Pfingsttagung 2002

Workshop 201

Eckhard Löbbert

Erschließen mathematischer Inhalte mit Hilfe eines CAS in der Jahrgangsstufe 11

erstmalig veröffentlich in:
Bärbel Barzel, Detlef Berntzen, Victor Manuel David Sendas: Neues Lernen. Neue Medien. Viele Projekte im Land. Tagungsdokumentation. Westfälische Wilhelms-Universität Münster. 21.-24. Mai 2002. Münster 2003 (=ZKL-Texte Nr. 25), ISBN 3-934064-30-2

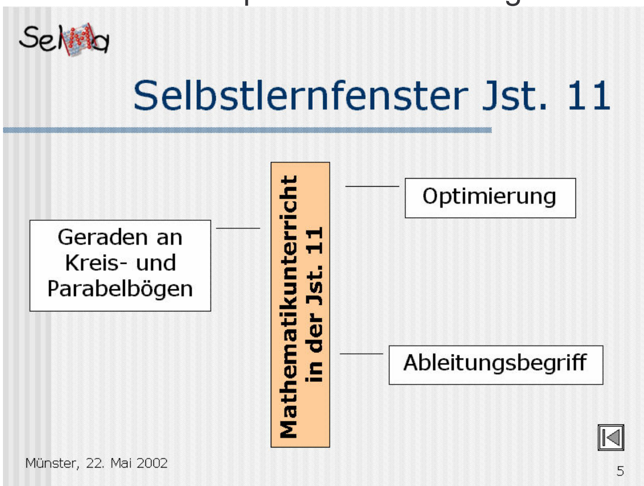
Workshop 201

Erschließen mathematischer Inhalte mit Hilfe eines CAS in der Jahrgangsstufe 11

Eckhard Löbbert, Haltern-Sythen

Die Projekte, die hier vorgestellt werden, sind im Rahmen des BLK-Modellversuchs SelMa vom Autorenteam des Albert-Schweitzer-Gymnasiums Marl entwickelt worden. In den Projekten geht es um die selbstständige Erarbeitung neuer mathematischer Inhalte. Dieses erfolgt einerseits durch die Bearbeitung von gestaffelten, offen gestalteten Aufgaben, die in Partnerarbeit zu lösen sind. Die Einarbeitung in mathematisches Hintergrundwissen erfolgt andererseits in der Organisationsform eines Gruppenpuzzles. Der Einsatz von CAS erlaubt das Erschließen neuer Gebiete, auch wenn die algorithmischen Fähigkeiten dazu noch fehlen.

In den Selbstlernphasen werden folgende mathematische Inhalte erschlossen.



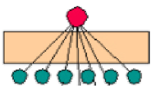
Optimierung: Lösen von Extremwertproblemen ohne die Verwendung der Methoden der Analysis.

Geraden an Kreis- und Parabelbögen: Vorbereitung zentraler Begriffe wie Sekante und Tangente in authentischen Situationen.

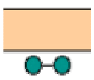
Ableitungsbegriff: Unterschiedliche Methoden zur Bestimmung der Ableitung am Beispiel Geschwindigkeit und Steigung.

Die Sequenzen können im Rahmen des normalen Kursunterrichts eingesetzt werden. Es sind Angebote, die unabhängig voneinander eingesetzt werden können. Die einzelnen Projekte setzen nicht voraus, dass bereits ein anderes Projekt bearbeitet wurde. Die Sequenzen haben eine einheitliche Choreographie und dauern zwischen 10 und 20 Unterrichtstunden.

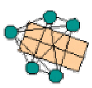
Choreographie



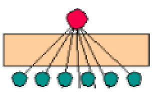
Instruktionsaufgabe



Erste Selbstlernphase in Partnerarbeit
(Offene Problemlösungen)



Zweite Selbstlernphase als Gruppenpuzzle
(Lernen durch Lehren)



Präsentation der Ergebnisse aus der ersten Selbstlernphase und Reflexion.

In der **Instruktionsphase** wird von der Lehrerin/ dem Lehrer anhand einer Beispielaufgabe der neue Problemtyp vorgestellt. Dieses kann in Form eines Unterrichtsgesprächs oder eines Lehrervortrags geschehen. Insbesondere soll hier verdeutlicht werden, wie das CAS zur Problemlösung herangezogen werden kann.

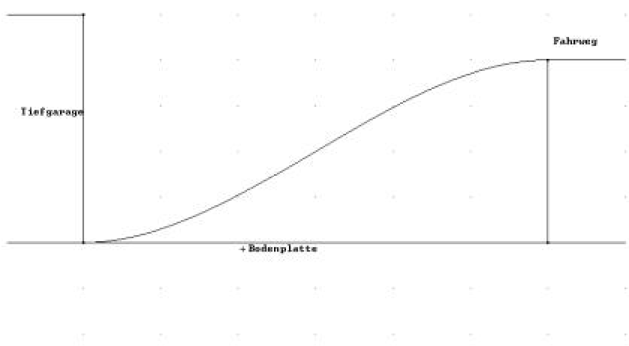
In der **ersten Selbstlernphase** erhalten die Schülerinnen und Schüler eine Sammlung von Aufgaben, die sie in Partnerarbeit aufgrund ihres mathematischen Vorwissens lösen sollen. Hier wird Raum geschaffen für selbstständiges Problemlösen. Die Aufgaben haben einen abgestuften Schwierigkeitsgrad und sind aus authentischen Situationen genommen, die Aufgabenstellung ist weitgehend offen. Sie ist so angelegt, dass kein schematischer Lösungsweg möglich ist. Schülerinnen und Schüler haben Möglichkeit, unterschiedliche Lösungswege zu gehen. Der Aufgabenblock enthält optionale Teile mit höherem Anspruchsniveau, um einer heterogenen Struktur im Kurs gerecht zu werden. Außerdem wird ein Hilfesystem zur Verfügung gestellt, von dem die Schülerinnen und Schüler, die an einer Aufgabe zu scheitern drohen, Unterstützung abrufen können. Die Materialien sind so konzipiert, dass sowohl DERIVE als auch der TI-89 eingesetzt werden kann. Es werden Informationen zum CAS bereitgestellt, mit denen die Schülerinnen und Schüler soviel Kenntnisse bezüglich des Umgangs selbstständig erwerben können, wie sie für die Aufgabenstellungen benötigen. Vorkenntnisse im Umgang mit dem CAS werden nicht verlangt, Vorratswissen wird nicht aufgebaut.

Beispielaufgabe aus der Sequenz zum Ableitungsbegriff:

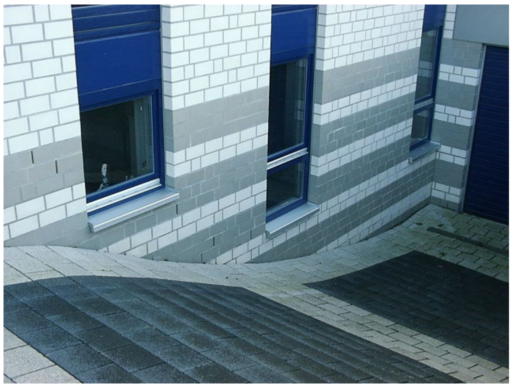
Tiefgarage
Bei dem Einfamilienhaus soll eine Zufahrt zu einer Tiefgarage angelegt werden. Der Fahrweg, der waagerecht verläuft, liegt 2m über der Bodenplatte. Tiefgarage und Fahrweg haben einen Abstand von 6m. Der Architekt schlägt vor, den Übergang zum Garagenboden und zum Fahrweg "möglichst glatt" (ohne Knick) anzulegen. Die Fahrbahn der Zufahrt kann durch eine ganz-rationale Funktion 3. Grades beschrieben werden.

$$f(x) = -\frac{1}{54}x^3 + \frac{1}{6}x^2$$

Der Ursprung des Koordinatensystems liegt am Übergang des Garagenbodens zur Auffahrt.



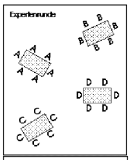
In der "Mitte der Auffahrt" hat der PKW die größte Steigung zu überwinden. Welche Steigfähigkeit muss der PKW haben, um diese Stelle überwinden zu können?

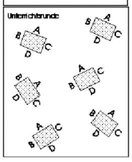


Steigfähigkeit: Angabe einer Steigung in Prozent, die von einem Fahrzeug kurzfristig überwunden werden kann.

Die **zweite Selbstlernphase** (Lernen durch Lehren) ist ein Beitrag zum systematisierenden Mathematikunterricht. Schülerinnen und Schüler arbeiten sich in verschiedene mathematische Gebiete ein und unterrichten anschließend die Mitschülerinnen und Mitschüler. Dieses soll in der Organisationsform eines Gruppenpuzzles geschehen:

Phasen eines Gruppenpuzzles

1 Die Lehrperson bereitet das Material vor.
2 Schülerinnen/ Schüler erarbeiten ihr Thema individuell.
3 

Expertenrunde
Schülerinnen und Schüler vertiefen und Sichern das Gelernte.
Sie bereiten die Wissensweitergabe gemeinsam vor.
4 

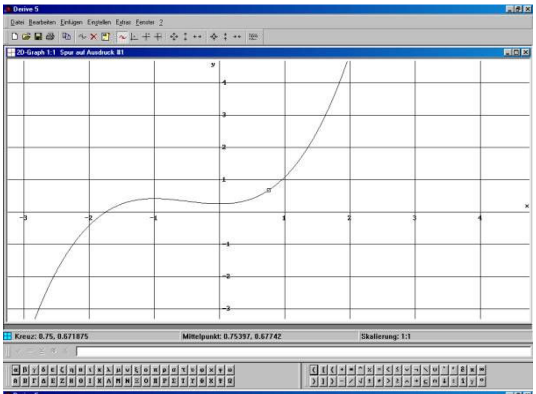
Unterrichtsrunde
Die Gruppen werden neu gebildet, so dass jedes Thema genau einmal in der Gruppe vertreten ist.
Reihum unterrichtet des Gruppenmitglied das vorbereitete Thema.

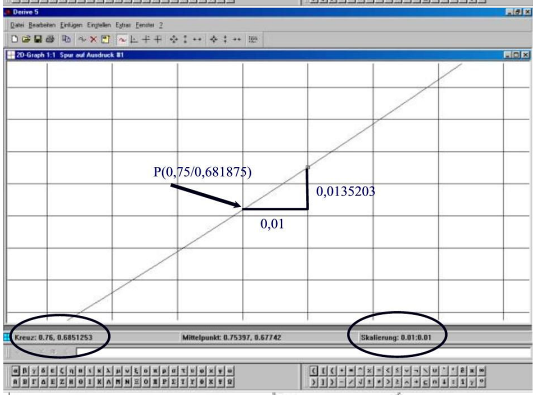
Durch die Organisationsform wird die Eigenaktivität der Lernenden gefördert. Alle Schülerinnen und Schüler müssen Verantwortung für den Lernprozess übernehmen, keiner kann sich dieser Verantwortung entziehen. Das Selbstvertrauen der Lernenden wird gestärkt.
Bei der Themenwahl sollte man aber vorsichtig sein, um die Schülerinnen und Schüler nicht zu überfordern. Das Resultat könnte sonst sein, dass inhaltlich Falsches von der Lehrperson unbemerkt in der Unterrichtsrunde weitergegeben wird. Eine gewisse Kontrolle bekommt man, wenn in der Expertenrunde ein Informationsblatt für die Unterrichtsrunde vorbereitet und anschließend der Lehrerin/ dem Lehrer zur Kontrolle vorgelegt wird. Bei mathematischen Begriffsbildungen sind Schülerinnen und Schüler häufig überfordert. Mathematische Verfahren (Algorithmen) eignen sich recht gut für ein Gruppenpuzzle.

Beispiel aus dem Projekt zum Ableitungsbegriff:
Arbeitsteilig werden in Gruppen verschiedene Verfahren erarbeitet, die Ableitung einer Funktion an der Stelle a zu berechnen mit dem Ziel, dieses Wissen an die Mitschülerinnen und Mitschüler weiterzugeben.

Thema 1: Funktionenmikroskop

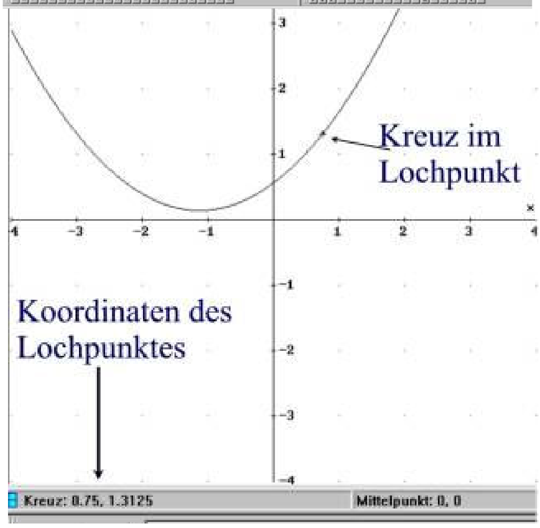
Betrachtet man den Graphen einer differenzierbaren Funktion f in der Nähe eines festen Punktes P(a/f(a)) mit einem "Mikroskop" , so erkennt man, dass das beobachtete kleine Graphenstück bei hinreichend starker Vergrößerung praktisch geradlinig verläuft und somit eine gewisse Steigung besitzt. Dieses ist die Steigung von f an der betreffenden Stelle a. Mithilfe des Spurmodus kann man die Koordinaten der Punkte auf dem Graphen bestimmen. Die Steigung der „Geraden“ entspricht der Ableitung an der Stelle a.





Thema 2: Lochpunktverfahren

Stellt man den Differenzenquotienten einer differenzierbaren Funktion graphisch dar, so liegt an der Stelle a ein Lochpunkt vor. Plaziert man „das Kreuz“ in den Lochpunkt, so gibt die y-Koordinaten die Ableitung an der Stelle a an.



Thema 3: Algebraische Vereinfachung von Differenzenquotienten: x-Methode

Vereinfacht man den Differenzenquotienten $m_s(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ einer differenzierbaren Funktion mithilfe des CAS algebraisch, so erhält man eine neue Funktion, die in allen Werten mit m_s übereinstimmt, aber auch an der Stelle a definiert ist. Der Funktionswert dieser neuen Funktion an der Stelle a gibt die Ableitung an der Stelle a an.

Thema 4: Algebraische Vereinfachung von Differenzenquotienten: h-Methode

Vereinfacht man den Differenzenquotienten $m_s(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ einer differenzierbaren Funktion mithilfe des CAS algebraisch, so erhält man eine neue Funktion, die in allen Werten mit m_s übereinstimmt, aber auch an der Stelle 0 definiert ist. Der Funktionswert dieser neuen Funktion an der Stelle 0 gibt die Ableitung an der Stelle 0 an.

Den Abschluss der Unterrichtssequenz bildet die **Präsentation der Ergebnisse aus der ersten Selbstlernphase und Reflexion**. Verschiedene Partnergruppen stellen ihre Problemlösungen vor, wobei die erweiterten mathematischen Kenntnisse aus der zweiten Selbstlernphase mit eingebacht werden können. In der Reflexion kann dann die Brauchbarkeit von Lösungsverfahren diskutiert werden, z.B. welches der verschiedenen Lösungsverfahren zur Bestimmung der Ableitung leichter handhabbar ist.

Die Lehrerrolle in dieser Sequenzierung besteht darin, den Schülerinnen und Schüler Zeit zu geben, Ideen zu entwickeln und Antworten zu finden. Die Lehrerin/ der Lehrer unterstützt im Umgang mit dem CAS und bei den Ausführung der Ideen. Sie bzw. er sollte die einzelnen Arbeitsgruppen genau beobachten, sich gefundene Lösungswege notieren, damit später bei der Präsentation auch unterschiedliche Lösungsansätze gewürdigt werden.

Die hier vorstellten Materialien sind unter www.mathe-selma.de auf dem Bildungsserver NRW zu finden.