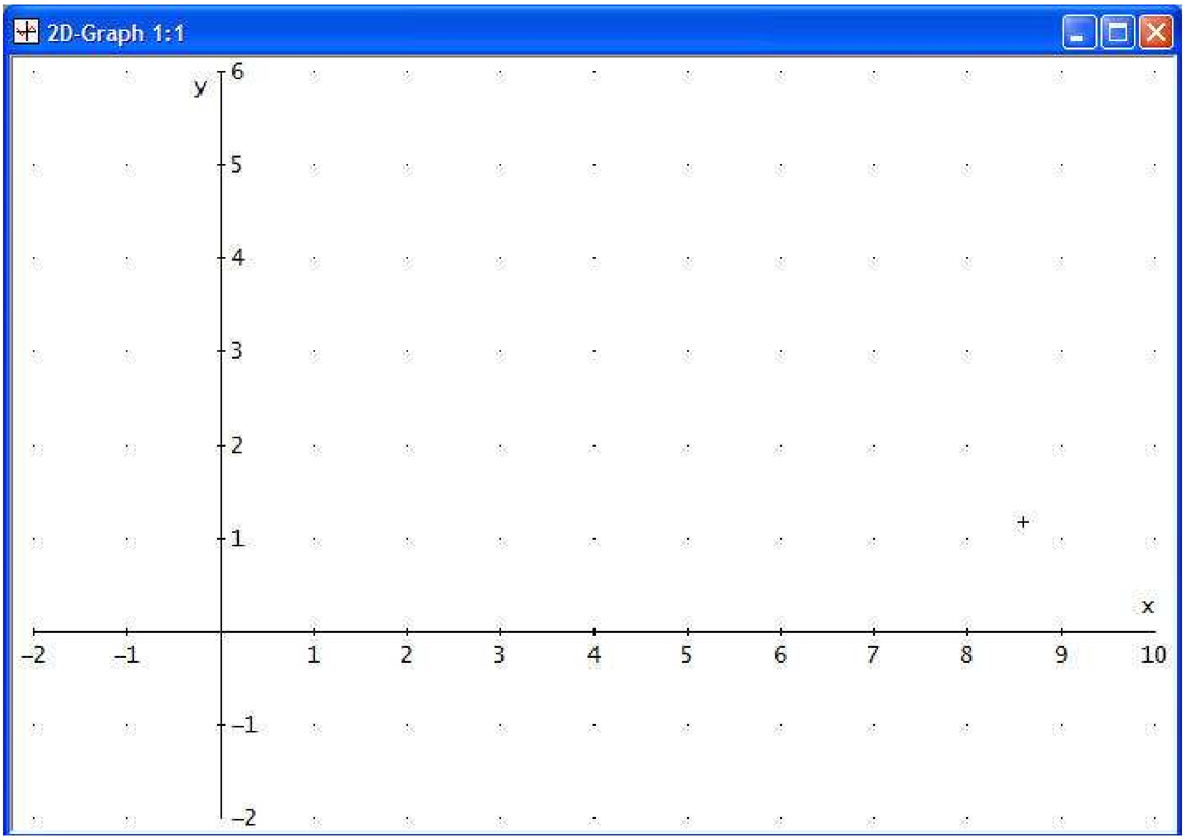
Darauf ist zu achten, wenn eine neue Datei bearbeitet wird...

1. Im **Algebra-Fenster** sollte über *"Extras" "Einstellungen"* der Eingabe-Modus *"Wort"* aktiviert werden, damit Variablennamen aus mehreren Zeichen gebildet werden können.(Diese Option wird leider nicht als Statusvariable gespeichert.)

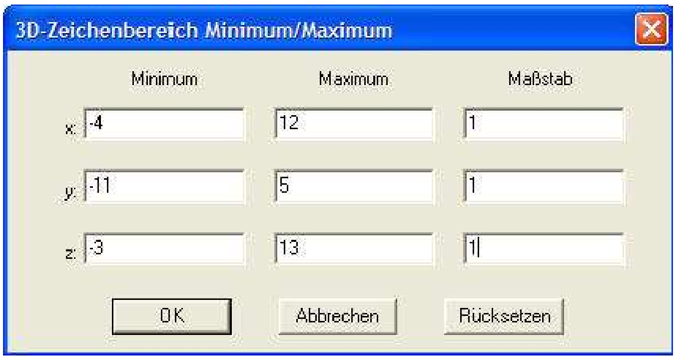
2. Im **2D-Grafik-Fenster** lässt sich über "Einstellen"   "Zeichenbereich" der Bildausschnitt festlegen (es gibt zwei Möglichkeiten):

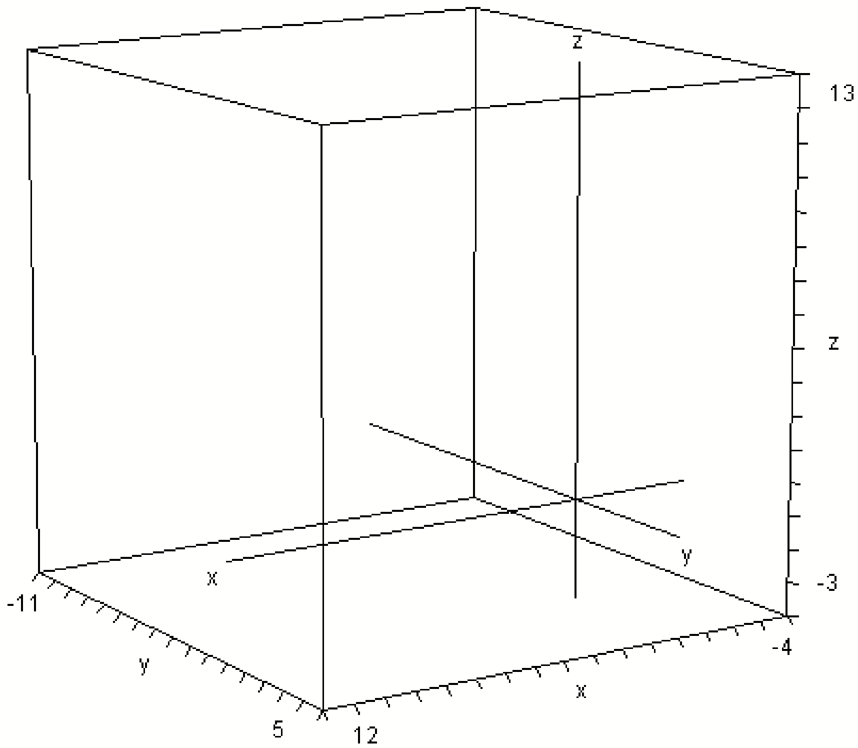
oder


Über "Einstellungen" "Verzerrungsverhältnis" "Rücksetzen" werden gleiche Maßstäbe auf beiden Achsen erzeugt.



3. Im **3D-Grafik-Fenster** wird der Bildausschnitt entsprechend eingestellt.





Ein paar **"Fingerübungen"** zum Anfang
(Vektoren als Zeilen definieren!)

Bei den Einstellungen beachten:

Bildausschnitt in allen Richtungen Länge 10 und Mitte 0
bzw. Min -5 und Max 5

Vereinfachen vor dem Zeichnen aktivieren

```
#1:   B := [-2, 3, 1]

#2:   C := [2, -1, 4]

#3:   A := [1, 2, 3]
```

Zeichnen von Strecken und Streckenzügen

```
#4:   [A, B]

#5:   [A, B, C, A]
```

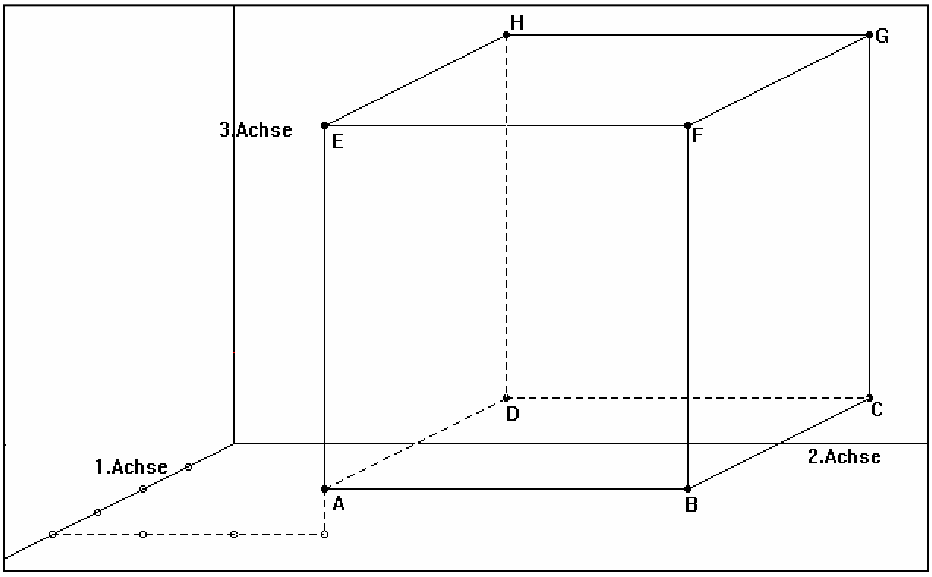
Zeichnen von Flächen

$$\#6: \quad \begin{bmatrix} A & B \\ A & C \end{bmatrix}$$

$$\#7: \quad \begin{bmatrix} A & B \\ C & C + (B - A) \end{bmatrix}$$

*unter **Aufgabe1.dfw** abspeichern*

Im Koordinatensystem ist ein Würfel der Kantenlänge 4 dargestellt.
Der Eckpunkt A hat die Koordinaten A = [4 , 3 , 0.5]



1. Bestimme die Koordinaten der anderen Eckpunkte und stelle den Würfel im 3D-Grafikfenster dar.

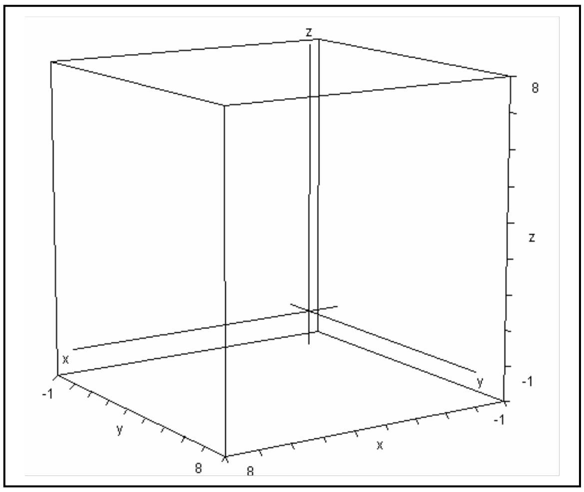
Die Koordinaten der Eckpunkte des Würfels:

```
#1:   A := [4, 3, 0.5]
#2:   B := [4, 7, 0.5]
#3:   C := [0, 7, 0.5]
#4:   D := [0, 3, 0.5]
#5:   E := [4, 3, 4.5]
#6:   F := [4, 7, 4.5]
#7:   G := [0, 7, 4.5]
#8:   H := [0, 3, 4.5]
```

Die Seitenflächen als geschlossene Streckenzüge:

```
#9:   Fl1 := [A, B, F, E, A]
#10:  Fl2 := [A, B, C, D, A]
#11:  Fl3 := [B, C, G, F, B]
#12:  Fl4 := [C, D, H, G, C]
#13:  Fl5 := [D, A, E, H, D]
#14:  Fl6 := [G, H, E, F, G]
```

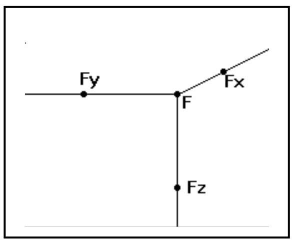
Markiere Zeile #9 bis #14 und zeichne im 3D-Fenster.



2. Wenn man die **Mittelpunkte der Seiten*flächen*** (Koordinaten?) mit den benachbarten Mittelpunkten verbindet, entsteht ein schöner, regelmäßiger Körper. Stelle diesen Körper auf dem Bildschirm dar.

3. Wenn du bei dem Würfel in die **Mittelpunkte der Kanten** nimmst und jeweils benachbarte Kantenmittelpunkte miteinander verbindest („die Ecken des Würfels werden abgeschnitten"), dann entsteht ein Körper, dessen Begrenzungsflächen aus regelmäßigen Vielecken unterschiedlicher Art (hier Quadrate und gleichseitige Dreiecke) besteht.

Solche Körper heißen **Archimedische Körper**, es gibt insgesamt 13 verschiedene davon (auch der Fußball gehört dazu!!).
Diesen Körper wollen wir dynamisch aus dem Würfel entstehen lassen, d.h. wir produzieren eine „Körpermetamorphose", indem wir einen **Schieberegler** verwenden.
Zu jedem Eckpunkt werden drei neue Punkte definiert, die auf der jeweiligen Kante den Abstand s zum Eckpunkt haben. Mit diesen Punkten definieren wir uns auf jeder Würfelfläche eine neue Fläche (8-eck). Mit dem Schieberegler variieren wir s und erhalten so eine „Körpermetamorphose"!



$$Ax := \left[4 - s,\ 3,\ \frac{1}{2}\right]$$

$$Ay := \left[4,\ s + 3,\ \frac{1}{2}\right]$$

$$Az := \left[4,\ 3,\ s + \frac{1}{2}\right]$$

.....

```
#42:  [Ay, By, Bz, Fz, Fy, Ey, Ez, Az, Ay]
#43:  [Bx, Cx, Cz, Gz, Gx, Fx, Fz, Bz, Bx]
#44:  [Cz, Cy, Dy, Dz, Hz, Hy, Gy, Gz, Cz]
#45:  [Dz, Dx, Ax, Az, Ez, Ex, Hx, Hz, Dz]
#46:  [Ax, Ay, By, Bx, Cx, Cy, Dy, Dx, Ax]
#47:  [Ex, Ey, Fy, Fx, Gx, Gy, Hy, Hx, Ex]
```

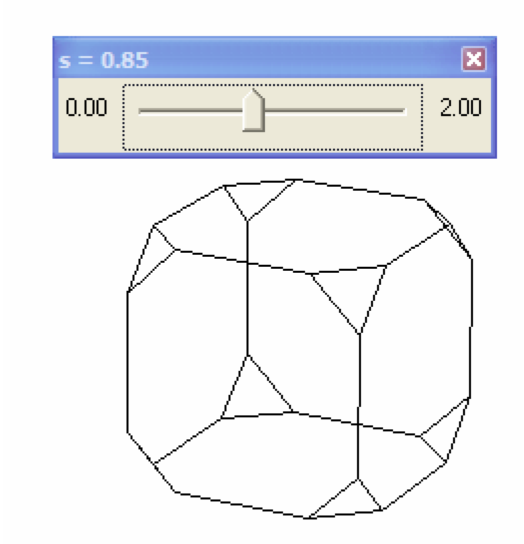
In der 3D-Grafik wird ein Schieberegler eingefügt:

Variablenname	s
Minimaler Wert	0
Maximaler Wert	2
Intervalle	20 oder mehr
Graph laufend aktualisieren	

Die Zeilen #42 bis #47 markieren und zeichnen

Anschliessend wird der Körper mit dem Schieberegler verändert

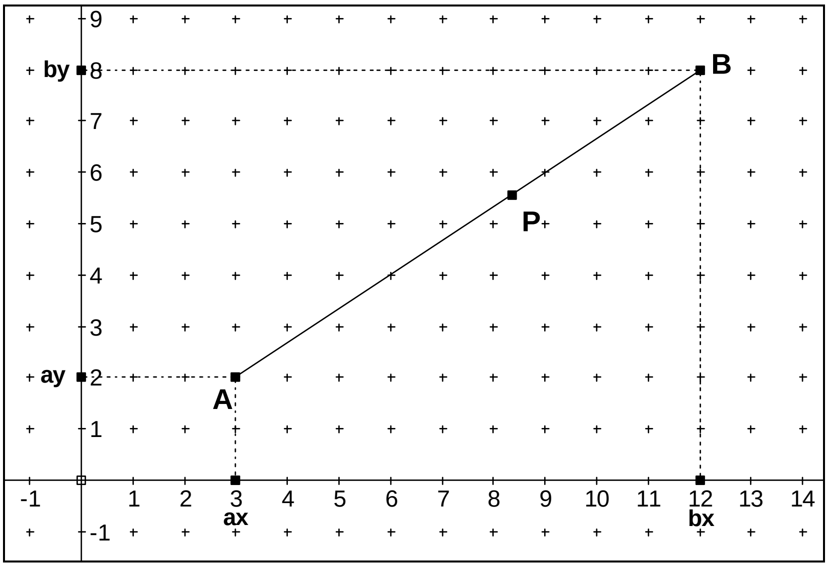
Der Körper bei s=0.85:



*unter **Aufgabe2.dfw** abspeichern*

Wie kann man eine Gerade durch eine Gleichung beschreiben?

Im Koordinatensystem ist die Strecke AB eingezeichnet. Ein Laser soll die Strecke in einer Sekunde abfahren, beginnend beim Punkt A.



Gib die Position des Lasers für die Zeiten t = 0 sec, t = ½ sec, t = 2/3 sec, t = 1 sec, t = 1.5 sec, t = 3 sec an.

=> *Den Richtungsvektor von A nach B erhält man so: B-A (Spitze minus Anfang)*

=> *Die Geradengleichung in Parameterform: A + t·(B-A) (Ortsvektor plus Vielfaches eines Richtungsvektors)*

Parameterdarstellung von Geraden im Raum:

Zeichne im 3D-Grafikfenster

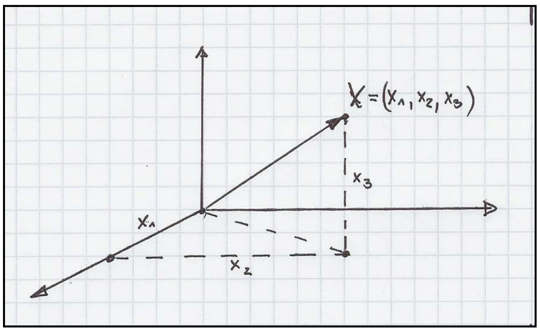
```
#1:   B := [-2, 3, 1]
#2:   C := [2, -1, 4]
#3:   A := [1, 2, 3]
#4:   gerade1 := A + t·(B - A)
#5:   gerade2 := C + s·[-1, 1, -0.5]
```

Kannst du sehen, was „windschiefe Geraden sind?

Wie kann man die Länge eines Vektors berechnen?

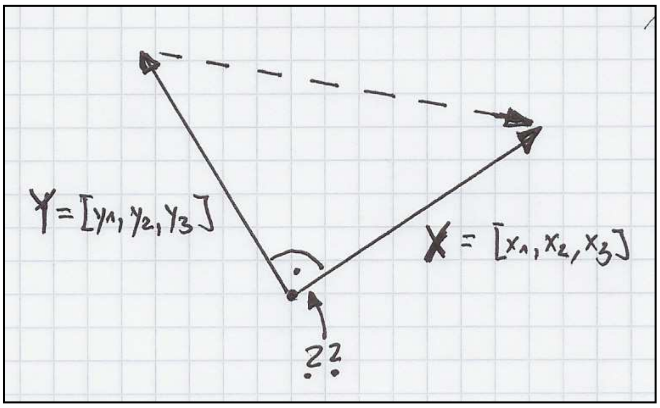
Pythagoras lässt grüssen!

$$|X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$



Wie kann man entscheiden, ob zwei Vektoren senkrecht zueinander sind?

Umkehrung des Satzes von Pythagoras:
Wenn Kath1²+Kath2²=Hyp² ist, dann ist der Winkel 90°.



Formuliere den Satz des Pythagoras für dieses Dreieck und vereinfache die entsprechende Gleichung bis du ein ganz einfaches Kriterium gefunden hast.

=> *Entsprechend die Ebenengleichung in Parameterform!*
=> *Skalarprodukt*
=> *Normalenform der Ebenengleichung*

Parameterdarstellung von Ebenen im Raum:

Zeichne im 3D-Grafikfenster

```
#6:   Ebene1 := A + s·(B - A) + t·(C - A)
```

Das Skalarprodukt

```
#7:   B - A =
#8:   C - A =
#9:   (B - A)·(C - A) =
```

Erzeugen der Koordinatengleichung der Ebene, nachdem zunächst ein Normalenvektor bestimmt wird:

```
#10:   n := [n1, n2, n3]
#11:   [n·(B - A) = 0, n·(C - A) = 0]
```

Löse Zeile #11 nach den Variablen n1, n2 und zeige, dass dies ein Normalenvektor ist:

```
#14:   Nv := [-5, 1, 8]
```

Jetzt ist die Koordinatengleichung schnell bestimmt:

```
#15:   Ebene1·Nv =
#16:   [x, y, z]·Nv = 21
```

Markiere die linke Seite, vereinfache und zeige, dass sich diese Koordinatengleichung ergibt:

```
#17:   - 5·x + y + 8·z = 21
```

Auch mit Zeile #17 lässt sich die Ebene zeichnen. Überprüfe das, indem du erst im 3D-Graphikfenster alle Graphen löschst und dann Zeile #17 zeichnest.

Wie sieht der Schnitt der Ebene aus Zeile #17 mit dieser Ebene:
#19: 2·x + y - z = -2 aus? Berechne die Schnittgerade und stelle sie im 3D-Grafikfenster dar.

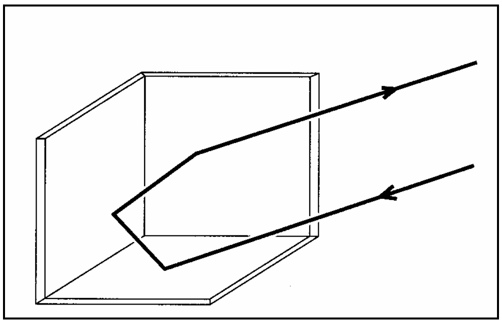
*unter **Aufgabe3.dfw** abspeichern*

Anregungen für Übungen im Zusammenhang mit Geraden- und Ebenengleichungen:

Gruppe 1 : Arbeitsauftrag

Der Eckenspiegel

In der Messtechnik werden Spiegel verwendet, bei denen drei Spiegelebenen paarweise zueinander senkrecht stehen. Wir stellen uns vor, dass dies die drei Koordinatenebenen eines räumlichen Koordinatensystems sind.



Im Punkt B = [4 5 0] trifft ein Lichtstrahl auf die x-y-Ebene. Die Richtung des Lichtstrahls ist

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Zeichne den Weg des Lichtstrahls im Koordinatensystem (die benötigten Punkte müssen natürlich berechnet werden) und zeige, dass nach dreimaliger Reflexion der ausfallende Strahl **parallel** zum einfallenden Strahl ist.

Stellt die Lösung so dar, dass die anderen eure Gedanken und Überlegungen nachvollziehen können!

Gruppe 2 : Arbeitsauftrag

Ein Kunstobjekt

Ein Kunstobjekt (Oktaeder) steht auf einem 4 m hohen Stab vor einer weißen Wand (1-3-Ebene).

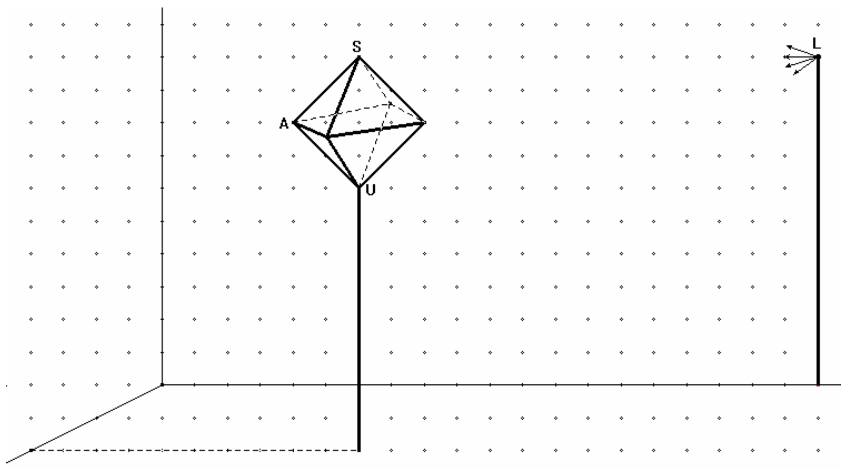
A = [4 , 4 , 5] und U = [4 , 5 , 4]

a) Zeichne das Objekt in ein Koordinatensystem (DIN A4 – Blatt quer nehmen) und bestimme die Koordinaten der anderen Eckpunkte.

Im Punkt L = [0 , 10 , 5] befindet sich eine punktförmige Lichtquelle (Lampe), die einen Schatten des Objekts erzeugt.

b) Berechne und zeichne die Schattenpunkte auf der Wand.

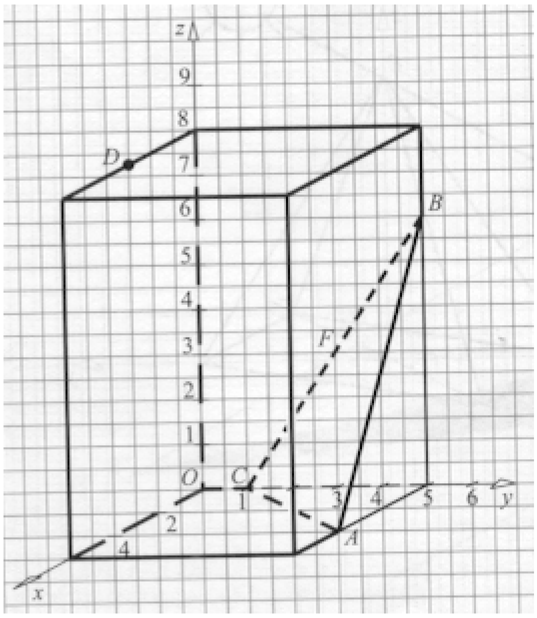
c) Der Körper ist nicht durchsichtig. Zeichne den Schatten des ganzen Objekts (auch den des Stabs) an der Wand und auf dem Boden.



Stellt die Lösungen so dar, dass die anderen eure Gedanken und Überlegungen nachvollziehen können.

Gruppe 3: Arbeitsauftrag

Der Restkörper



Der im Bild dargestellte Quader wird durch zwei ebene Schnitte zerlegt.

a) Der erste Schnitt wird durch die Ebene durch die Punkte ABC bestimmt. Bestimme die Gleichung dieser Ebene.

b) Die zweite Schnittebene geht durch den Punkt D und hat die Richtungsvektoren

$\vec{u} = [0 \quad 1 \quad -2]$ und $\vec{v} = [6 \quad -1 \quad 0]$

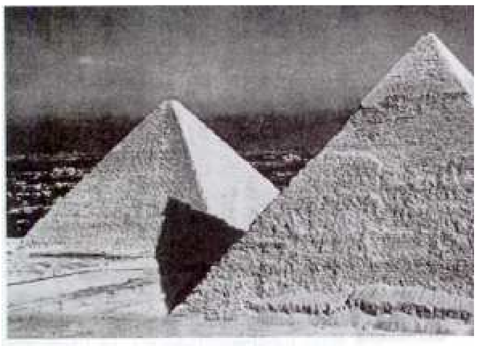
Wie sieht der Restkörper aus, der die Ecke O enthält?

Berechne alle notwendigen Schnittgeraden und Schnittpunkte und fertige eine saubere Zeichnung des an.

Stellt die Lösung so dar, dass die anderen eure Gedanken und Überlegungen nachvollziehen können!

Gruppe 4: Arbeitsauftrag

Die Pyramiden



In der Nähe von Kairo steht die Cheops- neben der Chephrenpyramide. Die eine wirft einen Schatten auf die andere.

Wir nehmen einmal an, dass die erste Pyramide die folgenden Eckpunkte hat:

A = [-3 3 0] B = [3 3 0] C = [3 -3 0]
D [-3 -3 0] und E = [0 0 5]

Die Richtung der Sonnenstrahlen ist $\vec{v} = [-12 \quad -16 \quad -7]$

a) Zeichne die Pyramide und ihren Schatten im Koordinatensystem.

b) Die zweite Pyramide hat die folgenden Eckpunkte: P = [-5 -10 0] Q = [-5 -6 0]
R =[-9 -6 0] S = [-9 -10 0] und T = [-7 -8 3]
Zeichne diese Pyramide in das Koordinatensystem und berechne und zeichne den Schatten, den die erste auf der zweiten erzeugt.

Hinweis: Das DIN A4-Blatt quer nehmen, ganz rechts auf dem Blatt mit der ersten Pyramide beginnen und genau zeichnen.

c) Unter welchem Winkel trifft der Sonnenstrahl auf dem Boden auf?

Stellt die Lösung so dar, dass die anderen eure Gedanken und Überlegungen nachvollziehen können!

Wie werden Zylinder, Kegel, Kugel dargestellt?

Diese Rotationskörper stellen wir alle nach dem gleichen Prinzip her. Am Beispiel einer Kugel mit Radius 3 und Mittelpunkt im Koordinatenursprung wird das hier beschrieben.

Zunächst erzeugen wir im 2D-Grafikfenster in Parameterform einen Halbkreis mit Radius 3

#1: f1(α) := 3·COS(α)

#2: f2(α) := 3·SIN(α)

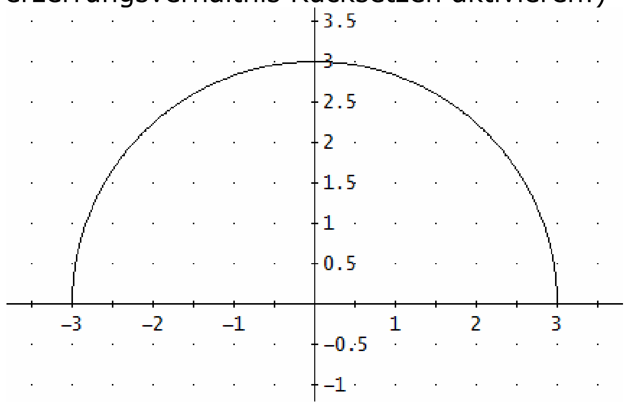
#3: [f1(α), f2(α)]

#4: [3·COS(α), 3·SIN(α)]

Beim Zeichnen geht ein Fenster auf, wo man aufgefordert wird, die Grenzen für den Parameter anzugeben:

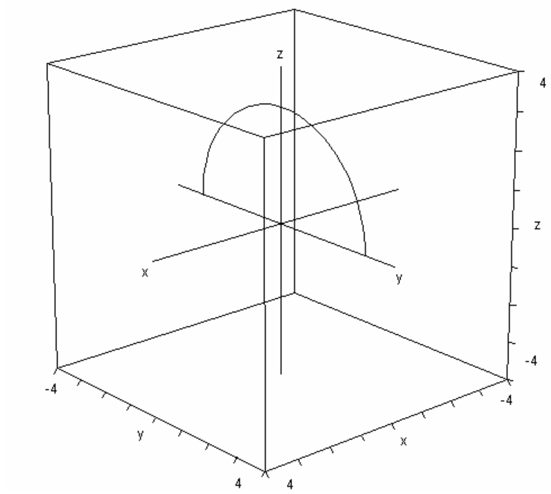
Min. 0 Max: pi

(Evtl. Einstellen Verzerrungsverhältnis Rücksetzen aktivieren!)



Jetzt kommt die entscheidende Idee: Wir setzen diese Kurve im 3D-Fenster „auf die 2.Achse"

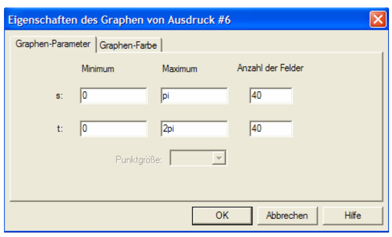
#5: [0, f1(α), f2(α)]

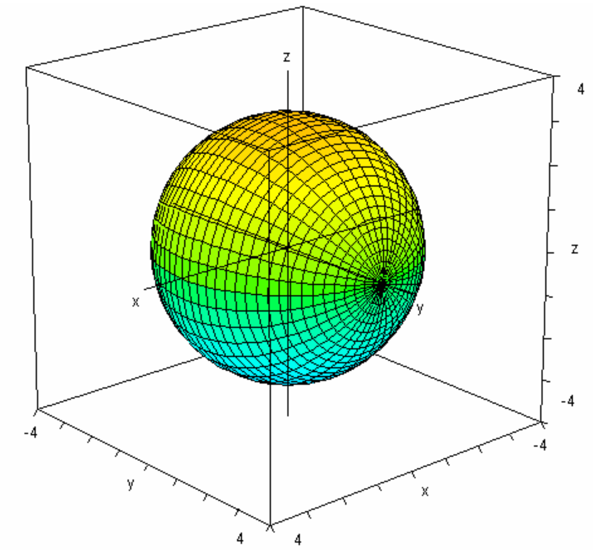


und lassen sie dann um die 2.Achse rotieren, die „z-Koordinate f2(α)".

#6: [f2(α)·COS(β), f1(α), f2(α)·SIN(β)]

Das Ganze wird gezeichnet und die Graphenparameter werden entsprechend gewählt





Voila!

unter ***Aufgabe4.dfw*** *abspeichern*

Stelle die folgenden Körper im 3D-Grafikfenster dar!

Aufgabe 1: **Zylinder**

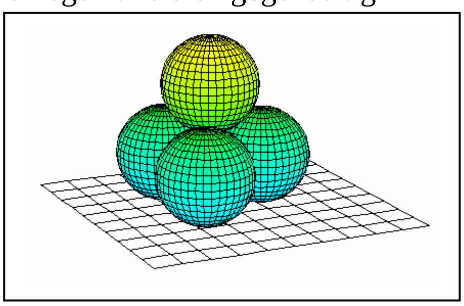
a) Ein Zylinder mit Radius 5 und Höhe 16, dessen Symmetrieachse die 1.Achse ist.
b) Ein Zylinder mit Radius 20 und Höhe 65, dessen Symmetrieachse die 3.Achse ist.
c) Ein Zylinder (Höhe 12, Radius 4), der *auf* der 1-2-Ebene liegt.

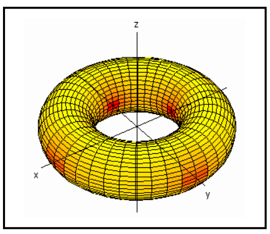
Aufgabe 2: **Kegel**

a) Ein Kegel (Radius 5, Höhe 12), dessen Symmetrieachse die erste Achse ist.
b) Ein Kegel (Radius 10, Höhe 30), dessen Symmetrieachse die 3. Achse ist.
c) Ein Doppelkegel (einfache Höhe 8, Radius 4), dessen Symmetrieachse die 3.Achse ist.

Aufgabe 3: **Kugel**

a) Eine Kugel mit Radius 10, deren Mittelpunkt der Ursprung ist.
b) Eine Kugel mit Radius 10, deren Mittelpunkt die Koordinaten [0,0,15] hat.
c) Eine Kugel mit Radius 10, deren Mittelpunkt die Koordinaten [10, 10, 10] hat.
d) Drei Kugeln mit Radius 10, die auf der 1-2-Ebene liegen und sich gegenseitig berühren.
e) Lege auf die drei Kugeln aus d) eine weitere, die alle anderen berührt.
f) Eine Halbkugel mit Radius 20, bei der ein Viertel fehlt.





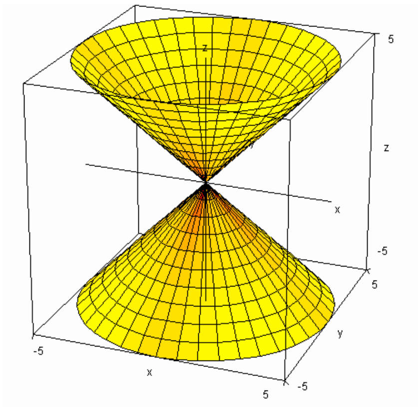
Aufgabe 4:

Erzeuge einen Torus.

Kegelschnitte gefällig?

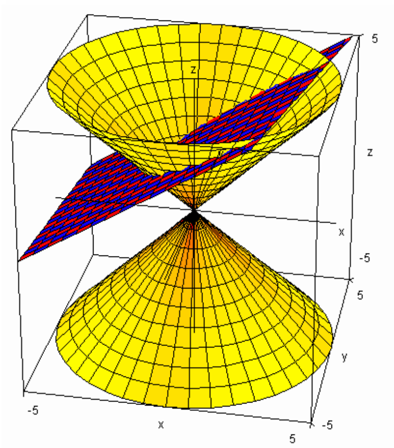
Zunächst lassen wir die Ursprungsgerade (y=x) um die z-Achse rotieren.

$$\#1: \quad [x\cdot COS(\alpha),\ x\cdot SIN(\alpha),\ x]$$



Danach zeichnen wir diese Ebene

$$\#2: \quad -5\cdot x + y + 8\cdot z = 21$$



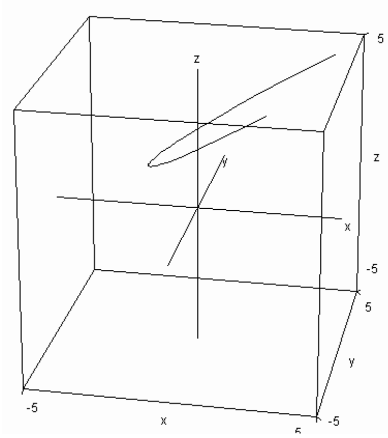
Die Gleichung der Schnittkurve in Parameterform (Parameter α)

$$\#3: \quad -5\cdot(x\cdot COS(\alpha)) + x\cdot SIN(\alpha) + 8\cdot x = 21$$

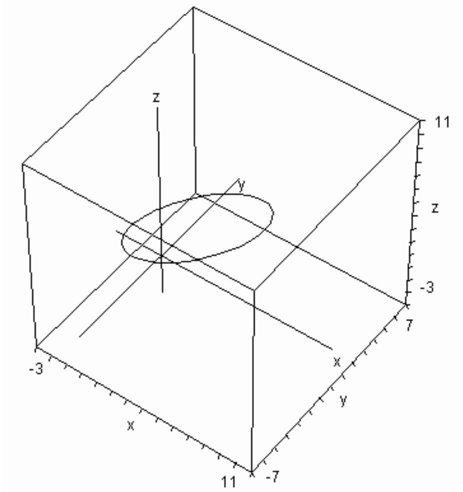
$$\#4: \quad SOLVE(-5\cdot(x\cdot COS(\alpha)) + x\cdot SIN(\alpha) + 8\cdot x = 21,\ x,\ Real)$$

$$\#5: \quad x = -\frac{21}{5\cdot COS(\alpha) - SIN(\alpha) - 8}$$

$$\#6: \quad \left[\left(-\frac{21}{5\cdot COS(\alpha) - SIN(\alpha) - 8}\right)\cdot COS(\alpha),\ \left(-\frac{21}{5\cdot COS(\alpha) - SIN(\alpha) - 8}\right)\cdot SIN(\alpha),\ -\frac{21}{5\cdot COS(\alpha) - SIN(\alpha) - 8}\right]$$



Ist das eine Ellipse? Eine Veränderung der Einstellungen hilft weiter.



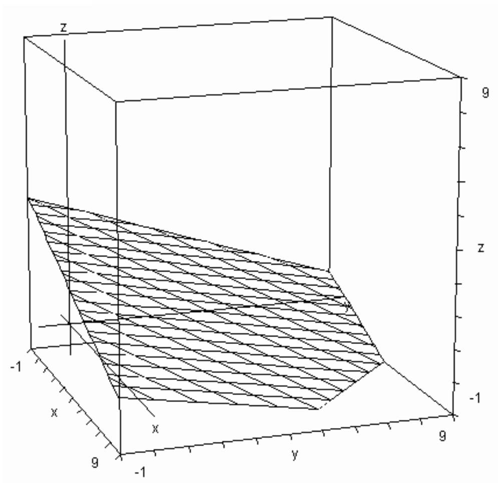
Aufgabe:
Verändere die Gleichung der Ebene so, dass eine Parabel entsteht!

*unter **Aufgabe5.dfw** speichern*

Variation einer Ebenengleichung

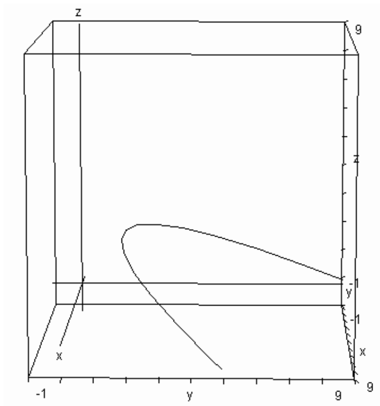
Gegeben sind ein Ortsvektor A und zwei Richtungsvektoren V und U

```
#1:   A := [0.25, 3.5, 2]

#2:   V := [1, -4, 1]

#3:   U := [1, 2, -1]

#4:   ebene1 := A + t·V + s·U
```



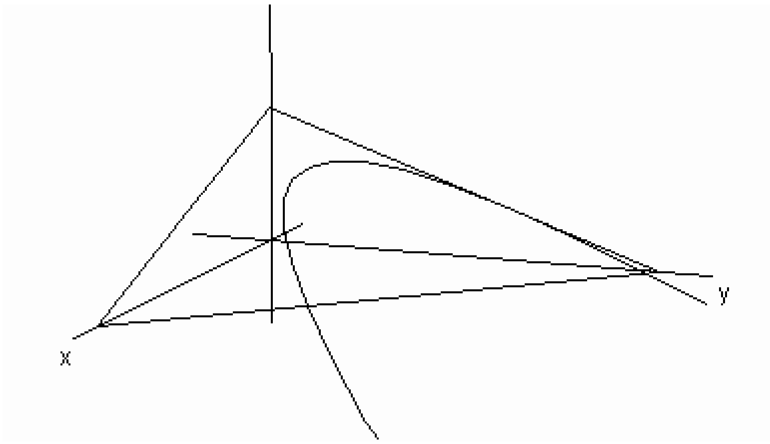
Was passiert eigentlich, wenn man in der Ebenengleichung den Parameter s durch t² ersetzt?
Welches geometrische Gebilde entsteht dabei?

```
                      2
#5:   P(t) := A + t·V + t ·U
```



Es wird eine Kurve erzeugt, die wie eine Parabel aussieht.

- Berechne die Durchstosspunkte der drei Koordinatenachsen durch die Ebene und zeichne die Spurgeraden im positiven Bereich.



- Entscheide, ob die Kurve die y-z-Ebene berührt.
- Bestimme den höchsten Punkt der Kurve.
- Bestimme den Punkt der Kurve, der am dichtesten an der x-z-Ebene liegt.

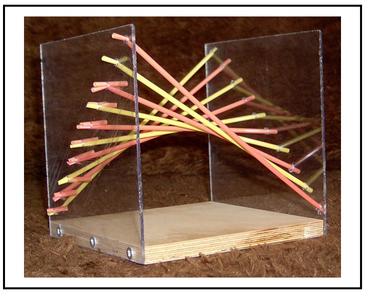
Was ist mit Kurven höherer Ordnung?

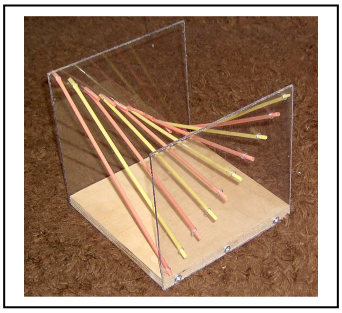
#47: $Q(t) := [2,\ 0,\ 3] + t\cdot[-10,\ -4,\ -1] + t^3\cdot[0.4,\ 0.4,\ -0.2]$

*unter **Aufgabe6.dfw** abspeichern*

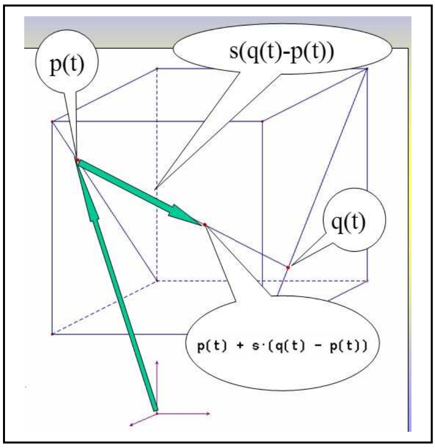
Was sind HP-Flächen?

Wenn in einem Würfel die Punkte gegenüberliegender Diagonalen so wie in den Bildern dargestellt geradlinig verbunden werden, dann entsteht eine Sattelfläche – das gegensinnig gekrümmte Hyperboloid (die HP-Fläche).





Diese Fläche lässt sich im 3D-Fenster von Derive ganz einfach darstellen, wenn man den Erzeugungsprozess zur Beschreibung mit einer Formel nutzt.



Zunächst werden die Eckpunkte des Würfels definiert

```
#1:  a := [2, 0, 0]
#2:  b := [2, 2, 0]
#3:  c := [0, 2, 0]
#4:  d := [0, 0, 0]
#5:  e := [2, 0, 2]
#6:  f := [2, 2, 2]
#7:  g := [0, 2, 2]
#8:  h := [0, 0, 2]
```

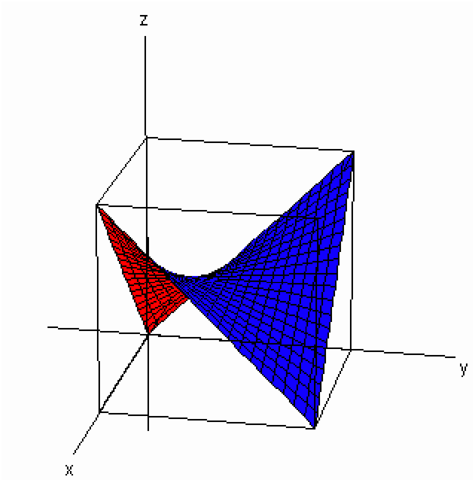
Die Punkte auf den seitlichen Diagonalen

```
#10:  p(t) := e + t·(d - e)
#11:  q(t) := b + t·(g - b)
```

Ein Punkt auf der HP-Fläche

```
#15:  hp(t, s) := p(t) + s·(q(t) - p(t))
#16:  hp(t, s) := [2 - 2·t, 2·s, 2·s·(2·t - 1) - 2·t + 2]
```

Die HP-Flächen spielen in der Architektur bei der Gestaltung von ungewöhnlichen Dachflächen eine Rolle, da sie durch eine Schalung mit geraden Brettern in Stahlbetonbauweise leicht zu realisieren sind.



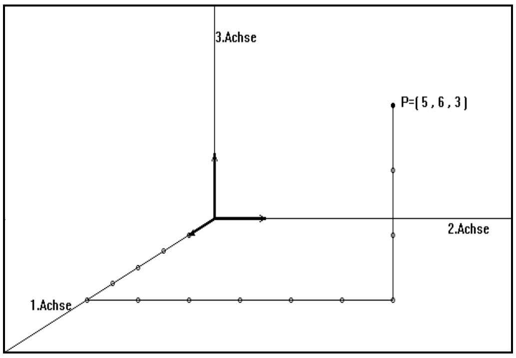
Weiterführende Fragestellungen:

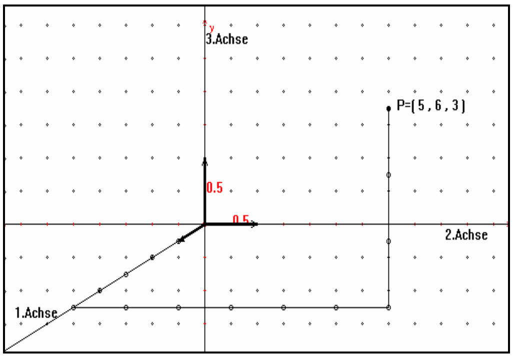
- Welche senkrechten Schnitte führen zu Parabeln?
- Gibt es noch weitere Flächen, die so erzeugt werden können? (=> Bezier-kurven und –flächen)

*unter **Aufgabe7.dfw** abspeichern*

Die Darstellung eines realen Körpers auf dem Bildschirm oder einem Blatt ist immer eine Projektion des 3-dim. Raums in den 2-dim. Raum!

Um einen Körper auf einem Blatt oder dem 2D-Grafikfenster darstellen zu können, müssen die 3D-Koordinaten in 2D-Koordinaten transformiert werden.





Dazu legen wir auf das Schrägbild ein x-y-Koordinatensystem und können zu einem beliebigen Punkt die ebenen Koordinaten ablesen (siehe hier die Bemerkungen zum Koordinatensystem auf S.2):

[5, 6, 3] => [3.5, 1.75]

Wie heißen die 2D-Koordinaten zu [150 , 200 , 75] ?
Suche Regeln zur Berechnung der Koordinaten.

[x1 , x2 , x3] => [-0.5·x1 + x2 , -0.25·x1 + x3]

Dies lässt sich durch die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix aufschreiben:

$$[x_1, x_2, x_3] * \begin{bmatrix} -0.5 & -0.25 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D.h. wir müssen jeden Punkt mit dieser „Projektionsmatrix" multiplizieren, um die 2D-Koordinaten zu erhalten. Da der Körper als geschlossener Streckenzug durch eine Matrix repräsentiert ist, lässt sich die Koordinatentransformation aller Punkte durch eine einzige Multiplikation erledigen!

Darstellung einer Kirche im **2D-Grafikfenster**

Die Eckpunkte des Hauses:

```
#3:   a := [4, 0, 0]
#4:   b := [4, 5, 0]
#5:   c := [0, 5, 0]
#6:   d := [0, 0, 0]
#7:   e := [4, 0, 3]
#8:   f := [4, 5, 3]
#9:   g := [0, 5, 3]
#10:  h := [0, 0, 3]
#11:  i := [2, 0, 4]
#12:  j := [2, 5, 4]
```

Die Eckpunkte des Turms:

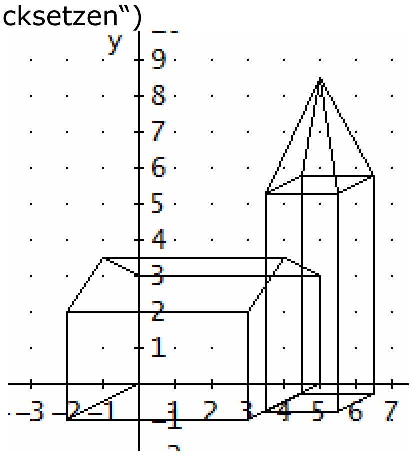
```
#14:  k := [3, 5, 0]
#15:  l := [3, 7, 0]
#16:  m := [1, 7, 0]
#17:  n := [1, 5, 0]
#18:  o := [3, 5, 6]
#19:  p := [3, 7, 6]
#20:  q := [1, 7, 6]
#21:  r := [1, 5, 6]
#22:  s := [2, 6, 9]
```

```
#23:  kirche := [a, b, f, e, a, d, h, i, e, f, j, i, h, g, j, g, c, d, c, b]
#24:  turm := [k, l, p, o, k, n, r, o, s, r, q, s, p, q, m, l, m, n]
```

$$\#25: \quad \mathrm{kav} := \begin{bmatrix} -0.5 & -0.25 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
#26:  [kirche·kav, turm·kav]
```

Markiere #26, wechsle in das **2D-Grafikfenster** und zeichne.
(Extras Anzeige Punkte „Verbinden" und „Klein" und Einstellungen Verzerrungsverhältnis „Rücksetzen")

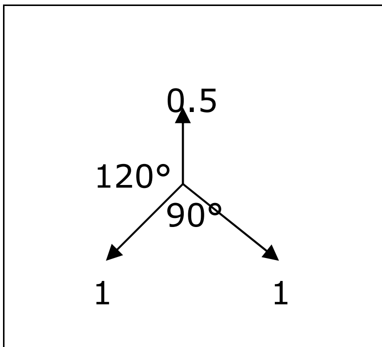
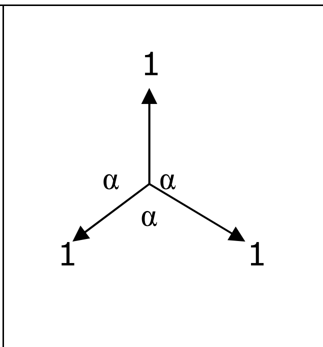
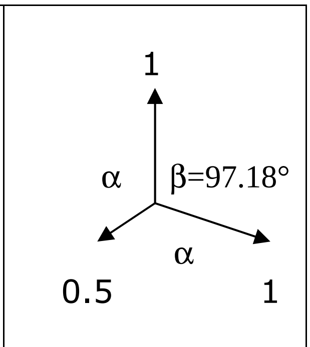


Die mit der Matrix **kav** beschriebene Art der Darstellung nennt man Kavalierprojektion, ein Begriff aus dem mittelalterlichen Militärwesen. In der Praxis sind auch andere Projektionsarten üblich, z. B. benutzt man die Militärprojektion häufig in der Architektur, auch isometrische und dimetrische Projektionen werden verwendet.

Wenn man die Bilder der Einheitsvektoren bei der Kavalierprojektion betrachtet…

$$[\,1\,,0\,,0\,] \rightarrow [\,?\,,?\,]$$
$$[\,0\,,1\,,0\,] \rightarrow [\,?\,,?\,]$$
$$[\,0\,,0\,,1\,] \rightarrow [\,?\,,?\,]$$

…fällt auf, dass ihre Bilder in den Zeilen der Matrix stehen. Umgekehrt heißt das: wenn man die Bilder der Einheitsvektoren kennt, kennt man auch die Projektionsmatrix.

		
Militärprojektion	Isometrie	Dimetrie

Bestimme die Matrizen für diese Projektionen und stelle die Kirche in verschiedenen Ansichten dar.

*unter **Aufgabe8.dfw** abspeichern*

<u>Hinweis:</u> Wenn ein „runder" Körper (Kugel, Ikosaeder, Fußball,…) auch in der Projektion „rund" aussehen soll, dann sollte man die Isometrie verwenden.

<u>Weitere Anregungen:</u>

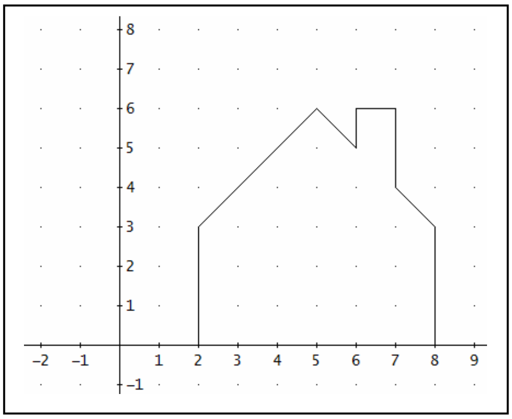
Die oben dargestellten Transformationen sind **Parallelprojektionen**. Wie kann man **Zentralprojektionen** realisieren?

*unter **Aufgabe8.dfw** speichern*

Jetzt kommt Bewegung ins Spiel! – Lineare Abbildungen in der Ebene

Wir zeichnen im 2D-Grafikfenster das Haus!

$$\#1: \quad Haus := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 6 & 5 \\ 6 & 6 \\ 7 & 6 \\ 7 & 4 \\ 8 & 3 \\ 8 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

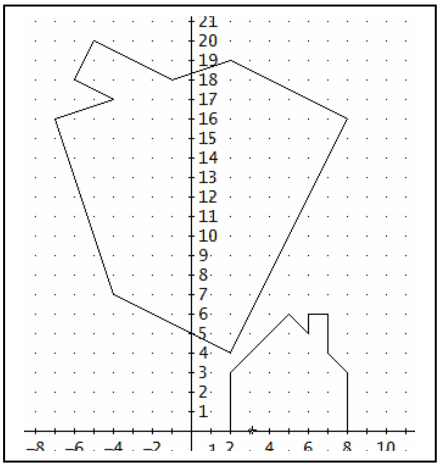


Dabei achten wir auf die Einstellungen (*Extras Anzeige: Punkte klein, Verbinden und Einstellen: Verzerrungsverhältnis Rücksetzen*)

Durch Multiplikation eines Punktes mit der 2x2-Matrix A wird ein Bildpunkt erzeugt, durch Multiplikation der Punktfolge „Haus“ (das ist eine Matrix) mit der Abbildungsmatrix A wird eine Bildpunktfolge erzeugt, die wir zeichnen können.

$$\#2: \quad A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\#3: \quad Haus \cdot A$$



Es stellt sich hier die Frage, ob die Abbildung eine Drehstreckung ist.

- Wie lässt sich das überprüfen?
- Wo liegt das Drehzentrum?
- Um welchen Winkel wird gedreht?
- Mit welchem Faktor wird gestreckt?

Wir wollen die Abbildung mit Hilfe eines **Schiebereglers** noch anschaulicher machen. Dazu überlegen wir, dass die Matrix A von dieser Form ist:

$$\cdot\begin{bmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

Für k=0 ergibt sich die Einheitsmatrix (das ursprüngliche Haus) und für k=2 erhalten wir das Bild oben.

$$\#4: \quad Haus \cdot \begin{bmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

Markiere Zeile #4, füge im Grafikfenster einen Schieberegler ein und zeichne das Bild.
Durch Ziehen am Schieberegler lässt sich die Abbildung „dynamisieren“.

Wir wollen den mathematischen Hintergrund unserer Abbildungen noch etwas vertiefen.

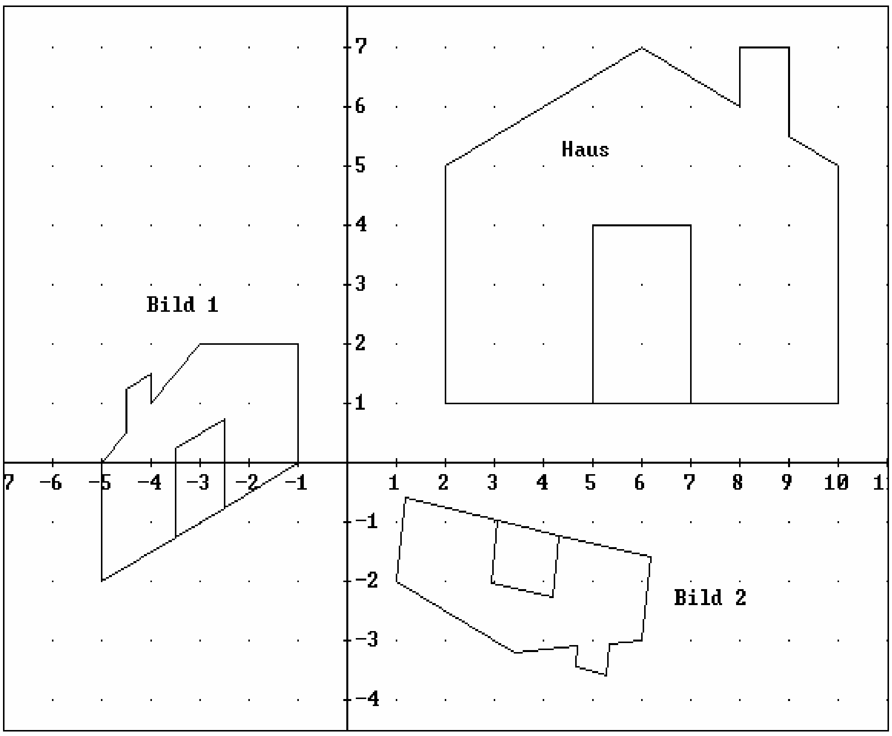
- Wähle eine beliebige Abbildung bzw. die zugehörige Matrix und überlege:
  - Wohin wird der Nullpunkt abgebildet?
  - Was haben die Bilder der Einheitsvektoren mit der Matrix zu tun?

<u>Beobachtung:</u> In den Zeilen der Matrix stehen die Bilder der Einheitsvektoren!

<u>Folgerung:</u> Wenn wir die Bilder der Einheitsvektoren kennen, kennen wir auch die zu einer Abbildung gehörige Matrix!

- Welche Matrizen gehören zu den dir bekannten elementargeometrischen Abbildungen?
  Ordne in einer Tabelle den bekannten Abbildungen (Streckung, Spiegelung an beiden Achsen, Drehung, Punktspiegelung, ...) die entsprechenden Matrizen zu und überprüfe das an dem oben abgebildeten Haus.

Hilfe, welche Abbildung steckt dahinter?



Das Haus ist mit zwei verschiedenen Matrizen abgebildet worden? Bestimme die beiden Matrizen.

Welche Matrix erzeugt eine Spiegelung an der durch $y=0.5x$ beschriebenen Geraden?

Hintereinanderausführung von Abbildungen

- Führe zunächst eine Abbildung mit der Matrix $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ durch und anschließend (mit dem Bild) die mit der Matrix $B = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$.

  Durch welche Matrix C lässt sich die Ersatzabbildung beschreiben?

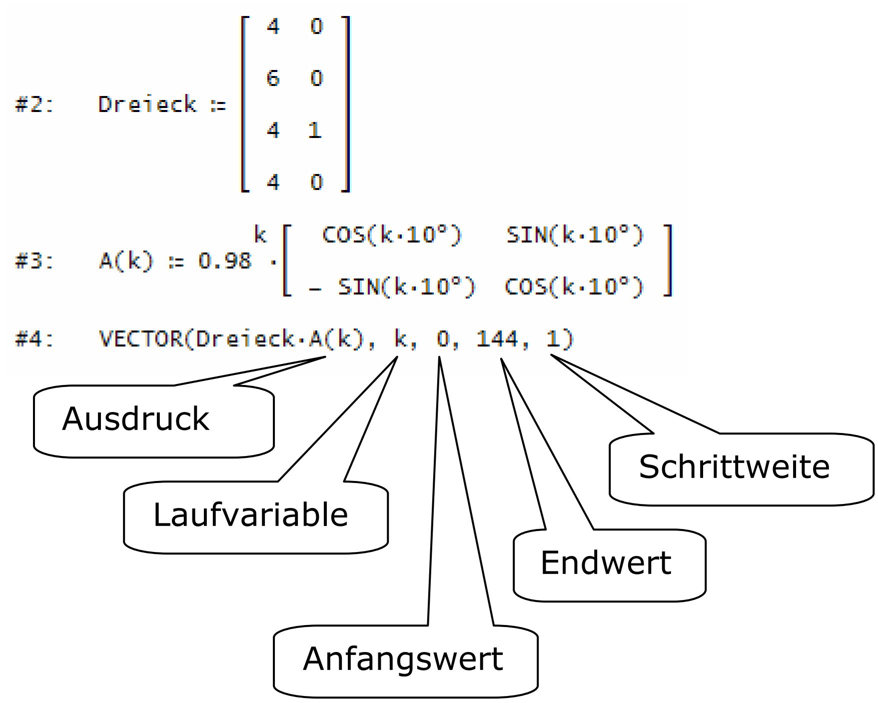
- Spiegele das Haus an der Geraden mit der Gleichung y = 3·x und anschließend das Bild an der Geraden mit der Gleichung y = -x. Durch welche Matrix wird die Ersatzabbildung beschrieben? Welche Vermutung hast du hinsichtlich der Art der Ersatzabbildung?

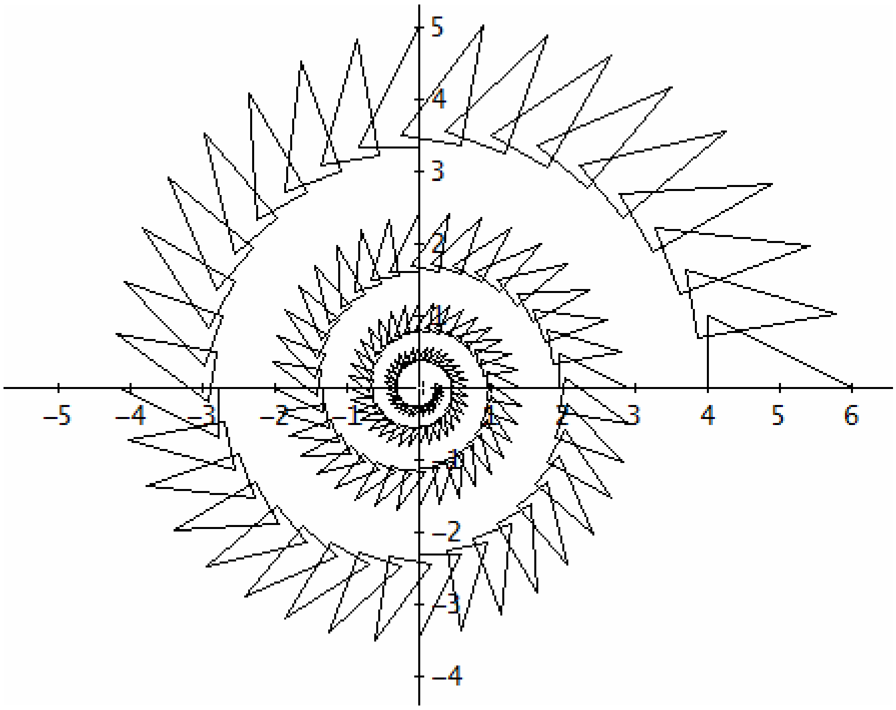
Welchen Zusammenhang siehst du jeweils zwischen den drei Abbildungsmatrizen?
Begründe mit den Rechenregeln für Matrizen, dass die Hintereinanderausführung von Abbildungen beschrieben wird durch das Produkt der Abbildungsmatrizen.

*unter **Aufgabe9.dfw** speichern*

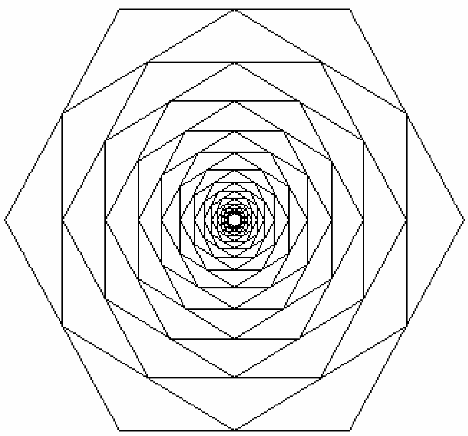
Schöne Grafiken herstellen

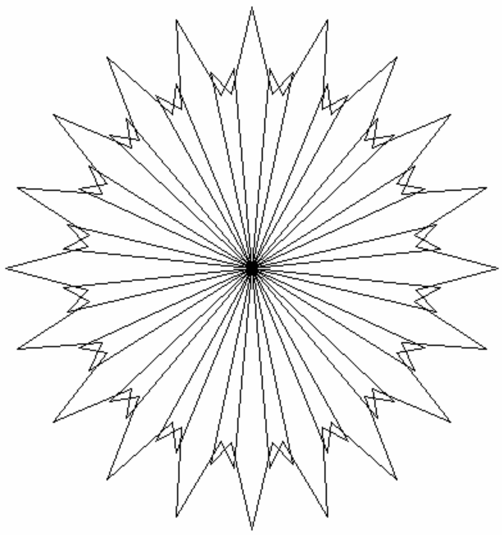
Mit dem VECTOR-Befehl lassen sich schöne Bilder herstellen (wenn wir den mathematischen Hintergrund verstanden haben)





Erzeuge weitere schöne Bilder, z.B. diese….





... oder andere!

*unter **Aufgabe10.dfw** speichern*

<u>Weitere Anregungen:</u>

- Die Frage nach Fixpunkten („Gibt es Punkte, die durch die Abbildung nicht verändert werden?" – die „Achse der Spiegelung") und Fixgeraden („Gibt es Geraden, die durch die Abbildung auf sich abgebildet werden?" – die Richtung der Spiegelung) führt zu ***Eigenwerten*** und ***Eigenvektoren***.

- Viele der elementargeometrischen Abbildungen können wir mit 2x2-Matrizen bearbeiten, nämlich alle, die den *Nullpunkt als Fixpunkt* besitzen. Probleme bereiten uns jedoch Verschiebungen, Spiegelungen an Achsen, die nicht durch (0|0) verlaufen und Drehungen um andere Drehzentren. Es wäre wünschenswert, auch diese mit dem mächtigen Werkzeug „Matrizen" beschreiben zu können, zumal die Matrizenmultiplikation in jedem CAS verfügbar ist.
  Dazu arbeiten wir mit einem Trick – mit ***homogenen Koordinaten***. Unsere 2D-Arbeitsebene wird dabei in den 3D-Raum eingebettet. Dies geschieht folgendermaßen: Wir hängen einfach an jeden Punkt unserer Punktliste eine 1 als dritte Koordinate, d.h.
  aus $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$ wird $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{bmatrix}$
  und unsere Abbildungsmatrix **A** wird erweitert zu

$$\mathbf{A_{3D}} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

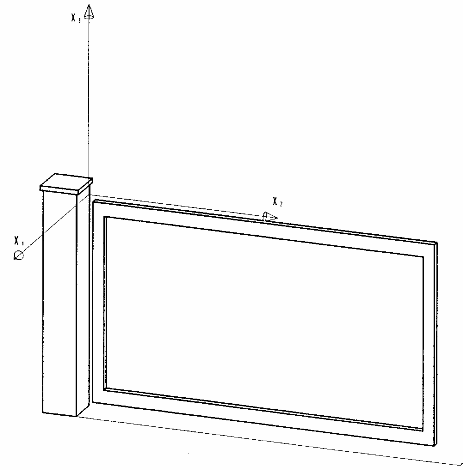
  Wenn wir nun eine Verschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$ durchführen wollen, wählen wir als Abbildungsmatrix

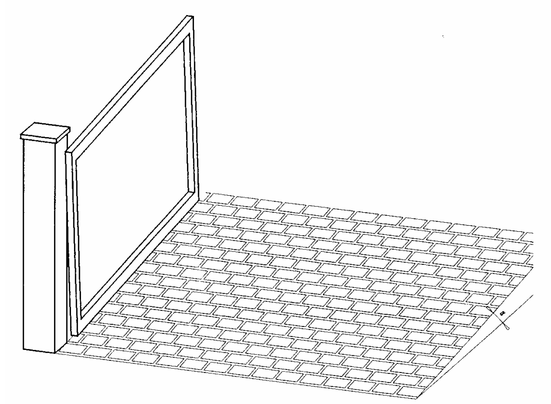
$$\mathbf{V}(v1,v2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v1 & v2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hier noch weitere Anregungen mit zwei praktischen Problemen:

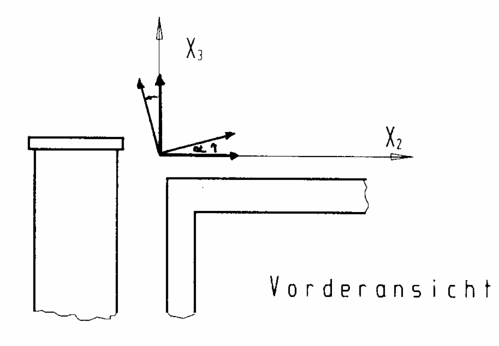
Die Sache mit dem Hoftor

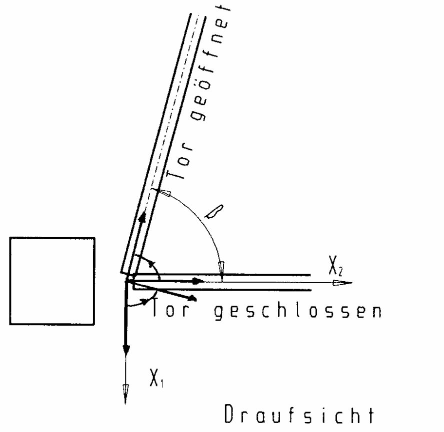
An einer Hofeinfahrt, die von der Straße her ansteigt, soll ein Hoftor angebracht werden. Die Steigung der Hofeinfahrt ist **10%**.
Aus Verkehrssicherheitsgründen muss das Tor zum Hof hin geöffnet werden.





Die Öffnungsbewegung läßt sich aus zwei hintereinanderausgeführten Drehung zusammensetzen (erst anheben , dann von der Straße weg drehen) .



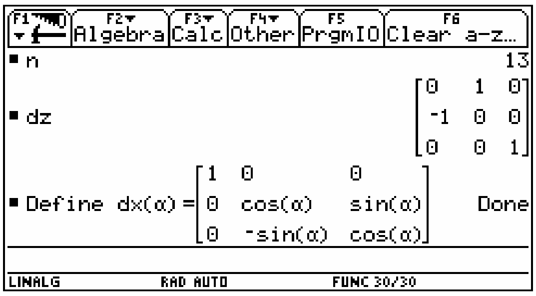


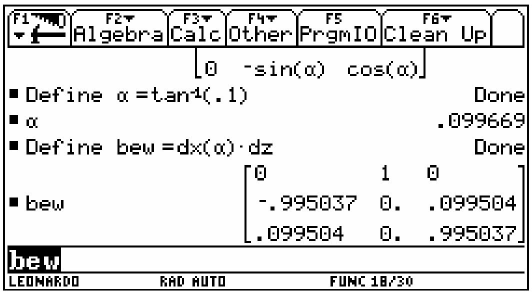
a) Bestimme den Winkel α ! (Öffnungswinkel β ist 90°)

b) Zeige, dass die Gesamtbewegung eine Achse hat .

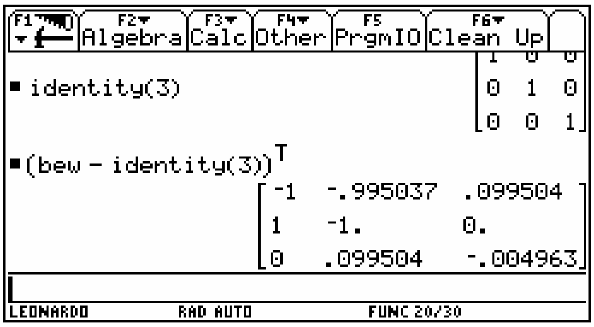
c) Beschreibe die Lage der Achse im Raum (im Vergleich zum Torpfosten).
Wie müssen die Bänder angebracht werden, wenn ihr vertikaler Abstand 1200mm beträgt.

Die Drehung um die z-Achse (um 90°) und die Drehung um die x-Achse (um den Winkel α) werden definiert:





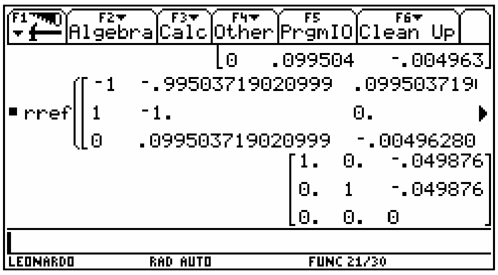
Der Winkel α wird bestimmt und die Matrix der Gesamtbewegung wird berechnet:



Falls die Gesamtbewegung eine Achse hat, muß es x,y und z geben mit

$$[x,y,z]\cdot bew = [x,y,z]$$

Die Nullen auf der rechten Seite schenken wir uns und lassen dasLGS per Gauß-Algorithmus lösen (**rref** im **MATH 4:Matrix** Menü):



Das Gleichungssystem ist unterbestimmt, d.h. es gibt von Null verschiedene Lösungen und die Bewegung hat somit eine Achse.

Daraus ergibt sich:

$x = 0.049876\ z$
$y = 0.049876\ z$

Da z negativ ist (nach unten!! gerichtet) wird sowohl x als auch y negativ! (Versatz nach links und hinten)

$$1200\cdot 0.049876 = 59.85 \text{ mm}$$

Die Bänder müssen um 6 cm versetzt werden!!!

Die Sache mit der Wendeltreppe

Als kleiner Schreinereibetrieb im Bereich der Massivholzverarbeitung stelle ich in der letzten Zeit häufiger runde Handläufe her. Gebogene Handläufe werde ich ebenfalls herstellen können und weiß das ich keine technischen Probleme damit habe.

Nun wäre ich gern in der Lage **Wendeltreppenhandläufe aus Massivholzbögen** fertigen zu können. Diese Arbeiten werden heute nur durch große und spezialisierte Unternehmen geleistet, die die Drehung durch aufeinander leimen von Furnieren und Pressung in schnell verstellbare 1:1 Formen herstellen. Diese Furnierhandläufe passen optisch aber nicht zu meinen Massivholzbögen, ich müsste also Wendeltreppenhandläufe aus Massivholzbögen anbieten können, um weitere Massivholzbögen verkaufen zu können.

Eine Wendeltreppe hat über ihre Außenhaut eine gleichmäßige Steigung, der auch der Handlauf entsprechen muss. Das Holz des Handlaufs ist gedreht, bzw. "verdreht". Wenn Teile des Handlaufs auf einer Ebene liegen, hebt sich ein großer Teil des Holzes deutlich von der Ebene ab. Nun kann ich, ohne bestimmte industrielle Möglichkeiten, aus Massivholz nur solche Bögen fertigen, die in der Ebene liegen und möchte die Steigungsdrehung durch einen Trick hinkriegen, und möchte gerne wissen und nachvollziehen können, ob und wie das zu berechnen ist.

Meine Vorstellung ist folgende:

Eine Wendeltreppe, die heute immer eine Stahltreppe ist und somit nicht aus meiner Werkstatt kommt, hat **14 Steigungen** über eine **Geschoßhöhe von 260 cm** und macht dabei eine komplette **360 Grad** Drehung. Der Schlosser hat die Treppenpfosten zur Handlaufbefestigung so vorbereitet, dass diese in gleichmäßigen Abständen auf der **ersten, fünften, neunten und dreizehnten Stufe** stehen und sich ein **Handlaufinnenradius von 78 cm** ergibt. Ich müsste die vorhandene Treppe gut aufmessen und die Außenhaut in der Werkstatt 1:1 zu ca. 1/3 nachbauen. Wenn ich dann die Steigungspunkte miteinander verbinde, erhalte ich eine Teilabwicklung des Handlaufes.

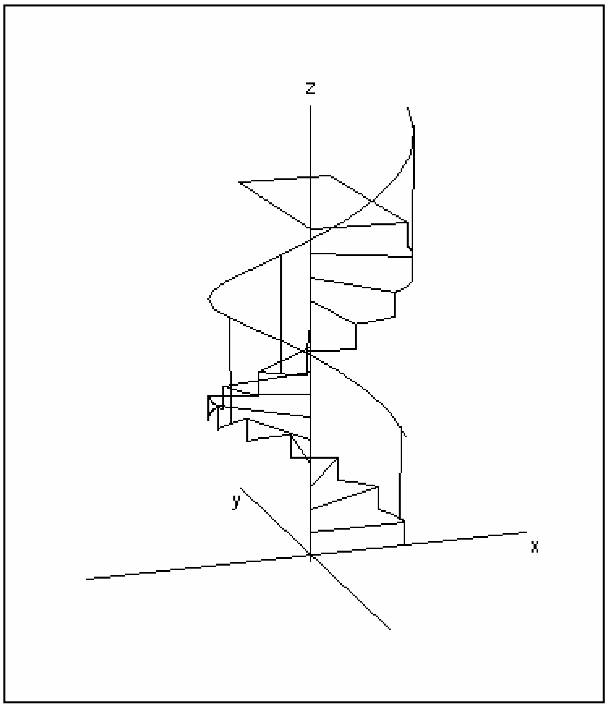
Ein Bogen, den ich in der Ebene herstelle, und der den Radius der Abwicklung in der Steigung hat, wird auf diese Abwicklung nicht passen. Ich müsste Bögen mit etwas kleinerem Radius fräsen und diese Bogenelemente so an ihren Stößen verdrehen, dass der Handlauf Bogen für Bogen steigt. Durch eine solche Verdrehung würde die erste Hälfte des Bogens nach meiner Vorstellung eine geringere Steigung aufweisen als die zweite Hälfte.

Ich stelle mir vor dass ein solcher Handlauf über seine Abwicklung ständig kleine Steigungsänderungen aufweisen würde, die aber weder bei der Treppenbenutzung noch in der Handlaufansicht auffallen müssten.

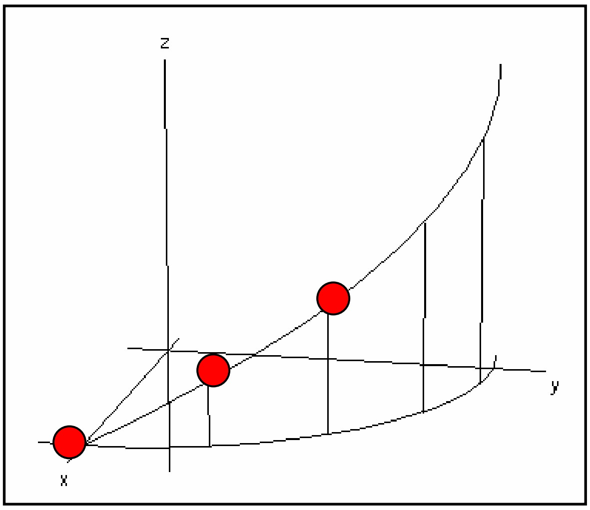
Meine Fragen:

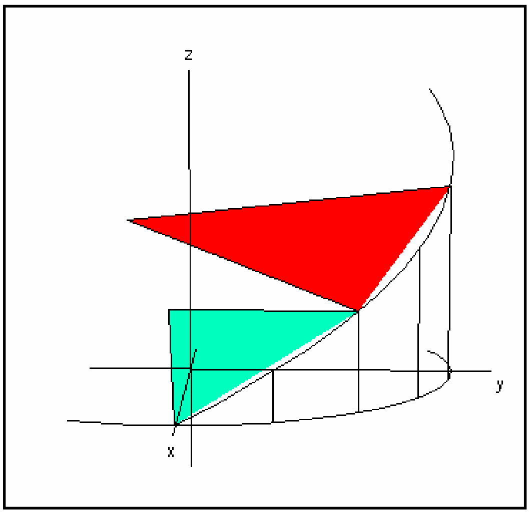
Wie kann ich die Bogenradien berechnen?
Wie berechne ich die Verdrehung der Bögen untereinander?
Sind die Stöße noch rechtwinklig zur Bogenebene und radial zum Bogenmaß?
Kann man solche Konstruktionen rechnerisch / zeichnerisch optimieren und darstellen?
Lässt sich ein solcher Handlauf in beispielsweise 9 gleiche Bögen auflösen, ließen sich diese mit vertretbarem Aufwand herstellen und ich könnte für weitere Anschlüsse ebenfalls Massivholzbögen verwenden.
Könnt Ihr Euch meines Problems annehmen?

Quelle: www.mathe-service.de



Eine Lösungsidee:
Lege durch drei Punkte eine Ebene und in dieser Ebene einen Kreis durch die drei Punkte!





Autor: Dr. Hubert Weller
Vogelsang 10
35633 Lahnau

hubert.weller@schule.uni-giessen.de