Barbara Dickhut

Thetalifts von Poincaré- und Eisensteinreihen und zugehörige Zetafunktionen auf dem dreidimensionalen hyperbolischen Raum

-2003-

Reine Mathematik

Thetalifts von Poincaré- und Eisensteinreihen und zugehörige Zetafunktionen auf dem dreidimensionalen hyperbolischen Raum

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
durch den Fachbereich Mathematik und Informatik
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von

Barbara Dickhut
aus Lippstadt

-2003-

Dekan:	Prof. Dr. Frank Natterer
Erster Gutachter:	Prof. Dr. Jürgen Elstrodt
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. Meinhard Peters
Tage der mündlichen Prüfungen:	01.12.2003, 03.12.2003, 11.12.2003
Tag der Promotion:	17.12.2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im Jahr 1999 veröffentlichte R. Matthes die Arbeit [30] *On some Poincaré-series on hyperbolic space.* In dieser Arbeit werden Thetalifts von reell-analytischen Poincaré-Reihen auf der oberen Halbebene zu einer Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(N)$ der Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ betrachtet. Es wird ein Zusammenhang hergestellt mit Poincaré-Reihen bezüglich des hyperbolischen Abstands und einer diskreten koendlichen Untergruppe Γ der orientierungserhaltenden Isometrien $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{H}^n)$ des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes $\mathbb{H}^n$, die ausgewertet werden in den sogenannten Heegner-Punkten bzw. in Hyperebenen. Für den dreidimensionalen Fall wird daraus eine Verallgemeinerung einer Formel von Maaß für die Fourier-koeffizienten von gelifteten Spitzenformen hergeleitet.

Matthes betrachtet Selbergsche Poincaré-Reihen auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ der Gestalt

$$P_\nu(z,s) := \sum_{T=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)} \overline{v_n(T)}e^{i\frac{n-1}{2}\arg(cz+d)}y_T^s e^{2\pi i(\nu x_T + i|\nu|y_T)},$$

wobei $x_T + iy_T := Tz, \mathrm{Re}(s) > 1$. ν bezeichnet eine Fundamentaldiskriminante und v_n einen geeigneten Multiplikator.

Für eine diskrete koendliche Untergruppe Γ von $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{H}^n)$ wird die durch δ und bezüglich Γ gebildete Poincaré-Reihe definiert durch

$$H(P,Q,s) := \sum_{\gamma\in\Gamma}(\delta(P,\gamma Q))^{-(n-2+s)},$$

wobei δ gegeben ist durch $\delta(P,Q) := 2\cosh(d(P,Q))$. $d(P,Q)$ bezeichnet den hyperbolischen Abstand der Punkte $P, Q \in \mathbb{H}^n$. Die Funktion δ ist eine Punkt-Paar-Invariante, d.h. für jedes $\gamma \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{H}^n)$ ist $\delta(\gamma P, Q) = \delta(P, \gamma^{-1}Q)$.

$H(P,Q,s)$ konvergiert absolut für $\mathrm{Re}(s) > 1$ und spielt in der Untersuchung der Verteilung von hyperbolischen Gitterpunkten eine bedeutende Rolle (vgl. [22] und [23] für den Fall $n = 2$ und [10] für den Fall $n = 3$).

Für eine quadratische Form Q der Signatur $(1,n)$, $z = x+iy \in \mathbb{H}, w \in \mathbb{H}^n$ und eine (von w abhängige) Majorante H_w von Q wird nun von Matthes eine geeignete Siegelsche Thetafunktion

$$\theta_{Q,H}(z,w) = \sum_{a\in\mathbb{Z}^{n+1}} e^{2\pi i(xQ[a]+iyH_w[a])}$$

mit einem einfachen Transformationsverhalten unter einer Gruppe $\Gamma_0(N)$ definiert. Es wird die mit dieser Thetafunktion geliftete Poincaré-Reihe

$$\begin{aligned} P_\nu^\theta(w,s) &= \int_{\mathcal{F}_N} P_\nu(z,s) y^{\frac{n+1}{4}} \overline{\theta_{Q,H}(z,w)} d\nu(z) \\ &= \frac{\Gamma\big(s+\frac{n-3}{4}\big)}{(2\pi)^{s+\frac{n-3}{4}}} \sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^{n+1}\\ Q[a]=\nu}} \frac{1}{(H_w[a]+|\nu|)^{s+\frac{n-3}{4}}} \end{aligned}$$

betrachtet. $\mathcal{F}_N$ bezeichnet dabei einen Fundamentalbereich von $\Gamma_0(N)$.

Um $P_\nu^\theta(w,s)$ als Funktion von δ zu schreiben, wird die obige Summationsbedingung umgeschrieben als Summation über *hermitesche* (2×2)-Matrizen über $\mathcal{C}_{n-2}$ mit fester Determinante $\nu \neq 0$, wobei $\mathcal{C}_k$ die zum quadratischen Raum $(\mathbb{R}^k, q)$ mit $q(x_1,...,x_k) = -(x_1^2+...+x_k^2)$ assoziierte Clifford-Algebra bezeichnet. Diesen hermiteschen Matrizen sind im Fall $\nu > 0$ Punkte im n-dimensionalen hyperbolischen Raum $\mathbb{H}^n$ zugeordnet, die sogenannten *Heegner-Punkte*, bzw. im Fall $\nu < 0$ Hyperebenen. Das Hauptresultat der Arbeit von Matthes lautet wie folgt:

1 Theorem *Sei $\Gamma(Q)$ die Einheitengruppe von Q und ν eine Fundamentaldiskriminante. $\{a_i, i\in I\}$ bezeichne ein vollständiges Vertretersystem der Aktion von $\Gamma(Q)$ auf $\{a \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid Q[a]=\nu\}$ mit Isotropiegruppe $\mathcal{P}_i$. Für $\nu > 0$ besitzt $\mathcal{P}_i$ endliche Ordnung f_i. Seien η_i die zu a_i gehörigen Heegner-Punkte und g_i die zu a_i gehörigen Hyperebenen. Dann gilt für* $\mathrm{Re}(s) > \frac{n+1}{4}$:

1. *Im Fall $\nu > 0$ ist*

$$P_\nu^\theta(w,s) = \frac{\Gamma(s+\frac{n-3}{4})}{(4\pi\nu)^{s+\frac{n-3}{4}}} \sum_{i\in I} \frac{1}{f_i} H\big(w,\eta_i, 2s-\tfrac{n-1}{2}\big)$$

für $w \in \mathbb{H}^n$. Die Summe enthält nur endlich viele Terme.

2. Im Fall $\nu < 0$ ist

$$P_\nu^\theta(w,s) = \frac{1}{2^{4s+n-4}\pi^{s+\frac{3n-7}{4}}|\nu|^{s+\frac{n-3}{4}}}\frac{\Gamma(2s+\frac{n-3}{2})}{\Gamma(s-\frac{n-1}{4})}$$
$$\cdot \sum_{i\in I}\int_{\mathcal{P}_i\backslash g_i} H\big(w,\omega,2s-\tfrac{n-1}{2}\big)d\sigma(\omega)$$

für $w \in \mathbb{H}^n$, und die Summe enthält nur endlich viele Terme. $d\sigma$ bezeichnet das hyperbolische Maß auf der Hyperebene.

Für den dreidimensionalen hyperbolischen Raum ergibt sich aus Theorem 1 mittels der Beziehung $\big\langle P_\nu^\theta(\cdot,s),e_m\big\rangle_\Gamma = \big\langle P_\nu(\cdot,s),e_m^\theta\big\rangle_{\Gamma_0(N)}$ als Korollar eine verallgemeinerte Koeffizientenformel für die Fourierkoeffizienten einer gelifteten Spitzenform. Dazu ist die Spektralzerlegung von $H\big(w,\eta_i,2s-\frac{n-1}{2}\big)$ und die Fourierentwicklung einer gelifteten Spitzenform e_m^θ zu berechnen.

2 Korollar (Verallgemeinerte Koeffizientenformel)
Seien $n=3$, $\Gamma=\Gamma(Q)$ und e_m eine Spitzenform auf $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$. Dann sind die Fourierkoeffizienten ρ_m der gelifteten Spitzenform e_m^θ im Fall $\nu>0$ im Wesentlichen gegeben als Summe der Werte von e_m in den Heegner-Punkten η_i :

$$\rho_m(\nu) = \frac{\sqrt{\pi}}{4|\nu|}\sum_{i\in I}\frac{1}{f_i}e_m(\eta_i).$$

Im Fall $\nu<0$ hat man

$$\rho_m(\nu) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}|\nu|}\sum_{i\in I}\int_{\mathcal{P}_i\backslash g_i} e_m(\omega)d\sigma(\omega).$$

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit werden die Aussagen von Matthes auf den dreidimensionalen hyperbolischen Raum mit der Aktion der Gruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ übertragen, wobei $\mathcal{O}$ den Ring der ganzen Zahlen eines imaginärquadratischen Zahlkörpers K bezeichnet.

In Kapitel 1 werden grundlegende Bezeichnungen und elementare Eigenschaften der Gruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}) < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ sowie deren Kongruenzuntergruppen zusammengestellt.

Ausgehend von der Arbeit [34] von O. Richter wird in Kapitel 2 eine geeignete *Siegelsche Thetafunktion* $\Theta_{S,H}(P)$ auf dem oberen Halbraum $\mathbb{H}^3$ zu einer geraden quaternären quadratischen Form S über $\mathcal{O}$, einer zugehörigen (komplexen) Majorante H und einem Ideal $I \subset \mathcal{O}$ eingeführt. Diese besitzt ein einfaches Transformationsverhalten unter einer gewissen Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(N)$ von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ und dient als Integrationskern des im Anschluss konstruierten Thetalifts. Es wird ein verallgemeinerter Siegelscher Transformationssatz für Thetafunktionen bewiesen, welcher das Transformationsverhalten der Thetafunktion unter $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ angibt. Um davon ausgehend Aussagen über das Verhalten der Thetafunktion in den Spitzen von $\Gamma < \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ treffen zu können, ist die Klassenzahl von K als 1 vorauszusetzen.

In Kapitel 3 wird die zur Kongruenzuntergruppe $\Gamma = T^{-1}\Gamma_0(N)T < \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ gehörige *Poincaré-Reihe* $P_{\tilde{\mu}}(P,s)$ auf dem oberen Halbraum definiert. Dabei ist T eine geeignete Transformationsmatrix und $\tilde{\mu} \in \Lambda_\infty^\#$, wobei $\Lambda_\infty = \tau_D^{-1}\mathcal{O}$ das zu Γ'_∞ gehörige Gitter bezeichnet.
Durch Parametrisierung der Majorante H von S in Abhängigkeit von $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ wird die Thetafunktion aufgefasst als Funktion auf $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3$. $\theta(P, w, w_0)$ konvergiert für festes w_0 kompakt gleichmäßig absolut auf $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3$. Bildet man für $\mathrm{Re}(s) > 1$ und $\tilde{\mu} \neq 0$ das Skalarprodukt der in den Spitzen von Γ exponentiell verschwindenden Poincaré-Reihe mit der Thetafunktion, so stellt sich eine *Zetafunktion* $Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$ ein, die als Thetalift der Poincaré-Reihe aufgefasst werden kann.

Ziel ist es, die Zetafunktion als Poincaré-Reihe $\tilde{H}(w, w_0, s)$ zu einer geeigneten koendlichen Untergruppe Γ^* von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ zu schreiben.
Mit Hilfe einer Einbettung von $\mathcal{O}^4$ in den Modul $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})$ der (2×2)-Matrizen über $\mathcal{O}$ lässt sich die Summationsbedingung bei der Zetafunkion $Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$ umschreiben als Summation über gewisse Matrizen aus $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})$ mit fester Determinante $0 \neq \mu \in \mathcal{O}$. Es wird eine koendliche Gruppe $\Gamma^* < \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ angegeben, die auf diesen Matrizen (bijektiv) durch Multiplikation von links (und von rechts) operiert, wobei die Zahl der Bahnen endlich ist. Γ^* ist kommensurabel mit $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$. Weiter wird ein vollständiges Vertretersystem $\{A_j, j \in J\}$ der Rechtsnebenklassen bezüglich dieser Operation von Γ^* gewählt. Die Zetafunktion ist als geliftete Poincaré-Reihe eine Funktion der hyperbolischen Abstandsfunktion δ und folglich in den Variablen w, w_0 invariant unter $\Gamma^* \times \Gamma^*$. $Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$ kann somit als Poincaré-Reihe $\tilde{H}(w, \eta_j, s)$ geschrieben werden, die ausgewertet wird in den Punkten $\eta_j = A_j w_0 \in \mathbb{H}^3$. Dies ist die Aussage des Hauptsatzes Theorem 4.2.16. Mit Hilfe der Spektralzerlegung von $\tilde{H}(w, w_0, s)$ lässt sich dann die Spektralzerlegung der Zetafunktion angeben, und es zeigt sich, dass die Zetafunktion eine auf die ganze komplexe Ebene meromorph fortsetzbare Funktion ist, die holomorph in der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 0$ ist bis auf einen Pol der Ordnung 1 in $s = 1$. Weiter werden Aussagen über das asymptotische Verhalten von $\tilde{H}(w, w_0, s)$ bzw. $Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$ an der Konvergenzabszisse $s = 1$ aufgeführt.

Bildet man das Skalarprodukt der Poincaré-Reihe $P_{\tilde{\mu}}(P, s)$ mit einer gelifteten Spitzenform, so wird der $\tilde{\mu}$-te Fourierkoeffizient der gelifteten Spitzenform extrahiert. Dieses Skalarprodukt stimmt überein mit demjenigen der Zetafunktion und der Spitzenform selbst, und mit der Spektralzerlegung der Zetafunktion erhält man dann durch Vergleich der berechneten Skalarprodukte als Korollar eine verallgemeinerte Koeffizientenformel für die Fourierkoeffizienten einer gelifteten Spitzenform (vgl. Kapitel 5).

In Kapitel 6 werden die allgemeinen Ergebnisse an Hand eines Spezialfalls erläutert. Es wird der Ring $\mathbb{Z}[i]$ der ganzen Gaußschen Zahlen betrachtet. Die der Thetafunktion zu Grunde liegende quadratische Form S wird konkret gewählt. In diesem Spezialfall wird eine geeignete Gruppe Γ^* explizit angegeben und die Abhängigkeit der Zetafunktion von der hyperbolischen Abstandsfunktion δ elementar nachgerechnet.

Im zweiten Teil der Arbeit (vgl. Kapitel 7) wird die Rankin-Selberg-Methode für (Γ, χ)-automorphe Funktionen für den Fall des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes mit der Aktion einer koendlichen Untergruppe Γ von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ behandelt.

Die Idee der Rankin-Selberg-Methode ist es, L-Funktionen als Integral einer oder mehrerer automorpher Funktionen gegen eine Eisensteinreihe darzustellen. Die Funktionalgleichung der Eisensteinreihe geht dann über auf die L-Funktion.

Im klassischen Fall der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ mit der Aktion der Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ beinhaltet die Rankin-Selberg-Methode Folgendes: Es seien $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-automorphe Funktion und $z = x + iy \in \mathbb{H}$. Dann besitzt f (in ∞) eine Fourierentwicklung der Gestalt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(y) e^{2\pi i n x}.$$

$E(z, s)$ sei die reell-analytische Eisensteinreihe, die für $\mathrm{Re}(s) > 1$ definiert ist durch

$$E(z, s) = \sum_{\gamma \in (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} y(\gamma z)^s = \frac{1}{2} y^s \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} |cz + d|^{-2s},$$

wobei $y(\gamma z) = \mathrm{Im}(\gamma z)$. Dann folgt mit Hilfe des typischen „Auseinanderfaltungstricks“ *(unfolding trick)* für $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}} f(z)E(z,s)d\mu(z) &= \int_{(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))_\infty\backslash\mathbb{H}} f(z)y^s d\mu(z) \\ &= \int_0^\infty \Big(\int_0^1 f(x+iy)dx\Big)y^{s-2}dy \\ &= \int_0^\infty a_0(y)y^{s-2}dy.\end{aligned}$$

Für die absolute Konvergenz des Integrals muss dabei vorausgesetzt werden, dass f für $y \to \infty$ hinreichend schnell verschwindet und für $y \to +0$ (gleichmäßig in x) polynomial wächst, was speziell für Spitzenformen erfüllt ist. Die meromorphe Fortsetzbarkeit auf die ganze komplexe Ebene und die Funktionalgleichung der Rankin-Selberg-Transformierten

$$R(f,s) := \int_0^\infty a_0(y)y^{s-2}dy$$

folgen aus der meromorphen Fortsetzbarkeit und der Funktionalgleichung der Eisensteinreihe $E(z,s)$.

Die Rankin-Selberg-Methode wurde von Zagier [42] erweitert auf automorphe Formen, die für $y \to \infty$ nicht hinreichend schnell abfallen, wobei ein vereinfachter Beweis des in [42] formulierten Theorems angegeben ist in [17]. Eine Erweiterung auf Kongruenzuntergruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ findet sich in [16]. Der dort angegebene Beweisansatz ist jedoch zu korrigieren.

In der vorliegenden Arbeit werden die meromorphe Fortsetzbarkeit der Rankin-Selberg-Transformierten auf die gesamte komplexe Ebene sowie eine Funktionalgleichung für die Rankin-Selberg-Transformierte für den Fall des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes mit der Aktion einer beliebigen koendlichen Untergruppe Γ von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ bewiesen. An Γ werden keine Zusatzvoraussetzungen gestellt. Es werden (Γ,χ)-automorphe Funktionen betrachtet, die für $r \to \infty$ nicht hinreichend schnell abfallen. Da der Charakter χ als nichttrivial auf Γ vorausgesetzt ist, wird die Rankin-Selberg-Transformierte nur für die singulären Spitzen von Γ erklärt. Wie im klassischen Fall ergibt sich die Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung für die Rankin-Selberg-Transformierte aus der Fortsetzbarkeit und der Funktionalgleichung der Eisensteinreihen.

Bei der Berechnung der Rankin-Selberg-Transformierten der Thetafunktion für die Kongruenzuntergruppe $\Gamma = T^{-1}\Gamma_0(\delta_K q)T$ von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ stellt sich eine Zetafunktion ein, die formal aus der in Kapitel 3 definierten Zetafunktion $Z_{\tilde{\mu}}(w,w_0,s)$ hervorgeht, wenn $\tilde{\mu} = 0$ gesetzt wird. Formal lässt sich $Z_0(w, w_0, s)$ auffassen als geliftete Eisensteinreihe, wobei der nullte Summand der als Integrationskern dienenden Thetafunktion auszuschließen ist. Abschließend wird das asymptotische Verhalten der Zetafunktion $Z_0(w, w_0, s)$ beschrieben.

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. J. Elstrodt für die Anregung zu dieser Arbeit und seine stets freundliche Begleitung und Betreuung bedanken. Mein besonderer Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. F. Grunewald, der mir bei einigen Problemen weitergeholfen und wertvolle Hinweise gegeben hat. Außerdem möchte ich mich bei meinen Kommilitonen bedanken, die mich durch das Studium und diese Arbeit begleitet haben. Erwähnen möchte ich hier insbesondere Christian Blex und Nicole Raulf. Bei Dominik Völker bedanke ich mich für nützliche Tipps im Umgang mit LaTeX. Mein Dank gilt ferner der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Förderung im Rahmen des Graduiertenkollegs „Analytische Topologie und Metageometrie“ sowie Herrn Prof. Dr. W. Scharlau für die immer angenehme Arbeitsatmosphäre.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Der dreidimensionale hyperbolische Raum

Als Modell des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes wird der obere Halbraum

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^3 &:= \mathbb{C}\times]0,\infty[\\ &= \{(z,r) \mid z \in \mathbb{C}, r > 0\} \\ &= \{(x,y,z) \mid x,y \in \mathbb{R}, r > 0\} \end{aligned}$$

betrachtet, welcher aufgefasst wird als Teilraum der Hamiltonschen Quaternionen $\mathcal{H} := \mathcal{H}(-1,-1)$. Mit der Standard-$\mathbb{R}$-Basis $1, i, j, k$ von $\mathcal{H}$ schreibt man für Punkte aus $\mathbb{H}^3$

$$P = (z,r) = (x,y,r) = z + rj,$$

wobei $z = x + iy$, $j = (0,0,1)$. Punkte aus dem oberen Halbraum werden also geschrieben als Quaternionen mit verschwindender vierter Komponente.

$\mathbb{H}^3$ wird versehen mit der hyperbolischen Metrik

$$ds^2 := \frac{dx^2 + dy^2 + dr^2}{r^2}. \tag{1.1.1}$$

Das zugehörige Volumenelement ist gegeben durch

$$d\nu := \frac{dxdydr}{r^3},$$

und der zu (1.1.1) gehörige hyperbolische Laplace-Beltrami-Operator hat die Gestalt

$$\Delta := r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) - r\frac{\partial}{\partial r}. \tag{1.1.2}$$

Auf dem oberen Halbraum $\mathbb{H}^3$ operiert die Gruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm E_2\}$ der orientierungstreuen Isometrien für die hyperbolische Metrik vermöge der *Möbius-Transformation*

$$P \longmapsto MP := (aP+b)(cP+d)^{-1} \tag{1.1.3}$$

($P \in \mathbb{H}^3, M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$), wobei die Inversenbildung im Schiefkörper der Quaternionen vorzunehmen ist. Die Operation von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{H}^3$ ist effektiv.

In der gesamten Arbeit wird die Bezeichnung $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ sowohl für Elemente von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ als auch für ihre Klassen in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ benutzt.

1.1.1 Folgerung *Für $P = z + jr \in \mathbb{H}^3$ und $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ kann* (1.1.3) *in der Form $M(z+jr) = z^* + jr^*$ geschrieben werden mit Koordinaten*

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{(az+b)(\overline{cz}+\overline{d}) + a\overline{c}r^2}{|cz+d|^2 + |c|^2r^2}, \\ r^* &= \frac{r}{|cz+d|^2+|c|^2r^2} = \frac{r}{\|cP+d\|^2}. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Dabei bezeichnet $\|cP+d\|$ die euklidische Norm des Vektors $cP+d \in \mathbb{R}^4$:

$$\|cP+d\|^2 = |cz+d|^2 + |c|^2r^2.$$

BEWEIS: Nachrechnen. □

1.1.2 Satz *Die hyperbolische Metrik und damit auch der hyperbolische Abstand sowie das hyperbolische Volumenelement sind $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$-invariant. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ ist die Gruppe orientierungserhaltender Bewegungen der hyperbolischen Geometrie in $\mathbb{H}^3$. Man identifiziert $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Iso}^+(\mathbb{H}^3)$.*

BEWEIS: Siehe [4]. Die Invarianz der hyperbolischen Metrik lässt sich leicht für die Erzeuger $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ nachweisen. □

1.1.3 Folgerung *Aus der Invarianz der hyperbolischen Metrik in Bezug auf $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ folgt die $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$-Invarianz des hyperbolischen Laplace-Beltrami-Operators Δ, d.h.*

$$\Delta(f \circ S) = (\Delta f) \circ S \quad \textit{für } S \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \textit{ und } f \in C^2(\mathbb{H}^3).$$

BEWEIS: Die Bemerkung ist Konsequenz eines allgemeinen Satzes, siehe ([19], S. 387, Prop. 2.1). Die Invarianz lässt sich jedoch auch direkt für die Erzeuger von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ nachrechnen. □

Im Folgenden wird eine Operation von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{H}^3$ benötigt.

1.1.4 Definition Für $P \in \mathbb{H}^3$ und $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sei

$$MP := (\sqrt{\det(M)})^{-1}(aP+b)(cP+d)^{-1}\sqrt{\det(M)}, \tag{1.1.5}$$

wobei $\sqrt{\det(M)}$ den Hauptzweig der Wurzel bezeichnet, der durch die Argumentfixierung $-\pi < \arg(\cdot) \le \pi$ festgelegt ist. Die Inversenbildung ist im Schiefkörper der Quaternionen vorzunehmen.

1.1.5 Folgerung

1. *Durch* (1.1.5) *wird eine Operation von* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *auf dem oberen Halbraum* $\mathbb{H}^3$ *definiert.*

2. *Für* $P = z + jr \in \mathbb{H}^3$ *und* $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *lässt sich* (1.1.5) *in der Form*
$$M(z+jr) = z^* + jr^*$$
schreiben mit Koordinaten
$$\begin{aligned} z^* &= \frac{(az+b)(\overline{cz}+\overline{d}) + a\overline{c}r^2}{|cz+d|^2 + |c|^2r^2} = \frac{(az+b)(\overline{cz}+\overline{d}) + a\overline{c}r^2}{\|cP+d\|^2}, \\ r^* &= \frac{|\det(M)|r}{|cz+d|^2+|c|^2r^2} = \frac{|\det(M)|r}{\|cP+d\|^2}. \end{aligned}$$

3. *Das Zentrum* $Z_\infty := \{\alpha E \mid \alpha \in \mathbb{C}^*\}$ *von* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *operiert trivial auf* $\mathbb{H}^3$*, d.h. für* $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *und* $P \in \mathbb{H}^3$ *gilt:*
$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P = P.$$
Daher definiert die Operation von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *auf* $\mathbb{H}^3$ *in natürlicher Weise auch eine Operation von* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ *auf* $\mathbb{H}^3$*.*

4. *Es gilt:*
$$\begin{pmatrix} \sqrt{r} & z\sqrt{r}^{-1} \\ 0 & \sqrt{r}^{-1} \end{pmatrix} j = \begin{pmatrix} r & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} j = z + jr,$$
d.h. die Borel-Gruppe
$$B_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{r} & z\sqrt{r}^{-1} \\ 0 & \sqrt{r}^{-1} \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C}, r > 0 \right\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$
operiert bereits transitiv auf $\mathbb{H}^3$*.*

5. *Der Stabilisator des Punktes $j \in \mathbb{H}^3$ in Bezug auf die Operation* (1.1.5) *ist gegeben durch* $\mathrm{SU}(2)Z_\infty$. *Daher kann* $\mathbb{H}^3$ *mit dem symmetrischen Raum*
$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathrm{SU}(2)Z_\infty = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\mathrm{SU}(2)$$
identifiziert werden.

Beweis: Nachrechnen. Vgl. ([20], S. 60f.). □

1.1.6 Bemerkung Wegen Folgerung 1.1.5, *3.* ist die hyperbolische Metrik auch invariant unter $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. Damit folgen die Invarianz des hyperbolischen Abstands sowie des hyperbolischen Volumenelements und des hyperbolischen Laplace-Beltrami-Operators unter $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. ◊

1.1.7 Definition Für $P, Q \in \mathbb{H}^3, P = z_P + jr_P, Q = z_Q + jr_Q$, sei
$$\delta(P,Q) \;:=\; \frac{|z_P - z_Q|^2 + r_P^2 + r_Q^2}{2r_P r_Q}. \tag{1.1.6}$$

1.1.8 Satz *Für* $P, Q \in \mathbb{H}^3$ *ist der* hyperbolische Abstand $d(P,Q)$ *gegeben durch*
$$\cosh d(P,Q) = \delta(P,Q).$$
Insbesondere ist δ eine Punkt-Paar-Invariante, *d.h.* $\delta(MP, MQ) = \delta(P,Q)$ *für alle* $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Beweis: Vgl. ([10], S. 6, Prop. 1.6). Aus der Punkt-Paar-Invarianz von δ unter $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ergibt sich mit Folgerung 1.1.5, *3.* die Punkt-Paar-Invarianz von δ unter $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. □

Im Folgenden wird auf Grund der einfachen Gestalt von δ mit δ an Stelle des hyperbolischen Abstands d gearbeitet.

1.1.9 Satz *Für* $P, Q \in \mathbb{H}^3, P = z_P + jr_P, Q = z_Q + jr_Q$ *und* $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *gilt:*
$$\begin{aligned}\delta(P, MQ) \;=\; \frac{1}{2r_P r_Q}\Big(&\big|(az_Q + b) - z_P(cz_Q + d)\big|^2 + |-cz_P + a|^2 r_Q^2 \\ &+ |cz_Q + d|^2 r_P^2 + |c|^2 r_P^2 r_Q^2\Big).\end{aligned}$$
Für feste $P, Q \in \mathbb{H}^3$ *ist der Ausdruck* $\delta(P, MQ)$ *daher eine positiv definite hermitesche Form in* a, b, c, d.

Beweis: Vgl. ([10], S. 7, Prop. 1.7). □

Folgerung 1.1.10 ist wesentlich für die Ableitung der δ-Abhängigkeit der Thetafunktion in Kapitel 4.

1.1.10 Folgerung *Für* $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *gilt:*

$$|\det(M)|\delta(j, Mj) = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(M\overline{M}^t) = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2),$$

also insbesondere:

$$\delta(j, Mj) = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(M\overline{M}^t) = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)$$

für $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Beweis: Die Behauptung ergibt sich durch elementares Nachrechnen unter Benutzung von (1.1.6) und Folgerung 1.1.5. Für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ist $Mj = z_{Mj} + jr_{Mj}$ mit $z_{Mj} = \frac{b\overline{d}+a\overline{c}}{\|cj+d\|^2}, r_{Mj} = \frac{|\det(M)|}{\|cj+d\|^2}$, wobei $\|cj + d\|^2 = |c|^2 + |d|^2$, so dass man erhält:

$$\begin{aligned} \delta(j, Mj) &= \frac{|z_j - z_{Mj}|^2 + r_j^2 + r_{Mj}^2}{2r_j r_{Mj}} \\ &= \frac{|b\overline{d} + a\overline{c}|^2 + (|c|^2 + |d|^2)^2 + |ad - bc|^2}{2|ad - bc|(|c|^2 + |d|^2)} \\ &= \frac{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2}{2|ad - bc|} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Spur}(M\overline{M}^t)}{|\det(M)|}. \end{aligned}$$

□

1.2 Imaginär-quadratische Zahlkörper

Es seien $D < 0$ quadratfrei und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ der imaginär-quadratische Zahlkörper mit der Diskriminante

$$D_K = \begin{cases} D, & \text{falls } D \equiv 1 \bmod 4, \\ 4D, & \text{falls } D \equiv 2, 3 \bmod 4. \end{cases}$$

$\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ bezeichne den Ring der über $\mathbb{Z}$ ganzen Zahlen in K. Dann ist $\mathcal{O}$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang 2, und es ist $\{1, \omega_D\}$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}$ über $\mathbb{Z}$, wobei

$$\omega_D = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{D}}{2}, & \text{falls } D \equiv 1 \bmod 4, \\ \sqrt{D}, & \text{falls } D \equiv 2, 3 \bmod 4. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

1.2.1 Definition Eine Teilmenge $A \subset K, A \neq \{0\}$, heißt *(gebrochenes) Ideal*, falls gilt:

1. A ist eine additive Gruppe.
2. Für $a \in A, b \in \mathcal{O}$ ist $ab \in A$.
3. Es gibt ein $0 \neq a \in \mathcal{O}$ mit $aA \subset \mathcal{O}$.

Die Gruppe der *gebrochenen Ideale* wird im Folgenden mit $\mathcal{M}$ bezeichnet. Ein Ideal heißt *ganz*, falls $A \subset \mathcal{O}$.

Die multiplikative Gruppe K^* von K operiert auf der Gruppe der gebrochenen Ideale $\mathcal{M}$ durch Multiplikation. Der Quotient

$$I_K = \mathcal{M}/K^*$$

übernimmt eine Gruppenstruktur von derjenigen von $\mathcal{M}$. I_K ist eine endliche abelsche Gruppe und wird als Idealklassengruppe von K oder $\mathcal{O}$ bezeichnet. Die Ordnung

$$h = h_K = |I_K|$$

der Idealklassengruppe heißt *Klassenzahl* von K.

Der Ring $\mathcal{O}$ der über $\mathbb{Z}$ ganzen Zahlen in K ist ein *Hauptidealring*, falls K die Klassenzahl Eins besitzt. Dies bedeutet explizit, dass für D nur die Werte

$$\{-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163\}$$

zugelassen sind (vgl. z.B. [32]).

Das Inverse eines Ideals $A \in \mathcal{M}$ ist gegeben durch

$$A^{-1} := \{x \in K \mid xA \subset \mathcal{O}\}.$$

A^{-1} ist ebenfalls ein Ideal. Jedes ganze oder gebrochene Ideal $A \subset \mathcal{O}$ ist ein Gitter in K. Für ein Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ist das bezüglich σ *duale Gitter* $\Lambda^\#$ gegeben durch

$$\Lambda^\# = \{z \in \mathbb{C} \mid \sigma(za) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } a \in \Lambda\}, \tag{1.2.2}$$

wobei $\sigma(za) = \mathrm{Spur}(za) = za + \overline{za} = 2\mathrm{Re}(za) = 2 < \overline{z}, a >$. Offensichtlich gilt $(\Lambda^\#)^\# = \Lambda$. $\Lambda^\#$ ist ein Ideal, falls Λ ein Ideal ist. Die obige Definition des dualen Gitters wird z.B. in [34] gewählt. Wegen $\sigma(za) = 2 < \overline{z}, a >$ gilt für das zu Λ bezüglich $< \cdot, \cdot >$ duale Gitter

$$\Lambda^\circ = \{z \in \mathbb{C} \mid \; < z, a > \in \mathbb{Z} \text{ für alle } a \in \Lambda\},$$

das z.B. in [10] betrachtet wird:

$$\Lambda^{\circ} = 2\overline{\Lambda}^{\#}. \tag{1.2.3}$$

Diese Beziehung wird im Folgenden oft benötigt. Das duale Gitter von $\mathcal{O}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{O}^{\#} = \delta_K^{-1}$$

mit der *Differente* δ_K des Zahlkörpers K. Im vorliegenden Fall $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ und $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\omega_D]$ ist δ_K ein ganzes Hauptideal, und es gilt:

$$\delta_K = (\mu'_{\omega_D}(\omega_D)) = (\omega_D - \overline{\omega_D})\mathcal{O} = \sqrt{D_K}\mathcal{O},$$

wobei $\mu_{\omega_D}(X) = X^2 - \sigma(\omega_D)X + |\omega_D|^2$ das Minimalpolynom von ω_D bezeichnet (vgl. ([32], S. 207)). Mit

$$\tau_D := \frac{1}{\mu'_{\omega_D}(\omega_D)} = \frac{1}{\sqrt{D_K}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{D}}, & \text{falls } D \equiv 1 \bmod 4, \\ \frac{1}{2\sqrt{D}}, & \text{falls } D \equiv 2,3 \bmod 4 \end{cases} \tag{1.2.4}$$

gilt dann:

$$\mathcal{O}^{\#} = \delta_K^{-1} = \tau_D \mathcal{O}.$$

1.2.2 Lemma *Sei $A \in \mathcal{M}$. Dann ist A ein Gitter, und das zu A duale Gitter ist gegeben durch*

$$A^{\#} = \frac{1}{\sqrt{D_K}} A^{-1} = \tau_D A^{-1}$$

mit τ_D wie in (1.2.4).

Beweis: Vgl. ([10], S. 368, Lemma 2.7). Nach Definition des dualen $\mathbb{Z}$-Gitters ist $A^{\#} = A^*$, wobei A^* den Komplementärmodul bezüglich der Spur $\sigma(\cdot) = 2\mathrm{Re}(\cdot)$ bezeichnet. Nach ([28], S. 57) gilt $A^* = \delta_K^{-1} A^{-1}$ mit der Differente δ_K des Zahlkörpers K. Da A^{-1} ein Ideal ist, folgt mit $\delta_K^{-1} = \frac{1}{\sqrt{D_K}}\mathcal{O}$ wegen $\mathcal{O}A^{-1} = A^{-1}$ die Behauptung. $\square$

1.3 Untergruppen von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$

Die Riemannsche Sphäre $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ wird aufgefasst als Rand des oberen Halbraumes $\mathbb{H}^3$. Ein Element von $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ wird beschrieben durch $[x, y]$ mit $x, y \in \mathbb{C}, (x, y) \neq (0, 0)$.

1.3.1 Definition Sei $\Gamma \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ eine Untergruppe. Für ein $P \in \mathbb{H}^3 \cup \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ bezeichnet

$$\Gamma_P := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma P = P\}$$

den *Stabilisator* von P in Γ.

$$\Gamma'_P := \{\gamma \in \Gamma_P \mid \mathrm{Spur}(\gamma) = \pm 2\}$$

ist die maximale unipotente Untergruppe von Γ_P.

1.3.2 Bemerkung Seien $\Gamma < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ eine diskrete Gruppe und $P \in \mathbb{H}^3$. Dann ist der Stabilisator Γ_P von P in Γ eine endliche Gruppe. $\Diamond$

1.3.3 Definition Ein Element $\zeta \in \mathbb{P}^1\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt *Spitze* einer diskreten Gruppe $\Gamma < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, falls der Stabilisator Γ_ζ von ζ eine freie abelsche Gruppe vom Rang 2 enthält. Die Menge der Spitzen von Γ wird mit C_Γ bezeichnet.
Eine Spitze ζ von Γ heißt *singulär* bezüglich eines Charakters χ auf Γ, wenn $\chi|\Gamma_\zeta$ trivial ist, d.h. wenn $\chi(M) = 1$ für alle $M \in \Gamma_\zeta$ gilt.

1.3.4 Satz *Sei $\Gamma < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ eine diskrete Gruppe mit endlichem Kovolumen. Dann hat Γ nur endlich viele Γ-Klassen von Spitzen.*

Beweis: ([10], S. 51). $\square$

Die Untergruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}) < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ hat die folgenden Eigenschaften:

1.3.5 Lemma

1. $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ *ist eine* diskrete *Untergruppe von* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.
2. $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ *hat endliches Kovolumen, ist aber nicht kokompakt.*

Beweis: Vgl. ([10], S. 312). $\square$

1.3.6 Folgerung $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ *besitzt nur endlich viele Klassen von nicht* $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$*-äquivalenten Spitzen.*

Beweis: Klar nach Satz 1.3.4 und Lemma 1.3.5. $\square$

1.3.7 Definition Die Abbildung j sei definiert durch

$$j : \mathbb{P}^1 K \to I_K, \quad [z_1, z_2] \;\mapsto\; < z_1, z_2 >^*$$

mit $< z_1, z_2 >= z_1\mathcal{O} + z_2\mathcal{O}, < z_1, z_2 >^*=$ Klasse von $< z_1, z_2 >$.

1.3.8 Theorem *Die induzierte Abbildung*

$$j : \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})\backslash\mathbb{P}^1K = \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})\backslash C_{\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})} \to I_K$$

ist eine Bijektion.

Beweis: Vgl. ([10], S. 315). □

1.3.9 Folgerung *Ist $\mathcal{O}$ ein Hauptidealring, so gibt es nur eine Spitzenklasse in* $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$*. Insbesondere sind in diesem Fall alle Spitzen von* $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$*-äquivalent zu* ∞*.*

Für ein Ideal $0 \neq A \subset \mathcal{O}$ ist die *Hauptkongruenzgruppe* der Stufe A gegeben durch

$$\Gamma(A) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod A \right\}.$$

$\Gamma(A)$ ist Normalteiler von endlichem Index in $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$.

$$\mathrm{P}\Gamma(A) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \bmod A \right\}$$

bezeichnet die *volle Kongruenzgruppe* der Stufe A in $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$.

1.3.10 Definition Eine diskrete Untergruppe $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, die $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-konjugiert zu einer Gruppe ist, welche $\Gamma(A)$ $(A \neq 0)$ enthält, heißt *Kongruenzuntergruppe* in Bezug auf $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$. Analog für $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$.

Ein wichtiges Beispiel einer Kongruenzuntergruppe (vgl. Kapitel 2) ist für jedes Ideal $0 \neq A \subset \mathcal{O}$ gegeben durch

$$\Gamma_0(A) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}) \mid c \in A \right\}.$$

Für ein $N \in \mathcal{O}$ sei $\Gamma_0(N) := \Gamma_0((N))$, wobei $(N) := N\mathcal{O}$ das von N in $\mathcal{O}$ erzeugte Hauptideal bezeichne. Entsprechend sei

$$\Gamma^0(A) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}) \mid b \in A \right\}.$$

1.4 Automorphe Funktionen und Fourierentwicklung in den Spitzen

1.4.1 Definition Sei $\Gamma < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ eine diskrete Gruppe. Eine *automorphe Funktion zur Gruppe* Γ mit Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ ist eine Funktion $f : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. f ist Γ-invariant.
2. $f \in C^2(\mathbb{H}^3)$ und f genügt der Differentialgleichung $-\Delta f = \lambda f$.
3. f wächst polynomial in allen Spitzen von Γ, d.h. ist $\zeta = M_\zeta \infty$ ($M_\zeta \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$) eine Spitze von Γ, so existiert eine Konstante $K > 0$ mit
$$f(M_\zeta(z + jr)) = O(r^K) \quad \text{für} \quad r \to \infty$$
gleichmäßig bezüglich $z \in \mathbb{C}$.

Eine Funktion $f : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{C}$ heißt (Γ, χ)-*automorph*, wenn 2. und 3. erfüllt sind und an Stelle von 1. gilt:

1'. $f(MP) = \chi(M)f(P)$ für alle $M \in \Gamma$ mit einem Charakter χ auf Γ.

Der Vektorraum der Γ-automorphen bzw. (Γ, χ)-automorphen Funktionen wird mit $\mathcal{A}(\Gamma, \lambda)$ (bzw. $\mathcal{A}(\Gamma, \chi, \lambda)$) bezeichnet.

Ist lediglich die Invarianzbedingung 1. bzw. 1'. erfüllt, so heißt f *schwach* Γ-*automorph* bzw. *schwach* (Γ, χ)-*automorph*.

1.4.2 Theorem *Sei Λ ein Gitter in $\mathbb{C}$ und $\Lambda^\#$ das bezüglich σ duale Gitter. $f : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{C}$ sei eine Λ-invariante C^2−Funktion (d.h. für $f \in C^2(\mathbb{H}^3)$ gelte $f(P + \gamma) = f(P)$ für alle $\gamma \in \Lambda$), die der Differentialgleichung $-\Delta f = \lambda f$ genügt. Es werde ein $s \in \mathbb{C}$ gewählt mit $\lambda = 1 - s^2$. Außerdem wachse $f(z + jr)$ polynomial für $r \to \infty$, d.h.*
$$f(z + jr) = O(r^K)$$
für $r \to \infty$ gleichmäßig bezüglich $z \in \mathbb{C}$ mit einer Konstanten K. Dann besitzt f in ∞ eine Fourierentwicklung der Gestalt
$$f(z + jr) \;=\; \Phi_0(r, s) + r \sum_{0 \neq \tilde{\mu} \in \Lambda^\#} \rho(\tilde{\mu}) K_s(4\pi|\tilde{\mu}|r) e^{2\pi i \sigma(\tilde{\mu} z)} \qquad (1.4.1)$$
mit
$$\Phi_0(r, s) \;=\; \begin{cases} a_0 r^{1+s} + b_0 r^{1-s}, & \text{falls } s \neq 0, \\ a_0 r + b_0 r \log(r), & \text{falls } s = 0. \end{cases}$$
K_s bezeichnet die modifizierte Besselfunktion (vgl. [29]*).*

BEWEIS: Vgl. ([10], S. 105f.). Dabei ist die geringfügig abweichende Definition des dualen Gitters $\Lambda^{\#}$ zu beachten. Vgl. dazu (1.2.3). $\square$

Dabei ist für eine Funktion $f \in \mathcal{A}(\Gamma, \lambda)$ und eine Spitze $\zeta = M_\zeta \infty$ von Γ das zu $M_\zeta^{-1}\Gamma'_\zeta M_\zeta$ gehörige Gitter Λ_ζ zu betrachten, das gegeben ist durch

$$M_\zeta^{-1}\Gamma'_\zeta M_\zeta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \omega \in \Lambda_\zeta \right\}.$$

Offensichtlich ist $f(M_\zeta P)$ eine Λ_ζ-invariante Funktion.

1.4.3 Definition Eine Funktion $f \in \mathcal{A}(\Gamma, \lambda)$ (bzw. $\mathcal{A}(\Gamma, \chi, \lambda)$) heißt *Spitzenform* auf Γ, falls f in allen Spitzen $\zeta = M_\zeta \infty$ von Γ exponentiell verschwindet, d.h.

$$f(M_\zeta(z + jr)) = O(e^{-\epsilon r}) \quad \text{für} \quad r \to \infty$$

gleichmäßig in z mit einer Konstanten $\epsilon > 0$.

Im Folgenden wird der Hilbert-Raum der quadratintegrablen schwach Γ-automorphen bzw. schwach (Γ, χ)-automorphen Funktionen mit $\mathrm{L}^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3)$ bzw. $\mathrm{L}^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3, \chi)$ bezeichnet. In diesem Hilbert-Raum lässt sich $-\Delta$ nach ([10], Chapt. 4) zu einem nicht-negativen, selbstadjungierten Operator fortsetzen, der wieder mit $-\Delta$ bezeichnet wird.
Ist der Charakter χ auf Γ nicht trivial, so verschwindet jede konstante Funktion in $\mathrm{L}^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3, \chi)$ identisch und ist daher keine Eigenfunktion von $-\Delta$.

Kapitel 2

Die Thetafunktion

Im folgenden Abschnitt wird eine geeignete *Siegelsche Thetafunktion* $\Theta_{S,H}(P)$ auf dem oberen Halbraum $\mathbb{H}^3$ zu einer geraden quaternären quadratischen Form S über $\mathcal{O}$, einer zugehörigen komplexen Majorante H und einem Ideal $I \subset \mathcal{O}$ eingeführt. Diese Thetafunktion besitzt ein einfaches Transformationsverhalten unter einer gewissen Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(N)$ von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ und dient als Integrationskern des im Anschluss konstruierten Thetalifts.
Es wird ein verallgemeinerter Siegelscher Transformationssatz für Thetafunktionen bewiesen, welcher das Transformationsverhalten der Thetafunktion unter $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ angibt. Um davon ausgehend Aussagen über das Verhalten der Thetafunktion in den Spitzen von $\Gamma \leq \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ treffen zu können, ist die Klassenzahl von K als 1 vorauszusetzen. Eine von 1 verschiedene Klassenzahl erfordert zusätzlich neue Überlegungen.

2.1 Transformationsverhalten der Thetafunktion

2.1.1 Definition Eine Matrix $S \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O})$ heißt *gerade*, falls $S = S^t$ symmetrisch ist und falls 2 die Diagonalelemente von S teilt.

Im gesamten Abschnitt ist $S \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O})$ als gerade und (über $\mathbb{C}$) invertierbare Matrix vorausgesetzt.

2.1.2 Definition S hat die *Stufe* q ($q \in \mathcal{O}$), falls gilt:

1. $qS^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O})$ und qS^{-1} ist gerade.
2. Für jedes $\tilde{q} \in \mathcal{O}$ mit $\tilde{q}S^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O})$ und $\tilde{q}S^{-1}$ gerade ist $\tilde{q} \in q\mathcal{O}$, d.h. q ist (bezüglich der Norm) minimal mit der Eigenschaft 1.

Die folgende Definition gilt für beliebige (symmetrische) Matrizen $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$:

2.1.3 Definition Eine Matrix $H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ heißt *Majorante* von S, falls gilt:

1. H ist eine positiv definite hermitesche Matrix, d.h. $H = \overline{H}^t$ mit $H\{g\} = \overline{g}^t Hg > 0$ für alle $g \in \mathbb{C}^n, g \neq 0$.

2. $\overline{H}\,\overline{S}^{-1} H = S$.

2.1.4 Definition Sei $H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ eine Majorante von S. Für ein Ideal $I \subset \mathcal{O}$ und $P = z + jr \in \mathbb{H}^3$ wird die *Thetafunktion* definiert durch

$$\begin{aligned}\Theta_{S,H}(P) &:= \sum_{g \in I^n} \exp\big\{\pi i\big(\big(S[g]z + \overline{S[g]z}\big) + 2iH\{g\}r\big)\big\} \\ &= \sum_{g \in I^n} \exp\big\{\pi i\big(\sigma\big(S[g]z\big) + 2iH\{g\}r\big)\big\}.\end{aligned}$$

2.1.5 Bemerkung Da $H\{g\}$ $(g \in I^4)$ eine positiv definite hermitesche Form ist, konvergiert $\Theta_{S,H}(P)$ kompakt gleichmäßig absolut auf dem oberen Halbraum $\mathbb{H}^3$. ◊

Die Thetafunktion $\Theta_{S,H}(P)$ besitzt nach [35] das folgende Transformationsverhalten:

2.1.6 Satz *Seien $H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ eine Majorante von S, $I \subset \mathcal{O}$ ein Ideal in $\mathcal{O}$ und $P = z + jr \in \mathbb{H}^3$. Dann gilt:*

1. *Für $t \in \mathcal{O}$ ist $\Theta_{S,H}(P + t) = \Theta_{S,H}(P)$.*

2. *Für $M = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(I^2\delta_K q)$ ist*

$$\begin{aligned}\Theta_{S,H}(MP) &= \chi_S(M)\mathcal{N}(\gamma P + \delta)^{\frac{n}{2}}\Theta_{S,H}(P) \\ &= \chi_S(M)\|\gamma P + \delta\|^n\Theta_{S,H}(P),\end{aligned}$$

wobei $\frac{n}{2}$ das Gewicht *der Thetafunktion und χ_S eine nur von S, M und I abhängige* 8-te *Einheitswurzel ist.*

$\Theta_{S,H}(P)$ ist damit eine verallgemeinerte Hilbertsche Modulform auf $\Gamma_0(I^2\delta_K q)$ vom Gewicht $\frac{n}{2}$ (im Sinn von Richter ([34], S. 16)).

Beweis: Vgl. ([35], Abschnitt 3) und ([34], S. 35ff.), wobei dort für den Fall eines imaginärquadratischen Zahlkörpers $r_1 = 0$ zu setzen ist. □

$I^2 = I \cdot I$ ist hier nicht zu verwechseln mit $I^2 = I \times I$. Aus dem Zusammenhang geht jedoch stets eindeutig hervor, welche Bedeutung gemeint ist, so dass die Schreibweise I^2 in beiden Fällen benutzt wird.

2.1.7 Lemma *Seien* $\lambda \in \mathcal{O}, \lambda \neq 0, \Lambda := \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{smallmatrix}\right)$. *Dann gilt:*

$$\Theta_{S,H;\lambda I}(P) = \Theta_{S,H}(\lambda P \lambda) = \Theta_{S,H}(\Lambda P),$$

wobei

$$\Theta_{S,H;\lambda I}(P) := \sum_{g \in (\lambda I)^n} \exp\bigl\{\pi i \bigl(\sigma\bigl(S[g]z\bigr) + 2iH\{g\}r\bigr)\bigr\},$$

und für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma := \Lambda^{-1}\Gamma_0(I^2\delta_K q)\Lambda < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ *ist*

$$\Theta_{S,H;\lambda I}(MP) = \chi_S(\Lambda M \Lambda^{-1})\|cP + d\|^n \Theta_{S,H;\lambda I}(P).$$

Beweis: Für $\lambda \in \mathcal{O}$ und $P = z + jr \in \mathbb{H}^3$ ist wegen $\lambda j = j\overline{\lambda}$

$$\Lambda P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} P = \lambda P \lambda = \lambda^2 z + j|\lambda|^2 r,$$

so dass sofort $\Theta_{S,H;\lambda I}(P) = \Theta_{S,H}(\lambda P \lambda) = \Theta_{S,H}(\Lambda P)$ folgt. Daraus ergibt sich mit Satz 2.1.6 für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma = \Lambda^{-1}\Gamma_0(I^2\delta_K q)\Lambda$, also $\Lambda M \Lambda^{-1} \in \Gamma_0(I^2\delta_K q)$, das folgende Transformationsverhalten:

$$\begin{aligned}
\Theta_{S,H;\lambda I}(MP) &= \Theta_{S,H}(\Lambda(MP)) \\
&= \Theta_{S,H}((\Lambda M \Lambda^{-1})\Lambda P) \\
&= \chi_S(\Lambda M \Lambda^{-1})\|c_{\Lambda M \Lambda^{-1}}(\Lambda P) + d_{\Lambda M \Lambda^{-1}}\|^n \Theta_{S,H}(\Lambda P) \\
&= \chi_S(\Lambda M \Lambda^{-1})\|c_{\Lambda M \Lambda^{-1}}(\Lambda P) + d_{\Lambda M \Lambda^{-1}}\|^n \Theta_{S,H;\lambda I}(P).
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\Lambda M \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} a & \lambda^2 b \\ \lambda^{-2} c & d \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_{\Lambda M \Lambda^{-1}} & b_{\Lambda M \Lambda^{-1}} \\ c_{\Lambda M \Lambda^{-1}} & d_{\Lambda M \Lambda^{-1}} \end{pmatrix} \in \Gamma_0(I^2\delta_K q),$$

und mit $\Lambda P = \lambda^2 z + j|\lambda|^2 r$ folgt

$$\begin{aligned}
\|c_{\Lambda M \Lambda^{-1}}(\Lambda P) + d_{\Lambda M \Lambda^{-1}}\|^2 &= |c_{\Lambda M \Lambda^{-1}} z(\Lambda P) + d_{\Lambda M \Lambda^{-1}}|^2 + |c_{\Lambda M \Lambda^{-1}}|^2 (r(\Lambda P))^2 \\
&= |cz + d|^2 + |c|^2 r^2 \\
&= \|cP + d\|^2,
\end{aligned}$$

so dass man für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ erhält:

$$\Theta_{S,H;\lambda I}(MP) = \chi_S(\Lambda M \Lambda^{-1})\|cP + d\|^n \Theta_{S,H;\lambda I}(P).$$

$\square$

Im Folgenden wird der Fall $I = \mathcal{O}$ betrachtet. Die Thetafunktion $\Theta_{S,H}(P)$ aus Definition 2.1.4 wird mit der Matrix

$$T := \begin{pmatrix} \sqrt{\tau_D}^{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\tau_D} \end{pmatrix} \tag{2.1.1}$$

wie folgt transformiert: Für $P = z + jr \in \mathbb{H}^3$ setzt man

$$\begin{aligned} \theta_{S,H}(P) &:= r^{\frac{n}{2}} \Theta_{S,H}(T^{-1}P) \\ &= r^{\frac{n}{2}} \sum_{g \in \mathcal{O}^n} \exp\bigl\{\pi i\bigl(\sigma(\tau_D S[g] z) + 2ir|\tau_D| H\{g\}\bigr)\bigr\}. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Diese Transformation der Thetafunktion ist wesentlich für die Siegelsche Transformationsformel 2.2.1, da sich nur dann die dort angegebene geschlossene Form ergibt.

Sei T wie in (2.1.1). Im Folgenden wird der nur von M, S und T abhängige Charakter

$$\chi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$$

auf $\Gamma := T\Gamma_0(\delta_K q)T^{-1}$ betrachtet, der definiert ist durch

$$\chi(M) := \chi_S(T^{-1}MT) \quad (M \in \Gamma), \tag{2.1.3}$$

wobei χ_S den Charakter auf $\Gamma_0(\delta_K q)$ aus Satz 2.1.6 bezeichnet.

2.1.8 Lemma *χ ist trivial auf Γ_∞.*

Beweis: Nach Satz 2.1.6, *1.* ist χ_S offensichtlich trivial auf $(\Gamma_0(\delta_K q))'_\infty$, und für $\left(\begin{smallmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{smallmatrix}\right) \in (\Gamma_0(\delta_K q))_\infty$ mit $\epsilon \in \mathcal{O}^*$ und $P = z + jr \in \mathbb{H}^3$ gilt:

$$\Theta_{S,H}\bigl(\left(\begin{smallmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{smallmatrix}\right)P\bigr) = \Theta_{S,H}(\epsilon^2 z + jr) = \Theta_{S,H}(P).$$

Es folgt die Trivialität von χ_S auf $(\Gamma_0(\delta_K q))_\infty$. Wegen $\Gamma_\infty = T(\Gamma_0(\delta_K q))_\infty T^{-1}$ ist χ damit trivial auf Γ_∞. □

$\theta_{S,H}(P)$ besitzt das folgende Transformationsverhalten unter Γ:

2.1.9 Satz *Seien T wie in* (2.1.1), *χ wie in* (2.1.3). *Dann gilt für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma = T\Gamma_0(\delta_K q)T^{-1}$:*

$$\theta_{S,H}(MP) \;=\; \chi(M)\theta_{S,H}(P).$$

$\theta_{S,H}(P)$ ist also eine verallgemeinerte Hilbertsche Modulform auf Γ vom Gewicht 0, d.h. $\theta_{S,H}(P)$ ist schwach (Γ, χ)-automorph.

Beweis: Es ist $\theta_{S,H}(MP) = r(MP)^{\frac{n}{2}}\Theta_{S,H}(T^{-1}(MP))$. Damit folgt die Behauptung aus Lemma 2.1.7 mit $\Lambda = T^{-1}$. $\square$

2.1.10 Lemma *Sei T wie in* (2.1.1). *Dann gilt:*

$$\Gamma = T\Gamma_0(\delta_K q)T^{-1} = \Gamma_0\big(q\big) \cap \Gamma^0\big(\tau_D^{-1}\big) < \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}).$$

Insbesondere ist $\Gamma = T\Gamma_0(\delta_K q)T^{-1}$ also eine koendliche Untergruppe von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$.

Beweis: Nachrechnen. $\square$

Im Anschluss wird die Gruppe $\Gamma'_\infty := \{M \in \Gamma_\infty \mid \mathrm{Spur}(M) = \pm 2\}$ bestimmt, welche bei der Berechnung der Zetafunktion in Kapitel 3 benötigt wird. Eine einfache Rechnung ergibt:

2.1.11 Lemma *Für $\Gamma = T\Gamma_0(\delta_K q)T^{-1} < \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ ist Γ'_∞ gegeben durch*

$$\Gamma'_\infty \quad = \quad \left\{\pm\begin{pmatrix}1 & \omega\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid \omega \in {\tau_D}^{-1}\mathcal{O}\right\}/\{\pm E_2\}. \tag{2.1.4}$$

Das zu Γ'_∞ gehörige Gitter ist also $\Lambda_\infty = {\tau_D}^{-1}\mathcal{O}$.

Im Folgenden wird an Stelle von (2.1.4) kurz

$$\Gamma'_\infty = \left\{\begin{pmatrix}1 & \omega\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid \omega \in {\tau_D}^{-1}\mathcal{O}\right\}$$

geschrieben.

2.1.12 Lemma *Das bezüglich σ duale Gitter $\Lambda_\infty^\#$ von $\Lambda_\infty = \tau_D^{-1}\mathcal{O}$ ist gegeben durch*

$$\Lambda_\infty^\# \quad = \quad \tau_D^2\mathcal{O} = \frac{1}{D_K}\mathcal{O}. \tag{2.1.5}$$

Dabei bezeichnet Λ_∞ das zu Γ'_∞ gehörige Gitter.

Beweis: Klar nach Lemma 1.2.2. $\square$

2.1.13 Bemerkung Seien S und H wie in Definition 2.1.4. Zu jeder symmetrischen und invertierbaren Matrix $\tilde{S} \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O})$ gibt es eine Matrix $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $\tilde{S} = S[D]$. Sei nun $\tilde{S} \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O})$ eine symmetrische invertierbare Matrix mit $\tilde{S} = S[D]$, wobei $D \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$. Dann ist die Matrix

$\tilde{H} = \overline{D}^t HD = H\{D\}$ eine Majorante von $\tilde{S}$, falls H eine Majorante von S ist, denn $\tilde{H}$ ist eine positiv definite hermitesche Matrix, und es gilt:

$$\overline{\tilde{H}}\,\overline{\tilde{S}}^{-1}\tilde{H} = D^t(\overline{H}\,\overline{S}^{-1}H)D = D^tSD = \tilde{S}.$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}\theta_{\tilde{S},\tilde{H}}(P) &= r^{\frac{n}{2}} \sum_{g\in\mathcal{O}^n} \exp\Big\{\pi i\Big(\sigma\big(\tau_D\tilde{S}[g]z\big) + 2ir|\tau_D|\tilde{H}\{g\}\Big)\Big\} \\ &= r^{\frac{n}{2}} \sum_{g\in D\mathcal{O}^n} \exp\Big\{\pi i\Big(\sigma\big(\tau_D S[g]z\big) + 2ir|\tau_D|H\{g\}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

Für $D \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ ist $D\mathcal{O}^n = \mathcal{O}^n$, so dass sich für die Thetafunktion $\theta_{\tilde{S},\tilde{H}}(P)$ bezüglich $\tilde{S}$ und $\tilde{H}$ ergibt:

$$\begin{aligned}\theta_{\tilde{S},\tilde{H}}(P) &= r^{\frac{n}{2}} \sum_{g\in\mathcal{O}^n} \exp\Big\{\pi i\Big(\sigma\big(\tau_D S[g]z\big) + 2ir|\tau_D|H\{g\}\Big)\Big\} \\ &= \theta_{S,H}(P).\end{aligned}$$

Die Thetafunktionen von S und einer Matrix $\tilde{S} = S[D]$ mit $D \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ stimmen also (erwartungsgemäß) überein, wenn man die Majoranten in natürlicher Weise wählt. $\Diamond$

2.2 Verallgemeinerter Siegelscher Transformationssatz für Thetafunktionen

Der Siegelsche Transformationssatz, welcher im Spezialfall $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]$ von C.L. Siegel bewiesen wurde (vgl. [39]), gibt das Verhalten der Thetafunktion unter der Gruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ an. Um mit dem Transformationssatz Aussagen über das Verhalten der Thetafunktion in den Spitzen von $\Gamma = T\Gamma_0(\delta_K q)T^{-1} = \Gamma_0\big(q\big) \cap \Gamma^0\big(\tau_D^{-1}\big) < \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ treffen zu können, ist die Klassenzahl von K als 1 vorauszusetzen, da in diesem Fall alle Spitzen von Γ nach Folgerung 1.3.9 $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$-äquivalent zu ∞ sind.

2.2.1 Satz (Verallgemeinerter Siegelscher Transformationssatz für Thetafunktionen) *Seien $S = S^t \in \mathrm{M}_m(\mathcal{O})$ eine gerade invertierbare Matrix, $H \in \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ eine Majorante von S und $\psi \in S^{-1}\mathcal{O}^m$. Die* Thetafunktion zur Charakteristik *ψ sei für $P = z + jr \in \mathbb{H}^3$ definiert durch*

$$\theta^{\psi}_{S,H}(P) := r^{\frac{m}{2}} \sum_{g\in\mathcal{O}^m} \exp\big\{\pi i\big(\sigma(\tau_D S[g+\psi]z) + 2ir|\tau_D|H\{g+\psi\}\big)\big\}.$$

Dann gilt für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$:

1. $\theta^{\psi}_{S,H}(MP) = e^{\pi i\sigma(ab\tau_D S[\psi])} \cdot \theta^{a\psi}_{S,H}(P),$ *falls* $c = 0$;
2. $\theta^{\psi}_{S,H}(MP) = |\det(S)|^{-1}|c|^{-m} \displaystyle\sum_{\omega\in S^{-1}\mathcal{O}^m \bmod \mathcal{O}^m} \lambda(S\omega,\psi)\theta^{\omega}_{S,H}(P),$ *falls* $c \neq 0$,

wobei $\lambda(w,\psi)$ *gegeben ist durch die Gaußsche Summe*

$$\lambda(w,\psi) := \sum_{g\in\mathcal{O}^m \bmod c\mathcal{O}^m} e^{\pi i\sigma(\frac{a}{c}\tau_D S[g+\psi])} e^{\pi i\sigma(\frac{d}{c}\tau_D S^{-1}[w])} e^{2\pi i\sigma(\tau_D(\frac{g+\psi}{c})^t w)}.$$

Es stellt sich also wieder eine Thetafunktion bzw. eine (endliche) Summe von Thetafunktionen mit Gaußschen Summen als Vorfaktoren ein.

Für den Beweis des obigen Satzes wird die folgende verallgemeinerte Transformationsformel für Thetafunktionen benötigt:

2.2.2 Lemma (Verallgemeinerte Transformationsformel für Thetafunktionen) *Seien* $S = S^t \in \mathrm{M}_m(\mathcal{O})$ *eine gerade invertierbare Matrix,* $H \in \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ *eine Majorante von* S, τ_D *wie in* (1.2.4) *sowie* $\eta \in \mathbb{C}^{2m}$. *Ferner setzt man* $\underline{w} := \left(\begin{smallmatrix} w \\ \overline{w} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2m}$ *für* $w \in \mathbb{C}^m$. *Für* $P = z + jr \in \mathbb{H}^3$ *sei* $U := U_P := \left(\begin{smallmatrix} \tau_D z S & |\tau_D| i r \overline{H} \\ i|\tau_D| r H & \overline{\tau_D z S} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_{2m}(\mathbb{C})$. *Dann gilt:*

$$\sum_{n\in\mathcal{O}^m} e^{\pi i U[\underline{n}+\eta]} \;=\; |\det(S)|^{-1}\|z+jr\|^{-m} \sum_{n\in\mathcal{O}^m} e^{-\pi i U^{-1}[\underline{\tau_D n}]+2\pi i(\underline{\tau_D n})^t\eta}.$$

Beweis: Vgl. [2] und [40]. Dabei ist die abweichende Definition von U zu beachten. Für $n = a + \omega_D b \in \mathcal{O}^m$ ($a, b \in \mathbb{Z}^m$, ω_D wie in (1.2.1)) ist

$$\begin{pmatrix} n \\ \overline{n} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} E_m & \omega_D E_m \\ E_m & \overline{\omega_D} E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

und die Behauptung folgt durch Anwenden von ([39], S. 122, Lemma 1) auf die Matrix $P = -iU_1$ mit

$$U_1 \;:=\; U\left[\begin{pmatrix} E_m & \omega_D E_m \\ E_m & \overline{\omega_D} E_m \end{pmatrix}\right].$$

Es ist

$$\sum_{n\in\mathcal{O}^m} e^{\pi i U[\underline{n}+\eta]} = |-iU_1|^{-\frac{1}{2}} \sum_{n\in\mathcal{O}m} e^{-\pi i U^{-1}[\underline{\tau_D n}]+2\pi i(\underline{\tau_D n})^t\eta},$$

wobei $\det(-iU_1)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned}\det(-iU_1) &= (-i)^{2m}\det(U)\left[\det\begin{pmatrix} E_m & \omega_D E_m \\ E_m & \overline{\omega_D} E_m\end{pmatrix}\right]^2 \\ &= (-i)^{2m}|\det(S)|^2\cdot\|\tau_D z + j|\tau_D|r\|^{2m}(-\tau_D^{-1})^{2m} \\ &= (|\det(S)|\cdot\|z+jr\|^m)^2.\end{aligned}$$

Dabei ist $\overline{\omega_D}-\omega_D = \sqrt{D_K} = \frac{1}{\tau_D}$ nach Definition von τ_D. Für die Berechnung von $\det(U)$ s. ([40], S. 369 Mitte), und zur Definition bzw. Fixierung von $\sqrt{\det(-iU_1)}$ vgl. ([13], S. 1, Bemerkung 0.8 und S. 19, Hilfssatz 0.10) oder ([7], S. 6f.). $\square$

Beweis des verallgemeinerten Siegelschen Transformationssatzes: Es seien $\hat{P} = MP$ mit $P = z + jr \in \mathbb{H}^3$, $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$. Ferner setzt man

$$U := U_P := \begin{pmatrix} \tau_D z S & i|\tau_D|r\overline{H} \\ i|\tau_D|rH & \overline{\tau_D z S}\end{pmatrix}$$

sowie

$$\underline{\eta} := \begin{pmatrix}\eta \\ \overline{\eta}\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2m} \quad \text{für} \quad \eta \in \mathbb{C}^m.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} U[\underline{n+\psi}] &= \tau_D z S[n+\psi] + \overline{\tau_D z S[n+\psi]} + i|\tau_D|r\overline{(n+\psi)}^t H(n+\psi) \\ &\quad + i\tau_D r(n+\psi)^t\overline{H(n+\psi)} \\ &= \tau_D z S[n+\psi] + \overline{\tau_D z S[n+\psi]} + 2ir|\tau_D|H\{n+\psi\} \\ &= \sigma\big(\tau_D z S[n+\psi]\big) + 2ir|\tau_D|H\{n+\psi\},\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

also

$$\theta^{\psi}_{S,H}(P) = r^{\frac{m}{2}}\sum_{n\in\mathcal{O}^m} e^{\pi i U[\underline{n+\psi}]}. \tag{2.2.2}$$

Zu 1.) Im Fall $c = 0$ hat man wegen $d = a^{-1}$

$$\hat{P} = MP = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix}P = \frac{az+b}{d} + j\frac{r}{|d|^2} = a^2z + ab + jr|a|^2,$$

und es ist

$$\theta^{\psi}_{S,H}(MP) = r(MP)^{\frac{m}{2}}\sum_{n\in\mathcal{O}^m} e^{\pi i\hat{U}[\underline{n+\psi}]}$$

mit

$$\hat{U} := U_{\hat{P}} = \begin{pmatrix} \tau_D(a^2z+ab)S & \dfrac{i|\tau_D||a|^2r\overline{H}}{\tau_D(a^2z+ab)S} \\ i|\tau_D||a|^2rH & \end{pmatrix},$$

so dass sich ergibt:

$$\begin{aligned}
\hat{U}[\underline{n+\psi}] &= U[\underline{a(n+\psi)}] + \begin{pmatrix} \tau_D abS & 0 \\ 0 & \overline{\tau_D abS} \end{pmatrix} [\underline{n+\psi}] \\
&= U[\underline{a(n+\psi)}] + \tau_D abS[n+\psi] + \overline{\tau_D abS}[\overline{n+\psi}] \\
&= U[\underline{a(n+\psi)}] + \sigma\big(\tau_D abS[n+\psi]\big) \\
&= U[\underline{a(n+\psi)}] + \sigma\big(\tau_D abS[n] + 2\tau_D abn^tS\psi + \tau_D abS[\psi]\big).
\end{aligned}$$

Für die Thetafunktion erhält man damit wegen $\sigma(\tau_D abS[n]) \in 2\mathbb{Z}$, $\sigma(\tau_D abn^tS\psi) \in \mathbb{Z}$ und $|a| = 1$:

$$\begin{aligned}
\theta^{\psi}_{S,H}(\hat{P}) &= r(MP)^{\frac{m}{2}} \sum_{n\in\mathcal{O}^m} e^{\pi i \hat{U}[\underline{n+\psi}]} \\
&= |a|^m r^{\frac{m}{2}} \sum_{n\in\mathcal{O}^m} e^{\pi i U[\underline{a(n+\psi)}]} e^{\pi i\sigma(\tau_D abS[n])} e^{2\pi i\sigma(\tau_D abn^tS\psi)} \\
&\quad \cdot e^{\pi i\sigma(\tau_D abS[\psi])} \\
&= r^{\frac{m}{2}} \sum_{n\in\mathcal{O}^m} e^{\pi i U[\underline{an+a\psi}]} \cdot e^{\pi i\sigma(\tau_D abS[\psi])} \\
&= e^{\pi i\sigma(\tau_D abS[\psi])} \cdot r^{\frac{m}{2}} \sum_{n\in\mathcal{O}^m} e^{\pi i U[\underline{n+a\psi}]} \\
&= e^{\pi i\sigma(\tau_D abS[\psi])} \cdot \theta^{a\psi}_{S,H}(P).
\end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass $a \in \mathcal{O}$ wegen $ad = 1$ eine Einheit in $\mathcal{O}$ ist.

Zu 2.) Im Fall $c \neq 0$ wird $\hat{P} = \hat{z} + j\hat{r} \in \mathbb{H}^3$ zerlegt in

$$\hat{P} = \frac{a}{c} + c^{-1}P_1c^{-1}$$

mit

$$P_1 = -P_2^{-1}, P_2 = P + \frac{d}{c} = \left(z + \frac{d}{c}\right) + jr,$$

wobei $P_1 = z_1 + jr_1,\ P_2 = z_2 + jr_2 \in \mathbb{H}^3$. Damit ist $\hat{z} = \frac{a}{c} + c^{-2}z_1,\ \hat{r} = |c|^{-2}r_1$, und es folgt für das zu $\hat{P}$ gehörige $\hat{U}$:

$$\begin{aligned}
\hat{U} &= \begin{pmatrix} \tau_D \hat{z} S & i|\tau_D|\hat{r}\overline{H} \\ i|\tau_D|\hat{r}H & \overline{\tau_D \hat{z} S} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tau_D(\frac{a}{c} + c^{-2}z_1)S & \overline{i|\tau_D||c|^{-2}r_1\overline{H}} \\ i|\tau_D||c|^{-2}r_1 H & \overline{\tau_D(\frac{a}{c} + c^{-2}z_1)S} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tau_D \frac{a}{c} S & 0 \\ 0 & \overline{\tau_D \frac{a}{c} S} \end{pmatrix} + U_1
\end{aligned}$$

mit

$$U_1 = \begin{pmatrix} \tau_D c^{-2} z_1 S & i|\tau_D||c|^{-2}r_1\overline{H} \\ i|\tau_D||c|^{-2}r_1 H & \overline{\tau_D c^{-2} z_1 S} \end{pmatrix}.$$

Für die Thetafunktion ergibt sich also wegen (2.2.1):

$$\begin{aligned}
\theta^{\psi}_{S,H}(\hat{P}) &= r(\hat{P})^{\frac{m}{2}} \sum_{n \in \mathcal{O}^m} e^{\pi i \hat{U}[\underline{n+\psi}]} \\
&= r(\hat{P})^{\frac{m}{2}} \sum_{n \in \mathcal{O}^m} e^{\pi i \sigma(\tau_D \frac{a}{c} S[n+\psi])} e^{\pi i U_1[\underline{n+\psi}]} \\
&= r(\hat{P})^{\frac{m}{2}} \sum_{n \in \mathcal{O}^m} e^{\pi i \sigma(\tau_D \frac{a}{c} S[n+\psi])} e^{\pi i \tilde{U}_1[\underline{\frac{n+\psi}{c}}]} \\
&= r(\hat{P})^{\frac{m}{2}} \sum_{g \in \mathcal{O}^m \bmod c\mathcal{O}^m} \sum_{n \in \mathcal{O}^m} e^{\pi i \sigma(\tau_D \frac{a}{c} S[nc+g+\psi])} e^{\pi i \tilde{U}_1\left[\underline{\frac{1}{c}(nc+g+\psi)}\right]}
\end{aligned}$$

mit

$$\tilde{U}_1 = \begin{pmatrix} \tau_D z_1 S & i|\tau_D|r_1\overline{H} \\ i|\tau_D|r_1 H & \overline{\tau_D z_1 S} \end{pmatrix},$$

und wegen

$$\begin{aligned}
& \sigma\big(\tau_D \tfrac{a}{c} S[nc+g+\psi]\big) \\
= \; & \sigma\big(\tau_D \tfrac{a}{c}\{S[nc] + 2(nc)^t S(g+\psi) + S[g+\psi]\}\big) \\
= \; & \underbrace{\sigma\big(ac\tau_D S[n]\big)}_{\in 2\mathbb{Z}} + 2\underbrace{\sigma\big(a\tau_D n^t S(g+\psi)\big)}_{\in \mathbb{Z}} + \sigma\big(\tfrac{a}{c}\tau_D S[g+\psi]\big)
\end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned}
\theta^{\psi}_{S,H}(\hat{P}) &= r(\hat{P})^{\frac{m}{2}} \sum_{g \in \mathcal{O}^m \bmod c\mathcal{O}^m} \sum_{n \in \mathcal{O}^m} e^{\pi i \sigma(\tau_D \frac{a}{c} S[nc+g+\psi])} e^{\pi i \tilde{U}_1\left[\underline{\frac{1}{c}(nc+g+\psi)}\right]} \\
&= r(\hat{P})^{\frac{m}{2}} \sum_{g \in \mathcal{O}^m \bmod c\mathcal{O}^m} e^{\pi i \sigma(\frac{a}{c}\tau_D S[g+\psi])} \sum_{n \in \mathcal{O}^m} e^{\pi i \tilde{U}_1\left[\underline{\frac{1}{c}(nc+g+\psi)}\right]}.
\end{aligned}$$

Eine Anwendung der Transformationsformel aus Lemma 2.2.2 auf die zweite Summe ergibt:

$$\sum_{n\in\mathcal{O}^m} e^{\pi i \tilde{U}_1[\underline{n+\eta}]} = |\det(S)|^{-1}\|z_1+jr_1\|^{-m}\sum_{n\in\mathcal{O}^m} e^{-\pi i \tilde{U}_1^{-1}[\underline{\tau_D n}]+2\pi i\sigma(\eta^t\tau_D n)},$$

wobei $\eta := \frac{g+\psi}{c} \in \mathbb{C}^m$ gesetzt wird. Nach Definition von P_1 und P_2 gilt weiter:

$$\|z_1+jr_1\|^{-m} = \|P_1\|^{-m} = \|P_2\|^m = \|P+\tfrac{d}{c}\|^m = \frac{\|cP+d\|^m}{|c|^m},$$

so dass folgt:

$$\sum_{n\in\mathcal{O}^m} e^{\pi i \tilde{U}_1[\underline{n+\eta}]} = |\det(S)|^{-1}\frac{\|cP+d\|^m}{|c|^m}\sum_{n\in\mathcal{O}^m} e^{-\pi i \tilde{U}_1^{-1}[\underline{\tau_D n}]+2\pi i\sigma(\eta^t\tau_D n)}.$$

Im Anschluss wird $\tilde{U}_1^{-1}$ berechnet. Wegen $HS^{-1} = \overline{S}\;\overline{H}^{-1}$ ist

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \tau_D z_1 S & i|\tau_D|r_1\overline{H} \\ i|\tau_D|r_1 H & \overline{\tau_D z_1 S}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\tau_D z_1}S^{-1} & -i|\tau_D|r_1 H^{-1} \\ -i|\tau_D|r_1\overline{H}^{-1} & \tau_D z_1\overline{S}^{-1}\end{pmatrix}\\
= \;& |\tau_D|^2\begin{pmatrix} (|z_1|^2+r_1^2)E_m & 0 \\ 0 & (|z_1|^2+r_1^2)E_m\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

so dass man wegen $P_2 = -P_1^{-1} = -\frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2+r_1^2} + j\frac{r_1}{|z_1|^2+r_1^2}$ erhält:

$$\begin{aligned}
-\tilde{U}_1^{-1} &= -\frac{1}{|\tau_D|^2(|z_1|^2+r_1^2)}\begin{pmatrix} \overline{\tau_D z_1}S^{-1} & -i|\tau_D|r_1 H^{-1} \\ -i|\tau_D|r_1\overline{H}^{-1} & \tau_D z_1\overline{S}^{-1}\end{pmatrix}\\
&= -\frac{1}{|\tau_D|^2}\begin{pmatrix} -z_2\overline{\tau_D}S^{-1} & -i|\tau_D|r_2H^{-1} \\ -i|\tau_D|r_2\overline{H}^{-1} & -\tau_D\overline{z_2}\overline{S}^{-1}\end{pmatrix}.\\
&= \begin{pmatrix} z_2(\tau_D)^{-1}S^{-1} & i|\tau_D|^{-1}r_2H^{-1} \\ i|\tau_D|^{-1}r_2\overline{H}^{-1} & \overline{(\tau_D)^{-1}z_2S^{-1}}\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

wobei $(\tilde{U}_1^{-1})^t = \tilde{U}_1^{-1}$. Damit ergibt sich mit (2.2.1):

$$\begin{aligned}
-\tilde{U}_1^{-1}[\underline{\tau_D n}] &= \begin{pmatrix} z_2\tau_D S^{-1} & i|\tau_D|r_2 H^{-1} \\ i|\tau_D|r_2\overline{H}^{-1} & \overline{\tau_D z_2 S^{-1}} \end{pmatrix} [\underline{n}] \\
&= \begin{pmatrix} (z+\frac{d}{c})\tau_D S^{-1} & i|\tau_D|rH^{-1} \\ i|\tau_D|r\overline{H}^{-1} & \overline{\tau_D(z+\frac{d}{c})S^{-1}} \end{pmatrix} [\underline{n}] \\
&= \begin{pmatrix} \frac{d}{c}\tau_D S^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{\tau_D(\frac{d}{c})S^{-1}} \end{pmatrix} [\underline{n}] + \begin{pmatrix} z\tau_D S^{-1} & i|\tau_D|rH^{-1} \\ i|\tau_D|r\overline{H}^{-1} & \overline{\tau_D z S^{-1}} \end{pmatrix} [\underline{n}] \\
&= \sigma\Big(\frac{d}{c}\tau_D S^{-1}[n]\Big) + \sigma\big(\tau_D z S^{-1}[n]\big) + 2ir|\tau_D|\overline{H}^{-1}\{n\} \\
&= \sigma\Big(\frac{d}{c}\tau_D S^{-1}[n]\Big) + \sigma\big(\tau_D z S[S^{-1}n]\big) + 2ir|\tau_D|H\{S^{-1}n\} \\
&= \sigma\Big(\frac{d}{c}\tau_D S^{-1}[n]\Big) + U[\underline{S^{-1}n}],
\end{aligned}$$

und mit $r(\hat{P})^{\frac{m}{2}} = r(MP)^{\frac{m}{2}} = r^{\frac{m}{2}}\|cP+d\|^{-m}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\theta^{\psi}_{S,H}(\hat{P}) &= |\det(S)|^{-1}|c|^{-m}r^{\frac{m}{2}} \sum_{g\in\mathcal{O}^m \bmod c\mathcal{O}^m} e^{\pi i\sigma(\frac{a}{c}\tau_D S[g+\psi])} \\
&\quad \cdot \sum_{n\in\mathcal{O}^m} e^{\pi i\sigma(\frac{d}{c}\tau_D S^{-1}[n])} e^{\pi i U[\underline{S^{-1}n}]} e^{2\pi i\sigma(\eta^t\tau_D n)} \\
&= |\det(S)|^{-1}|c|^{-m}r^{\frac{m}{2}} \sum_{n\in\mathcal{O}^m} \Big(\sum_{g\in\mathcal{O}^m \bmod c\mathcal{O}^m} e^{\pi i\sigma(\frac{a}{c}\tau_D S[g+\psi])} \\
&\qquad \cdot e^{\pi i\sigma(\frac{d}{c}\tau_D S^{-1}[n])} e^{2\pi i\sigma(\eta^t\tau_D n)}\Big) \cdot e^{\pi i U[\underline{S^{-1}n}]} \\
&= |\det(S)|^{-1}|c|^{-m}r^{\frac{m}{2}} \sum_{n\in\mathcal{O}^m} \lambda(n,\psi) e^{\pi i U[\underline{S^{-1}n}]} \\
&= |\det(S)|^{-1}|c|^{-m}r^{\frac{m}{2}} \\
&\quad \cdot \sum_{n\in\mathcal{O}^m} \sum_{w\in S^{-1}\mathcal{O}^m \bmod \mathcal{O}^m} \lambda(S(n+w),\psi) e^{\pi i U[\underline{S^{-1}(S(n+w))}]}
\end{aligned}$$

mit der Gaußschen Summe

$$\lambda(w,\psi) = \sum_{g\in\mathcal{O}^m \bmod c\mathcal{O}^m} e^{\pi i\sigma(\frac{a}{c}\tau_D S[g+\psi])} e^{\pi i\sigma(\frac{d}{c}\tau_D S^{-1}[w])} e^{2\pi i\sigma(\eta^t\tau_D w)}.$$

Wegen $ad - bc = 1$ gilt für $n \in \mathcal{O}^m$:

$$\begin{aligned}
\lambda(S(n+w),\psi) = & \sum_{g \in \mathcal{O}^m \bmod c\mathcal{O}^m} e^{\pi i \left(\sigma\left(\tau_D \frac{a}{c} S[g+\psi] + \tau_D \frac{d}{c} S[n+w] + 2\tau_D \left(\frac{g+\psi}{c}\right)^t S(n+w)\right)\right)} \\
= & \sum_{g \in \mathcal{O}^m \bmod c\mathcal{O}^m} e^{\pi i \left(\sigma\left(\tau_D \frac{a}{c} S[g+\psi] + \tau_D \frac{d}{c}(ad-bc) S[n] + 2\tau_D \frac{d}{c} w^t S n + \tau_D \frac{d}{c} S[w]\right)\right)} \\
& \cdot e^{\pi i \left(\sigma\left(2\tau_D \frac{1}{c}(ad-bc) n^t S(g+\psi) + 2\tau_D \frac{1}{c} w^t S(g+\psi)\right)\right)} \\
= & \sum_{g \in \mathcal{O}^m \bmod c\mathcal{O}^m} e^{\pi i \left(\sigma\left(\tau_D \frac{a}{c} S[g+\psi] + \frac{a}{c}\tau_D S[nd] - bd\tau_D S[n] + \frac{2}{c}\tau_D w^t S(nd)\right)\right)} \\
& \cdot e^{\pi i \left(\sigma\left(\tau_D \frac{d}{c} S[w] + 2\frac{a}{c}\tau_D (nd)^t S(g+\psi) + \frac{2}{c}\tau_D w^t S(g+\psi)\right)\right)} \\
= & \sum_{g \in \mathcal{O}^m \bmod c\mathcal{O}^m} e^{\pi i \left(\sigma\left(\frac{a}{c}\tau_D S[g+\psi+nd] + \frac{2}{c}\tau_D w^t S(g+\psi+nd) + \tau_D \frac{d}{c} S[w]\right)\right)} \\
= & \sum_{g \in \mathcal{O}^m \bmod c\mathcal{O}^m} e^{\pi i \left(\sigma\left(\frac{a}{c}\tau_D S[g+\psi] + \frac{2}{c}\tau_D (Sw)^t (g+\psi) + \frac{d}{c}\tau_D S^{-1}[Sw]\right)\right)} \\
= & \, \lambda(Sw,\psi),
\end{aligned}$$

so dass sich insgesamt ergibt:

$$\begin{aligned}
\theta^{\psi}_{S,H}(\hat{P}) &= |\det(S)|^{-1} |c|^{-m} r^{\frac{m}{2}} \sum_{w \in S^{-1}\mathcal{O}^m \bmod \mathcal{O}^m} \lambda(Sw,\psi) \sum_{n \in \mathcal{O}^m} e^{\pi i U[n+w]} \\
&= |\det(S)|^{-1} |c|^{-m} \sum_{w \in S^{-1}\mathcal{O}^m \bmod \mathcal{O}^m} \lambda(Sw,\psi) \theta^{w}_{S,H}(P).
\end{aligned}$$

□

2.2.3 Bemerkung Ist auch cS^{-1} *gerade*, so lassen sich die Gaußschen Summen weiter auswerten, wodurch die 2. Formel in Satz 2.2.1 erheblich vereinfacht werden kann. Dieser Spezialfall ist für die vorliegende Arbeit jedoch nicht von Bedeutung. Die zugehörigen Rechnungen sind ausgeführt in [2] bzw. [39]. Vgl. auch [7] für den Fall der hyperbolischen Ebene. ◊

2.2.4 Bemerkung Im Fall einer von 1 verschiedenen Klassenzahl h besitzt $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ h nicht $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$-äquivalente Spitzenklassen. Insbesondere ist also eine beliebige Spitze von $\Gamma = T^{-1}\Gamma_0(\delta_K q)T < \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ im Allgemeinen nicht mehr $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$-äquivalent zu ∞. Die obige Transformationsformel liefert daher im Fall Klassenzahl $h \neq 1$ keine Information über das Verhalten der Thetafunktion in den Spitzen von Γ. Dieser Fall erfordert somit neue

Überlegungen.
Zu jeder Spitze ζ von $\Gamma = T^{-1}\Gamma_0(\delta_K q)T$ existiert für $h \neq 1$ lediglich eine quasi-ganze Matrix (s. [10], S. 368) M_ζ mit $M_\zeta\zeta = \infty$. Für den Fall beliebiger Klassenzahlen wäre also zu prüfen, ob für ein quasi-ganzes M_ζ eine ähnliche Siegelsche Transformationsformel gilt. Darauf wird an dieser Stelle verzichtet. $\Diamond$

Kapitel 3

Thetalift von Poincaré-Reihen

3.1 Die Zetafunktion

Im Anschluss wird die zur Kongruenzuntergruppe $\Gamma = T\Gamma_0(\delta_K q)T^{-1} = \Gamma_0(q) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1})$ von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ gehörige Poincaré-Reihe $P_{\tilde{\mu}}(P,s)$ $(\mathrm{Re}(s) > 1)$ auf dem oberen Halbraum $\mathbb{H}^3$ definiert. $P_{\tilde{\mu}}(P,s)$ weist ein zur Thetafunktion analoges Transformationsverhalten unter Γ auf. Bildet man für $\tilde{\mu} \neq 0$ den Thetalift dieser Poincaré-Reihe, so stellt sich eine Zetafunktion ein, welche nach geeigneter Parametrisierung der Majorante H in der Thetafunktion aufgefasst werden kann als Funktion auf $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\} \times \mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3$. Um Aussagen über die Konvergenz des Thetalifts machen zu können, ist die Klassenzahl von K als 1 vorauszusetzen, da der Siegelsche Transformationssatz nur in diesem Fall das Verhalten der Thetafunktion in den Spitzen von Γ angibt (vgl. Abschnitt 2.2).

Im Folgenden wird $S = S^t \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O})$ als gerade und invertierbare Matrix der Stufe q vorausgesetzt, $H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ist eine Majorante von S. Dann ist die Thetafunktion für $\mathcal{O}$ gegeben durch

$$\theta_{S,H}(P) = r^{\frac{n}{2}} \sum_{g \in \mathcal{O}^n} \exp\bigl\{\pi i\bigl(\sigma(\tau_D S[g]z) + 2ir|\tau_D|H\{g\}\bigr)\bigr\}.$$

Wie in Abschnitt 2.1 sei $\Gamma = T\Gamma_0(q\delta_K)T^{-1} < \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$, wobei die Transformationsmatrix T definiert ist durch $T = \begin{pmatrix} \sqrt{\tau_D}^{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\tau_D} \end{pmatrix}$. Ferner ist $\Lambda_\infty = \tau_D^{-1}\mathcal{O}$ das zu Γ'_∞ gehörige Gitter, und das bezüglich σ zu Λ_∞ duale Gitter ist nach Lemma 2.1.12 $\Lambda_\infty^\# = \tau_D^2\mathcal{O}$.

3.1.1 Definition Seien $\tilde{\mu} \in \Lambda_\infty^\# = \tau_D^2\mathcal{O}$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$. χ sei der Charakter auf Γ aus (2.1.3). Dann wird für $P = z_P + jr_P \in \mathbb{H}^3$ die *Poincaré-Reihe* $P_{\tilde{\mu}}(P,s)$ definiert durch

$$P_{\tilde{\mu}}(P,s) := \sum_{M \in \Gamma'_\infty \backslash \Gamma} \overline{\chi(M)} r_{MP}^{1+s} e^{2\pi i(\sigma(\tilde{\mu} z_{MP}) + 2i|\tilde{\mu}| r_{MP})},$$

wobei Γ'_∞ gegeben ist durch

$$\Gamma'_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \tau_D^{-1}\mathcal{O} \right\}.$$

Dabei ist zu beachten, dass der Charakter χ aus (2.1.3) nach Lemma 2.1.8 trivial auf Γ_∞ und damit trivial auf Γ'_∞ ist. Damit ist für $\tilde{\mu} \in \Lambda_\infty^\#$ jeder Summand invariant unter Γ'_∞, und $P_{\tilde{\mu}}(P,s)$ ist wohldefiniert. Für $\tilde{\mu} = 0$ ergibt sich eine Eisensteinreihe zur Gruppe Γ (vgl. Kapitel 7).
Durch einfaches Nachrechnen zeigt man (vgl. ([10], S. 350, Lemma 6.6)):

3.1.2 Folgerung

1. *$P_{\tilde{\mu}}(P,s)$ konvergiert absolut für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$. Die Konvergenz ist gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{H}^3 \times \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$.*

2. *Für $N \in \Gamma$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt:*

$$P_{\tilde{\mu}}(NP,s) = \chi(N) P_{\tilde{\mu}}(P,s).$$

   Die Poincaré-Reihe besitzt folglich ein zur Thetafunktion $\theta_{S,H}(P)$ analoges Transformationsverhalten unter Γ.

3. *$P_{\tilde{\mu}}(P,s)$ erfüllt für $\mathrm{Re}(s) > 1$ die Differentialgleichung*

$$-\Delta^P P_{\tilde{\mu}}(P,s) = 4\pi|\tilde{\mu}|(1+2s) P_{\tilde{\mu}}(P,s+1) + (1-s^2) P_{\tilde{\mu}}(P,s).$$

Im Folgenden ist die Klassenzahl h von K als 1 vorauszusetzen, da das Verhalten der Thetafunktion in den Spitzen von Γ wesentlich für die Konvergenz des im Anschluss definierten Thetalifts ist. Auf Grund des Transformationsverhaltens der Thetafunktion $\theta_{S,H}(\cdot)$ und der Poincaré-Reihe $P_{\tilde{\mu}}(\cdot,s)$ ist die folgende Definition für $0 \neq \tilde{\mu} \in \Lambda_\infty^\#$ sinnvoll, sofern das Integral konvergiert:

3.1.3 Definition Seien die Bezeichnungen wie in Definition 3.1.1. Zusätzlich werde $0 \neq \tilde{\mu} \in \Lambda_\infty^\# = \tau_D^2\mathcal{O}$ vorausgesetzt. Dann wird für $\mathrm{Re}(s) > 1$ die *Zetafunktion* $Z_{S,H,\tilde{\mu}}(s)$ definiert durch

$$Z_{S,H,\tilde{\mu}}(s) := \int_{\mathcal{F}} \overline{\theta_{S,H}(P)} P_{\tilde{\mu}}(P,s) d\nu(P),$$

wobei $\mathcal{F}$ einen Fundamentalbereich von Γ bezeichnet.

3.1.4 Folgerung *Das obige Integral konvergiert für* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *absolut.*

BEWEIS: Die absolute Konvergenz des Integrals in ∞ ist klar, und nach dem Siegelschen Transformationssatz gilt in einer beliebigen Spitze $\zeta = M_\zeta \infty$ von Γ, wobei $M_\zeta = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}), c \neq 0$:

$$\begin{aligned} |\theta_{S,H}(M_\zeta P)| &= \left| \det(S)|^{-1}|c|^{-n} \right| \sum_{\omega \in S^{-1}\mathcal{O}^n \mod \mathcal{O}^n} \lambda(S\omega, 0)\theta^{\omega}_{S,H}(P) \Big| \\ &\leq r^{\frac{n}{2}} |\det(S)|^{-1}|c|^{-n} \sum_{\omega \in S^{-1}\mathcal{O}^n \mod \mathcal{O}^n} |\lambda(S\omega, 0)| \\ &\quad \cdot \sum_{g \in \mathcal{O}^n} \exp\{-2\pi r|\tau_D| H\{g + \omega\}\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich verschwindet $P_{\tilde{\mu}}(P, s)$ exponentiell in ∞. In einer beliebigen Spitze $\zeta = M_\zeta \infty$ von Γ mit M_ζ wie oben betrachtet man die zu Γ konjugierte Gruppe $G = M_\zeta^{-1} \Gamma M_\zeta$. Diese hat die Spitze ∞. Da L genau dann ein Vertretersystem von Rechtsnebenklassen von G'_∞ in G durchläuft, wenn $M = M_\zeta L M_\zeta^{-1}$ ein zugehöriges Vertretersystem für Γ'_ζ in Γ durchläuft, ist $P_{\tilde{\mu}}(M_\zeta^{-1} P, s) = P^G_{\tilde{\mu}}(P, s)$ die Poincaré-Reihe für G in ∞. Daraus folgt das exponentielle Verschwinden von $P_{\tilde{\mu}}(P, s)$ in der Spitze ζ, und insgesamt ergibt sich die Behauptung. $\square$

3.1.5 Bemerkung Die Zetafunktion $Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$ kann als *Thetalift* der Poincaré-Reihe $P_{\tilde{\mu}}(P, s)$ bezüglich der koendlichen Gruppe Γ aufgefasst werden (vgl. Bemerkung 5.1.2). $\Diamond$

3.1.6 Satz *Seien* $0 \neq \tilde{\mu} \in \Lambda^{\#}_\infty = \tau_D^2 \mathcal{O}$. *Dann gilt für* $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$Z_{S,H,\tilde{\mu}}(s) = \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + s - 1)}{(2\pi|\tau_D|)^{\frac{n}{2}+s-1}} \sum_{\substack{g \in \mathcal{O}^n \\ S[g] = 2\mu}} \left(H\{g\} + 2|\mu|\right)^{-\frac{n}{2}-s+1}, \tag{3.1.1}$$

wobei $\mu = \tau_D^{-1} \tilde{\mu}$ *gesetzt wird.*

BEWEIS: Wird der zu $M = E_2$ gehörige Summand der Poincaré-Reihe mit $f_{\tilde{\mu}}(P, s) := r_P^{1+s} e^{2\pi i(\sigma(\tilde{\mu} z_P) + 2i|\tilde{\mu}| r_P)}$ bezeichnet, so folgt wegen $\theta_{S,H}(MP) =$

$\chi(M)\theta_{S,H}(P)$ $(M \in \Gamma)$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{F}} \overline{\theta_{S,H}(P)} P_{\tilde{\mu}}(P,s)\, d\nu(P) \\
= \;& \int_{\mathcal{F}} \overline{\theta_{S,H}(P)} \sum_{M \in \Gamma'_\infty \backslash \Gamma} \overline{\chi(M)} f_{\tilde{\mu}}(MP,s)\, d\nu(P) \\
= \;& \sum_{M \in \Gamma'_\infty \backslash \Gamma} \overline{\chi(M)} \int_{M\mathcal{F}} \overline{\theta_{S,H}(M^{-1}P)} f_{\tilde{\mu}}(P,s)\, d\nu(P) \\
= \;& \sum_{M \in \Gamma'_\infty \backslash \Gamma} \int_{M\mathcal{F}} \overline{\theta_{S,H}(P)} f_{\tilde{\mu}}(P,s)\, d\nu(P) \\
= \;& \int_{\Gamma'_\infty \backslash \mathbb{H}^3} \overline{\theta_{S,H}(P)} f_{\tilde{\mu}}(P,s)\, d\nu(P) \\
= \;& \int_0^\infty \int_{\mathbb{C}/(\tau_D^{-1}\mathcal{O})} r_P^{1+s} e^{2\pi i (\sigma(\tilde{\mu} z_P) + 2i|\tilde{\mu}| r_P)} \\
& \cdot r_P^{\frac{n}{2}} \sum_{g \in \mathcal{O}^n} e^{-\pi i \sigma(\tau_D S[g] z_P)} e^{-2\pi |\tau_D| r_P H\{g\}} dz_P \frac{dr_P}{r_P^3} \\
= \;& \int_0^\infty r_P^{\frac{n}{2}+s-2} \sum_{g \in \mathcal{O}^n} \left(\int_{\mathbb{C}/(\tau_D^{-1}\mathcal{O})} e^{2\pi i \sigma((\tilde{\mu} - \frac{1}{2}\tau_D S[g]) z_P)} dz_P \right) \\
& \cdot e^{-2\pi(2|\tilde{\mu}| + |\tau_D| H\{g\}) r_P} dr_P.
\end{aligned}$$

Die obige Vertauschung von Summation und Integration ist auf Grund der Konvergenz des $\mathcal{F}$-Integrals der Betragreihen zulässig.

Es ist $\tilde{\mu} \in (\tau_D^{-1}\mathcal{O})^\#$ und $\frac{1}{2}\tau_D S[g] \in \tau_D \mathcal{O} = \tau_D^2(\tau_D^{-1}\mathcal{O}) \subset \tau_D^2 \mathcal{O} = (\tau_D^{-1}\mathcal{O})^\#$, d.h. $z_P \mapsto e^{2\pi i \sigma((\tilde{\mu} - \frac{1}{2}\tau_D S[g]) z_P)}$ ist $(\tau_D^{-1}\mathcal{O})$-periodisch, so dass folgt:

$$\int_{\mathbb{C}/(\tau_D^{-1}\mathcal{O})} e^{2\pi i \sigma((\tilde{\mu} - \frac{1}{2}\tau_D S[g]) z_P)} dz_P \;=\; \begin{cases} \mathrm{vol}(\mathbb{C}/(\tau_D^{-1}\mathcal{O})), & \text{falls } \frac{1}{2}\tau_D S[g] = \tilde{\mu}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Volumen des Fundamentalparallelogramms von $\mathbb{C}/(\tau_D^{-1}\mathcal{O})$ ist nach Lemma 3.1.8 gegeben durch $\mathrm{vol}(\mathbb{C}/(\tau_D^{-1}\mathcal{O})) = \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2}$. Damit ergibt sich für die

Zetafunktion:

$$
\begin{aligned}
Z_{S,H,\tilde{\mu}}(s) &= \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \sum_{\substack{g\in\mathcal{O}^n\\ S[g]=2\tau_D^{-1}\tilde{\mu}}} \int_0^\infty r_P^{\frac{n}{2}+s-2} e^{-2\pi(2|\tilde{\mu}|+|\tau_D|H\{g\})r_P}\,dr_P \\
&= \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \sum_{\substack{g\in\mathcal{O}^n\\ S[g]=2\tau_D^{-1}\tilde{\mu}}} \big(2\pi\big(2|\tilde{\mu}|+|\tau_D|H\{g\}\big)\big)^{-\frac{n}{2}-s+1} \\
&\quad \cdot \int_0^\infty e^{-t} t^{(\frac{n}{2}+s-1)-1}\,dt \\
&= \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+s-1)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}+s-1}} \sum_{\substack{g\in\mathcal{O}^n\\ S[g]=2\tau_D^{-1}\tilde{\mu}}} \big(|\tau_D|H\{g\}+2|\tilde{\mu}|\big)^{-\frac{n}{2}-s+1} \\
&= \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+s-1)}{(2\pi|\tau_D|)^{\frac{n}{2}+s-1}} \sum_{\substack{g\in\mathcal{O}\\ S[g]=2\mu}} \big(H\{g\}+2|\mu|\big)^{-\frac{n}{2}-s+1},
\end{aligned}
$$

wobei $\mu := \tau_D^{-1}\tilde{\mu} \in \tau_D^{-1}(\tau_D^2\mathcal{O}) = \tau_D\mathcal{O} = \mathcal{O}^\#$ gesetzt wurde. Insbesondere sieht man, dass die obige Summe wegen $S[g] \in 2\mathcal{O}$ nur für $\mu \in \mathcal{O} \subset \mathcal{O}^\#$, d.h. $\tilde{\mu} = \tau_D\mu \in \mathcal{O}^\# \subset \tau_D^2\mathcal{O} = (\tau_D^{-1}\mathcal{O})^\#$ mit $\mu \in \mathcal{O}$, nicht leer sein kann. □

3.1.7 Folgerung *Sei $\tilde{\mu} \in \mathcal{O}^\#$, d.h. $\mu = \tau_D^{-1}\tilde{\mu} \in \mathcal{O}$. Die Zetafunktion kann für $\mathrm{Re}(s) > 1$ geschrieben werden als*

$$
\begin{aligned}
Z_{S,H,\tilde{\mu}}(s) &= \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+s-1)}{(2\pi|\tau_D|)^{\frac{n}{2}+s-1}} \sum_{\substack{g\in\mathcal{O}\\ S[g]=2\mu}} \big(H\{g\}+2|\mu|\big)^{-\frac{n}{2}-s+1} \\
&= \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+s-1)}{(2\pi|\tau_D|)^{\frac{n}{2}+s-1}} \\
&\quad \cdot \sum_{g\in\mathcal{L}(S,2\mu)} \sum_{U\in\mathrm{Aut}(S,\mathcal{O})} \big(H\{Ug\}+2|\mu|\big)^{-\frac{n}{2}-s+1}.
\end{aligned}
$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{L}(S, 2\mu)$ ein genaues Vertretersystem der Lösungsmenge $\{g \in \mathcal{O}^n \mid S[g] = 2\mu\}$ modulo der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(S, \mathcal{O}) = \{V \in \mathrm{SL}_n(\mathcal{O}) \mid S[V] = V\}$ von S über $\mathcal{O}$. Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(S, \mathbb{C}) = \mathrm{SO}(S, \mathbb{C})$ wird in Abschnitt 3.2 vollständig bestimmt. Vgl. auch Abschnitt 4.2. Die äußere Summe ist nach Korollar 4.2.12 endlich. Vgl. auch ([8], S. 27).

Das Volumen des Fundamentalparallelogramms von $\mathbb{C}/(\tau_D^{-1}\mathcal{O})$ lässt sich elementar berechnen.

3.1.8 Lemma *Es gilt:*

$$\mathrm{vol}(\mathbb{C}/(\tau_D^{-1}\mathcal{O})) = \mathrm{vol}(\mathbb{C}/\mathcal{O}) \cdot \mathcal{N}(\tau_D^{-1}) = \frac{1}{2}|D_K|^{\frac{3}{2}}.$$

BEWEIS: $\{1, \omega_D\}$ mit ω_D wie in (1.2.1) ist eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathcal{O}$, und es gilt $\mathrm{vol}(\mathbb{C}/\mathcal{O}) = \frac{\sqrt{-D_K}}{2}$. Als $\mathbb{Z}$-Basis von $\tau_D^{-1}\mathcal{O} \subset \mathcal{O}$ wird $\left\{{\tau_D}^{-1}, {\tau_D}^{-1}\omega_D\right\}$ gewählt, und die Behauptung ist klar. □

3.2 BESTIMMUNG DES MAJORANTENRAUMS VON S

Im Folgenden wird $n = 4$ vorausgesetzt. Ziel ist es, die Zetafunktion in Abhängigkeit von $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ als Poincaré-Reihe $\tilde{H}$ bezüglich der hyperbolischen Abstandsfunktion δ zu schreiben. Zunächst wird dazu die spezielle orthogonale Gruppe einer (beliebigen) symmetrischen Matrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ bestimmt, mit deren Hilfe sich der Majorantenraum von S angeben lässt (s. Satz 3.2.10). Durch Parametrisierung der Majorante der Matrix $S \in \mathrm{M}_4(\mathcal{O})$ in der Thetafunktion in Abhängigkeit von $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ erhält man dann eine w, w_0-Abhängigkeit der Thetafunktion, die sich auf die Zetafunktion überträgt. Durch Umschreiben der Summationsbedingung in (3.1.1) als Summation über gewisse (2×2)-Matrizen über $\mathcal{O}$ mit fester Determinante $\neq 0$ folgt schließlich die Abhängigkeit der Zetafunktion von $\delta(w, w_0)$.
Die Ausführungen dieses Abschnitts gelten für beliebige Klassenzahlen h.

Zu jeder Matrix $S = S^t \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ gibt es ein $C \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$, so dass $S = S_0[C]$ für

$$S_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.1}$$

mit $S_0^t = S_0$ und $S_0^{-1} = S_0$ gilt. $U := \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ ist ein vierdimensionaler Vektorraum mit quadratischer Form $\det(A) = ad - bc$ ($A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$), die beschrieben wird durch $\frac{1}{2}S_0$:

$$\frac{1}{2}S_0\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}(a, b, c, d)\begin{pmatrix} d \\ -c \\ -b \\ a \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Im Anschluss wird die spezielle orthogonale Gruppe von S_0 bestimmt.

3.2.1 Definition Für $U = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ wird die Abbildung ϕ definiert durch

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{GL}(U), \\ (g, h) &\longmapsto (u \mapsto guh^{-1}). \end{aligned}$$

3.2.2 Lemma *ϕ ist ein Gruppenhomomorphismus mit Bild in der speziellen orthogonalen Gruppe*

$$\mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C}) = \{V \in \mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) \mid S_0[V] = S_0\}$$

von S_0.

Beweis: Die Gruppenhomomorphismuseigenschaften von ϕ rechnet man sofort nach: Seien $(g, h), (\tilde{g}, \tilde{h}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Dann ist für jedes $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ nach Definition von ϕ:

$$\begin{aligned} \phi(g, h)\phi(\tilde{g}, \tilde{h})(A) &= \phi(g, h)(\tilde{g}A\tilde{h}^{-1}) = g\tilde{g}A\tilde{h}^{-1}h^{-1} = (g\tilde{g})A(h\tilde{h})^{-1} \\ &= \phi(g\tilde{g}, h\tilde{h})(A). \end{aligned}$$

ϕ ist somit ein Gruppenhomomorphismus, denn offensichtlich ist $\phi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \subset \mathrm{GL}(U)$.

Sei $(g, h) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Die lineare Abbildung $\phi(g, h)(u) = (u \mapsto guh^{-1}), u = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, wird vermittelt durch eine Matrix $A(g, h) \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$, welche definiert ist durch

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} = A(g, h) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} h^{-1}. \tag{3.2.2}$$

Mit $g =: \left(\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ und $h =: \left(\begin{smallmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ lässt sich $A(g, h)$ explizit angeben. Es ist

$$\begin{aligned} A(g, h) &= \begin{pmatrix} g_1h_4 & -g_1h_3 & g_2h_4 & -g_2h_3 \\ -g_1h_2 & g_1h_1 & -g_2h_2 & g_2h_1 \\ g_3h_4 & -g_3h_3 & g_4h_4 & -g_4h_3 \\ -g_3h_2 & g_3h_1 & -g_4h_2 & g_4h_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_1(h^{-1})^t & g_2(h^{-1})^t \\ g_3(h^{-1})^t & g_4(h^{-1})^t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}). \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Die Determinante von $A(g,h)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\det(A(g,h)) &= \det\left(\begin{pmatrix} g_1(h^{-1})^t & g_2(h^{-1})^t \\ g_3(h^{-1})^t & g_4(h^{-1})^t \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} (h^{-1})^t & 0 \\ 0 & (h^{-1})^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1E_2 & g_2E_2 \\ g_3E_2 & g_4E_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= (g_1g_4 - g_2g_3)^2(\det(h^{-1}))^2 \\
&= (\det(g))^2(\det(h))^{-2} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

und einfaches Nachrechnen unter Benutzung von $g_1g_4 - g_2g_3 = 1 = h_1h_4 - h_2h_3$ liefert

$$A(g,h)^tS_0A(g,h) = S_0.$$

Also ist $A(g,h) \in \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ eine *Einheit* von S_0 und wegen $S_0^{-1} = S_0$ auch eine Einheit von S_0^{-1}, d.h. $A(g,h) \in \mathrm{SO}(S_0,\mathbb{C})$ und $A(g,h) \in \mathrm{SO}(S_0^{-1},\mathbb{C})$. □

Im Folgenden werden $\phi(g,h)$ und die zugehörige Matrix $A(g,h)$ identifiziert.

3.2.3 Folgerung $\overline{A(g,h)}^tA(g,h)$ *ist eine* Majorante *von* S_0.

Beweis: $A := \overline{A(g,h)}^tA(g,h)$ ist eine positiv definite hermitesche Matrix und da $A(g,h)$ nach Lemma 3.2.2 eine Einheit von S_0 und $S_0^{-1} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ ist, gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{AS_0^{-1}}A &= A(g,h)^t\overline{A(g,h)S_0^{-1}A(g,h)^t}A(g,h) \\
&= A(g,h)^t\overline{A(g^t,h^t)^tS_0^{-1}A(g^t,h^t)}A(g,h) \\
&= A(g,h)^t\overline{(S_0^{-1})^t}A(g,h) \\
&= A(g,h)^tS_0A(g,h) \\
&= S_0.
\end{aligned}$$

□

3.2.4 Lemma *Der Kern von* ϕ *ist gegeben durch*

$$\mathrm{Kern}(\phi) = \{(E_2,E_2),(-E_2,-E_2)\}.$$

Beweis: Nach Definition von ϕ gilt:

$$(g,h) \in \mathrm{Kern}(\phi) \Leftrightarrow u = guh^{-1} \text{ für alle } u \in M_2(\mathbb{C}).$$

Für $u = E_2$ ist dann insbesondere $g = h$, und aus $ug = gu$ für alle $u \in M_2(\mathbb{C})$ folgt $g = \pm E_2$.
Die Behauptung lässt sich auch einfach durch Benutzung der expliziten Darstellung von $A(g, h)$ (s. (3.2.3)) nachrechnen. □

3.2.5 Lemma *Das Bild von ϕ ist gegeben durch*

$$\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C}),$$

wobei $\mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C})$ *die spezielle orthogonale Gruppe von* S_0 *bezeichnet. Damit ist*

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) & \to & \mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C}), \\ (g, h) & \longmapsto & (u \mapsto guh^{-1}) \end{array}$$

$(u \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}))$ *ein* surjektiver Gruppenhomomorphismus*, der nach Lemma 3.2.4 einen endlichen Kern besitzt.*

Beweis: Offensichtlich gilt für die (komplexen) Dimensionen:

$$\dim(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) = 6 = \dim(\mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C})).$$

Ferner ist das Bild der zusammenhängenden Menge $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ unter ϕ wieder zusammenhängend und nach Lemma 3.2.2 enthalten in $\mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C})$. Da $\mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C})$ nach ([19], S. 344, Lemma 4.2) zusammenhängend ist, folgt die Behauptung mit ([19], S. 102, Theorem 2.1). □

Eine weitere wesentliche Eigenschaft von ϕ ist die folgende:

3.2.6 Lemma *Für* $\mathrm{SU}(2) = \mathrm{Stab}(j)$ *gilt:*

$$\phi(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)) = \mathrm{SU}(4) \cap \mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C}).$$

Beweis: Zunächst wird gezeigt: Für $g, h \in \mathrm{SU}(2) = \mathrm{Stab}(j)$ ist $\phi(g, h) \in \mathrm{SU}(4)$. Bei der Isomorphie $\mathbb{C}^4 \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ entspricht dem kanonischen Skalarprodukt $< z, w >= z_1\overline{w_1} + ... + z_4\overline{w_4}$ auf $\mathbb{C}^4$ in $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ das Skalarprodukt

$$< A, B >:= \mathrm{Spur}(A\overline{B}^t) = \mathrm{Spur}(AB^*)$$

für $A = \left(\begin{smallmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{smallmatrix}\right), B = \left(\begin{smallmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Zu bestimmen ist nun die Adjungierte $\phi(g, h)^*$ von $\phi(g, h)$ bezüglich dieses Skalarproduktes für $(g, h) \in$

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Es ist

$$\begin{aligned} < \phi(g,h)(A), B > &= < gAh^{-1}, B > \\ &= \mathrm{Spur}(gAh^{-1}B^*) \\ &= \mathrm{Spur}(Ah^{-1}B^*g) \\ &= \mathrm{Spur}(A(g^*B(h^*)^{-1})^*) \\ &= < A, g^*B(h^*)^{-1} > \\ &= < A, \phi(g^*,h^*)(B) >, \end{aligned}$$

so dass gilt:

$$\phi(g,h)^* = \phi(g^*,h^*).$$

Da ϕ ein Gruppenhomomorphismus ist, folgt somit für $(g,h) \in \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$:

$$\begin{aligned} \phi(g,h)^*\phi(g,h) &= \phi(g^*,h^*)\phi(g,h) \\ &= \phi(g^*g, h^*h) = \phi(E_2,E_2) \\ &= E_4, \end{aligned}$$

d.h.

$$\phi(g,h) \in \mathrm{SU}(4) \quad \text{für } g,h \in \mathrm{SU}(2),$$

und wegen $\phi(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)) \subset \phi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) = \mathrm{SO}(S_0,\mathbb{C})$ ist damit gezeigt:

$$\phi(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)) \subset \mathrm{SU}(4) \cap \mathrm{SO}(S_0,\mathbb{C}).$$

ϕ ist nach Lemma 3.2.4 und Lemma 3.2.5 ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit endlichem Kern. Daher ist das Urbild des Kompaktums $\mathrm{SU}(4) \cap \mathrm{SO}(S_0,\mathbb{C})$ kompakt. Nach ([19], S. 316 und S. 346) ist außerdem $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ maximal kompakte Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, so dass man erhält:

$$\phi^{-1}(\mathrm{SU}(4) \cap \mathrm{SO}(S_0,\mathbb{C})) \subset \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2).$$

Daraus folgt die Behauptung.

Die Beziehung $\phi^{-1}(\mathrm{SU}(4) \cap \mathrm{SO}(S_0,\mathbb{C})) \subset \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ lässt sich unter Benutzung von (3.2.3) auch elementar nachrechnen: Seien $g,h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ und $\phi(g,(h^{-1})^t) \in \mathrm{SU}(4)$. Nach (3.2.3) ist $\phi(g,(h^{-1})^t) = \left(\begin{smallmatrix} g_1h & g_2h \\ g_3h & g_4h \end{smallmatrix}\right)$, und es gilt $\phi(g,(h^{-1})^t) \in \mathrm{SU}(4)$ genau dann, wenn für je zwei Spalten w_i, w_j $(1 \le i,j \le 4)$ von $\phi(g,(h^{-1})^t)$ die Bedingung $< w_i, w_j >= \delta_{ij}$ erfüllt ist. Aus den sich daraus ergebenden Orthogonalitätsbedingungen erhält man dann wegen $\det(g) = \det(h) = 1$ nach kurzer Rechnung $g, h \in \mathrm{SU}(2)$. □

Die spezielle orthogonale Gruppe von S_0 ist nach Lemma 3.2.5 gegeben als Bild von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ unter dem Gruppenhomomorphismus ϕ. Gesucht ist nun die spezielle orthogonale Gruppe einer (beliebigen) symmetrischen Matrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$. Diese ergibt sich durch Transformation aus derjenigen von S_0. Sei $C \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ mit

$$S = S_0[C] = C^t S_0 C.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

3.2.7 Lemma *Die spezielle orthogonale Gruppe* $\mathrm{SO}(S, \mathbb{C})$ *von* S *ist gegeben durch*

$$\mathrm{SO}(S, \mathbb{C}) = C^{-1}\mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C})C.$$

BEWEIS: Sei $A \in \mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} S[C^{-1}AC] &= (C^{-1}AC)^t S(C^{-1}AC) \\ &= C^t A^t((C^{-1})^t S C^{-1})AC \\ &= C^t(A^t S_0 A)C \\ &= C^t S_0 C \\ &= S, \end{aligned}$$

so dass $C^{-1}AC \in \mathrm{SO}(S, \mathbb{C})$. Ebenso zeigt man, dass jedes CBC^{-1} mit $B \in \mathrm{SO}(S, \mathbb{C})$ enthalten ist in $\mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C})$, und es folgt die Behauptung. □

An Stelle des Gruppenhomomorphismus ϕ wird auf Grund von Lemma 3.2.7 im Folgenden der zu $S = S_0[C]$ gehörige Gruppenhomomorphismus ϕ_C betrachtet.

3.2.8 Definition Der Gruppenhomomorphismus ϕ_C wird definiert durch

$$\begin{aligned} \phi_C : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow C^{-1}\mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C})C = \mathrm{SO}(S, \mathbb{C}), \\ (g, h) &\longmapsto C^{-1}\phi(g, h)C \end{aligned}$$

mit ϕ wie in Definition 3.2.1.

Wie bereits gezeigt, ist $\overline{A}^t A$ mit $A \in \mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C})$ eine Majorante von S_0. Die Majoranten von S erhält man dann durch Transformation mit $C \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ wie folgt:

3.2.9 Folgerung *Seien $A \in \mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C})$ und $S = S_0[C]$ mit $C \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$. Dann ist*

$$M := \overline{C}^t \big(\overline{A}^t A\big) C = (\overline{AC})^t (AC) = (\overline{C}^t C)\{C^{-1}AC\}$$

eine Majorante *von S. Dabei ist $(\overline{C}^t C)$ eine Majorante von S, und $C^{-1}AC \in$ $\mathrm{SO}(S, \mathbb{C})$ ist eine Einheit von S.*

Beweis: Offensichtlich ist M eine positiv definite hermitesche Matrix, und es gilt:

$$\begin{aligned}\overline{M}\,\overline{S}^{-1} M &= \overline{\overline{C}^t \big(\overline{A}^t A\big) C}\,\overline{S}^{-1} \overline{C}^t \big(\overline{A}^t A\big) C \\ &= C^t \big(\big(\overline{\overline{A}^t A}\big) \overline{S_0}^{-1} \big(\overline{A}^t A\big)\big) C \\ &= C^t S_0 C \\ &= S.\end{aligned}$$

Ebenso ist $\overline{C}^t C$ eine positiv definite hermitesche Matrix mit $(\overline{C}^t C)\overline{S}^{-1}(\overline{C}^t C) = C^t \overline{C S^{-1} C^t} C = C^t S_0 C = S$, und $C^{-1}AC$ ist nach Lemma 3.2.7 eine Einheit von S. $\square$

Wie oben sei $S = S_0[C]$ mit $C \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$. Die Majorante M von S aus Folgerung 3.2.9 setzt sich zusammen aus der Majorante $(\overline{C}^t C)$ von S und der Einheit $C^{-1}AC \in \mathrm{SO}(S, \mathbb{C})$ von S mit $A \in \mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C})$. Der folgende Satz, der im reellen Fall auf C.L. Siegel (vgl. ([39], S. 87)) zurückgeht und für beliebige symmetrische Matrizen $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ gilt, zeigt, dass sich jede Majorante H von S in der Form $H = P\{V\}$ mit $V \in \mathrm{SO}(S, \mathbb{C})$ und einer festen Majorante P von S schreiben lässt.

3.2.10 Satz *Sei $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ symmetrisch. Alle positiven hermiteschen Lösungen H von*

$$\overline{H}\,\overline{S}^{-1} H = S \tag{3.2.4}$$

sind gegeben durch

$$H = P\{V\}, \tag{3.2.5}$$

wobei V alle Matrizen in $\mathrm{SO}(S, \mathbb{C})$ durchläuft und P eine feste positive hermitesche Lösung von (3.2.4) ist. Der Majorantenraum

$$\mathcal{P}(S) := \{H \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}) \mid H \text{ positiv definit hermitesch}, \ \overline{H}\,\overline{S}^{-1} H = S\}$$

von S ist also für eine feste positiv definite hermitesche Lösung P von (3.2.4) *gegeben durch*

$$\mathcal{P}(S) = \{P\{V\} \mid V \in \mathrm{SO}(S, \mathbb{C})\}.$$

Die reelle Dimension des Majorantenraums von S ist

$$\dim(\mathcal{P}(S)) = 6.$$

Beweis: Zunächst wird gezeigt, dass $H = P\{V\}$ mit $V \in \mathrm{SO}(S, \mathbb{C})$ und einer (festen) Majorante P von S eine Lösung von (3.2.4) ist.
Offensichtlich ist H eine positive hermitesche Matrix, und wegen $VS^{-1}V^t = S^{-1} \Leftrightarrow V^tSV = S$ gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{H}\,\overline{S}^{-1}H &= V^t\overline{P}\,\overline{V}\,\overline{S}^{-1}\overline{V}^tPV = V^t\,\overline{P}\,\overline{(VS^{-1}V^t)}\,PV \\
&= V^t(\overline{P}\,\overline{S}^{-1}P)V = V^tSV \\
&= S.
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen: Alle Lösungen von (3.2.4) haben die Form (3.2.5).

Sei H eine (beliebige) positive Lösung von (3.2.4). Dann existiert nach ([40], S. 365) eine komplexe Matrix $C \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ mit

$$H\{C\} = E \quad \text{und} \quad S[C] = \Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

mit positiven reellen $d_1, ..., d_4$. Einsetzen von $H = (C\overline{C}^t)^{-1}$ in $\overline{H}\,\overline{S}^{-1}H = S$ liefert $\overline{\Delta}^{-1} = \Delta$, d.h. $\overline{d_k}^{-1} = d_k$ für $k = 1, ..., 4$. Also ist $\Delta = E_4$, und man hat:

$$H\{C\} = E_4 \quad \text{und} \quad S[C] = E_4$$

mit einer komplexen Matrix $C \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$. Zu einer weiteren Lösung $\tilde{H}$ von (3.2.4) existiert nach obiger Rechnung eine komplexe Matrix $L \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ mit $\tilde{H}\{L\} = E$ und $S[L] = E$, so dass folgt:

$$S[C] = E = S[L] \quad \text{bzw.} \quad S = S[LC^{-1}].$$

Damit ist $W := LC^{-1} \in \mathrm{O}(S, \mathbb{C})$, und man erhält:

$$H = (C\overline{C}^t)^{-1} = (L\overline{L}^t)^{-1}\{W\} = \tilde{H}\{W\},$$

wobei $\tilde{H} = (L\overline{L}^t)^{-1}$ eine Majorante von S und $W \in \mathrm{O}(S, \mathbb{C})$ eine Einheit von S ist.

Weiter wird gezeigt: Zu jeder Majorante H von S und fester Majorante P von S gibt es ein $V \in \mathrm{SO}(S, \mathbb{C})$ mit $H = P\{V\}$. Die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(4, \mathbb{R})$$

ist eine Einheit von E_4 mit $\det(U) = -1$. Weiter ist S über $\mathbb{C}$ äquivalent zu E_4, d.h. es gibt ein $C \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ mit $S[C] = E_4$, so dass $S = (C^t)^{-1}C^{-1} = (CC^t)^{-1}$, und CUC^{-1} ist wegen $S[CUC^{-1}] = (C^{-1})^t U^2 C^{-1} = (CC^t)^{-1} = S$ eine Einheit von S mit $\det(CUC^{-1}) = -1$.
Nach dem ersten Teil des Beweises kann jede Majorante H von $S = (CC^t)^{-1}$ geschrieben werden als $H = P\{W\}$ mit der festen Majorante $P = (C\overline{C}^t)^{-1}$ und einem $W \in \mathrm{O}(S, \mathbb{C})$. Für diese Majorante P gilt $P\{CUC^{-1}\} = P$. Ist nun $\det(W) = -1$, so ist $CUC^{-1}W \in \mathrm{SO}(S, \mathbb{C})$ und $H = P\{W\} = P\{CUC^{-1}W\}$.
Zu jeder Einheit $W \in \mathrm{O}(S, \mathbb{C})$ mit $\det(W) = -1$ gibt es also ein $T \in \mathrm{O}(S, \mathbb{C})$ mit $\det(T) = -1$, so dass $H = P\{W\} = P\{V\}$ mit $V := TW \in \mathrm{SO}(S, \mathbb{C})$ geschrieben werden kann. Der Majorantenraum von S ist damit gegeben durch

$$\mathcal{P}(S) = \{P\{V\} \mid V \in \mathrm{SO}(S, \mathbb{C})\}$$

mit $P = (C\overline{C}^t)^{-1}$. Eine beliebige Majorante Q von S lässt sich nach dem Bewiesenen darstellen als $Q = P\{V_0\}$ mit einem geeigneten $V_0 \in \mathrm{SO}(S, \mathbb{C})$. Wegen $\{Q\{V\} \mid V \in \mathrm{SO}(S, \mathbb{C})\} = \{P\{V_0V\} \mid V \in \mathrm{SO}(S, \mathbb{C})\} = \mathcal{P}(S)$ ist damit die erste Aussage des Satzes bewiesen.
Offensichtlich lässt sich der obige Beweis für beliebige symmetrische Matrizen $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ durchführen.

Um die Dimension des Majorantenraums $\mathcal{P}(S)$ zu bestimmen, genügt es, speziell $S = E_4$ und damit $\mathrm{SO}(E_4, \mathbb{C}) = \mathrm{SO}(4, \mathbb{C})$ zu betrachten. Die Abbildung

$$\mathrm{SO}(4, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(E_4), \quad V \longmapsto \overline{V}^t V$$

ist nach dem ersten Teil des Satzes surjektiv und gibt Anlass zur transitiven Operation $(V, P) \mapsto \overline{V}^t PV$ $(V \in \mathrm{SO}(4, \mathbb{C}), P \in \mathcal{P}(E_4))$ von $\mathrm{SO}(4, \mathbb{C})$ auf $\mathcal{P}(E_4)$. Der Stabilisator von E_4 ist gleich $\mathrm{SU}(4) \cap \mathrm{SO}(4, \mathbb{C})$, so dass folgt:

$$\mathcal{P}(E_4) \cong \mathrm{SO}(4, \mathbb{C})/(\mathrm{SU}(4, \mathbb{C}) \cap \mathrm{SO}(4, \mathbb{C})).$$

Die (reelle) Dimension von $\mathrm{SU}(4) \cap \mathrm{SO}(4, \mathbb{C}) = \mathrm{SO}(4, \mathbb{R})$ ist $\dim(\mathrm{SU}(4) \cap \mathrm{SO}(4, \mathbb{C})) = 6$, wie man mit einem einfachen Abzählargument für die Dimension von $\mathrm{SO}(4, \mathbb{R})$ zeigt. Damit ergibt sich für die reelle Dimension des Majorantenraums $\mathcal{P}(S)$:

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{P}(S)) &= \dim(\mathcal{P}(E_4)) \\
&= \dim(\mathrm{SO}(4, \mathbb{C})/(\mathrm{SU}(4) \cap \mathrm{SO}(4, \mathbb{C})) \\
&= 12 - 6 \\
&= 6.
\end{aligned}$$

□

3.3 Die Thetafunktion auf $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3$

Im Anschluss soll die Thetafunktion $\theta_{S,H}(P)$ in Abhängigkeit von Parametern $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ angegeben werden. Dazu wird die Majorante H von S unter Verwendung der Ergebnisse aus Abschnitt 3.2 in Abhängigkeit von $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ passend parametrisiert.

3.3.1 Lemma (Iwasawa-Zerlegung von $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$) *Jedes Element von* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *kann eindeutig geschrieben werden in der Form*

$$\begin{aligned}
\gamma = l \cdot a \cdot k \qquad \textit{mit} \quad l \in & L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{C} \right\}, \\
a \in & A := \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{v} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{v}} \end{pmatrix} : v > 0 \right\}, \\
k \in & \mathrm{Stab}(j) = \mathrm{SU}(2).
\end{aligned}$$

Beweis: Für $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ wird die Abbildung $\gamma \to \gamma j =: u(\gamma) + jv(\gamma) =: w(\gamma)$ betrachtet. Mit

$$P_{w(\gamma)} := \begin{pmatrix} 1 & u(\gamma) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{v(\gamma)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{v(\gamma)}} \end{pmatrix} \qquad (\star)$$

ist $P_{w(\gamma)} j = w(\gamma) = \gamma j$, so dass $\gamma^{-1} P_{w(\gamma)} \in \mathrm{Stab}(j)$. Da die Zerlegung $(\star)$ von $P_{w(\gamma)}$ eindeutig ist als Element von LA, folgt die Behauptung. Vgl. auch Folgerung 1.1.5, *4*. □

3.3.2 Definition Jedem $w = u + jv \in \mathbb{H}^3$ wird die Matrix

$$P_w := \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{v} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{v} & \frac{u}{\sqrt{v}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{v}} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \qquad (3.3.1)$$

zugeordnet. Insbesondere ist $P_j = E_2$, und es gilt $P_w j = w$.

Seien $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$. Im Folgenden werden die den Matrizen $P_w, P_{w_0} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ nach Folgerung 3.2.9 zugeordneten Majoranten H_{ww_0} von $S = S_0[C]$ $(C \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C}))$ betrachtet:

3.3.3 Definition Für $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ sei die Majorante H_{ww_0} von $S = S_0[C]$ definiert durch

$$H_{ww_0} := (\overline{C}^t C)\{\phi_C(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})\} = (\overline{\phi(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})C})^t \phi(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})C. \quad (3.3.2)$$

Dabei ist $\phi_C(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1}) = C^{-1}\phi(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})C \in \mathrm{SO}(S, \mathbb{C})$ nach Lemma 3.2.7 eine Einheit von S, und $\overline{C}^t C$ ist eine Majorante von S.

Bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm in $\mathbb{C}^4$, so gilt für $x \in \mathbb{C}^4$:

$$\begin{aligned} H_{ww_0}\{x\} &= (\overline{\phi(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})C})^t (\phi(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})C)\{x\} \\ &= \|\phi(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})(Cx)\|^2. \end{aligned}$$

3.3.4 Folgerung *Seien $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$. Jede Majorante H von $S = S_0[C]$ lässt sich in der Form H_{ww_0} mit H_{ww_0} wie in Definition* (3.3.2) *schreiben, d.h.*

$$\mathcal{P}(S) = \{H_{ww_0} \mid w, w_0 \in \mathbb{H}^3\}.$$

Beweis: Seien $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$. Der Majorantenraum $\mathcal{P}(S)$ von S ist nach Satz 3.2.10 gegeben durch $\mathcal{P}(S) = \{(\overline{C}^t C)\{V\} \mid V \in \mathrm{SO}(S, \mathbb{C})\}$. Da die Abbildung $\phi_C : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(S, \mathbb{C})$ nach Lemma 3.2.5 surjektiv ist, gilt $\mathcal{P}(S) = \{(\overline{C}^t C)\{\phi_C(M^{-1}, N^{-1})\} \mid M, N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\}$. Schreibt man $M = P_w U, N = P_{w_0} V$ mit $V, W \in \mathrm{SU}(2)$, so ist $\phi_C(M^{-1}, N^{-1}) = \phi_C(U^{-1}, V^{-1})\phi_C(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})$, und wegen $\phi_C(U^{-1}, V^{-1}) \in \mathrm{SU}((\overline{C}^t C), \mathbb{C})$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(S) &= \{(\overline{C}^t C)\{\phi_C(M^{-1}, N^{-1})\} \mid M, N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\} \\ &= \{(\overline{C}^t C)\{\phi_C(U^{-1}, V^{-1})\}\{\phi_C(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})\} \mid w, w_0 \in \mathbb{H}^3\} \\ &= \{(\overline{C}^t C)\{\phi_C(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})\} \mid w, w_0 \in \mathbb{H}^3\} \\ &= \{H_{ww_0} \mid w, w_0 \in \mathbb{H}^3\}. \end{aligned}$$

$\square$

Im Folgenden wird $S \in \mathrm{M}_4(\mathcal{O})$ als gerade und invertierbare Matrix vorausgesetzt, für die eine (über $\mathbb{C}$!) invertierbare Matrix $C \in \mathrm{M}_4(\mathcal{O})$ existiert, so dass

$$S = S_0[C].$$

Setzt man nun H_{ww_0} als Majorante für S in die Thetafunktion ein, so ergibt sich die gesuchte (w, w_0)-Abhängigkeit der Thetafunktion:

3.3.5 Definition Für $P, w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ sei $\theta(P, w, w_0) := \theta_{S,H_{ww_0}}(P)$, also

$$\theta(P, w, w_0) = r^2 \sum_{g \in \mathcal{O}^4} \exp\bigl\{\pi i\bigl(\sigma(\tau_D S[g]z) + 2ir|\tau_D|H_{ww_0}\{g\}\bigr)\bigr\}$$

mit der Majorante H_{ww_0} von S aus (3.3.2).

3.3.6 Lemma *$\theta^{\psi}(P, w, w_0)$ konvergiert für* festes $w_0 \in \mathbb{H}^3$ *kompakt gleichmäßig auf* $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3$. *Dabei ist $\theta^{\psi}(P, w, w_0)$ für $\psi \in S^{-1}\mathcal{O}^4$ wie in Satz* 2.2.1 *definiert durch*

$$\theta^{\psi}(P, w, w_0) = r^2 \sum_{g \in \mathcal{O}^4} \exp\bigl\{\pi i\bigl(\sigma(\tau_D S[g+\psi]z) + 2ir|\tau_D|H_{ww_0}\{g+\psi\}\bigr)\bigr\}.$$

Beweis: Es seien $K \times K' \subset \mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3$ mit kompakten Mengen K und K', $P \in K,\ w \in K', \psi \in S^{-1}\mathcal{O}^4, w_0 \in \mathbb{H}^3$ fest. Zunächst wird für $g \in \mathcal{O}^4$ gezeigt:

$$H_{ww_0}\{(g+\psi)\} \geq a||g+\psi||^2$$

für ein geeignetes $a > 0$.

Begründung: H_{ww_0} ist eine positiv definite hermitesche Matrix und lässt sich somit darstellen als

$$H_{ww_0} = \overline{U}^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} U \qquad (3.3.3)$$

mit $U = U(w) \in \mathrm{SU}_4$ und $\lambda_i = \lambda_i(w) > 0$ $(1 \leq i \leq 4)$ für alle $w \in K'$. Seien $w \in K'$ fest und $\lambda_0 = \lambda_0(w)$ der kleinste Eigenwert von H_{ww_0}. Seien $x \in \mathbb{C}^4$ mit $\|x\| = 1$ und $\{v_1, ..., v_4\}$ eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren zu $\{\lambda_1, ..., \lambda_4\}$. Aus $x = \sum_{j=1}^4 \alpha_j v_j$ erhält man wegen $\|x\| = 1$ sofort $\sum_{j=1}^4 |\alpha_j|^2 = 1$, und es ergibt sich:

$$\langle H_{ww_0}x, x\rangle = \sum_{j=1}^{4} |\alpha_j|^2\lambda_j \geq \left(\sum_{i=1}^{4} |\alpha_j|^2\right)\lambda_0 = \lambda_0,$$

wobei das Gleichheitszeichen gilt, wenn das zum Eigenwert λ_0 gehörige $\alpha_j = 1$ ist und alle anderen $\alpha_l = 0$ sind. Damit folgt:

$$\lambda_0 = \lambda_0(w) = \min\{\langle H_{ww_0}x, x\rangle \mid x \in \mathbb{C}^4,\ ||x|| = 1\}.$$

Bezeichne $S := \{x \in \mathbb{C}^4 \mid \|x\| = 1\}$ die euklidische Einheitssphäre. Für festes $w_0 \in \mathbb{H}^3$ ist $\phi : K' \times S \to \mathbb{R},\ (w, g) \longmapsto \langle H_{ww_0}g, g\rangle$ eine stetige Funktion, die wegen $\langle H_{ww_0}g, g\rangle > 0$ für alle $w \in K',\ g \in S$, auf $K' \times S$ ein positives Minimum hat, d.h.

$$\min_{w\in K'} \lambda_0(w) = \min_{w\in K'} \min_{g\in S} \langle H_{ww_0}g, g\rangle \geq a > 0$$

für ein geeignetes $a > 0$. Mit (3.3.3) folgt daraus für alle $w \in K'$:

$$\overline{(g+\psi)}^t H_{ww_0}(g+\psi) \geq \lambda_0\|U(g+\psi)\|^2 = \lambda_0\|g+\psi\|^2 \geq a\|g+\psi\|^2,$$

und die Zwischenbehauptung ist bewiesen.

Für $P = z + jr \in K$ mit $C > r \geq \epsilon > 0,\ w \in K'$ und $g \in \mathcal{O}^4, \psi \in S^{-1}\mathcal{O}^4$, kann man dann wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} &\left|\exp\left\{\pi i\left(\sigma(\tau_D S[g+\psi]z\right) + 2ir|\tau_D|H_{ww_0}\{g+\psi\}\right)\right\}\right| \\ \leq\ &\exp\left\{-2\pi\tau_D\epsilon a\|g+\psi\|^2\right\}. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Damit ist $C^2 \sum_{g\in\mathcal{O}^4} \exp\left\{-2\pi\tau_D\epsilon a\|g+\psi\|^2\right\}$ eine konvergente Majorante für $\theta^\psi(P, w, w_0)$. □

3.3.7 Bemerkung Aus der Abschätzung (3.3.4) liest man sofort ab, dass $\theta^\psi(P, w, w_0)$ beliebig oft „unter dem Summenzeichen" stetig partiell differenziert werden kann, da die bei jeder partiellen Differentiation der Summanden hinzukommenden Terme nur polynomial wachsen und somit vom Exponentialterm $\exp\left\{-2\pi\tau_D\epsilon a\|g+\psi\|^2\right\}$ dominiert werden. ◊

Gesucht ist das Transformationsverhalten der Thetafunktion in Abhängigkeit von den Variablen $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$.

3.3.8 Lemma *Seien $w, w_0 \in \mathbb{H}^3, \lambda \in \mathbb{C}, T_0, T_1 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ und $g \in \mathcal{O}^4$. Dann gilt:*

1. $H_{ww_0}\{\lambda g\} = |\lambda|^2 H_{ww_0}\{g\}$.
2. $H_{T_0w\, T_1w_0}\{g\} = H_{ww_0}\{\phi_C(T_0^{-1}, T_1^{-1})g\}$.

Insbesondere ist $H_{T_0w\, w_0}\{g\} = H_{ww_0}\{\phi_C(T_0^{-1}, E_2)g\}$.

Für den Beweis von Lemma 3.3.8 wird die folgende Aussage benötigt:

3.3.9 Lemma *Für jedes* $T_0 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *gilt mit einem* $k \in \mathrm{Stab}(j) = \mathrm{SU}(2)$:

$$T_0 P_w = P_{T_0 w} k.$$

BEWEIS: Es ist $T_0 P_w j = T_0 w = P_{T_0 w} j$. □

BEWEIS VON LEMMA 3.3.8: Die erste Aussage ist klar.
Zu *2.*) Nach Lemma 3.3.9 und Lemma 3.2.6 gilt:

$$\begin{aligned}
H_{T_0 w\, T_1 w_0}\{g\} &= (\overline{C}^t C)\{\phi_C(P_{T_0 w}^{-1}, P_{T_1 w_0}^{-1})\}\{g\} \\
&= (\overline{C}^t C)\{\phi_C(k P_w^{-1} T_0^{-1}, k_0 P_{w_0}^{-1} T_1^{-1})\}\{g\} \\
&= (\overline{C}^t C)\{\phi_C(k, k_0)\phi_C(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})\phi_C(T_0^{-1}, T_1^{-1})\}\{g\} \\
&= (\overline{\phi_C(k, k_0)})^t \overline{C}^t C \phi_C(k, k_0)\{\phi_C(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})\}\{\phi_C(T_0^{-1}, T_1^{-1}) g\} \\
&= \overline{C}^t \overline{\phi(k, k_0)}^t \phi(k, k_0) C\{\phi_C(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})\}\{\phi_C(T_0^{-1}, T_1^{-1}) g\} \\
&= \overline{C}^t C\{\phi_C(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})\}\{\phi_C(T_0^{-1}, T_1^{-1}) g\} \\
&= H_{w w_0}\{\phi_C(T_0^{-1}, T_1^{-1}) g\}.
\end{aligned}$$

□

Für das Transformationsverhalten der Thetafunktion bezüglich $P, w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ folgt daher insgesamt:

3.3.10 Satz *Seien* $P = z + jr \in \mathbb{H}^3, w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ *und* $T = \begin{pmatrix} \sqrt{\tau_D}^{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\tau_D} \end{pmatrix}$ *wie in* (2.1.1). χ *sei der Charakter aus* (2.1.3). *Dann gilt:*

1. $\theta(P + t, w, w_0) = \theta(P, w, w_0)$ *für* $t \in \mathcal{O}$.

2. $\theta(MP, w, w_0) = \chi(M)\theta(P, w, w_0)$ *für* $M \in \Gamma = T\Gamma_0(\delta_K q)T^{-1}$.

3. $\theta(P, T_0 w, T_1 w_0) = \theta(P, w, w_0)$ *für* $(T_0, T_1) \in \phi_C^{-1}(\mathrm{SO}(S, \mathcal{O}))$, *wobei* $\mathrm{SO}(S, \mathcal{O}) := \mathrm{SO}(S, \mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}_4(\mathcal{O})$.

BEWEIS: *1.)* und *2.)* sind klar nach Satz 2.1.6.
Zu *3.)*: Nach Lemma 3.3.8 gilt $H_{T_0 w\, T_1 w_0}\{g\} = H_{w w_0}\{\phi_C(T_0^{-1}, T_1^{-1}) g\}$, und für $\phi_C(T_0^{-1}, T_1^{-1}) \in \mathrm{SO}(S, \mathcal{O})$ und $g \in \mathcal{O}^4$ ist $h := \phi_C(T_0^{-1}, T_1^{-1}) g \in \mathcal{O}^4$, so dass folgt:

$$S[g] = S[(\phi_C(T_0^{-1}, T_1^{-1}))^{-1} h] = S[(\phi_C(T_0^{-1}, T_1^{-1}))^{-1}][h] = S[h].$$

Weiter hat man $\phi_C(T_0^{-1}, T_1^{-1})\mathcal{O}^4 = \mathcal{O}^4$, da $\phi_C(T_0^{-1}, T_1^{-1}) \in \mathrm{SO}(S, \mathcal{O})$ insbesondere ein Element von $\mathrm{SL}_4(\mathcal{O})$ ist. Für $\phi_C(T_0^{-1}, T_1^{-1}) \in \mathrm{SO}(S, \mathcal{O})$ gilt also:

$$\begin{aligned}
\theta(P, T_0 w, T_1 w_0) &= r^2 \sum_{g \in \mathcal{O}^4} e^{\pi i(\sigma(\tau_D S[g] z + 2ir|\tau_D| H_{ww_0}\{\phi_C(T_0^{-1}, T_1^{-1}) g\})} \\
&= r^2 \sum_{h \in \phi_C(T_0^{-1}, T_1^{-1})\mathcal{O}^4} e^{\pi i(\sigma(\tau_D S[(\phi_C(T_0^{-1}, T_1^{-1}))^{-1} h] z) + 2ir|\tau_D| H_{ww_0}\{h\})} \\
&= r^2 \sum_{h \in \mathcal{O}^4} e^{\pi i(\sigma(\tau_D S[h] z) + 2ir|\tau_D| H_{ww_0}\{h\})} \\
&= \theta(P, w, w_0),
\end{aligned}$$

und wegen $\phi_C(T_0^{-1}, T_1^{-1}) \in \mathrm{SO}(S, \mathcal{O}) \Leftrightarrow \phi_C(T_0, T_1) \in \mathrm{SO}(S, \mathcal{O})$ folgt die Behauptung. $\square$

3.3.11 Folgerung *Seien $0 \neq \tilde{\mu} = \tau_D \mu \in \mathcal{O}^\#$ mit $\mu \in \mathcal{O}$, $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$. Die Majorante H_{ww_0} von S sei definiert wie in* (3.3.2). *Dann ist die Zetafunktion*

$$Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s) := Z_{S, H_{ww_0}, \tilde{\mu}}(s)$$

in Abhängigkeit von $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gegeben durch

$$Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s) = \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{\Gamma(s+1)}{\left(2\pi|\tau_D|\right)^{s+1}} \sum_{\substack{g \in \mathcal{O}^4 \\ S[g] = 2\mu}} \left(H_{ww_0}\{g\} + 2|\mu|\right)^{-s-1}. \qquad (3.3.5)$$

Beweis: Klar nach Satz 3.1.6. $\square$

Kapitel 4

Spektralzerlegung der Zetafunktion

Im Anschluss wird eine Einbettung von $\mathcal{O}^4$ in den Modul $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})$ der (2×2)-Matrizen über $\mathcal{O}$ angegeben. Mit Hilfe dieser Einbettung lässt sich dann die Summationsbedingung bei der Zetafunkion $Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$ umschreiben als Summation über gewisse Matrizen aus $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})$ mit fester Determinante $0 \neq \mu \in \mathcal{O}$. Auf diesen Matrizen operiert eine geeignete koendliche Gruppe $\Gamma^* < \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ mit endlich vielen Bahnen (bijektiv) durch Multiplikation von links (und von rechts). Es zeigt sich, dass die Zetafunktion eine Funktion des hyperbolischen Abstands δ ist und somit als Poincaré-Reihe $\tilde{H}(w, w_0, s)$ zu Γ^* geschrieben werden kann.
Außerdem wird bewiesen, dass die Zetafunktion eine auf die ganze komplexe Ebene meromorph fortsetzbare Funktion ist, die holomorph in der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 0$ ist bis auf einen Pol der Ordnung 1 in $s = 1$.
Es wird das asymptotische Verhalten von $\tilde{H}(w, w_0, s)$ bzw. $Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$ an der Konvergenzabszisse $s = 1$ angegeben.

Im Folgenden ist $S = S^t \in \mathrm{M}_4(\mathcal{O})$ als gerade und invertierbare Matrix vorausgesetzt, für die eine (über $\mathbb{C}$!) invertierbare Matrix $C \in \mathrm{M}_4(\mathcal{O})$ existiert, so dass $S = S_0[C]$ (vgl. S. 51).

4.1 Einbettung von $\mathcal{O}^4$

Für die (gerade) Matrix

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathcal{O})$$

wie in (3.2.1) mit $S_0^t = S_0, S_0^{-1} = S_0$ und $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathcal{O}^4$ ist

$$S_0[x] = 2(x_1x_4 - x_2x_3) = 2\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

so dass mit dem *$\mathcal{O}$-Modul-Isomorphismus*

$$\begin{aligned} \Omega_0 : \mathcal{O}^4 &\longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathcal{O}), \\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

gilt:

$$S_0[x] = 2\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 2\det(\Omega_0(x)).$$

Seien C eine invertierbare Matrix aus $\mathrm{M}_4(\mathcal{O})$ und $S := S_0[C]$. Dann ist $S = S^t \in \mathrm{M}_4(\mathcal{O})$ symmetrisch und invertierbar. Wegen $S[x] = 2\det(\Omega_0(Cx))$ für $x \in \mathcal{O}^4$ ist S außerdem gerade.

4.1.1 Lemma *Sei Ω_0 wie in* (4.1.1). *Der $\mathcal{O}$-Untermodul* $\mathrm{M}_C(\mathcal{O})$ *von* $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})$ *werde definiert durch*

$$\mathrm{M}_C(\mathcal{O}) := \Omega_0(C\mathcal{O}^4).$$

Dann ist die Abbildung $\Omega := \Omega_0 \circ C$,

$$\begin{aligned} \Omega : \mathcal{O}^4 &\longrightarrow \mathrm{M}_C(\mathcal{O}), \\ x &\longmapsto \Omega_0(Cx) \end{aligned}$$

ein $\mathcal{O}$-Modul-Isomorphismus.

Beweis: $\Omega = \Omega_0 \circ C$ ist ein $\mathcal{O}$-Modul-Isomorphismus, da $\Omega_0 : \mathcal{O}^4 \to M_2(\mathcal{O})$ ein $\mathcal{O}$-Modul-Isomorphismus und $C : \mathcal{O}^4 \to C\mathcal{O}^4$ bijektiv ist. □

4.1.2 Lemma *Seien $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ und $g \in \mathcal{O}^4$. Weiter sei wie oben $S = S_0[C]$ mit einer invertierbaren Matrix $C \in \mathrm{M}_4(\mathcal{O})$. Dann gilt für die Majorante H_{ww_0} wie in* (3.3.2):

$$\begin{aligned} H_{ww_0}\{g\} &= \left(\overline{\phi(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})}^t \phi(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})\right)\{Cg\} \\ &= 2|\det(\Omega(g))| \cdot \delta\big(w, \Omega(g)w_0\big). \end{aligned}$$

Die positiv definite hermitesche Form $H_{ww_0}\{g\}$ ist also eine Funktion der hyperbolischen Abstandsfunktion δ. (Für $\Omega(g) \notin \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ist die rechte Seite in natürlicher Weise als Grenzwert aufzufassen.)

BEWEIS: Für $w, w_0 \in \mathbb{H}^3, P_w, P_{w_0} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ wie in Definition 3.3.2 und $\Omega(g) = \Omega_0(Cg) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O})$ setzt man

$$W_1 := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} := P_w^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} P_{w_0}.$$

Dann ist $a_1 d_1 - b_1 c_1 = ad - bc$, und es gilt:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = A(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1}) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = A(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})(Cg)$$

mit der darstellenden Matrix $A(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})$ des Gruppenhomomorphismus $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C})$ aus dem Beweis von Lemma 3.2.2, so dass sich für H_{ww_0} im Fall $W_1 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ mit Folgerung 1.1.10 und auf Grund der Punkt-Paar-Invarianz von δ (s. Satz 1.1.8) ergibt:

$$\begin{aligned}
H_{ww_0}\{g\} &= \left(\overline{A(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})}^t A(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})\right)\{Cg\} \\
&= \overline{(a,b,c,d)}\; \overline{A(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})}^t A(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1}) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \\
&= \overline{(a_1, b_1, c_1, d_1)} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \\
&= |a_1|^2 + |b_1|^2 + |c_1|^2 + |d_1|^2 \\
&\underset{(\star)}{=} 2|a_1 d_1 - b_1 c_1|\,\delta(j, W_1 j) \\
&= 2|a_1 d_1 - b_1 c_1|\,\delta\big(P_w j, P_w W_1 j\big) \\
&= 2|ad - bc|\,\delta\left(P_w j, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} P_{w_0} j\right) \\
&= 2|\det(\Omega(g))|\,\delta\big(w, \Omega(g) w_0\big).
\end{aligned}$$

Im Fall $W_1 \notin \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ist in $(\star)$ eine Grenzwertbetrachtung durchzuführen. Vgl. auch [2] und ([7], S. 38f.). Der Beweis in [2] ist jedoch insofern aufwendiger, als dort die Aktion von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ auf $\mathcal{H}(-1,-1)$ benötigt wird. Dies wird im vorliegenden Beweis mit dem allgemeinen Lemma 1.1.10 vermieden. $\square$

4.1.3 Bemerkung Im Spezialfall $w = w_0 = j$, also $P_w = E_2 = P_{w_0}$, lässt sich die δ-Abhängigkeit von $H_{jj}\{g\}$ elementar nachrechnen. Seien dazu $g \in \mathcal{O}^4, S = S_0[C]$ mit einer invertierbaren Matrix $C \in \mathrm{M}_4(\mathcal{O})$ und $\Omega(g) = \Omega_0(Cg) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O})$. Dann ist nach Definition von H_{jj} :

$$\begin{aligned} H_{jj}\{g\} &= \left(\overline{\phi(P_j^{-1}, P_j^{-1})}^t \phi(P_j^{-1}, P_j^{-1})\right)\{Cg\} \\ &= E_4\{Cg\} \\ &= |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 \\ &= 2|\det(\Omega(g))|\delta(j, \Omega(g)j). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde Folgerung 1.1.10 benutzt. Vgl. auch Kapitel 6. $\Diamond$

In Abhängigkeit von $P, w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ ergibt sich mit Lemma 4.1.2 die folgende Darstellung für die Thetafunktion:

4.1.4 Satz *Seien* $P, w, w_0 \in \mathbb{H}^3$. *Dann gilt mit* $\mathrm{M}_C(\mathcal{O}) = \Omega(\mathcal{O}^4)$ *wie in Lemma* 4.1.1:

$$\theta(P, w, w_0) = r^2 \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O})} \exp\Big\{2\pi i\big(\sigma(\tau_D(ad-bc)z)\big) - 4\pi r|\tau_D||ad-bc|\delta\big(w, \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)w_0\big)\Big\}.$$

Beweis: Mit Lemma 4.1.2 ergibt sich für $P, w, w_0 \in \mathbb{H}^3, g \in \mathcal{O}^4$ und $\Omega(g) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O})$ wegen $S[g] = 2(ad-bc) = 2\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = 2\det(\Omega(g))$:

$$\begin{aligned} \theta(P, w, w_0) &= r^2 \sum_{g \in \mathcal{O}^4} \exp\big\{\pi i\big(\sigma\big(\tau_D S[g]z\big)\big) - 2\pi r|\tau_D|H_{ww_0}\{g\}\big\} \\ &= r^2 \sum_{g \in \mathcal{O}^4} \exp\big\{2\pi i\big(\sigma(\tau_D \det(\Omega(g))z)\big) \\ &\qquad - 4\pi r|\tau_D||\det(\Omega(g))|\delta\big(w, \Omega(g)w_0\big)\big\} \\ &= r^2 \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O})} \exp\big\{2\pi i\big(\sigma(\tau_D(ad-bc)z)\big) \\ &\qquad - 4\pi r|\tau_D||ad-bc|\delta\big(w, \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)w_0\big)\big\}. \end{aligned}$$

$\square$

Da δ eine Punkt-Paar-Invariante ist, folgt die Invarianz der Thetafunktion in den Variablen $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ unter einer (koendlichen) Gruppe $\Gamma^* < \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, welche durch $(g,h) \cdot M := gMh^{-1}$ $(g, h \in \Gamma^*, M \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O}))$

auf $\mathrm{M}_C(\mathcal{O})$ agiert. In Übereinstimmung mit Satz 3.3.10 gilt dabei offenbar $\Gamma^* \times \Gamma^* \subseteq \phi_C^{-1}(\mathrm{SO}(S, \mathcal{O}))$. Vgl. dazu Abschnitt 4.2.

Die folgende Differentialgleichung ist wesentlich für den Nachweis der Γ-Automorphie des Thetalifts in Kapitel 5:

4.1.5 Satz *Seien $P = x + iy + jr$, $w = u_1 + iu_2 + jv \in \mathbb{H}^3$ und $w_0 \in \mathbb{H}^3$ fest. Dann ist*

$$\Delta^P \theta(P, w, w_0) = \Delta^w \theta(P, w, w_0)$$

wobei die hyperbolischen Laplace-Beltrami-Operatoren Δ^P und Δ^w gegeben sind durch

$$\Delta^P := r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) - r\frac{\partial}{\partial r},$$
$$\Delta^w := v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) - v\frac{\partial}{\partial v}.$$

Beweis: Die Reihendarstellungen (und partiellen Ableitungen) für $\theta(P, w, w_0)$ konvergieren für festes $w_0 \in \mathbb{H}^3$ nach Lemma 3.3.6 kompakt gleichmäßig absolut auf $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3$. Also genügt es, die Behauptung für die einzelnen Summanden zu zeigen, was durch langwieriges, aber elementares Berechnen der partiellen Ableitungen erfolgt. Für die explizite Rechnung siehe [2]. Vgl. auch ([7], Kapitel 6). □

4.2 Der Hauptsatz

Die von der hyperbolischen Abstandsfunktion δ abhängige Zetafunktion soll nun geschrieben werden als Funktion einer bezüglich δ gebildeten Poincaré-Reihe $\tilde{H}$. Es werden die Bezeichnungen aus Abschnitt 4.1 verwendet.

Offensichtlich operiert die Einheitengruppe $\mathrm{SO}(S_0, \mathcal{O}) := \mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}_4(\mathcal{O})$ von S_0 über $\mathcal{O}$ auf der Menge

$$\{g \in \mathcal{O}^4 \mid S_0[g] = 2\mu\},$$

wobei $0 \neq \mu \in \mathcal{O}$. Sei $S = S_0[C]$ mit einer (über $\mathbb{C}$) invertierbaren Matrix $C \in \mathrm{M}_4(\mathcal{O})$. Die Gruppe $\mathrm{SO}(S, \mathcal{O}) := \mathrm{SO}(S, \mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}_4(\mathcal{O})$ operiert offenbar auf

$$\{g \in \mathcal{O}^4 \mid S[g] = 2\mu\}.$$

Es wird gezeigt, dass das Urbild $\phi_C^{-1}(\mathrm{SO}(S,\mathcal{O}))$ von $\mathrm{SO}(S,\mathcal{O})$ unter ϕ_C mit endlich vielen Bahnen auf der Menge

$$\mathrm{M}_C(\mathcal{O})_\mu := \{M \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O}) \mid \det(M) = \mu\}$$

aller Matrizen aus $\mathrm{M}_C(\mathcal{O}) = \Omega(\mathcal{O}^4)$ mit fester Determinante $0 \neq \mu \in \mathcal{O}$ operiert.

4.2.1 Satz *$\phi_C^{-1}(\mathrm{SO}(S,\mathcal{O}))$ ist arithmetisch in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, d.h. $\phi_C^{-1}(\mathrm{SO}(S,\mathcal{O}))$ ist kommensurabel mit $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \times \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$.*

Satz 4.2.1 folgt aus dem allgemeinen Satz 4.2.4 für arithmetische Gruppen. Bevor dieser formuliert und bewiesen wird, werden noch einige Bezeichnungen eingeführt.

4.2.2 Definition Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein algebraischer Zahlkörper, $\mathcal{O}$ sei der Ring der über $\mathbb{Z}$ ganzen Zahlen in K. Eine über K definierte *affine algebraische Gruppe* G ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (für ein $n \in \mathbb{N}$), die die Nullstellenmenge einer endlichen Menge von Polynomen mit Koeffizienten in K in den Eingängen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist. Ist R ein Unterring von $\mathbb{C}$, so ist die Gruppe $G(R)$ der R-Punkte von G definiert als

$$G(R) := G \cap \mathrm{GL}_n(R).$$

Seien G, H über K definierte affine algebraische Gruppen. Ein Homomorphismus $\phi : G \to H$ heißt *K-rational*, falls ϕ durch Polynome mit Koeffizienten in K in den Matrixeingängen von G gegeben werden kann.

4.2.3 Definition Eine Untergruppe Γ einer über K definierten affinen algebraischen Gruppe G heißt *arithmetisch*, falls Γ kommensurabel mit $G(\mathcal{O}) := G \cap \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist.

Diese Definition ist in ([33], S. 171) für den Fall $K = \mathbb{Q}$ angegeben. Nach ([33], S. 175) ist dies jedoch keine Einschränkung. Man benutzt hier die Basisreduktion von K nach $\mathbb{Q}$.
In [5] wählt Borel eine engere Definition. Er setzt zusätzlich $\Gamma \leq G(K)$ voraus. In ([15], Section 1) wird gezeigt, dass das aber nicht zu einer kleineren Klasse von Gruppen führt.

4.2.4 Satz *Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein algebraischer Zahlkörper, und G, H seien über K definierte affine algebraische Gruppen. Weiter sei $\phi : G \to H$ ein surjektiver K-rationaler Homomorphismus mit endlichem Kern. Dann ist $\phi^{-1}(\Delta)$ arithmetisch für jede arithmetische Untergruppe $\Delta \leq H$.*

BEWEIS: Seien die Voraussetzungen wie im Satz. Nach ([33], S. 174, Theorem 4.1) ist $\phi(\Gamma)$ arithmetisch für jede arithmetische Untergruppe $\Gamma \leq G$. (Dabei ist $K = \mathbb{Q}$ vorausgesetzt. Durch Basisreduktion folgt jedoch der allgemeine Fall eines algebraischen Zahlkörpers, vgl. ([33], S. 175).) Es folgt, dass $\Delta_1 := \phi(G(\mathcal{O}))$ kommensurabel mit Δ ist.
Sei $U := \Delta_1 \cap \Delta$, und sei F der Kern von ϕ. Nach Voraussetzung ist F eine endliche normale Untergruppe von G. Damit ist $\Gamma_1 := F \cdot G(\mathcal{O})$ eine arithmetische Untergruppe von G, da $G(\mathcal{O})$ endlichen Index in Γ_1 hat. Es gilt $\phi^{-1}(\Delta_1) = \Gamma_1$. Die Untergruppe U hat endlichen Index sowohl in Δ_1 als auch in Δ, und da F endlich ist, folgt daraus, dass $\phi^{-1}(U)$ endlichen Index in $\phi^{-1}(\Delta_1)$ und in $\phi^{-1}(\Delta)$ hat. Da $\phi^{-1}(\Delta_1)$ arithmetisch ist, folgt, dass auch $\phi^{-1}(\Delta)$ diese Eigenschaft besitzt.
Im vorletzten Schritt wurde benutzt, dass für Untergruppen $U_1 \leq U_2 \leq H$, wobei U_1 endlichen Index in U_2 hat, auch der Index von $\phi^{-1}(U_1)$ in $\phi^{-1}(U_2)$ endlich ist. Hierzu ist zu beachten, dass die von ϕ induzierte Abbildung $\hat{\phi} : \phi^{-1}(U_2)/\phi^{-1}(U_1) \to U_2/U_1$ eine Bijektion ist. □

BEWEIS VON SATZ 4.2.1: $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ und $\mathrm{SO}(S, \mathbb{C})$ sind affine algebraische Gruppen in $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \times \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ und $\mathrm{SO}(S, \mathcal{O})$ die zugehörigen Gruppen der $\mathcal{O}$-Punkte. Weiter ist ϕ_C ein surjektiver K-rationaler Homomorphismus mit endlichem Kern (vgl. Lemma 3.2.4 und Lemma 3.2.5). Dann ist $\phi_C^{-1}(\mathrm{SO}(S, \mathcal{O}))$ nach Satz 4.2.4 arithmetisch in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, d.h. $\phi_C^{-1}(\mathrm{SO}(S, \mathcal{O}))$ ist kommensurabel mit $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \times \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$. □

4.2.5 Korollar *Sei* $\Gamma^* < \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *maximal mit der Eigenschaft*

$$\Gamma^* \times \Gamma^* \subset \phi_C^{-1}(\mathrm{SO}(S, \mathcal{O})). \tag{4.2.1}$$

Dann ist Γ^* *kommensurabel mit* $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$*, und* $\Gamma^* \times \Gamma^*$ *operiert auf der Menge*

$$\mathrm{M}_C(\mathcal{O})_\mu = \{M \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O}) \mid \det(M) = \mu\}$$

$(0 \neq \mu \in \mathcal{O})$ *durch* $(g, h) \cdot M := gMh^{-1}$ $(M \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O}), g, h \in \Gamma^*)$.

BEWEIS: Da das Urbild $\phi_C^{-1}(\mathrm{SO}(S, \mathcal{O}))$ von $\mathrm{SO}(S, \mathcal{O})$ unter ϕ_C nach Satz 4.2.1 arithmetisch in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ist, ist Γ^* arithmetisch in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ und damit kommensurabel mit $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$.

Für $M \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O}) = \Omega(\mathcal{O}^4)$ und $(g, h) \in \Gamma^* \times \Gamma^*$ gilt nach (3.2.2) im Beweis von Lemma 3.2.2:

$$\begin{aligned} gMh^{-1} &\in g\Omega(\mathcal{O}^4)h^{-1} = g\Omega_0(C\mathcal{O}^4)h^{-1} = \Omega_0(\phi(g,h)C\mathcal{O}^4) \\ &= \Omega_0(C\phi_C(g,h)\mathcal{O}^4) = \Omega(\phi_C(g,h)\mathcal{O}^4) = \Omega(\mathcal{O}^4) \\ &= \mathrm{M}_C(\mathcal{O}), \end{aligned}$$

und mit $\det(gMh^{-1}) = \det(M) = \mu$ folgt die Behauptung. $\square$

4.2.6 Korollar *Sei* Γ^* *wie in* (4.2.1). $\Gamma^* \cap \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ *ist eine Kongruenzuntergruppe von* $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$. *Damit ist* Γ^* *nach Definition* 1.3.10 *eine Kongruenzuntergruppe bezüglich* $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$.

Beweis: Da Γ^* nach Korollar 4.2.5 kommensurabel mit $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ ist, hat $\Gamma^* \cap \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ endlichen Index in $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$. Die Matrix $C \in \mathrm{M}_4(\mathcal{O})$ ist als invertierbar über $\mathbb{C}$ vorausgesetzt. Damit ist C invertierbar über K, und es existiert ein $0 \neq q \in \mathcal{O}$ mit $qC^{-1} \in \mathrm{M}_4(\mathcal{O})$. Wegen $C^{-1} = (\det(C))^{-1}C^{\#}$ mit der zu C komplementären Matrix $C^{\#} \in \mathrm{M}_4(\mathcal{O})$, kann $q = \det(C)$ gewählt werden. Für die Hauptkongruenzgruppe

$$\Gamma(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod q \right\}$$

der Stufe q gilt:

$$\Gamma(q) \times \Gamma(q) \subset \phi_C^{-1}\big(C^{-1}\mathrm{SO}(S_0, \mathcal{O})C \cap \mathrm{SO}(S, \mathcal{O})\big) \subset \phi_C^{-1}(\mathrm{SO}(S, \mathcal{O})),$$

wie man unter Verwendung von (3.2.2) im Beweis von Lemma 3.2.2 leicht nachrechnet. Die Gruppe $\Gamma(q)$ liegt in einer maximalen Untergruppe Γ^*, die die in Korollar 4.2.5 genannten Eigenschaften hat, und wegen $\Gamma(q) \subset \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ ist $\Gamma(q) \subset \Gamma^* \cap \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$. Damit ist $\Gamma^* \cap \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ eine Kongruenzuntergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$. Nach Definition 1.3.10 ist Γ^* außerdem eine Kongruenzuntergruppe bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$. $\square$

4.2.7 Bemerkung Ist $C \in \mathrm{GL}_4(\mathcal{O})$, so folgt aus $\phi_C(\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \times \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})) \subset \mathrm{SO}(S, \mathcal{O})$, dass $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ enthalten ist in Γ^*. $\Diamond$

Es wird gezeigt, dass $\Gamma^* \times \Gamma^*$ mit endlich vielen Bahnen auf $\mathrm{M}_C(\mathcal{O})_\mu$ operiert.

4.2.8 Satz *Seien* K *ein imaginärquadratischer Zahlkörper und* $0 \neq \mu \in \mathcal{O}$. *Weiter sei* $\Delta < \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *eine zu* $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \times \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ *kommensurable Untergruppe, die* $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})_\mu = \{M \in \mathrm{M}_2(\mathcal{O}) \mid \det(M) = \mu\}$ *invariant lässt. Dann operiert* Δ *mit endlich vielen Bahnen auf* $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})_\mu$.

Die Behauptung folgt aus dem Elementarteilersatz von Steinitz, der hier für (2×2)-Matrizen über $\mathcal{O}$ formuliert wird. Zunächst werden noch einige Bezeichnungen eingeführt: Sei $\Gamma = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}) \times \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$. Γ operiert auf $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})$ durch

$$(g, h) \cdot M := gMh^{-1} \qquad (g, h \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}), M \in \mathrm{M}_2(\mathcal{O})).$$

Weiter setzt man für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$:

$$\mathcal{D}_1(M) :=< a, b, c, d >, \quad \mathcal{D}_2(M) := \det(M)\mathcal{O} =< \det(M) > .$$

Hier ist $< a, b, c, d >$ das von a, b, c, d erzeugte $\mathcal{O}$-Ideal. Wegen $\mathcal{D}_2(M) \subset \mathcal{D}_1(M)$ sind auch

$$\mathcal{E}_1(M) := \mathcal{D}_1(M), \quad \mathcal{E}_2(M) := \mathcal{D}_2(M) \cdot \mathcal{D}_1(M)^{-1}$$

Ideale in $\mathcal{O}$.

4.2.9 Satz (Steinitz) *Seien die Bezeichnungen wie oben, und seien $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathcal{O})$ mit $\det(A) \neq 0 \neq \det(B)$. Dann sind äquivalent:*

1. *A und B liegen in derselben Γ-Bahn.*
2. *$\mathcal{E}_1(A) = \mathcal{E}_1(B)$ und $\mathcal{E}_2(A) = \mathcal{E}_2(B)$.*

Beweis: Vgl. ([41], S. 352 (oben)). Dabei ist zu beachten, dass die Ränge von A und B beide gleich 2 sind. Somit sind die von Steinitz definierten Zeilenklassen und Spaltenklassen jeweils die Hauptklassen in der Idealklassengruppe von $\mathcal{O}$, und die zusätzlichen Bedingungen in dem Äquivalenzsatz fallen weg. $\square$

4.2.10 Lemma *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{O}$ Ideale, die alle nicht das Nullideal sind, und es gelte $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$. Dann sind äquivalent:*

1. *$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.*
2. *$\mathcal{A}\mathcal{B}_1^{-1} = \mathcal{A}\mathcal{B}_2^{-1}$.*

Beweis: 1.) impliziert offensichtlich 2.). Die andere Richtung folgt durch eine offensichtliche Rechnung in der Gruppe der Ideale. $\square$

Für $0 \neq \mu \in \mathcal{O}$ seien

$$\mathrm{M}_2(\mathcal{O})'_\mu := \{M \in \mathrm{M}_2(\mathcal{O}) \mid \det(M)\mathcal{O} = \mu\mathcal{O}\}$$

und

$$\mathcal{I}(\mu) := \{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \text{ ist ein Ideal mit } \mu\mathcal{O} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{O}\}.$$

Da der Quotient $\mathcal{O}/\mu\mathcal{O}$ endlich ist, ist $\mathcal{I}(\mu)$ für jedes $\mu \neq 0$ eine endliche Menge.

4.2.11 Satz *Seien die Bezeichnungen wie oben, und sei* $0 \neq \mu \in \mathcal{O}$. *Die Abbildung*

$$\Phi : \Gamma\backslash \mathrm{M}_2(\mathcal{O})'_\mu \to \mathcal{I}(\mu), \quad A \mapsto \mathcal{D}_1(A)$$

ist wohldefiniert und injektiv. Die Menge der Γ*-Bahnen in* $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})'_\mu$ *ist also endlich.*

Beweis: Satz 4.2.11 folgt sofort aus Satz 4.2.9 und Lemma 4.2.10. □

Ist K imaginärquadratisch, so hat $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \times \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ endlichen Index in Γ. In diesem Fall sei $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})_\mu := \{A \in \mathrm{M}_2(\mathcal{O}) \mid \det(A) = \mu\}$. Offensichtlich gilt $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})_\mu \subset \mathrm{M}_2(\mathcal{O})'_\mu$, und $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})_\mu$ ist eine $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \times \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ invariante Teilmenge von $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})'_\mu$. Daraus folgt Satz 4.2.8.

4.2.12 Korollar

1. $\phi_C^{-1}(\mathrm{SO}(S, \mathcal{O}))$ *operiert mit endlich vielen Bahnen auf* $\mathrm{M}_C(\mathcal{O})_\mu = \{M \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O}) \mid \det(M) = \mu\}$.
2. *Sei* Γ^* *wie in* (3.3.2). *Dann operiert* $\Gamma^* \times \Gamma^*$ *auf* $\mathrm{M}_C(\mathcal{O})_\mu$ *mit endlich vielen Bahnen.*

Beweis: Klar nach Satz 4.2.4, Korollar 4.2.5 und Satz 4.2.8. Dabei ist zu beachten, dass $\mathrm{M}_C(\mathcal{O})_\mu$ eine unter $\phi_C^{-1}(\mathrm{SO}(S, \mathcal{O}))$ invariante Teilmenge von $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})_\mu$ ist. □

Das Transformationsverhalten der Thetafunktion bezüglich der Variablen $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ lässt sich damit wie folgt beschreiben:

4.2.13 Satz (Zusatz zu Satz 3.3.10) *Sei die koendliche Untergruppe* Γ^* *gegeben wie in* (4.2.1). *Dann gilt:*

$$\theta(P, T_0 w, T_1 w_0) = \theta(P, w, w_0)$$

für $(T_0, T_1) \in \Gamma^* \times \Gamma^*$. *Insbesondere ist* $\theta(P, T_0 w, w_0) = \theta(P, w, w_0)$ *für* $T_0 \in \Gamma^*$.

Beweis: Wegen $\Gamma^* \times \Gamma^* \subset \phi_C^{-1}(\mathrm{SO}(S, \mathcal{O}))$ folgt die Behauptung sofort aus Satz 3.3.10. □

Mit Lemma 4.1.2 erhält man aus Folgerung 3.3.11 für die Zetafunktion:

4.2.14 Satz *Seien* $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$, $0 \neq \tilde{\mu} = \tau_D \mu \in \mathcal{O}^\#$ $(\mu \in \mathcal{O})$ *und* $\mathrm{M}_C(\mathcal{O}) = \Omega(\mathcal{O}^4)$ *wie in Lemma* 4.1.1. *Dann ist die Zetafunktion für* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *gegeben durch*

$$Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s) = \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{\Gamma(s+1)}{\left(4\pi|\tilde{\mu}|\right)^{s+1}} \sum_{\substack{A \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O}) \\ \det(A) = \mu}} \left(\delta(w, Aw_0) + 1\right)^{-s-1},$$

und es gilt:

$$Z_{\tilde{\mu}}(T_0 w, T_1 w_0, s) = Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$$

für $(T_0, T_1) \in \Gamma^* \times \Gamma^*$. *Insbesondere ist* $Z_{\tilde{\mu}}(T_0 w, w_0, s) = Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$ *für* $T_0 \in \Gamma^*$.

Beweis: Für $g \in \mathcal{O}^4$ mit $S[g] = 2\mu \in 2\mathcal{O}$ ist $\det(\Omega(g)) = \mu \in \mathcal{O}$, so dass sich aus Folgerung 3.3.11 mit Lemma 4.1.2 wegen $\Omega(\mathcal{O}^4) = \mathrm{M}_C(\mathcal{O})$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ ergibt:

$$\begin{aligned} Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s) &= \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{\Gamma(s+1)}{\left(2\pi|\tau_D|\right)^{s+1}} \sum_{\substack{g \in \mathcal{O}^4 \\ S[g]=2\mu}} \Big(H_{ww_0}\{g\} + 2|\mu|\Big)^{-s-1} \\ &= \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{\Gamma(s+1)}{\left(4\pi|\tilde{\mu}|\right)^{s+1}} \sum_{\substack{A \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O}) \\ \det(A)=\mu}} \Big(\delta\big(w, Aw_0\big) + 1\Big)^{-s-1} \end{aligned}$$

mit $\tilde{\mu} = \tau_D \mu \in \mathcal{O}^{\#}$. Weiter operiert die Gruppe $\Gamma^* \times \Gamma^*$ nach Korollar 4.2.5 auf $\mathrm{M}_C(\mathcal{O})_\mu$ durch $(g,h) \cdot M = gMh^{-1}$ $(M \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O}), (g,h) \in \Gamma^* \times \Gamma^*)$, so dass die Invarianz der Zetafunktion unter $\Gamma^* \times \Gamma^*$ aus der Punkt-Paar-Invarianz von δ folgt. □

4.2.15 Folgerung Γ^* *operiert auf* $\mathrm{M}_C(\mathcal{O})_\mu$ *mit endlich vielen Bahnen (bijektiv) durch Multiplikation von links (und von rechts).*

Beweis: $GL_2(\mathcal{O})$ operiert auf $\mathcal{O}^2$ und lässt $I_n(\mathcal{O}) := \{U \subset \mathcal{O}^2 \mid U \text{ ist Untermodul von endlichem Index } n\}$ invariant. Weiter ist $I_n(\mathcal{O})$ endlich. Seien $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})'_\mu := \{M \in \mathrm{M}_2(\mathcal{O}) \mid \det(M)\mathcal{O} = \mu\mathcal{O}\}$ und $n = \mathcal{N}(\mu) \neq 0$. Dann ist die Abbildung $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}) \backslash \mathrm{M}_2(\mathcal{O})'_\mu \to I_n(\mathcal{O})$, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \, < (a,b), (c,d) >$ nach dem Elementarteilersatz von Steinitz für die Linksäquivalenz von Matrizen (vgl. ([41], S. 344)) wohldefiniert und injektiv, und es folgt die Behauptung. □

Das folgende Theorem stellt das Analogon des Hauptresultates der Arbeit von Matthes [30] dar. Zur besseren Übersicht werden an dieser Stelle alle für den Hauptsatz wichtigen Voraussetzungen und Bezeichnungen sowie für den Hauptsatz relevante bisherige Ergebnisse noch einmal aufgeführt.
$S \in \mathrm{M}_4(\mathcal{O})$ ist als gerade und invertierbare Matrix vorausgesetzt, für die eine (über $\mathbb{C}$!) invertierbare Matrix $C \in \mathrm{M}_4(\mathcal{O})$ existiert, so dass $S = S_0[C]$ mit S_0 wie in (3.2.1) ist. Die Thetafunktion $\theta_{S,H}(P)$ ist definiert wie in

(2.1.2), wobei H eine Majorante von S bezeichnet (s. Definition 2.1.3). Nach Folgerung 3.3.4 lässt sich jede Majorante H von $S = S_0[C]$ in der Form H_{ww_0} mit H_{ww_0} wie in (3.3.2) schreiben, so dass man die Thetafunktion

$$\theta(P, w, w_0) = \theta_{S,H_{ww_0}}(P) = r^2 \sum_{g \in \mathcal{O}^4} \exp\left\{\pi i\left(\sigma(\tau_D S[g] z) + 2ir|\tau_D| H_{ww_0}\{g\}\right)\right\}$$

auf $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3$ erhält. Bildet man nun für $0 \neq \tilde{\mu} = \tau_D \mu \in \mathcal{O}^\#$ und $\mathrm{Re}(s) > 1$ den Thetalift der Poincaré-Reihe $P_{\tilde{\mu}}(P, s)$ (s. Defintion 3.1.1) bezüglich $\theta(\cdot, w, w_0)$ und der Kongruenzuntergruppe $\Gamma = T\Gamma_0(\delta_K q)T^{-1} < \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ wie in Satz 2.1.9, so stellt sich die Zetafunktion

$$Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s) = \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{\Gamma(s+1)}{\left(2\pi|\tau_D|\right)^{s+1}} \sum_{\substack{g \in \mathcal{O}^4 \\ S[g] = 2\mu}} \left(H_{ww_0}\{g\} + 2|\mu|\right)^{-s-1}$$

ein (vgl. Satz 3.1.6 bzw. Folgerung 3.3.11). Für $g \in \mathcal{O}^4$ ist

$$H_{ww_0}\{g\} = 2|\det(\Omega(g))| \cdot \delta\left(w, \Omega(g) w_0\right),$$

wobei Ω den $\mathcal{O}$-Modul-Isomorphismus aus Definition 4.1.2 bezeichnet, welcher $\mathcal{O}^4$ bijektiv einbettet in den Untermodul $\mathrm{M}_C(\mathcal{O}) := \Omega(\mathcal{O}^4)$ von $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})$. Die von δ abhängige Zetafunktion (s. Satz 4.2.14) ist bezüglich der Variablen w invariant unter der koendlichen Gruppe Γ^* aus (4.2.1).

Der Hauptsatz besagt nun, dass sich $Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$ schreiben lässt als Poincaré-Reihe $\tilde{H}(w, \eta_j, s)$ ausgewertet in gewissen Punkten $\eta_j = A_j w_0 \in \mathbb{H}^3$ ($w_0 \in \mathbb{H}^3$ fest), wobei $\{A_j, j \in J\}$ ein vollständiges Vertretersystem der Rechtsnebenklassen bezüglich der Operation von Γ^* auf

$$\mathrm{M}_C(\mathcal{O})_\mu = \{A \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O}) \mid \det(A) = \mu\}$$

bezeichnet. J ist nach Folgerung 4.2.15 endlich.

4.2.16 Theorem (Hauptsatz)
Seien $w, w_0 \in \mathbb{H}^3, 0 \neq \tilde{\mu} = \tau_D \mu \in \mathcal{O}^\#$ ($\mu \in \mathcal{O}$), $\Gamma = T\Gamma_0(\delta_K q)T^{-1} <$ $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ wie in Satz 2.1.9, Γ^* wie in (4.2.1). $\Lambda_\infty = \tau_D^{-1}\mathcal{O}$ bezeichne das zu Γ'_∞ gehörige Gitter, $\{A_j, j \in J\}$ bezeichne ein vollständiges Vertretersystem der Rechtsnebenklassen bezüglich der Operation von Γ^* auf

$$\mathrm{M}_C(\mathcal{O})_\mu = \{A \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O}) \mid \det(A) = \mu\}.$$

Dann ist $\{A_j, j \in J\}$ endlich, und mit

$$\eta_j := A_j w_0 \in \mathbb{H}^3 \quad (j \in J, w_0 \in \mathbb{H}^3 \text{ fest})$$

und der Poincaré-Reihe

$$\tilde{H}(P,Q,s) := \sum_{M\in\Gamma^*} \big(\delta\big(P,MQ\big)+1\big)^{-s-1} \quad (P,Q\in\mathbb{H}^3, \mathrm{Re}(s)>1)$$

gilt für $\mathrm{Re}(s)>1$*:*

$$Z_{\tilde{\mu}}(w,w_0,s) \;=\; \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2}\frac{\Gamma(s+1)}{\big(4\pi|\tilde{\mu}|\big)^{s+1}}\sum_{j\in J}\tilde{H}(w,\eta_j,s). \tag{4.2.2}$$

Die Summe enthält nur endlich viele Terme.

Beweis: Seien die Bezeichnungen wie im Theorem. Das Vertretersystem $\{A_j, j\in J\}$ ist nach Folgerung 4.2.15 endlich, und nach Satz 4.2.14 gilt für $\mathrm{Re}(s)>1$:

$$\begin{aligned}
Z_{\tilde{\mu}}(w,w_0,s) &= \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2}\frac{\Gamma(s+1)}{\big(4\pi|\tilde{\mu}|\big)^{s+1}}\sum_{\substack{A\in\mathrm{M}_C(\mathcal{O})\\ \det(A)=\mu}}\Big(\delta\big(w,Aw_0\big)+1\Big)^{-s-1}\\
&= \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2}\frac{\Gamma(s+1)}{\big(4\pi|\tilde{\mu}|\big)^{s+1}}\sum_{j\in J}\sum_{M\in\Gamma^*}\Big(\delta\big(w,M\eta_j\big)+1\Big)^{-s-1}\\
&= \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2}\frac{\Gamma(s+1)}{\big(4\pi|\tilde{\mu}|\big)^{s+1}}\sum_{j\in J}\tilde{H}(w,\eta_j,s)
\end{aligned}$$

mit $\tilde{H}(w,\eta_j,s)=\sum_{M\in\Gamma^*}\big(\delta\big(w,M\eta_j\big)+1\big)^{-s-1}$. □

4.3 Verhalten von $\tilde{H}(P,Q,s)$ an der Konvergenzabszisse

Die koendliche Gruppe Γ^* sei definiert wie in (4.2.1). Dann gilt:

4.3.1 Satz *Die bzgl. δ gebildete Poincaré-Reihe*

$$\tilde{H}(P,Q,s) := \sum_{\gamma\in\Gamma^*}\big(\delta\big(P,\gamma Q\big)+1\big)^{-s-1}$$

konvergiert absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{H}^3\times\mathbb{H}^3\times\{s\mid\mathrm{Re}(s)>1\}$.

Beweis: Wegen $|\big(\delta\big(P,\gamma Q\big)+1\big)^{-s-1}| \leq \big(\delta\big(P,\gamma Q\big)\big)^{-\mathrm{Re}(s)-1}$ für $\gamma \in \Gamma^*$ und $\mathrm{Re}(s) > 1$ folgt die Behauptung aus der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz von $H(P,Q,s) = \sum_{\gamma\in\Gamma^*}\big(\delta\big(P,\gamma Q\big)\big)^{-s-1}$ auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3 \times \{s \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$. Vgl. ([10], S. 84f., Prop. 1.3). $\square$

Für $P, Q \in \mathbb{H}^3$ und $x > 1$ ist

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(P,Q,x) :&= |\{\gamma \in \Gamma^* \mid \delta(P,\gamma Q) + 1 \leq x\}| \\ &= |\{\gamma \in \Gamma^* \mid \delta(P,\gamma Q) \leq x - 1\}| \\ &= \pi(P,Q,x-1)\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

mit π aus ([10], S.85). Dabei ist $\delta(P,Q) = \cosh(d(P,Q))$ (vgl. Satz 1.1.8), so dass $\tilde{\pi}(P,Q,x) = 0$ für $1 < x < 2$ gilt.

4.3.2 Bemerkung Für $x \geq 2$ hat die Zahl $\tilde{\pi}(P,Q,x)$ die folgende geometrische Bedeutung: $\tilde{\pi}(P,Q,x)$ ist gleich $|\Gamma_Q^*|$ mal der Zahl der Gitterpunkte des hyperbolischen Gitters $\Gamma^* Q$, die enthalten sind in der abgeschlossenen hyperbolischen Kugel mit Mittelpunkt P und Radius $\operatorname{arcosh}(x-1)$. $\diamondsuit$

Gesucht ist das asymptotische Verhalten von $\tilde{\pi}(P,Q,x)$ für $x \to \infty$.

4.3.3 Lemma *Es gibt eine Konstante $C_1(P) > 0$, die nur von P und Γ^* abhängt, so dass für alle $Q \in \mathbb{H}^3$ und $x > 1$ gilt:*

$$\tilde{\pi}(P,Q,x) \leq C_1(P)(x-1)^2.$$

$C_1(P)$ kann als Funktion gewählt werden, die auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{H}^3$ beschränkt ist.

Beweis: Der Beweis von ([10], S. 68, Lemma 2.1.6) lässt sich mit $x - 1 = \cosh(t)$ $(x \leq 2, t > 0)$ übernehmen. Dabei wird die Abschätzung des Volumens einer hyperbolischen Kugel benutzt, vgl. ([10], S. 10, (2.9)). $\square$

Für das folgende Lemma ist wesentlich, dass Γ^* eine koendliche Gruppe ist.

4.3.4 Lemma *Es gibt Konstanten $C_2(P,Q) > 0$ und $x_0(P,Q) \geq 2$, die nur von P, Q und Γ^* abhängen, so dass für alle $P, Q \in \mathbb{H}^3$ und $x \geq x_0(P,Q)$ gilt:*

$$\tilde{\pi}(P,Q,x) \geq C_2(P,Q)(x-1)^2.$$

$C_2(P,Q) > 0$ und $x_0(P,Q)$ können als Funktionen gewählt werden, die auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3$ beschränkt sind.

BEWEIS: Der Beweis folgt mit $t = \operatorname{arcosh}(x-1)$ für $x > 2$ aus dem Beweis von ([10], S. 68, Lemma 2.1.7). Dabei geht u.a. Lemma 4.3.3 ein. □

Aus dem folgenden Lemma lassen sich die gesuchten Aussagen über das asymptotische Verhalten der Poincaré-Reihe $\tilde{H}(P,Q,s)$ und der Zetafunktion $Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$ an der Konvergenzabszisse $s = 1$ ableiten.

4.3.5 Lemma *Sei $K \subset \mathbb{H}^3$ kompakt. Dann gibt es Konstanten $C_1 > C_2 > 0$ und $T_0 \geq 2$, die nur von K und Γ^* abhängen, so dass für alle $P, Q \in K, T \geq T_0$ gilt:*

$$\sum_{\delta(P,\gamma Q)+1 \leq T} (\delta(P,\gamma Q)+1)^{-2} \leq C_1(1 + 2\log(\tfrac{T}{2})), \tag{4.3.2}$$

$$\sum_{\delta(P,\gamma Q)+1 \leq T} (\delta(P,\gamma Q)+1)^{-2} \geq 2C_2(\log T - \log T_0) + C_2 - C_1, \tag{4.3.3}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\delta(P,\gamma Q)+1 \leq T} (\delta(P,\gamma Q)+1)^{-1-s} \geq{}& C_2 \frac{s+1}{s-1}\big(T_0^{1-s} - T^{1-s}\big) \\ &+ C_2 T^{1-s} - C_1 T_0^{1-s} \quad \textit{für } s > 1.\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

BEWEIS: Vgl. ([10], S. 86f.). Seien $K \subset \mathbb{H}^3$ kompakt, $P, Q \in K, T \geq 2, s \in \mathbb{R}, 1 < t < 2 \leq T$. Nach Lemma 4.3.3 gilt für alle $P, Q \in K, x > 1$:

$$\tilde{\pi}(P,Q,x) \leq C_1(x-1)^2, \tag{4.3.5}$$

wobei C_1 nur von K und Γ^* abhängt. Sei $\tilde{\delta}(P,Q) := \delta(P,Q) + 1$. Dann ist $\tilde{\pi}(P,Q,x) = \{\gamma \in \Gamma^* \mid \tilde{\delta}(P,\gamma Q) \leq x\}$, und es gilt:

$$\begin{aligned}&\sum_{\tilde{\delta}(P,\gamma Q) \leq T} \tilde{\delta}(P,\gamma Q)^{-1-s} \\ &= \int_t^T x^{-s-1} d\tilde{\pi}(P,Q,x) \\ &= \big[x^{-s-1}\tilde{\pi}(P,Q,x)\big]_t^T + (s+1)\int_t^T \frac{\tilde{\pi}(P,Q,x)}{x^{s+2}} dx.\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Für $s = 1$ und $t = 2$ folgt daraus mit (3.1.2):

$$\begin{aligned}\sum_{\tilde{\delta}(P,\gamma Q) \leq T} (\tilde{\delta}(P,\gamma Q))^{-2} &\leq C_1\Big(\Big(\frac{x-1}{x}\Big)^2\Big|_2^T + 2\int_2^T x^{-1}\Big(\frac{x-1}{x}\Big)^2 dx\Big) \\ &\leq C_1\Big(1 + 2\int_2^T x^{-1} dx\Big) \\ &= C_1\Big(1 + 2\log(\tfrac{T}{2})\Big).\end{aligned}$$

Damit ist (4.3.2) bewiesen. Weiter gilt nach Lemma 4.3.4 für alle $P, Q \in K, x \geq T_0 \geq 2$:

$$\tilde{\pi}(P, Q, x) \geq C_2(x-1)^2, \tag{4.3.7}$$

wobei C_2 und T_0 nur von K und Γ^* abhängen. Wählt man $t = T_0, T \geq T_0$ auf der rechten Seite von (4.3.6) und schreibt $\geq$, so erhält man mit (4.3.7) die Abschätzungen (4.3.3) und (4.3.4). □

Eine genaue asymptotische Version der Abschätzungen in Lemma 4.3.3 und Lemma 4.3.4 sowie von (4.3.2) und (4.3.3) ist Gleichung (4.4.4) in Satz 4.4.5. Für das asymptotische Verhalten von $\tilde{H}(P, Q, s)$ an der Konvergenzabszisse $s = 1$ gilt nach Lemma 4.3.5:

4.3.6 Folgerung *Die Poincaré-Reihe $\tilde{H}(P, Q, s)$ divergiert für $s \leq 1$.*

Beweis: Klar nach (4.3.3). □

4.3.7 Folgerung *Es gilt:*

$$\tilde{H}(P, Q, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma^*} (\delta(P, \gamma Q) + 1)^{-1-s} \underset{s \downarrow 1}{\longrightarrow} \infty.$$

Beweis: Seien $K \subset \mathbb{H}^3$ kompakt und $P, Q \in K, 1 < s \leq 2$. Lässt man in (4.3.4) $T \to \infty$ laufen, so folgt:

$$\sum_{\delta(P,\gamma Q)+1 \leq T} (\delta(P, \gamma Q) + 1)^{-1-s} \quad \geq \quad C_3(K) \frac{s+1}{s-1}$$

mit einer von K abhängigen Konstanten $C_3(K) > 0$. Daraus folgt die Behauptung. □

4.3.8 Korollar *Für $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ und $0 \neq \tilde{\mu} \in \mathcal{O}^\#$ gilt:*

$$Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s) \underset{s \downarrow 1}{\longrightarrow} \infty,$$

falls J in (4.2.2) *nicht leer ist.*

Beweis: Nach Theorem 4.2.16 ist

$$Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s) = \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{\Gamma(s+1)}{\left(4\pi|\tilde{\mu}|\right)^{s+1}} \sum_{j \in J} \tilde{H}(w, \eta_j, s),$$

so dass sich im Fall $J \neq \emptyset$ die Behauptung aus Folgerung 4.3.7 ergibt. □

4.4 Spektralzerlegung und meromorphe Fortsetzbarkeit der Zetafunktion

Mit Hilfe der Spektralzerlegung von $\tilde{H}(P,Q,s)$, die im Anschluss berechnet wird, lässt sich die Spektralzerlegung der Zetafunktion angeben.

Die koendliche Gruppe $\Gamma^* < \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sei definiert wie in (4.2.1). Offensichtlich ist $\tilde{H}(P,Q,s)$ Γ^*-invariant in den Variablen $P,Q \in \mathbb{H}^3$, und es gilt:

4.4.1 Lemma *Für festes* $P \in \mathbb{H}^3$ *ist* $\tilde{H}(P,\cdot,s) \in L^2(\Gamma^* \backslash \mathbb{H}^3)$.

Beweis: Sei $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich von Γ^*. Dann gilt nach ([10], S. 143, Lemma 2.1) für $s \in \mathbb{R}, s > 1$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{F}} \tilde{H}(P,Q,s)^2 d\nu(Q) &= \int_{\mathbb{H}^3} \sum_{\gamma\in\Gamma^*} (\delta(\gamma P,Q)+1)^{-s-1}(\delta(P,Q)+1)^{-s-1} d\nu(Q) \\
&\leq \int_{\mathbb{H}^3} \sum_{\gamma\in\Gamma^*} \delta(\gamma P,Q)^{-s-1}\delta(P,Q)^{-s-1} d\nu(Q) \\
&\leq C \cdot \sum_{\gamma\in\Gamma^*} \frac{1+\log(\delta(\gamma P,P))}{\delta(\gamma P,P)^{s+1}}
\end{aligned}$$

mit einer geeigneten Konstanten C, und die Summe konvergiert absolut nach ([10], S. 86, Prop. 1.4). Wegen der absoluten Konvergenz der obigen Integrale gilt die obige Abschätzung auch für alle komplexen s mit $\mathrm{Re}(s) > 1$, wenn man überall die Beträge der komplexen Funktionen nimmt. □

Auf Grund der Γ^*-Invarianz von $\tilde{H}(P,Q,s)$ in $P,Q \in \mathbb{H}^3$ und $\tilde{H}(P,\cdot,s) \in L^2(\Gamma^* \backslash \mathbb{H}^3)$ hat $\tilde{H}(P,Q,s)$ nach ([10], S. 278, (4.10)) die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(P,Q,s) &= \sum_{M\in\Gamma^*} \Big(\delta\big(P,MQ\big)+1\Big)^{-s-1} \\
&= \sum_{m\in\mathcal{D}} h(\lambda_m) e_m(P)\overline{e_m(Q)} \\
&+ \frac{1}{4\pi}\sum_{\nu=1}^{h} \frac{[\Gamma_\nu^* : \Gamma_\nu^{*\prime}]}{|\Lambda_\nu|} \int_{-\infty}^{\infty} h(1+t^2) E_\nu(P,it)\overline{E_\nu(Q,it)} dt.
\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Dabei gelten die folgenden Bezeichnungen:

- h bezeichnet die Selberg-Transformierte von $k(x) = (x+1)^{-s-1}$ $(\mathrm{Re}(s) > 1)$.

- $\mathcal{D} \subset \mathbb{N}$ ist eine Indexmenge für ein maximales Orthonormalsystem von Eigenfunktionen $(e_m)_{m\in\mathcal{D}}$ von $-\Delta$ mit zugehörigen Eigenwerten $(\lambda_m)_{m\in\mathcal{D}}$. Es gilt $\lambda_m \geq 0$ für alle $m \in \mathcal{D}$.
  $\mathcal{D}_{>0}$ bezeichnet die Indexmenge für die nicht-konstanten Eigenfunktionen e_m von $-\Delta$ zum Eigenwert λ_m.
- Für $m \in \mathcal{D}$ mit zugehörigem Eigenwert λ_m ist $\mu_m := \sqrt{1-\lambda_m}$. Dabei ist $\mu_m \in [0,1]$ für $0 \leq \lambda_m \leq 1$ und rein imaginär für $\lambda_m > 1$.
- $\eta_1, ..., \eta_h$ ist ein Vertretersystem der Spitzenklassen von Γ^*;
  $\Gamma^*_\nu := \Gamma^*_{\eta_\nu}$ bezeichnet den Stabilisator der Spitze η_ν in Γ^*;
  $\Gamma^{*'}_\nu$ bezeichnet die maximale unipotente Untergruppe von Γ^*_ν;
  $\Lambda_\nu \subset \mathbb{C}$ ist das zu $\Gamma^{*'}_\nu$ gehörige Gitter.
- $E_\nu(P,s) = \frac{1}{[\Gamma^*{}_{\eta_\nu}:\Gamma^*{}'_{\eta_\nu}]} \sum_{M\in\Gamma^*{}'_{\eta_\nu}\backslash\Gamma^*} r(B_\nu MP)^{1+s}$ bezeichnet die Eisensteinreihe bezüglich der Spitze $\eta_\nu = B_\nu^{-1}\infty$ $(1 \leq \nu \leq h)$ zur Gruppe Γ^* (vgl. Kapitel 7).

Im Anschluss wird die Selberg-Transformierte h von $k(x) = (x+1)^{-s-1}$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ berechnet. Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ setzt man:

$$\begin{aligned} g(x) &:= 2\pi \int_0^\infty k(u+\cosh(x))du \\ &= 2\pi \int_0^\infty (u+\cosh(x)+1)^{-s-1}du \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{s}(u+\cosh(x)+1)^{-s}\right]_0^\infty \\ &= \frac{2\pi}{s}(\cosh(x)+1)^{-s}. \end{aligned}$$

Dann ist die Selberg-Transformierte h von k nach ([10], S. 121, Lemma 5.5) gegeben durch

$$h(1+t^2) = \int_{-\infty}^\infty g(x)e^{itx}dx = \frac{2\pi}{s}\int_{-\infty}^\infty (\cosh(x)+1)^{-s}e^{itx}dx.$$

4.4.2 Lemma *Für* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *gilt:*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty (\cosh(x)+1)^{-s}e^{itx}dx &= 2^s\frac{\Gamma(s+it)\Gamma(s-it)}{\Gamma(2s)} \\ &= 2\sqrt{\pi}2^{-s}\frac{\Gamma(s+it)\Gamma(s-it)}{\Gamma(s+\frac{1}{2})\Gamma(s)}. \end{aligned}$$

Beweis: Nach ([29], S. 10 oben) ist

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}(\cosh(x)+1)^{-s}e^{itx}dx &= 2^{-s}\int_{-\infty}^{\infty}(\cosh(\tfrac{x}{2}))^{-2s}e^{itx}dx \\ &= 2^{1-s}\int_0^{\infty}\frac{\cos(tx)}{(\cosh(\frac{x}{2}))^{2s}}dx \\ &= 2^{1-s}\cdot 2\int_0^{\infty}\frac{\cosh(2itx)}{(\cosh(x))^{2s}}dx \\ &= 2^s\frac{\Gamma(s+it)\Gamma(s-it)}{\Gamma(2s)},\end{aligned}$$

und mit der bekannten Legendre-Relation $\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\Gamma(s+\frac{1}{2})$ folgt daraus die zweite Formel. □

Für die Selberg-Transformierte h von $k(x) = (x+1)^{-s-1}$ ($\mathrm{Re}(s) > 1$) hat man damit gefunden:

$$h(1+t^2) = 2^{s+2}\pi\frac{\Gamma(s+it)\Gamma(s-it)}{\Gamma(2s+1)} = 4\pi^{\frac{3}{2}}\frac{2^{-s}}{s}\frac{\Gamma(s+it)\Gamma(s-it)}{\Gamma(s+\frac{1}{2})\Gamma(s)}, \qquad (4.4.2)$$

so dass sich aus (4.4.1) die folgende Spektralzerlegung der Poincaré-Reihe $\tilde{H}(P,Q,s)$ ergibt:

4.4.3 Satz (Spektralzerlegung von $\tilde{H}(P,Q,s)$)
Seien die Bezeichnungen wie auf S. 72. Für $m \in \mathcal{D}_{>0}$ mit zugehörigem Eigenwert λ_m sei $\mu_m := \sqrt{1-\lambda_m}$. Dann ist die Spektralzerlegung von $\tilde{H}(P,Q,s)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\tilde{H}(P,Q,s) &= \sum_{\gamma\in\Gamma^*}\big(\delta(P,\gamma Q)+1\big)^{-s-1} \\ &= \frac{4\pi^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{vol}(\Gamma^*)}\frac{2^{-s}\Gamma(s-1)}{\Gamma(s+\frac{1}{2})} \\ &+ 4\pi^{\frac{3}{2}}\frac{2^{-s}}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+\frac{1}{2})} \\ &\cdot\sum_{m\in\mathcal{D}_{>0}}\Gamma(s+\mu_m)\Gamma(s-\mu_m)e_m(P)\overline{e_m(Q)} \\ &+ \sqrt{\pi}\frac{2^{-s}}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+\frac{1}{2})}\sum_{\nu=1}^{h}\frac{[\Gamma_\nu^*:\Gamma_\nu^{*'}]}{|\Lambda_\nu|} \\ &\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(s+it)\Gamma(s-it)E_\nu(P,it)\overline{E_\nu(Q,it)}dt,\end{aligned} \qquad (4.4.3)$$

wobei die Reihe absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3 \times \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$ *konvergiert.*

Die Funktion $\tilde{H}(P, Q, s)$ *hat eine meromorphe Fortsetzung in die ganze komplexe s-Ebene. Die fortgesetzte Funktion ist holomorph in der Halbebene* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *bis auf einen Pol der Ordnung* 1 *in* $s = 1$. *Weitere Pole der Ordnung* 1 *liegen in den negativen ganzen Zahlen. Ist* $\lambda_m = 1$ *Eigenwert von* $-\Delta$, *so liegt in* $s = 0$ *ein Pol der Ordnung* 2 *vor, andernfalls ein Pol der Ordnung* 1. *Im Fall* $e_m(P)\overline{e_m(Q)} \neq 0$ *für* $m \in \mathcal{D}_{>0}$ *gibt es zusätzlich Pole erster Ordnung in* $s = \pm\mu_m - l$ $(\mu_m \neq 0, l \in \mathbb{Z}, l \geq 0)$. *Zu diesen Polen kommt noch ein (nicht genau bekannter) Beitrag der Eisensteinreihen hinzu.*

Beweis: Vgl. ([10], S. 84, Prop. 1.3 und S. 282f., Prop. 4.5). Nach Lemma 4.4.1 ist $\tilde{H}(P, \cdot, s) \in \mathrm{L}^2(\Gamma^* \backslash \mathbb{H}^3)$. Die Selberg-Transformierte h von $k(x) = (x+1)^{-1-s}$ ist gegeben durch (4.4.2), so dass die Vollständigkeitsrelation für die L^2-Entwicklung (4.4.3) von $\tilde{H}(P, \cdot, s)$ ergibt:

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{H}(P, \cdot, s)\|^2 \\
= & \left|\frac{4\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mathrm{vol}(\Gamma^*)}} \frac{2^{-s}\Gamma(s-1)}{\Gamma(s+\frac{1}{2})}\right|^2 \\
+ & \sum_{m \in \mathcal{D}_{>0}} \left|\frac{4\pi^{\frac{3}{2}} 2^{-s}}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+\frac{1}{2})} \Gamma(s+\mu_m)\Gamma(s-\mu_m) e_m(P)\right|^2 \\
+ & \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu=1}^{h} \frac{[\Gamma_\nu^* : \Gamma_\nu^{*\prime}]}{|\Lambda_\nu|} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{4\pi^{\frac{3}{2}} 2^{-s}\Gamma(s+it)\Gamma(s-it)}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+\frac{1}{2})} E_\nu(P, it)\right|^2 dt.
\end{aligned}$$

Wie in ([10], S. 283) zeigt man dann die absolute und lokal gleichmäßige Konvergenz der rechten Seite von (4.4.3): Die linke Seite der obigen Vollständigkeitsrelation sowie die Integrale auf der rechten Seite sind stetige Funktionen von (P, s) für $\mathrm{Re}(s) > 1$ (vgl. dazu ([10], S. 276, Prop. 6.3.7)). Mit Dinis Theorem folgt dann die lokal gleichmäßige Konvergenz der Reihe über die Eigenwerte und der Integrale auf der rechten Seite der letzten Gleichung bzgl. $(P, s) \in \mathbb{H}^3 \times \{s \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$. Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und dem Cauchy-Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz konvergieren dann die Reihe und die Integrale auf der rechten Seite von (4.4.3) absolut und lokal gleichmäßig bzgl. $(P, Q, s) \in \mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3 \times \{s \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$. Damit gilt (4.4.3) auch punktweise, und zwar lokal gleichmäßig.
Nach der Stirlingschen Formel besitzt die Reihe in (4.4.3) eine meromorphe Fortsetzung in die gesamte komplexe s-Ebene, wobei Pole nur in den oben genannten Punkten auftreten können. Ist $\lambda_m = 1$ Eigenwert von $-\Delta$, so ist $\mu_m = 0$ und damit offensichtlich $s = 0$ eine doppelte Polstelle von $\tilde{H}(P, Q, s)$.

Weiter sind die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(s+it)\Gamma(s-it)E_\nu(P,it)\overline{E_\nu(Q,it)}dt$$

holomorph für $\mathrm{Re}(s) > 0$. Für den Beweis der meromorphen Fortsetzbarkeit der Integrale auf die gesamte s-Ebene vgl. ([10], S. 284f.). $\square$

4.4.4 Bemerkung Ist $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ oder $\Gamma < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ eine koendliche Gruppe und $\lambda_1(\Gamma)$ der kleinste positive Eigenwert von $-\Delta$, so besagt die *Selbergsche Vermutung*, dass $\lambda_1(\Gamma) \geq 1$ ist, falls Γ eine Kongruenzuntergruppe bezüglich $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ ist. Mit elementaren Methoden kann gezeigt werden, dass für die Gruppen $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i]), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}])$ und $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}])$ $\lambda_1(\Gamma) > 1$ gilt. Vgl. ([10], S. 347, Prop. 6.2). Für beliebige Kongruenzuntergruppen Γ konnte bisher lediglich bewiesen werden, dass $\frac{171}{196}$ eine untere Schranke für $\lambda_1(\Gamma)$ ist (vgl. dazu ([10], S. 347)). $\diamondsuit$

4.4.5 Satz *Seien $P, Q \in \mathbb{H}^3, T \geq 2$. Dann gilt für die koendliche Gruppe Γ^* wie in* (4.2.1):

$$\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma^* \\ \delta(P,\gamma Q)+1\leq T}} (\delta(P,\gamma Q)+1)^{-2} \sim \frac{4\pi}{\mathrm{vol}(\Gamma^*)} \cdot \log T \quad \textit{für } T \to \infty. \tag{4.4.4}$$

Beweis: Nach Satz 4.4.3 ist

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\tilde{H}(P,Q,s) = \mathrm{Res}(\tilde{H}(P,Q,s); s=1) = \frac{4\pi}{\mathrm{vol}(\Gamma^*)}.$$

Diese Beziehung wird geschrieben in der Form

$$\sum_{\gamma\in\Gamma^*} (\delta(P,\gamma Q)+1)^{-2} e^{-t\log(\delta(P,\gamma Q)+1)} \sim \frac{4\pi}{\mathrm{vol}(\Gamma^*)} \cdot \frac{1}{t}$$

für $t \to 0$. Die Summe auf der linken Seite ist eine verallgemeinerte Dirichlet-Reihe mit positiven Koeffizienten, so dass sich mit einem verallgemeinerten Tauberschen Satz (s. [18], [26] oder [27]) ergibt:

$$\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma^* \\ \log(\delta(P,\gamma Q)+1)\leq X}} (\delta(P,\gamma Q)+1)^{-2} \sim \frac{4\pi}{\mathrm{vol}(\Gamma^*)} \cdot X \quad \text{für } X \to \infty,$$

und mit $X = \log T$ folgt die Behauptung. $\square$

(4.4.4) ist eine genaue asymptotische Version der Abschätzungen in Lemma 4.3.3 und Lemma 4.3.4 sowie von (4.3.2) und (4.3.3).

Satz 4.4.3 ergibt eine neue Darstellung der Zetafunktion:

4.4.6 Theorem (Spektralzerlegung der Zetafunktion)
Seien die Bezeichnungen wie auf S. 72. Weiter seien $0 \neq \tilde{\mu} = \tau_D \mu \in \mathcal{O}^\#$ ($\mu \in \mathcal{O}$) *und* $\mu_m := \sqrt{1-\lambda_m}$ *für* $m \in \mathcal{D}_{>0}$. $\{A_j, j \in J\}$ *bezeichne wie oben ein vollständiges Vertretersystem der Rechtsnebenklassen bezüglich der Operation von* Γ^* *auf* $\mathrm{M}_C(\mathcal{O})_\mu = \{A \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O}) \mid \det(A) = \mu\}$. *Dann ist* J *endlich, und die Spektralzerlegung von* $Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$ *ist für* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *gegeben durch:*

$$
\begin{aligned}
Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s) = {} & \frac{4(|D_K|\pi)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{vol}(\Gamma^*)\left(8\pi|\tilde{\mu}|\right)^{s+1}} \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(s-1)}{\Gamma(s+\frac{1}{2})} \cdot |J| \\
& + \frac{4(|D_K|\pi)^{\frac{3}{2}}}{\left(8\pi|\tilde{\mu}|\right)^{s+1}} \frac{1}{\Gamma(s+\frac{1}{2})} \\
& \cdot \sum_{j\in J} \sum_{m \in \mathcal{D}_{>0}} \Gamma(s+\mu_m)\Gamma(s-\mu_m) e_m(w) \overline{e_m(\eta_j)} \\
& + \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}{(8\pi|\tilde{\mu}|)^{s+1}} \frac{1}{\Gamma(s+\frac{1}{2})} \sum_{\nu=1}^{h} \frac{[\Gamma_\nu^* : \Gamma_\nu^{*\prime}]}{|\Lambda_\nu|} \\
& \cdot \sum_{j \in J} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(s+it)\Gamma(s-it) E_\nu(w, it) \overline{E_\nu(\eta_j, it)} dt.
\end{aligned}
$$

Die Zetafunktion $Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$ *lässt sich in die ganze komplexe* s*-Ebene meromorph fortsetzen.*

Ist in (4.2.2) $J \neq \emptyset$, *so gelten ferner die folgenden Aussagen über die Pole von* $Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$: *Die fortgesetzte Funktion ist holomorph in der Halbebene* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *bis auf einen Pol der Ordnung* 1 *in* $s = 1$. *Weitere Pole liegen in den negativen ganzen Zahlen (Ordnung* 2*) und in* 0. *Ist* $\lambda_m = 1$ *Eigenwert von* $-\Delta$, *so ist* $s = 0$ *eine doppelte Polstelle von* $Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$, *andernfalls eine einfache. Im Fall* $e_m(w)\overline{e_m(\eta_j)} \neq 0$ *für* $m \in \mathcal{D}_{>0}$ *gibt es zusätzlich Pole erster Ordnung in* $s = \pm\mu_m - l$ ($\mu_m \neq 0, l \in \mathbb{Z}, l \geq 0$). *Der Beitrag der Eisensteinreihen ist nicht genau, wohl aber qualitativ bekannt (vgl.* ([10], S. 284f.)).

Beweis: Nach Folgerung 4.2.15 operiert Γ^* mit endlich vielen Bahnen auf $\mathrm{M}_C(\mathcal{O})_\mu$, so dass das Vertretersystem $\{A_j, j \in J\}$ der Rechtsnebenklassen bezüglich dieser Operation endlich ist. Nach Theorem 4.2.16 gilt:

$$Z_{w,w_0,\tilde{\mu}}(s) = \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{\Gamma(s+1)}{\left(4\pi|\tilde{\mu}|\right)^{s+1}} \sum_{j\in J} \tilde{H}(w,\eta_j,s),$$

und die Behauptung folgt durch Einsetzen der Spektralzerlegung von $\tilde{H}(w,\eta_j,s)$ aus Satz 4.4.3. □

Mit Hilfe der Spektralzerlegung der Zetafunktion lassen sich Residuen und Laurentkoeffizienten einfach berechnen. Dabei ist zu beachten, dass zu den oben aufgeführten Polstellen noch ein (nicht genau bekannter) Beitrag der Eisensteinreihen hinzukommt, so dass Überlagerungen auftreten können.

Die Zetafunktion erfüllt die folgende Differentialgleichung:

4.4.7 Satz *Seien* $P, w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ *und* $s \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(s) > 1$. *Dann gilt:*

$$-\Delta^w Z_{w,w_0,\tilde{\mu}}(s) = 4\pi|\tilde{\mu}|(1+2s)Z_{w,w_0,\tilde{\mu}}(s+1) + (1-s^2)Z_{w,w_0,\tilde{\mu}}(s).$$

Beweis: Nach Satz 4.1.5 ist $-\Delta^P\theta(P,w,w_0) = -\Delta^w\theta(P,w,w_0)$, so dass man mit der Integraldarstellung der Zetafunktion auf Grund der wesentlichen Selbstadjungiertheit von $-\Delta$ erhält (vgl. ([10], S. 140, Theorem 1.9)):

$$\begin{aligned} -\Delta^w Z_{w,w_0,\tilde{\mu}}(s) &= \int_{\mathcal{F}} (\overline{-\Delta^w\theta(P,w,w_0)}) P_{\tilde{\mu}}(P,s)d\nu(P) \\ &= \int_{\mathcal{F}} (\overline{-\Delta^P\theta(P,w,w_0)}) P_{\tilde{\mu}}(P,s)d\nu(P) \\ &= \int_{\mathcal{F}} \overline{\theta(P,w,w_0)}(-\Delta^P P_{\tilde{\mu}}(P,s))d\nu(P). \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$ bezeichnet einen Fundamentalbereich von $\Gamma = T^{-1}\Gamma_0(\delta_K q)T$ in $\mathbb{H}^3$. Bei der obigen Umformung ist jedoch zu beachten, dass $\theta(\cdot,w,w_0)$ nicht im Definitionsbereich $\mathcal{D}$ von $-\Delta$ liegt. Da $\theta(P,w,w_0)$ und alle partiellen Ableitungen aber nur ein polynomiales Wachstum in den Spitzen von Γ haben und $P_{\tilde{\mu}}(P,s)$ exponentiell in allen Spitzen abfällt (s. Beweis von Folgerung 3.1.4), lässt sich zeigen, dass alle „Randbeiträge" im Beweis S. 136-140 des oben angegebenen Theorems 1.9 für $Y \to \infty$ gegen 0 gehen, so dass die obige Umformung zulässig ist.
Nach Folgerung 4.3.5 erhält man dann für $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$-\Delta^w Z_{w,w_0,\tilde{\mu}}(s) = 4\pi|\tilde{\mu}|(1+2s)Z_{w,w_0,\tilde{\mu}}(s+1) + (1-s^2)Z_{w,w_0,\tilde{\mu}}(s).$$

Die Differentialgleichung lässt sich natürlich auch durch termweise Differentiation der Poincaré-Reihe $\tilde{H}$ verifizieren. □

Kapitel 5

Eine verallgemeinerte Koeffizientenformel

Ziel ist es, eine verallgemeinerte Koeffizientenformel für die Fourierkoeffizienten einer gelifteten Spitzenform anzugeben. Dazu wird zunächst der Thetalift von Spitzenformen bezüglich der in Abschnitt 4.2 gewählten koendlichen Gruppe $\Gamma^* < \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ erklärt. Die wesentlichen Eigenschaften des Thetalifts werden zusammengestellt.
Bildet man das Skalarprodukt der Poincaré-Reihe $P_{\tilde{\mu}}(P,s)$ mit einer gelifteten Spitzenform, so wird der $\tilde{\mu}$-te Fourierkoeffizient der gelifteten Spitzenform extrahiert. Dieses Skalarprodukt stimmt überein mit demjenigen der Zetafunktion und der Spitzenform selbst, und mit Hilfe der Spektralzerlegung der Zetafunktion aus Theorem 4.4.6 erhält man dann durch Vergleich der berechneten Skalarprodukte die gesuchte Koeffizientenformel.
Um das Verhalten des Thetalifts in den Spitzen von Γ mit Hilfe der Siegelschen Transformationsformel angeben zu können, ist die Klassenzahl von K als 1 vorauszusetzen.

5.1 Der Thetalift

5.1.1 Definition Die koendliche Untergruppe Γ^* sei gegeben wie in (4.2.1). $f \in L^2(\Gamma^* \backslash \mathbb{H}^3, \lambda)$ sei eine Spitzenform auf Γ^* und $\mathcal{F}_{\Gamma^*}$ ein Fundamentalbereich von Γ^* in $\mathbb{H}^3$. Dann wird für $P, w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ der *Thetalift* von f bezüglich Γ^* definiert durch

$$f^\theta(P) := \int_{\mathcal{F}_{\Gamma^*}} \theta(P, w, w_0) f(w) d\nu(w).$$

5.1.2 Bemerkung 1. Das Integral $\int_{\mathcal{F}_{\Gamma^*}} \theta(P, w, w_0) f(w) d\nu(w)$ konvergiert absolut, denn im Beweis von Folgerung 5.1.3, *3.* wird gezeigt, dass $\theta(P, \cdot, w_0)$ in den Spitzen von Γ^* exponentiell verschwindet. Weiter ist zu beachten, dass f eine Spitzenform auf Γ^* ist.

2. Die obige Definition des Thetalifts ist sinnvoll, da der Integrand nach Satz 3.3.10 invariant unter Γ^* ist.

3. Im Fall schwach (Γ, χ)-automorpher Formen ist die komplex konjugierte Thetafunktion als Integrationskern zu nehmen, damit der Integrand invariant unter Γ ist (vgl. die Definition der Zetafunktion in Abschnitt 3.1). Eine bezüglich der Variablen P und der koendlichen Gruppe $\Gamma = T\Gamma_0(\delta_K q)T^{-1}$ zu liftende Funktion f ist als Spitzenform auf $L^2(\Gamma^* \backslash \mathbb{H}^3, \chi, \lambda)$ vorauszusetzen. Auch in diesem Fall wird für die geliftete Funktion die Bezeichnung Thetalift f^θ verwendet.
   In Definition 5.1.1 wird (trotz der damit möglichen einheitlichen Definition des Thetalifts) auf die komplexe Konjugation der Thetafunktion verzichtet, da nur der obige Ansatz die Beziehung (5.2.1) liefert, die wesentlich für die Herleitung der Koeffizientenformel in Korollar 5.2.6 ist.

4. Die in Definition 3.1.3 eingeführte Zetafunktion $Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$ wird nach 3. als Thetalift $P^\theta_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$ der Poincaré-Reihe $P_{\tilde{\mu}}(P, s)$ (bezüglich der koendlichen Gruppe Γ) aufgefasst. Dabei ist zu beachten, dass $P_{\tilde{\mu}}(P, s)$ keine Spitzenform auf Γ ist (da $P_{\tilde{\mu}}(P, s)$ keine Eigenfunktion von $-\Delta$ ist). Für die absolute Konvergenz dieses Thetalifts vgl. Bemerkung 3.1.4. Im Folgenden wird $Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s) = P^\theta_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$ gesetzt.

$\Diamond$

5.1.3 Folgerung *Seien $P \in \mathbb{H}^3, \Gamma = T\Gamma_0(\delta_K q)T^{-1}$ wie in Satz 2.1.9, $f \in C^2(\Gamma^* \backslash \mathbb{H}^3, \lambda)$ eine Spitzenform und $s \in \mathbb{C}$ mit $\lambda = 1 - s^2$. Dann gilt:*

1. $f^\theta(MP) = \chi(M) f^\theta(P)$ *für* $M \in \Gamma = T\Gamma_0(q\delta_K)T^{-1}$.

2. $f^\theta(P)$ *erfüllt die Differentialgleichung* $-\Delta^P f^\theta(P) = \lambda f^\theta(P)$.

3. $f^\theta(P)$ *ist eine Spitzenform auf* Γ *und besitzt in* ∞ *eine Fourierentwicklung der Form*

$$f^\theta(P) = r \sum_{0 \neq \tilde{n} \in \Lambda_\infty^\#} \rho(\tilde{n}) K_s(4\pi |\tilde{n}| r) e^{2\pi i \sigma(\tilde{n} z)}.$$

   $\Lambda_\infty = \tau_D^{-1}\mathcal{O}$ *bezeichnet dabei das zur Spitze* ∞ *gehörige Gitter und* K_s *die modifizierte Besselfunktion.*

Beweis: Zu *1.)* Das Transformationsverhalten von $f^\theta(P)$ folgt sofort aus dem Transformationsverhalten der Thetafunktion (s. Satz 3.3.10).
2.) ergibt sich aus der Differentialgleichung für die Thetafunktion (s. Satz 4.1.5) unter Berücksichtigung der wesentlichen Selbstadjungiertheit des hyperbolischen Laplace-Operators $-\Delta$ (vgl. ([10], S. 140, Theorem 1.9)). Dabei ist zu beachten, dass $\theta(P,w,w_0)$ und $\Delta^w\theta(P,w,w_0)$ bezüglich w quadratintegrierbar sind, so dass $\theta(P,\cdot,w_0)$ im Definitionsbereich $\mathcal{D} = \{f \in L^2(\Gamma^*\backslash\mathbb{H}^3) \cap C^2(\mathbb{H}^3) \mid \Delta f \in L^2(\Gamma^*\backslash\mathbb{H}^3)\}$ von Δ liegt. (Vgl. dazu Lemma 3.3.6, Bemerkung 3.3.7 und Satz 4.1.5. Alle Terme von $\Delta^w\theta(P,w,w_0)$ $(w = u + jv \in \mathbb{H}^3)$ verschwinden exponentiell für $v \to \infty$.) Es gilt also:

$$\begin{aligned}
-\Delta^P f^\theta(P) &= \int_{\mathcal{F}_{\Gamma^*}} f(w)(-\Delta^P\theta(P,w,w_0))d\nu(w)\\
&= \int_{\mathcal{F}_{\Gamma^*}} f(w)(-\Delta^w\theta(P,w,w_0))d\nu(w)\\
&= \int_{\mathcal{F}_{\Gamma^*}} (-\Delta^w f(w))\theta(P,w,w_0)d\nu(w)\\
&= \lambda\int_{\mathcal{F}_{\Gamma^*}} \theta(P,w,w_0)f(w)d\nu(w)\\
&= \lambda f^\theta(P).
\end{aligned}$$

Zu *3.)* Es ist zu zeigen, dass $f^\theta(P)$ in allen Spitzen von Γ exponentiell verschwindet. $\mathcal{F}_{\Gamma^*}$ wird durch eine endliche Vereinigung von Spitzensektoren des Typs

$$\mathcal{G} = A^{-1}\{w = u + jv \in \mathbb{H}^3 \mid u \in \mathcal{P}, v \geq v_0 > 0\}$$

mit einem passenden Parallelogramm $\mathcal{P} \subset \mathbb{C}$ überdeckt. Zunächst wird die Spitze ∞ betrachtet. Mit $P = z + jr \in \mathbb{H}^3$ ist wegen $\int_{\mathcal{F}_{\Gamma^*}} r^2 f(w)d\nu(w) = r^2\int_{\mathcal{F}_{\Gamma^*}} 1 \cdot f(w)d\nu(w) = 0:$

$$f^\theta(P) = \int_{\mathcal{F}_{\Gamma^*}} (\theta(P,w,w_0) - r^2)f(w)d\nu(w),$$

und das wird majorisiert durch eine endliche Summe von Termen des Typs

$$\int_{\mathcal{G}} |(\theta(P,w,w_0) - r^2)f(w)|d\nu(w).$$

Zu zeigen ist somit, dass diese Terme für $r \to \infty$ exponentiell verschwinden. Es gilt

$$|\theta(P,w,w_0) - r^2| \leq r^2 \sum_{\substack{g\in\mathcal{O}^4\\ g\neq 0}} \exp\{-r\epsilon' H_{ww_0}\{g\}\}$$

mit $\epsilon' = 2\pi|\tau_D|$ und $H_{ww_0}\{g\} = 2|\det(\Omega(g))| \cdot \delta(w, \Omega(g)w_0)$ (vgl. Lemma 4.1.2). Für $\det(\Omega(g)) = 0$ ist die rechte Seite als Grenzwert aufzufassen.
Es wird der Fall $A = E_2$ betrachtet. Sei $M = \Omega(g) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Benötigt wird eine Abschätzung für den Ausdruck $\delta(w, \Omega(g)w_0)$ mit $w = u + jv \in \mathbb{H}^3$ für $v \to \infty$. Bezeichnet d den hyperbolischen Abstand, so ist $\delta \asymp e^d$, und mit der Dreiecksungleichung für d zeigt man, dass für alle $w \in \mathbb{H}^3$ und $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ gilt:

$$\delta(w, Mw_0) \asymp e^{d(vj, Mj)} \asymp \delta(vj, Mj).$$

Damit lässt sich für $w \in \mathcal{G}$ und $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ die Funktion $\delta(w, Mw_0)$ nach oben und nach unten durch eine Konstante mal

$$\begin{aligned} \delta(vj, Mj) &= \frac{1}{2v} \frac{1}{|\det(M)|} \big(|b|^2 + |a|^2 + (|d|^2 + |c|^2)v^2\big) \\ &= \frac{1}{|\det(M)|} \left(\frac{|a|^2 + |b|^2}{2} \frac{1}{v} + \frac{|c|^2 + |d|^2}{2} v \right) \end{aligned}$$

abschätzen. Weiter ist $|f(w)| = O(e^{-\epsilon v})$ $(\epsilon > 0)$, so dass der Beitrag zu f^θ majorisiert wird durch

$$\begin{aligned} & r^2 \sum_{\substack{g \in \mathcal{O}^4 \\ g \neq 0}} \int_{\mathcal{G}} e^{-\epsilon' r H_{ww_0}\{g\}} |f(w)| d\nu(w) \\ \ll \;& r^2 \sum_{(a,b,c,d)^t \in C\mathcal{O}^4} \int_{v_0}^{\infty} e^{-\epsilon v} e^{-\epsilon r \left((|a|^2+|b|^2)\frac{1}{v} + (|c|^2+|d|^2)v \right)} \frac{dv}{v^3} \\ \leq \;& r^2 \sum_{(a,b,c,d)^t \in C\mathcal{O}^4} e^{-\epsilon r v_0 (|c|^2+|d|^2)} \int_{v_0}^{\infty} e^{-\epsilon v - \epsilon r (|a|^2+|b|^2)\frac{1}{v}} \frac{dv}{v^3}. \end{aligned}$$

Nach ([29], S. 85 bzw. S. 139) gilt:

$$\int_0^\infty e^{-zt-\frac{\zeta}{t}} \frac{dt}{t^{\nu+1}} = 2\big(\frac{z}{\zeta}\big)^{\frac{1}{2}\nu} K_\nu\big(2(z\zeta)^{\frac{1}{2}}\big), \qquad K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z},$$

so dass man für $r \geq 1$ für die Summe mit Termen $|a|^2 + |b|^2 \neq 0$ erhält:

$$\begin{aligned}
& r^2 \sum_{\substack{(a,b,c,d)^t \in C\mathcal{O}^4 \\ (a,b)\neq(0,0)}} e^{-\epsilon r v_0(|c|^2+|d|^2)} \int_{v_0}^{\infty} e^{-\epsilon v - \epsilon r(|a|^2+|b|^2)\frac{1}{v}} \frac{dv}{v^3} \\
\leq\ & r^2 \sum_{\substack{(a,b,c,d)^t \in C\mathcal{O}^4 \\ (a,b)\neq(0,0)}} e^{-\epsilon r v_0(|c|^2+|d|^2)} 2\Big(\frac{\epsilon}{\epsilon r(|a|^2+|b|^2)}\Big) \cdot K_2\big(2\epsilon\sqrt{r(|a|^2+|b|^2)}\big) \\
\ll\ & r^{\frac{3}{4}} \sum_{\substack{(a,b,c,d)^t \in C\mathcal{O}^4 \\ (a,b)\neq(0,0)}} \frac{1}{(|a|^2+|b|^2)^{\frac{5}{4}}} e^{-\epsilon r v_0(|c|^2+|d|^2)} e^{-2\epsilon\sqrt{r(|a|^2+|b|^2)}} \\
\leq\ & r^{\frac{3}{4}} \sum_{\substack{(a,b,c,d)^t \in C\mathcal{O}^4 \\ (a,b)\neq(0,0)}} \frac{1}{(|a|^2+|b|^2)^{\frac{5}{4}}} e^{-\tilde{\epsilon}\sqrt{r}(|a|+|b|+|c|+|d|)} \\
\leq\ & r^{\frac{3}{4}} \sum_{\substack{(a,b,c,d)^t \in C\mathcal{O}^4 \\ (a,b)\neq(0,0)}} e^{-\tilde{\epsilon}\sqrt{r}(|a|+|b|+|c|+|d|)} \\
\leq\ & r^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{\tilde{\epsilon}}{2}\sqrt{r}} \sum_{\substack{(a,b,c,d)^t \in C\mathcal{O}^4 \\ (a,b)\neq(0,0)}} e^{-\frac{\tilde{\epsilon}}{2}\sqrt{r}(|a|+|b|+|c|+|d|)} \\
\leq\ & r^2 e^{-\frac{\tilde{\epsilon}}{2}\sqrt{r}}
\end{aligned}$$

mit $\tilde{\epsilon} > 0$. Für die Elemente aus $C\mathcal{O}^4$ mit $a = b = 0$ ist

$$r^2 e^{-\epsilon r v_0(|c|^2+|d|^2)} \int_{v_0}^{\infty} e^{-\epsilon v} \frac{dv}{v^3} \quad \ll \quad r^2 e^{-\epsilon r v_0(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2)},$$

und man schätzt die zugehörige Summe analog ab. Insgesamt folgt damit für den Fall der Spitze im Unendlichen und $A = E_2$:

$$r^2 \sum_{\substack{g \in \mathcal{O}^4 \\ g \neq 0}} \int_{\mathcal{G}} e^{-\epsilon r H_{w w_0}\{g\}} |f(w)| d\nu(w) \ll r^2 e^{-\frac{\hat{\epsilon}}{2}\sqrt{r}}$$

mit $\hat{\epsilon} > 0$, so dass f^θ für $r \to \infty$ durch eine endliche Summe von Termen majorisiert wird, die für $r \to \infty$ schneller verschwinden als jede Potenz von r. Weiter wird der Spitzensektor

$$\mathcal{G} = A^{-1}\{w = u + jv \in \mathbb{H}^3 \mid u \in \mathcal{P}, v \geq v_0 > 0\}$$

mit $A \neq \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ betrachtet. Seien $Q = A^{-1}w \in \mathcal{G}$ und $w_0 \in \mathbb{H}^3$ fest. Dann findet man für $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ unter Ausnutzung der Punktpaarinvarianz des hyperbolischen Abstands:

$$\delta(Q, Mw_0) \asymp e^{d(Q,Mw_0)} \asymp e^{d(Q,MA^{-1}j)} = e^{d(w,AMA^{-1}j)} \asymp e^{d(iv,AMA^{-1}j)},$$

so dass man für $v \to \infty$ genau die obige Abschätzung mit AMA^{-1} an Stelle von M erhält.

In einer beliebigen Spitze $\zeta = M_\zeta \infty$ von Γ mit $M_\zeta = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}), c \neq 0$, ist nach dem Siegelschen Transformationssatz 2.2.1:

$$\begin{aligned} |\theta(M_\zeta P, w, w_0)| &\leq r^2 |\det(S)|^{-1} |c|^{-4} \sum_{\omega \in S^{-1}\mathcal{O}^4 \bmod \mathcal{O}^4} |\lambda(S\omega, 0)| \\ &\quad \cdot \sum_{g \in \mathcal{O}^4} \exp\bigl\{-2\pi r |\tau_D| H_{ww_0}\{g + \omega\}\bigr\}, \end{aligned}$$

so dass sich die obigen Aussagen für ∞ auf die übrigen Spitzen von Γ übertragen lassen. Zusammen mit *1.*) und *2.*) folgt:

$f^\theta(P)$ ist eine Spitzenform auf Γ und besitzt eine Fourierentwicklung in ∞ der Gestalt

$$f^\theta(P) = r \sum_{0 \neq \tilde{n} \in \Lambda_\infty^\#} \rho(\tilde{n}) K_s(4\pi |\tilde{n}| r) e^{2\pi i \sigma(\tilde{n} z)}.$$

□

5.2 Eine verallgemeinerte Koeffizientenformel

Im Anschluss wird für die Spitze ∞ eine Beziehung zwischen dem $\tilde{n}$-ten Fourierkoeffizienten einer gelifteten Spitzenform und der Summe der Werte dieser Spitzenform in den Punkten $\eta_j = A_j w_0$ mit $j \in J$ und festes $w_0 \in \mathbb{H}^3$ (vgl. Satz 4.2.16) hergeleitet. Nach Folgerung 4.2.15 ist J endlich. Dabei werden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

- Die koendliche Untergruppe $\Gamma^* < \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sei gegeben wie in Lemma 4.2.1, und es sei $\Gamma = T\Gamma_0(\delta_K q)T^{-1}$ wie in Satz 2.1.9. $\Lambda_\infty = \tau_D \mathcal{O}$ bezeichne das zu Γ'_∞ gehörige Gitter.
- $\tilde{\mu} \in \Lambda_\infty^\# = \tau_D^2 \mathcal{O}$ sei ein Element des dualen Gitters von $\Lambda_\infty = \tau_D \mathcal{O}$.
- $f \in C^2(\Gamma^* \backslash \mathbb{H}^3, \lambda)$ sei eine Spitzenform auf Γ^*. Diese lässt sich schreiben als Linearkombination der zum Eigenwert λ gehörigen Funktionen $(e_n)_{n \in \mathcal{D}_{>0}}$ des in Abschnitt 4.4 betrachteten maximalen Orthonormalsystems von $-\Delta$, so dass OBdA gleich $f = e_m$ für ein $m \in \mathcal{D}_{>0}$ gewählt werden kann.
- Für den zu e_m gehörigen Eigenwert λ_m von $-\Delta$ sei $\mu_m := \sqrt{1 - \lambda_m}$.

- $\rho_m(\tilde{\mu})$ bezeichne den $\tilde{\mu}$-ten Fourier-Koeffizienten (zur Spitze ∞) der gelifteten Spitzenform e_m^θ (vgl. Folgerung 5.1.3).

5.2.1 Lemma *Mit den obigen Bezeichnungen gilt für* $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\int_{\mathcal{F}_{\Gamma^*}} P_{\tilde{\mu}}^\theta(w, w_0, s)\overline{e_m(w)}d\nu(w) \quad = \quad \int_{\mathcal{F}_\Gamma} P_{\tilde{\mu}}(P, s)\overline{e_m^\theta(P)}d\nu(P), \quad (5.2.1)$$

wobei $\mathcal{F}_{\Gamma^*}$ *bzw.* $\mathcal{F}_\Gamma$ *einen Fundamentalbereich für* Γ^* *bzw.* Γ *bezeichnet.*

BEWEIS: Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{F}_{\Gamma^*}} P_{\tilde{\mu}}^\theta(w, s)\overline{e_m(w)}d\nu(w) \\
=& \int_{\mathcal{F}_{\Gamma^*}} \left(\int_{\mathcal{F}_\Gamma} \overline{\theta(P, w, w_0)}P_{\tilde{\mu}}(P, s)d\nu(P)\right)\overline{e_m(w)}d\nu(w) \\
=& \int_{\mathcal{F}_\Gamma} P_{\tilde{\mu}}(P, s)\left(\int_{\mathcal{F}_{\Gamma^*}} \overline{\theta(P, w, w_0)e_m(w)}d\nu(w)\right)d\nu(P) \\
=& \int_{\mathcal{F}_\Gamma} P_{\tilde{\mu}}(P, s)\overline{e_m^\theta(P)}d\nu(P),
\end{aligned}$$

da alle auftretenden Integrale nach Bemerkung 5.1.2 und Folgerung 5.1.3 für $\mathrm{Re}(s) > 1$ absolut konvergieren, so dass mit dem *Satz von Fubini* (vgl. etwa ([9], S.173f. und S. 176 Mitte)) die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Integrationen folgt. $\square$

5.2.2 Bemerkung Schreibt man (5.2.1) mit dem jeweiligen Peterssonschen Skalarprodukt für $\mathrm{Re}(s) > 1$ in der Form

$$\langle P_{\tilde{\mu}}^\theta(\cdot, s), e_m\rangle_{\Gamma^*} = \langle P_{\tilde{\mu}}(\cdot, s), e_m^\theta\rangle_\Gamma,$$

so bringt die Formel zum Ausdruck, dass die Thetalifts aus Definition 5.1.1 und Defintion 3.1.3 bzw. Bemerkung 5.1.2 bezüglich des Peterssonschen Skalarprodukts formal adjungiert sind. $\Diamond$

Mit Hilfe der Spektralzerlegung von $Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s) = P_{\tilde{\mu}}^\theta(w, w_0, s)$ aus Theorem 4.4.6 lässt sich nun das Integral

$$\int_{\mathcal{F}_{\Gamma^*}} P_{\tilde{\mu}}^\theta(w, w_0, s)\overline{e_m(w)}d\nu(w)$$

berechnen. Es ist zu beachten, dass der Integrand nach Satz 4.2.14 invariant unter Γ^* ist und das Integral somit unabhängig von der speziellen Wahl des Fundamentalbereiches.

5.2.3 Lemma *Seien die Bezeichnungen wie auf Seite* 84 *und* $0 \neq \tilde{\mu} = \tau_D \mu \in \mathcal{O}^{\#}$. *Dann gilt für* $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{F}_{\Gamma^*}} P_{\tilde{\mu}}^{\theta}(w, w_0, s)\overline{e_m(w)}d\nu(w) \\ &= \frac{4(|D_K|\pi)^{\frac{3}{2}}}{\big(8\pi|\tilde{\mu}|\big)^{s+1}} \frac{\Gamma(s+\mu_m)\Gamma(s-\mu_m)}{\Gamma(s+\frac{1}{2})} \sum_{j \in J} \overline{e_m(\eta_j)}. \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Die Summe enthält nur endlich viele Terme.

Beweis: Durch Einsetzen der Spektralzerlegung der Zetafunktion (vgl. Theorem 4.4.6) ergibt sich wegen der Orthogonalität von e_m zum Eisenstein-Integral:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{F}_{\Gamma^*}} P_{\tilde{\mu}}^{\theta}(w, w_0, s)\overline{e_m(w)}d\nu(w) \\ = \; & \frac{4(|D_K|\pi)^{\frac{3}{2}}}{\big(8\pi|\tilde{\mu}|\big)^{s+1}} \frac{1}{\Gamma(s+\frac{1}{2})} \\ \cdot \; & \sum_{j \in J} \int_{\mathcal{F}_{\Gamma^*}} \sum_{n \in \mathcal{D}_{>0}} \Gamma(s+\mu_n)\Gamma(s-\mu_n) e_n(w)\overline{e_n(\eta_j)}\; \overline{e_m(w)}d\nu(w) \\ = \; & \frac{4(|D_K|\pi)^{\frac{3}{2}}}{\big(8\pi|\tilde{\mu}|\big)^{s+1}} \frac{\Gamma(s+\mu_m)\Gamma(s-\mu_m)}{\Gamma(s+\frac{1}{2})} \sum_{j \in J} \overline{e_m(\eta_j)}. \end{aligned}$$

J ist nach Folgerung 4.2.15 endlich. □

Das Integral $\int_{\mathcal{F}_\Gamma} P_{\tilde{\mu}}(P, s)\overline{e_m^{\theta}(P)}d\nu(P)$ extrahiert den $\tilde{\mu}$-ten Fourierkoeffizienten zur Spitze ∞ von e_m^{θ}, so dass sich wegen (5.2.1) eine Beziehung zwischen dem $\tilde{\mu}$-ten Fourierkoeffizienten einer gelifteten Spitzenform und der Summe der Werte dieser Spitzenform in den Punkten $\eta_j = A_j w_0$ mit $j \in J, w_0 \in \mathbb{H}^3$ fest, ergibt. Die Berechnung des $\mathcal{F}_\Gamma$-Integrals verläuft weitgehend analog zum Beweis von Satz 3.1.6, wobei das folgende Lemma sowie die Fourierentwicklung der gelifteten Spitzenform e_m^{θ} in der Spitze ∞ (vgl. Folgerung 5.1.3) benötigt werden.

5.2.4 Lemma *Mit den Bezeichnungen von Seite* 84 *gilt für* $\tilde{\mu} \neq 0$ *und* $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\int_0^\infty r^{s-1} K_{\mu_m}(4\pi|\tilde{\mu}|r)e^{-4\pi|\tilde{\mu}|r}dr = \frac{\sqrt{\pi}}{(8\pi|\tilde{\mu}|)^s} \frac{\Gamma(s+\mu_m)\Gamma(s-\mu_m)}{\Gamma(s+\frac{1}{2})}.$$

Beweis: Nach ([12], S. 50, Gleichung (26)) mit $\alpha = \beta$ gilt für $\mathrm{Re}(\mu \pm \nu) > 0$, $\mathrm{Re}(2\alpha) > 0$:

$$\int_0^\infty r^{\mu-1} e^{-\alpha r} K_\nu(\alpha r) dr = \frac{\sqrt{\pi}}{(2\alpha)^\mu} \frac{\Gamma(\mu+\nu)\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}. \tag{5.2.3}$$

Für $\mu = s, \nu = \mu_m$ und $\alpha = 4\pi|\tilde{\mu}|$ gilt offensichtlich $\mathrm{Re}(8\pi|\tilde{\mu}|) > 0$, und für $\mathrm{Re}(s) > 1$ ist $\mathrm{Re}(s \pm \mu_m) > 0$, da $0 \leq \mathrm{Re}(\mu_m) \leq 1$ nach Definition von μ_m, so dass aus (5.2.3) die Behauptung folgt. □

5.2.5 Satz *Seien die Bezeichnungen wie auf Seite* 84, *und es sei* $\tilde{\mu} \neq 0$ *vorausgesetzt. Dann gilt für* $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{F}_\Gamma} P_{\tilde{\mu}}(P,s) \overline{e_m^\theta(P)} d\nu(P) \\ &= \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \overline{\rho_m(\tilde{\mu})} \frac{\sqrt{\pi}}{(8\pi|\tilde{\mu}|)^s} \frac{\Gamma(s+\mu_m)\Gamma(s-\mu_m)}{\Gamma(s+\frac{1}{2})}. \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Beweis: Die Beziehung (5.2.4) folgt durch Einsetzen der Fourierentwicklung von e_m^θ und durch anschließende Anwendung von Lemma 5.2.4. Wird der zu $M = E_2$ gehörige Summand der Poincaré-Reihe mit $f_{\tilde{\mu}}(P,s) := r_P^{1+s} e^{2\pi i(\sigma(\tilde{\mu} z_P) + 2i|\tilde{\mu}| r_P)}$ bezeichnet, so folgt wegen $e_m^\theta(MP) = \chi(M) e_m^\theta(P)$ $(M \in \Gamma)$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{F}_\Gamma} P_{\tilde{\mu}}(P,s) \overline{e_m^\theta(P)} d\nu(P) \\ =\ &\int_{\mathcal{F}_\Gamma} \sum_{M \in \Gamma'_\infty \backslash \Gamma} \overline{\chi(M)} f_{\tilde{\mu}}(MP,s) \overline{e_m^\theta(P)} d\nu(P) \\ =\ &\sum_{M \in \Gamma'_\infty \backslash \Gamma} \int_{M\mathcal{F}_\Gamma} \overline{e_m^\theta(P)} f_{\tilde{\mu}}(P,s) d\nu(P) \\ =\ &\int_{\Gamma'_\infty \backslash \mathbb{H}^3} \overline{e_m^\theta(P)} f_{\tilde{\mu}}(P,s) d\nu(P) \\ =\ &\int_0^\infty \int_{\mathbb{C}/(\tau_D^{-1}\mathcal{O})} \left(r \sum_{0 \neq \tilde{n} \in (\tau_D^{-1}\mathcal{O})^\#} \overline{\rho_m(\tilde{n}) K_{\mu_m}(4\pi|\tilde{n}|r) e^{-2\pi i \sigma(\tilde{n}z)}} \right) \\ \cdot\ &\left(r^{1+s} e^{2\pi i(\sigma(\tilde{\mu}z) + 2i|\tilde{\mu}|r)} \right) dz \frac{dr}{r^3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty r^{s-1} \sum_{0 \neq \tilde{n} \in (\tau_D^{-1}\mathcal{O})^\#} \overline{\rho_m(\tilde{n}) K_{\mu_m}(4\pi|\tilde{n}|r)} \\
&\quad \cdot \left(\int_{\mathbb{C}/(\tau_D^{-1}\mathcal{O})} e^{2\pi i \sigma((\tilde{\mu}-\tilde{n})z)} dz \right) e^{-4\pi|\tilde{\mu}|r} dr,
\end{aligned}
$$

und wegen $\tilde{\mu} - \tilde{n} \in (\tau_D^{-1}\mathcal{O})^\#$ ist

$$
\int_{\mathbb{C}/(\tau_D^{-1}\mathcal{O})} e^{2\pi i \sigma((\tilde{\mu}-\tilde{n})z)} dz = \begin{cases} \mathrm{vol}(\mathbb{C}/(\tau_D^{-1}\mathcal{O})) = \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2}, & \text{falls } \tilde{n} = \tilde{\mu}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}
$$

so dass sich mit Lemma 5.2.4 (mit $\overline{s}$ statt s) ergibt:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{F}_\Gamma} P_{\tilde{\mu}}(w,s) \overline{e_m^\theta(P)} d\nu(P) \\
&= \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \overline{\rho_m(\tilde{\mu})} \int_0^\infty r^{s-1} \overline{K_{\mu_m}(4\pi|\tilde{\mu}|r)} e^{-4\pi|\tilde{\mu}|r} dr \\
&= \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \overline{\rho_m(\tilde{\mu})} \overline{\int_0^\infty r^{\overline{s}-1} K_{\mu_m}(4\pi|\tilde{\mu}|r) e^{-4\pi|\tilde{\mu}|r} dr} \\
&= \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \overline{\rho_m(\tilde{\mu})} \frac{\sqrt{\pi}}{(8\pi|\tilde{\mu}|)^s} \frac{\Gamma(s+\mu_m)\Gamma(s-\mu_m)}{\Gamma(s+\frac{1}{2})}.
\end{aligned}
$$

□

Ein Vergleich der Ausdrücke (5.2.2) und (5.2.4) liefert schließlich die gesuchte Beziehung:

5.2.6 Korollar (Verallgemeinerte Koeffizientenformel)
Es seien $0 \neq \tilde{\mu} = \tau_D \mu \in \mathcal{O}^\#$ ($\mu \in \mathcal{O}$) ein Element des dualen Gitters von $\mathcal{O}$ und $e_m \in (e_n)_{n \in \mathcal{D}_{>0}}$ eine Spitzenform auf Γ^* zum Eigenwert λ_m. Weiter sei $\eta_j = A_j w_0$ ($w_0 \in \mathbb{H}^3$), wobei $\{A_j, j \in J\}$ ein vollständiges Vertretersystem der Rechtsnebenklassen der Aktion von Γ^* auf $\{A \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O}) \mid \det(A) = \mu\}$ bezeichnet. Dann gilt:

$$
\rho_m(\tilde{\mu}) = \frac{1}{|\tilde{\mu}|} \sum_{j \in J} e_m(\eta_j).
$$

Dabei enthält die Summe nur endlich viele Terme.

Kapitel 6

Der Spezialfall $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]$

In diesem Kapitel werden die bisherigen Ergebnisse an Hand eines Spezialfalls erläutert.

6.1 Ein Beispiel

Es wird der Ring $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]$ der ganzen Gaußschen Zahlen betrachtet sowie die Matrizen

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.1.1}$$

$C \in \mathrm{M}_4(\mathcal{O})$ ist über $\mathbb{C}$ invertierbar, es ist $\det(C) = 4$, und die symmetrische Matrix

$$S := S_0[C] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathcal{O})$$

ist gerade und invertierbar, wobei $S = 4S^{-1}$. $q = 4$ ist damit die Stufe von S (vgl. Definition 2.1.2). Für $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]$ hat man $D = -1 \equiv 3 \bmod 4$ und daher $\tau_D = \frac{1}{2\sqrt{D}} = -\frac{i}{2}$, so dass das duale Gitter von $\mathbb{Z}[i]$ gegeben ist durch

$$\mathbb{Z}[i]^{\#} = \tau_D \mathbb{Z}[i] = -\frac{i}{2}\mathbb{Z}[i] = \frac{1}{2}\mathbb{Z}[i].$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi_C : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) &\to \mathrm{SO}(S, \mathbb{C}), \\ (g, h) &\mapsto C^{-1}\phi(g, h)C \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

mit ϕ aus Definition 3.2.2 ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, und es gilt:

$$\mathrm{SO}(S, \mathbb{C}) = C^{-1}\mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C})C.$$

Ist $\overline{A}^t A$ mit $A = A(g,h) \in \mathrm{SO}(S_0, \mathbb{C})$ $(g, h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, vgl. (3.2.2)) eine Majorante von S_0, so ist $\overline{C}^t(\overline{A}^t A)C = (\overline{C}^t C)\{C^{-1}AC\}$ eine Majorante von S. Wählt man speziell $g := P_w^{-1}, h := P_{w_0}^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ mit $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$, so ist

$$H_{ww_0} = (\overline{C}^t C)\{C^{-1}\phi(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})C\} = (\overline{C}^t C)\{\phi_C(P_w^{-1}, P_{w_0}^{-1})\}$$

eine von $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ abhängige Majorante von S, und die Thetafunktion in Abhängigkeit von $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ ist dann für $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\theta(P, w, w_0) &= r^2 \sum_{g \in \mathbb{Z}[i]^4} \exp\bigl\{\pi i\bigl(\sigma\bigl(\tau_D S[g]z\bigr) + 2ir|\tau_D|H_{ww_0}\{g\}\bigr)\bigr\} \\ &= r^2 \sum_{g \in \mathbb{Z}[i]^4} \exp\bigl\{\pi i\bigl(\sigma\bigl(-\frac{i}{2}S[g]z\bigr) + irH_{ww_0}\{g\}\bigr)\bigr\}.\end{aligned}$$

Nach Satz 3.3.10 besitzt $\theta(P, w, w_0)$ das folgende Transformationsverhalten:

6.1.1 Satz *Für $P = z + jr \in \mathbb{H}^3, w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ und $T = \begin{pmatrix} \sqrt{\tau_D}^{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\tau_D} \end{pmatrix}$ mit $\tau_D = -\frac{i}{2}$ gilt:*

1. *$\theta(P + t, w, w_0) = \theta(P, w, w_0)$ für $t \in \mathcal{O}$.*
2. *$\theta(MP, w, w_0) = \chi(M)\theta(P, w, w_0)$ für $M \in \Gamma = T\Gamma_0(8)T^{-1} = \Gamma_0(4) \cap \Gamma^0(2) < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$.*
3. *$\theta(P, T_0 w, T_1 w_0) = \theta(P, w, w_0)$ für $(T_0, T_1) \in \phi_C^{-1}(\mathrm{SO}(S, \mathcal{O}))$.*

Weiter ist die Poincaré-Reihe für $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\Gamma = \Gamma_0(4) \cap \Gamma^0(2)$ und $\tilde{\mu} = \tau_D^2 \mu = \frac{1}{4}\mu \in (2\mathbb{Z}[i])^\#$ mit $\mu \in \mathbb{Z}[i]$ definiert durch

$$\begin{aligned}P_{\tilde{\mu}}(P, s) &= \sum_{M \in \Gamma'_\infty \backslash \Gamma} \overline{\chi(M)} r_{MP}^{1+s} e^{2\pi i(\sigma(\tau_D^2 \mu z_{MP}) + 2i|\tau_D^2 \mu| r_{MP})} \\ &= \sum_{M \in \Gamma'_\infty \backslash \Gamma} \overline{\chi(M)} r_{MP}^{1+s} e^{\frac{\pi i}{2}(\sigma(-i\mu z_{MP}) + 2i|\mu| r_{MP})},\end{aligned}$$

mit $\Gamma'_\infty = \bigl\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \bigm| \omega \in 2\mathbb{Z}[i]\bigr\}$.

Das Volumen des Fundamentalparallelogramms von $\mathbb{C}/(2\mathbb{Z}[i])$ ist offensichtlich $\mathrm{vol}(\mathbb{C}/(2\mathbb{Z}[i])) = 4$ (s. auch Lemma 3.1.8).

Seien $0 \neq \tilde{\mu} = -\frac{i}{2}\mu \in (2\mathbb{Z}[i])^{\#}$ mit $\mu \in \mathbb{Z}[i]$ und $\Gamma = T\Gamma_0(8)T^{-1} = \Gamma_0(4) \cap \Gamma^0(2)$. Dann gilt für $\mathrm{Re}(s) > 1$ für die *Zetafunktion:*

$$\begin{aligned} Z_{S,H,\tilde{\mu}}(s) &= \int_{\mathcal{F}} \overline{\theta_{S,H}(P)} P_{\tilde{\mu}}(P,s)d\nu(P) \\ &= \mathrm{vol}(\mathbb{C}/\tau_D^{-1}\mathbb{Z}[i]) \frac{\Gamma(s+1)}{(4\pi|\tau_D|)^{s+1}} \sum_{\substack{g\in\mathbb{Z}[i]^4 \\ S[g]=2\mu}} (H\{g\} + 2|\mu|)^{-s-1} \\ &= 4\frac{\Gamma(s+1)}{(2\pi)^{s+1}} \sum_{\substack{g\in\mathbb{Z}[i]^4 \\ S[g]=2\mu}} (H\{g\} + 2|\mu|)^{-s-1}. \end{aligned}$$

Im vorliegenden Spezialfall mit C wie in (6.1.1) ist der $\mathbb{Z}[i]$-Modul-Isomorphismus Ω gegeben durch

$$\begin{aligned} \Omega : \mathbb{Z}[i]^4 &\longrightarrow \mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i]), \\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ -x_2 + x_4 & x_1 - x_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

wobei für den Untermodul $\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i]) := \mathrm{M}_C(\mathbb{Z}[i])$ von $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}[i])$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i]) = \Big\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}[i]) \;\Big|\; & a + d \in 2\mathbb{Z}[i], b - c \in 2\mathbb{Z}[i], \\ & a - d \in 2\mathbb{Z}[i], b + c \in 2\mathbb{Z}[i] \Big\} \qquad (6.1.4) \\ = \Big\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}[i]) \;\Big|\; & a \equiv d \bmod 2, b \equiv c \bmod 2 \Big\}. \end{aligned}$$

6.1.2 Lemma $\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])$ *ist ein* Unterring *von* $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}[i])$.

Beweis: Es ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])$, und mit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])$ gilt offensichtlich

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i]).$$

□

Es ist zu beachten, dass $\mathrm{M}_C(\mathcal{O})$ für eine beliebige (invertierbare) Matrix $C \in \mathrm{M}_4(\mathcal{O})$ im Allgemeinen *kein* Unterring von $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})$ ist.

6.1.3 Bemerkung Wegen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])$ ist $\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])$ eine *Ordnung* vom Rang 4 in der Algebra $\mathrm{M}_2(K) = \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}(i))$ (im Sinn von [6]), denn für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])$ ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \tfrac{a+d}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \tfrac{a-d}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \tfrac{b+c}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{b-c}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Diamond$

Auf Grund von Lemma 6.1.2 wird die folgende Untergruppe $\Gamma^{(2)}$ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$ betrachtet:

6.1.4 Definition Für $\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])$ wie in (6.1.4) sei

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)} &:= \mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i]) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i]) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i]) \;\middle|\; a \equiv d \bmod 2, b \equiv c \bmod 2 \right\}. \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

Mit (3.2.3) rechnet man sofort nach:

$$\Gamma^{(2)} \times \Gamma^{(2)} \subseteq \phi_C^{-1}(\mathrm{SO}(S, \mathcal{O})).$$

6.1.5 Folgerung $\Gamma^{(2)}$ *ist eine Kongruenzuntergruppe von* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$. $\Gamma^{(2)}$ *operiert mit endlich vielen Bahnen auf der Menge*

$$\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])_\mu := \{A \in \mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i]) \mid \det(A) = \mu\}$$

aller Matrizen aus $\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])$ *mit fester Determinante* $\mu \neq 0$ *durch Multiplikation von links (und von rechts).*

Beweis: Offensichtlich gilt $\Gamma(2) \subset \Gamma^{(2)} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$ für die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(2) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i]) \mid \gamma \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \bmod 2\}$ der Stufe 2, so dass $\Gamma^{(2)}$ endlichen Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$ besitzt und insbesondere eine Kongruenzuntergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$ ist. Nach Lemma 6.1.2 ist $\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])$ ein Unterring von $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}[i])$, so dass $\Gamma^{(2)} = \mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i]) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$ auf $\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])_\mu$ durch Multiplikation von links (und von rechts) agiert. Nach Folgerung 4.2.15 ist $\{A_j, j \in J\}$ endlich. $\square$

6.1.6 Lemma *Für* $\Gamma^{(2)} = \mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i]) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$ *ist*

$$\Gamma^{(2)} = \mathrm{Stab}(\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])),$$

wobei $\mathrm{Stab}(\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i]))$ *den Stabilisator von* $\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])$ *in* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$ *bezeichnet.*

Beweis: Seien $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i]), A \in \mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])$. Dann ist $\gamma \in \mathrm{Stab}(\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i]))$ gleichbedeutend mit $\gamma A \in \mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])$ für alle $A \in \mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])$. Wegen $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])$ muss also gelten $\gamma \in \Gamma^{(2)}$, d.h. $\gamma \in \mathrm{Stab}(\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])) \Leftrightarrow \gamma \in \Gamma^{(2)}$. Dabei ist „$\Leftarrow$“ klar nach Lemma 6.1.2. $\square$

Im Spezialfall $w = w_0 = j$, also $P_w = P_{w_0} = E_2$, kann die δ-Abhängigkeit der Zetafunktion unter Verwendung von Folgerung 1.1.10 und Folgerung 1.1.5, *3.* elementar nachgerechnet werden. Für $g = (g_1, g_2, g_3, g_4)^t \in \mathbb{Z}[i]^4$ ist dabei nach (6.1.3) $\Omega(g) = \left(\begin{smallmatrix} g_1+g_3 & g_2+g_4 \\ -g_2+g_4 & g_1-g_3\end{smallmatrix}\right) =: \left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])$, wobei $S[g] = 2\mu$ für ein $\mu \in \mathbb{Z}[i]$ nach Definition von Ω genau dann erfüllt ist, wenn $\det(\Omega(g)) = \mu$. Daher kann die Summation über $g \in \mathbb{Z}[i]^4$ mit $S[g] = 2\mu$ umgeschrieben werden als Summation über Matrizen $A \in \mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])$ mit $\det(A) = \mu$. Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt nach Folgerung 3.3.11:

$$
\begin{aligned}
&Z_{\tilde{\mu}}(j,j,s)\\
=&\frac{4\Gamma(s+1)}{\pi^{s+1}} \sum_{\substack{g\in\mathbb{Z}[i]^4\\ S[g]=2\mu}} (H_{jj}\{g\} + 2|\mu|)^{-s-1}\\
=&\frac{4\Gamma(s+1)}{\pi^{s+1}} \sum_{\substack{g\in\mathbb{Z}[i]^4\\ S[g]=2\mu}} \Big(\Big(\overline{\phi(P_j^{-1},P_j^{-1})}^t \phi(P_j^{-1},P_j^{-1})\Big)\{Cg\} + 2|\mu|\Big)^{-s-1}\\
=&\frac{4\Gamma(s+1)}{\pi^{s+1}} \sum_{\substack{g\in\mathbb{Z}[i]^4\\ S[g]=2\mu}} \big(E_4\{Cg\} + 2|\mu|\big)^{-s-1}\\
=&\frac{4\Gamma(s+1)}{\pi^{s+1}} \sum_{\substack{g\in\mathbb{Z}[i]^4\\ S[g]=2\mu}} \Big(|g_1+g_3|^2 + |g_2+g_4|^2 + |-g_2+g_4|^2 + |g_1-g_3|^2 + 2|\mu|\Big)^{-s-1}\\
=&\frac{4\Gamma(s+1)}{\pi^{s+1}} \sum_{\substack{A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])\\ \det(A)=\mu}} \Big(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2+2|\mu|\Big)^{-s-1}\\
=&\frac{4\Gamma(s+1)}{\pi^{s+1}} |\mu|^{-s-1} \sum_{\substack{A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])\\ \det(A)=\mu}} \Big(\Big|\frac{a}{\sqrt{\mu}}\Big|^2 + \Big|\frac{b}{\sqrt{\mu}}\Big|^2 + \Big|\frac{c}{\sqrt{\mu}}\Big|^2 + \Big|\frac{d}{\sqrt{\mu}}\Big|^2 + 2\Big)^{-s-1}\\
=&\frac{4\Gamma(s+1)}{(\pi|\mu|)^{s+1}} \sum_{\substack{A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])\\ \det(A)=\mu}} \Big(\mathrm{Spur}\Big(\frac{1}{\sqrt{\mu}}A\Big(\overline{\frac{1}{\sqrt{\mu}}A}\Big)^t\Big) + 2\Big)^{-s-1}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\Gamma(s+1)}{(2\pi|\mu|)^{s+1}} \sum_{\substack{A=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in \mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i]) \\ \det(A)=\mu}} \Big(\delta\big(j, Aj\big)+1\Big)^{-s-1} \\
&= \frac{4\Gamma(s+1)}{(2\pi|\mu|)^{s+1}} \sum_{i\in I} \sum_{M\in\Gamma^{(2)}} \big(\delta\big(j, MA_i j\big)+1\big)^{-s-1} \\
&= \frac{4\Gamma(s+1)}{(2\pi|\mu|)^{s+1}} \sum_{i\in I} \tilde{H}(j, A_i j, s),
\end{aligned}$$

wobei $\tilde{H}(j, A_i j, s) = \sum_{M\in\Gamma^{(2)}} \big(\delta\big(j, MA_i j\big)+1\big)^{-s-1}$ die bezüglich δ gebildete Poincaré-Reihe und $\{A_i, i \in I\}$ ein vollständiges Vertretersystem der Rechtsnebenklassen der Operation von $\Gamma^{(2)}$ auf $\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])_\mu$ bezeichnet. Da $\Gamma^{(2)}$ mit endlich vielen Bahnen auf $\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])_\mu$ operiert, ist $\{A_i, i \in I\}$ endlich, so dass die obige Summe über I nur endlich viele Terme enthält.

Zum Abschluss wird noch die asymptotische Aussage (4.4.4) für den betrachteten Spezialfall angegeben:

6.1.7 Satz *Sei* $T \geq 2$. *Dann gilt für die Kongruenzuntergruppe* $\Gamma^{(2)} < \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ *aus Definition* 6.1.4:

$$\sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in\Gamma^{(2)} \\ (|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2)+2\leq 2T}} \big(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2+2\big)^{-2} \sim \frac{\pi}{\mathrm{vol}(\Gamma^{(2)})}\cdot \log T \quad \textit{für } T\to\infty.$$

Beweis: Nach Folgerung 1.1.10 ist $\delta(j, Mj) = \frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2)$ für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Damit hat man nach Satz 4.4.5:

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{\mathrm{vol}(\Gamma^{(2)})}\cdot\log T \quad &\sim \quad \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma^{(2)} \\ \delta(j,\gamma j)+1\leq T}} (\delta(j,\gamma j)+1)^{-2} \\
&= \quad 4\cdot \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in\Gamma^{(2)} \\ |a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2+2\leq 2T}} \big(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2+2\big)^{-2}.
\end{aligned}$$

. $\square$

Kapitel 7

Die Rankin-Selberg-Methode für die Thetafunktion

In Abschnitt 7.2 des vorliegenden Kapitels werden die Aussagen von [16] übertragen auf den Fall des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes mit der Aktion einer (beliebigen) koendlichen Untergruppe Γ von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ (s. Theorem 7.2.6). Auf Zusatzvoraussetzungen an Γ wird verzichtet. Für einen nichttrivialen Charakter χ wird die Rankin-Selberg-Transformierte in einer bezüglich χ singulären Spitze definiert für (Γ, χ)-automorphe Funktionen, die für $r \to \infty$ nicht hinreichend schnell abfallen. Es werden die meromorphe Fortsetzbarkeit der Rankin-Selberg-Transformierten auf die gesamte komplexe Ebene sowie eine Funktionalgleichung für die Rankin-Selberg-Transformierte bewiesen.
Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ist der Beweisansatz in [16] zu korrigieren. Die in [16] angegebene Menge $\mathcal{F}_\Gamma$ ist entgegen der dortigen Behauptung kein Fundamentalbereich von Γ. Der Beweis in [16] ist mit einem Fundamentalbereich der Form (7.2.2) zu modifizieren.

Bei der Berechnung der Rankin-Selberg-Transformierten der Thetafunktion (s. Abschnitt 7.3) stellt sich eine Zetafunktion ein, die formal aus der in Kapitel 3 definierten Zetafunktion $Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$ hervorgeht, wenn $\tilde{\mu} = 0$ gesetzt wird. Formal lässt sich $Z_0(w, w_0, s)$ auffassen als geliftete Eisensteinreihe, wobei der nullte Summand der als Integrationskern dienenden Thetafunktion auszuschließen ist.

Zunächst werden einige grundlegende Eigenschaften sowie die Fourierentwicklung der Eisensteinreihen angegeben.

7.1 Eisensteinreihen

7.1.1 Definition Sei $\Gamma < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ eine diskrete Gruppe. χ sei ein Charakter auf Γ und $\zeta = A^{-1}\infty$ ($A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$) sei eine bezüglich χ singuläre Spitze von Γ, d.h. $\chi|\Gamma_\zeta = 1$. Dann wird die *Eisensteinreihe* für Γ in der Spitze ζ definiert durch

$$E_A(P,s) := \sum_{M \in \Gamma'_\zeta \backslash \Gamma} \overline{\chi(M)} r(AMP)^{1+s}.$$

Dabei bezeichnet $\Gamma'_\zeta = \{M \in \Gamma_\zeta \mid \mathrm{Spur}(M) = \pm 2\}$ wie üblich die maximale unipotente Untergruppe von Γ_ζ.

7.1.2 Bemerkung Die Eisensteinreihe $E_A(P,s)$ hängt ab von der Wahl von A. Ist $B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ ein weiteres Element mit $\zeta = B^{-1}\infty$, so stimmen die Eisensteinreihen $E_A(P,s)$ und $E_B(P,s)$ jedoch bis auf einen trivialen Faktor überein, so dass $E_A(P,s)$ als *die* Eisensteinreihe für Γ in der Spitze ζ bezeichnet werden kann. $\diamondsuit$

7.1.3 Satz *Seien die Bezeichnungen wie in Definition* 7.1.1. *Die Eisensteinreihe $E_A(P,s)$ konvergiert für* $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ *absolut und lokal gleichmäßig, wobei σ_0 die von P unabhängige Konvergenzabszisse von Γ bezeichnet. Im Bereich der absoluten Konvergenz stellen die Eisensteinreihen (Γ,χ)-automorphe Funktionen auf dem oberen Halbraum dar, die holomorph vom Parameter s abhängen, d.h. für $s \in \mathbb{C}$ mit* $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ *ist $E_A(NP,s) = \chi(N)E_A(P,s)$ für $N \in \Gamma$. Außerdem erfüllt $E_A(P,s)$ für* $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ *die Differentialgleichung*

$$(-\Delta - (1 - s^2))E_A(P,s) = 0.$$

Beweis: Vgl. ([10], S. 100, Prop. 2.1) und ([10], S. 104, Cor. 2.4 und Prop. 2.5). $\square$

7.1.4 Bemerkung Seien $\Gamma < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ eine diskrete Gruppe und χ_Γ ein Charakter auf Γ. η sei eine bezüglich χ_Γ singuläre Spitze von Γ und $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ mit $A\eta = \infty$. Ferner sei $S \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, und die Gruppe $G < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ werde definiert durch

$$G := S^{-1}\Gamma S.$$

Sei χ_G der durch $\chi_G(g) := \chi_\Gamma(SgS^{-1})$ ($g \in \Gamma$) definierte Charakter auf G. Dann ist $\zeta = S^{-1}\eta$ eine singuläre Spitze von G mit $(AS)\zeta = \infty$, und L durchläuft ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von G'_ζ in G genau dann, wenn $M = SLS^{-1}$ ein zugehöriges System für Γ'_η in Γ durchläuft. Es gilt:

$$\begin{aligned}
E_{AS}(P,s) &= \sum_{L\in G'_\zeta\backslash G} \overline{\chi_G(L)}r((AS)LP)^{1+s} \\
&= \sum_{M\in\Gamma'_\eta\backslash\Gamma} \overline{\chi_G(S^{-1}MS)}r(ASS^{-1}MSP)^{1+s} \\
&= \sum_{M\in\Gamma'_\eta\backslash\Gamma} \overline{\chi_\Gamma(M)}r(AM(SP))^{1+s} \\
&= E_A(SP,s).
\end{aligned}$$

Im Spezialfall $S \in \Gamma$ und damit $\eta \equiv \zeta \bmod \Gamma$ hat man insbesondere

$$E_{AS}(P,s) = \chi(S)E_A(P,s).$$

Die Eisensteinreihen von Γ-äquivalenten Spitzen stimmen also im Wesentlichen überein. Daher gibt es wegen des in Satz 7.1.5 ablesbaren Wachstumsverhaltens von $E_A(\cdot,s)$ genau so viele linear unabhängige Eisensteinreihen $E_A(\cdot,s)$ wie Γ-Äquivalenzklassen von singulären Spitzen von Γ. $\Diamond$

Im Folgenden wird die Klassenzahl von K als 1 vorausgesetzt. Es wird die für $\mathrm{Re}(s) > 1$ absolut konvergente Eisensteinreihe $E_A(P,s)$ zur Spitze ζ einer (beliebigen) koendlichen Untergruppe Γ von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ betrachtet. Dabei ist $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ mit $\zeta = A^{-1}\infty$ zu wählen. (Wegen $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ ist die Definition von $E_A(P,s)$ unabhängig von der Wahl von A, vgl. ([11], S. 99) bzw. ([21], S. 52).) Insbesondere wird in Abschnitt 7.3 die Kongruenzuntergruppe $\Gamma = T\Gamma_0(\delta_K q)T^{-1} < \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ betrachtet (vgl Abschnitt 2.1).

Die Fourierentwicklung von $E_A(P,s)$ ist gegeben durch:

7.1.5 Satz (Fourierentwicklung der Eisensteinreihen)
Seien Γ eine koendliche Untergruppe von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ und χ ein Charakter auf Γ. $\zeta = A^{-1}\infty$ und $\eta = B^{-1}\infty$ mit $A,B \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ seien zwei Spitzen von Γ, und ζ sei singulär bezüglich χ. Außerdem werde im Fall $\zeta \equiv \eta \bmod \Gamma$ noch $A^{-1}B \in \Gamma$ vorausgesetzt. Weiter sei $\Lambda_\eta \subset \mathbb{C}$ das zu $(B\Gamma B^{-1})'_\infty = B\Gamma'_\eta B^{-1}$ gehörige Gitter, d.h. $B\Gamma'_\eta B^{-1} = \left\{\left(\begin{smallmatrix}1 & \omega\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, \omega \in \Lambda_\eta\right\}$. Dann gilt:

1. *Ist auch η eine bezüglich χ singuläre Spitze von Γ, so hat die Eisen-*

steinreihe $E_A(P,s)$ *in* η *für* $\mathrm{Re}(s)>1$ *die Fourierentwicklung*

$$\begin{aligned}
& E_A(B^{-1}P,s) \\
= \ & \delta_{\eta,\zeta}[\Gamma_\zeta : \Gamma'_\zeta]\overline{\chi(A^{-1}B)}|d_0|^{-2-2s}r^{1+s} \\
+ \ & \frac{\pi}{\mathrm{vol}(\Lambda_\eta)s}\Bigg(\sum_{\substack{M=\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{R}_{\zeta,\eta} \\ c\neq 0}} \overline{\chi(A^{-1}MB)}|c|^{-2-2s}\Bigg)r^{1-s} \\
+ \ & \frac{(2\pi)^{1+s}}{\mathrm{vol}(\Lambda_\eta)\Gamma(1+s)}\sum_{0\neq\tilde{\mu}\in\Lambda_\eta^\#}|\tilde{\mu}|^s \\
\cdot \ & \Bigg(\sum_{\substack{M=\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{R}_{\zeta,\eta} \\ c\neq 0}} \overline{\chi(A^{-1}MB)}\frac{e^{2\pi i\sigma(\tilde{\mu}\frac{d}{c})}}{|c|^{2+2s}}\Bigg) rK_s(4\pi|\tilde{\mu}|r)e^{2\pi i\sigma(\tilde{\mu}z)}.
\end{aligned}$$

Dabei gelten die folgenden Bezeichnungen:

$\mathcal{R}_{\zeta,\eta}$ *bezeichnet ein Vertretersystem* $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ *der Doppelnebenklassen in*

$$A\Gamma'_\zeta A^{-1}\backslash A\Gamma B^{-1}/B\Gamma'_\eta B^{-1}$$

mit $c\neq 0$. *Falls* η *und* ζ Γ*-äquivalent sind, sei* $L_0\in\Gamma$ *so gewählt, dass* $L_0\eta=\zeta$, *und* d_0 *sei definiert durch*

$$AL_0B^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & d_0\end{pmatrix}.$$

Außerdem ist das Kronecker-Symbol $\delta_{\eta,\zeta}$ *definiert durch*

$$\delta_{\eta,\zeta} = \begin{cases} 1, & \textit{falls } \eta\equiv\zeta \bmod \Gamma, \\ 0, & \textit{falls } \eta\not\equiv\zeta \bmod \Gamma. \end{cases}$$

2. *Ist die Spitze* η *nicht singulär, so ist der nullte Fourierkoeffizient in der Entwicklung von* $E_A(P,s)$ *für* $\mathrm{Re}(s)>1$ *in der Spitze* η *gleich Null. Ferner ist in der obigen Fourierentwicklung eine Ersetzung der Form* $\tilde{\mu}\longmapsto\tilde{\mu}+\kappa_1\tilde{\omega}_1+\kappa_2\tilde{\omega}_2$ *für* $\tilde{\mu}\in\Lambda_\eta^\#$ *vorzunehmen, wobei* $\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2$ *eine Basis von* $\Lambda_\eta^\#$ *ist und* $0\leq\kappa_1,\kappa_2<1$.

BEWEIS: ([21], S. 53) und ([10], S. 111f.). Vgl. auch ([8], S. 53f.). Dabei ist die geringfügig abweichende Definition des dualen Gitters zu beachten. Für den Fall *2.* einer nicht singulären Spitze η vgl. [36]. □

Die Klassenzahl h_K von K wird als 1 vorausgesetzt. Es wird eine (beliebige) koendliche Untergruppe Γ von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ mit einem zugehörigen Charakter χ auf Γ betrachtet.

Die Menge der Spitzen von Γ und $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ ist gleich $\mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$, und wegen $[\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}) : \Gamma] < \infty$ hat Γ nur endlich viele Γ-Äquivalenzklassen von Spitzen (vgl. Abschnitt 1.3). Es seien $\alpha_1, ..., \alpha_h \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ so gewählt, dass

$$\eta_1 = \alpha_1\infty, \eta_2 = \alpha_2\infty, ..., \eta_h = \alpha_h\infty \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$$

ein Vertretersystem der Spitzenklassen von Γ ist, wobei die Spitzen $\eta_1, ..., \eta_p$ $(1 \leq p \leq h)$ singulär bezüglich χ seien. Es wird $\alpha_1 = E_2$ gesetzt. (Wegen $h_K = 1$ ist die Wahl von $\alpha_i \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ möglich.)

Für $i = 1, ..., p$ und $P \in \mathbb{H}^3$ ist

$$E_{\alpha_i}(P, s) := \sum_{M \in \Gamma'_{\eta_i} \backslash \Gamma} \overline{\chi(M)} r(\alpha_i^{-1} M P)^{1+s}$$

die *Eisensteinreihe* zur Spitze η_i. Außerdem setzt man für $i = 1, ..., p:$

$$E_i(P, s) := \frac{1}{[\Gamma_{\eta_i} : \Gamma'_{\eta_i}]} E_{\alpha_i}(P, s). \tag{7.1.1}$$

$E_i(P, s)$ stellt im Bereich $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$ der absoluten Konvergenz eine (Γ, χ)-automorphe Funktion dar, die holomorph vom Parameter s abhängt. $E_i(P, s)$ besitzt in den Spitzen $\eta_1, ..., \eta_p$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ nach Satz 7.1.5 eine Fourierentwicklung der Gestalt

$$E_i(\alpha_i P, s) = r^{1+s} + \phi_{ii}(s) r^{1-s} + ... \quad \text{für } i = 1, ..., p, \tag{7.1.2}$$

und im Fall $i \neq j$ ist

$$E_i(\alpha_j P, s) = \phi_{ij}(s) r^{1-s} + ... \qquad \text{für } i, j = 1, ..., p \tag{7.1.3}$$

mit den Dirichlet-Reihen

$$\phi_{ij}(s) \;=\; \frac{1}{[\Gamma_{\eta_i} : \Gamma'_{\eta_i}]} \frac{\pi}{\mathrm{vol}(\Lambda_{\eta_j}) s} \sum_{\substack{M = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{R}_{\eta_i, \eta_j} \\ c \neq 0}} \frac{\overline{\chi(\alpha_i M \alpha_j^{-1})}}{|c|^{2+2s}} \tag{7.1.4}$$

aus Satz 7.1.5. Für $i \neq j$ ist die Bedingung $c \neq 0$ in (7.1.4) automatisch erfüllt, so dass sie unter dem Summenzeichen weggelassen werden kann.

Die Eisensteinreihen $E_i(P, s)$ können auf die ganze komplexe Ebene meromorph fortgesetzt werden (vgl. ([10], S. 232f., Theorem 1.2)):

7.1.6 Definition Mit den Bezeichnungen von S. 99 setzt man:

$$\mathcal{E}(P,s) := \begin{pmatrix} E_1(P,s) \\ \vdots \\ E_p(P,s) \end{pmatrix}, \quad \Phi(s) := \big(\phi_{ij}(s)\big)_{1\leq i,j\leq p}.$$

Die Matrix $\Phi(s)$ wird als *Streumatrix* bezeichnet.

7.1.7 Satz *Die Eisensteinreihe $E_i(P,s)$ $(1 \leq i \leq p)$ kann* meromorph *auf die ganze komplexe Ebene fortgesetzt werden in folgendem Sinn: Es gibt eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g \neq 0$, so dass für $i = 1, ..., p$ das Produkt $g(s)E_i(P,s)$ fortgesetzt werden kann zu einer Funktion auf $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{C}$, die reell-analytisch in P und holomorph in s ist. Die fortgesetzten Funktionen erfüllen die Funktionalgleichung*

$$\mathcal{E}(P,-s) = \Phi(-s)\mathcal{E}(P,s), \quad \Phi(s)\Phi(-s) = E_p. \tag{7.1.5}$$

Ferner gilt für die fortgesetzten Komponenten $E_i(P,s)$ von $\mathcal{E}(P,s)$ die Differentialgleichung

$$(-\Delta - (1-s^2))E_i(P,s) = 0 \qquad (1 \leq i \leq p), \tag{7.1.6}$$

falls s kein Pol von $E_i(P,s)$ ist.

Beweis: Vgl. ([10], S. 232ff.). Der wesentliche Schritt ist der Beweis der meromorphen Fortsetzbarkeit der Eisensteinreihen. Die Funktionalgleichungen lassen sich dann leicht ableiten. □

Für das folgende Lemma vgl. ([10], S. 243f., Theorem 1.11).

7.1.8 Lemma *Es gelten die Bezeichnungen von S.* 99.

1. *Die Eisensteinreihen $E_i(P,s)$ $(1 \leq i \leq p)$ und die Einträge von $\Phi(s)$ haben keine Polstellen in der Halbebene $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$ bis auf endlich viele mögliche Pole im Intervall $]0,1]$ auf der reellen Achse. Diese Pole sind einfach.*

2. *Für $\sigma \in]0,1]$ und $1 \leq i \leq p$ wird die Residuenfunktion definiert durch $RE_i(P,\sigma) := \mathrm{Res} E_i(P; s = \sigma)$. Dann gilt:*

$$RE_i(\cdot,\sigma) \in L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3,\chi).$$

7.1.9 Satz *Seien die Bezeichnungen wie auf S.* 99. *Die Eisensteinreihen $E_i(P,s)$ $(1 \leq i \leq p)$ sind holomorph an der Stelle $s = 1$, falls $\chi \neq 1$.*

BEWEIS: Die Residuenfunktion $RE_i(P,1)$ ist nach Lemma 7.1.8 schwach (Γ,χ)-automorph, d.h. für $N \in \Gamma$ ist

$$RE_i(NP,1) \;=\; \chi(N)RE_i(P,1).$$

An der Stelle $s=1$ liegt nach Lemma 7.1.8 höchstens ein Pol erster Ordnung vor. Weiter erfüllt $E_i(P,s)$ nach Satz 7.1.3 die Differentialgleichung $-\Delta(E_i(P,s)) = (1-s^2)E_i(P,s)$, so dass sich ergibt:

$$\begin{aligned}
-\Delta RE_i(P,1) &= -\Delta(\lim_{s\to 1}(E_i(P,s)(s-1))) \\
&= \lim_{s\to 1}(-\Delta(E_i(P,s))(s-1)) \\
&= \lim_{s\to 1}((1-s^2)E_i(P,s)(s-1)) \\
&= \lim_{s\to 1}(1-s^2)\lim_{s\to 1}(E_i(P,s)(s-1)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$RE_i(P,1) \in L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3,\chi)$ ist somit eine Eigenfunktion von $-\Delta$ zum Eigenwert 0 und damit konstant. Da der Charakter χ nicht trivial auf Γ ist, folgt $RE_i(P,1) \equiv 0$, und da in $s=1$ nach Lemma 7.1.8 höchstens ein einfacher Pol vorliegen kann, folgt die Behauptung.
Die Aussage des Lemmas wird im Fall der hyperbolischen Ebene allgemein bewiesen in ([37], S. 322, Satz 13.7). □

7.1.10 Bemerkung Definiert man die Eisensteinreihe *ohne* Charakter, also $E_\infty(P,s) = \sum_{M\in\Gamma'_\infty\backslash\Gamma} r(MP)^{1+s}$, so hat $E_\infty(P,s)$ an der Stelle $s=1$ einen Pol erster Ordnung, und das entsprechende Residuum ist die konstante Eigenfunktion von Δ. ◊

7.2 MEROMORPHE FORTSETZUNG DER RANKIN-SELBERG-TRANSFORMIERTEN

Wie in Abschnitt 7.1 wird eine (beliebige) koendliche Untergruppe Γ von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ betrachtet. Es gelten die Bezeichnungen von S. 99. Wie im Fall der hyperbolischen Ebene zeigt man:

7.2.1 Bemerkung Sei $\Gamma < \Delta < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ mit $[\Delta:\Gamma] < \infty$. $\eta \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sei eine Spitze von Δ. Dann ist η auch eine Spitze von Γ, und es gilt $[\Delta_\eta:\Gamma_\eta] \le [\Delta:\Gamma] < \infty$. ◊

7.2.2 Lemma *$\alpha_1, ..., \alpha_h \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ seien wie auf S. 99 so gewählt, dass $\eta_1 = \infty, \eta_2 = \alpha_2\infty, ..., \eta_h = \alpha_h\infty \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ ein Vertretersystem der Spitzenklassen von Γ ist. Ferner sei $\mathcal{V}_j$ ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von $(\alpha_j^{-1}\Gamma\alpha_j)_\infty$ in $(\alpha_j^{-1}\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})\alpha_j)_\infty$. Dann ist*

$$\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}) = \bigcup_{i=1}^{h} \bigcup_{V \in \mathcal{V}_i} \Gamma\alpha_i V \tag{7.2.1}$$

eine disjunkte Zerlegung von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ in Rechtsnebenklassen bezüglich Γ.

Beweis: (i) Sei $\eta_1 = \infty, \eta_2 = \alpha_2\infty, ..., \eta_h = \alpha_h\infty \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit $\alpha_i \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ ein Vertretersystem der Spitzenklassen von Γ und sei $S \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$. Dann ist $S\infty$ zu genau einer der Spitzen η_i $(1 \le i \le h)$ Γ-äquivalent, d.h. es gibt ein $j \in \{1, ..., h\}$ und ein $M \in \Gamma$ mit $S\infty = M\eta_j = M\alpha_j\infty$. Damit folgt $S = M\alpha_j W$ mit $W \in (\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}))_\infty$, und wegen $(\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}))_\infty = (\alpha_j^{-1}\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})\alpha_j)_\infty = \bigcup_{V \in \mathcal{V}_j} (\alpha_j^{-1}\Gamma\alpha_j)_\infty V$ ist $W = \beta V$ mit einem geeigneten $\beta = \alpha_j^{-1}\Gamma\alpha_j$ und $V \in \mathcal{V}_j$. Schreibt man $\beta = \alpha_j^{-1}\gamma\alpha_j$ mit $\gamma \in \Gamma$, so folgt $S = M\gamma\alpha_j V \in \Gamma\alpha_j V$.
(ii) Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit der Zerlegung (7.2.1). Angenommen, es gilt $S = \gamma\alpha_j V = \delta\alpha_k W$ mit $S \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}), \gamma, \delta \in \Gamma, V \in \mathcal{V}_j, W \in \mathcal{V}_k$. Da V und W die Spitze ∞ festlassen, ist $S\infty = \gamma\alpha_j\infty = \delta\alpha_k\infty$. Wegen $\gamma, \delta \in \Gamma$ folgt $\eta_j \equiv \eta_k \bmod \Gamma$ und damit $j = k$ auf Grund der Γ-Inäquivalenz von η_j und η_k für $j \neq k$. Es gilt also $\gamma\alpha_j V = \delta\alpha_j W$, d.h. $(\alpha_j^{-1}\delta^{-1}\gamma\alpha_j)V = W$ mit $V, W \in \mathcal{V}_j$, und wegen $\alpha_j^{-1}\delta^{-1}\gamma\alpha_j\infty = \infty$ ist dabei $\alpha_j^{-1}(\delta^{-1}\gamma)\alpha_j \in (\alpha_j^{-1}\Gamma\alpha_j)_\infty$. Da $\mathcal{V}_j$ ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von $(\alpha_j^{-1}\Gamma\alpha_j)_\infty$ in $(\alpha_j^{-1}\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})\alpha_j)_\infty$ ist, folgt $V = W$ und damit auch $\gamma = \delta$. Die Zerlegung (7.2.1) ist somit eindeutig. $\square$

7.2.3 Korollar *Bezeichnet $\mathcal{D}$ (irgendeinen) Fundamentalbereich von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ in $\mathbb{H}^3$ (z.B. den* Fordschen Fundamentalbereich *der Form*

$$\mathcal{D}_K = \Big\{ z + jr \in \mathbb{H}^3 \;\Big|\; z \in F_K, |cz+d|^2 + |c|^2 r^2 \ge 1 \\ \text{für alle } c, d \in \mathcal{O} \text{ mit } < c, d >= \mathcal{O} \Big\}$$

mit einem Fundamentalbereich F_K der Gruppe $(\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}))_\infty$ in $\mathbb{C}$ (vgl. ([10], S. 318f.))*), so ist*

$$\mathcal{F}_\Gamma = \bigcup_{i=1}^{h} \bigcup_{V \in \mathcal{V}_i} \alpha_i V \mathcal{D} \tag{7.2.2}$$

ein Fundamentalbereich von Γ in $\mathbb{H}^3$. Dabei bezeichnet $\mathcal{V}_i$ wie oben ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von $(\alpha_i^{-1}\Gamma\alpha_i)_\infty$ in $(\alpha_i^{-1}\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})\alpha_i)_\infty$.

Im Anschluss wird die Rankin-Selberg-Transformierte einer Funktion $F : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften definiert:
F sei eine stetig differenzierbare schwach (Γ, χ)-automorphe Funktion, $P = z + jr \in \mathbb{H}^3$. Dann besitzt F in der *singulären* Spitze η_i $(1 \leq i \leq p)$ eine Fourierentwicklung der Gestalt

$$F(\alpha_i P) = \sum_{\tilde{\mu} \in \Lambda_{\eta_i}^{\#}} a_{\tilde{\mu}}^{\eta_i}(r) e^{2\pi i \sigma(\tilde{\mu} z)},$$

wobei Λ_{η_i} das zur Spitze η_i gehörige Gitter bezeichnet. Weiter gelte

$$F(\alpha_i P) = \psi_i(r) + O(r^{-N}) \quad \text{für jedes } N \in \mathbb{N} \text{ für } r \to \infty$$

gleichmäßig bezüglich z mit einer Funktion ψ_i der Gestalt

$$\psi_i(r) = \sum_{j=1}^{l} \frac{c_{ij}}{n_{ij}!} r^{d_{ij}} \log^{n_{ij}}(r), \tag{7.2.3}$$

wobei $c_{ij}, d_{ij} \in \mathbb{C}, n_{ij} \in \mathbb{N}_0$ für $1 \leq i \leq p$, und $F(\alpha_i P)$ wachse für $r \to 0$ (gleichmäßig bezüglich z) höchstens polynomial. Ferner wachse $F(\alpha_i P)$ für $r \to \infty$ höchstens polynomial bezüglich r (gleichmäßig bezüglich z), falls $p + 1 \leq i \leq h$.

7.2.4 Definition Für F gelten die obigen Voraussetzungen. Die *Rankin-Selberg-Transformierte* von F in der singulären Spitze $\eta_i = \alpha_i \infty$ $(\alpha_i \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}), 1 \leq i \leq p)$ von Γ wird für $s \in \mathbb{C}$ definiert als

$$R_i(F, s) \quad := \quad \int_{(\alpha_i^{-1} \Gamma_{\eta_i} \alpha_i) \backslash \mathbb{H}^3} \overline{(F(\alpha_i P) - \psi_i(r))} r^{1+s} d\nu(P).$$

7.2.5 Bemerkung $R_i(F, s)$ ist wohldefiniert, da der Integrand invariant ist unter $\alpha_i^{-1} \Gamma_{\eta_i} \alpha_i$. $R_i(F, s)$ konvergiert absolut für $\mathrm{Re}(s) \gg 0$. ◊

Jede Funktion ψ der Gestalt (7.2.3) hat die folgende, für den Beweis der meromorphen Fortsetzbarkeit der Rankin-Selberg-Transformierten wesentliche, Eigenschaft:
Die Mellin-Transformierte einer Funktion ψ wie in (7.2.3) verschwindet identisch in dem Sinn, dass die Integrale $\int_0^T \psi(r) r^{1-s} \frac{dr}{r^3}$ und $\int_T^\infty \psi(r) r^{1-s} \frac{dr}{r^3}$, die jeweils in einer Halbebene konvergieren, meromorphe Fortsetzungen auf die gesamte komplexe Ebene besitzen, deren Summe identisch 0 ist. Dies wird im Beweis von Lemma 7.2.7 nachgerechnet.

7.2.6 Theorem *Seien die Bezeichnungen wie auf S. 99. Dann gilt unter den obigen Voraussetzungen an F: Die Rankin-Selberg-Transformierte $R_i(F,s)$ $(1 \le i \le p)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf die ganze komplexe Ebene. Mögliche Polstellen sind $s = \overline{d_{ij}} - 1, s = 1 - \overline{d_{ij}}$ sowie die Polstellen von $\phi_{ij}(s)$. Dabei hat $\phi_{ij}(s)$ im Bereich $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$ höchstens endlich viele einfache Polstellen im Intervall $]0,1]$ auf der reellen Achse. Außerdem gilt die Funktionalgleichung*

$$\vec{R}(F,s) = \begin{pmatrix} R_1(F,s) \\ \vdots \\ R_p(F,s) \end{pmatrix} = \Phi(s) \begin{pmatrix} R_1(F,-s) \\ \vdots \\ R_p(F,-s) \end{pmatrix} = \Phi(s)\vec{R}(F,-s), \quad (7.2.4)$$

wobei $\Phi(s)$ die Streumatrix $\Phi(s) = \big(\phi(s)_{ij}\big)_{1 \le i,j \le p}$ mit den Dirichlet-Reihen $\phi_{ij}(s)$ aus der Fourierentwicklung der Eisensteinreihen in Satz 7.1.5 bezeichnet (vgl. (7.1.4)).

Beweis: $\alpha_1, \dots, \alpha_h \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ seien wie auf S. 99 so gewählt, dass $\eta_1 = \infty, \eta_2 = \alpha_2\infty, \dots, \eta_h = \alpha_h\infty \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ ein Vertretersystem der Spitzenklassen von Γ ist, wobei die Spitzen $\eta_1, \dots, \eta_p$ $(1 \le p \le h)$ singulär bezüglich χ seien. Es ist $\alpha_1 = E_2$. $\mathcal{D} = \mathcal{D}_K$ sei der in Korollar 7.2.3 beschriebene Fordsche Fundamentalbereich bezüglich der Aktion von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ auf dem oberen Halbraum $\mathbb{H}^3$. Nach Lemma 7.2.2 kann ein Fundamentalbereich $\mathcal{F}_\Gamma$ von Γ in $\mathbb{H}^3$ gewählt werden als

$$\mathcal{F}_\Gamma = \bigcup_{i=1}^{h} \bigcup_{V \in \mathcal{V}_i} \alpha_i V \mathcal{D}$$

mit einem Vertretersystem $\mathcal{V}_i$ der Rechtsnebenklassen von $(\alpha_i^{-1}\Gamma\alpha_i)_\infty$ in $(\alpha_i^{-1}\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})\alpha_i)_\infty$.

Zunächst wird die Rankin-Selberg-Transformierte von F in der Spitze ∞ betrachtet. Dazu ist der Integrationsbereich $\Gamma_\infty\backslash\mathbb{H}^3$ passend zu stutzen. Man setzt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{D}} &:= \Gamma_\infty\backslash\mathbb{H}^3 - \bigcup_{V \in \mathcal{V}_1} V\mathcal{D} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_\infty\backslash\Gamma} \gamma\mathcal{F}_\Gamma - \bigcup_{V \in \mathcal{V}_1} V\mathcal{D} \\
&= \bigcup_{\gamma \in \Gamma_\infty\backslash\Gamma} \bigcup_{i=1}^{h} \bigcup_{V \in \mathcal{V}_i} \gamma(\alpha_i V\mathcal{D}) - \bigcup_{V \in \mathcal{V}_1} V\mathcal{D} \\
&= \bigcup_{i=1}^{h} \bigcup_{V \in \mathcal{V}_i} \bigcup_{\substack{\gamma \in \Gamma_\infty\backslash\Gamma \\ (\gamma,i) \ne (E_2,1)}} \gamma(\alpha_i V\mathcal{D}).
\end{aligned}$$

Man kann sich dabei $\mathcal{V}_i$ so gewählt denken, dass die Vereinigungen $\bigcup_{V\in\mathcal{V}_i} V\mathcal{D}$ ab der Höhe $r \geq 1$ die Gestalt einer Säule haben.

Für $F : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{C}$ gelten die Voraussetzungen von S. 103. Das definierende Integral für $R_1(F,s)$ wird in Teilintegrale zerlegt, deren meromorphe Fortsetzbarkeit gezeigt werden kann. Dafür ist die obige Wahl von $\mathcal{F}_\Gamma$ und $\tilde{\mathcal{D}}$ wesentlich. Für $P = z + jr \in \mathbb{H}^3$ und $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ lässt sich $R_1(F,s)$ schreiben als:

$$\begin{aligned}
R_1(F,s) &= \int_{\Gamma_\infty\backslash\mathbb{H}^3} \overline{(F(P)-\psi_1(r))} r^{1+s} d\nu(P) \\
&= \int_{\bigcup_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\gamma\mathcal{F}_\Gamma} \overline{(F(P)-\psi_1(r))} r^{1+s} d\nu(P) \\
&= \int_{\bigcup_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\bigcup_{i=1}^h\bigcup_{V\in\mathcal{V}_i}\gamma(\alpha_i V\mathcal{D})} \overline{(F(P)-\psi_1(r))} r^{1+s} d\nu(P) \\
&= \int_{\bigcup_{i=1}^h\bigcup_{V\in\mathcal{V}_i}\bigcup_{\substack{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma \\ (\gamma,i)\neq(E_2,1)}}\gamma(\alpha_i V\mathcal{D})} \overline{F(P)} r^{1+s} d\nu(P) \\
&\quad - \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \overline{\psi_1(r)} r^{1+s} d\nu(P) \\
&\quad + \int_{\bigcup_{V\in\mathcal{V}_1} V\mathcal{D}} \overline{(F(P)-\psi_1(r))} r^{1+s} d\nu(P).
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
I_{\infty,F}(s) &:= \int_{\bigcup_{i=1}^h\bigcup_{V\in\mathcal{V}_i}\bigcup_{\substack{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma \\ (\gamma,i)\neq(E_2,1)}}\gamma(\alpha_i V\mathcal{D})} \overline{F(P)} r^{1+s} d\nu(P), \\
I_{\infty,\psi}(s) &:= -\int_{\tilde{\mathcal{D}}} \overline{\psi_1(r)} r^{1+s} d\nu(P), \\
I_{\infty,F,\psi}(s) &:= \int_{\bigcup_{V\in\mathcal{V}_1} V\mathcal{D}} \overline{(F(P)-\psi_1(r))} r^{1+s} d\nu(P)
\end{aligned}$$

gilt dann für $\mathrm{Re}(s) \gg 0$:

$$R_1(F,s) = I_{\infty,F}(s) + I_{\infty,\psi}(s) + I_{\infty,F,\psi}(s).$$

$F(P) - \psi_1(r)$ verschwindet nach Wahl von ψ_1 hinreichend schnell für $r \to \infty$, so dass $I_{\infty,F,\psi}(s)$ für jedes $s \in \mathbb{C}$ konvergiert. Da $\psi_1(r)$ die Gestalt $\sum_{j=1}^{l} \frac{c_{ij}}{n_{ij}!} r^{d_{ij}} \log^{n_{ij}}(r)$ hat mit $c_{ij}, d_{ij} \in \mathbb{C}, n_{ij} \in \mathbb{N}_0$, konvergiert $I_{\infty,\psi}(s)$ für

$\mathrm{Re}(s) \gg 0$. Dabei ist die Wahl von $\tilde{\mathcal{D}}$ zu beachten. $I_{\infty,F}(s)$ lässt sich wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned}
I_{\infty,F}(s) &= \int_{\mathcal{D}} \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma \\ 1\le i\le h \\ (\gamma,i)\neq(E_2,1)}} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \overline{F(\gamma\alpha_i VP)} r(\gamma\alpha_i VP)^{1+s} d\nu(P) \\
&= \int_{\mathcal{D}} \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma \\ 1\le i\le h \\ (\gamma,i)\neq(E_2,1)}} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \overline{F(\alpha_i VP)\chi(\gamma)} r(\gamma\alpha_i VP)^{1+s} d\nu(P) \\
&= \int_{\mathcal{D}} \Big(\sum_{i=1}^{h} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \overline{F(\alpha_i VP)} \Big(\frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{\gamma\in\Gamma'_\infty\backslash\Gamma} \overline{\chi(\gamma)} r(\gamma\alpha_i VP)^{1+s} \Big) \\
&\qquad\qquad - \sum_{V\in\mathcal{V}_1} \overline{F(VP)} r^{1+s} \Big) d\nu(P) \\
&= \int_{\mathcal{D}} \Big(\sum_{i=1}^{h} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \overline{F(\alpha_i VP)} \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} E_\infty(\alpha_i VP, s) \\
&\qquad\qquad - \sum_{V\in\mathcal{V}_1} \overline{F(VP)} r^{1+s} \Big) d\nu(P) \\
&= \sum_{i=1}^{h} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{F(\alpha_i VP)} \big(E_1(\alpha_i VP, s) - \delta_{\eta_i,\infty} r^{1+s} \big) d\nu(P)
\end{aligned}$$

mit dem Kronecker-Symbol $\delta_{\eta_i,\infty}$ und der (normierten) Eisensteinreihe $E_1(P,s) = \frac{1}{[\Gamma_\infty:\Gamma'_\infty]} E_\infty(P,s)$ wie in (7.1.1).

Sei $e_{1i}(r,s)$ der nullte Term in der Fourierentwicklung von $E_1(P,s)$ in der Spitze $\eta_i = \alpha_i\infty$ $(1 \le i \le h)$. Dann ist $e_{1i}(r,s)$ nach Satz 7.1.5 sowie (7.1.2) und (7.1.3) für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gegeben durch

$$e_{1i}(r,s) = \begin{cases} \delta_{\eta_i,\infty} r^{1+s} + \phi_{1i}(s) r^{1-s}, & \text{falls } 1 \le i \le p, \\ 0, & \text{falls } p+1 \le i \le h \end{cases} \tag{7.2.5}$$

mit der Dirichlet-Reihe $\phi_{1i}(s)$ aus (7.1.4). Wegen $\delta_{\eta_i,\infty} = 0$ für $p+1 \leq i \leq h$ gilt dann für $\mathrm{Re}(s) \gg 0$:

$$\begin{aligned} I_{\infty,F}(s) &= \sum_{i=1}^{h} \sum_{V \in \mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{F(\alpha_i VP)} \big(E_1(\alpha_i VP, s) - \delta_{\eta_i,\infty} r^{1+s} \big) d\nu(P) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{\lambda \in \mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{F(\alpha_i VP)} \big(E_1(\alpha_i VP, s) - e_{1i}(r, s) \big) d\nu(P) \\ &+ \sum_{i=p+1}^{h} \sum_{V \in \mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{F(\alpha_i VP)} E_1(\alpha_i VP, s) d\nu(P) \\ &+ \sum_{i=1}^{p} \sum_{V \in \mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{F(\alpha_i VP)} \phi_{1i}(s) r^{1-s} d\nu(P). \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass alle Integrale für $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ absolut konvergieren. Für jedes $i = 1, \dots, p$ verschwindet $E_1(\alpha_i VP, s) - e_{i1}(r, s)$ exponentiell für $r \to \infty$. Ebenso verschwindet $E_1(\alpha_i VP, s)$ für $p+1 \leq i \leq h$ nach Satz 7.1.5 exponentiell für $r \to \infty$, so dass die beiden ersten Terme der obigen Summe absolut für alle $s \in \mathbb{C}$ konvergieren, die keine Pole von $E_1(P, \cdot)$ sind, also in ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktionen von s darstellen. Der dritte Term der obigen Summe wird für $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ geschrieben als

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{p} \sum_{V \in \mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{F(\alpha_i VP)} \phi_{1i}(s) r^{1-s} d\nu(P) \\ = \quad & \sum_{i=1}^{p} \sum_{V \in \mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{(F(\alpha_i VP) - \psi_i(r))} \phi_{1i}(s) r^{1-s} d\nu(P) \\ + \quad & \sum_{i=1}^{p} \sum_{V \in \mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{\psi_i(r)} \phi_{1i}(s) r^{1-s} d\nu(P) \\ = \quad & \sum_{i=1}^{p} \sum_{V \in \mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{(F(\alpha_i VP) - \psi_i(r))} e_{1i}(r, s) d\nu(P) \\ - \quad & \sum_{V \in \mathcal{V}_1} \int_{\mathcal{D}} \overline{(F(VP) - \psi_1(r))} r^{1+s} d\nu(P) \\ + \quad & \sum_{i=1}^{p} \sum_{V \in \mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{\psi_i(r)} \phi_{1i}(s) r^{1-s} d\nu(P). \end{aligned}$$

Damit erhält man insgesamt für $I_{\infty,F}(s)$ für $\mathrm{Re}(s) \gg 0$:

$$\begin{aligned}
I_{\infty,F}(s) &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{F(\alpha_i VP)}\big(E_1(\alpha_i VP,s) - e_{1i}(r,s)\big) d\nu(P) \\
&+ \sum_{i=p+1}^{h} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{F(\alpha_i VP)} E_1(\alpha_i VP,s) d\nu(P) \\
&+ \sum_{i=1}^{p} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{(F(\alpha_i VP) - \psi_i(r))} e_{1i}(r,s) d\nu(P) \\
&- \sum_{V\in\mathcal{V}_1} \int_{\mathcal{D}} \overline{(F(VP) - \psi_1(r))} r^{1+s} d\nu(P) \\
&+ \sum_{i=1}^{p} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{\psi_i(r)} \phi_{1i}(s) r^{1-s} d\nu(P),
\end{aligned}$$

so dass sich für die Rankin-Selberg-Transformierte von F in ∞ für $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ ergibt:

$$\begin{aligned}
R_1(F,s) &= I_{\infty,F}(s) + I_{\infty,\psi}(s) + I_{\infty,F,\psi}(s) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{F(\alpha_i VP)}\big(E_1(\alpha_i VP,s) - e_{1i}(r,s)\big) d\nu(P) \\
&+ \sum_{i=p+1}^{h} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{F(\alpha_i VP)} E_1(\alpha_i VP,s) d\nu(P) \\
&+ \sum_{i=1}^{p} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{(F(\alpha_i VP) - \psi_i(r))} e_{1i}(r,s) d\nu(P) \\
&+ \sum_{i=1}^{p} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{\psi_i(r)} \phi_{1i}(s) r^{1-s} d\nu(P) - \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \overline{\psi_1(r)} r^{1+s} d\nu(P).
\end{aligned} \tag{7.2.6}$$

Für eine *singuläre* Spitze $\eta_j = \alpha_j \infty$ $(1 \leq j \leq p)$ von Γ ist die Rankin-Selberg-Transformierte von F in η_j gegeben durch

$$R_j(F,s) = \int_{(\alpha_j^{-1}\Gamma_{\eta_j}\alpha_j)\backslash\mathbb{H}^3} \overline{(F(\alpha_j P) - \psi_j(r))} r^{s+1} d\nu(P).$$

Dieser Fall wird auf den bereits betrachteten Fall $\eta_j = \infty$ zurückgeführt. Dazu sei $\tilde{\Gamma} := \alpha_j^{-1}\Gamma\alpha_j$. $\tilde{\Gamma}$ ist eine koendliche Untergruppe von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$, und es gilt $\tilde{\Gamma}_\infty = \alpha_j^{-1}\Gamma_{\eta_j}\alpha_j$. Die Spitzen $\tilde{\eta}_i$ von $\tilde{\Gamma}$ sind gegeben durch $\tilde{\eta}_i =$

$\alpha_j^{-1}\eta_i$ mit $\tilde{\eta}_i = \tilde{\alpha}_i\infty$, wobei $\tilde{\alpha}_i = \alpha_j^{-1}\alpha_i \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$. Dabei ist η_i singulär bezüglich χ genau dann, wenn $\tilde{\eta}_i$ singulär bezüglich $\tilde{\chi}$ ist, wobei $\tilde{\chi}$ den durch $\tilde{\chi}(g) := \chi(\alpha_j g \alpha_j^{-1})$ $(g \in \tilde{\Gamma})$ definierten Charakter auf $\tilde{\Gamma}$ bezeichnet. Der Fundamentalbereich $\mathcal{F}_{\tilde{\Gamma}}$ von $\tilde{\Gamma}$ kann als

$$\mathcal{F}_{\tilde{\Gamma}} = \alpha_j^{-1}\mathcal{F}_\Gamma = \bigcup_{i=1}^{h} \bigcup_{V \in \mathcal{V}_i} \tilde{\alpha}_i V \mathcal{D}$$

mit $\tilde{\alpha}_i = \alpha_j^{-1}\alpha_i \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ gewählt werden. Weiter setzt man analog zu S. 104:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{D}}_j &= (\alpha_j^{-1}\Gamma_{\eta_j}\alpha_j)\backslash\mathbb{H}^3 - \bigcup_{V \in \mathcal{V}_j} V\mathcal{D} = \bigcup_{\tilde{\gamma} \in (\alpha_j^{-1}\Gamma_{\eta_j}\alpha_j)\backslash(\alpha_j^{-1}\Gamma\alpha_j)} \tilde{\gamma}\mathcal{F}_{(\alpha_j^{-1}\Gamma\alpha_j)} - \bigcup_{V \in \mathcal{V}_j} V\mathcal{D} \\
&= \bigcup_{\gamma \in \Gamma_{\eta_j}\backslash\Gamma} \alpha_j^{-1}\gamma\mathcal{F}_\Gamma - \bigcup_{V \in \mathcal{V}_j} V\mathcal{D} = \bigcup_{\substack{\gamma \in \Gamma_{\eta_j}\backslash\Gamma \\ 1 \le i \le h \\ (\gamma, i) \ne (E_2, j)}} \bigcup_{V \in \mathcal{V}_i} \alpha_j^{-1}\gamma(\alpha_i V\mathcal{D}).
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{V}_j$ ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von $(\alpha_j^{-1}\Gamma\alpha_j)_\infty = \tilde{\Gamma}_\infty$ in $(\alpha_j^{-1}\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})\alpha_j)_\infty$.

Die Funktion

$$f : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{C}, \quad f(P) := F(\alpha_j P)$$

ist schwach $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\chi})$-automorph, was sofort aus der schwachen (Γ, χ)-Automorphie von F folgt, und $f(P)$ wächst für $r \to 0$ höchstens polynomial (gleichmäßig bezüglich z). Nach Definition von f ist die Fourierentwicklung von f in $\tilde{\eta}_i = \alpha_j^{-1}\eta_i$ für $1 \le i \le p$ gegeben durch die Fourierentwicklung von F in η_i, so dass gilt:

$$f(\tilde{\alpha}_i P) = F(\alpha_i P) = \psi_i(r) + O(r^{-N}) \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N} \text{ für } r \to \infty \tag{7.2.7}$$

gleichmäßig bezüglich z. Führt man die obige Rechnung für die singuläre Spitze ∞ für die Gruppe $\tilde{\Gamma} = \alpha_j^{-1}\Gamma\alpha_j$ mit der schwach $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\chi})$-automorphen

Funktion f durch, so folgt aus (7.2.6) unter Verwendung von (7.2.7):

$$\begin{aligned}
R_\infty(f,s) &= \int_{\tilde{\Gamma}_\infty\backslash\mathbb{H}^3} \overline{(f(P)-\psi_j(r))} r^{1+s} d\nu(P) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{f(\tilde{\alpha}_i VP)} \left(\frac{\tilde{E}_\infty(\tilde{\alpha}_i VP,s)}{[\tilde{\Gamma}_\infty : \tilde{\Gamma}'_\infty]} - \tilde{e}_{\infty i}(r,s) \right) d\nu(P) \\
&+ \sum_{i=p+1}^{h} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{f(\tilde{\alpha}_i VP)} \frac{\tilde{E}_\infty(\tilde{\alpha}_i VP,s)}{[\tilde{\Gamma}_\infty : \tilde{\Gamma}'_\infty]} d\nu(P) \\
&+ \sum_{i=1}^{p} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{(f(\tilde{\alpha}_i VP)-\psi_i(r))} \tilde{e}_{\infty i}(r,s) d\nu(P) \\
&+ \sum_{i=1}^{p} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{\psi_i(r)} \tilde{\phi}_{\infty i}(s) r^{1-s} d\nu(P) \\
&- \int_{\tilde{\mathcal{D}}_{\infty,\tilde{\Gamma}}} \overline{\psi_j(r)} r^{1+s} d\nu(P),
\end{aligned}$$

wobei $\tilde{\alpha}_i = \alpha_j^{-1}\alpha_i \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$. $\frac{1}{[\tilde{\Gamma}_\infty:\tilde{\Gamma}'_\infty]}\tilde{E}_\infty(P,s)$ ist die (normierte) Eisensteinreihe von $\tilde{\Gamma}$ zur Spitze ∞ von $\tilde{\Gamma}$ mit nulltem Term $\tilde{e}_{\infty i}(r,s) = \delta_{\eta_i,\infty} r^{1+s} + \tilde{\phi}_{\infty i}(s) r^{1-s}$ $(1 \le i \le p)$ in der Fourierentwicklung. Es gilt (vgl. Bemerkung 7.1.4 mit $A = S^{-1}$ und $\alpha_i VP$ statt P):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{[\tilde{\Gamma}_\infty : \tilde{\Gamma}'_\infty]} \tilde{E}_\infty(\tilde{\alpha}_i VP,s) &= \frac{1}{[\tilde{\Gamma}_\infty : \tilde{\Gamma}'_\infty]} \sum_{\tilde{\gamma}\in\tilde{\Gamma}'_\infty\backslash\tilde{\Gamma}} \overline{\tilde{\chi}(\tilde{\gamma})} r(\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}_i VP)^{1+s} \\
&= \frac{1}{[\Gamma_{\eta_j} : \Gamma'_{\eta_j}]} \sum_{\gamma\in\Gamma'_{\eta_j}\backslash\Gamma} \overline{\chi(\gamma)} r(\alpha_j^{-1}\gamma(\alpha_i VP))^{1+s} \\
&= E_j(\alpha_i VP,s),
\end{aligned}$$

so dass man für $1 \le i \le p$ erhält:

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_{\infty i}(r,s) &= \text{nullter Term von } \tfrac{1}{[\tilde{\Gamma}_\infty:\tilde{\Gamma}'_\infty]}\tilde{E}_\infty(\tilde{\alpha}_i VP,s) \\
&= \text{nullter Term von } E_j(\alpha_i VP,s) \\
&= e_{ji}(r,s).
\end{aligned}$$

Damit ist die Rankin-Selberg-Transformierte für die singuläre Spitze η_j von Γ für $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}R_j(F,s) =& R_\infty(f,s)\\ =& \sum_{i=1}^{p} \sum_{\lambda \in V_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{F(\alpha_i VP)} \big(E_j(\alpha_i VP, s) - e_{ji}(r,s)\big) d\nu(P)\\ &+ \sum_{i=p+1}^{h} \sum_{V \in \mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{F(\alpha_i VP)} E_j(\alpha_i VP, s) d\nu(P)\\ &+ \sum_{i=1}^{p} \sum_{V \in \mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{(F(\alpha_i VP) - \psi_i(r))} e_{ji}(r,s) d\nu(P)\\ &+ \sum_{i=1}^{p} \sum_{V \in \mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{\psi_i(r)} \phi_{ji}(s) r^{1-s} d\nu(P)\\ &- \int_{\tilde{\mathcal{D}}_j} \overline{\psi_j(r)} r^{1+s} d\nu(P)\end{aligned} \tag{7.2.8}$$

mit $\tilde{\mathcal{D}}_j$ wie auf S. 109. Diese Gleichung wird mit

$$\begin{aligned}\vec{R}(F,s) &:= \big(R_1(F,s), ..., R_p(F,s)\big)^t =: \big(R_j(F,s)\big)_{p\times 1},\\ \vec{I}_F(s) &:= \left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{V \in \mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{F(\alpha_i VP)} \big(E_j(\alpha_i VP, s) - e_{ji}(r,s)\big) d\nu(P)\right)_{p\times 1},\\ \vec{I}_{F,E}(s) &:= \left(\sum_{i=p+1}^{h} \sum_{V \in \mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{F(\alpha_i VP)} E_j(\alpha_i VP, s) d\nu(P)\right)_{p\times 1},\\ \vec{I}_{F,\psi}(s) &:= \left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{V \in \mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{(F(\alpha_i VP) - \psi_i(r))} e_{ji}(r,s) d\nu(P)\right)_{p\times 1},\\ \vec{I}_\psi(s) &:= \left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{V \in \mathcal{V}_i} \int_{V\mathcal{D}} \overline{\psi_i(r)} \phi_{ji}(s) r^{1-s} d\nu(P)\right.\\ &\qquad\qquad \left. - \int_{\tilde{\mathcal{D}}_j} \overline{\psi_j(r)} r^{1+s} d\nu(P)\right)_{p\times 1},\\ \vec{e_i}(r,s) &:= (e_{ji}(r,s))_{p\times 1}\end{aligned}$$

in die Vektorform

$$\vec{R}(F,s) = \vec{I}_F(s) + \vec{I}_{F,E}(s) + \vec{I}_{F,\psi}(s) + \vec{I}_\psi(s) \tag{7.2.9}$$

umgewandelt, um die meromorphe Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung von $\vec{R}(F,s)$ zu zeigen.

Die Integrale $\vec{I}_F(s), \vec{I}_{F,E}(s)$ und $\vec{I}_{F,\psi}(s)$ konvergieren (wie bereits gezeigt) komponentenweise absolut für alle $s \in \mathbb{C}$, die keine Pole von $E_1(P,\cdot)$ sind. Sie stellen also in ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktionen von s dar. Um die Funktionalgleichung für $\vec{R}(F,s)$ zu zeigen, genügt es, dies für jeden Summanden in (7.2.9) zu tun. Wegen

$$\vec{e_i}(r,s) = (e_{ji}(r,s))_{p\times 1} = \left(r^{1+s}E_p + \Phi(s)r^{1-s}\right)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \longleftarrow \text{ i-te Zeile}$$

erhält man mit der Funktionalgleichung (7.1.5) für $\Phi(s)$:

$$\begin{aligned}\Phi(s)\vec{e_i}(r,-s) &= \Phi(s)\left(r^{1-s}E_p + \Phi(-s)r^{1+s}\right)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \left(\Phi(s)r^{1-s} + r^{1+s}E_p\right)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\\ &= \vec{e_i}(r,s).\end{aligned}$$

Damit hat jeder Term in der Summe für $\vec{I}_{F,\psi}(s)$ die gesuchte Funktionalgleichung. Nach (7.1.5) ist

$$\mathcal{E}(P,-s) = \Phi(-s)\mathcal{E}(P,s),$$

so dass die Funktionen $\vec{I}_{F,E}(s)$ und $\vec{I}_F(s)$ ebenfalls die gesuchte Funktionalgleichung erfüllen. Zu zeigen bleiben also die meromorphe Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung für den Term $\vec{I}_\psi(s)$. Sei

$$\vec{I}_\psi(s) := \sum_{i=1}^{p} \vec{I}_{\psi_i}(s),$$

wobei

$$\begin{aligned}\vec{I}_{\psi_i}(s) := \sum_{V\in\mathcal{V}_i}\int_{V\mathcal{D}} \overline{\psi_i(r)} \begin{pmatrix}\phi_{1i}(s)\\ \vdots \\ \phi_{pi}(s)\end{pmatrix} \cdot r^{1-s} d\nu(P) \\ - \int_{\tilde{\mathcal{D}}_i} \overline{\psi_i(r)} \begin{pmatrix}\vdots\\ \delta_{ji} \\ \vdots\end{pmatrix}_{p\times 1} \cdot r^{1+s} d\nu(P)\end{aligned} \tag{7.2.10}$$

gesetzt wird. $\vec{I}_{\psi_i}(s)$ konvergiert (komponentenweise) absolut für $\mathrm{Re}(s) \gg 0$. Das Integral

$$\begin{aligned}- \int_{\tilde{\mathcal{D}}_i} \overline{\psi_i(r)} \begin{pmatrix}\phi_{1i}(s)\\ \vdots \\ \phi_{pi}(s)\end{pmatrix} \cdot r^{1-s} d\nu(P) \\ + \sum_{V\in\mathcal{V}_i}\int_{V\mathcal{D}} \overline{\psi_i(r)} \begin{pmatrix}\vdots\\ \delta_{ji} \\ \vdots\end{pmatrix}_{p\times 1} \cdot r^{1+s} d\nu(P)\end{aligned} \tag{7.2.11}$$

konvergiert offensichtlich für $\mathrm{Re}(s) \ll 0$. Nach Lemma 7.2.5 stimmt die meromorphe Fortsetzung von (7.2.10) für ψ_i von der Gestalt (7.2.3) mit derjenigen von (7.2.11) überein, so dass sich mit

$$\Phi(s)\begin{pmatrix}\phi_{1i}(-s)\\ \vdots \\ \phi_{pi}(-s)\end{pmatrix}_{p\times 1} = \Phi(s)\Phi(-s)\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} = E_p \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vdots\\ \delta_{ji} \\ \vdots\end{pmatrix}_{p\times 1}$$

für jedes i ergibt:

$$\Phi(s)\vec{I}_{\psi_i}(-s) = \vec{I}_{\psi_i}(s).$$

Damit folgen die meromorphe Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung für $\vec{I}_{\psi}(s)$, und die meromorphe Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung von $\vec{R}(F,s)$ sind bewiesen.

Als mögliche Polstellen von $\vec{R}(F,s)$ hat man die Pole $s = \overline{d_{ij}} - 1$ und $s = 1 - \overline{d_{ij}}$ der Komponenten von $\vec{I}_{\psi}(s)$, wie mit Lemma 7.2.5 aus der letzten Zeile von (7.2.8) folgt. Ihre Ordnung ist abhängig von n_{ij}. Weitere mögliche Polstellen sind die Polstellen von $\phi_{ij}(s)$, und nach Lemma 7.1.8 besitzt $\phi_{ij}(s)$ im Bereich $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$ höchstens endlich viele einfache Polstellen im Intervall $]0,1]$ auf der reellen Achse. $\square$

7.2.7 Lemma *Sei η_j eine singuläre Spitze von Γ. $\mathcal{D} = \mathcal{D}_K$ sei der in Korollar* 7.2.3 *beschriebene Fordsche Fundamentalbereich von* $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ *in* $\mathbb{H}^3$ *und $\tilde{\mathcal{D}}_j := (\alpha_j^{-1}\Gamma_{\eta_j}\alpha_j)\backslash\mathbb{H}^3 - \bigcup_{V\in\mathcal{V}_j} V\mathcal{D}$ der gestutzte Integrationsbereich für $R_j(F,s)$ (vgl. S.* 109*). $\psi(r) = \frac{1}{n!}r^d\log^n(r)$ $(n \in \mathbb{N}_0, d \in \mathbb{C})$ sei eine Funktion des Typs* (7.2.3)*. Dann stimmen die meromorphen Fortsetzungen von*

$$\sum_{V\in\mathcal{V}_j}\int_{V\mathcal{D}}\overline{\psi(r)}r^{1\pm s}d\nu(P) \quad \text{und} \quad -\int_{\tilde{\mathcal{D}}_j}\overline{\psi(r)}r^{1\pm s}d\nu(P)$$

überein. Polstellen liegen in $s = d-1$ und $s = 1-d$. Ihre Ordnung ist abhängig von n.

Beweis: Zunächst wird gezeigt, dass die Mellin-Transformierte einer Funktion ψ der Gestalt $\psi(r) = \frac{1}{n!}r^d\log^n(r)$ wie in (7.2.3) identisch in dem Sinn verschwindet, dass die Integrale $\int_0^T \psi(r)r^{1-s}\frac{dr}{r^3}$ und $\int_T^\infty \psi(r)r^{1-s}\frac{dr}{r^3}$, die jeweils in einer Halbebene $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) \ll 0\}$ bzw. $\{s\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) \gg 0\}$ konvergieren, meromorphe Fortsetzungen auf die gesamte komplexe Ebene besitzen, deren Summe identisch 0 ist. Für $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ gilt:

$$\int_0^T \psi(r)r^{1-s}\frac{dr}{r^3} = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m}}{m!}\frac{T^{d-s-1}(\log T)^m}{(d-s-1)^{n-m+1}}. \tag{7.2.12}$$

Ist $\mathrm{Re}(s) \ll 0$, so erhält man analog:

$$\int_T^\infty \psi(r)r^{1-s}\frac{dr}{r^3} = -\sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m}}{m!}\frac{T^{d-s-1}(\log T)^m}{(d-s-1)^{n-m+1}}. \tag{7.2.13}$$

Die rechte Seite von (7.2.12) bzw. (7.2.13) definiert eine meromorphe Fortsetzung des zugehörigen Integrals auf die ganze komplexe Ebene, wobei $s = d-1$ eine Polstelle ist. Die Summe der meromorphen Fortsetzungen von $\int_0^T \psi(r)r^{1-s}\frac{dr}{r^3}$ und $\int_T^\infty \psi(r)r^{1-s}\frac{dr}{r^3}$ ist also identisch 0.

Eine analoge Aussage gilt für die Integrale $\int_0^T \psi(r)r^{1+s}\frac{dr}{r^3}$ und $\int_T^\infty \psi(r)r^{1+s}\frac{dr}{r^3}$. Man ersetze in den obigen Formeln $s \mapsto -s$. In diesem Fall liegt eine Polstelle in $s = 1-d$. Für $\overline{\psi}$ an Stelle von ψ ist offensichtlich d durch $\overline{d}$ zu ersetzen. Damit ist die obige Hilfsaussage bewiesen. Diese wird nun benutzt, um die allgemeine Aussage des Lemmas zu zeigen:

Seien $\mathcal{D} = \mathcal{D}_K$ der in Korollar 7.2.3 beschriebene Fordsche Fundamentalbereich von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ in $\mathbb{H}^3$ und η_j eine singuläre Spitze von Γ. Dann gilt für $\mathrm{Re}(s) \gg 0$:

$$\sum_{V\in\mathcal{V}_j}\int_{V\mathcal{D}_K}\overline{\psi(r)}r^{1-s}d\nu(P) = \sum_{V\in\mathcal{V}_j}\int_{VF_K}\Big(\int_{T(z)}^\infty \overline{\psi(r)}r^{1-s}\frac{dr}{r^3}\Big)dz,$$

wobei $z+T(z)j$ $(T(z)>0)$ den niedrigsten Punkt von $V\mathcal{D}_K$ mit „komplexer Koordinate“ $z \in F_K$ angibt. Für $D=-1,-3$ ist $T(z)=\sqrt{1-|z|^2}$ (vgl. ([10], S. 324f.)). Ist $\mathrm{Re}(s)$ hinreichend klein, so gilt nach Definition von $\tilde{\mathcal{D}}_j$ entsprechend:

$$\int_{\tilde{\mathcal{D}}_j} \overline{\psi(r)} r^{1-s} d\nu(P) = \sum_{V \in \mathcal{V}_j} \int_{VF_K} \Big(\int_0^{T(z)} \overline{\psi(r)} r^{1-s} \frac{dr}{r^3} \Big) dz.$$

Nach der zu Beginn des Beweises für die r-Integrale durchgeführten Rechnung folgt damit, dass die meromorphen Fortsetzungen von $\bigcup_{V\in\mathcal{V}_j} \int_{V\mathcal{D}} \overline{\psi(r)} r^{1\pm s} d\nu(P)$ und $-\int_{\tilde{\mathcal{D}}_j} \overline{\psi(r)} r^{1\pm s} d\nu(P)$ übereinstimmen. $\square$

7.3 Die Rankin-Selberg-Transformierte der Thetafunktion

Wie in Abschnitt 7.2 ist für die Klassenzahl $h_K = 1$ vorausgesetzt. Im Folgenden wird die Kongruenzuntergruppe $\Gamma = T\Gamma_0(\delta_K q)T^{-1} = \Gamma_0\big(q\big) \cap \Gamma^0\big(\tau_D^{-1}\big) < \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ aus Abschnitt 2.1 betrachtet. Ferner seien $P, w, w_0 \in \mathbb{H}^3$. Theorem 7.2.6 wird nun angewendet auf die Thetafunktion

$$\theta(P,w,w_0) = r^2 \sum_{g \in \mathcal{O}^4} \exp\big\{\pi i\big(\sigma(\tau_D S[g]z) + 2ir|\tau_D| H_{ww_0}\{g\}\big)\big\}$$

mit der Majorante H_{ww_0} wie in (3.3.2), die wegen

$$\theta(P,w,w_0) = r^2 + O(e^{-c(w,w_0)r})$$

als Funktion von P nicht quadratintegrierbar ist. $\theta(P,w,w_0)$ ist nach Satz 3.3.10 schwach (Γ,χ)-automorph, wobei χ der Charakter auf Γ aus (2.1.3) ist. Für die nach Lemma 2.1.8 bezüglich χ singuläre Spitze $\eta_1 = \infty$ von Γ ist

$$\psi_\infty(r) = \psi_1(r) = r^2.$$

Damit ist $\psi_1(r)$ von der Form (7.2.3) mit $d_1 = 2, c_1 = n_1 = 0$.

$\eta_1 = \infty, \eta_2 = \alpha_2\infty, \ldots, \eta_h = \alpha_h\infty \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit $\alpha_i \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ sei ein Vertretersystem der Spitzenklassen von Γ, wobei die Spitzen $\eta_1, \ldots, \eta_p$ $(1 \le p \le h)$ singulär bezüglich χ seien. Für eine singuläre Spitze $\eta_j = \alpha_j\infty$ $(1 \le j \le p, \alpha_j = \big(\begin{smallmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{smallmatrix}\big) \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}), c_j \neq 0)$ von Γ gilt nach dem Siegelschen Transformationssatz 2.2.1:

$$\theta(\alpha_j P, w, w_0) = |\det(S)|^{-1}|c_j|^{-4} \sum_{\omega \in S^{-1}\mathcal{O}^4 \bmod \mathcal{O}^4} \lambda(S\omega, 0)\theta^\omega(P,w,w_0) \qquad (7.3.1)$$

mit der Gaußschen Summe

$$\lambda(\omega,\psi) := \sum_{g\in\mathcal{O}^4 \bmod c_j\mathcal{O}^4} e^{\pi i\sigma\left(\frac{a_j}{c_j}\tau_D S[g+\psi]\right)} e^{\pi i\sigma\left(\frac{d_j}{c_j}\tau_D S^{-1}[\omega]\right)} e^{2\pi i\sigma\left(\left(\frac{g+\psi}{c_j}\right)^t \tau_D\omega\right)}.$$

Den polynomial wachsenden Term von $\theta(\alpha_j P, w, w_0)$ erhält man für $g=-\omega$. Dieser Fall tritt nur in einem einzigen Summanden in (7.3.1) auf. Für diesen kann oBdA $\omega=0$ gewählt werden. Man erhält:

$$\psi_j(r) = r^2|\det(S)|^{-1}|c_j|^{-4}\cdot\lambda(0,0).$$

ψ_j ist somit von der Form (7.2.3). Für $s\in\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s)>1, P=z+jr\in\mathbb{H}^3$ und das zu Γ'_∞ gehörige Gitter $\Lambda_\infty=\tau_D^{-1}\mathcal{O}$ folgt:

$$\begin{aligned}
& R_1(\theta,s)\\
={}& \int_{\Gamma_\infty\backslash\mathbb{H}^3} \overline{(\theta(P,w,w_0)-\psi_1(r))}r^{1+s}d\nu(P)\\
={}& \frac{1}{[\Gamma_\infty:\Gamma'_\infty]}\int_0^\infty\int_{\mathbb{C}/(\tau_D^{-1}\mathcal{O})}\overline{(\theta(P,w,w_0)-r^2)}r^{1+s}dz\frac{dr}{r^3}\\
={}& \frac{1}{[\Gamma_\infty:\Gamma'_\infty]}\int_0^\infty r^{1+s}\int_{\mathbb{C}/(\tau_D^{-1}\mathcal{O})}\left(\sum_{\substack{g\in\mathcal{O}^4\\ g\neq 0}}\overline{e^{\pi i(\sigma(\tau_D S[g]z))}}e^{-2\pi|\tau_D|rH_{ww_0}\{g\}}dz\right)\frac{dr}{r^3},
\end{aligned}$$

und wegen

$$\int_{\mathbb{C}/(\tau_D^{-1}\mathcal{O})} e^{-\pi i(\sigma(\tau_D S[g]z))}dz = \begin{cases}\mathrm{vol}(\mathbb{C}/(\tau_D^{-1}\mathcal{O})) = \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2}, & \text{falls } S[g]=0\ (g\neq 0),\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

ergibt sich für $\mathrm{Re}(s)>1$ mit der Rechnung aus dem Beweis von Satz 3.1.6:

$$\begin{aligned}
R_1(\theta,s) &= \frac{1}{[\Gamma_\infty:\Gamma'_\infty]}\frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2}\frac{\Gamma(s+1)}{\left(2\pi|\tau_D|\right)^{s+1}}\sum_{\substack{0\neq g\in\mathcal{O}^4\\ S[g]=0}}(H_{ww_0}\{g\})^{-s-1}\\
&=: \frac{1}{[\Gamma_\infty:\Gamma'_\infty]}Z_0(w,w_0,s)
\end{aligned}$$

mit der Zetafunktion

$$Z_0(w,w_0,s) = \frac{\Gamma(s+1)}{\left(2\pi|\tau_D|\right)^{s+1}}\sum_{\substack{0\neq g\in\mathcal{O}^4\\ S[g]=0}}(H_{ww_0}\{g\})^{-s-1}.$$

Formal erhält man $Z_0(w,w_0,s)$ durch Einsetzen von $\mu=0$ in (3.3.5), wobei der Summand für $g=0$ auszuschließen ist.

7.3.1 Bemerkung Die Rankin-Selberg-Transformierte der Thetafunktion kann aufgefasst werden als mit einer „gestutzten“ Thetafunktion geliftete Eisensteinreihe. Nach den Betrachtungen aus Abschnitt 7.2 kann diese Rankin-Selberg-Transformierte auch als Summe von Termen aufgefasst werden, bei denen eine „gestutzte“ Eisensteinreihe integriert wird. $\Diamond$

Es gelten die Bezeichnungen aus Theorem 7.2.6. $\Gamma = T\Gamma_0(\delta_K q)T^{-1} = \Gamma_0(q) \cap \Gamma^0(\tau_D^{-1})$ sei die Kongruenzuntergruppe von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ aus Abschnitt 2.1, χ der Charakter aus (2.1.3) auf Γ. $\alpha_1, ..., \alpha_h \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ seien so gewählt, dass $\eta_1 = \infty, \eta_2 = \alpha_2\infty, ..., \eta_h = \alpha_h\infty \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ ein Vertretersystem der Spitzenklassen von Γ ist, wobei die Spitzen $\eta_1, ..., \eta_p$ $(1 \le p \le h)$ singulär bezüglich χ seien. $\mathcal{D}$ sei der Fordsche Fundamentalbereich von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ in $\mathbb{H}^3$, und $\mathcal{V}_i$ bezeichne ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von $(\alpha_i^{-1}\Gamma\alpha_i)_\infty$ in $(\alpha_i^{-1}\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})\alpha_i)_\infty$. Ferner sei $\tilde{\mathcal{D}} = \Gamma_\infty\backslash\mathbb{H}^3 - \bigcup_{V\in\mathcal{V}_1} V\mathcal{D}$ der gestutzte Integrationsbereich der Rankin-Selberg-Transformierten (vgl. S. 104).

7.3.2 Korollar *Mit den obigen Bezeichnungen gilt für* $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$
\begin{aligned}
& Z_0(w, w_0, s) \\
= \; & \frac{|D_K|^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{\Gamma(s+1)}{\left(2\pi|\tau_D|\right)^{s+1}} \sum_{\substack{0\neq g\in\mathcal{O}^4 \\ S[g]=0}} \left(H_{ww_0}\{g\}\right)^{-s-1} \\
= \; & \int_{\Gamma'_\infty\backslash\mathbb{H}^3} \overline{(\theta(P, w, w_0) - \psi_1(r))} r^{1+s} d\nu(P) \\
= \; & [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty] \sum_{i=1}^{p} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{D}} \overline{\theta(\alpha_i VP, w, w_0)} \big(E_1(\alpha_i VP, s) - e_{1i}(r, s)\big) d\nu(P) \\
+ \; & [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty] \sum_{i=p+1}^{h} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \int_{V\mathcal{D}} \overline{\theta(\alpha_i P, w, w_0)} E_1(\alpha_i P, s) d\nu(P) \\
+ \; & [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty] \sum_{i=1}^{h} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \int_{V\mathcal{D}} \overline{(\theta(\alpha_i P, w, w_0) - \psi_i(r))} e_{1i}(r, s) d\nu(P) \\
+ \; & [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty] \Big(\sum_{i=1}^{h} \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \int_{V\mathcal{D}} \overline{\psi_i(r)} \phi_{1i}(s) r^{1-s} d\nu(P) - \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \overline{\psi_1(r)} r^{1+s} d\nu(P) \Big),
\end{aligned}
$$

und die rechte Seite der obigen Gleichung definiert nach Satz 7.2.6 *eine* meromorphe Fortsetzung *der Zetafunktion* $Z_0(w, w_0, s)$ *auf die ganze komplexe Ebene mit einfachen Polen in* $s = 1$ *und* $s = -1$. *Weitere Pole können nur noch in den Polen der Eisensteinreihen liegen. Im Bereich*

$\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$ *gibt es höchstens endlich viele einfache Polstellen im Intervall* $]0,1]$ *auf der reellen Achse.*

In Abschnitt 4.3 wurde das asymptotische Verhalten der Zetafunktion $Z_{\tilde{\mu}}(w, w_0, s)$ $(\tilde{\mu} \neq 0)$ an der Konvergenzabszisse $s = 1$ bestimmt. Der folgende Satz beinhaltet das Satz 4.4.4 entsprechende Ergebnis für $Z_0(w, w_0, s)$.

7.3.3 Satz *Seien* $w, w_0 \in \mathbb{H}^3$ *und* $T \geq 1$. *Dann gilt:*

$$\sum_{\substack{0 \neq g \in \mathcal{O}^4, S[g]=0 \\ H_{ww_0}\{g\} \leq T}} (H_{ww_0}\{g\})^{-2} \quad \sim \quad \mathrm{Res}(Z_0(w, w_0, s); s = 1) \cdot \log T \quad \textit{für } T \to \infty.$$

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 4.4.5. $\square$

Symbolverzeichnis

$A(g,h)$	darstellende Matrix von $\phi(g,h)$, S. 41
$\{A_j, j \in J\}$	vollständiges Vertretersystem, S. 66
B_∞	Borel-Gruppe, S. 11
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen
C_Γ	Menge der Spitzen von Γ, S. 16
$d\nu$	hyperbolisches Volumenelement, S. 9
ds^2	hyperbolische Metrik, S. 9
$d(P,Q)$	hyperbolischer Abstand von P und Q, S. 12
D	quadratfreie negative ganze Zahl, S. 13
D_K	Diskriminante von K, S. 13
$\mathcal{D}_{>0}, \mathcal{D}$	Indexmengen, S. 72
$\mathcal{D}_K$	Fordscher Fundamentalbereich von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ in $\mathbb{H}^3$, S. 102
δ_K	Differente des Zahlkörpers K, S. 15
$\delta(P,Q)$	$\cosh d(P,Q)$, S. 12
$\delta_{\eta,\zeta}$	Kronecker-Symbol, S. 98
Δ	hyperbolischer Laplace-Beltrami-Operator, S. 9
$e_m(P)$	Eigenfunktion von $-\Delta$, S. 72
$e_m^\theta(w)$	Thetalift von $e_m(P)$, S. 87
$E_A(P,s)$	Eisensteinreihe, S. 96
$E_j(P,s)$	Eisensteinreihe, S. 99
E_n	$(n \times n)$-Einheitsmatrix
$\mathcal{E}(P,s)$	S. 100
η_j	S. 66
$f^\theta(P)$	Thetalift von f, S. 79

$f \asymp g$	$\exists\, m, M,\ 0 < m < M$ mit $m\lvert g\rvert \leq \lvert f\rvert \leq M\lvert g\rvert$, S. 82
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$	allgemeine lineare Gruppe (über $\mathbb{C}$)
Γ	Untergruppe von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$; speziell S. 24
Γ_P	Stabilisator von P in Γ, S. 16
Γ'_P	maximale unipotente Untergruppe von Γ_P, S. 16
Γ^*	Kongruenzuntergruppe bzgl. $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$, S. 61
$\Gamma^{(2)}$	Kongruenzuntergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$, S. 92
$\Gamma(A)$	Hauptkongruenzgruppe von Γ der Stufe A, S. 17
$\Gamma_0(A), \Gamma^0(A)$	Kongruenzuntergruppen von Γ, S. 17
$\Gamma_0(I^2\delta_K q)$	S. 22
h	h_K, Klassenzahl von K, S. 14
$\mathbb{H}^3$	oberer Halbraum, S. 9
$\mathcal{H}$	Hamiltonsche Quaternionen, S. 9
H	Majorante von S, S. 22
$H\{g\}$	$\overline{g}^t H g$, S. 22
H_{ww_0}	Majorante von S, S. 50
$\tilde{H}(P, Q, s)$	Poincaré-Reihe bezüglich δ, S. 67
I	Ideal in $\mathcal{O}$, S. 22
I_K	Idealklassengruppe von K, S. 14
$\mathrm{Iso}^+(\mathbb{H}^3)$	orientierungstreue Isometrien für die hyperbolische Metrik, S. 10
J	S. 66
K	$\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, imaginär-quadratischer Zahlkörper, S. 13
K^*	multiplikative Gruppe von K, S. 14
K_s	modifizierte Besselfunktion, S. 80
$L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3)$	quadratintegrierbare Γ-automorphe Funktionen
$L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3, \chi)$	quadratintegrierbare (Γ, χ)-automorphe Funktionen
λ, λ_m	Eigenwerte von $-\Delta$, S. 72
$\lambda(w, \psi)$	Gaußsche Summe, S. 27
Λ	Gitter in $\mathbb{C}$, S. 14
$\Lambda^\#$	duales Gitter zu Λ, S. 14
$\mathrm{M}_n(\mathcal{O})$	Ring der $(n \times n)$-Matrizen über $\mathcal{O}$
$\mathrm{M}_C(\mathcal{O})$	Untermodul von $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})$, S. 56
$\mathrm{M}_C(\mathcal{O})_\mu$	$\{M \in \mathrm{M}_C(\mathcal{O}) \mid \det(M) = \mu\}$, S. 60
$\mathrm{M}_2^{(2)}(\mathbb{Z}[i])$	Unterring von $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}[i])$, S. 91
$\mathcal{M}$	Gruppe der gebrochenen Ideale, S. 14

μ	$\in \mathcal{O}$, S. 37
$\tilde{\mu}$	$\in \Lambda_\infty^\# = (\tau_D^{-1}\mathcal{O})^\#$, S. 35
μ_D	Minimalpolynom von ω_D, S. 15
μ_m	$\sqrt{1-\lambda_m}$, S. 72
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen ≥ 1
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathcal{N}$	Norm, S. 10
$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}_K$, Ring der über $\mathbb{Z}$ ganzen Zahlen in K, S. 13
ω_D	S. 13
Ω_0, Ω	$\mathcal{O}$-Modul-Isomorphismen, S. 56
$\mathbb{P}^1\mathbb{C}$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, Riemannsche Sphäre, S. 15
$\mathrm{P}\Gamma(A)$	$\Gamma(A)/\{\pm E_2\}$, S. 17
$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$	$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\{\pm E_2\}$, S. 11
$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$	$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm E_2\}$, S. 10
$\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$	$\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})/\{\pm E_2\}$, S. 16
$P_{\tilde{\mu}}(P,s)$	Poincaré-Reihe, S. 36
P_w	S. 50
$\mathcal{P}(S)$	Majorantenraum von S, S. 46
$\tilde{\pi}(P,Q,x)$	Anzahl von Gitterpunkten, S. 68
$\phi(g,h)$	Gruppenhomomorphismus, S. 41
$\phi_C(g,h)$	Gruppenhomomorphismus, S. 45
$\phi_{ij}(s)$	Dirichlet-Reihe, S. 99
$\Phi(s)$	Streumatrix, S. 100
ψ	$\in S^{-1}\mathcal{O}^m$, S. 26
ψ_{η_i}	S. 103
q	Stufe von S, S. 21
$\rho_m(\tilde{\mu})$	$\tilde{\mu}$-ter Fourierkoeffizient von $e_m^\theta(w)$, S. 84
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathrm{Re}(s) \gg 0$	$\mathrm{Re}(s)$ hinreichend groß
$\mathrm{Re}(s) \ll 0$	$\mathrm{Re}(s)$ hinreichend klein
S	gerade invertierbare $(n \times n)$-Matrix über $\mathcal{O}$, S. 21; speziell S. 51
$S[g]$	g^tSg, S. 22
$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$	spezielle lineare Gruppe über $\mathbb{C}$, S. 10
$\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$	$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \cap \mathrm{M}_2(\mathcal{O})$, S. 16
σ	Spur, S. 14
S_0	S. 40

$\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}), \mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$	spezielle orthogonale Gruppe über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, S. 48
$\mathrm{SO}(S_0,\mathbb{C})$	spezielle orthogonale Gruppe von S_0, S. 41
$\mathrm{SO}(S_0,\mathcal{O})$	$\mathrm{SO}(S_0,\mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}_4(\mathcal{O})$, S. 59
$\mathrm{SU}(n)$	spezielle unitäre Gruppe
T	Transformationsmatrix, S. 24
τ_D	S. 15
$\Theta_{S,H}(P)$	Thetafunktion auf dem oberen Halbraum, S. 22
$\theta_{S,H}(P)$	$r^2\Theta_{S,H}(T^{-1}P)$, S. 24
$\theta(P,w,w_0)$	$\theta_{S,H_{ww_0}}(P)$, Thetafunktion auf $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3$, S. 51
$\theta^{\psi}_{S,H}(P)$	Thetafunktion zur Charakteristik ψ, S. 26
χ	Charakter auf Γ; speziell S. 24
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Z}[i]$	Ring der ganzen Gaußschen Zahlen
$Z_{S,H,\tilde{\mu}}(s)$	Zetafunktion, S. 36
$Z_{\tilde{\mu}}(w,w_0,s)$	$Z_{S,H_{ww_0},\tilde{\mu}}(s)$, Zetafunktion, S. 54
$Z_0(w,w_0,s)$	Zetafunktion, S. 116

Literaturverzeichnis

[1] Bauer, W. (1996): Der Thetalift reell-analytischer Eisenstein- und Poincaré-Reihen. Mathematica Gottingensis, Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen, Heft **4**

[2] Blex, C. (2003): Eine explizite Version der Jacquet-Langlands-Korrespondenz für den Fall des dreidimensionalen hyperbolischen Raums. Dissertation, Münster

[3] Blex, C. (2001): Konstruktion von Maaß-Formen zu Hecke-Gruppen mit Hilfe von Maaß-Formen zu Quaternionengruppen, Teil II. Diplomarbeit, Münster

[4] Beardon, A.F. (1977): The geometry of discrete groups. In: Discrete groups and automorphic functions. Proc. Conf. Univ. Cambridge 1975, ed. by W.J. Harvey, 47-72. Academic Press, London−New York−San Francisco

[5] Borel, A. (1969): Introduction aux groupes arithmétiques. Hermann, Paris

[6] Deuring, M. (1968): Algebren. Zweite Auflage. Springer-Verlag, Berlin−Heidelberg−New York

[7] Dickhut, B. (2001): Konstruktion von Maaß-Formen zu Hecke-Gruppen mit Hilfe von Maaß-Formen zu Quaternionengruppen, Teil I. Diplomarbeit, Münster

[8] Eichstädt, A. (2001): Automorphe Funktionen auf dem dreidimensionalen hyperbolischen Raum und Klassenzahlen biquadratischer Zahlkörper. Preprintreihe SFB 478-Geometrische Strukturen in der Mathematik, Heft **182**

[9] Elstrodt, J. (1996): Maß- und Integrationstheorie. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York

[10] Elstrodt, J., Grunewald, F., Mennicke, J. (2001): Groups acting on hyperbolic space. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York

[11] Elstrodt, J., Grunewald, F., Mennicke, J. (1985): Eisenstein series on three-dimensional hyperbolic space and imaginary quadratic number fields. J. Reine Angew. Math. **360**, 160-213

[12] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F. (1953): Higher transcendental functions, Vol. II. Bateman Manuscript Project, McGraw-Hill, New York–Toronto–London

[13] Freitag, E. (1983): Siegelsche Modulfunktionen. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York

[14] Fueter, R. (1927): Über automorphe Formen in Bezug auf Gruppen, die in der Ebene uneigentlich diskontinuierlich sind. J. Reine Angew. Math. **157**, 66-78

[15] Grunewald, F., Platonov, V. (1999): Rigidity results for groups with radical, cohomology of finite groups and arithmeticity problems. Duke Math. Journal **100**, 321-358

[16] Gupta, S.D. (2000): The Rankin-Selberg method on congruence subgroups. Illinois J. Math., Vol. **44**, 95-103 und 924-925 (Corrigendum)

[17] Gupta, S.D., She, X. (1998): The GL(2) Rankin-Selberg method for functions not of rapid decay. Journal of Number Theory **71**, 159-165

[18] Hardy, G.H., Littlewood, J.E. (1914): Tauberian Theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive. Proc. London Math. Soc. (2) **13**, 174-191

[19] Helgason, S. (1962): Differential geometry and symmetric spaces. Academic Press, New York–London

[20] Heitkamp, D. (1992): Hecke-Theorie zur $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$. Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, **3**. Ser., Heft 5

[21] Hetrodt, G. (1996): Über einen Zusammenhang zwischen der Spektraltheorie automorpher Funktionen auf dem oberen Halbraum und den Klassenzahlen biquadratischer Körper. Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, **3.** Ser., Heft 17, 1-80

[22] Huber, H. (1956): Über eine neue Klasse automorpher Funktionen und ein Gitterpunktproblem in der hyperbolischen Ebene I. Comment. Math. Helv. **30**, 20-62

[23] Huber, H. (1959): Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen I. Math. Ann. **138**, 1-26

[24] Huber, H. (1961): Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen II. Math. Ann. **142**, 385-398 Nachtrag: Math. Ann. **142**, 463-364

[25] Katok, S., Sarnak, P. (1983): Heegner points, cycles and Maass forms. Israel Journal of mathematics **84**, 193-227

[26] Karamata, J. (1931): Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberschen Sätze. Math. Z. **33**, 294-299

[27] Karamata, J. (1931): Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen. J. Reine Angew. Math. **164**, 27-39

[28] Lang, S. (1968): Algebraic Number Theory. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg–London–Paris–Tokyo

[29] Magnus, W., Oberhettinger, F., Soni, R.P. (1966): Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics. Third edition. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York

[30] Matthes, R. (1999): On some Poincaré-series on hyperbolic space. Forum Math. **11**, 483-502

[31] Matthes, R. (1998): Shimura lift of real analytic Poincaré series and Hilbert modular Eisenstein series. Math. Z. **229**, 547-574

[32] Neukirch, J. (1992): Algebraische Zahlentheorie. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg

[33] Platonov, V., Rapinchuk, A. (1994): Algebraic groups and number theory. Academic Press, Boston–San Diego– New York

[34] Richter, O.K. (1999): Theta functions of quadratic forms. PhD thesis, San Diego, CA

[35] Richter, O.K. (2000): Theta functions of quadratic forms over imaginary quadratic fields. Acta Arith. **92**, 1-9

[36] Roelcke, W. (1966): Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene, I. Math. Ann. **167**, 292-337

[37] Roelcke, W. (1967): Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene, II. Math. Ann. **168**, 261-324

[38] Siegel, C.L. (1944): On the theory of indefinite quadratic forms. Ann. Math. **45**, 577-622.

[39] Siegel, C.L. (1957): Lectures on quadratic forms. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay

[40] Siegel, C.L. (1952): Indefinite Formen und Funktionentheorie II. Math. Ann. **124**, 364-387

[41] Steinitz, E. (1912): Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern. I. Math. Ann. **71**, 328-354

[42] Zagier, D. (1983): The Rankin-Selberg method for automorphic forms which are not of rapid decay. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Section 1A Mathematics **28**, 415-437

Lebenslauf

Name:	Barbara Dickhut
Geburtsdatum:	24. Dezember 1976
Geburtsort:	Lippstadt
Familienstand:	ledig
Eltern:	Maria Anna Dickhut, geb. Meyer Franz-Josef Dickhut
Geschwister:	Clarissa Dickhut
Schulbildung:	Grundschule Oestereiden von 1983 bis 1987 Friedrich-Spee-Gymnasium Rüthen von 1987 bis 1996
Hochschulreife:	21. Juni 1996 Friedrich-Spee-Gymnasium Rüthen
Studium:	ab WS 1996/97 Lehramtsstudiengang Mathematik und Physik für die Sekundarstufen II und I an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
	ab WS 1997/98 Diplomstudiengang Mathematik mit Nebenfach Physik an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
	WS 1998/99-WS 2000/01 Diplomstudiengang Physik mit Nebenfach Mathematik an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
	ab SS 2001 Lehramtsstudiengang Chemie für die Sekundarstufe I an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Prüfungen:	Vordiplom in Mathematik am 9. November 1998, Vordiplom in Physik am 9. November 1998 an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
	Diplom in Mathematik am 6. Dezember 2001 an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
	Erste Staatsprüfung für die Sekundarstufen II und I in Mathematik und Physik am 22. April 2003
Tätigkeiten:	Studentische Hilfskraft am Mathematischen Institut der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster von Juli 1999 bis Dezember 2001
	Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster von Februar 2002 bis September 2002
	Stipendiatin im Graduiertenkolleg Analytische Topologie und Metageometrie von Januar 2002 bis September 2002 am Mathematischen Institut der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
	seit Oktober 2002 wissenschaftliche Mitarbeiterin am Mathematischen Institut der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
Beginn der Dissertation:	Januar 2002 am Mathematischen Institut der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster bei Prof. Dr. J. Elstrodt