Pfingsttagung 2002

Workshop 102

Dr. Hubert Langlotz, Dr. Wilfried Zappe

Klausur- und Abituraufgaben mit dem TI-89/92 Plus

erstmalig veröffentlich in:
Bärbel Barzel, Detlef Berntzen, Victor Manuel David Sendas: Neues Lernen. Neue Medien. Viele Projekte im Land. Tagungsdokumentation. Westfälische Wilhelms-Universität Münster. 21.-24. Mai 2002. Münster 2003 (=ZKL-Texte Nr. 25), ISBN 3-934064-30-2

Hubert Langlotz, Wilfried Zappe
Klausur- und Abituraufgaben mit dem TI 89/92+
Vorstellung eines Konzepts zur Entwicklung von Klausur- und Abituraufgaben unter Bedingungen des Zentralabiturs. Die TeilnehmerInnen können sich an der Umarbeitung traditioneller bzw. der Entwicklung neuer, "CAS-gerechter" Klausuraufgaben versuchen.

„Es ist nicht gesagt, dass es besser wird, wenn es anders wird, wenn es aber besser werden soll, muss es anders werden."
G. C. Lichtenberg

In Thüringen wird seit ca. zwei Jahren der Einsatz von CAS-Taschencomputern (TI-89) im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht der gymnasialen Oberstufe (Klassen 10 bis 12) an acht Gymnasien erprobt. Weil das Land Thüringen Zentralabitur vorschreibt, müssen sich in den Erprobungsschulen die Unterrichtsinhalte – vor allem aber die Aufgabenstellungen in Klausuren und Abitur – recht eng an den bisherigen tradierten Inhalten orientieren. Die Verfahrensweise für das Mathematikabitur ist z.Z. so, dass zunächst die Aufgabenstellungen für die Kurse ohne TI-89 erstellt werden und dann auf dieser Basis die Abituraufgaben für die Kurse mit TI-89 entwickelt („umgestrickt") werden. Dabei ist immer darauf zu achten, dass die Aufgabenstellungen gleichwertig bleiben. Im Grunde geht es bei dieser Vorgehensweise immer darum, wie man die durch Verkürzung von Rechenarbeit entstehenden Lücken an Bewertungseinheiten kompensiert. Die Kompensierung soll also einerseits Gleichwertigkeit herstellen, andererseits aber nach Möglichkeit auch die Aufgabe so ändern, dass Elemente einer neuen Aufgabenkultur einfließen können.
(Vgl. TIMSS: „Im Mathematikunterricht in Deutschland wird generell zu viel Wert gelegt auf das routinemäßige, manchmal gar schematische Lösen innermathematischer Standardaufgaben. Zu kurz kommen insbesondere das selbständige, aktive Problemlösen, das inhaltliche, nicht-standardisierte Argumentieren sowie das Herstellen von Verbindungen mathematischer Begriffe mit Situationen aus Alltag und Umwelt.")

Aber nicht nur für unsere spezifischen thüringischen Verhältnisse hat dieses Vorgehen Bedeutung.
BÖHM schreibt in „Auf den richtigen Dreh kommt es an!":
„Eine der am häufigsten gestellten Fragen nach Workshops oder Vorträgen über den Einsatz von Technologien im Mathematikunterricht ...ist die, wie man nun Aufgaben und Probleme für Übungen und Prüfungen findet. Viele erfahrene Lehrer haben eine große Sammlung von Aufgaben und man kann nur zu gut verstehen, dass sie ihre „Schätze" nicht gerne wegwerfen und wieder wie zu Beginn ihrer Lehrerlaufbahn ganz von vorne anfangen wollen.... Meine Standardantwort ist:" Du musst ja nicht alles ändern. Nimm Deine Beispielsammlung und versuche, einen anderen Blickwinkel zu erreichen. Es wird in vielen Fällen möglich sein, der Aufgabe einen \`Dreh\` in die richtige Richtung zu versetzen, und sie wird eine neue Qualität erhalten, sich auf ein anderes Ziel konzentrieren, neue Sichtweisen eröffnen oder einfach ein wenig anders lauten."
Die CAS-Arbeitsgruppe beim Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien (ThILLM) geht bei der Entwicklung von Klausur- und Abituraufgaben von folgenden Überlegungen aus:

- Komplizierte und aufwändige Rechenoperationen entfallen in vielen Fällen, daher kann die Erfolgssicherheit beim Lösen von Aufgaben auch bei leistungsschwächeren

Schülern steigen. Mit dem nunmehr reduzierten Aufwand für bisher übliche Rechenschritte sinkt aber der bisher übliche Gesamtpunkte-Wert einer Aufgabe.

- Ein Aufrüsten der Aufgabe durch zum Beispiel größere Problemkomplexität oder verstärkte Aufnahme von Theorieelementen u. ä. ist im geringen Umfang für den leistungsstärkeren Teil einer Schülergruppe erfolgreich praktizierbar.
- Mit gutem Erfolg lässt sich dagegen der Fortfall von Rechenschritten kompensieren, wenn die Aufgabenstellung die Schüler zur Planung und Analyse der einzelnen Lösungsschritte anhält. Deren knappe und strukturierte Niederschrift, die Reflexion des eingeschlagenen Lösungsweges sowie eine kritische Wertung der Ergebnisse sollte –wo dies sinnvoll ist- ein normaler zu bewertender Bestandteil einer Schülerlösung sein.
- Wenn sich außerdem neue Aufgabenteile erforderlich machen, so bleiben wir beim Abitur stets innerhalb der Grenzen des Lehrplans und tradierter Inhalte von Abituraufgaben, die bekanntlich eine stark orientierende Wirkung haben. Veränderungen in Richtung offenerer Aufgabenstellungen sind für das gesamte Abitur im Gange und haben so auch für die CAS-Klassen Relevanz.

In Anlehnung an BÖHM (vgl. S. 1)wollen wir solche Ansätze zur Veränderung von Aufgaben als Handlungsanweisungen zusammenfassend - aber ohne Anspruch auf Vollständigkeit - darstellen:

Veranlasse zur Niederschrift der Planung, Analyse, Diskussion und Begründung von Lösungswegen.
Verwende verstärkt Aufgabenwörter wie: „Beschreibe“, „Erkläre“, „Untersuche“, „Klassifiziere“, „Begründe“; ...
Fordere die kritische Wertung von Lösungen.
Öffne die Aufgaben durch Umkehren, Weglassen oder Variieren.
Nutze die graphischen Möglichkeiten des CAS-Rechners.
Verwende Bildschirmangaben des CAS-Rechners zur Formulierung von Aufgaben.
Stelle kleine zusätzliche Aufgaben, bleibe stets innerhalb des Lehrplans.
Lasse selbständigere Untersuchungen, z. B. bei Aufgaben mit Parametern zu.
u.a. ?

Einige Beispiele sollen unser Vorgehen illustrieren.

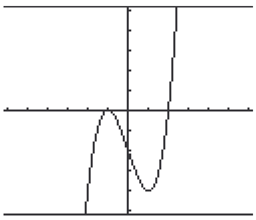
Beispiel 1: Abituraufgabe Thüringen 2000, Mathematik Grundfach, Analysis 1.1

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = x(1 - \ln x)$.

Original	Veränderung (CAS-Gruppe Thüringen)
Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Schnittpunkte mit der x-Achse, lokale Extrempunkte und Wendepunkte! Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an.	<u>Zeigen Sie durch Rechnung</u>, dass der Graph der Funktion f nur den Schnittpunkt A(e; 0) mit der x-Achse hat. <u>Beschreiben Sie allgemein</u> eine Lösungsstrategie zur Ermittlung von lokalen Extrempunkten des Graphen einer Funktion! <u>Untersuchen Sie</u> den Graphen der Funktion f auf lokale Extrempunkte! <u>Weisen Sie nach</u>, dass der Graph von f keine Wendepunkte besitzt.

Beispiel 2: Kursarbeit Integralrechnung

2. Gegeben ist der Graph einer kubischen Funktion f durch nebenstehendes Bild.



a) <u>Beschreibe</u> wesentliche gemeinsame Eigenschaften der Graphen der zu f gehörenden Stammfunktionen F. <u>Begründe</u> deine Aussagen!
b) <u>Skizziere und erkläre</u> den Verlauf des Graphen der zu f gehörenden Ableitungsfunktion f ´.

3.Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \begin{cases} x^2 \; für \; 0 \le x < 2 \\ x \; für \; 2 \le x \le 4 \end{cases}$.

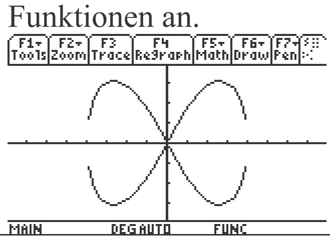
<u>Erläutere</u>, wie man $\int_0^4 f(x)dx$ als Grenzwert einer geeigneten Untersumme ermittelt.

Beispiel 3: Kursarbeit Analysis

Original: Thüringen Abitur 2000 LK	Neue Formulierung:
Für jede reelle Zahl a (a > 0) ist eine Funktion f_a gegeben durch $y = f_a(x) = a \cdot \ln(x^2 + a) - a$ ($x \in R$). Untersuchen Sie den Graphen von f_a auf Symmetrie! Ermitteln Sie die Anzahl der Schnittpunkte des Graphen von f_a mit der x-Achse in Abhängigkeit von a und geben Sie deren Koordinaten an!	Für jede reelle Zahl a ist eine Funktion f_a gegeben durch $y = f_a(x) = a \cdot \ln(x^2 + a) - a$ ($x \in R$). <u>Klassifizieren</u> Sie die Kurvenschar anhand ihrer Graphen!

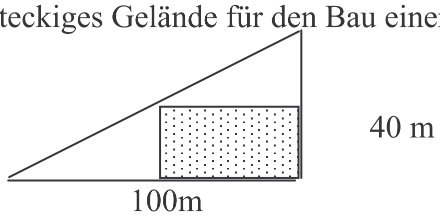
Beispiel 4: Abituraufgabe Bayern 2001

Gegeben $g_k = k \cdot x \cdot \sqrt{4 - k \cdot x} \quad mit\ k \in R^+$ mit maximaler Definitionsmenge D_k. Der Graph von g_k wird mit G_k bezeichnet.

Original	Mögliche Veränderung
d) Untersuchen Sie das Verhalten von $g_k{}'$ bei Annäherung an den rechten Rand von D_k. Zeichnen Sie $G_{0,5}$ und G_1 unter Verwendung bisheriger Ergebnisse.	d) <u>Untersuchen</u> Sie das Verhalten von $g_k{}'$ bei Annäherung an den rechten Rand von D_k. <u>Kommentieren</u> Sie in diesem Zusammenhang das nachfolgende Bild von G_1 im I. Quadranten. <u>Beschreiben</u> Sie, wie man die abgebildete „Schleife“ aus G_1 erzeugen kann. Geben Sie dazu geeignete Funktionen an. 

Beispiel 5: Öffnen durch Weglassen; Klausuraufgabe Grundkurs

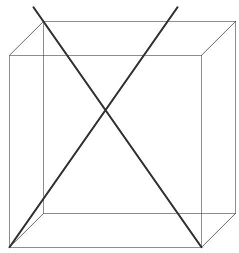
Auf einem Grundstück, das die Form eines rechtwinkligen Dreiecks hat, soll ein möglichst großes rechteckiges Gelände für den Bau einer Lagerhalle abgesteckt werden (vgl. Bild)



Verfasse für den Bauherrn eine begründete Empfehlung für die Abmessung des Grundrisses der Lagerhalle!

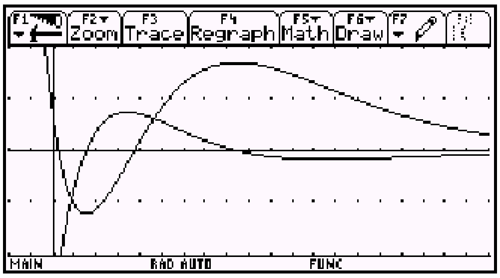
Beispiel 6: Öffnen durch Weglassen; Klausuraufgabe Analytische Geometrie

Gegeben ist ein Würfel mit zwei Transversalen. Die eine Transversale verläuft vom unteren rechts vorn liegenden Eckpunkt zum oberen links hinten liegenden Eckpunkt, die andere geht von der unteren links vorn liegenden Ecke durch einen Punkt auf der oberen hinten liegenden Kante (vgl. Bild). Untersuche, ob sich die beiden Transversalen schneiden.



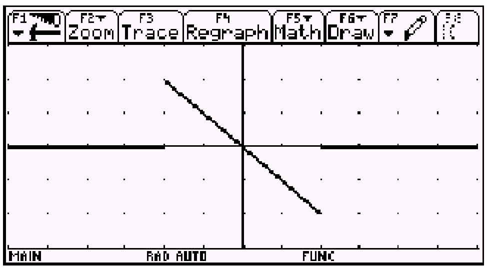
Beispiel 7: (vgl. BÖHM, S. 1)

Entscheide Dich: Welcher der beiden Graphen gehört zur Funktion f und welcher zur ersten Ableitungsfunktion von f ? Begründe Deine Wahl!
Beschreibe, aus welchen bekannten Funktionsklassen die Funktion f zusammengesetzt sein könnte und gib einen möglichen Funktionsterm an!



Beispiel 8: (vgl. BÖHM, S. 1)

Du siehst den Graph einer Funktion *y*. Füge den Graph einer stetigen Stammfunktion von y hinzu, die durch den Punkt P(-3, -2) verläuft und gib den zugehörigen Funktionsterm an!



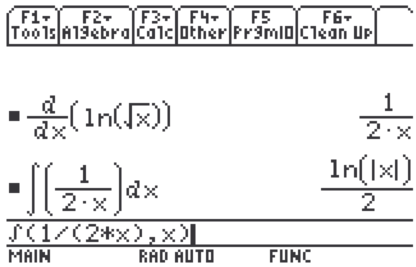
Beispiel 9:

Spieglein, Spieglein an der Wand; Klausuraufgabe Grundkurs

1. Die Strecke AB mit A(1; 1) und B(2; 1) soll am Ursprung gespiegelt werden! Erläutere eine grafisches Verfahren mit Zirkel und Lineal und ermittle die Lösung außerdem durch ein analytisch-rechnerisches Vorgehen!
2. Der Punkt A soll nun an der Geraden g mit der Gleichung y = g(x) = 4x gespiegelt werden. Erläutere ein analytisches Vorgehen und bestimme den Spiegelpunkt A'! Vergleiche das Ergebnis mit der Lösung durch geometrische Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal.
   Es sei h eine zweite Gerade im R^2. Erläutere, wie man die Gleichung der Spiegelgeraden h` von h bei Spiegelung an g ermittelt.
3. Es sind die Punkte P(1 | 2 | a) und Q(9 | 9 |3a) mit $a \in \Re$ gegeben. Bestimme die zugehörige Spiegelebene, die P auf Q abbildet!

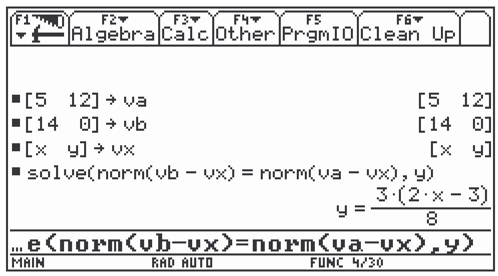
Beispiel 10:

Kommentiere folgende Bildschirmanzeige:



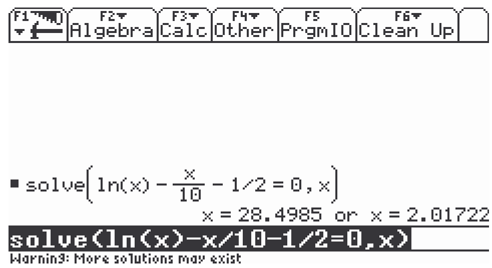
Beispiel 11: Der kleine mathematische Aufsatz

Interpretiere die folgende Rechnung mit dem CAS - Rechner geometrisch!
Schreibe einen kurzen mathematischen Aufsatz dazu!



Beispiel 12:

Beweise oder widerlege die „Warnung" des TI!



[1] T3 Europe: Josef Böhm „Auf den richtigen Dreh kommt es an“ T3 Österreich/ ACDCA am PI - Niederösterreich, Hollabrunn

Aufgaben für den Workshop
Thüringen Abitur 2002 Leistungskurs

Aufgabe A2

Für jede reelle Zahl a $(a > 0)$ ist eine Funktion f_a gegeben durch
$y = f_a(x) = a\sqrt{x} - \ln x \quad , \qquad (x \in R,\ x > 0).$

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_a auf lokale Extrem- und Wendepunkte und geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 0} f_a(x)$!
Skizzieren Sie die Graphen von f_1 und f_2 in ein und dasselbe Koordinatensystem jeweils im Intervall $0 < x \leq 20$!
Prüfen Sie, ob die lokalen Extrempunkte aller Graphen von f_a auf einer Kurve k mit $y = k(x) = \ln \frac{e^2}{x}$ liegen!

12 BE

b) Entscheiden Sie, ob einer der Minimumpunkte des Graphen von f_a auf einer Koordinatenachse liegen kann. Begründen Sie Ihre Entscheidung!

3 BE

c) Finden Sie zwei positive reelle Zahlen r und s mit $r \neq s$ so, dass das von den Graphen der Funktionen f_1 und f_2 sowie den Geraden mit den Gleichungen x = r und x = s begrenzte Flächenstück einen ganzzahligen Inhalt besitzt!
Geben Sie diesen Flächeninhalt an!

4 BE

d) Es sei x_W die Wendestelle der Funktion f_a.
Zeigen Sie, dass die Wendetangente die y-Achse im Punkt $T(0;\ f_a(x_W) - 1)$ schneidet!

4 BE

e) Für $0 < p < 9$ ist durch die Punkte P(p; f_1(p)), S(p; f_2 (p)), Q(9; f_1 (p)) und R(9; f_2 (p)) ein Rechteck definiert.
Ermitteln Sie p so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks PQRS extremal wird!
Um welche Art des Extremums handelt es sich?
Bestimmen Sie den extremalen Flächeninhalt!

7 BE

Thüringen Abitur 2000 Nachtermin Leistungskurs

Aufgabe 2

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A_t(-t; -8; 1)$, $B_t(4; -4; 2t)$ und $C(0; -8; 4)$ mit $t \in R$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass für jedes t durch die Punkte A_t, B_t und C genau eine Ebene ε_t bestimmt ist.

1 BE

b) Die Ebenen ε_{-2} und ε_3 schneiden sich in einer Geraden g. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Schnittgeraden und beschreiben Sie die spezielle Lage dieser Geraden. Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der beiden Ebenen.

5 BE

d) Für jedes $u \in R$ ist ein Punkt $D_u(4; -2u; u - 6)$ gegeben. Zeigen Sie, dass alle Punkte D_u auf einer Geraden h liegen. Weisen Sie nach, dass alle Punkte D_u von der Ebene ε_3 den gleichen Abstand haben und berechnen sie diesen

3 BE

e) Die Punkte D_3 und D_0 sind benachbarte Eckpunkte eines Rechtecks. Die beiden anderen Eckpunkte des Rechtecks liegen auf einer Geraden, die durch den Koordinatenursprung verläuft. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks!

3 BE

f) Die Punkte $P\left(0; -\frac{18}{5}; \frac{9}{5}\right)$, D_3, D_0 und Q bilden in dieser Reihenfolge ein Rechteck. Das Rechteck ist Grundfläche einer geraden Pyramide mit dem Volumen 224 VE. Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze S dieser Pyramide!

3 BE