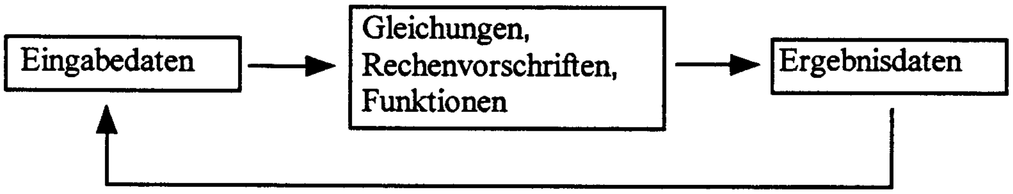
Chaos erforschen mit dem TI - 92

Kapitel 1
Was ist eine Iteration?

Jeder hat es wohl selbst schon versucht oder zumindest bei anderen beobachtet: Was passiert mit der Zahl in der Anzeige eines gängigen Taschenrechners, wenn man fortgesetzt immer dieselbe Taste drückt? Das ergiebigste Experimentierfeld sind die drei Tasten SIN, COS und TAN, wobei es noch interessant ist, ob man den Grad- oder Radiant - Modus eingeschaltet hat. Im Radiant - Modus erhält man folgende Ergebnisse:

Fortgesetzte Sinustaste:	die Werte laufen auf 0 zu
Fortgesetzte Cosinustaste:	die Werte laufen auf 0,73908... zu, wobei sie um diesen Wert „herumspringen“
Fortgesetzte Tangenstaste:	die Werte zeigen manchmal eine Regelmäßigkeit (die Beträge werden größer), manchmal „springen“ sie aber auch ganz unregelmäßig umher

Der ernsthafte Hintergrund hinter diesen Spielereien (wir dürfen das aber auch „Forschungen“ nennen), ist die Iteration.

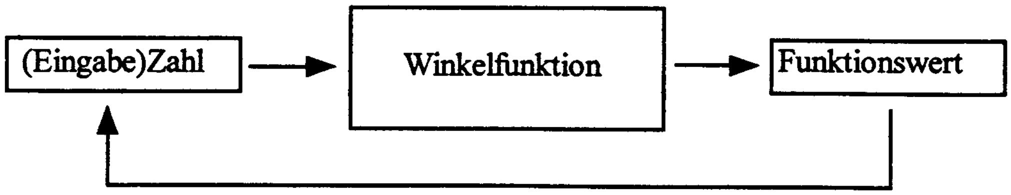


Das Grundschema für eine Iteration

Im allgemeinen werden also Daten einem Rechenprozeß unterworfen, aus Eingabedaten werden Ergebnisdaten. Als ganz wesentlichen Schritt eines iterativen Prozesses werden dann die Ergebnisdaten als neue Eingabedaten wieder demselben Rechenprozeß unterworfen.

Dieser Prozeß kann aber nur funktionieren, wenn die Ergebnisdaten die gleiche Struktur haben wie die Eingabedaten, z.B. muß ein Vektor wieder einen Vektor liefern. Etwas abstrakter heißt das, daß die Wertemenge eine Teilmenge des Definitionsbereiches sein muß.

Im konkreten Beispiel der Taschenrechnerspielerei können wir das Diagramm konkretisieren zu:



Das Iterationsschema für die Taschenrechnerspielerei

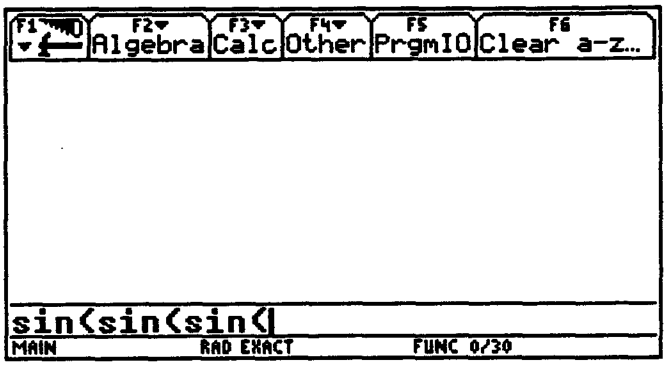
Bei einigen Taschenrechnermodellen kann man auch noch andere Rechnungen mit einem Tastendruck iterativ wiederholen, z.B. Quadrieren oder Wurzelziehen und die fortgesetzte Addition einer Zahl oder die wiederholte Multiplikation mit einer Zahl. So kann man dann die „Schachbrettaufgabe" schnell lösen, also ausrechnen, wieviele Reiskörner bei fortgesetzter Verdoppelung auf jedes Feld des Schachbrettes gelegt werden.

Eines der ältesten Iterationsverfahren ist das Heronverfahren zum berechnen der Quadratwurzel einer Zahl r: $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{r}{x_n})$. Da es sehr stabil ist und schnell konvergiert, ist es heute, nach 2000 Jahren, das Verfahren, mit dem Taschenrechner Quadratwurzeln berechnen.

Kapitel 2
Numerische Iteration

Die Spielerei mit den Winkelfunktionstasten läßt sich mit dem TI - 92 nicht durchführen, das sehen Sie sofort, wenn sie z.B. fortgesetzt die Sinustaste drücken.

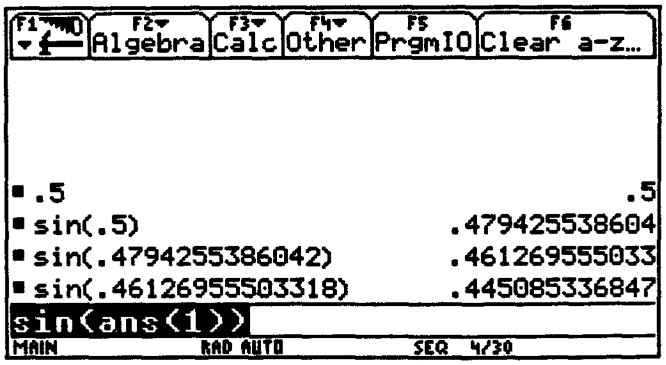
Während bei den einfachen Taschenrechnern die einstelligen Funktionen die aktuelle Zahl in der Anzeige als Argument nehmen und sofort den Funktionswert ausrechnen, werden beim TI - 92 alle Eingaben zunächst in eine Eingabezeile geschrieben, die erst nach Drücken der ENTER-Taste ausgeführt werden.



Der Vorteil der Trennung von Eingabe und Ausführung liegt auf der Hand, für eine schnelle, bequeme Durchführung von Iterationen ist das jedoch zunächst hinderlich.

Da aber der TI - 92 alle Ergebnisse des aktuellen Bildschirms in einem extra Variablenbereich speichert, gibt es für das Problem eine Lösung. Die Funktion ans(n) liefert das n - letzte Ergebnis. Die Sinus - Iteration kann nun folgendermaßen realisiert werden:

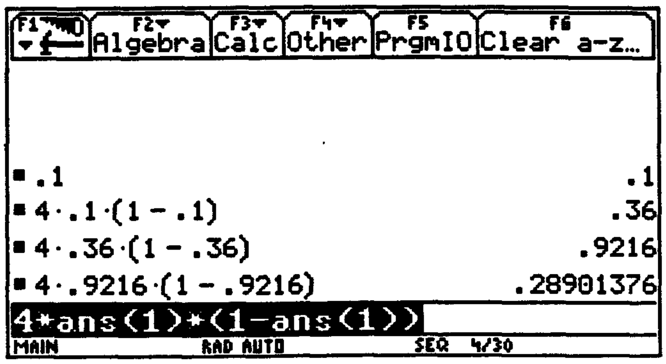
Tippen Sie 0.5 und geben Sie es mit ENTER ein. Dieser erste Wert ist die Initialisierung.
Drücken Sie nun SIN 2nd ANS).
Führen Sie die Rechnung mit ENTER aus.
Die Formel bleibt unverändert in der Eingabezeile stehen, so daß jedes ENTER diese Rechnung wiederholt. Dabei bezieht sich ans(1) immer auf das letzte Ergebnis.



Sie sehen sicher, welche Flexibilität diese Arbeitsweise bietet: jede beliebige Funktion ist so mit einem einzigen Knopfdruck iterierbar.

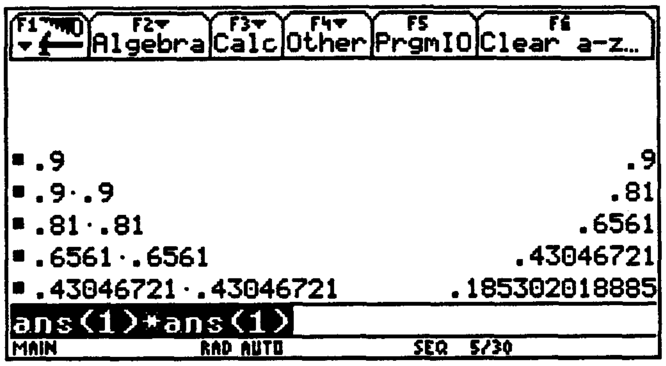
Beginnen wir mit dem ersten wichtigen Beispiel für die Erforschung des Chaos, die Funktion $f(x) = 4x(1 - x)$. Wir wollen die Iteration mit 0.1 starten.

Tippen Sie 0.1 und geben Sie es mit ENTER ein.
Schreiben Sie „4*ANS*(1-ANS)" in die Eingabezeile. x aus der Funktionsgleichung wird also durch ans(1) ersetzt
Führen Sie die Rechnung wiederholt mit der ENTER- Taste aus.



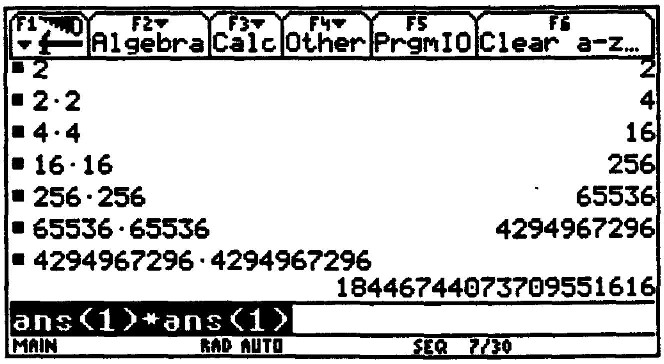
Die zweite, für unsere Untersuchungen wichtige Funktionenschar ist $f(x) = x^2 + c$. Wenn wir den einfachsten (und zugegebenerweise langweiligsten) Fall, nämlich $f(x) = x^2$, iterieren wollen, sieht das am TI - 92 folgendermaßen aus:

Tippen Sie 0.9 und geben Sie es mit ENTER ein. Dieser erste Wert ist die Initialisierung
Tippen Sie „ANS*ANS" in die Eingabezeile .
Führen Sie die Rechnung wiederholt mit der ENTER- Taste aus.

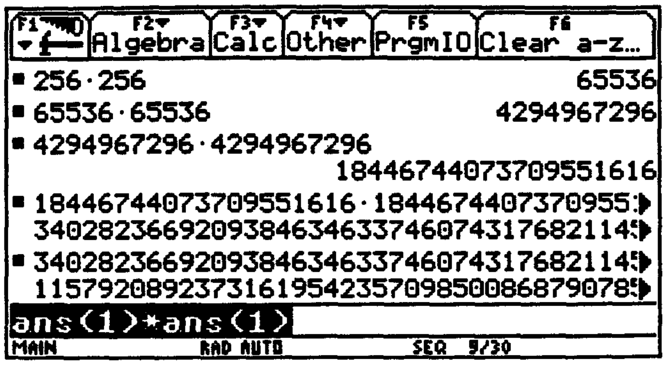


An dieser Stelle bietet sich die Gelegenheit, die Verarbeitung großer Zahlen am TI - 92 aufzuzeigen. Wenn wir das fortgesetzte Quadrieren mit 2 starten, wissen Sie, was im Prinzip passiert. Aber wie sieht das konkret aus?

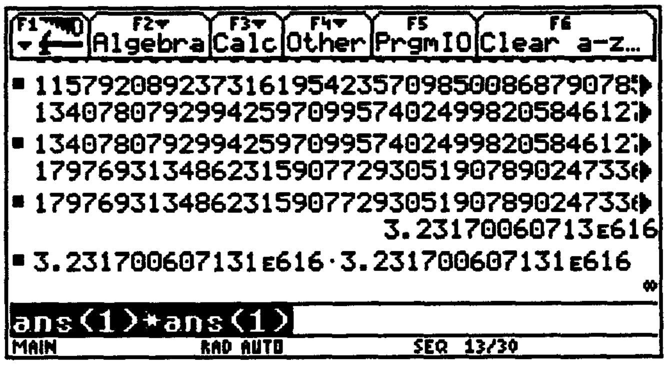
Geben Sie 2 mit ENTER als Startwert ein.
Schreiben Sie wieder „ans(1) *ans(1)" in die Eingabezeile .
Führen Sie die Rechnung wiederholt mit der ENTER - Taste aus. Schon bei der 6. Iteration bemerken Sie, daß der TI - 92 größere Zahlen genauer verarbeiten kann als herkömmliche Rechner.



Bei weiteren Iterationsschritten verlieren Sie schnell den Überblick über die Größe der Zahl, sie wird jedoch nicht in exponentieller Darstellung geschrieben.

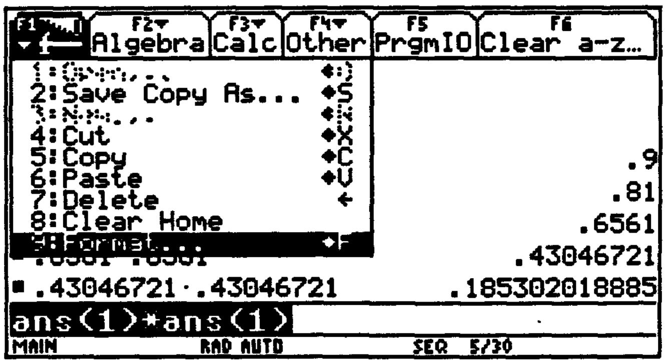


Tatsächlich kann der TI - 92 ganze Zahlen bis zu 614 Stellen exakt verarbeiten.
Bei exponentieller Darstellung darf der Exponent dreistellig sein, wird auch diese Grenze überschritten, erscheint ∞ in der Anzeige.

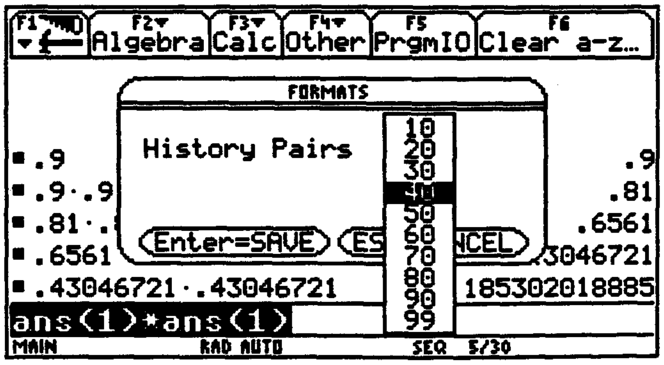


Ein weiterer Vorteil des TI - 92 ist, daß man auch nach einer längeren Iterationsfolge frühere Werte durch Hochscrollen wieder ansehen kann, allerdings nur so weit, wie es die „History" zuläßt. Der dafür voreingestellte Wert ist 20, Sie können also auf die letzten 20 Werte zurückgreifen. Wenn das nicht ausreicht, kann man die „History" auch, auf Kosten des Speichers, erhöhen.

Tippen Sie `F1` und gehen Sie auf Punkt `9:Format...`
(oder Kurzbefehl: [KARO] F).

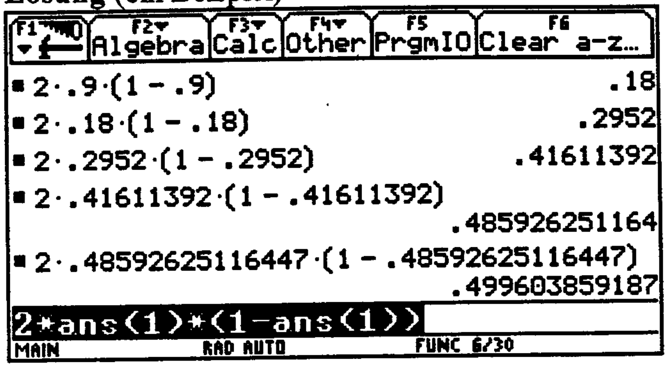


Sie erhalten ein Dialogfenster mit einem Pop - Up - Menü, aus dem Sie die gewünschte Zahl auswählen können. Drücken Sie `ENTER` `ENTER`, um zum Ausgangsbildschirm zurückzukommen.



Aufgabe:
Iterieren Sie mit der Funktion $f(x) = 2x(1-x)$ und mit verschiedenen Startwerten. Welchen Einfluß hat die Wahl des Startwertes auf den Verlauf der Iteration?

Lösung (ein Beispiel):

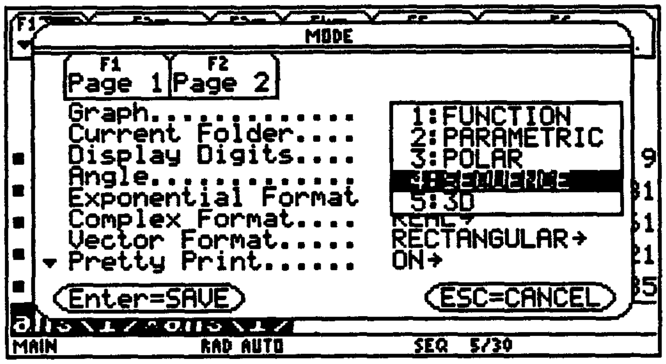


Kapitel 3
Zeitreihen

Darstellung in Tabellen

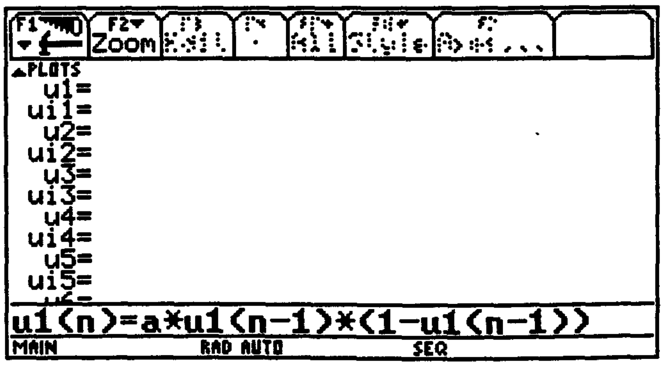
Bei der im Kapitel 2 dargestellten Art der einfachen, numerischen Iteration vermißt man eine Information, nämlich die Nummer des Folgengliedes, insbesondere, wenn man länger iteriert hat. Außerdem verursachen die entstehenden Zahlen mit vielen Stellen hinter dem Komma, daß jeder Iterationsschritt in zwei Zeilen dargestellt wird, so daß schließlich nur 4 Schritte gleichzeitig überblickt werden können. Die Lösung all dieser Probleme findet man in der Möglichkeit, mit Tabellen zu arbeiten.
Bevor wir jedoch eine Tabelle für Iterationen nutzen können, müssen wir für die Verwendung von Funktionen eine Einstellung vornehmen bzw. überprüfen.

Drücken Sie die Taste MODE (rechts neben dem Display). In dem erscheinenden Dialogfenster öffnen Sie gleich im ersten Punkt mit [rechts] ein Pop - Up - Menü, aus dem Sie „4:SEQUENCE“ wählen. Drücken Sie ENTER ENTER, um zum Arbeitsbildschirm zurückzukommen.

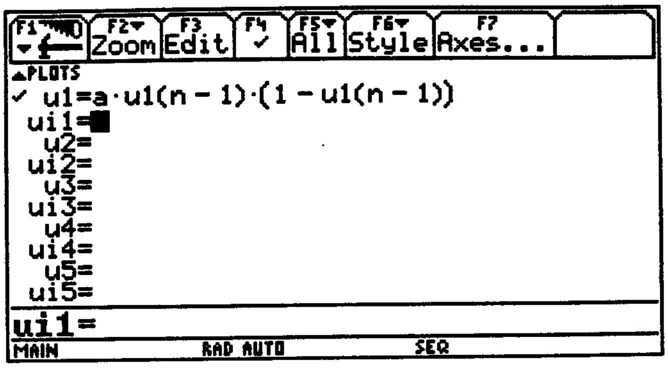


Der Rechner ist dadurch auf rekursiv definierte Folgen eingestellt, für diese sind die Variablen u1 bis u99 vorgesehen.
Im nächsten Schritt definieren wir die Funktionen, die wir untersuchen wollen. Unsere erste Funktion soll f(x) = ax(1-x) sein, wobei es der TI - 92 zuläßt, den Term mit dem Parameter a aufzuschreiben. In der vorgegebenen Bezeichnung des TI - 92 geben wir sie als u1(n) ein und verwenden für die rekursive Definition u1(n-1).

Tippen Sie [KARO]W für „Y=“ Sie gelangen so auf den Bildschirm für die Funktionseingabe. Bewegen Sie den Cursor in die Zeile „u1= “ und geben Sie „a*u1(n-1)*(1-u1(n-1))“ ein.

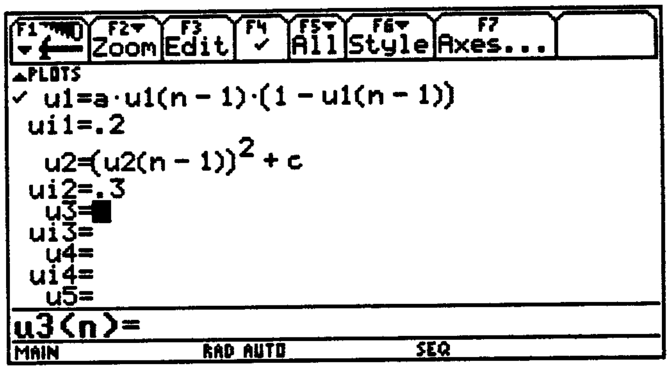


Wenn Sie den Term in der Eingabezeile korrekt eingegeben haben, drücken Sie ENTER. Der Term wird hinter „u1=“ geschrieben, die Funktion ganz links mit einem _ markiert und der Cursor rückt vor in die Zeile „ui1“ . Geben Sie hier 0.2 als Startwert ein.
Kehren Sie mit [KARO]Q für „HOME“ zum Ausgangsbildschirm zurück.



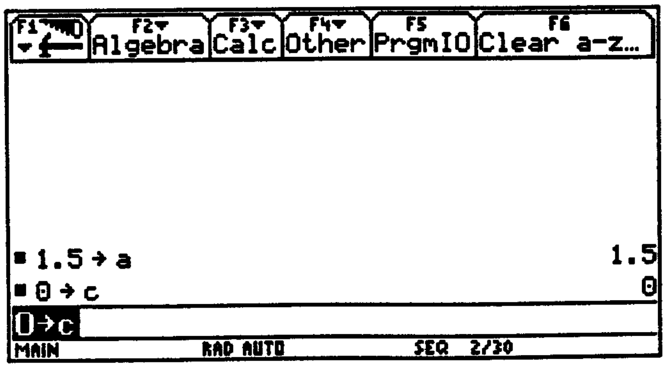
Aufgabe: Versuchen Sie nun nach dieser Logik selbständig unsere zweite Funktionenschar $f(x) = x^2 + c$ als u2 einzugeben. Der Startwert soll 0.3 sein.

Lösung:
Tippen Sie [KARO]W für „Y=“. Bewegen Sie den Cursor in die Zeile „u2=“ (dort sollte er von unserer letzten Eingabe stehen) und geben Sie „u2(n-1)^2+c“ ein. Drücken Sie ENTER und der Term wird hinter „u2=“ in schöner Darstellung geschrieben.
Geben Sie nun 0.3 in der Zeile ui2 ein.
Um die Markierung der Funktion u2 zu löschen, bewegen Sie den Cursor in die Zeile von u2 und drücken [F4]. Kehren Sie mit [KARO]Q für „HOME“ zum Arbeitsbildschirm zurück.



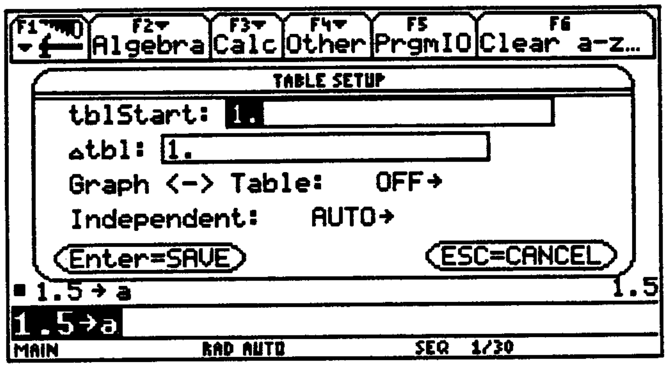
Nach diesen Eingaben haben wir zwei Funktionsscharen definiert, von denen u1 aktiv ist (wegen der Marke). Für eine vollständige Definition einer konkreten Funktion fehlt noch die Festlegung des Parameters a. Wir wollen a = 1.5 setzen.
Unlogischerweise arbeitet der Rechner nur fehlerfrei, wenn auch für den Parameter c in der noch nicht benutzten Funktion u2 bereits ein konkreter Wert festgelegt wird, c darf nicht undefiniert bleiben. Wir setzen c auf 0.

Tippen Sie im Ausgangsbildschirm 1.5 STO> a und drücken Sie ENTER.
Tippen Sie dann 0 STO> c und drücken Sie ENTER .



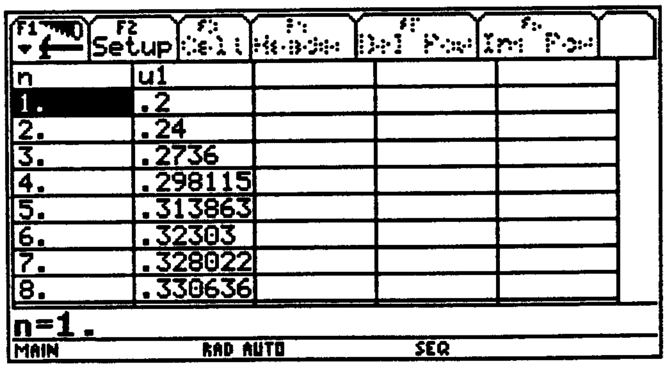
Damit ist unsere Funktion definiert und wir können nun also die Iteration mit f(x) = 1,5x(1-x) untersuchen, wobei wir mit x_0 = 0,2 starten. Um diese Iteration in der Tabelle betrachten zu können, müssen wir als letzte Vorbereitung noch die Tabelle einrichten.

Tippen Sie [KARO]T für „TblSet". Es erscheint ein Dialogfenster, in dem Sie 4 Einstellungen für die Tabelle vornehmen können. Im ersten Feld geben Sie die Nummer des ersten Iterationselementes für die Tabelle an. Gehen sie mit [runter] in das zweiten Feld, in das die Schrittweite eingetragen wird. beide Zahlen müssen ganze Zahlen sein, im Normalfall 1. Die weiteren beiden Eingaben lassen wir auf OFF bzw. AUTO.
Drücken Sie `ENTER ENTER`, um zum Arbeitsbildschirm zurückzukommen.



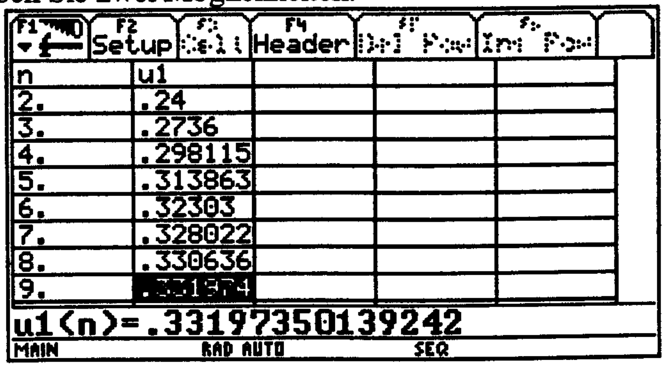
Nun sind alle Eingaben gemacht, um sich endlich über eine Tabelle den Verlauf der Iteration anzusehen.

Tippen Sie [KARO]Y für „TABLE".

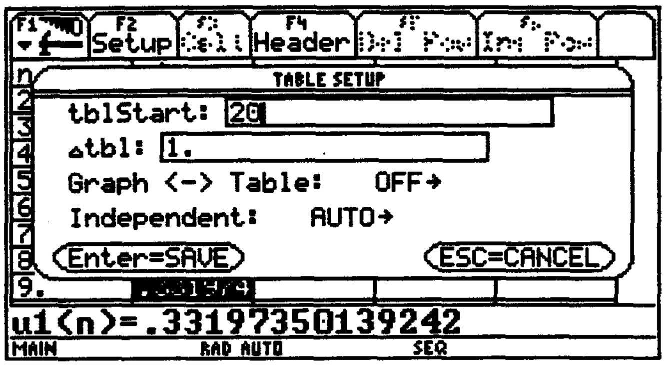


Entsprechend der Einstellung erhalten Sie die Tabelle für die ersten 8 Werte.
Wenn Sie weitere Werte sehen wollen, haben Sie zwei Möglichkeiten:

1. Sie bewegen den Cursor nach unten in die letzte Zeile und drücken ein weiteres Mal [runter]. Nun scrollt die Tabelle eine Zeile nach oben und zeigt den 9. Folgenwert. Wenn Sie den Cursor in die zweite Spalte bewegen, sehen Sie in der Zeile unter der Tabelle die Folgenwerte in voller Anzeige (14 Stellen)

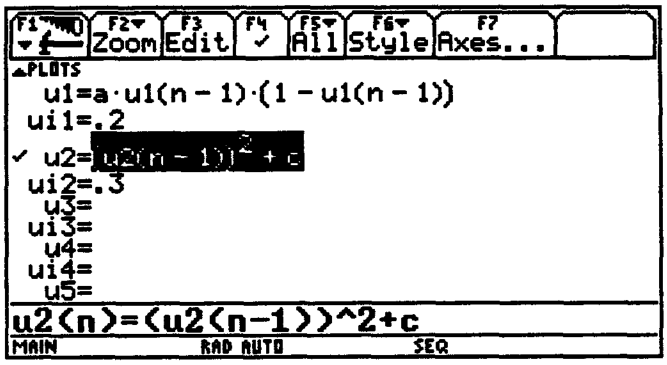


2. Sie wollen ganz spezielle Folgenglieder sehen, die auch von der aktuellen Anzeige „weit entfernt“ sind. Dann ist es günstiger, mit [KARO]T für „TblSet“ oder F2 in das entsprechende Dialogfenster zu gehen und die passende Einstellung vorzunehmen. Drücken Sie ENTER ENTER, um zur Tabelle zurückzukommen, die dann entsprechend gefüllt wird.



Wir wollen nun mit der zweiten, vorbereiteten Funktion u2 iterieren, müssen also die aktuell verwendete Funktion ändern.

Tippen Sie [KARO]W für „Y=“ und bewegen Sie den Cursor in die Zeile „u1=“. Drücken Sie nun auf F4, um die Marke wegzunehmen. Gehen Sie dann mit dem Cursor in die Zeile „u2=“ und setzen Sie hier mit F4 die Marke.

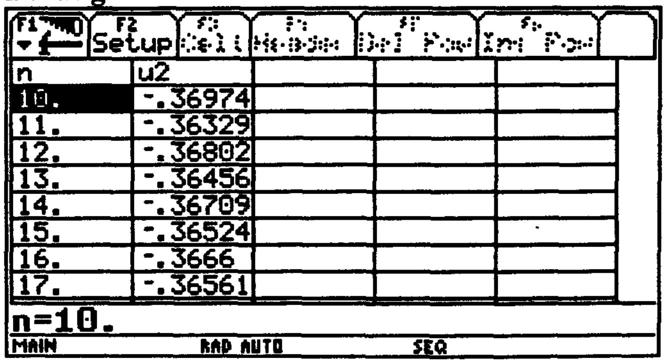


Wenn Sie nun mit [KARO]Y für „TABLE“ in die Tabelle gehen, werden die Werte mit u2 gebildet und angezeigt.

Aufgabe:

Setzen Sie c = -0.5 und starten Sie eine Iteration mit 0.3. Lassen Sie sich die Tabelle ab dem 10. Iterationsschritt anzeigen. Wenn Sie alles korrekt gemacht haben, sollte Ihre Tabelle so aussehen wie im Bild rechts.

Lösung:



Grafische Darstellung

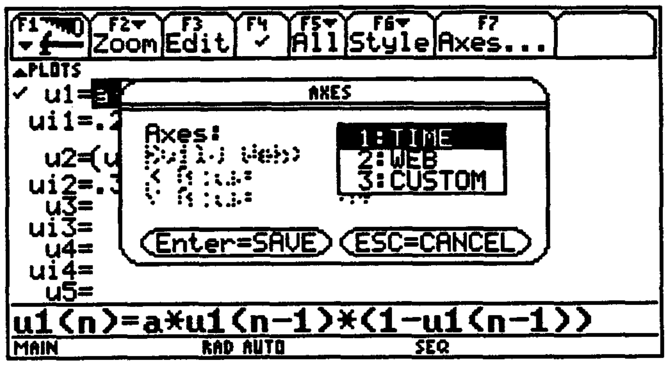
Die grafischen Möglichkeiten des TI - 92 legen nahe, daß man sich die Entwicklung der Iterationsfolge auch grafisch darstellen läßt. Bestimmte Gesetzmäßigkeiten lassen sich in dieser Form leichter erkennen, zusätzlich kann man sehr viel mehr Werte gleichzeitig erfassen.

Für die grafische Darstellung muß man diverse Vorbereitungen treffen, die mit denen für die Tabellen übereinstimmt. Schauen sie ggf. dort nach. Die Vorbereitungen umfassen:

- stellen Sie die Funktionsart auf „SEQUENCE“
- geben Sie die zu iterierende Funktion und ihren Startwert ein (über „Y=“)
- geben Sie für die ggf. vorhandenen Parameter die richtigen Werte an

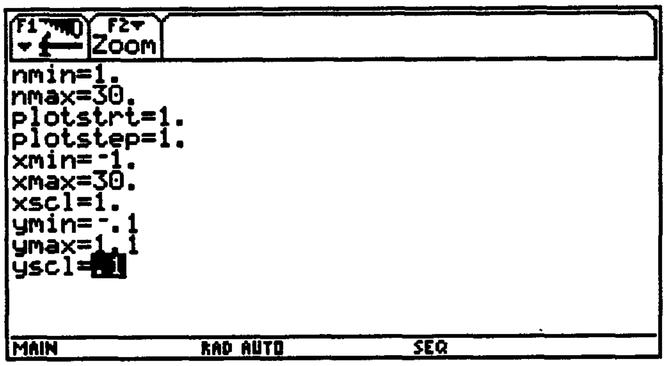
Für die grafische Darstellung von Iterationsfolgen gibt es zwei Methoden, die Zeitreihen (TIME) und die Iterationspfade (WEB). Die Umstellung geschieht vom Bildschirm für die Funktionseingabe.

Tippen Sie [KARO]W für „Y=“ und anschließend F7. In dem Dialogfenster können Sie die „Achsen“ über ein Pop - Up - Menü einstellen. Wählen Sie „TIME“ und drücken Sie ENTER ENTER, um die Eingabe vollständig abzuschließen.



Ähnlich wie wir vor dem Anzeigen der Tabelle selbst mit „TblSet“ vorbereitende Einstellungen für die Tabelle vorgenommen haben, müssen wir nun auch für die grafische Darstellung Vorbereitungen treffen. Als erstes Beispiel wählen wir wieder f(x) = ax(1-x) mit a = 1,5. Gehen Sie mit [KARO]W für „Y=“ in die Funktionseingabe und prüfen Sie, ob diese Funktion eingegeben und gewählt ist (die Marke _ am linken Rand zeigt) und 0.2 als Startwert angegeben ist. Prüfen Sie im Ausgangsbildschirm, ob a wirklich den Wert 1.5 hat.

Tippen Sie [KARO]E für „WINDOW“. Geben Sie nacheinander die passenden Werte ein, nach jeder Zahleneingabe können Sie mit [runter]oder ENTER in die nächste Zeile gehen



nmin/nmax: Die Folgenglieder zwischen diesen Nummern werden berechnet

plotstrt: Ab diesem Glied beginnt die Darstellung. Der Wert liegt sinnvollerweise zwischen nmin und nmax, oft ist er gleich nmin

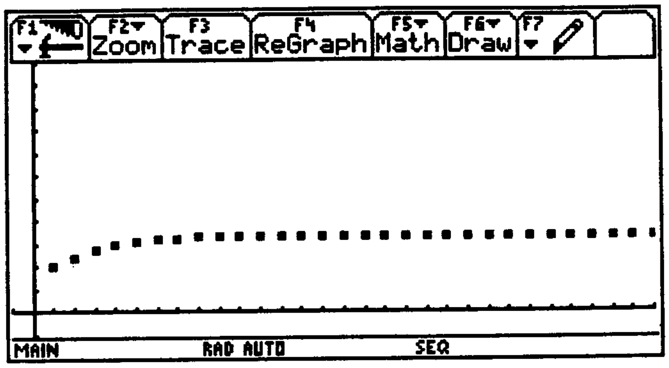
plotstep: Schrittweite für die Darstellung

xmin, xmax, ymin, ymax: Grenzen für das Koordinatensystem. xmin und xmax sollten sich an den Werten für nmin und nmax orientieren

xscl, yscl: Einheit, mit der auf den Achsen Marken gesetzt werden

Die Eingabe erfolgt in einem extra Bildschirm, es ist kein Dialogfenster, das geschlossen wird. Man fährt fort, indem man den nächsten Schritt wählt. Das ist nun, da alles vorbereitet ist, die grafische Darstellung selbst.

Tippen Sie [KARO]R für „GRAPH“.

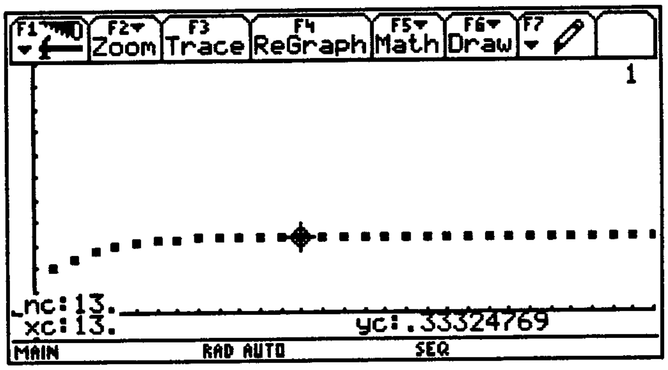


Sie sehen die ersten 30 Werte der Iterationsfolge dargestellt und sehen sehr übersichtlich, daß die Iteration sehr schnell einen Grenzwert bei ca. 0,35 erreicht. Wie groß sind die Folgenwerte genauer?

Drücken Sie F3 für „Trace“, was Ihnen einen großen, blinkenden Cursor liefert, der mit [links] und [rechts] von Folgenpunkt zu Folgenpunkt bewegt werden kann. Dabei werden am unteren Rand angezeigt:

nc: Die Nummer des betreffenden Folgengliedes

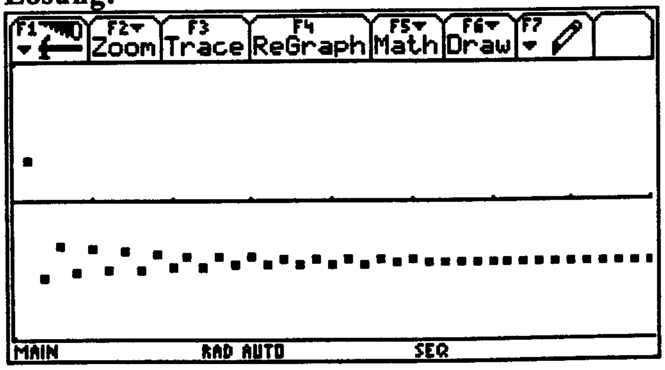
xc und **yc**: Die Koordinaten des Cursors



Durch die Trace - Funktion ist die Ungenauigkeit der grafischen Anzeige ausgeglichen, so daß sich diese Anzeigeart für die meisten Fälle als die beste erweist. Es werden viele Werte sehr übersichtlich dargestellt, durch „Trace“ kann ein betreffender Wert sehr genau angezeigt werden.

Aufgabe:
Stellen Sie den Iterationsverlauf dar für die Funktion $f(x) = x^2 - 0.7$ und den Startwert 0.3. Lassen Sie sich die ersten 40 Werte anzeigen.
(Wählen Sie für ymin -1
und für ymax +1)

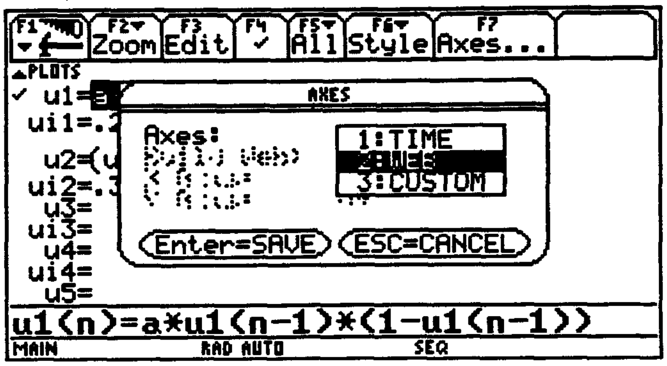
Lösung:



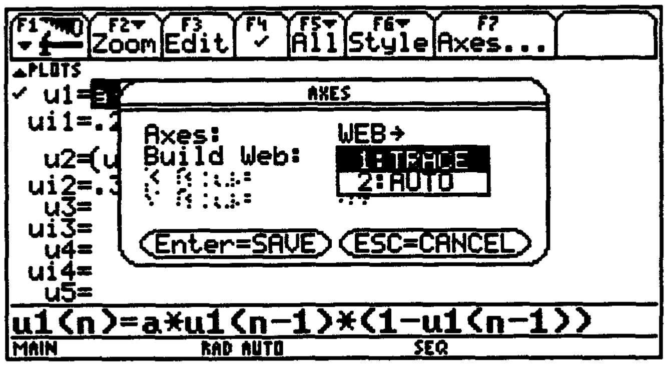
Kapitel 4
Iterationspfade

Iterationspfade sind neben den Zeitreihen eine weitere Art der grafischen Darstellung einer Iteration. Dabei sieht man zwar nicht ganz so übersichtlich den Verlauf, Iterationspfade sind aber hervorragend geeignet, Fragen nach dem „Warum“ zu beantworten.
Um die Darstellung von Iterationspfaden zu erreichen, müssen wir den TI - 92 zunächst darauf umstellen.

Tippen Sie [KARO]W für „Y=“ und anschließend F7. In dem Dialogfenster können Sie die „Achsen“ über ein Pop - Up - Menü einstellen. Wählen Sie „2:WEB“ und drücken Sie [ENTER].

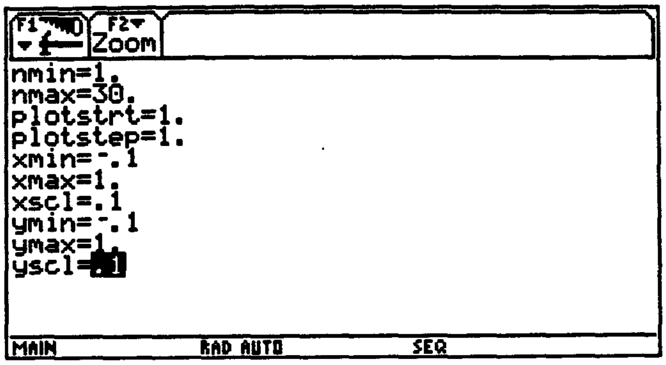


Der nachfolgende Punkt „Build Web“ ist nun aktiv geworden, über das Pop - Up-Menü wählen Sie „TRACE“, wodurch Sie die grafische Darstellung nachher schrittweise aufbauen können.
Drücken Sie ENTER ENTER, um die Eingabe vollständig abzuschließen.



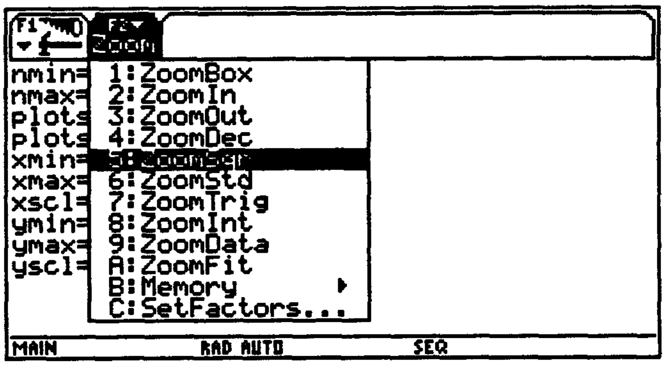
Nachdem das Dialogfenster geschlossen wurde, sind Sie im Bildschirm für die Funktionseingabe. Stellen Sie hier für das nachfolgende Beispiel sicher, daß die Funktion f(x) = ax(1-x) eingegeben (u1(n) = a*u1(n-1)*(1-u1(n-1))) und gewählt ist.
Setzen Sie im Ausgangsbildschirm den Parameter a auf 3.1.
Vor der eigentlichen Anzeige der Grafik müssen Sie zunächst wieder einige Einstellungen vornehmen. In dieser Darstellung soll der Funktionsgraph über dem maßgeblichen Intervall dargestellt werden. Für unsere Beispielfunktion ist das das Intervall [0;1].

Tippen Sie [KARO]E für „WINDOW“. Geben Sie die rechts dargestellten Werte ein.



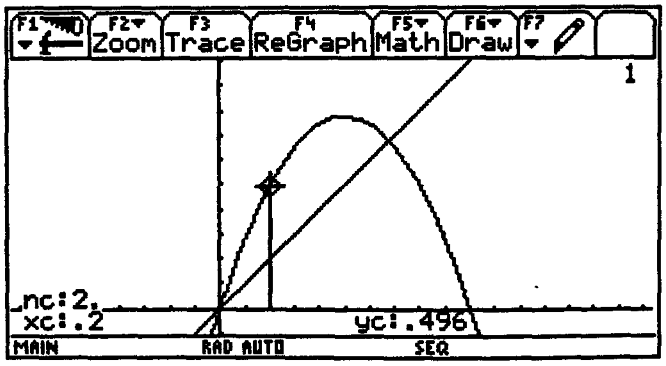
Für die nachfolgende Darstellung ist es besonders günstig, wenn die Achsen denselben Maßstab haben.

Drücken Sie F2 für „Zoom“ und wählen Sie von dem Menü „5:ZoomSqr“. Drücken Sie ENTER für die Eingabe.
Kurzeingabe: Drücken Sie nach F2 die Taste 5



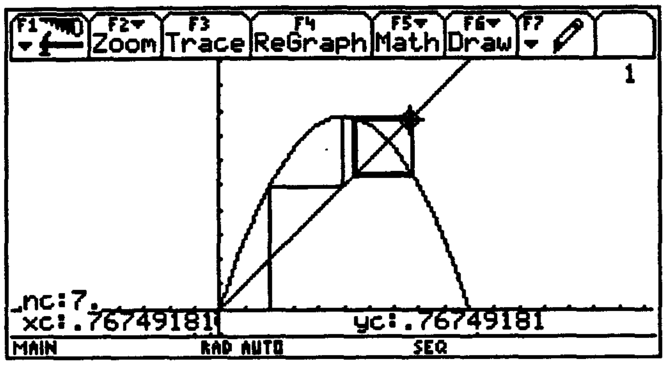
Nach der letzten Eingabe wird automatisch auf das Grafikfenster umgeschaltet und der Graph der gewählten Funktion dargestellt. Zusätzlich wird eine Gerade angezeigt, der Graph von y = x.

Drücken Sie F3 für „Trace“, was Ihnen einen großen, blinkenden Cursor bei 0.2 auf der x-Achse liefert.
Drücken Sie einmal [rechts], um einen Iterationsschritt in dieser Darstellung durchzuführen.
Am unteren Rand sehen Sie wieder die Werte für den Cursor dargestellt.



Der erste Schritt der Iteration besteht darin, daß mit dem Startwert der Funktionswert gebildet wird. Dieser Wert soll Eingangszahl für die nächste Funktionswertbildung sein. Dazu muß der Wert, der auf der senkrechten y - Achse abgelesen werden kann, auf die waagerechte x - Achse übertragen werden. Ein eleganter Weg führt über die Hilfslinie y = x. Geht man vom Kurvenpunkt waagerecht bis zur Geraden zu y = x, gelangt man zu einem Punkt, dessen x - Koordinate mit der y - Koordinate übereinstimmt. Von hier aus wird erneut der Funktionswert gebildet.

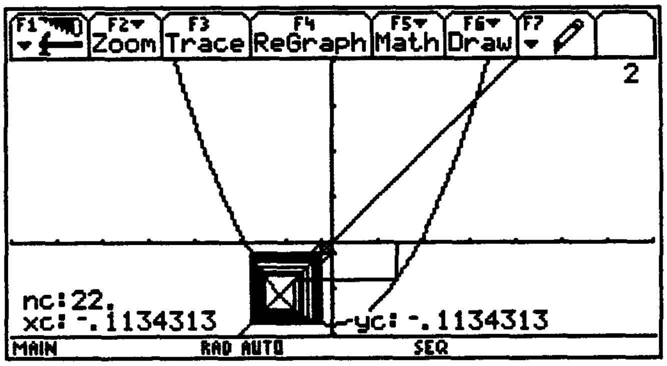
Drücken Sie mehrmals [rechts], um weitere Iterationsschritte durchzuführen.



Das letzte Beispiel zeigt in der grafischen Darstellung das Verhalten der Iteration bei einem Zweierzyklus. Der Cursor läuft auf einem Quadrat (bei gleicher Achseneinteilung) um den Schnittpunkt mit der Hilfsgeraden zu $y = x$.

Aufgabe:
Verfolgen Sie den Iterationspfad für die Iteration mit $f(x) = x^2 - 0.9$ und dem Startwert 0.7. Wählen Sie den Bereich -2 bis +2 für x und -1 bis +2 für y. Stellen Sie auf beiden Achsen denselben Maßstab her. Verfolgen Sie den Iterationspfad bis zum 22. Schritt.

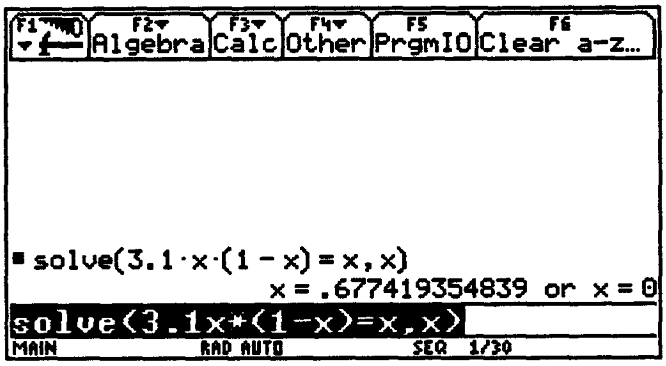
Lösung:



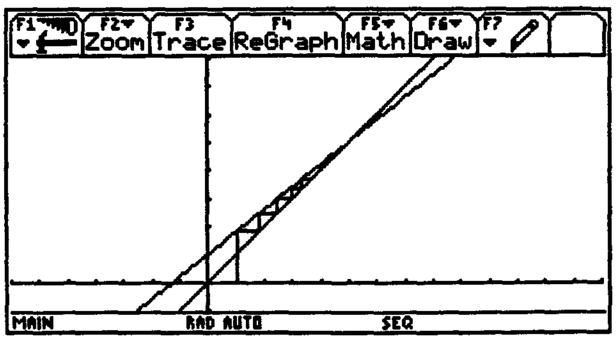
Kapitel 5
Fixpunkte berechnen und untersuchen

Die Fixpunkte einer Iteration spielen für Erklärungen zum Iterationsverhalten eine wesentliche Rolle. Zum einen sind sie als Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der Hilfsgeraden zu y = x in der Darstellung der Iterationspfade markante Punkte, zum anderen sind sie der Schlüssel zu Antworten bei den „Warumfragen" zum Verhalten der Iteration (z.B. in Abhängigkeit vom Parameter a bzw. c).
Fixpunkte der Iteration sind über die Gleichung f(x) = x definiert. Auf diese Gleichung kommt man einerseits von der grafischen Betrachtung, wenn man die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der Geraden zu y = x berechnen will, andererseits von der analytischen Überlegung, welcher Wert sich bei der Iteration nicht verändert.
Das letzte Beispiel aus Kapitel 4 war die Iteration mit f(x) = 3.1x(1-x), dazu werden wir als erstes mit dem TI - 92 die Fixpunkte berechnen.

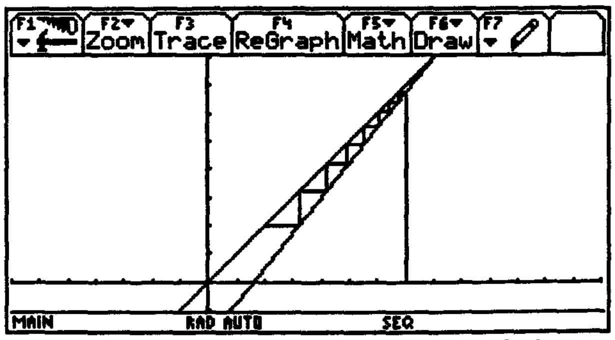
Tippen Sie „`solve(`" über die Tastatur oder wählen Sie den Befehl mit `F2 1`. Tippen Sie dann den Funktionsterm und vervollständigen Sie die Gleichung. Nach der Gleichung erwartet dieser Befehl noch die Variable, nach der die Gleichung gelöst werden soll, hier also x. Schließen Sie die Klammer und drücken Sie `ENTER`.
Sie erhalten beide Lösungen der quadratischen Gleichung als Näherungszahl.



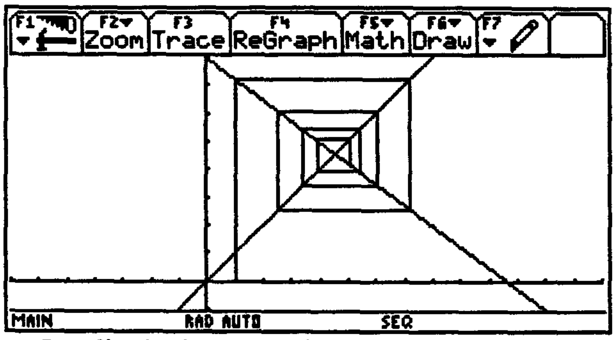
Der uns interessierende Fixpunkt ist in diesem Fall also etwa (0,6774 / 0,6774). (Die Funktionen der Schar f(x) = ax(1 - x) haben für jedes a (0/0) als Fixpunkt, der jedoch vollkommen uninteressant ist, daher werden wir ihn meistens „vergessen".)
Eine ganz wesentliche Eigenschaft für das Iterationsverhalten ist die Steigung des Funktionsgraphen in den jeweiligen Fixpunkten. Auf eine genauere Analyse wollen wir hier verzichten, sondern wir betrachten lediglich die Ergebnisse auf anschauliche Weise:



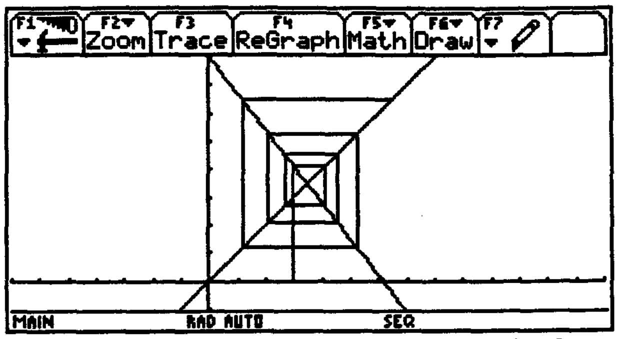
Ist die Steigung zwischen 0 und 1, so läuft der Iterationspfad treppenförmig auf den Fixpunkt zu.



Ist die Steigung größer als 1, so läuft der Iterationspfad treppenförmig vom Fixpunkt weg.



Ist die Steigung zwischen -1 und 0, so läuft der Iterationspfad spiralförmig auf den Fixpunkt zu.



Ist die Steigung kleiner als -1, so läuft der Iterationspfad spiralförmig vom Fixpunkt weg.

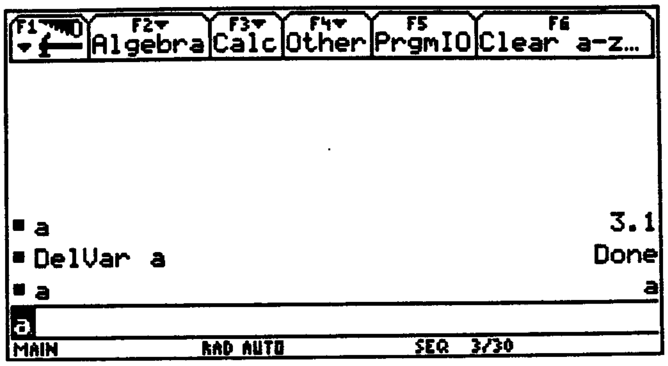
Die Bilder zeigen die Graphen linearer Funktionen, bei denen dieses charakteristische Verhalten „überall" zutrifft, während bei nichtlinearen Funktionen diese Eigenschaft nur in einer Umgebung des Fixpunktes gilt. Ein Fixpunkt, der auf den Iterationspfad anziehend wirkt, bei dem also die Steigung des Funktionsgraphen zwischen -1 und +1 liegt, heißen **Attraktor**, für den abstoßenden Fall **Repeller**.

Kehren wir zur Iteration mit f(x) = ax(1-x) zurück. Aus den vorangehenden Beispielen konnten wir sehen, daß für bestimmte Werte des Parameters a die Iteration gegen einen Wert konvergiert, für a = 3.1 geschah das aber nicht. Während vorher der interessante Fixpunkt attraktiv war und die Iteration gegen diesen konvergierte, gibt es für a = 3.1 offenbar keine attraktiven Fixpunkte mehr. Wie der Parameter a den Verlauf einer Iteration beeinflußt, wird das übergeordnete Thema der folgenden Kapitel sein. Dabei beschränken wir a auf das Intervall von 1 bis 4, außerhalb dieses Bereiches ergeben sich prinzipiell andere Fragestellungen.
Unser erstes Problem lautet:
Für welche Werte des Parameters a hat die Iteration mit f(x) = ax(1-x) wenigstens einen Attraktor?

Der Lösungsweg zerlegt sich in 4 Schritte:
1) Wir bestimmen die x - Koordinaten der Fixpunkte
2) Wir berechnen die erste Ableitung der Funktion f
3) Wir berechnen den Wert der ersten Ableitung an den Fixstellen
4) Wir bestimmen für a das Intervall, bei dem die in 3) berechnete Steigung dem Betrage nach kleiner als 1 ist.

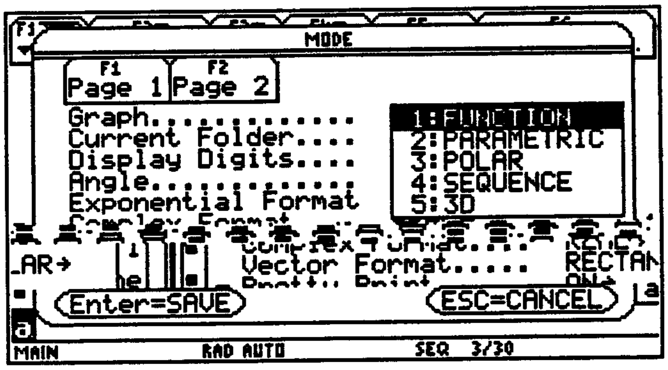
Bevor wir uns jedoch an die Lösung dieser 4 Aufgaben machen können, muß der Rechner (wieder einmal) passend vorbereitet werden:
Zur Zeit hat a noch einen konkreten Wert (3,1). Um in den nachfolgenden Rechnungen als Parameter behandelt zu werden, muß a als Variable gelöscht werden.

Tippen Sie a und ENTER, rechts erscheint der aktuelle Wert von a. Tippen Sie nun „DelVar " oder wählen Sie F4 4. Tippen Sie a, dann ENTER. Die Variable a ist nun gelöscht. Davon können Sie sich überzeugen, wenn Sie noch einmal a tippen und ENTER drücken.



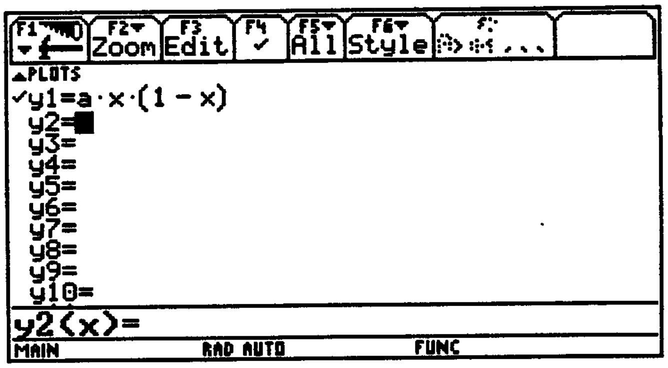
Eine weitere Vorbereitung betrifft die Benutzung von Funktionen. Für die nachfolgenden Schritte wollen wir diese auf die übliche, nicht iterative Weise benutzen, um z.B. Funktionswerte bilden zu können.

Drücken Sie MODE und drücken Sie gleich für den ersten Punkt „Graph" [rechts]. In dem aufklappenden Menü wählen Sie „1: FUNCTION". Drücken Sie ENTER ENTER, um die Auswahl zu bestätigen und das Dialogfenster zu verlassen.



Nun können wir die Funktion im Funktionseditor eingeben. In diesem Funktionsmodus stehen uns die Funktionen y1 bis y99 zur Verfügung, die Funktionen u1 bis u99 aus dem „SEQUENCE"-Modus sind davon vollkommen unabhängig.

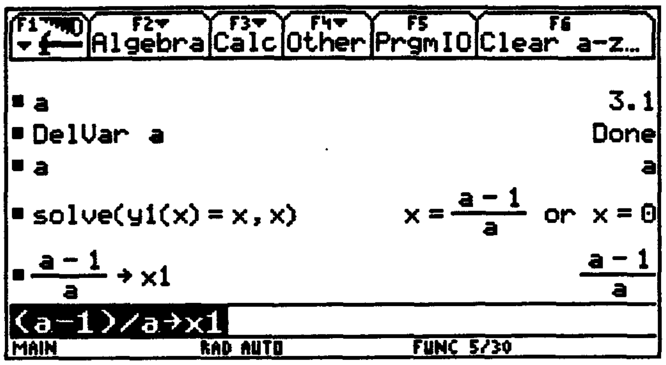
Tippen Sie [KARO]W für „Y=" und geben Sie unter y1 den Funktionsterm „a*x*(1-x)" ein und bestätigen Sie die Eingabe mit ENTER.
Tippen Sie [KARO]Q für „HOME" um zum Arbeitsbildschirm zurückzukehren.



Der Rechner ist nun für unseren Lösungsweg vorbereitet.
Als erstes wollen wir die Fixpunkte ausrechnen, also die Lösungen der Gleichung y1(x) = x.

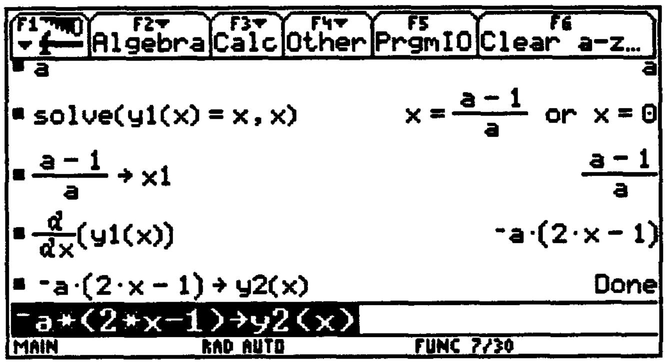
Tippen Sie „`solve(`" über die Tastatur oder wählen Sie den Befehl mit `F2` `1`. Tippen Sie dann „`y1(x)=x,x)`" und drücken Sie `ENTER`. Rechts erscheinen die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung.

Die interessante Lösung $\frac{a-1}{a}$ soll für die weitere Verwendung gespeichert werden. Tippen Sie „`(a-1)/a[STO>]x1`" und drücken Sie `ENTER` für die Eingabe.



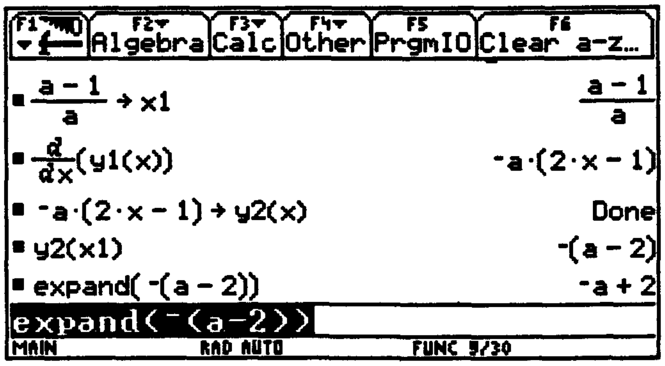
Als nächstes benötigen wir von der Funktion die erste Ableitung, die in y2 gespeichert werden soll.

Drücken Sie `F3` und wählen Sie den Befehl „*d*`(differentiate`". Tippen Sie dann „y1(x),x)" und drücken Sie `ENTER`. Im rechten Teil des Bildschirms wird die erste Ableitung angezeigt. Diese soll nun unter y2 abgespeichert werden.
Löschen Sie mit `CLEAR` die Eingabezeile. Drücken Sie [rauf] und dann `ENTER`, wodurch das letzte Ergebnis in die Eingabezeile kopiert wird. Ergänzen Sie nun „`STO>y2(x)`" und drücken Sie wieder `ENTER`.



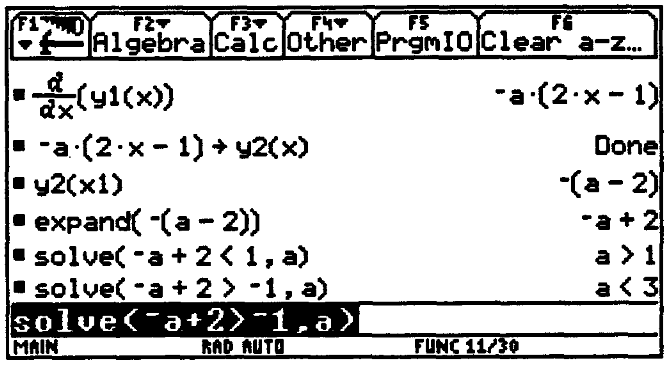
Jetzt berechnen wir die Steigung im Fixpunkt, dessen x-Koordinate in x1 gespeichert ist.

Tippen Sie „`y2(x1)`" und geben Sie es mit `ENTER` ein. Das Ergebnis wird durch das ausgeklammerte Minuszeichen etwas unüblich angezeigt. Löschen Sie mit `CLEAR` die Eingabezeile, drücken Sie `F2` und wählen Sie „`3:expand(`". Nun drücken Sie [rauf] und `ENTER`, um das letzte Ergebnis in die Eingabezeile zu kopieren. Nach `ENTER` erhalten Sie das ausgeklammerte Ergebnis.



Wir haben bisher berechnet, daß der interessante Fixpunkt bei $x = \frac{A-1}{A}$ liegt und dort die Steigung -a + 2 ist. Im letzten Schritt müssen wir nun berechnen, für welche Werte diese zwischen -1 und 1 liegt. Da der Rechner oft mit dem Lösen von Betragsgleichungen überfordert ist, spalten wir das Problem selbst in die beiden Teil - Ungleichungen auf und lösen sie getrennt.

Tippen Sie „`solve(`" über die Tastatur oder wählen Sie den Befehl mit `F2 1`. Tippen Sie dann „`-a+2<1,a)`" und drücken Sie `ENTER`. Rechts erscheint die Lösung a > 1.
Lösen Sie analog die Ungleichung -a+2 > -1, die Lösung ist a < 3.

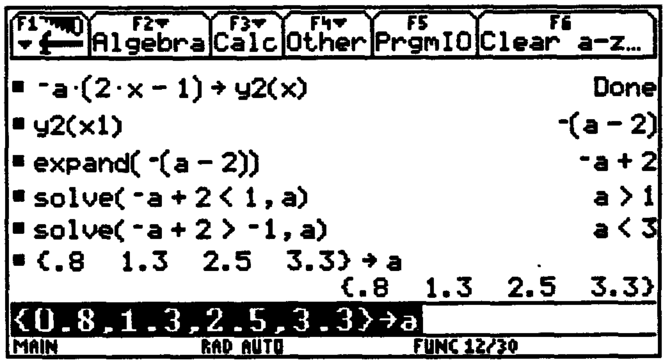


Wir haben also insgesamt gefunden, daß für a zwischen 1 und 3 die Steigung im Fixpunkt zwischen -1 und 1 liegt, der Fixpunkt somit attraktiv ist. Dieses Ergebnis wollen wir uns auch grafisch klar machen, indem wir uns einige Funktionsgraphen aus der Schar f(x) = ax(1-x) anzeigen lassen. Wir werden für a 0,8 , 1,3 , 2,5 und 3,3 wählen.
Für a = 0,8 erhalten wir einen Graph, dessen Fixpunkt nicht die gewünschte Eigenschaft hat, mit a = 1,3 und 2,5 liegen wir im Bereich für einen attraktiven Fixpunkt und a = 3,3 liefert dann wieder einen Graph, bei dem der Fixpunkt kein Attraktor ist. Um mehrere Kurven einer Kurvenschar zu erhalten, muß man dem Scharparameter eine Liste mit den gewünschten Werten zuweisen.

Tippen Sie

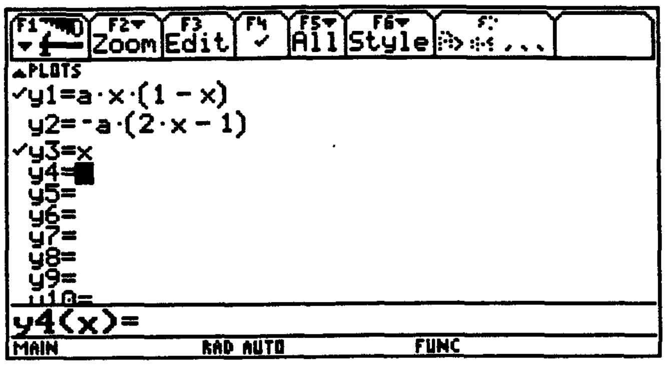
„`{0.8,1.3,2.5,3.3}STO>a`"

und drücken Sie `ENTER`.

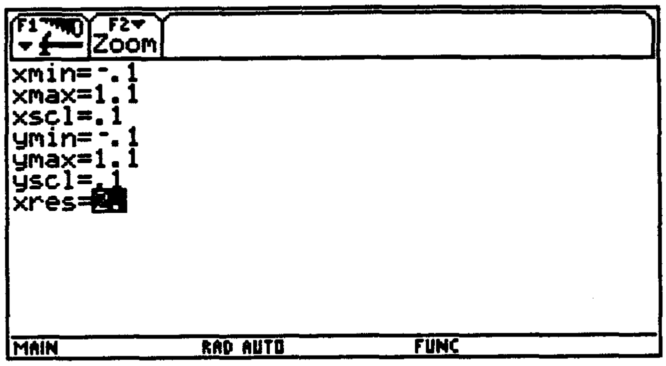


Durch diese Zuweisung ist a keine freie Variable mehr, sondern eine Liste.
Vor dem Anzeigen der Grafik müssen wir zunächst die üblichen Vorbereitungen treffen: Wir müssen sicherstellen, daß die richtigen Funktionen aktiv sind und daß das Fenster passend gewählt ist.

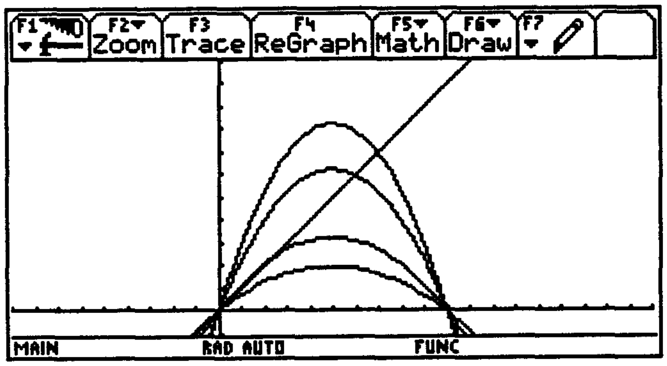
Tippen Sie [KARO]W für „Y=“ und stellen Sie sicher, daß die Funktionen y1 und y3 mit einem Häkchen markiert sind (Taste F4).



Tippen Sie [KARO]E für „WINDOW“ und prüfen Sie, ob die rechts dargestellten Werte eingestellt sind. Gehen Sie ggf. mit [runter] in die entsprechende Zeile und korrigieren Sie den Wert.
Drücken Sie F2 für „Zoom“ und wählen Sie aus dem Menü „5:ZoomSqr“. Drücken Sie ENTER für die Eingabe.



Der Rechner wechselt direkt auf die Grafikseite und zeichnet die vier Funktionen der Schar zusammen mit der Geraden zu y = x.
Der Zeichnung kann man entnehmen, daß die unterste Kurve für a = 0.8 keinen Schnittpunkt mit der Geraden zu y = x im ersten Quadranten hat und die oberste Kurve (a = 3.3) im Schnittpunkt mit der Geraden zu y = x wohl zu steil verläuft.



Aufgabe:
Untersuchen Sie in analoger Weise die Schar $f(x) = x^2 + c$ und finden Sie den Parameterbereich, in dem die Funktionen einen attraktiven Fixpunkt besitzen.

Lösung:
Für Werte c zwischen +0,25 und -0,75 besitzen die Funktionen der Schar $f(x) = x^2 + c$ einen attraktiven Fixpunkt.

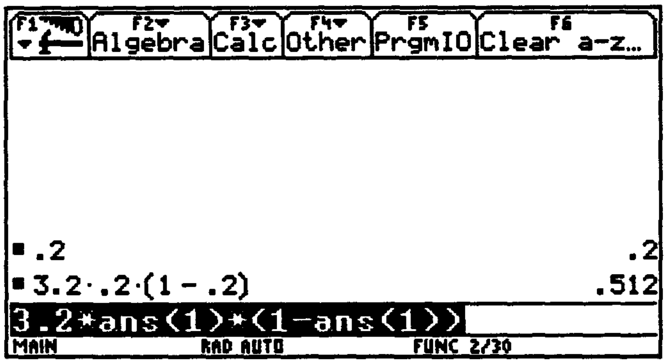
Kapitel 6
Zweierzyklen

Unsere Iterationsuntersuchungen in den vorhergehenden Kapiteln haben gezeigt, daß in der Schar $f(x) = ax(1-x)$ die Funktionen einen attraktiven Fixpunkt besitzen, wenn a Werte von 1 bis 3 annimmt. Für $a > 3$ ist der Fixpunkt im ersten Quadranten nicht mehr attraktiv und die Iteration läuft dann (zunächst) in einen Zweierzyklus.
Im Kapitel 5 finden wir bereits die Begründung dafür, daß der Fixpunkt im ersten Quadranten für $a > 3$ repulsiv ist. Die Steigung der Kurve ist in diesem Punkt $-a + 2$, was für $a > 3$ einen Wert größer als 1 ergibt. Für die weitere Untersuchung bleiben aber noch weitere Fragen:

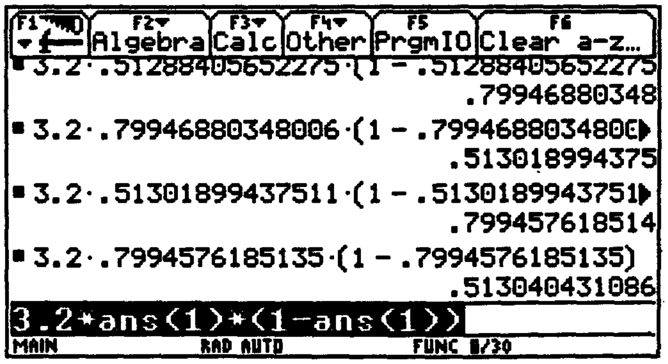
- Warum ergeben sich für Parameterwerte von $a > 3$ Zweierzyklen und nicht andere?
- Ist auch hier das langfristige Verhalten der Iteration im wesentlichen vom Startwert unabhängig, ist also der Zweierzyklus ebenfalls attraktiv und was genau kann diese Eigenschaft heißen?
- In welchen Intervall für a treten diese attraktiven Zweierzyklen auf?

Zur Wiederholung und weil es ohne großen Aufwand möglich ist, iterieren wir zunächst eine Funktion, die in einen Zweierzyklus läuft.

Tippen Sie 0.2 ein und drücken Sie `ENTER`. Geben Sie nun „`3.2*ANS*(1-ANS)`“ ein.



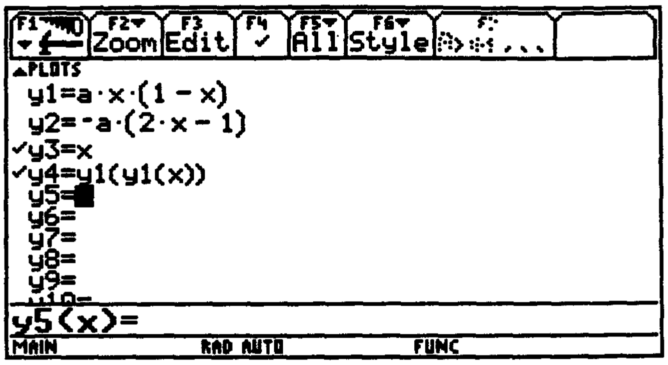
Durch fortlaufendes Drücken von `ENTER` erhalten Sie weitere Werte der Iteration.
Sie sehen sehr schnell den Zweierzyklus, die Iterationswerte pendeln zwischen 0.5130... und 0.7994... .



Wir wollen nun erklären, warum die Iteration in einen Zweierzyklus läuft und was es heißt, daß ein Zweierzyklus attraktiv ist.
Ein Zweierzyklus bedeutet, daß man nach zweimaligen Iterieren wieder denselben Wert erhält. Heißt unsere Grundfunktion f, so suchen wir also die Lösungen der Gleichung $f(f(x)) = x$. Man kann diese Gleichung so interpretieren, daß man zu einer neuen Funktion den Fixpunkt sucht, diese Funktion ist die zweimalige Verkettung von f.
In diesem Zusammenhang wollen wir diese Verkettung $f(f(x))$ die **zweite Iterierte** von f nennen.

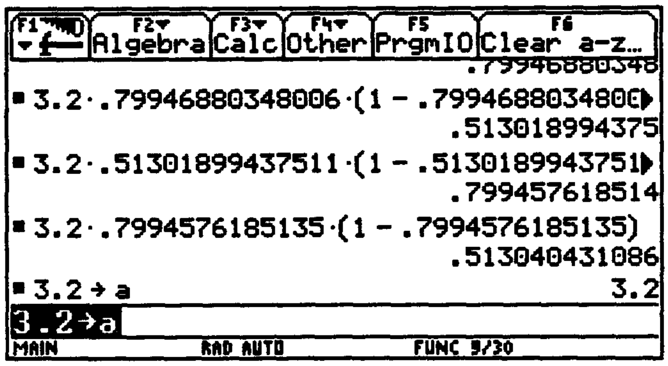
Diese zweite Iterierte von f werden wir nun untersuchen. Dazu geben wir sie zunächst als Funktion im Funktionseditor ein (wenn Sie alle vorherigen Beispiele eingegeben haben, ist y4 die nächste freie Position).

Tippen Sie [KARO]W für „Y=“ und gehen Sie mit dem Cursor nach unten in die Zeile für y4. Tippen Sie „`y1(y1(x))`“ ein (vorausgesetzt, y1 ist als die Grundfunktion definiert). Bestätigen Sie die Eingabe mit `ENTER`. Achten Sie auch darauf, daß die Hilfsachse y = x definiert und aktiviert ist (hier als y3, `F4` setzt das Häkchen)



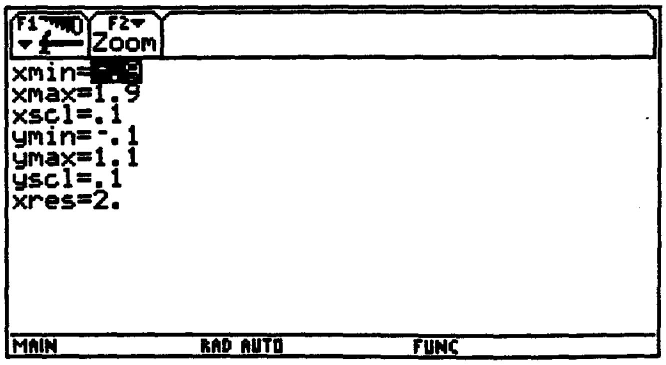
Im ersten Schritt wollen wir den Funktionsgraph der zweiten Iterierten anschauen. Da die Funktion zur Zeit noch mit allgemeinem a definiert ist, müssen wir zunächst a einen Wert geben.

Kehren Sie mit [KARO]Q für „HOME“ auf den Ausgangsbildschirm zurück und geben Sie hier `3.2 STO> a ENTER` ein.

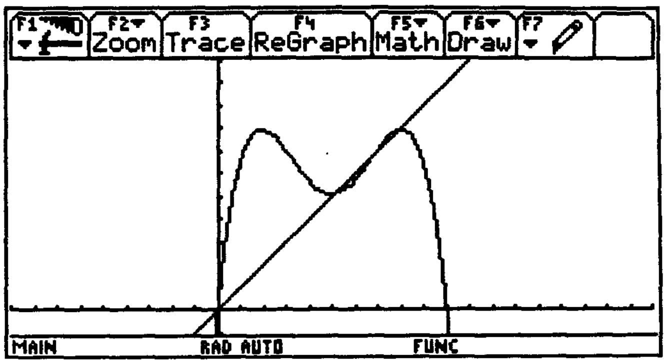


Nun erfolgt der stets notwendige Vorbereitungsschritt, das Koordinatensystem einzurichten.

Tippen Sie [KARO]E für „WINDOW“ und geben Sie die nebenstehenden Werte für das Koordinatensystem ein.

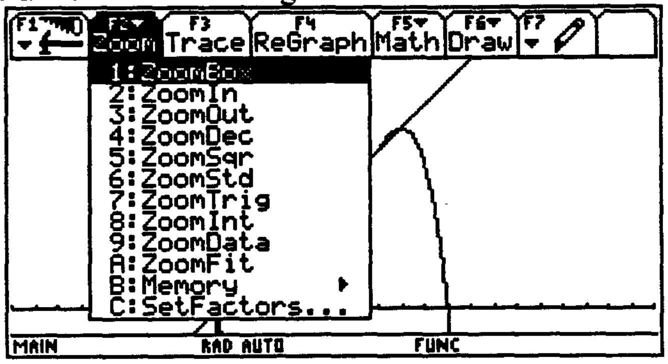


Mit [KARO]R für „GRAPH" wird der Funktionsgraph und die Gerade zu y = x gezeichnet.

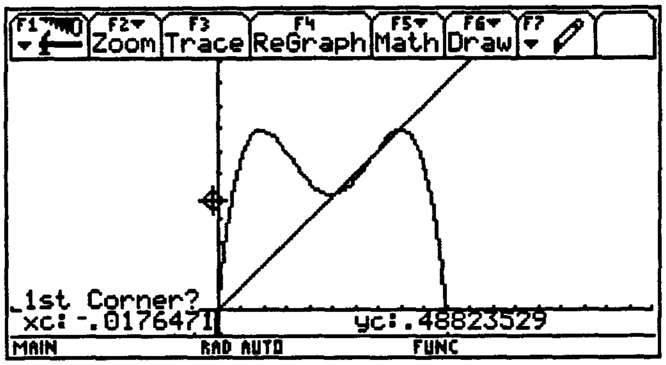


Der uns interessierende Bereich um die Schnittpunkte des Graphen mit der Hilfslinie ist zu klein und daher zu undeutlich. Wir wollen diesen Bereich vergrößert darstellen.

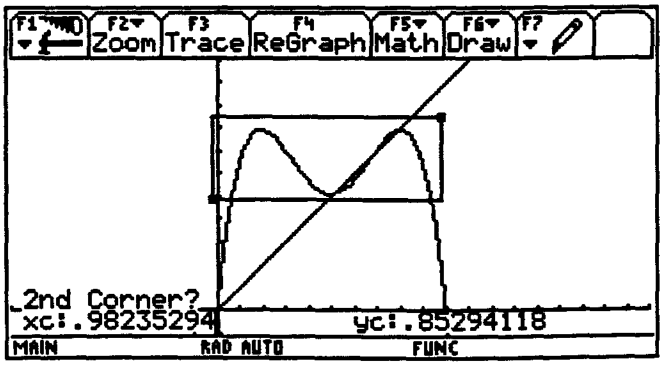
Wählen Sie mit `F2` das Zoom - Menü und hier gleich den ersten Punkt „`1:ZoomBox`", indem Sie einfach `ENTER` drücken.



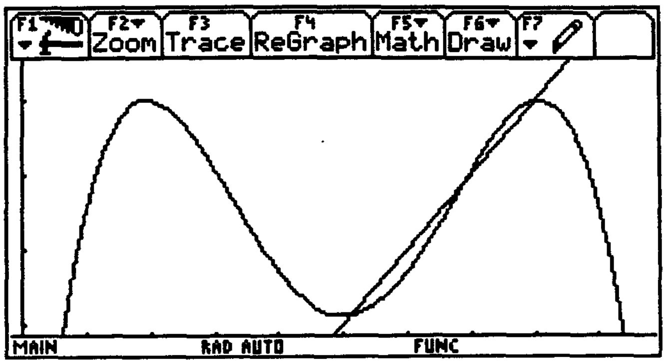
Sie erhalten einen Cursor mit dem Sie einen Rahmen für die Vergrößerung aufziehen können.
Bewegen Sie mit den Cursortasten den Cursor in die gewünschte linke, untere Ecke des gewünschten Rahmens. (Sie sehen die Koordinaten des Cursors im unteren Bereich des Bildes.) Wenn Sie die richtige Lage für die Ecke gefunden haben, drücken Sie `ENTER`.
Tip: In Kombination mit `2nd` bewegen Sie den Cursor um 10 Pixel.



Bewegen Sie nun den Cursor nach rechts oben. Sie sehen, wie Sie einen Rahmen aufziehen. Wenn dieser die gewünschte Größe hat, drücken Sie wieder `ENTER`.



Der Graph wird sofort in dem Ausschnitt vergrößert dargestellt.



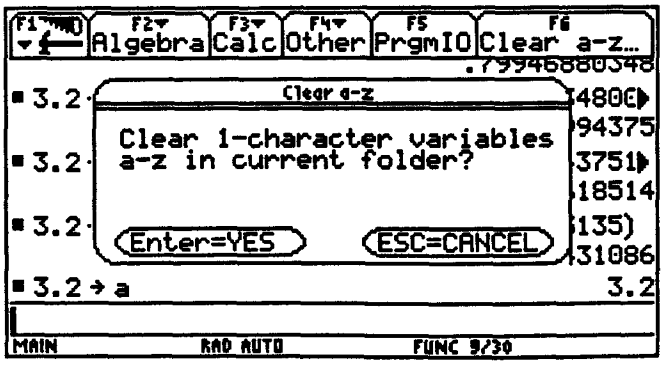
Sie können nun sehr schön sehen, daß die zweite Iterierte für a = 3,2 außer dem uninteressanten Fixpunkt bei x = 0 drei weitere Fixpunkte besitzt, wovon zwei ganz offensichtlich attraktiv sind, während der mittlere repulsiv ist. Die beiden attraktiven Fixpunkte charakterisieren gerade den Zweierzyklus der Grundfunktion, ihre Attraktivität ist genau das, was die Attraktivität des Zweierzyklus ausmacht: Eine Iteration läuft auf einen der beiden Fixpunkte zu, wenn die Iteration „in der Nähe" gestartet wird.

Diese am Beispiel a = 3,2 aufgezeigte Situation wollen wir nun allgemein analytisch untersuchen. Die Untersuchung umfaßt dieselben Punkte wie die des Fixpunktes der Grundfunktion:

1) Wir bestimmen die x - Koordinaten der Fixpunkte
2) Wir berechnen die erste Ableitung der zweiten Iterierten
3) Wir berechnen den Wert der ersten Ableitung an den Fixstellen
4) Wir bestimmen für a das Intervall, bei dem die in 3) berechneten Steigungen dem Betrage nach kleiner als 1 sind.

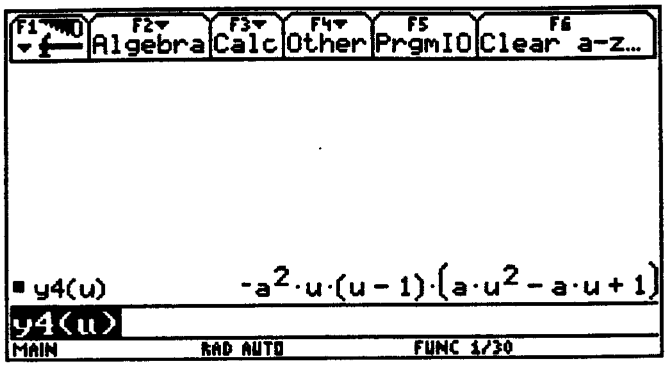
Um die Untersuchung allgemein durchzuführen, müssen wir zunächst dafür sorgen, daß der Parameter a wieder ohne festen Wert ist.

Drücken Sie F6 und bestätigen Sie das Dialogfenster mit ENTER.



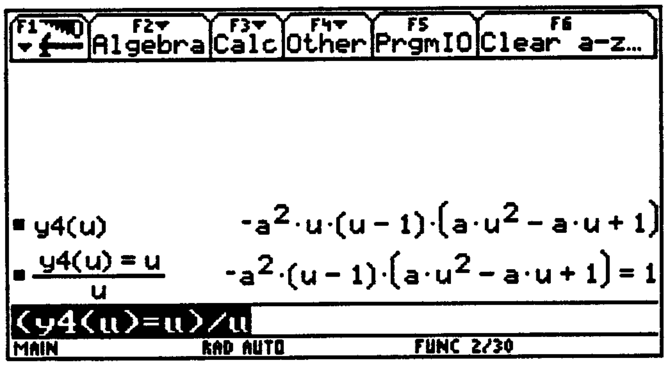
Im ersten Schritt wollen wir die Fixpunkte der zweiten Iterierten berechnen. Aufgrund unserer indirekten Definition von y4 können wir die Rechnung nicht mit der Variablen x durchführen, sondern müssen auf eine andere ausweichen, wir wählen u.

Tippen Sie „y4(u)“ `ENTER`. Der Rechner zeigt den Funktionsterm der zweiten Iterierten.



Wir können schon absehen, daß unsere Gleichung f(f(u))= u zur Bestimmung der Fixpunkte die uns nicht weiter interessierende Lösung u = 0 liefern wird. Also teilen wir die Gleichung durch u.

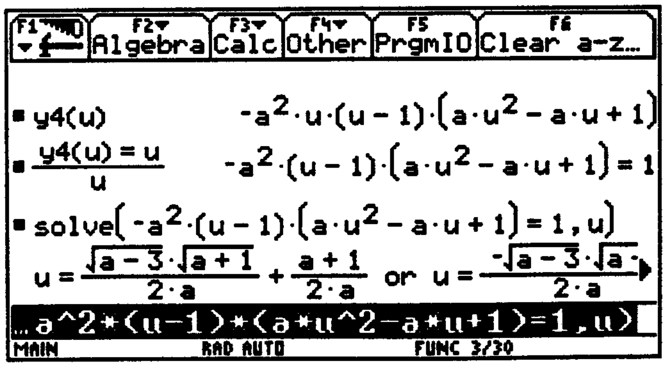
Tippen Sie „`(y4(u)=u)/u`“ `ENTER`. Sie erhalten die gekürzte Gleichung im rechten Bildschirmteil angezeigt.



Die zu lösende Gleichung ist ein Polynom 3. Grades, das vom TI - 92 noch exakt gelöst werden kann.

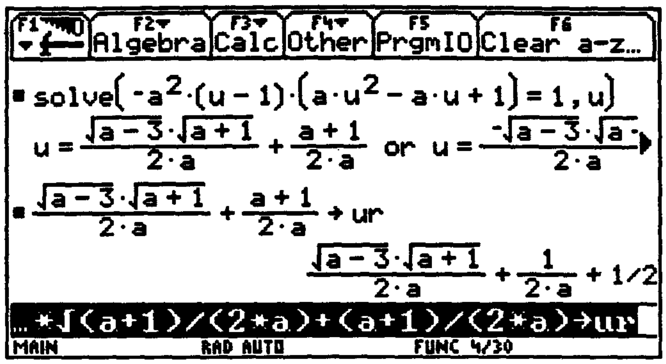
Tippen Sie „`solve(`“ über die Tastatur oder wählen Sie den Befehl mit `F2 1`. Die zu lösende Gleichung müssen Sie nun nicht abtippen, sondern können sie aus der Anzeige kopieren:

Drücken Sie [rauf], wodurch die Gleichung invertiert wird, und dann `ENTER`. Die Gleichung wird hinter „`solve(`“ in die Eingabezeile kopiert. Tippen Sie nun „`,u)`“, um die Variable anzugeben, nach der gelöst werden soll. Starten Sie die Berechnung mit `ENTER`.

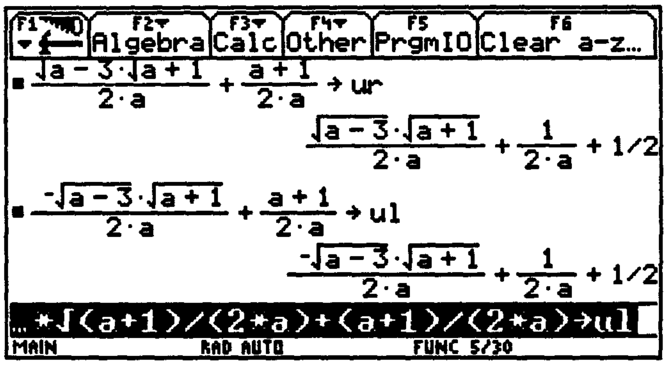


Der Rechner liefert uns nach einer Weile die drei Lösungen in einer Zeile, d.h. in einem Ausdruck. Für die weitere Verarbeitung wollen wir nun eine Lösungen isolieren.

Drücken Sie [rauf], wodurch das Ergebnis markiert wird und drücken Sie ENTER. Das Ergebnis der letzten Rechnung steht nun in der Eingabezeile und kann editiert werden.
Springen Sie mit [2nd] [links] an den Anfang der Eingabezeile. Mit [KARO] <- [KARO] <- löschen Sie die ersten beiden Zeichen, dann gehen Sie mit der Einfügemarke an das Ende der ersten Lösung. Hier drücken Sie CLEAR, wodurch alles rechts der Einfügemarke gelöscht wird. Ergänzen Sie nun STO>„ur", wodurch die erste Lösung der Gleichung in der Variablen ur gespeichert ist.

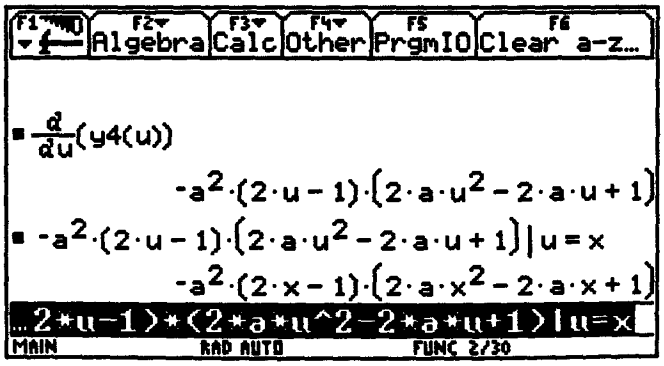


Drücken Sie [rauf][rauf][rauf], wodurch wieder die Lösung der Fixpunktgleichung markiert wird. Kopieren Sie diese mit ENTER wieder in die Eingabezeile.
Isolieren Sie durch entsprechendes Löschen die mittlere Lösung und speichern Sie sie in ul.



Die dritte Lösung der Fixpunktgleichung ist $1-\frac{1}{a}$, was wir im vorhergehenden Kapitel als Fixpunkt der Grundfunktion berechnet haben. Dieser Fixpunkt ist natürlich auch Fixpunkt der zweiten Iterierten, für a > 3 allerdings ein repulsiver Fixpunkt. In der grafischen Darstellung war es gerade der mittlere Fixpunkt. Da wir diese Lösung nicht weiter untersuchen werden, speichern wir sie auch nicht extra ab.
Der zweite Lösungsschritt ist, die Ableitung der zweiten Iterierten zu berechnen und als weitere Funktion zu speichern. Wegen der indirekten Definition der zweiten Iterierten in y4 müssen wir ein paar lehrreiche Tricks einbauen.

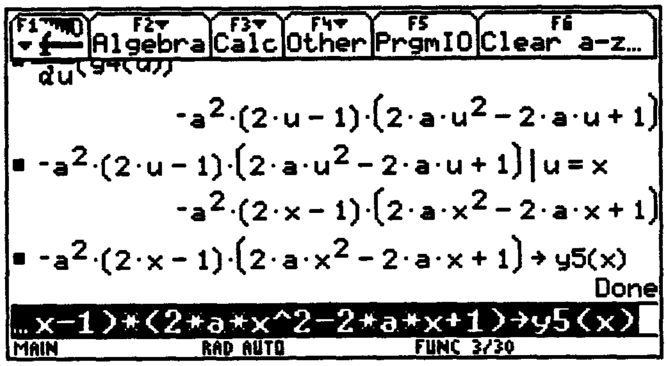
Wählen Sie mit F3 1 den Differentiationsoperator und tippen Sie „y4(u),u)". Mit ENTER erhalten Sie die erste Ableitung in der Variablen u. Für die Definition einer Funktion muß jedoch der Term in der Variablen x geschrieben sein. Dieses Umschreiben erreichen Sie folgendermaßen:



Drücken Sie [rauf] und `ENTER`, wodurch das letzte Ergebnis in die Eingabezeile kopiert wird. Ergänzen Sie `2nd K`„u=x“ und drücken Sie `ENTER`.
(`2nd K` ist der große, senkrechten Strich für eine Bedingung.)

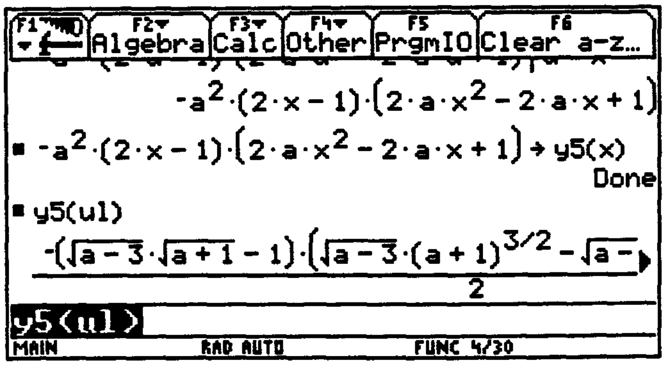
Diesen von u in x umgeschriebenen Funktionsterm können wir nun einer Funktionsvariablen zuweisen.

Drücken Sie [rauf] und `ENTER`, wodurch das letzte Ergebnis wieder in die Eingabezeile kopiert wird. Ergänzen Sie `STO>`„y5“ und drücken Sie `ENTER`, wodurch nun die Funktion y5 die Ableitung der zweiten Iterierten speichert.



Im 3. Schritt wollen wir den Wert der Ableitung an den beiden Fixstellen berechnen, die wir oben für untersuchenswert gehalten haben (Variablen ul und ur).

Tippen Sie „`y5(ul)`“ `ENTER`.

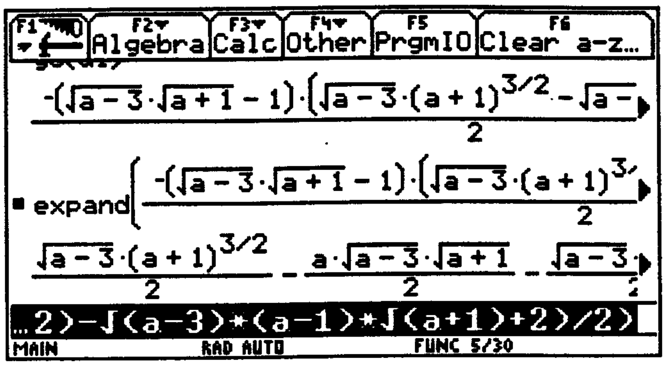


Spätestens an dieser Stelle erkennt man, daß bei komplizierteren Termen der Taschenrechner keine übersichtliche Mitschrift ersetzen kann:

$$y5(ul) = \frac{-(\sqrt{a-3}\sqrt{a+1}-1)\left(\sqrt{a-3}(a+1)^{3/2}-\sqrt{a-3}(a-1)\sqrt{a+1}+2\right)}{2}$$

Weiterhin sieht man, daß man schon etwas Erfahrung, etwas mathematisches Gespür braucht, um in Zusammenarbeit mit dem Rechner in die richtige Richtung weiterarbeiten zu können. Das Auftauchen der gleichen Wurzelterme in den beiden Faktoren des Zählers gibt uns die Hoffnung, daß durch Ausmultiplizieren der Term einfacher wird. Diese Umformung lassen wir natürlich den Rechner machen.

Tippen Sie „expand(“ oder wählen Sie diesen Befehl mit F2 3. Kopieren Sie nun durch [rauf] ENTER das letzte Ergebnis in die Eingabezeile, schließen Sie die Klammer mit „)“ und drücken Sie ENTER.

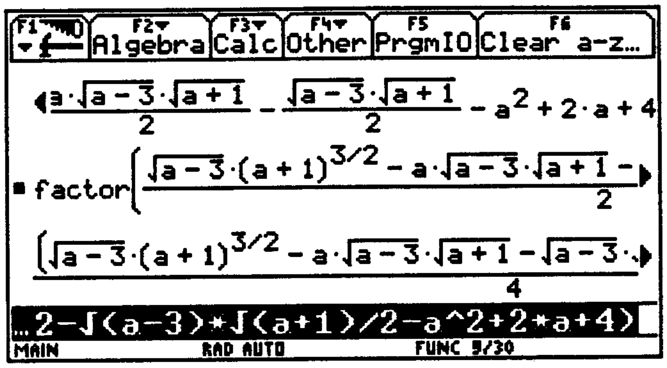


Wieder ist eine übersichtliche Mitschrift notwendig.

$$\frac{\sqrt{a-3}(a+1)^{3/2}}{2}-\frac{a\sqrt{a-3}\sqrt{a+1}}{2}-\frac{\sqrt{a-3}\sqrt{a+1}}{2}-a^2+2a+4$$

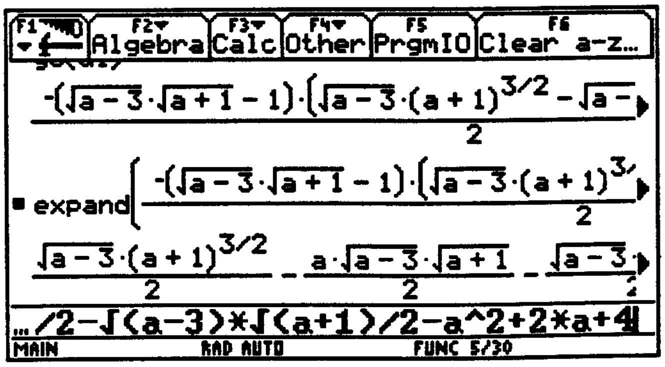
Auch hier sagt uns die Erfahrung, daß sich die vorderen Wurzelterme durch Ausklammern übersichtlicher gestalten lassen.

Tippen Sie „faktor(“ oder wählen Sie diesen Befehl mit F2 2. Kopieren Sie nun durch [rauf] ENTER das letzte Ergebnis in die Eingabezeile, schließen Sie die Klammer mit „)“ und drücken Sie ENTER.



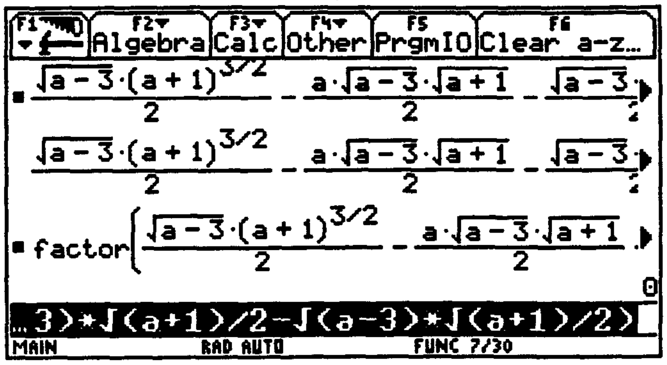
Das Ergebnis enttäuscht uns, ist es doch derselbe Term wie vor dem Ausklammern. Das zeigt aber deutlich, daß wir mit einer Maschine (Programm) arbeiten und daß „expand(“ und „faktor(“ entgegengesetzte Operationen sind.
Auch bei einem Computer - Algebra - System ist das planerische, richtungsgebende Denken des Menschen immer noch gefordert, nur die Ausführung der Schritte können an das CAS delegiert werden.
Konzentrieren wir uns auf die von uns beabsichtigte Umformung: in den ersten drei Summanden soll ausgeklammert werden. Also beschränken wir den umzuformenden Term auch genau darauf!

Drücken Sie [rauf], um die Markierung in das letzte Ergebnis zu bringen und drücken Sie CLEAR. Damit ist der letzte (Fehl-)Versuch gelöscht.
Tippen Sie „faktor(“ oder wählen Sie diesen Befehl mit F2 2. Kopieren Sie nun durch [rauf] ENTER das letzte Ergebnis (der expand-Operation) in die Eingabezeile.



Drücken Sie [rechts], wodurch die Einfügemarke an das Ende der Eingabezeile kommt.

Löschen Sie mit [<-] den hinteren Teil „`-a^2+2*a+4`", schließen Sie die Klammer und drücken nun `ENTER`. Sie müssen schon sehr genau hinsehen, um das (erfreuliche) Ergebnis zu erkennen: 0, d.h. die Wurzelterme heben sich vollständig auf.



Fassen wir das Ergebnis zusammen:

Im linken der beiden uns interessierenden Fixpunkte ist der Wert der Steigung $-a^2 + 2a + 4$.

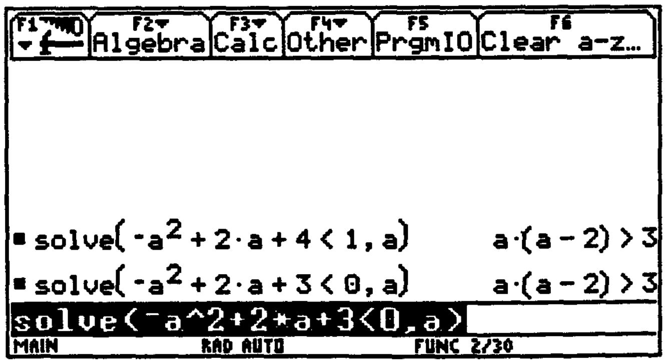
Aufgabe:
Berechnen Sie in analoger Weise y5(ur).

Lösung:
Das Ergebnis stimmt mit y5(ul) überein, ist also $-a^2 + 2a + 4$.

Es bleibt der 4. Schritt unseres Lösungsweges, nämlich für a das Intervall zu bestimmen, in dem die Steigung im fraglichen Fixpunkt dem Betrage nach kleiner als 1 ist.

Wie wir schon im Kapitel 5 gesehen haben, läßt sich die Betragsungleichung $|-a^2 + 2a + 4| < 1$ nicht direkt mit dem Rechner lösen, wir müssen sie in $-1 < -a^2 + 2a + 4 < 1$ umformen und beide Ungleichungen getrennt lösen.

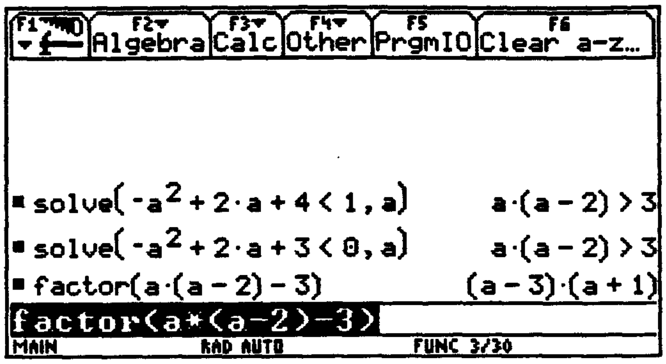
Geben Sie „`solve(-a^2+2*a+4<1,a)`" ein und drücken Sie `ENTER`. Das Ergebnis ist nicht die gewünschte Lösung. Auch ein Versuch mit „`solve(-a^2+2*a+3<0,a)`" führt nicht zum Ziel.



Auch hier ist wieder der Mensch mit mathematischen Kenntnissen gefordert, die Grenzen des Rechners zu umschiffen.

Wir nehmen das vom Rechner gelieferte „Ergebnis" und formen es im Kopf in $a(a-2)-3>0$ um. Diese Ungleichung läßt sich leicht lösen, wenn die linke Seite in Linearfaktoren zerlegt ist.

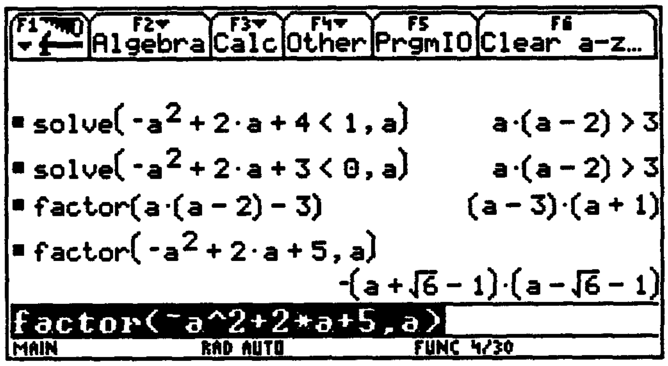
Tippen Sie „`factor(`“ oder wählen Sie diesen Befehl mit `F2 2`. Kopieren Sie nun durch [rauf] `ENTER` das letzte Ergebnis in die Eingabezeile, löschen Sie das „>“ und ersetzen Sie es durch „-“. Schließen Sie die Klammer und drücken Sie `ENTER`.



Das Ergebnis liefert also die Ungleichung (a-3)(a+1) > 0, was auf a > 3 oder a < 1 führt.

Für die zweite Ungleichung sind wir schon etwas klüger und gehen die Sache gleich richtig an. Die Ungleichung $-1 < -a^2 + 2a + 4$ formen wir um in $-a^2 + 2a + 5 > 0$ und lassen uns die linke Seite faktorisieren:

Geben Sie „`factor(-a^2+2*a+5,a)`“ ein und drücken Sie `ENTER`.
Vergessen Sie nicht das „`a)`“ am Ende.



Die Ungleichung $-(a+\sqrt{6}-1)(a-\sqrt{6}-1)>0$ ist erfüllt,wenn einer der Faktoren negativ ist und der andere positiv. Das führt auf:

$[(a+\sqrt{6}-1)>0$ und $(a-\sqrt{6}-1)<0]$ oder $[(a+\sqrt{6}-1)<0$ und $(a-\sqrt{6}-1)>0]$

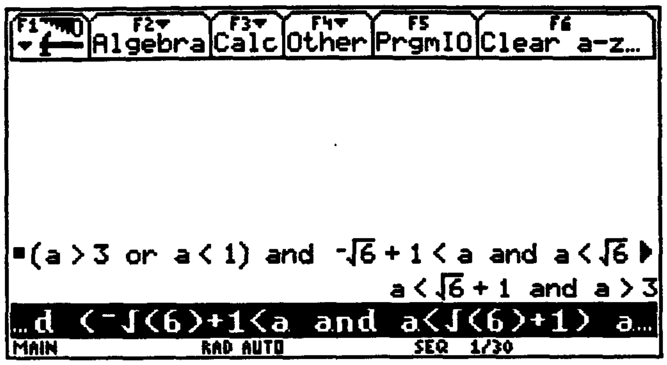
¤ $a > -\sqrt{6}+1$ und $a < \sqrt{6}+1$

Die Ungleichung $|-a^2 + 2a + 4| < 1$ ist also erfüllt im Durchschnitt der beiden Lösungsmengen:

(a > 3 oder a < 1) und ($-\sqrt{6}+1 < a < \sqrt{6}+1$)

Für die endgültige Lösungsmmenge müssen wir noch beachten, daß wir unsere Betrachtungen einschränken auf 1 < a ² 4. Die Schnittmenge aller dieser Bedingungen berechnen wir mit dem Rechner.

Tippen Sie „(a>3 or a<1) and (-√(6)+1<a and a< √(6)+1) and (1<a and a ≤4)“ und geben Sie den Term mit ENTER ein.



Die Lösungsmenge ist also

$3 < a < \sqrt{6} + 1$

> Die Iteration mit $f(x) = ax(1-x)$,$a<1 \leq 4$, besitzt attraktive Zweierzyklen, wenn a Werte zwischen 3 und $\sqrt{6} + 1 = 3{,}4495$ annimmt.

Aufgabe:

Berechnen Sie in analoger Weise für $f(x) = x^2 + c$ den Parameterbereich, in dem attraktive Zweierzyklen auftreten.

Lösung:

Die zweite Iterierte lautet: $g(x) = x^4 + 2cx^2 + c^2 + c$

Die Fixpunkte der zweiten Iterierten sind:

$$x_1 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{-(4c+3)} + 1\right) \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{-(4c+3)} - 1\right)$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-4c} + 1\right) \quad x_4 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-4c} - 1\right)$$

Dabei sind x_1 und x_2 die interessanten (da neuen) Fixpunkte der zweiten Iterierten.

Die erste Ableitung ist : $g'(x) = 4x^3 + 4cx$

Die erste Ableitung hat bei x_1 den Wert $4c + 4$.

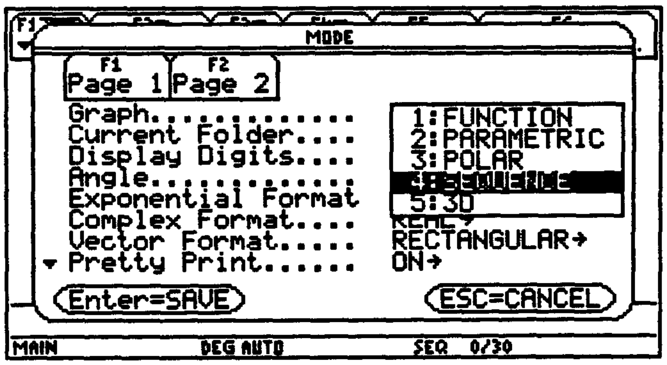
Die Fixpunkte bei x_1 und x_2 sind attraktiv, wenn c zwischen $-\frac{5}{4}$ und $-\frac{3}{4}$ liegt.

Kapitel 7
Höhere Iterierte und Zyklen

a) Viererzyklen

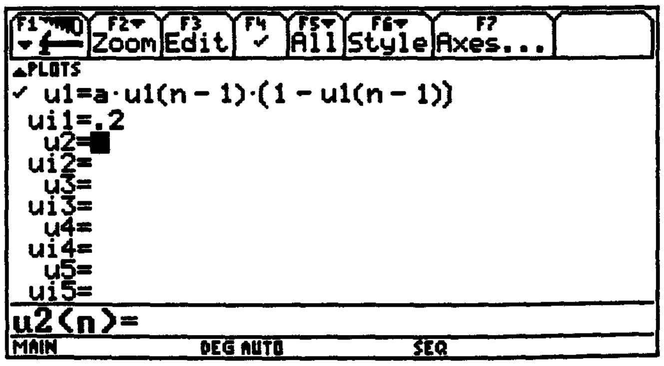
Bevor wir weitergehen bzw. falls Sie hier in dieses Kapitel „hineinspringen“, fassen wir die in den vorhergehenden Kapiteln gewonnen Erkenntnisse noch einmal zusammen:
Die Funktionen der Schar f(x) = ax(1 - x) , 1 < a ² 4 , besitzen außer (0/0) einen Fixpunkt bei $x = \frac{a-1}{a}$. Die Steigung der Tangente in dem entsprechenden Punkt ist -a + 2. Daraus folgt, daß für a zwischen 1 und 3 dieser Fixpunkt attraktiv ist, für a zwischen 3 und 4 ist dieser Fixpunkt repulsiv. Untersucht man die zweite Iterierte f(f(x)) um Aussagen über Zweierzyklen zu bekommen, findet man: f(f(x)) besitzt neben den beiden Fixpunkten der Grundfunktion für a > 3 zwei weitere Fixpunkte, die attraktiv sind, wenn a zwischen 3 und $1 + \sqrt{6} = 3{,}4495$ liegt.
Nun haben wir also den Parameterbereich von a = 1 bis $a = 1+\sqrt{6}$ erforscht, der Bereich von $1+\sqrt{6}$ bis 4 ist noch ungeklärt.
Letzteren Bereich wollen wir in diesem Kapitel etwas näher untersuchen.
Die erste, naheliegende Frage ist, wie die Iteration verläuft, wenn der Parameter a ein wenig oberhalb des bisher erforschten Bereiches liegt, sagen wir für a = 3,5. Wir wollen uns den Iterationsverlauf als Zeitreihe grafisch anschauen, die erste 50 Iterationsschritte sollten uns Klarheit verschaffen.
Zunächst müssen wir den Rechner in den richtigen Modus schalten.

Drücken Sie MODE. Der Cursor steht hinter „Graph“, hier klappen Sie mit [rechts] ein Menü heraus, aus dem Sie „4:SEQUENCE“ wählen. Drücken Sie ENTER ENTER, um die Einstellung zu speichern und das Dialogfenster zu verlassen.



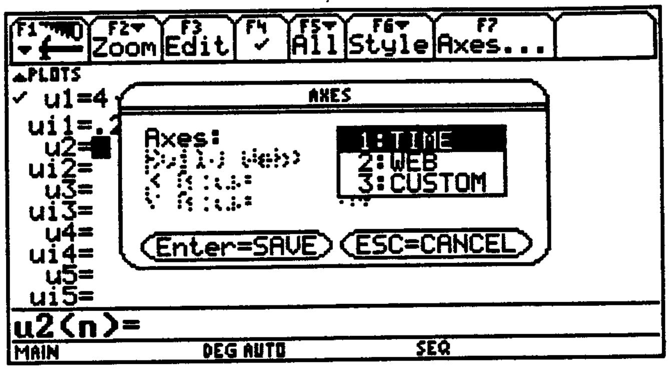
Nun muß der Funktionsterm für die Grundfunktion eingegeben werden. Wenn Sie die Übungen der vorangegangenen Kapitel bearbeitet haben, ist dieser sicher noch gespeichert, kontrollieren Sie dann zumindest den Term.

Drücken Sie [KARO]W für „Y=“ und geben Sie für die Funktion u1 den nebenstehenden Term ein.



Nun müssen wir sicherstellen, daß die Darstellung auch als Zeitreihe geschieht und nicht als Iterationspfad.

Drücken Sie F7 und [rechts], um für den ersten Punkt „Axes:“ ein Menü herauszuklappen. Wählen Sie „1:TIME“ und drücken Sie ENTER ENTER, um die Einstellung zu speichern und das Dialogfenster zu verlassen.

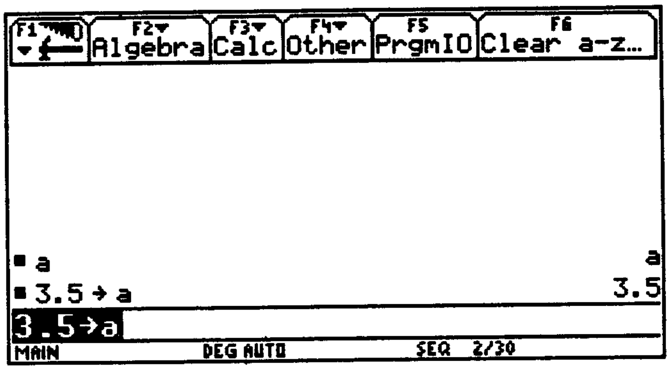


Die Funktion u1 wurde mit dem (unbestimmten) Parameter a definiert, der für die folgende Iteration den konkreten Wert 3,5 haben soll. Das kontrollieren wir und korrigieren es gegebenenfalls.

Drücken Sie [KARO]Q für „HOME“ und tippen Sie „a“ ENTER, um den aktuellen Wert von a abzufragen.

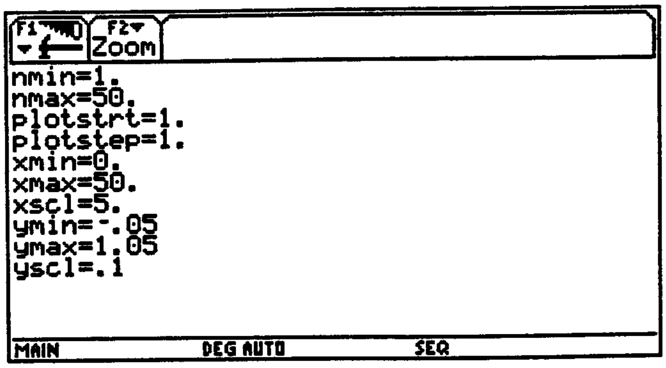
Im nebenstehenden Bildschirm ist a undefiniert. Daher müssen Sie a den Wert 3,5 zuweisen.

Tippen Sie 3.5 STO> a ENTER

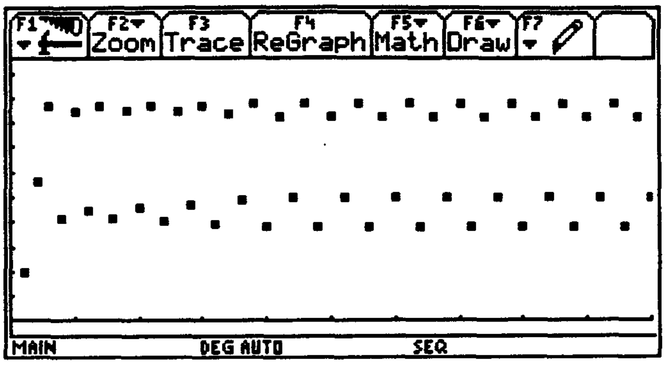


Als letzter Schritt vor der grafischen Darstellung muß wieder das Koordinatensystem passend eingerichtet werden.

Tippen Sie [KARO]E für „WINDOW“ und geben Sie die nebenstehenden Werte für das Koordinatensystem ein.



Mit [KARO]R für „GRAPH“ wird der Iterationsverlauf als Zeitreihe dargestellt.

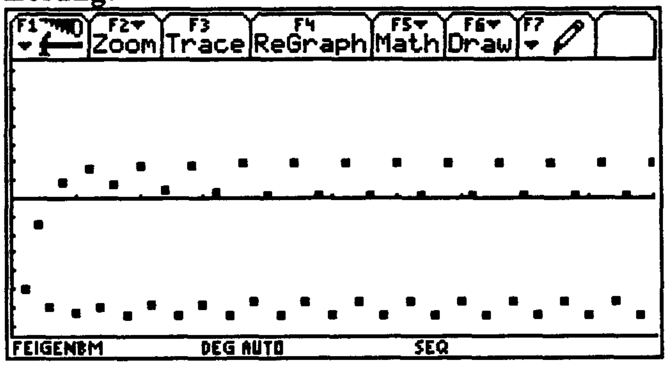


Die Punkte der grafischen Darstellung zeigen sehr schön, daß für a = 3,5 ein Viererzyklus vorliegt.

Aufgabe:

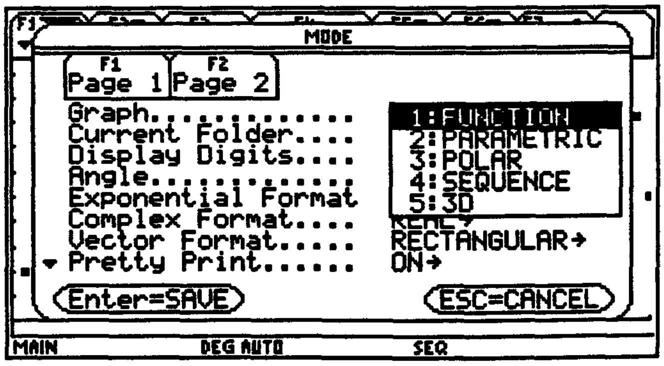
Für die Funktionenschar $f(x) = x^2 + c$ wissen wir, daß für $-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4}$ attraktive Zweierzyklen vorliegen. Untersuchen Sie daher einen Wert c, der leicht unter $-\frac{5}{4}$ liegt, zum Beispiel -1,3. Stellen Sie dafür die Zeitreihe für die ersten 50 Werte dar. (Wählen Sie für ymin -1,5 und für ymax +1,5)

Lösung:



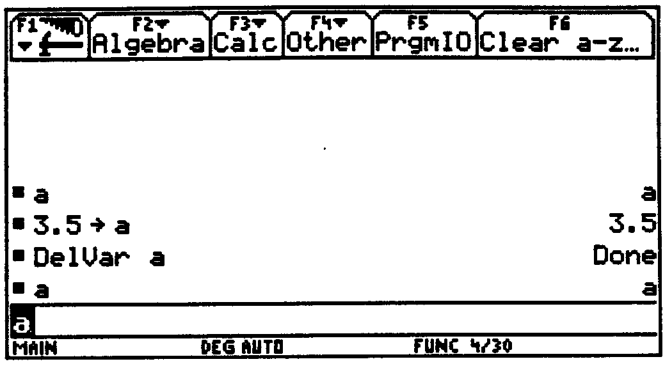
Da wir für a = 3,5 einen Viererzyklus erhalten haben, ist der nächste Schritt, die vierte Iterierte der Grundfunktion näher zu untersuchen. Dazu wollen wir uns zunächst den Funktionsgraph anschauen.
Der Rechner muß also wieder in den normalen Funktionsmodus umgestellt werden.

Drücken Sie `MODE`. Der Cursor steht hinter „Graph“, hier klappen Sie mit [rechts] ein Menü heraus, aus dem Sie „`1:FUNCTION`“ wählen. Drücken Sie `ENTER ENTER`, um die Einstellung zu speichern und das Dialogfenster zu verlassen.



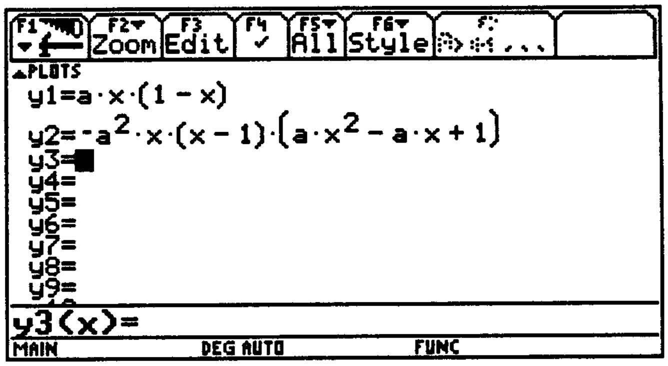
Im nächsten Schritt berechnen wir den Funktionsterm der vierten Iterierten und weisen ihn einer Funktion zu. Alle notwendigen Berechnungen sollen mit allgemeinem Parameter a geschehen. Da a zuletzt den Wert 3,5 zugewiesen bekommen hatte, müssen wir a wieder „verallgemeinern“.

Tippen Sie „DelVar “ oder wählen Sie F4 4. Tippen Sie „a“, dann ENTER. Die Variable a ist nun gelöscht. Zur Kontrolle tippen Sie „a“ ENTER, das „Ergebnis“ „a“ am rechten Rand zeigt Ihnen, daß a tatsächlich keinen konkreten, numerischen Wert mehr hat.



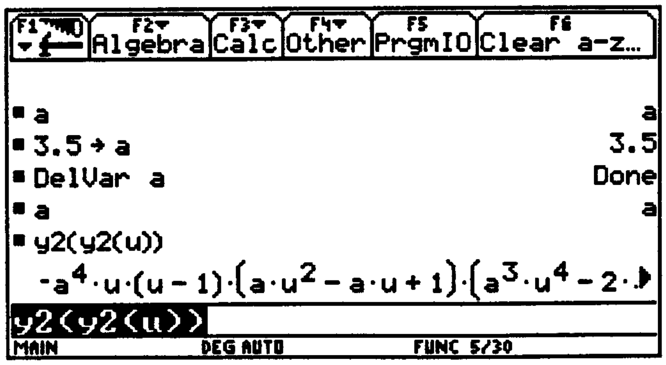
Im Kapitel 6 haben wir die Grundfunktion und weitere Funktionen definiert, dabei haben wir aber auch gesehen, daß die indirekte Definition der zweiten Iterierten durch y1(y1(x)) seine Nachteile hatte. Daher bauen wir unsere Funktionen neu auf und vermeiden die indirekte Definition von Funktionen.

Tippen Sie [KARO]W für „Y=“ und gehen Sie mit dem Cursor in jeder Zeile unmittelbar hinter das „=“ - Zeichen. Drücken Sie CLEAR, um den jeweiligen Term zu löschen. Tippen Sie dann unter y1 den rechts angegebenen Term ein (falls er nicht schon dort steht) und unter y2 den rechts angegebenen Term der zweiten Iterierten.



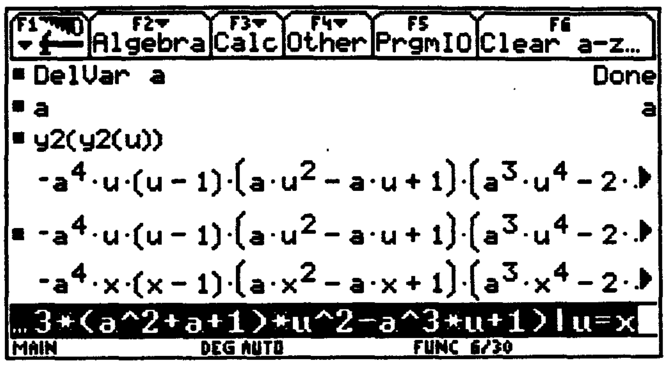
Der Term für die vierte Iterierte ist sehr umfangreich, wir erstellen ihn mit Hilfe des Rechners.

Drücken Sie [KARO]Q für „HOME“ und geben Sie „y2(y2(u))“ mit ENTER ein. Das Ergebnis ist der Funktionsterm für die vierte Iterierte, allerdings formuliert mit der Variablen u.



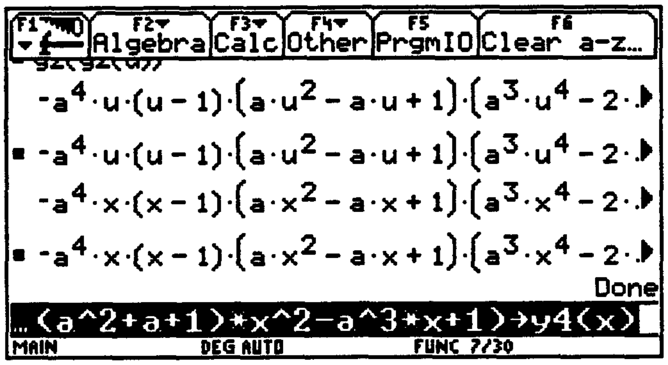
In diesem Ausdruck soll nun u durch x ersetzt werden.

Drücken Sie [rauf], um das letzte Ergebnis zu markieren und drücken Sie dann ENTER. Damit wird der markierte Term in die Eingabezeile kopiert. Bringen Sie mit [rechts] die Einfügemarke an das Ende des Ausdrucks und fügen Sie „|u=x“ an. (Der senkrechte Strich für Einschränkungen ist 2nd K.) Drücken Sie ENTER.



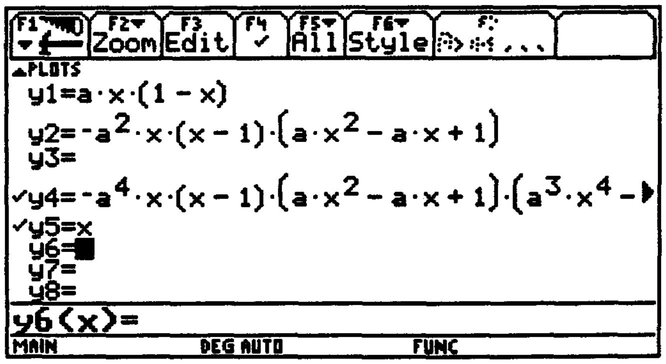
Bei diesen sehr langen Zeilen beginnen die Eingabezeile und die Ergebniszeile am linken Rand, eine Eingabezeile ist dann nur durch das kleine Quadrat am linken Rand erkennbar.
Diesen in „x“ formulierten Term wollen wir der Funktion y4 zuweisen.

Drücken Sie [rauf], um das letzte Ergebnis zu markieren und drücken Sie ENTER. Damit wird der markierte Term in die Eingabezeile kopiert. Bringen Sie mit [rechts] die Einfügemarke an das Ende des Ausdrucks und fügen Sie STO> „y4(x)“ an. Drücken Sie ENTER.



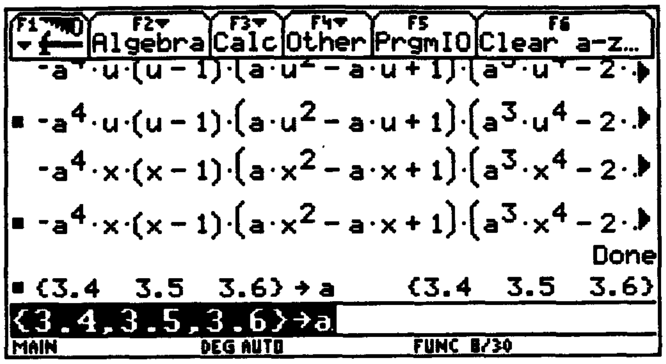
Nachdem die vierte Iterierte als y4 definiert ist, müssen wir noch weitere Setzungen für die Funktionen vornehmen. So brauchen wir für die grafische Darstellung die Gerade zu y = x.

Tippen Sie [KARO]W für „Y=“. Sie sehen die Liste der definierten Funktionen einschließlich der im Ausgangsbildschirm definierten Funktion y4.
Bewegen Sie den Cursor in die Zeile für y5 und geben Sie „x“ ein.
Setzen bzw. entfernen Sie mit F4 die Marken am linken Rand, so daß nur y4 und y5 aktiv sind.



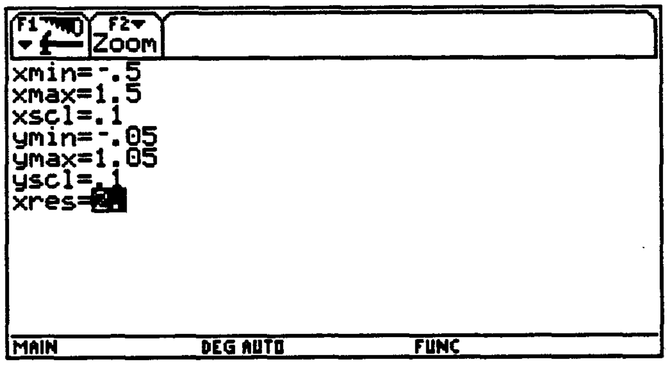
Für die Ermittlung des Funktionsterms für die vierte Iterierte haben wir a gelöscht, um mit allgemeinem a den Term aufzubauen. Für eine grafische Darstellung brauchen wir natürlich einen konkreten Wert für a. Für weitere Untersuchungen lassen wir uns gleich drei Graphen aus der Funktionenschar anzeigen. Der Rechner bietet dazu eine komfortable Möglichkeit, indem wir dem Parameter eine Liste mit dem gewünschten Werten zuweisen. Wir wollen uns die Graphen der vierten Iterierten für 3,4 , 3,5 und 3,6 ansehen, wobei mit 3,4 bewußt ein Wert gewählt wird, bei dem die Iteration noch in einen attraktiven Zweierzyklus läuft.

Tippen Sie [KARO]Q für „HOME“ um zum Ausgangsbildschirm zurückzukehren.
Geben Sie „{3.4,3.5,3.6}STO>a“ ein.
(Die geschweiften Klammern sind oberhalb der runden Klammern (mit 2nd).)



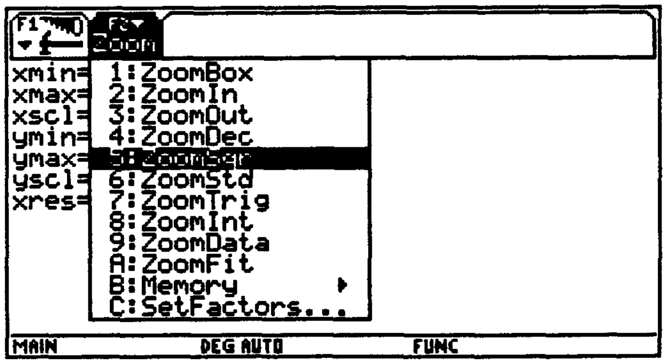
Wie vor jeder grafischen Darstellung müssen wir noch das Koordinatensystem einrichten.

Tippen Sie [KARO]E für „WINDOW“ und geben Sie die rechts dargestellten Werte ein.

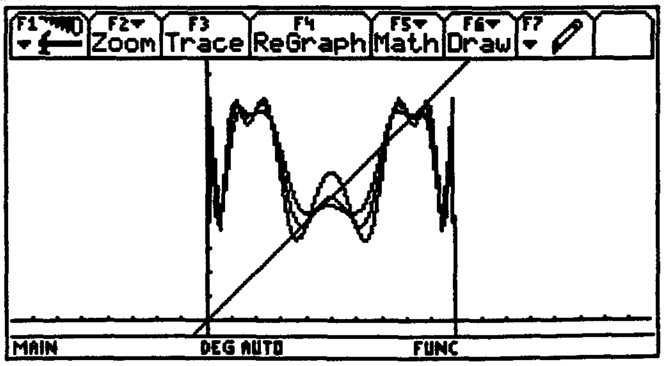


Für die Darstellung ist es besonders günstig, wenn die Achsen denselben Maßstab haben.

Drücken Sie F2 für „Zoom“ und wählen Sie von dem Menü „5:ZoomSqr“. Drücken Sie ENTER für die Eingabe.

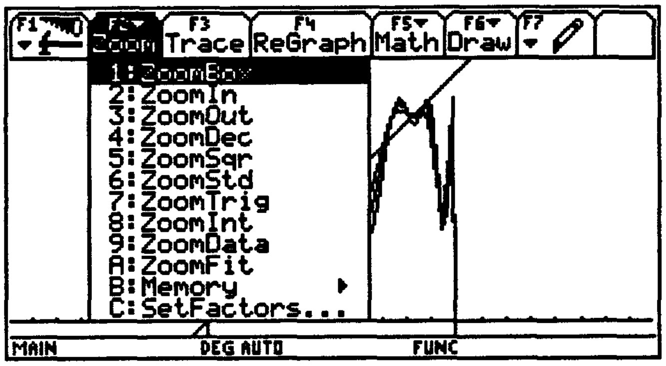


Nach der letzten Eingabe wird automatisch auf das Grafikfenster umgeschaltet und der Graph der gewählten Funktionen dargestellt.
Der Komfort der bequemen Eingabe wird allerdings mit einer langen Wartezeit bezahlt, denn es dauert immerhin ca. 8 Minuten, bis das Bild vollständig dargestellt ist.

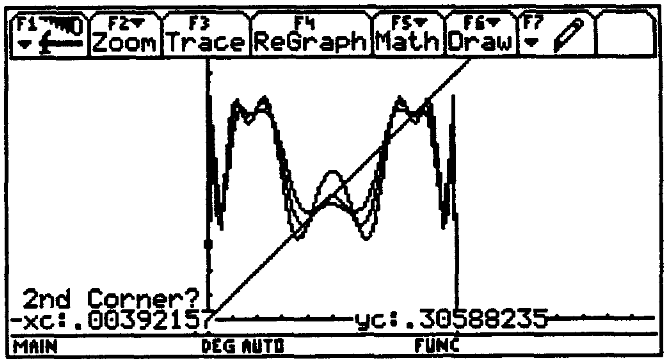


Man kann bereits an dieser Darstellung sehen, daß für a = 3,6 (der Graph mit der stärksten Wölbung im Zentrum) die Fixpunkte nicht mehr attraktiv sind, hier erhalten wir also keinen attraktiven Viererzyklus mehr.
Weiterhin ist die Darstellung der Graphen zu unübersichtlich, wir müssen den interessanten Teil vergrößern. Das machen wir mit der komfortablen „Zoombox“.

Drücken Sie F2 und wählen Sie aus dem Menü „1:ZOOMBOX“

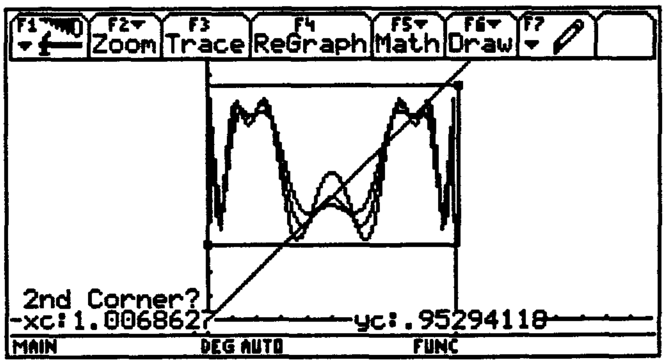


Sie sehen nun den Cursor, den Sie mit der runden Cursortaste in alle Richtungen bewegen können. Zunächst sollen Sie einen ersten Punkt des Rahmens festlegen, der Kommentar am linken, unteren Bildrand erinnert Sie daran.
Bringen Sie den Cursor etwa auf den Punkt (-0,04/0,3) und drücken Sie dann ENTER.

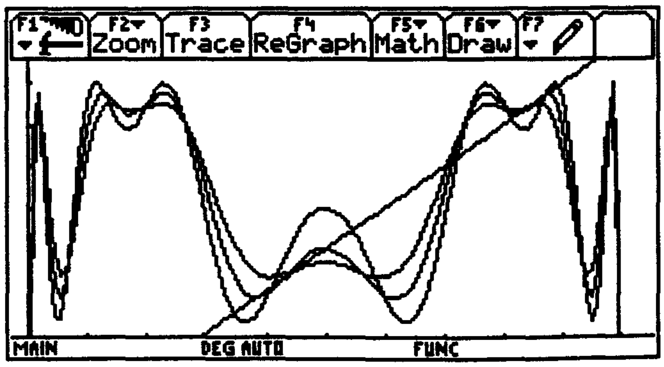


Bewegen Sie nun den Cursor nach rechts und nach oben. Sie sehen, daß ein Rahmen gezeichnet wird. Dieser legt den Bildbereich fest, der dann vergrößert dargestellt werden soll.

Bewegen Sie den Cursor etwa an den Punkt (1/0,95) und drücken Sie ENTER.



In dem durch den Rahmen gewählten Fenster werden nun die drei Funktionsgraphen dargestellt.

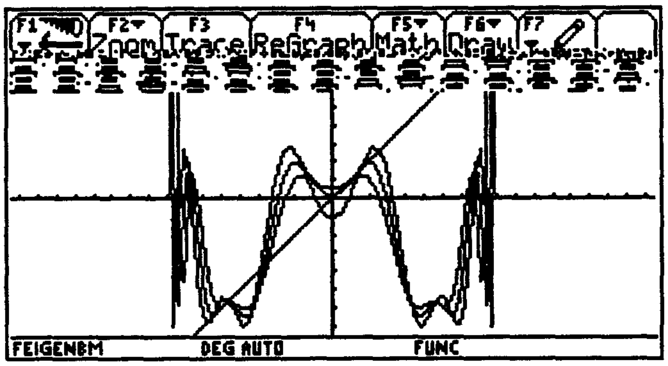


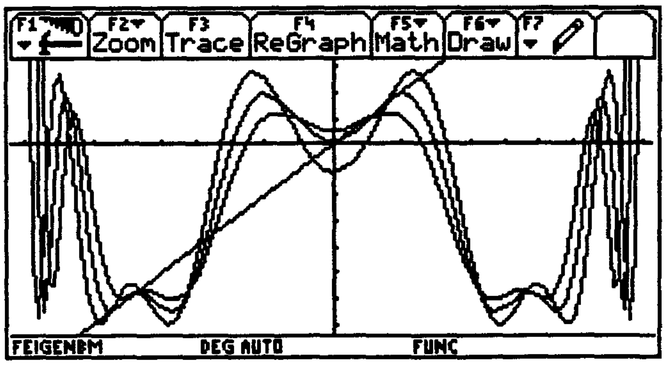
In dieser Darstellung können wir im Zentrum die drei Graphen gut unterscheiden. Für a = 3,6 erhalten wir abstoßende Fixpunkte (Achtung, die Achsen sind nun nicht mehr gleichmäßig eingeteilt, daher erscheinen in dieser Darstellung die Steigungen flacher als sie tatsächlich sind.) Der mittlere Graph (a = 3,5) besitzt im Zentrum zwei attraktive Fixpunkte, zwei weitere befinden sich rechts oben, diese sind aber nur schwer zu erkennen, hier wäre eine weitere Vergrößerung notwendig.
Für den Graph zu a = 3,4 (der mit den flachsten „Wellen") kann man erkennen, daß die Gerade zu y = x außer im Ursprung nur noch zweimal gekreuzt wird. Das ist ein Zeichen dafür, daß keine echten Viererzyklen existieren (sondern nur Zweierzyklen, die, zweimal durchlaufen, auch einen Viererzyklus ergeben).

An den Parameterbereich für die attraktiven Zweierzyklen ($3 < a < 1 + \sqrt{6}$) schließt sich also der Bereich für die attraktiven Viererzyklen an, der nach oben eine Grenze besitzt, die zwischen 3,5 und 3,6 liegt. Eine exakte Berechnung dieser Grenze, so wie sie im Kapitel 6 für die Zweierzyklen geschah, ist für die Viererzyklen nicht möglich, da die vierte Iterierte ein Polynom 16. Grades ist und daher exakte Lösungen nicht mehr gefunden werden können. Natürlich kann man die Lösungen numerisch bestimmen, wozu der TI - 92 ein hervorragendes Werkzeug ist, diesen Teil lassen wir aber aus, um den Umfang dieser Darstellung in Grenzen zu halten.

Aufgabe:
Bestimmen Sie für die Funktionenschar $f(x) = x^2 + c$ die vierte Iterierte und zeichnen Sie die Graphen für c = -1,2 , 1,3 und 1,4.
Wählen Sie x von -1,5 bis +1,5, y ebenfalls von -1,5 bis +1,5, dann gleiche Achseneinteilung
Vergrößern Sie einen interessanten Ausschnitt.

Lösung:



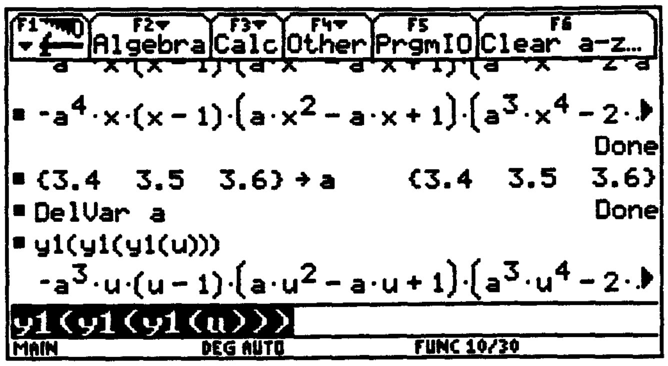


b) Dreierzyklen

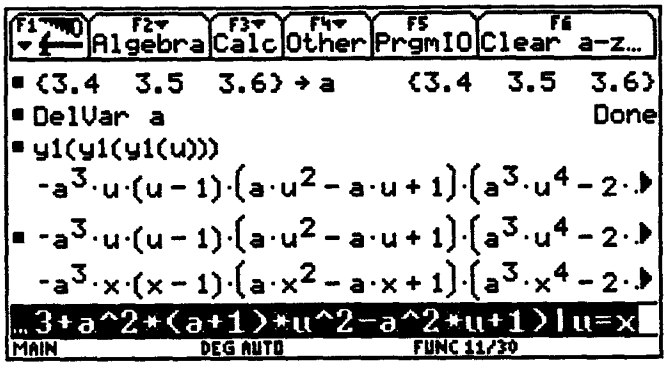
Wenn sich an den Parameterbereich für die attraktiven Zweierzyklen unmittelbar die Viererzyklen anschließen, ergibt sich die Frage, ob und in welchem Bereich bei dieser Iteration attraktive Dreierzyklen auftauchen. Um diese Frage zu untersuchen, schauen wir uns nun die dritte Iterierte genauer an. Dabei wiederholen wir viele Schritte, die wir bei der Untersuchung der Viererzyklen schon durchgeführt haben.

Zuerst müssen wir den Funktionsterm für die dritte Iterierte aufstellen und der Funktion y3 zuordnen.

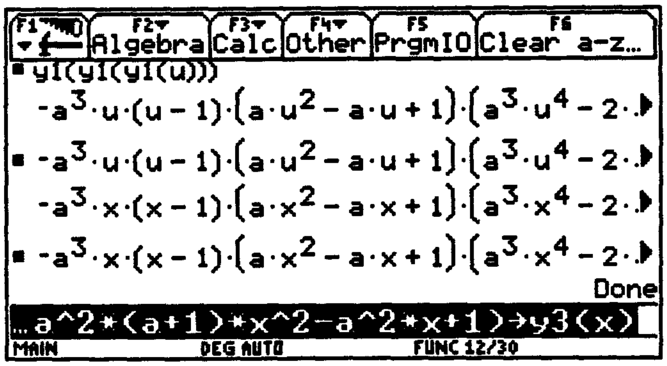
Löschen Sie im Ausgangsbildschirm die Variable a mit „DelVar a“ (F4 4).
Geben Sie dann „y1(y1(y1(u)))“ ENTER ein.



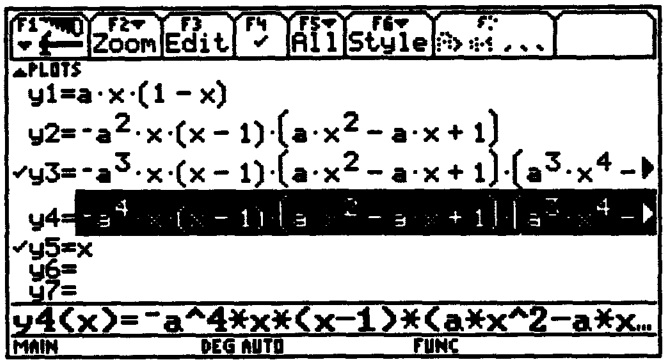
Drücken Sie [rauf], um das letzte Ergebnis zu markieren und drücken Sie dann ENTER. Damit wird der markierte Term in die Eingabezeile kopiert. Bringen Sie mit [rechts] die Einfügemarke an das Ende des Ausdrucks und fügen Sie „|u=x“ an. Drücken Sie ENTER.



Drücken Sie [rauf], um das letzte Ergebnis zu markieren und drücken Sie ENTER. Bringen Sie mit [rechts] die Einfügemarke an das Ende des Ausdrucks und fügen Sie STO> „y3(x)“ an. Drücken Sie ENTER.

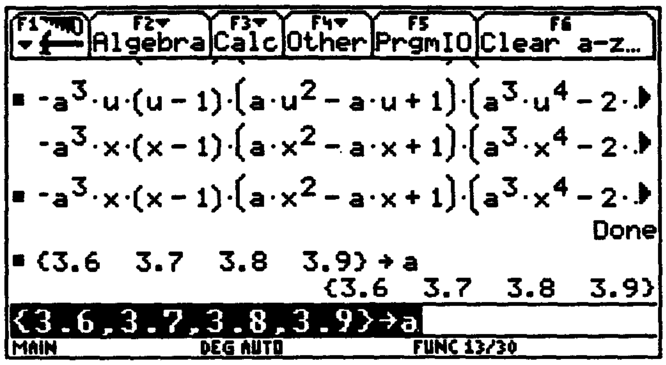


Tippen Sie [KARO]W für „Y=“.
Setzen bzw. entfernen Sie mit F4 die Marken am linken Rand, so daß nur y3 und y5 aktiv sind.

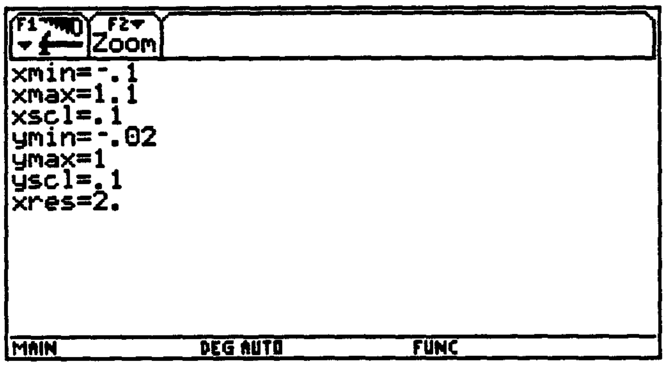


Da der von und erforschte Parameterbereich bis etwa a = 3,6 reicht, wollen wir uns nun die Graphen der dritten Iterierten für a = 3,6 , 3,7 , 3,8 und 3,9 darstellen. Das machen wir wieder über die komfortable, wenn auch langsame Zuweisung einer Liste zur Variablen a.

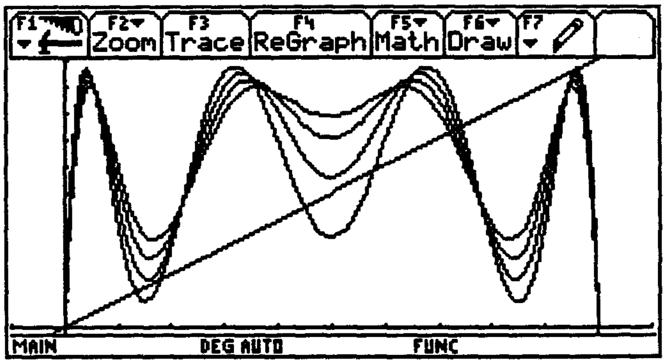
Tippen Sie [KARO]Q für „HOME“ um zum Ausgangsbildschirm zurückzukehren.
Geben Sie „{3.6,3.7,3.8,3.9}STO>a“ ein.



Tippen Sie [KARO]E für „WINDOW“ und geben Sie die rechts dargestellten Werte ein.

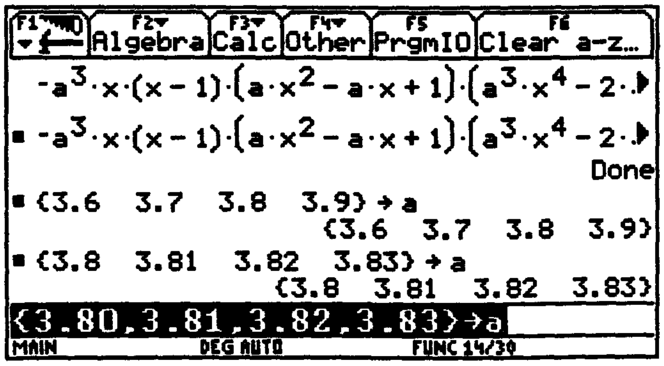


Tippen Sie [KARO]R für „GRAPH“. Nach einigen Minuten erhalten sie das nebenstehende Bild.



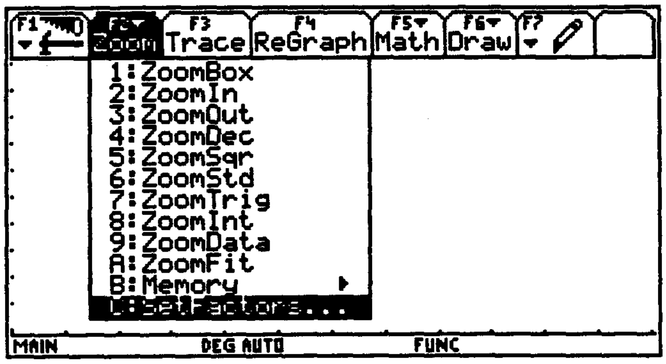
Die Funktionsgraphen nehmen mit wachsendem a an „Welligkeit“ zu. Wir sehen deutlich, daß erst der Graph zu a = 3,9 die Gerade zu y = x mehr als zweimal schneidet. (Die Schnittpunkte der anderen drei Graphen sind jeweils die repulsiven Fixpunkte der entsprechenden Grundfunktion.)
Wir können also sehen, daß die Iteration tatsächlich Dreierzyklen aufweist, diese aber erst für Parameter größer als 3,8 auftreten. Diese Grenze wollen wir nun grafisch etwas genauer ermitteln.

Geben Sie „{3.80,3.81,3.82,3.83} STO> a“ ein.

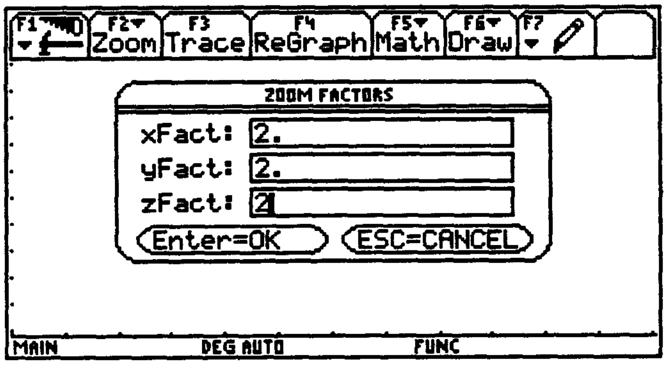


Für die nächste Zeichnung wollen wir den Bildausschnitt vergrößern, indem wir in das Bild „hineinzoomen". Das geschieht dadurch, daß das Bild um einen Punkt herum mit einem bestimmten Faktor vergrößert wird. Dieser Vergrößerungsfaktor kann eingestellt werden.

Drücken Sie [KARO]R für „GRAPH" und hier `F2` für „Zoom". Wählen Sie den Menüpunkt „`C:SetFactors...`". Drücken Sie `ENTER` für die Eingabe.

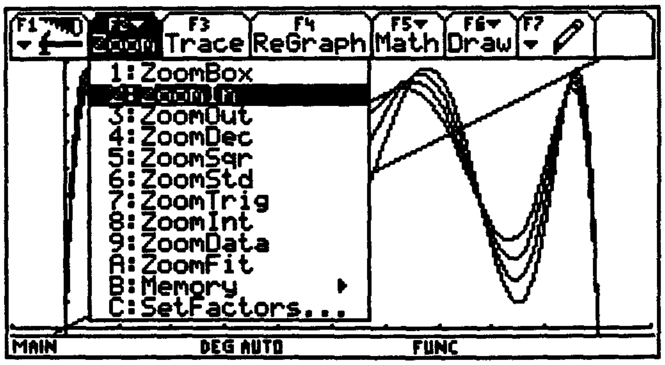


Geben Sie in jeder Zeile 2 ein. Von Zeile zu Zeile gelangen Sie, indem Sie entweder `ENTER` oder [runter] drücken.
Zum Abschluß der Eingabe drücken Sie `ENTER`.

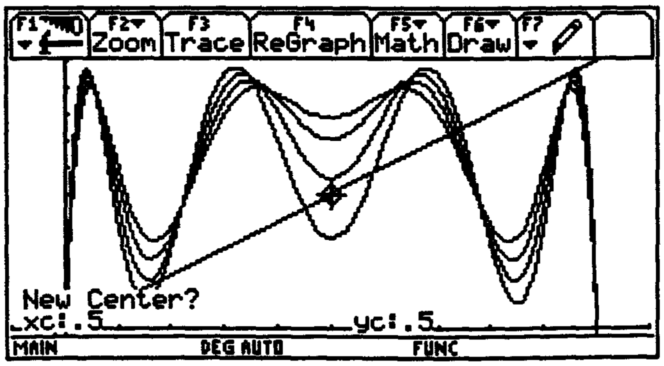


Im zweiten Schritt wird nun der Mittelpunkt des neuen Bildausschnitts bestimmt und sofort der Graph in diesem neuen Ausschnitt dargestellt.

Drücken Sie `F2` und wählen Sie „`2:ZoomIn`".

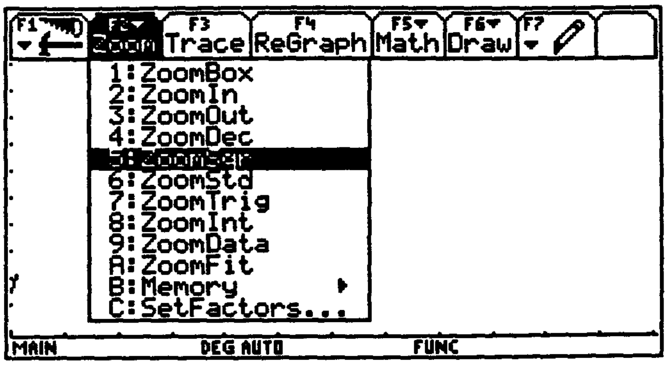


Im Grafikbildschirm wird ein Cursor angezeigt, den Sie mit den Cursortasten bewegen können. Er bestimmt das Zentrum des neuen Bildausschnitts. Bewegen Sie den Cursor zum Punkt (0.5/0.5) und drücken Sie `ENTER`.

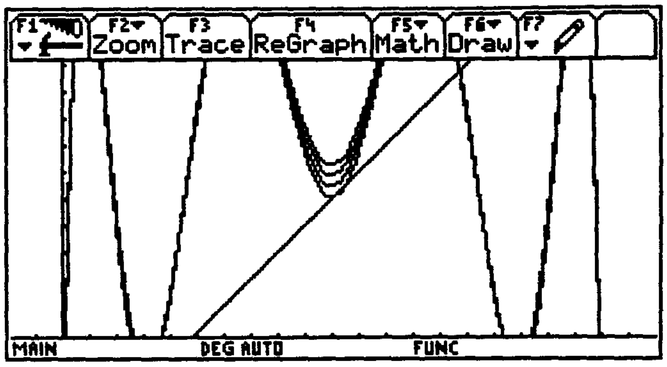


Da wir für die Darstellung eine gleichmäßige Achseneinteilung brauchen, unterbrechen wir den Aufbau der Darstellung.

Drücken Sie `ON`.
Drücken Sie anschließend `F2` und wählen Sie „`5:ZoomSqr`".



Nach einigen Minuten erhalten Sie die nebenstehende Ausschnitts-vergrößerung.



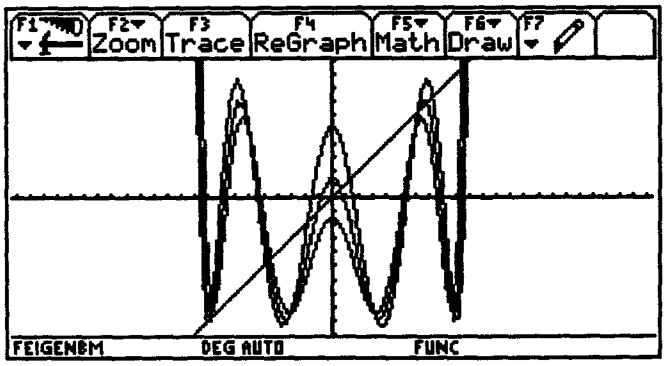
Während am Rand alle vier Graphen nahezu gleich verlaufen, kann man sie im Zentrum gut unterscheiden, die Bögen verlaufen mit wachsendem Parameter a tiefer. (Zur Erinnerung: die Parameter waren a = 3.80 , 3,81 , 3,82 , 3,83) Also ab etwa a = 3,83 hat die dritte Iterierte mehr als zwei Fixpunkte und bereits dieser Darstellung kann man entnehmen, daß dieser Dreierzyklus für a = 3,83 attraktiv ist.

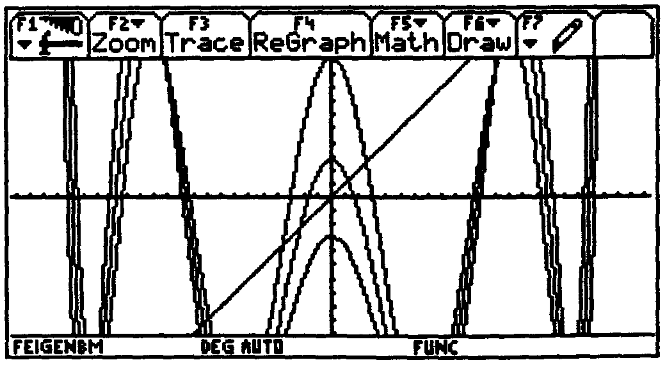
Fassen wir zum Abschluß noch einmal alle gefundenen Ergebnisse zusammen:
Iteriert man mit der Funktionenschar f(x) = ax(1 - x), d.h. betrachtet man die rekursiv definierten Zahlenfolgen $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$, so ist das „Langzeitverhalten" der Iteration unabhängig vom gewählten Startwert x_0. Für verschiedene Werte des Parameters a ergeben sich allerdings signifikant verschiedene Iterationsverhalten, wobei wir für folgende Parameterbereiche folgende Iterationsverläufe gefunden haben:

$1 < a < 3$:	Die Iteration läuft auf einen Punkt zu. (Kapitel 2 - 5) (Die Zahlenfolge besitzt einen Grenzwert)
$3 < a < \sqrt{6} + 1$ (= 3,4495)	Die Iteration pendelt zwischen zwei Werten hin und her. Zweierzyklus (Kapitel 6) (Die Zahlenfolge besitzt zwei Häufungspunkte)
$\sqrt{6} + 1 < a < 3{,}5..$ (= 3,4495)	Die Iteration pendelt zwischen vier Werten hin und her. Viererzyklus (Kapitel 7) (Die Zahlenfolge besitzt vier Häufungspunkte)
a etwa 3,83	Die Iteration pendelt zwischen drei Werten hin und her. Dreierzyklus (Kapitel 7) (Die Zahlenfolge besitzt drei Häufungspunkte)
$3{,}6 < a \leq 4$	Dieser Bereich wurde von uns nicht erforscht.

Aufgabe:
Bestimmen Sie für die Funktionenschar $f(x) = x^2 + c$ die dritte Iterierte und zeichnen Sie die Graphen für c = -1,7 , -1,8 und -1,9. Wählen Sie x von -2 bis +2, y ebenfalls von -2 bis +2, dann gleiche Achseneinteilung.
Vergrößern Sie einen interessanten Ausschnitt durch „Hineinzoomen".

Lösung:





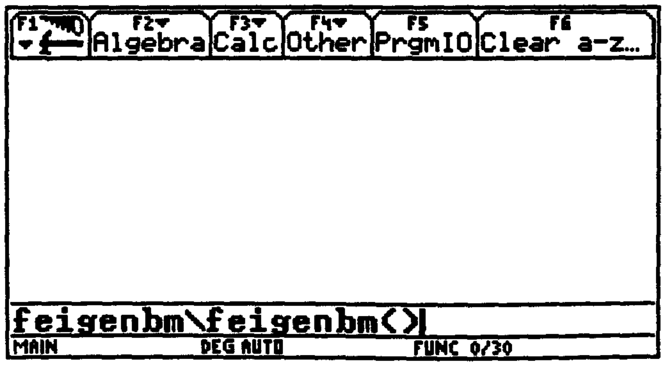
Kapitel 8
Das Feigenbaumdiagramm

Das Feigenbaumdiagramm ist die grafische Darstellung der systematischen Untersuchung des Iterationsverhaltens für „alle“ a- Werte. Computerprogramme, die das Feigenbaumdiagramm darstellen, gehen üblicherweise folgendermaßen vor:
In ein Koordinatensystem wird auf der waagerechten Achse der Wert für a aufgetragen, auf der senkrechten Achse die Werte für das Langzeitverhalten der Iteration. Das Langzeitverhalten ermittelt man, indem man die Iteration von einem recht willkürlichen Anfangswert sehr oft durchführt und dann die Iteration weiterführt, dabei aber nun alle Iterationswerte x_n grafisch darstellt, indem man den Punkt (a/x_n) im Koordinatensystem markiert. Das anfängliche, sozusagen blinde Durchführen der Iteration dient dazu, daß sich die Iteration vom Startwert auf das Langzeitverhalten einpendeln kann. Auf schnelleren Computern wählt man dazu etwa 200 bis 500 „blinde“ Iterationen, auf dem sehr viel langsameren TI - 92 werden wir nur 5 bis 20 „blinde“ Iterationen durchführen. Beim anschließenden Zeichnen der Punkte sollte man etwa doppelt so viele Iterationen durchführen wie das gewählte Koordinatensystem Pixel in der senkrechten Ausdehnung hat. Das sind beim TI - 92 102 Pixel, das hier vorgestellte Programm zeichnet aber nur maximal 60 Punkte, wiederum um das Tempo nicht zu sehr herabzusetzen.
Das Programm zur Erzeugung des Feigenbaum - Diagramms auf dem TI - 92 ist ein selbstgeschriebenes Programm, das vor der ersten Benutzung auf Ihren Rechner kopiert werden muß. Das geschieht von einem TI - 92, der bereits das Programm im Speicher hat, mit Hilfe des kleinen, schwarzen Kabels. Für die Übertragung eines Programms von einem Rechner auf einen anderen finden Sie eine ausführliche Anleitung im Handbuch.

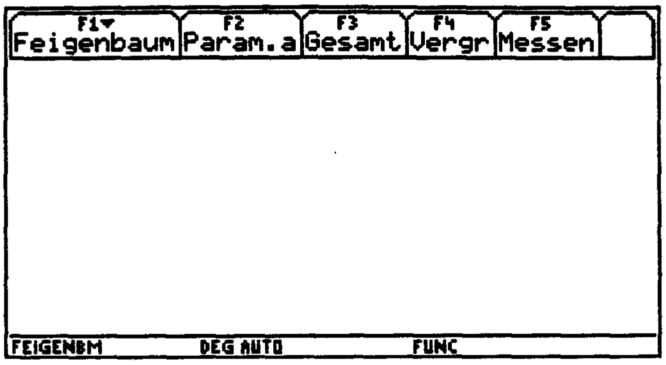
a) Bedienungsanleitung für das Programm

Am TI - 92 kann man mit Ordnern sehr schön Ordnung in den Variablen halten und es bietet sich an, für jede logische Einheit einen Ordner anzulegen. Das Programm „feigenbm“, das auf ein Hilfsprogramm „fbkernel“ zurückgreift, ist in dem Ordner „feigenbm“ abgelegt. Normalerweise arbeitet man mit dem Ordner „main“, so daß man beim Aufruf des Programms den Ordnernamen vor dem Programmnamen angeben muß.

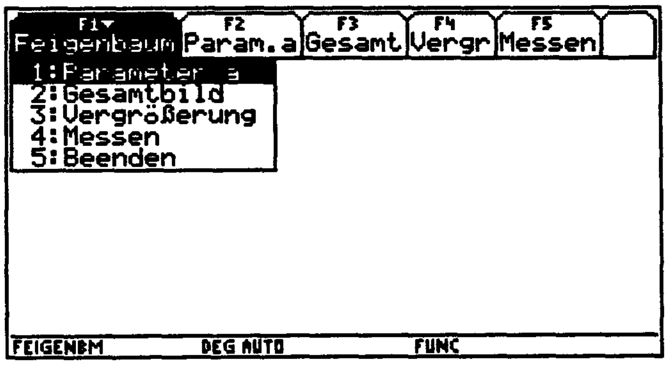
Tippen Sie im Ausgangsbildschirm „`feigenbm\feigenbm()`“



Drücken Sie ENTER, um das Programm zu starten. Sie erhalten einen leeren Bildschirm mit einem programmeigenen Menü.

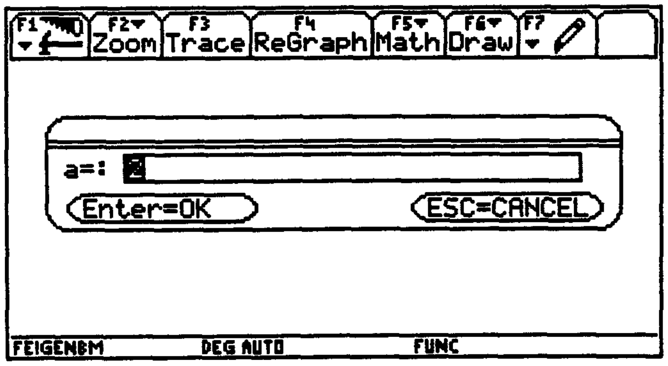


Mit F1 öffnen Sie ein Menü, mit dem Sie auf alle Punkte zugreifen können. Die anderen Punkte der Menüleiste sind Wiederholungen dieser Menüpunkte, Sie können so schnell mit den Funktionstasten die Kommandos aufrufen.



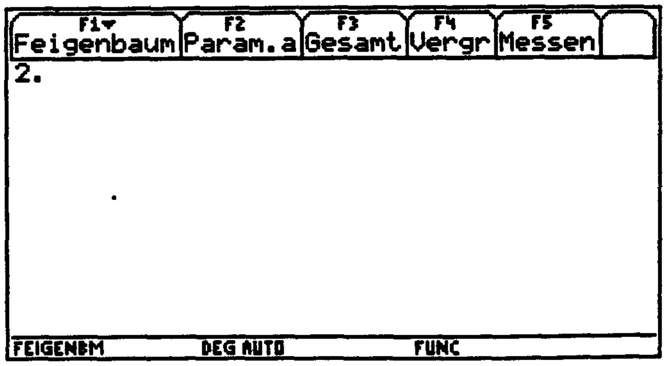
Die nachfolgende Beschreibung behandelt die Menüpunkte in der Reihenfolge, wie sie im ersten Menü aufgelistet sind. Das ist üblicherweise auch die Reihenfolge, in der man das Programm benutzt.

Drücken Sie F1 1 oder F2. Sie können nun in einem Dialogfenster einen Wert für den Parameter a eingeben. Sie müssen ENTER zweimal drücken, um das Dialogfenster zu beenden.
(In diesem Beispiel bestätigen wir den voreingestellten Wert 2)



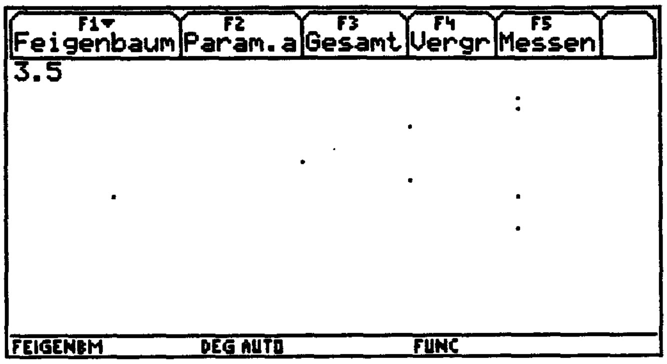
Nach der Eingabe wird das Langzeitverhalten der Iteration für den gewählten Parameter a grafisch dargestellt. Oben links ist der aktuelle Wert für a angegeben.

(In unserem Beispiel ist a = 2 und die Iteration konvergiert auf einen Wert. Folglich wird auch nur ein Punkt dargestellt, man muß sehr genau hinsehen, um ihn zu erkennen.)



Durch wiederholte Wahl von F1 1 bzw. F2 können Sie weitere Parameterwerte untersuchen.

(Im nebenstehenden Bild wurde für a nacheinander 2.7 , 3.1 und 3.5 gewählt. Ein Zweierzyklus liefert zwei, ein Viererzyklus vier senkrecht übereinanderliegende Punkte.)

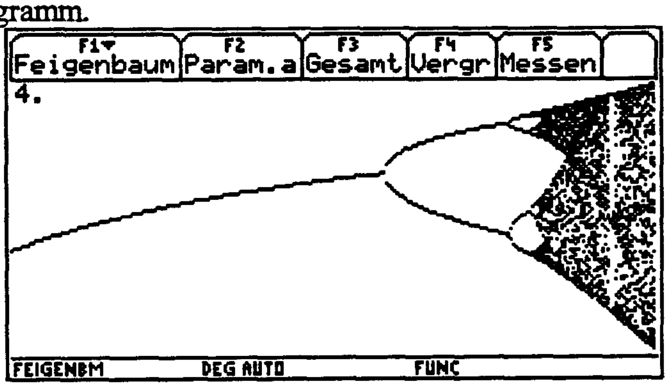


Nach diesem Abfragen einzelner a-Werte ist es an der Zeit, daß das Programm systematisch alle a-Werte durchgeht und das zugehörige Langzeitverhalten darstellt. Dieses liefert das gesamte Feigenbaumdiagramm.

Drücken Sie F1 2 oder F3.

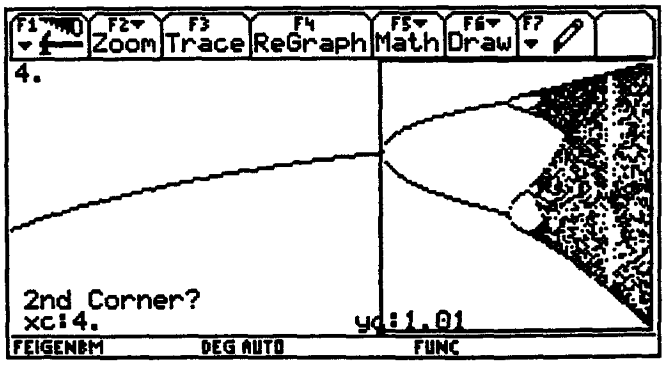
Das Programm wählt systematisch für a Werte von 1,62 bis 4 in Abständen von 0,01, rechnet die Iteration durch und stellt die entsprechen Werte dar.

Das Erzeugen des Diagramms kann jederzeit mit ESC oder [KARO] [.] abgebrochen werden.



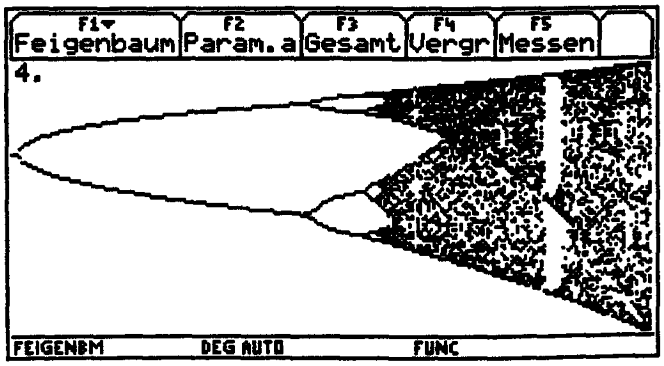
Eine Interpretation des Feigenbaumdiagramms erfolgt im Anschluß an diese Bedienungsanleitung.

Mit F1 3 oder F4 können Sie Teile des Feigenbaumdiagramms vergrößern. Die Auswahl des Bildausschnitts geschieht mit „ZoomBox“, bei dem Sie zwei diagonal gegenüberliegende Ecken einer Box wählen (siehe Kapitel 7).

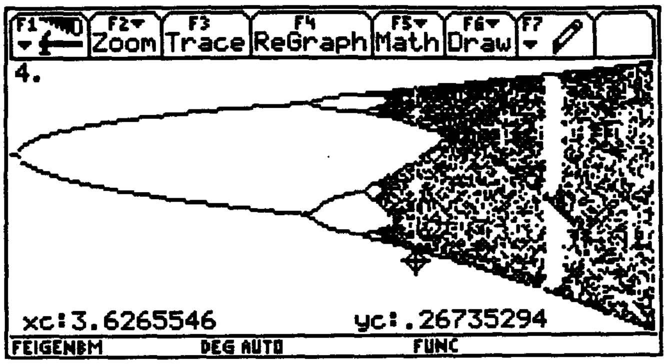


Nach der Auswahl der Box wird der entsprechende Ausschnitt auf dem gesamten Bildschirm vergrößert dargestellt.

Auch hier kann jederzeit mit ESC oder [KARO] [.] abgebrochen werden.



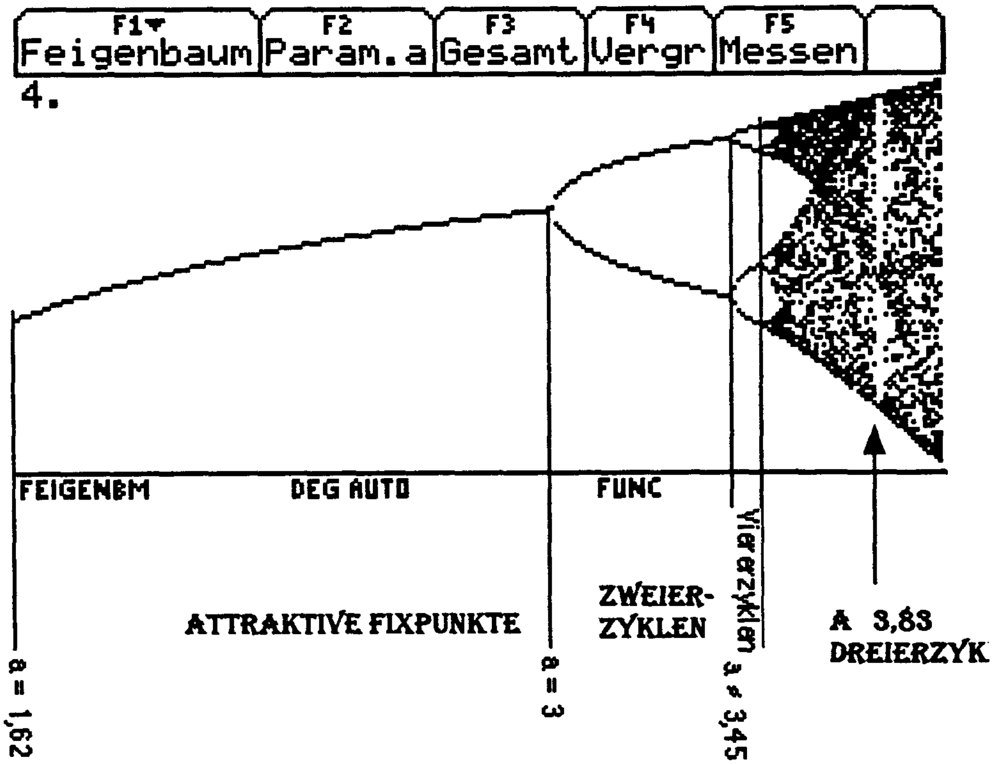
Mit F1 4 oder F6 erhalten Sie einen Cursor, den Sie mit den Cursortasten bewegen können. Am unteren Bildrand sind die Koordinaten des Cursors eingeblendet, so daß Sie „Messungen" im Bild vornehmen können.



Mit F1 5 beenden Sie das Programm. Drücken Sie [KARO]Q für „HOME", um auf den Ausgangsbildschirm zurückzukehren.

b) Erläuterung des Feigenbaumdiagramms

Die nachfolgende Beschriftung des Feigenbaumdiagramms geht nur auf die Eigenschaften ein, die in den vorhergehenden Kapiteln erforscht worden sind.



Aus dem Diagramm sind noch weitere Eigenschaften erkennbar, die wir aber nicht untersucht haben:
Der Bereich der Zyklen ist mit den Viererzyklen nicht erschöpft, sondern an die Viererzyklen schließen sich Achterzyklen an. Die weitere Verzweigung in Sechzehner-, Zweiundreißiger- usw. -zyklen ist in diesem Diagramm nicht erkennbar, prinzipiell aber vorhanden. Der Bereich dieser Zyklenverdoppelung reicht aber nicht bis a = 4, sondern nur bis etwa 3,57 (Feigenbaumpunkt), daran schließt sich der Bereich des Chaos an. In diesem Bereich gibt es aber immer wieder „Fenster der Ordnung", nämlich attraktive Zyklen. Der Bereich der Dreierzyklen ist der auffälligste und bereits in dem einfachen Diagramm des TI - 92 deutlich sichtbar. In der Vergrößerung des Feigenbaumdiagramms am Ende des vorhergehenden Abschnittes kann man bei a = 3,62 ein weiteres Fenster von Ordnung erkennen (es gehört zu einem Sechserzyklus).

c) Beschreibung des Programms

```
feigenbm()
Prgm
```

Vorbereitungen für das Programm

```
Local oldaxes,oldfold,maxiter,a,i,j
Local key,allfgnbm,alldrawn,astr
PlotsOff :FnOff
```

lokale Variable werden nach dem Programmende wieder gelöscht

```
setGraph("Axes","OFF")→oldaxes
setFold(feigenbm)→oldfold
ClrDraw
2→a:0→alldrawn
```

Bei diesen Setzungen wird der alte Zustand gespeichert und am Ende des Programms wiederhergestellt

```
PtText "",2,0.5
```

Dieser Aufruf erzwingt das Umschalten auf den Grafikbildschirm

```
Lbl again
ToolBar
 Title "Feigenbaum"
 Item "Parameter a",selecta
 ©"Select a"
 Item "Gesamtbild",complot
 ©"Complete plot"
 Item "Vergrößerung",magnify
 ©"Magnify"
 Item "Messen",examine
 ©"Examine"
 Item "Beenden",quit
 ©"Quit"
 Title "Param.a",selecta
 Title "Gesamt",complot
 Title "Vergr",magnify
 Title "Messen",examine
EndTBar
Goto again
```

In diesem Abschnitt wird die Menüleiste aufgebaut und mit einer Endlosschleife so lange durchlaufen, bis ein Menüpunkt gewählt worden ist

Die Texte in den Kommentarzeilen sind die Texte für eine englische Version

Dieser Programmabschnitt behandelt die Darstellung des Langzeitverhaltens der Iteration bei einem festem a

```
Lbl selecta
60→maxiter
-0.01→ymin:1.01→ymax
1.62→xmin:4→xmax
```

Vorbereitung der Fenstervariablen

```
string(a)→astr
Request "a=",astr
expr(astr)→a
```

Eingabe des Wertes für a über ein kleines Dialogfenster

```
If a<xmin:xmin→a
If a>xmax:xmax→a
```

Begrenzung der möglichen Werte

```
fbkernel(a,maxiter)
Goto again
```

Aufruf des Unterprogramms, das die eigentliche Iteration ausführt

[Fortsetzung des Programms auf der nächsten Seite]

Lbl complot 60→maxiter:0→key –0.01→ymin:1.01→ymax 1.62→xmin:4→xmax If alldrawn=0 Then	Programmteil, in dem das gesamte Feigenbaumdiagramm erstellt wird. Einrichten der Fenstervariablen

For a,xmin,xmax,_x
  fbkernel(a,maxiter)
  getKey()→key
	Beim ersten Durchgang (alldrawn=0) wird das Diagramm erzeugt

If key=264 or key=8238:Exit
 EndFor
 If a ≥xmax Then
	Abfragen der Tastatur für einen Abbruch

fbkernel(xmax,maxiter)	Sicherheitshalber für a=xmax noch einmal
StoPic allfgnbm 1→alldrawn EndIf	Das fertige Bild wird gespeichert

Else
 RclPic allfgnbm
EndIf
Goto again
	Bei erneuter Anforderung (alldrawn=1) des Gesamtbildes wird das fertige Bild aus dem Speicher geladen

Lbl magnify	
ZoomBox ClrDraw 0→key	Programmteil für das Vergrößern eines Ausschnitts
round(60/(ymax-ymin),0)→maxiter For a,xmin,xmax,_x fbkernel(a,maxiter)	proportionale Erhöhung der zu zeichnenden Punkte
getKey()→key If key=264 or key=8238:Exit EndFor If a ≥xmax fbkernel(xmax,maxiter) Goto again	Erzeugen der Vergrößerung
Lbl examine	
Input Goto again	Programmteil für den Cursor zum "Messen"
Lbl quit	
ClrDraw PxlText "Gehen Sie zum Ausgangsbildschirm",20,30 ©"You can go 'HOME' now" setGraph("Axes",oldaxes) setFold(#oldfold) EndPrgm	Programmteil für das Aufräumen und Beenden des Programms

Erläuterung des Unterprogramms "fbkernel"

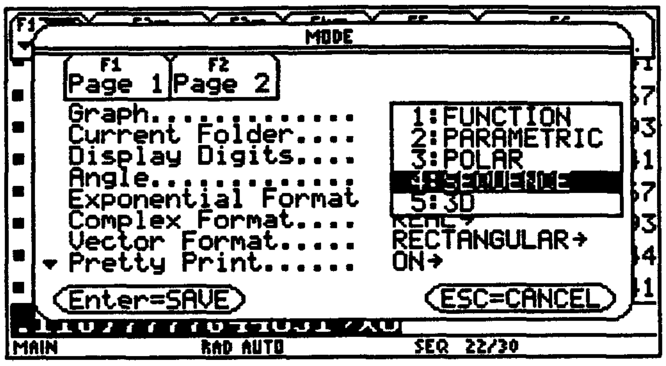
Dieses Unterprogramm ist das eigentliche "Arbeitspferd", das den Algorithmus für das Feigenbaumdiagramm enthält und gleichzeitig die Darstellung der Punkte übernimmt.
Beim Aufruf werden zwei Parameter übergeben, zuerst der Wert für den Parameter a und dann die maximale Anzahl der "sichtbaren" Iterationen.
Da der TI - 92 recht langsam ist, wurden diverse Tricks und Informationen über das Feigenbaumdiagramm verwendet, um die Erzeugung des Diagramms zu beschleunigen.

```
fbkernel(a,maxiter)
Prgm
Local y,b,c,i,bld
PxlText "    ",1,1                              Löschen der Ausgabeposition
PxlText string(round(a,3)),1,1                  Anzeigen des Parameters a mit 3 Stellen
If a ≤3 Then                                    Falls a ≤3
 1-1/a→y                                        den Fixpunkt berechnen
 PtOn a,y                                       und den Punkt darstellen
EndIf
If a>3 and a<3.449489 Then                      Wenn Zweierzyklus, dann
 1/a→b:1+b→c:c/2+√ (c^2/4-b*c)→y                ersten Wert berechnen
 PtOn a,y                                       und darstellen
 c-y→y                                          zweiten Wert berechnen
 PtOn a,y                                       und darstellen
EndIf
If a ≥3.449489 Then
 0.27158*a-0.08663→y                            Falls höherer Zyklus oder Chaos
 If a<3.568759:16→maxiter                       günstigen Startwert wählen
 If a<3.564407: 8→maxiter
 If a<3.54409: 4→maxiter                        Bei Zyklen maxiter verringern
 If maxiter>16 Then:5→bld
   Else:iPart((50-maxiter)/2)→bld
 EndIf                                          Anzahl der blinden Iterationen günstig
 For i,1,bld                                    bestimmen
  a*y*(1-y)→y
 EndFor                                         Die blinden Iterationen ausführen
 For i,1,maxiter
  a*y*(1-y)→y
  PtOn a,y                                      Die sichtbaren Iterationen ausführen
 EndFor
EndIf
EndPrgm
```

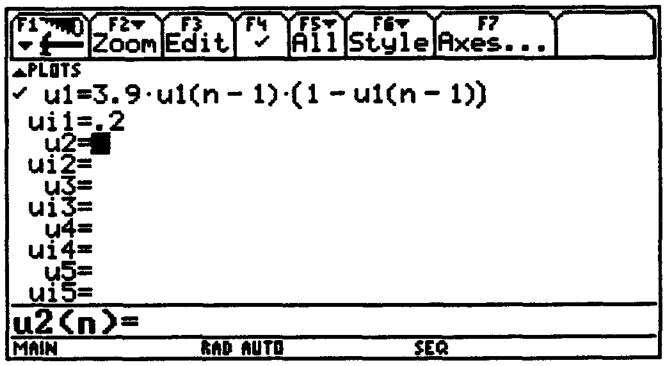
Kapitel 9
Chaos

Für Parameter a größer als ca. 3,57 können die Iterationen chaotisch sein. Dabei ist der Begriff „Chaos“ bzw. „chaotisch“ nicht umgangsprachlich gemeint, sondern als wohldefinierter, mathematischer Fachbegriff. Bevor wir uns jedoch dieser Präzisierung nähern und die entsprechenden Eigenschaften kennenlernen werden, schauen wir uns die Iteration für a = 3,9 an, die chaotisch ist.
Den besten Überblick über eine Iteration erhalten wir am TI - 92, wenn wir uns eine Zeitreihe grafisch darstellen lassen. Nehmen wir also die notwendigen Einstellungen vor:

Drücken Sie MODE und wählen Sie aus dem ersten Menü „4:SEQUENCE“. Drücken Sie ENTER ENTER, um das Dialogfenster zu verlassen.

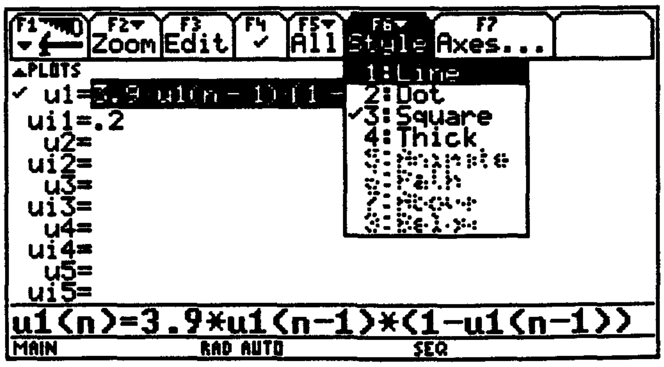


Drücken Sie [KARO]W für „Y=“ und geben Sie die nebenstehende Funktion ein. Geben Sie 0,2 als Startwert an.
(Sollten hier noch weitere Funktionen eingegeben sein, so deaktivieren Sie sie mit F4 oder löschen Sie sie.)

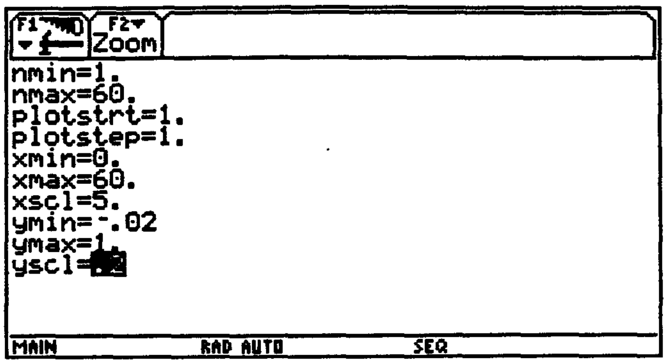


Bisher haben wir alle Zeitreihen mit kleinen Quadraten dargestellt, diese Art ist voreingestellt. Dieses Mal wollen wir sie aber durch einen Linienzug darstellen.

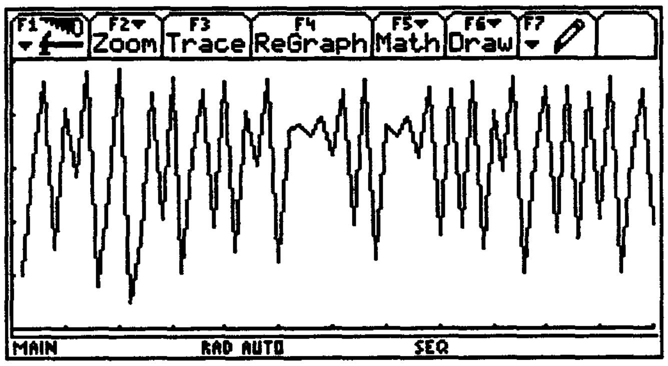
Drücken Sie F6 und wählen Sie aus dem Menü „1:Line“.



Drücken Sie [KARO]E für „WINDOW“ und geben Sie die nebenstehenden Werte ein.



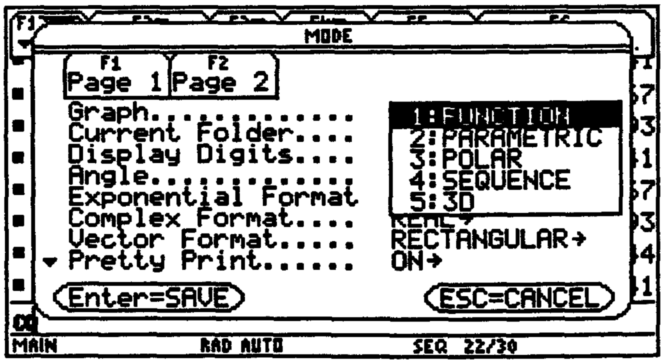
Drücken Sie [KARO]R für „GRAPH“.



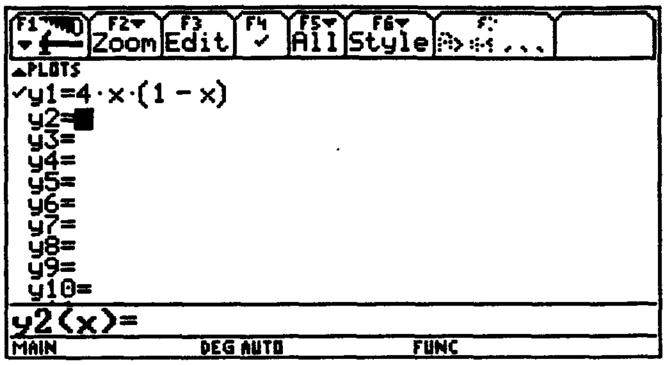
Die Zeitreihe erfüllt insofern unsere Erwartungen, als die Werte keinerlei Regelmäßigkeit erkennen lassen. Im umgangssprachlichen Sinn ist die Iteration tatsächlich chaotisch.

Für unsere weiteren Betrachtungen wollen wir die Funktion f(x) = 4x(1–x) aus der Schar f(x) = ax(1–x) herausgreifen und anhand dieser erforschen, was „chaotisch“ im mathematischen Sinn ausmacht. Die Funktion bildet das Intervall [0,1] auf sich ab, f(0,5) = 1, außerdem gilt dann eine für die weitere Betrachtung wichtige, trigonometrische Eigenschaft, die wir als erstes kennenlernen wollen.
Zunächst müssen wir die Funktion definieren.

Drücken Sie `MODE` und wählen Sie aus dem ersten Menü „`1:FUNCTION`“. Drücken Sie `ENTER ENTER`, um das Dialogfenster zu verlassen.

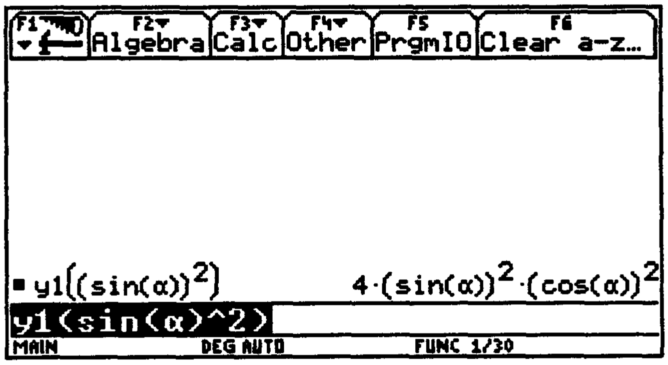


Drücken Sie [KARO]W für „Y=" und geben Sie den nebenstehenden Term für y1 ein.
(Sollten hier noch weitere Funktionen eingegeben sein, so deaktivieren Sie sie mit F4 oder löschen Sie sie.)



Wir bilden nun den Funktionswert für den allgemeinen Ausdruck $\sin^2 a$ und formen das Ergebnis in eine übersichtliche Form um.

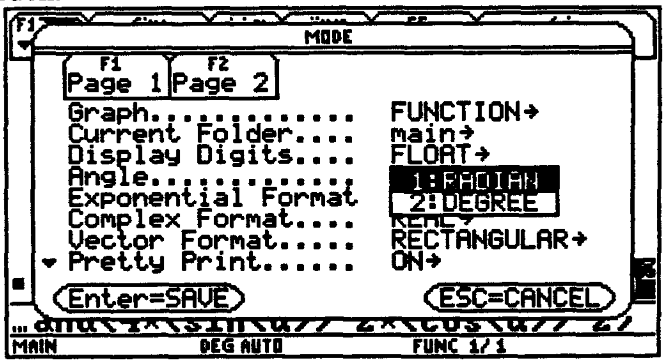
Tippen Sie „y1(sin(a)^2)" ENTER
Den Buchstaben a erhalten Sie durch 2nd GA. (2nd G schaltet auf griechische Buchstaben um)



Der Ausdruck $(1-(\sin(a))^2)$ wurde im Ergebnis bereits in $(\cos(a))^2$ umgewandelt.

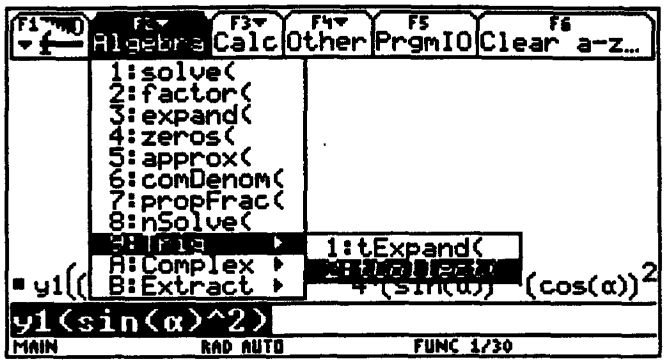
Für die weiteren trigonometrischen Umformungen müssen wir sicherstellen, daß der Winkelmodus RADIAN ist, da (unlogischerweise) trigonometrische Umformungen im DEGREE - Modus nicht durchgeführt werden.

Drücken Sie MODE und dreimal [runter], um in die Zeile für „Angle" zu kommen. Drücken Sie [rechts] und wählen Sie aus dem Menü „1:RADIAN". Drücken Sie ENTER ENTER, um das Dialogfenster zu verlassen.

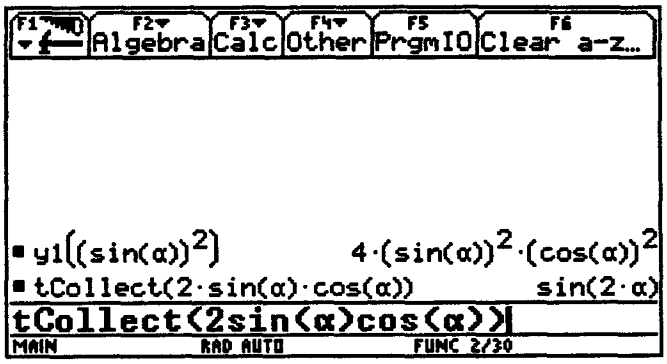


Unsere erste Rechnung war $y1(\sin^2 a) = 4 \sin^2 a \cos^2 a$. Die rechte Seite läßt sich in ein Quadrat umschreiben, das muß allerdings das geschulte Auge selbst sehen, der TI - 92 nimmt uns das nicht ab. Wir setzen also fort: $4 \sin^2 a \cos^2 a = (2 \sin a \cos a)^2$
Der Ausdruck in der Klammer kann weiter zusammengefaßt werden, das wiederum nimmt uns der TI - 92 ab.

Drücken Sie F2, wählen Sie aus dem Menü „9:Trig“ und aus dem Untermenü „2:tCollect(“



Ergänzen Sie nun in der Eingabezeile „2sin(a)cos(a))“ und geben Sie es mit ENTER ein



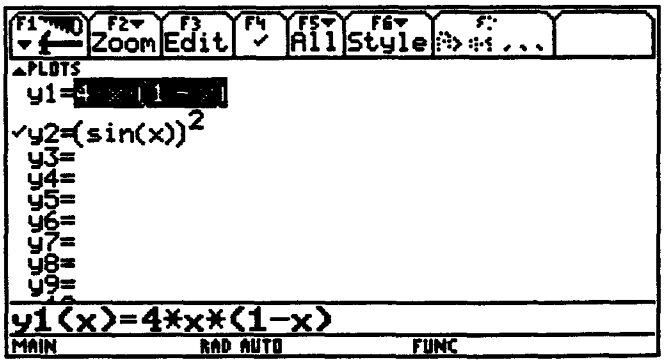
Fassen wir die durchgeführten Umformungen noch einmal zusammen:

$$y1(\sin^2 a) = 4*\sin^2 a*(1 - \sin^2 a) = 4*\sin^2 a*\cos^2 a = (2*\sin a*\cos a)^2 = \sin^2(2a)$$

Damit erhalten wir einen überraschend einfachen Zusammenhang: $y1(\sin^2 a) = \sin^2 2a$.
Mit anderen Worten: Für den speziellen trigonometrischen Ausdruck $\sin^2 a$ erhalten wir den Funktionswert für $f(x) = 4x(1-x)$, indem wir einfach zum doppelten Winkel $\sin^2$ bilden.

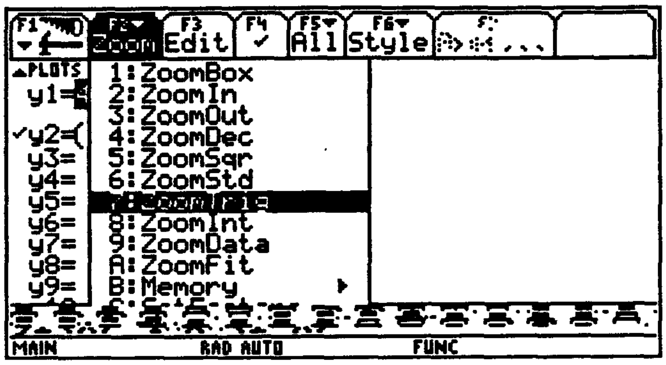
Iterieren wir die Funktion in dieser speziellen Form, müssen wir fortlaufend den Winkel verdoppeln. Wegen der 360° - Periodizität des Sinus bleibt man mit Sicherheit im Intervall [0°,360°). Die Funktion $\sin^2 x$ hat aber höhere Symmetrien, die wir mit dem TI - 92 entdecken wollen.

Drücken Sie [KARO]W für „Y=“ und geben Sie unter y2 „sin(x)^2“ ein.
Bewegen Sie den Cursor mit [rauf] in die Zeile für y1 und deaktivieren Sie diese mit F4.

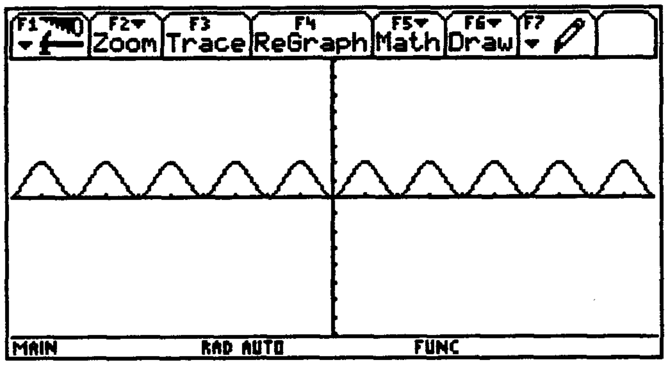


Für trigonometrische Funktionen gibt es ein voreingestelltes Koordinatensystem, das man unter dem Zoom - Menü findet.

Drücken Sie F2 und wählen Sie aus dem Menü „7:ZoomTrig“.

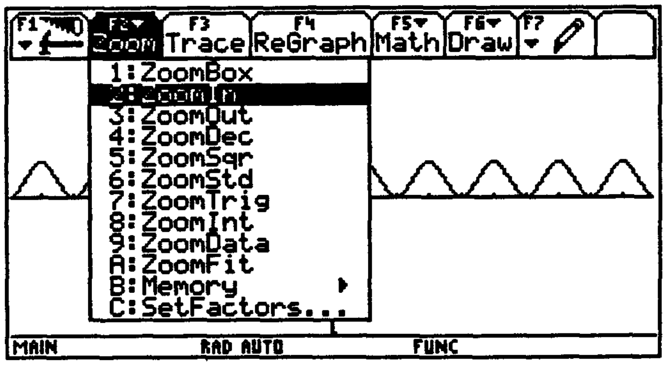


Der Rechner schaltet sofort in das Grafikfenster und stellt y2(x) = $(\sin(x))^2$ dar.

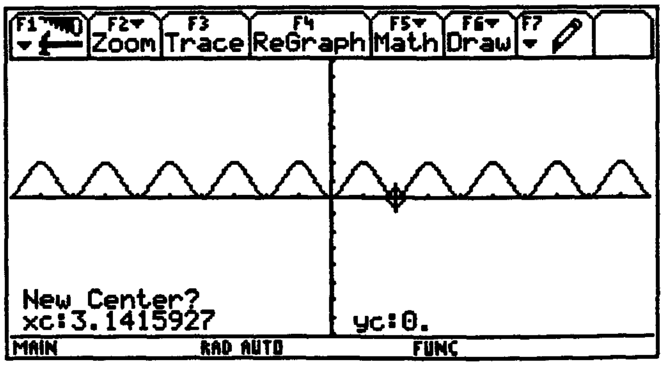


Die Darstellung ist zu klein, wir „zoomen“ einmal hinein.

Drücken Sie F2 und wählen Sie aus dem Menü „2:ZoomIn“.

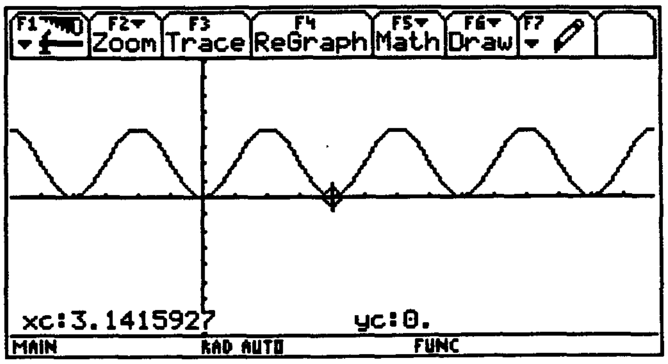


Bewegen Sie den Cursor für den neuen Bildmittelpunkt in das nächste Minimum rechts vom Ursprung. Drücken Sie ENTER.



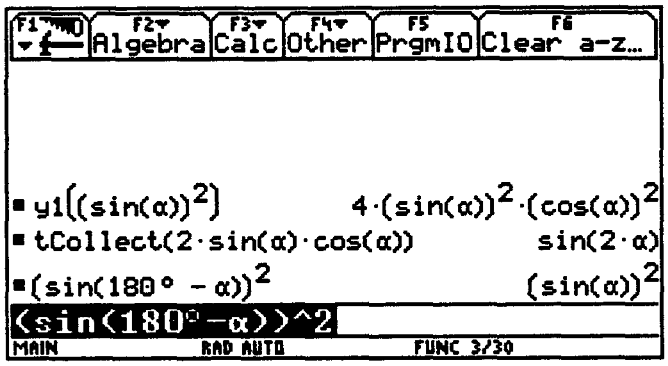
Im vergrößerten Bild sehen Sie weiterhin den Cursor, den Sie mit `CLEAR` ausblenden können.

(Dieses Bild erhalten Sie nur, wenn für „`ZoomIn`" die Faktoren für beide Achsen 2 sind. Diese Einstellung haben wir im Kapitel 7 vorgenommen.)



Aus dem Graph können wir ablesen, daß $\sin^2 x$ p - (180° -) periodisch ist. Jeder „Berg" ist zusätzlich achsensymmetrisch, was für das Intervall [0°,180°] heißt: $\sin^2(180°-a) = \sin^2 a$. Diese Beziehung rechnen wir gleich mit dem Rechner nach.

Tippen Sie „`(sin(180°-a))^2`" `ENTER`. Das Ergebnis bestätigt die Formel.
Das Gradzeichen ist wichtig, es ermöglicht, mit dem Gradmaß zu arbeiten, auch wenn der Rechner in der Grundeinstellung auf RADIAN steht.
Das Gradzeichen erhalten Sie mit `2nd D`.

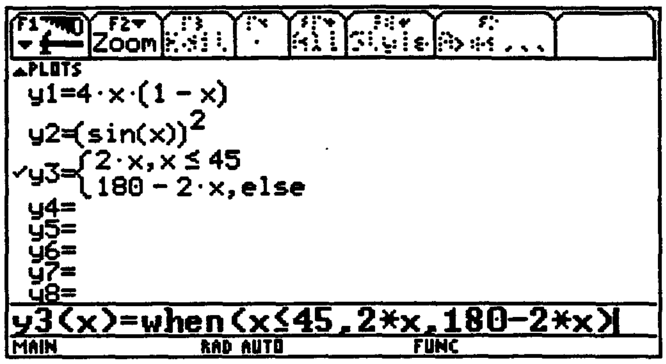


Damit haben wir alle Beziehungen zusammengetragen, so daß wir beim iterierten Verdoppeln des Winkels letztlich nicht das Intervall [0°,90°] verlassen: Überschreiten wir beim Verdoppeln 90°, so bilden wir die Differenz zu 180° und rechnen mit diesem Winkel weiter. Das Iterieren mit der Funktion f(x) = 4x(1-x) reduziert sich nun auf das Verdoppeln eines Winkels, ggf. muß man noch die Differenz zu 180° bilden.

$$\begin{tikzcd}
x_n \arrow[r, "f(x)=4x(1-x)"] \arrow[d, leftrightarrow, "x_n=\sin^2\alpha_n"'] & x_{n+1} \arrow[d, leftrightarrow, "x_{n+1}=\sin^2\alpha_{n+1}"] \\
\alpha_n \arrow[r, "g(\alpha)=\begin{cases} 2\alpha & \text{für } 0° \ \alpha \ 45° \\ 180°-2\alpha & \text{für } 45°<\alpha \ 90° \end{cases}"] & \alpha_{n+1}
\end{tikzcd}$$

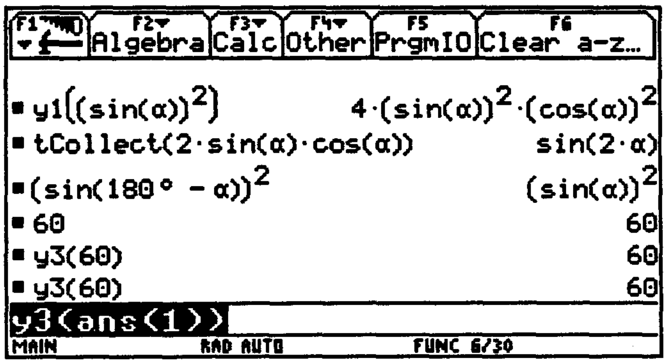
Wir geben nun die Funktion g ein, die für die Iteration der Winkel verwendet wird. Das ist eine abschnittsweise definierte Funktion, für die es einen speziellen Befehl im TI - 92 gibt.

Drücken Sie [KARO]W für „Y=“ und geben Sie unter y3 „`when(x≤45,2*x,180-2*x)`“ ein.
Das Zeichen „≤“ finden Sie unter `CHAR`, dort „`2:Math`“, Zeichen Nummer C.



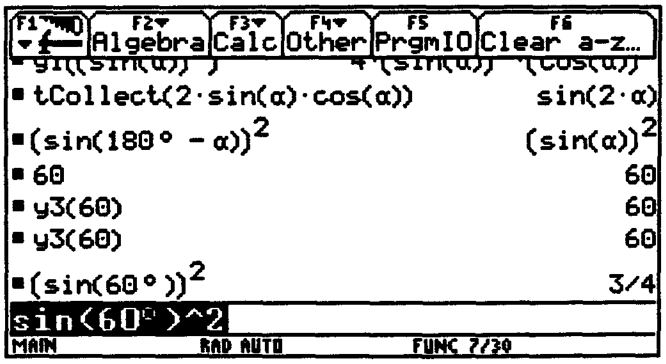
Mit dieser Funktion wollen wir nun iterieren, im ersten Beispiel starten wir mit 60.

Tippen Sie 60 `ENTER`.
Tippen Sie nun `y3(ANS) ENTER`.
Sie sehen, daß 60 ein Fixpunkt für y3 ist.

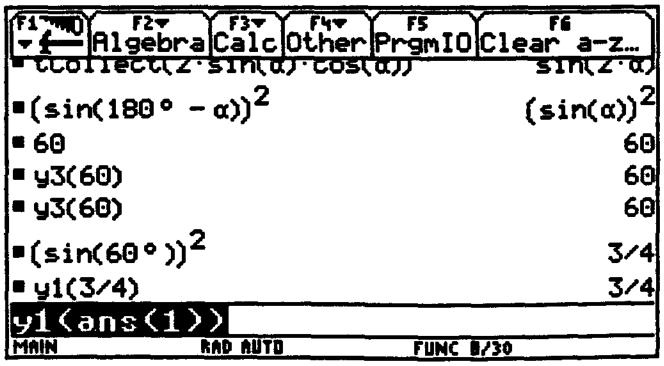


Dieser Fixpunkt für y3 muß zu einem Fixpunkt für unsere Ausgangsfunktion f(x) = 4x(1-x) gehören. Das wollen wir sofort ausprobieren.

Tippen Sie „`sin(60°)^2`“ `ENTER` und sie erhalten 3/4.



Unter y1 war die Grundfunktion f(x) = 4x(1-x) gespeichert. Tippen Sie „`y1(ANS)`“ `ENTER` und Sie erhalten tatsächlich wieder $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{4}$ ist also ein Fixpunkt für unsere Grundfunktion.

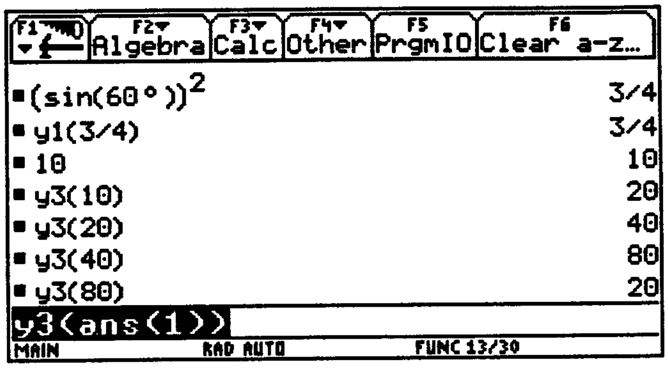


Diesen Fixpunkt können wir mit der Formel aus Kapitel 5 bestätigen, wo wir gefunden haben, daß die Funktionen der Schar f(x) = ax(1-x) einen Fixpunkt bei $x = \frac{a-1}{a}$ haben.

In unserer Funktion ist a = 4, was also auf den Fixpunkt bei $\frac{3}{4}$ führt. Aus Kapitel 5 wissen wir auch, daß dieser Fixpunkt nicht attraktiv ist.

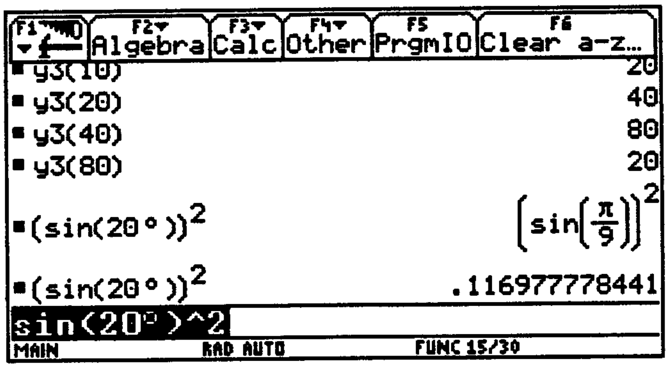
Starten wir eine weitere Iteration für die Winkel, z.B. mit 10.

Tippen Sie `10 ENTER`.
Geben Sie nun `y3(ANS)` ein und drücken Sie viermal `ENTER`, um mit der Funktion y3 zu iterieren. Sie sehen, daß die Iteration in den Dreierzyklus 20, 40, 80 mündet.



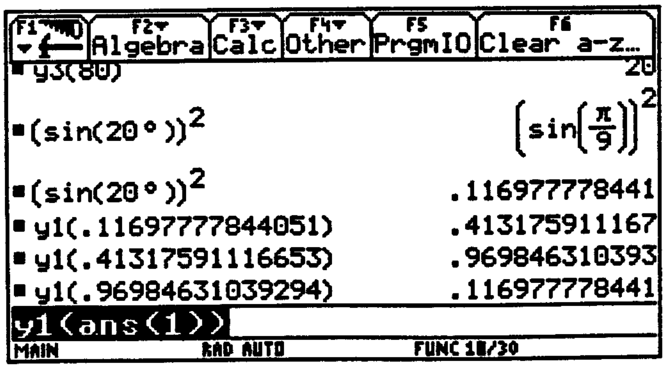
Diesem Dreierzyklus für y3 muß wieder ein Dreierzyklus für unsere eigentliche Funktion entsprechen.

Tippen Sie `sin(20°)^2` ein und drücken Sie `ENTER`. Mit `ENTER` rechnet der Rechner exakt (solange keine Dezimalzahl im Term vorkommt), d.h. das Ergebnis ist ein algebraischer Ausdruck, der „möglichst einfach" ist.
Um eine Dezimalzahl als Näherungswert zu erhalten, müssen wir „=" abrufen.
Drücken Sie [KARO] `ENTER` für =.



Mit diesem numerischen Wert starten wir eine Iteration mit unserer Grundfunktion (im Rechner unter y1 gespeichert).

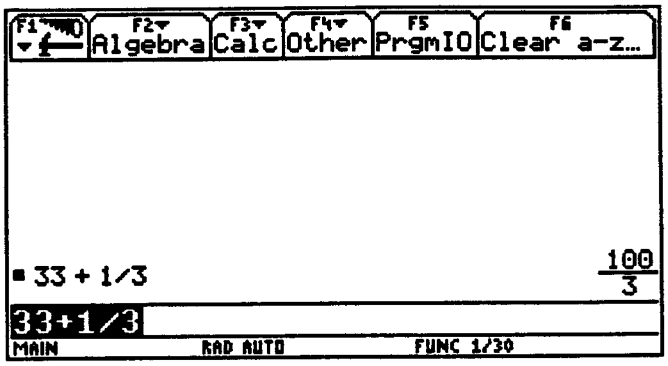
Geben Sie `y1(ANS)` ein und drücken Sie dreimal `ENTER`. Sie sehen, daß die Iteration einen Dreierzyklus durchläuft.



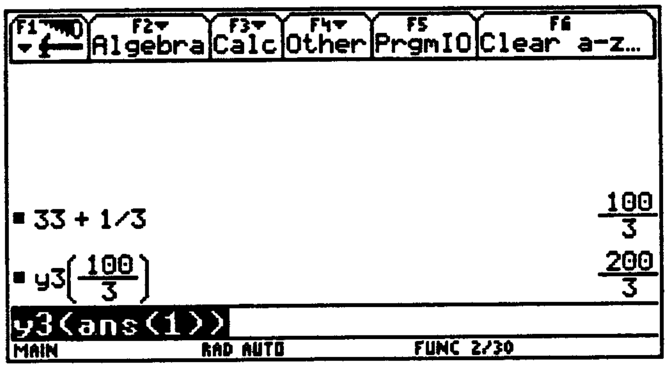
Diese Iterationsexperimente mit der Funktion f(x) = 4x(1-x) sind nun überraschend, denn wir haben diese Funktion gewählt, um an ihr „Chaos" zu studieren. Die Zyklen, die wir erhalten, sind aber genau das Gegenteil dessen, was wir von einer chaotischen Iteration erwarten.

Diese „unchaotische“ Ordnung ist aber noch sehr viel ausgeprägter, als Sie vielleicht vermuten, denn jede Iteration, die mit einem rationalen Winkelwert startet, mündet in einen Zyklus. Betrachten wir als weiteres Beispiel die Iteration, die mit $33\frac{1}{3}$ startet.

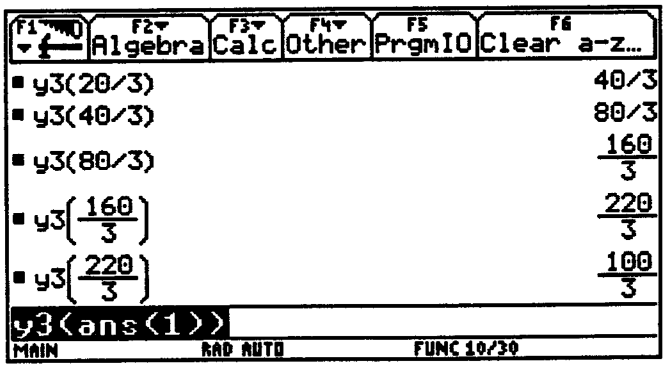
Löschen Sie mit F1 8 den Ausgangsbildschirm.
Geben Sie „33+1/3“ als Startwert ein.



Geben Sie y3(ANS) ein. Hier ist es nun von Vorteil, daß der Rechner exakt rechnet und das Ergebnis als Bruch anzeigt.



Drücken Sie nun solange die ENTER-Taste, bis Sie wieder 100/3 im Ergebnis sehen. Die Iteration mit y3 und dem Startwert 33\F(1;3) hat einen Zyklus durchlaufen (es ist ein Neunerzyklus).

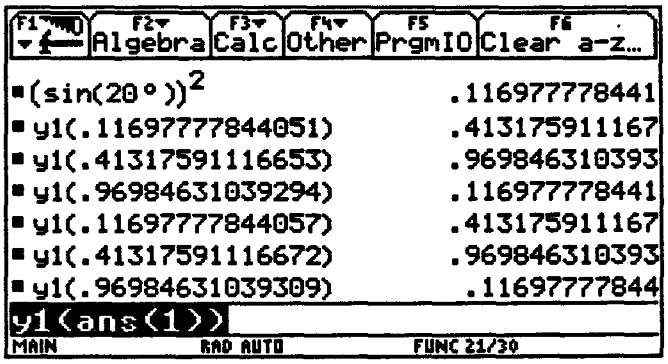


Da die rationalen Zahlen zwischen 0 und 90 eine dichte Teilmenge des Intervalls [0,90] sind und die Funktion $x = \sin^2 a$ das Intervall [0°,90°] bijektiv abbildet auf das Intervall [0,1], besitzt die Funktion $f(x) = 4x(1-x)$ eine Menge von Startwerten für zyklische Iterationen, die dicht liegt in ihrer Definitionsmenge [0,1].
Diese Eigenschaft, die eine Anforderung an eine gewisse Ordnung stellt, ist die erste von drei Eigenschaften, die eine chaotische Iteration ausmachen.

Dichte periodische Punkte Die Menge der Startwerte für zyklische Iterationen mit der Funktion f ist dicht in der Definitionsmenge der Funktion f.

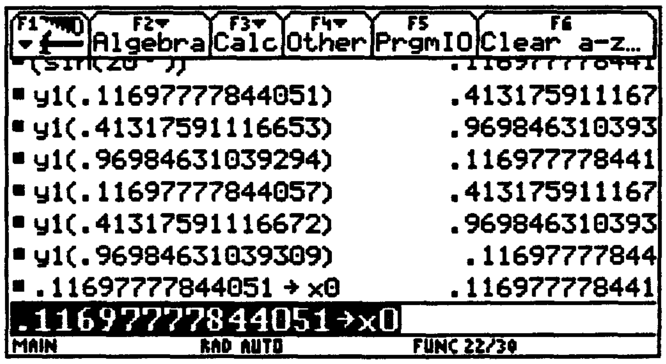
Aufgrund dieser Eigenschaft könnte man vermuten, daß eine chaotische Iteration mit einem zufällig gewählten Startwert gute Chancen hat, zyklisch zu verlaufen. Tatsächlich ist das „Gegenteil" der Fall, was unser nächstes Experiment zeigt. Dazu verfolgen wir die Iteration mit 20°, die den Dreierzyklus 20°, 40°, 80° durchläuft, in unserer Grundfunktion selbst.

Tippen Sie sin(20°)^2 ein und drücken Sie [KARO] ENTER für =. Geben Sie y1(ANS) ein und drücken Sie sechsmal ENTER. Sie sehen, daß die Iteration einen Dreierzyklus durchläuft, daß aber nach dem zweiten Zyklus der Startwert nicht exakt erreicht wird.



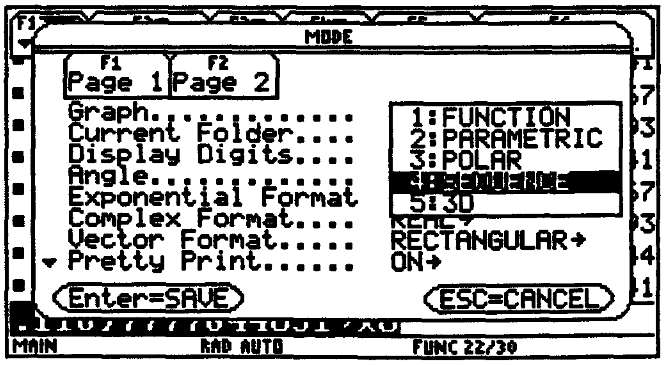
Wegen dieses nicht ganz exakten Zurückkehrens wollen wir die Iteration etwas länger verfolgen. Das können wir am übersichtlichsten mit der grafischen Darstellung einer Zeitreihe. Als Startwert soll der Näherungswert von $\sin^2 20°$ dienen, den wir in einer Variablen speichern.

Drücken Sie so lange [rauf], bis der Cursor auf dem Näherungswert für $(\sin(20°))^2$ steht und drücken Sie dann ENTER. Der Wert wird dadurch in die Eingabezeile kopiert. Ergänzen Sie STO>x0 und drücken Sie ENTER.

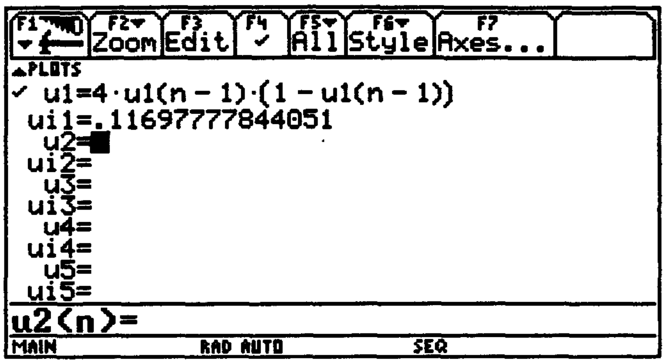


Wir durchlaufen nun alle notwendigen Schritte, eine Zeitreihe darzustellen.

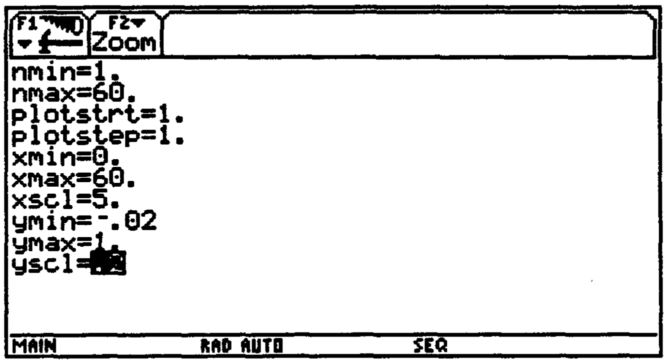
Drücken Sie MODE und wählen Sie aus dem ersten Menü „4:SEQUENCE". Drücken Sie ENTER ENTER, um das Dialogfenster zu verlassen.



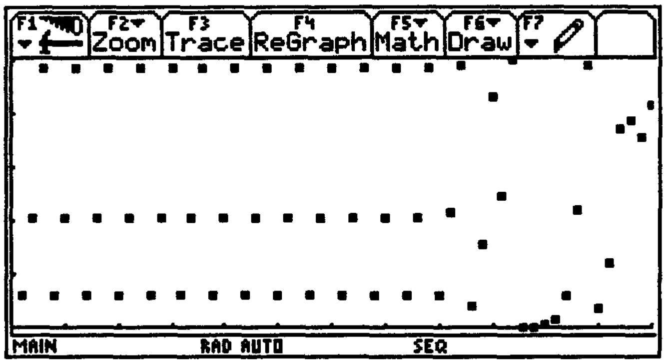
Drücken Sie [KARO]W für „Y=“ und geben Sie die nebenstehende Funktion für u1 ein. Tippen Sie für ui1 „x0“ und ENTER. Der in x0 gespeicherte Wert wird dadurch hinter ui1 geschrieben.



Drücken Sie [KARO]E für „WINDOW“ und geben Sie die nebenstehenden Werte ein.



Drücken Sie [KARO]R für „GRAPH“.



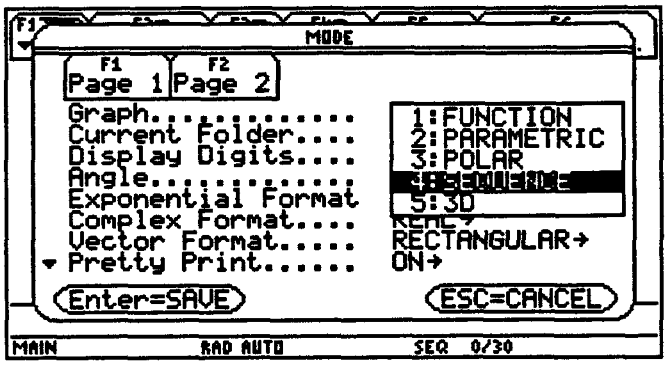
Die Darstellung zeigt im linken Teil sehr schön den Dreierzyklus, der dann aber nach etwa 45 Iterationsschritten nicht mehr eingehalten wird.
Der Grund für dieses Verhalten liegt darin, daß unser Startwert 0.116977778441 nicht exakt $\sin^2 20°$ ist, sondern nur eine Näherung mit 12 Stellen. Daher ist der verwendete Startwert gegenüber dem exakten Wert mit einem kleinen Fehler behaftet. Eine weitere Eigenschaft einer chaotischen Iteration ist nun, daß sich kleine Fehler aufschaukeln und so schließlich zu einem Iterationsverhalten führen, das nicht mehr mit dem „wirklichen“ übereinstimmt.
Diese Eigenschaft der Empfindlichkeit gegenüber kleinsten Fehlern heißt Sensitivität.

> Sensitivität
> Weichen zwei Startwerte nur geringfügig voneinander ab, so ist der Verlauf der beiden zugehörigen Iterationen nach einer genügenden Anzahl von Iterationsschritten deutlich verschieden.

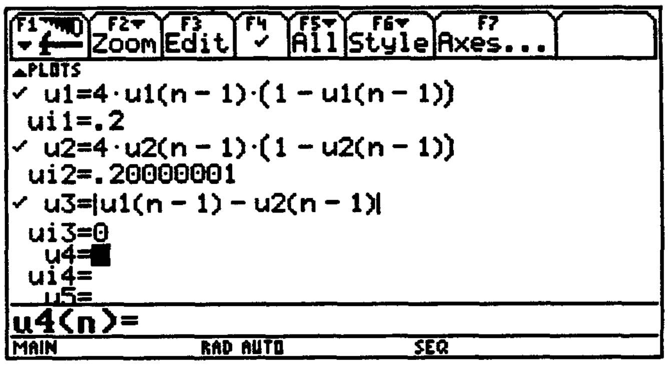
Bei der Charakterisierung der Sensitivität bleiben wir bei dieser unexakten Form, da wir sie im nachfolgenden Experiment auch nur durch numerische Beispiele darstellen wollen.

In diesem Experiment wollen wir die Sensitivität der Iteration mit f(x) = 4x(1-x) darstellen, indem wir zwei leicht verschiedene Anfangswerte wählen. Wir führen dann die beiden Iterationsverläufe durch und schauen uns an, wieweit beide voneinander abweichen.

Drücken Sie `MODE` und wählen Sie aus dem ersten Menü „`4:SEQUENCE`“. Drücken Sie `ENTER ENTER`, um das Dialogfenster zu verlassen.

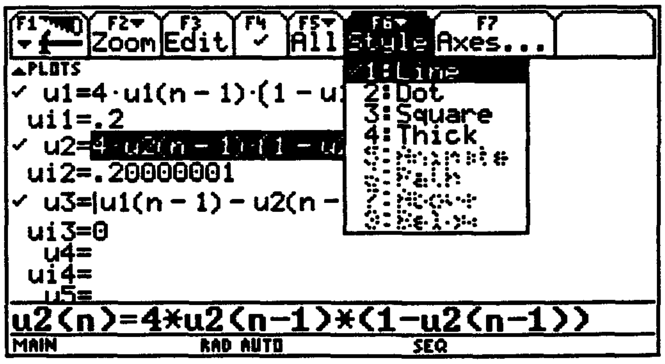


Drücken Sie [KARO]W für „Y=“ und ändern Sie u1 entsprechend. Geben Sie für u2 und u3 die nebenstehenden Funktionen und Startwerte ein.
(Beginnen Sie den Term für u3 mit „abs(..“)

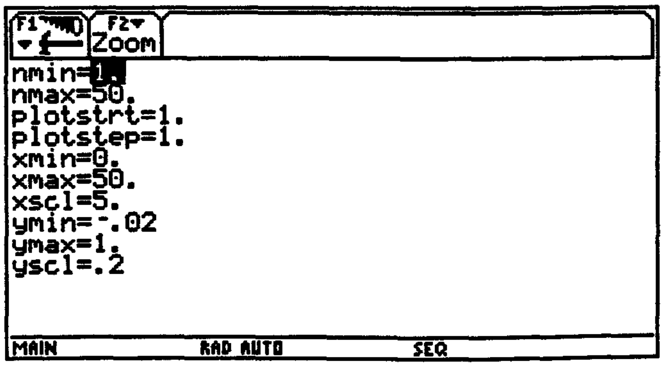


Um alle drei Iterationsverläufe in der Darstellung unterscheiden zu können, müssen wir jeder Funktion einen eigenen Stil zuordnen.

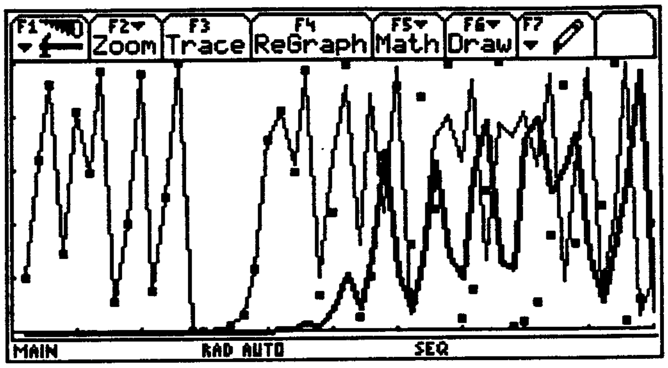
Bewegen Sie den Cursor in die Zeile für u1, drücken Sie `F6` und wählen Sie aus dem Menü „`3:Square`“. Wählen Sie entsprechend für u2 „`1:Line`“ (siehe Bild) und für u3 „`4:Thick`“.



Drücken Sie [KARO]E für „WINDOW“ und geben Sie die nebenstehenden Werte ein.
(Gegenüber der ersten Einstellung müssen Sie nur nmax und xmax von 60 auf 50 ändern)



Drücken Sie [KARO]R für „GRAPH".



Die beiden Iterationsverläufe sind durch die kleinen Quadrate (Start mit 0,2) bzw. die dünne Linie (Start mit 0,20000001) dargestellt. Für die ersten 20 Iterationsschritte liegen beide Verläufe so dicht beieinander, daß sie grafisch nicht zu unterscheiden sind. Danach laufen sie ganz rapide auseinander. Dieses Verhalten ist auch sehr gut an der Darstellung des Unterschieds erkennbar (dicke Linie), der bis zur 20 Iteration praktisch Null ist, danach ansteigt und dann ähnliche Schwankungen vollführt wie die beiden Iterationsverläufe selbst.

Zu Beginn dieses Kapitels haben wir gesehen, daß die Menge der Startwerte für zyklische Iterationen dicht liegt in der Definitionsmenge. Für das Iterieren mit den Winkeln waren es genau alle rationalen Winkelmaße, alle irrationalen Startwerte führen nicht zu einem zyklischen Verlauf, das kann man exakt beweisen. Wegen der bijektiven Zuordnung zum Iterationsverlauf der Grundfunktion $f(x) = 4x(1-x)$ gibt es also auch für diese nicht zyklische Iterationsverläufe. Die Iteration nimmt dann mit jedem weiteren Schritt einen Wert an, den sie in allen vorhergehenden Schritten noch nicht angenommen hat.

Für die Vielfalt der verschiedenen Werte wird an eine chaotische Iteration aber eine noch schärfere Forderung gestellt: Es muß Startwerte geben, so daß der Iterationsverlauf jeder Zahl aus der Wertemenge der Funktion beliebig nahe kommt.

Ein Beispiel soll zeigen, daß das eine Verschärfung ist gegenüber der Eigenschaft, nicht periodisch zu sein. Iteriert man zum Beispiel mit $f(x) = 0{,}5x$, legt als Definitionsmenge das Intervall $[0,1]$ fest und startet die Iteration mit 1, so ist der Iterationsverlauf $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

Er ist nicht periodisch, kommt aber $\frac{1}{3}$ nicht beliebig nahe, der kleinste Abstand ist der zu $\frac{1}{4}$ und er beträgt $\frac{1}{12}$.

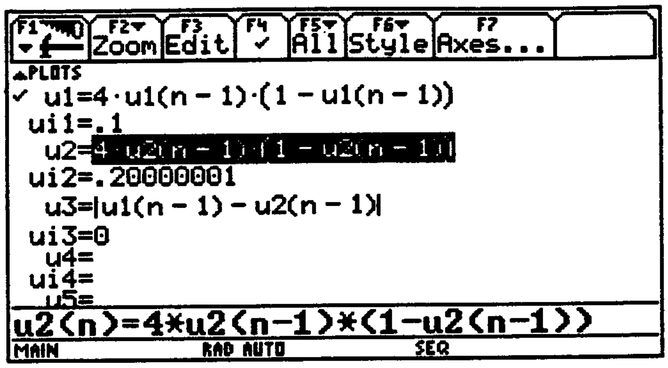
Die dritte Eigenschaft, die eine chaotische Iteration haben muß, heißt Mischungseigenschaft[1].

Mischung Es gibt Startzahlen, so daß der Iterationsverlauf jeder Zahl aus dem Wertebereich der Funktion beliebig nahe kommt.

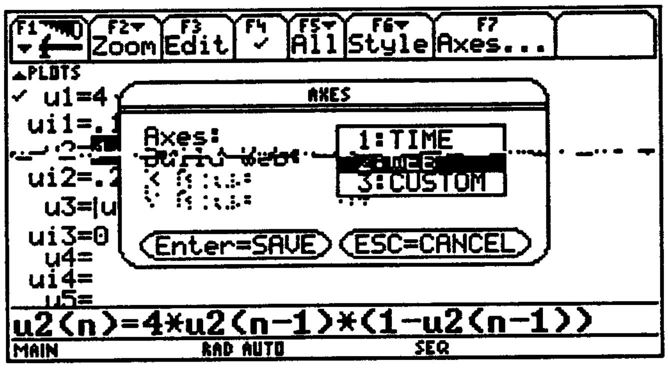
[1] *Die drei Eigenschaften des Chaos, Sensitivität, Mischung und dichte, periodische Punkte stammen von dem Mathematiker Devaney und haben eine exakte, mathematische Formulierung. Die hier gewählten, umgangssprachlichen Formulierungen orientieren sich an dem, was wir hier mit dem TI - 92 erforschen*

Diese Eigenschaft erfüllt die Iteration mit f(x) = 4x(1-x) , was sich sehr anschaulich mit einem Iterationspfad darstellen läßt.

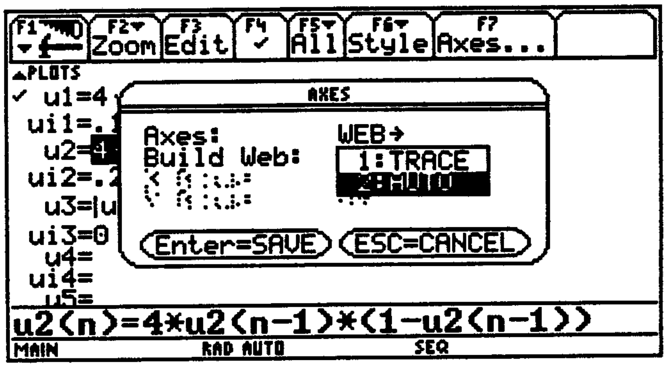
Drücken Sie [KARO]W für „Y=“ und deaktivieren Sie mit F4 u2 und u3.
Ändern Sie den Startwert ui1 ab in 0.1.



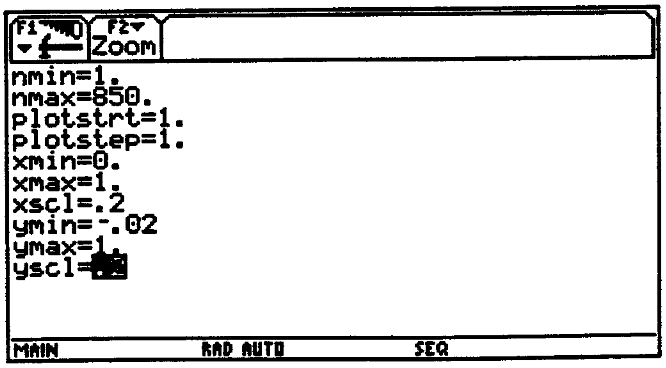
Drücken Sie F7 und wählen Sie aus dem Menü für Axes „2:WEB“. Geben Sie es mit ENTER ein.



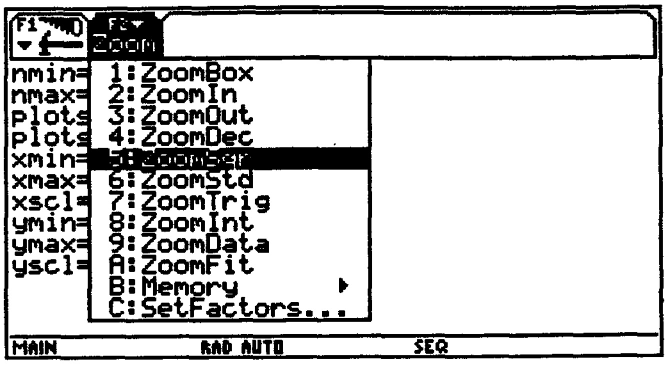
Gehen Sie mit [runter] eine Zeile tiefer und wählen Sie aus diesem Menü „2:AUTO“.



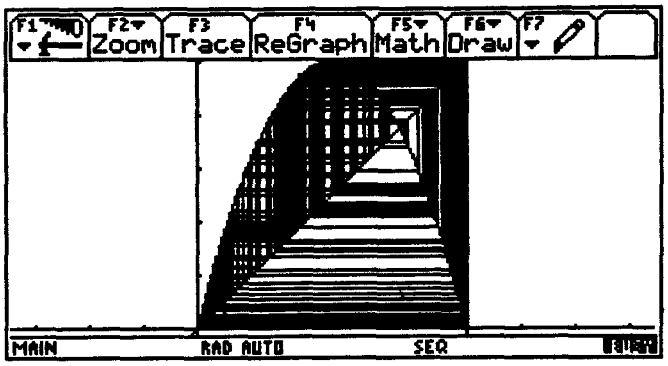
Drücken Sie [KARO]E für „WINDOW“ und geben Sie die nebenstehenden Werte ein.



Drücken Sie F2 und wählen Sie aus dem Menü „5:ZoomSqr“.

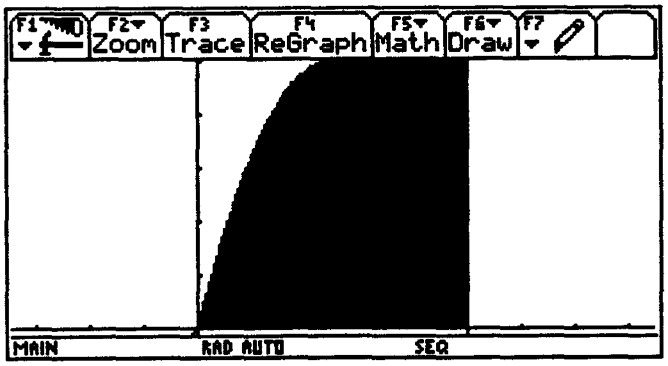


Der Rechner zeichnet automatisch den Graph der Funktion f(x) = 4x(1-x), die Gerade zu y= x und beginnt, den Iterationspfad zu zeichnen.



Das Koordinatensystem ist so gewählt, daß ein Pixel in beiden Richtungen 0,01 lang ist. Jede Linie des Iterationspfades zeigt also, daß ein Wert innerhalb des zugehörigen, 0,01 langen Intervalls getroffen wurde.

In der weiteren Entwicklung der Darstellung sieht man, daß immer mehr weiße Flächen eingefärbt werden, d.h. der Iterationspfad 0,01 breite Intervalle trifft, die er bisher nicht erreicht hatte.



Nach unseren gewählten 850 Iterationsschritten hat der Iterationsverlauf alle 100 0,01 breiten Intervalle der Wertemenge [0,1] getroffen, die gesamte, erreichbare Fläche ist schwarz ausgefüllt. Damit hat sich der Iterationsverlauf nach 850 Schritten jeder Zahl aus [0,1] auf mindestens 0,01 genähert.

Auf Computern mit einer feineren Auflösung kann man demonstrieren, daß dieser Prozeß sich fortsetzt und der Iterationsverlauf z.B. alle 500 0,002 breiten Intervalle trifft, wenn man nur lange genug iteriert.

Weiterhin läßt sich die Mischungseigenschaft, wie auch die beiden anderen Eigenschaften, auf der Basis ihrer exakten Formulierung für die Funktion f(x) = 4x(1-x) beweisen.

Damit ist der Lehrgang abgeschlossen, der gleichzeitig zwei Ziele hatte: Zum einen sollten Sie wesentliche Fähigkeiten des TI - 92 (besser) kennenlernen und zum anderen sollten Sie am Beispiel der Iteration mit einer quadratischen Funktionenschar erfahren, was sich hinter dem Begriff „Chaos“ verbirgt. Beide Themen, TI - 92 und Chaosmathematik, lassen sich hervorragend verbinden und in der Form von mathematischen Experimenten erforschen. Und beide befruchten sich gegenseitig, denn ohne Computerunterstützung kann man bei der Erforschung der Chaosmathematik nicht sehr weit kommen, und das aufgezeigte Beispiel aus der Chaosmathematik zeigt, daß es ein interessantes, anregendes Gebiet ist, das sich geradezu dazu anbietet, einen so leistungsfähigen Rechner wie den TI - 92 zu erforschen und in seinen Fähigkeiten auszureizen.

Ich hoffe, daß diese Darstellung Sie angeregt hat, nicht bei den aufgezeigten Beispielen stehenzubleiben, sondern auf eigene Faust weiterzuforschen und so mehr herauszufinden über die Chaosmathematik und über den TI - 92.