Ouidad Filali

Über abelsche Varietäten und den transversalen Indexsatz

2007

Reine Mathematik

Über Abelsche Varietäten und den transversalen Indexsatz

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich
Mathematik und Informatik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Ouidad Filali
aus Sefrou
2007

Dekan:	Prof. Dr. Joachim Cuntz
Erster Gutachter:	Prof. Dr. Christopher Deninger
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. Wolfgang Lück
Tag der mündlichen Prüfung:	13.06.2007
Tag der Promotion:	11.07.2007

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Studium von abelschen Varietäten A_0 über endlichen Körpern ist ein wichtiges Thema der Zahlentheorie und der algebraischen Geometrie. Ein grundlegendes Hilfsmittel ist die Zeta-Funktion $\zeta_{A_0}(s)$ von A_0.
Von Riemann und später Weil gibt es sogenannte "explizite Formeln" die einen Zusammenhang zwischen den Nullstellen und Polstellen der Zetafunktionen und Normen von Primidealen herstellen. Wir zeigen eine entsprechende Formel für $\zeta_{A_0}(s)$, welche die Null- und Polstellen in Beziehung zu den Normen des abgeschlossenen Punkte von A_0 setzt.
Ziel der Arbeit ist die Interpretation dieser Formel für gewöhnliche abelsche Varietäten durch Analysis auf "verallgemeinerten Solenoiden" mit $\mathbb{R}$-Operation wie von Deninger vermutet [Den2]. Solenoide sind eine Verallgemeinerung von Mannigfaltigkeiten. Die lokale Struktur von Solenoiden ist $\mathbb{R}^n\times$ "total unzusammenhängend".
Die analytische Komponente dieser Arbeit ist ein transversaler Index Satz für den de Rham Laplace Operator entlang einer (komplexen) Blätterung $\mathcal{F}$ auf einem verallgemeinerten Solenoid. Wir bewiesen ihn mit Hilfe der Poissonschen Summenformel. Wir zeigen auch einen transversalen Index Satz für den Dolbeault Laplace Operator längs $\mathcal{F}$.
Für ein verallgemeinertes Solenoid X mit glattem Fluss ϕ^t betrachten wir die Spur des Operators $S_j(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\phi^{t*}dt$ auf dem Raum $Harm^{\bullet}_{L^2}(X)$ der harmonischen Formen auf X. Sie ist eine Distribution auf $\mathbb{R}$.
Wir erstellen eine Formel, die eine Beziehung zwischen einer alternierenden Summe von Distributionen und periodischen Orbits des Fluss ϕ herstellt.
Die transversale Index Theorie bezüglich Operationen von kompakten Gruppen wurde von [Ati] initiiert.
Wir gehen jetzt naher auf den Aufbau der Arbeit ein:
In Abschnitt 1.1 definieren wir das $2g+1$-dimensionale verallgemeinerte Solenoid $X = (\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma) \times_\Lambda \mathbb{R}$. X ist ein topologischer Raum, der lokal homeomorph ist zu einem Produkt einer offenen Unterraumes von $\mathbb{R}^{2g}$ und einem total unzusammenhängenden Raum $V_f\Gamma$. V und Λ sind geeignete diskrete Gruppen.
In Abschnitt 1.2 zeigen wir dass es einen Fluss ϕ auf X gibt, für den es gibt eine Bijektion τ zwischen den periodischen Orbits γ und den endlichen Orbits der Λ-Operation auf

$\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma$ gibt.
In Abschnitt 1.3 definieren wir ein Maß auf X, das durch ein Maß $\tilde{\mu}$ auf $(\mathbb{C}^g \times V_f\Gamma) \times \mathbb{R}$ induziert wird, welches Λ-und V-invariant ist.
Im Abschnitt 1.4 werden wir sehen, dass X ist ein geblätterter Raum mit Blättern $\pi(\mathbb{C}^g \times \{\hat{v}\} \times \{t\})$ ist, wo $\pi : (\mathbb{C}^g \times V_f\Gamma) \times \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma) \times_\Lambda \mathbb{R}$ die Projektion ist. Die einzelnen Blätter sind isomorph zu $\mathbb{C}^g$.
Im Abschnitt 1.5 definieren wir eine Riemannsche Metrik g auf dem Tangentialbündel $T\mathcal{F}$ an die Blätter $\mathcal{F}$ auf $(\mathbb{C}^g \times V_f\Gamma) \times \mathbb{R}$.
Wir benutzen die Λ-und V-Invarianz von g um eine Riemannsche Metrik auf X zu definieren.
Mit Hilfe der Metrik g und dem Maß μ können wir ein Skalarprodukt auf $\mathcal{A}^j_{\mathcal{F}}(X) = \Gamma(X, \Lambda^j T^*X)$, dem Raum der j-Formen auf X, definieren.
Im Abschnitt 1.6 definieren wir den Index des de Rham Operators auf X durch die Formel

$$Ind_t(d_{\mathcal{F}})(\alpha) = \sum_{j=0}^{2g} (-1)^j Tr(S_j(\alpha)|Harm^j_{L^2}(X)).$$

D.h. der Index ist eine Summe von Distributionen zu der Operation des Flusses auf dem Raum der harmonischen Formen auf X.
Unter Benutzung der Poissonschen Summenformel und der oben genannten Bijektion τ erhalten wir für den transversalen Index des de Rham Operators auf dem verallgemeinerten Solenoid X, die Formel

$$Ind_t(d_{\mathcal{F}})(\alpha) = \sum_\gamma l(\gamma) \sum_{k\geq 1} \alpha(kl(\gamma)) + \sum_\gamma l(\gamma) \sum_{k\leq -1} \exp(gkl(\gamma))\alpha(kl(\gamma)).$$

Hierbei ist $l(\gamma)$ die Länge von γ.
Im Abschnitt 1.7 betrachten wir X mit der komplexen Struktur und dem komplexen Tangentialraum $T_c\mathcal{F}$, und berechnen den transversalen Index des Dolbeault Operators auf X. Er ist die alternierende Summe von Spuren des Flusses ϕ auf dem Raum der $\bar{\partial}$ harmonischen Formen auf X. Wir erhalten die Formel

$$\begin{aligned} Ind_t(\bar{\partial}_{\mathcal{F}})(\alpha) \quad &= \quad \sum_\gamma l(\gamma) \sum_{k\geq 1} \det{}_{\mathbb{C}}(1 - T_{cx}\phi^{kl(\gamma)}|T_{cx}\mathcal{F})^{-1}\alpha(kl(\gamma)) \\ &\quad + \sum_\gamma l(\gamma) \sum_{k\leq -1} \exp(gkl(\gamma))\det{}_{\mathbb{C}}(1 - T_{cx}\phi^{kl(\gamma)}|T_{cx}\mathcal{F})^{-1}\alpha(kl(\gamma)). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet x einen Punkt in γ, und $T_{cx}\phi^{kl(\gamma)}$ die von ϕ induzierte Abbildung auf dem komplexen Tangentialraum $T_{cx}\mathcal{F}$ im Punkt x.
Im Kapitel 2 betrachten wir eine abelsche Varietät (A_0, φ_0) über einen endlichen Körper $\mathbb{F}_q$. Man weiß dass (A_0, φ_0) eine Liftung zu einer CM-abelschen Varietät (A, φ) in Charakteristik Null besitzt.
Im Abschnitt 2.2 definieren wir mit Hilfe des Abel-Jacobi-Isomorphismus eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}^g$, so dass $f(\Gamma) \subset \Gamma$, wobei Γ das Gitter in $\mathbb{C}^g$ ist, und $\mathbb{Q}(f)$ ein CM-Körper mit $|f| = |\varphi_0| = q^{\frac{1}{2}}$ ist.
Wir setzen nun voraus, dass die abelsche Varietät (A_0, φ_0) gewöhnlich ist und wir benutzen die Reduktion der kanonischen Sequenz

$$0 \to (\mu_{p^n}(\bar{R}))^g \to \mathcal{A}_{p^n}(\bar{R}) \overset{s}{\leftrightarrows} (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g \to 0$$

von p-divisiblen Gruppen modulo p, wobei R der Ring der Witt-Vektoren von $\mathbb{F}_q$ ist. Hiermit zeigen wir eine Bijektion zwischen den abgeschlossenen Punkten der abelschen Varietät A_0 der Ordnung n, und den endlichen Orbits der Ordnung n der f-Operationen auf $A(\mathbb{C})$.
Im Kapitel 3.1 beweisen wir die explizite Formel

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \phi(\frac{2\pi i\nu}{\log q}) + \sum_{i=1}^{2g-1}(-1)^i(\sum_{\rho}\phi(\rho)) + \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\phi(g + \frac{2\pi i\nu}{\log q}) \\ = &\sum_{x\in|A_0|}\log N_x \sum_{\nu\geq 1}\varphi(\nu\log N_x) + \sum_{x\in|A_0|}\log N_x \sum_{\nu\leq -1} N_x^{\nu g}\varphi(\nu\log N_x) \end{aligned}$$

mit Hilfe des Residuen-Satzes, angewendet auf die Zeta-Funktion, und zu Hilfe nahme der Gleichung

$$\zeta_{A_0}(s) = \prod_{i=0}^{2g} P_i(q^{-s})^{(-1)^{i+1}},$$

wobei

$$P_i(T) = \det\nolimits_{\mathbb{Q}_l}(1 - T\pi^*|H^i(A_0 \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_l)).$$

Insgesamt gelingt es uns, die obige explizite Formel für die Zeta-Funktion der abelschen Varietät A_0 als eine Formel für den transversalen Index des de Rham Operators, auf X zu interpretieren.

Dies ist das Hauptresultate der Arbeit.
Diese Arbeit ist an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster entstanden, als Stipendiatin des Graduierten Kollegs für algebraische Geometrie und Zahlentheorie.
Mein herzlicher Dank gilt Professor Christopher Deninger, der mich in das interessante Gebiet der Indextheorie einführte, und seiner fortwährenden Betreuung, ohne die diese Arbeit nie entstanden wäre.
Mein Dank gilt auch dem Graduierten Kolleg mit seinem Leiter Professor Wolfgang Lück, genauso wie dem Sonderforschungsbereich Geometrische Strukturen in der Mathematik.
Ich danke auch Bernhard für das Lesen dieser Arbeit, und seine Hilfe bei Computer- und Latex-Problemen. Ich danke auch Urs, Stefan und Ralf für das Lesen der Arbeit.
Auch viele Mitglieder anderer Arbeitsgruppen, wie die von Professor Wolfgang Lück und Professor Peter Schneider, und natürlich auch die der eigenen Gruppe um Professor Christopher Deninger, verdienen meinen besten Dank, gerade auch in meiner Anfangszeit in Münster für ihre freundliche Aufnahme.
Ich danke auch dem Deutschen Akademischen Austauschdienst für seine finanzielle Unterstützung von drei Monaten während meiner Anfangszeit in Münster.
Mein Dank gilt meiner Familie, und ganz besonders meinen Eltern, die mich in jeder Hinsicht unterstützt haben.

1. Transversale Indexsatz auf einem verallgemeinerten Solenoid

1.1. Das verallgemeinerte Solenoid $(\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma) \times_\Lambda \mathbb{R}$

Zuerst schreiben wir die transversale Indexformel auf einem verallgemeinerten Solenoid X in Termen der kompakten Orbits einer $\mathbb{R}$-Operation auf X.

Definition 1. *Ein verallgemeinertes Solenoid $(X, \mathcal{F})$ ist ein geblätterter Raum X im sinne von [MS] mit einer Blätterung $\mathcal{F}$ durch Kähler-Mannigfaltigkeiten.*

Definition 2. *Eine d-dimensionale Blätterung $\mathcal{F}$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit X von Dimension a ist eine Partition von X in immersierte d-dimensionale Mannigfaltigkeiten $\mathcal{F}$, den Blättern. Local muß die induzierte Partition trivial sein: Für alle x in X es gibt ein offene Umgebung U, welche diffeomorph ist zu ein offenen Kugel B in $\mathbb{R}^a$, so dass die Blätter der induzierten Partition auf U zu den Untermannigfaltigkeiten $B \cap (\mathbb{R}^d \times \{y\})$ von B für y in $\mathbb{R}^{a-d}$ korrespondieren.*

Im folgenden konstruieren wir die Solenoid, mit denen wir uns beschäftigen werden. Sei $f : \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}^g$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Sei Γ ein Gitter in $\mathbb{C}^g$, $g \in \mathbb{N} - \{0\}$, so dass $f(\Gamma) \subset \Gamma$ gilt. Wir identifizieren $\mathbb{C}^g$ mit $\mathbb{R}^{2g}$ und erhalten eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^{2g} \longrightarrow \mathbb{R}^{2g}$. Sei $(\nu_1, ..., \nu_{2g})$ eine Basis von $\Gamma = \mathbb{Z}\nu_1 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}\nu_{2g}$, wobei $\nu_i \in \mathbb{R}^{2g}$. Die Matrix $Mat_\mathbb{R} f$ bezeichne die Matrix der Abbildung f bezüglich der Basis $\omega = (\nu_1, ..., \nu_{2g})$. Dann ist $f(\nu_i) = \sum\limits_{j=1}^{2g} a_{ij}\nu_j$, mit $i = 1, ..., 2g$. Die a_{ij} sind ganze Zahlen mit $1 \leq i, j \leq 2g$. Sei $\mathrm{spec} f = \{\lambda_1, ..., \lambda_{2g}\}$ die Menge der Eigenwerte von f. Unsere grundlegende Annahme ist, dass f bis auf ein Vielfaches unitär sein soll und alle Eigenwerte λ_i von f den gleichen Betrag $|\lambda_i| = a \neq 0$ haben. Sei $q^g = \det f$. Dann gilt

$$|\det f| = \prod_{i=1}^{2g} |\lambda_i| = a^{2g} = |q|^g =: d.$$

Wir definieren $V_f\Gamma$ als $T_f\Gamma \otimes \mathbb{Q}$, wobei

$$T_f\Gamma = \varprojlim \Gamma/f^n(\Gamma)$$

gilt, $\Lambda = (\log q)\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ist und

$$V = \Gamma[\frac{1}{|\det f|}] = \cup_{n\geq 0}(\frac{1}{a^{2g}})^n\Gamma.$$

V und Λ operieren auf dem Raum $\tilde{X} := \mathbb{C}^g \times V_f\Gamma \times \mathbb{R}$ durch

$$(z, \hat{v}, t).\lambda = (f^{-\nu}(z), f^{-\nu}(\hat{v}), t + \lambda) \qquad \text{für} \quad \lambda = \nu \log q \in \Lambda$$

und

$$(z, \hat{v}, t).v = (z + v, \hat{v} - v, t) \qquad \text{für} \quad v \in V.$$

X bezeichne den kompakten Raum $(\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma) \times_\Lambda \mathbb{R}$. Sei $\hat{M} = \mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma$. Mit dieser Notation haben wir $X = \hat{M} \times_\Lambda \mathbb{R}$.

Lemma 1.
Sei $\Gamma \subset \mathbb{C}^g$ ein Gitter und $f : \mathbb{R}^{2g} \to \mathbb{R}^{2g}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit $f(\Gamma) \subset \Gamma$ und $\det f \neq 0$. Dann folgt

$$\sharp\Gamma/f(\Gamma) = |\det f|.$$

Beweis
Sei $f : \mathbb{R}^{2g} \to \mathbb{R}^{2g}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Nach Voraussetzung gilt $f(\Gamma) \subset \Gamma$, Γ ist ein freier Modul über $\mathbb{Z}$ und also $f(\Gamma)$ ein endlich erzeugter Untermodul von Γ. Nach dem Elementarteilersatz gibt es eine Basis B von Γ und Elemente $w_1, ..., w_{2g} \in \mathbb{R}^{2g}$ dieser Basis und Elemente $\lambda_1, ..., \lambda_{2g} \in \mathbb{Z}$, so dass

$$f(\Gamma) = \lambda_1 w_1\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \lambda_{2g} w_{2g}\mathbb{Z}$$

gilt. Also erhalten wir

$$\Gamma/f(\Gamma) = \frac{w_1\mathbb{Z} \oplus ... \oplus w_{2g}\mathbb{Z}}{\lambda_1 w_1\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \lambda_{2g} w_{2g}\mathbb{Z}}.$$

Damit gilt $\sharp\Gamma/f(\Gamma) = |\prod_{i=1}^{2g} \lambda_i|$. Es gibt $N_1, N_2 \in GL_{2g}(\mathbb{Z})$ mit

$$N_1 f N_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{2g} \end{pmatrix}$$

dann ist $|\prod_{i=1}^{2g} \lambda_i| = |\det N_1||\det f||\det N_2| = |\det f|$ und damit

$$\sharp\Gamma \diagup f(\Gamma) = |\det f|.$$

Lemma 2. *Sei* $V = \Gamma[\frac{1}{|\det f|}] = \bigcup_{n\geq 0} \frac{1}{|\det f|^n}\Gamma$. *Dann gibt es für alle* $\nu \in \mathbb{N} - \{0\}$ *einen Gruppenisomorphismus*

$$V/(f^\nu - 1)(V) \cong \Gamma/(f^\nu - 1)(\Gamma).$$

Beweis
Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \theta: & \Gamma/(f^\nu - 1)(\Gamma) & \longrightarrow & V/(f^\nu - 1)(V) \\ & \bar{z} & \longmapsto & \bar{z}. \end{array}$$

Es ist klar, dass θ ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist. □

Lemma 3. *Unter Verwendung der obigen Notationen setzen wir*

$$A = \{[z, -z] \in \hat{M}; z \in (f^\nu - 1)^{-1}(V)\}.$$

Dann gibt es einen Isomorphismus von Gruppen

$$A \cong (f^\nu - 1)^{-1}(V)/V.$$

Beweis:
Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcc} \varphi : \{[z, -z] \in \hat{M}; z \in (f^\nu - 1)^{-1}(V)\} & \longrightarrow & (f^\nu - 1)^{-1}(V)/V \\ [z, -z] & \longmapsto & z + V. \end{array}$$

Es ist einfach zu sehen, dass A eine Gruppe mit $[v, -v]$ als Nullelement ist, wobei $v \in V$ ist. Es ist klar, dass φ surjektiv ist.
Jetzt zeigen wir, dass φ injektiv ist. Sei $[z, -z] \in \hat{M}$, so dass $\varphi([z, -z]) = V$. Dann ist $z \in V$, das bedeutet, dass $[z, -z]$ das Nullelement von A ist. □

Lemma 4. *Unter den gleichen Bedingungen wie oben sind die Abbildungen*

$$\begin{array}{ccc} V_f\Gamma & \xrightarrow{\check{f}} & V_f\Gamma \\ & & \\ (..., \overline{a_n}, \overline{a_{n-1}}, ...) \otimes \frac{s}{d^i}\frac{1}{N} & \longmapsto & (..., \overline{f(a_n)}, \overline{f(a_{n-1})}, ...) \otimes \frac{s}{d^i} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccc} \eta: & \mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma & \longrightarrow & \mathbb{C}^g \times_\Gamma T_f\Gamma \\ & (z+v, b-v) & \longmapsto & (z+w, \beta-\alpha) \end{array}$$

Isomorphismen.

Beweis

Zuerst beweisen wir, dass die zweite Abbildung ein Isomorphismus ist. Es gilt $V_f\Gamma = T_f\Gamma \otimes \mathbb{Q}$ und $T_f\Gamma \subset V_f\Gamma$. Wir können $V_f\Gamma$ schreiben als

$$V_f\Gamma = \bigcup\nolimits_{i\in I} a_i + T_f\Gamma$$

mit $a_i \in V_f\Gamma$ und $I = V_f\Gamma/T_f\Gamma$. Die Menge $a_i + T_f\Gamma$ ist eine offene Umgebung von a_i in $V_f\Gamma$. Nach Definition ist $V = \Gamma[\frac{1}{|\det f|}]$. Es ist einfach zu sehen, dass Γ dicht in $T_f\Gamma$ liegt und somit V dicht in $V_f\Gamma$ ist. Dann gilt $V \cap (a_i + T_f\Gamma) \neq \emptyset$ und somit gibt es ein Element $w \in V \cap (a_i + T_f\Gamma)$. Sei $w = a_i + \alpha$ mit $\alpha \in T_f\Gamma$. Für $b \in V_f\Gamma$ existiert ein i, so dass $b \in a_i + T_f\Gamma$, d.h. es gibt ein $\beta \in T_f\Gamma$ so dass $b = a_i + \beta$. Damit ist $b = w - \alpha + \beta$ mit $w \in V$ und $-\alpha + \beta \in T_f\Gamma$. Wir haben

$$\begin{aligned} [z+v, b-v] &= [z+v, \beta-\alpha+w-v] \\ &= [z+v+(w-v), \beta-\alpha] \\ &= [z+w, \beta-\alpha] \end{aligned}$$

weil $w - v \in V$. Also erhält man Abbildungen

$$\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma \overset{\eta}{\hookrightarrow} \mathbb{C}^g \times_\Gamma T_f\Gamma \overset{\theta}{\hookrightarrow} \mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma,$$

wobei wir

$$\eta(z+v, b-v) = (z+w, \beta-\alpha)$$

und

$$\theta(z+\gamma, w-\gamma) = (z+\gamma, w-\gamma)$$

setzen. Also haben wir

$$\mathbb{C}^g \times_\Gamma T_f\Gamma \cong \mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma.$$

Jetzt kommen wir zum ersten Isomorphismus
Dazu definieren wir eine injektive Abbildung

$$\tilde{f}: T_f\Gamma \longrightarrow T_f\Gamma.$$

Sei

$$\begin{array}{cccc} T_f\Gamma = & \varprojlim \Gamma/f^n(\Gamma) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \varprojlim \Gamma/f^n(\Gamma) \\ & (..., \overline{a_n}, \overline{a_{n-1}}, ..., \overline{a_1}) & \longmapsto & (..., \overline{f(a_n)}, \overline{f(a_{n-1})}, ..., \overline{f(a_1)}). \end{array}$$

$\tilde{f}$ ist wohldefiniert, denn für $\overline{a_n} \in \Gamma/f^n(\Gamma)$ sehen wir, dass $\overline{f(a_n)} \in \Gamma/f^n(\Gamma)$.
Jetzt zeigen wir dass $\tilde{f}$ injektiv ist:
$\tilde{f}(\overline{(a_n)}) = \tilde{f}(\overline{(b_n)})$, also ist $\overline{f(a_n)} = \overline{f(b_n)}$ für alle n. Dann ist $f(a_n) - f(b_n) \in f^n(\Gamma)$ und $f(a_n - b_n) \in f^n(\Gamma)$ für alle n. Also ist $a_n - b_n \in f^{n-1}(\Gamma)$ für alle n. Sei φ die Abbildung

$$\varphi : \Gamma \diagup f^n(\Gamma) \longrightarrow \Gamma \diagup f^{n-1}(\Gamma).$$

Dann ist $\varphi(\overline{a_n}) = \overline{a_{n-1}}$ und $a_n + f^{n-1}(\Gamma) = a_{n-1} + f^{n-1}(\Gamma)$, sowie $\varphi(b_n) = b_{n-1}$ und $b_n + f^{n-1}(\Gamma) = b_{n-1} + f^{n-1}(\Gamma)$. Damit ist $a_{n-1} - b_{n-1} \in f^{n-1}(\Gamma)$ für alle n. Folglich gilt $\overline{a_n} = \overline{b_n}$, und damit ist $\tilde{f}$ injektiv.
Jetzt zeigen wir, dass $\breve{f}$ ein Isomorphismus ist:
Sei $N \in \mathbb{Z} - \{0\}$ mit $(N, d) = 1$. Wir definieren die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \Gamma/f^n(\Gamma) & \xrightarrow{\pi_n} & \Gamma/f^n(\Gamma) \\ a_n + f^n(\Gamma) & \longmapsto & Na_n + f^n(\Gamma). \end{array}$$

Nach Lemma 1 gilt $\sharp\Gamma/f^n(\Gamma) = |\det f^n| = |\det f|^n = d^n$.
Da $(N, d) = 1$, folgt $(N, d^n) = 1$, folglich ist $a_n \in f^n(\Gamma)$, Wenn $N.a_n \in f^n(\Gamma)$. Also ist π_n injektiv. Weil $\sharp\Gamma/f^n(\Gamma) < \infty$ gilt, ist π_n surjektiv. Dann ist π_n ein Isomorphismus, also invertierbar. Folglich gibt es für alle $b_n \in \Gamma$ ein $a_n \in \Gamma$ mit $b_n + f^n(\Gamma) = N.a_n + f^n(\Gamma)$.
Wir definieren einen Homomorphismus

$$\begin{array}{ccc} T_f\Gamma & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & T_f\Gamma \\ (..., \overline{a_n}, \overline{a_{n-1}}, ..., \overline{a_1}) & \longmapsto & (..., \overline{Na_n}, \overline{Na_{n-1}}, ..., \overline{Na_1}) \end{array}$$

und zeigen, dass er injektiv ist:
Wenn $Na_n \in f^n(\Gamma)$ für alle n, dann gilt $a_n \in f^n(\Gamma)$ für alle n. Folglich ist $\tilde{\pi}$ injektiv.
$\tilde{\pi}$ ist surjektiv:
Sei $(..., \overline{b_n}, \overline{b_{n-1}}, ..., \overline{b_1}) \in T_f\Gamma$, dann gibt es $\overline{a_n} \in \Gamma/f^n\Gamma$ für $n \geq 1$ sodass

$$(..., \overline{b_n}, \overline{b_{n-1}}, ...\overline{b_1}) = (..., \overline{Na_n}, \overline{Na_{n-1}}, ..., \overline{Na_1}).$$

Es bleibt zu zeigen, dass $(...,\overline{a_n},\overline{a_{n-1}},...,\overline{a_1})\in T_f\Gamma$ d.h. $\varphi(a_n)=a_{n-1}$, wir haben

$$\begin{cases}\varphi(\overline{b_n}) & = & \overline{b_{n-1}}\\ b_n+f^n(\Gamma) & = & Na_n+f^n(\Gamma)\\ b_{n-1}+f^{n-1}(\Gamma) & = & Na_{n-1}+f^{n-1}(\Gamma)\end{cases}$$

dann gilt $Na_n+f^{n-1}(\Gamma)=Na_{n-1}+f^{n-1}(\Gamma)$ d.h. $N(a_n-a_{n-1})\in f^{n-1}(\Gamma)$ aber $(N,d^{n-1})=1$ dann $a_n-a_{n-1}\in f^{n-1}(\Gamma)$ für alle $n\geq 1$. Folglich ist $\tilde{\pi}:T_f\Gamma\longrightarrow T_f\Gamma$ ein Isomorphismus.

Jetzt zeigen wir, dass $V_f\Gamma$ und $T_f\Gamma\otimes\frac{1}{d^\infty}\mathbb{Z}$, mit $\frac{1}{d^\infty}\mathbb{Z}=\cup_{n\geq 0}\frac{1}{d^n}\mathbb{Z}$, isomorph sind. Für $a\in\mathbb{Q}$ existiert ein $(s,N,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\}\times\mathbb{N}$, so dass $a=\frac{s}{d^i}\frac{1}{N}$ und $(N,d)=1$.

Wir haben eine Isomorphie

$$\begin{array}{ccc} V_f\Gamma=T_f\Gamma\otimes\mathbb{Q} & \xrightarrow{\tilde{\pi}\otimes id} & T_f\Gamma\otimes\frac{1}{d^\infty}\mathbb{Z}\\ (...,\overline{a_n},\overline{a_{n-1}},..)\otimes\frac{s}{d^i}\frac{1}{N} & \longmapsto & (...,\overline{Na_n},\overline{Na_{n-1}},...)\otimes\frac{s}{d^i}\frac{1}{N}=(...,\overline{a_n},\overline{a_{n-1}},..)\otimes\frac{s}{d^i}.\end{array}$$

Wir definieren die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} T_f\Gamma\otimes\frac{1}{d^\infty}\mathbb{Z} & \xrightarrow{\hat{f}} & T_f\Gamma\otimes\frac{1}{d^\infty}\mathbb{Z}\\ (...,\overline{a_n},\overline{a_{n-1}},...)\otimes\frac{s}{d^i} & \longmapsto & (...,\overline{f(a_n)},\overline{f(a_{n-1})},...)\otimes\frac{s}{d^i}.\end{array}$$

Wir wollen zeigen, dass $\hat{f}$ ein Isomorphismus ist:

Wir haben

$$\mathbb{R}^{2g}\supset\Gamma\xrightarrow{f}\Gamma\subset\mathbb{R}^{2g}.$$

Sei A die zu f assoziierte Matrix, also $A\in Mat_{2g,2g}(\mathbb{Z})$, und sei A^{adj} die adjungierte Matrix von A. Dann ist $f.f^{adj}=A.A^{adj}=\det f.I_{2g}=\pm d.I_{2g}$.

Also gilt $f^{-1}=f^{adj}\otimes\pm\frac{1}{d}.id$ und

$$f\circ(f^{adj}\otimes\pm\frac{id}{d})=f\circ f^{adj}\otimes\pm\frac{id}{d}=\pm d.id\otimes\pm\frac{id}{d}=id.$$

Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} T_f\Gamma\otimes\frac{1}{d^\infty}\mathbb{Z} & \xrightarrow{\widehat{f^{adj}}\otimes\frac{1}{d}.id} & T_f\Gamma\otimes\frac{1}{d^\infty}\mathbb{Z}\\ (...,\overline{a_n},\overline{a_{n-1}},...)\otimes\frac{s}{d^i} & \longmapsto & (...,\overline{f^{adj}(a_n)},\overline{f^{adj}(a_{n-1})},...)\otimes\frac{s}{d^{i+1}}\end{array}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, sie invertiert die Abbildung $\hat{f}$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} T_f\Gamma \otimes \frac{1}{d^\infty}\mathbb{Z} & \xrightarrow{\hat{f}} & T_f\Gamma \otimes \frac{1}{d^\infty}\mathbb{Z} \\ (..., \overline{a_n}, \overline{a_{n-1}}, ...) \otimes \frac{s}{d^i} & \longmapsto & (..., \overline{f(a_n)}, \overline{f(a_{n-1})}, ...) \otimes \frac{s}{d^i} \end{array}$$

ein Isomorphismus. Schließlich ist

$$\begin{array}{ccc} V_f\Gamma & \xrightarrow{\check{f}} & V_f\Gamma \\ (..., \overline{a_n}, \overline{a_{n-1}}, ...) \otimes \frac{s}{d^i}\frac{1}{N} & \longmapsto & (..., \overline{f(a_n)}, \overline{f(a_{n-1})}, ...) \otimes \frac{s}{d^i} \end{array}$$

ein Isomorphismus. □

1.2. Periodische Orbits des Flusses

Definition 3. *Ein Fluss ist eine glatte* $\mathbb{R}$*-Operation*

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R} \times X & \longrightarrow & X \\ & (t, x) & \longmapsto & \phi^t(x). \end{array}$$

Die Liegruppe $\mathbb{R}$ operiert auf $X = (\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma) \times_\Lambda \mathbb{R}$ durch die Translation

$$\phi^s(z, \hat{v}, t) = (z, \hat{v}, t + s) \text{ für } s \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.
Es gibt eine Bijektion zwischen den periodischen Orbits γ *der* $\mathbb{R}$*-Operation auf* $X = \hat{M} \times_\Lambda \mathbb{R}$ *(die Länge der Orbits sei* $l(\gamma)$*) und den endlichen Orbits* O *der* Λ*-Operation auf* $\hat{M}$*, und es gilt*

$$l(\gamma_{[z,\hat{v},t]}) = (\log q)\ \sharp O_{[z,\hat{v}]}.$$

Beweis
Wegen Lemma 4 ist $\check{f} : V_f\Gamma \to V_f\Gamma$ ein Isomorphismus. Beachte, dass die Umkehrabbildung die Form $\check{f}^{-1} : V_f\Gamma \to V_f\Gamma$, $\check{f}^{-1} = f^{adj} \otimes \frac{1}{d} id$, wo $d = |\det f|$, besitzt. Wir definieren die Operation von Λ auf $\mathbb{C}^g \times V_f\Gamma \times \mathbb{R}$ durch

$$(z, \hat{v}, t).\lambda = (f^{-\nu}(z), f^{-\nu}(\hat{v}), t + \lambda) \text{ mit } \lambda = \nu \log q \in \Lambda.$$

beachte hierbei, dass $f : \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}^g$ ein Isomorphismus ist. V operiert auf $\mathbb{C}^g \times V_f\Gamma \times \mathbb{R}$ durch

$$(z, \hat{v}, t).v = (z + v, \hat{v} - v, t),\ v \in V.$$

Wir definieren das Element

$$\begin{aligned}[z,\hat{v},t] &:= \{(z,\hat{v},t).\lambda.v; v\in V, \lambda=\nu\log q, \nu\in\mathbb{Z}\}\\ &= \{(f^{-\nu}(z)+v, f^{-\nu}(\hat{v})-v, t+\nu\log q); \nu\in\mathbb{Z},\ v\in V\}\end{aligned}$$

aus $(\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma)\times_\Lambda \mathbb{R}$.
Man sieht, dass die Orbits der Operation des Flusses auf $X=(\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma)\times_\Lambda \mathbb{R}$ die Gestalt

$$\gamma_{[z,\hat{v},t]} = \{[z,\hat{v},t+s]\in(\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma)\times_\Lambda \mathbb{R}; s\in\mathbb{R}\} = \{[z,\hat{v},s]\in(\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma)\times_\Lambda \mathbb{R}; s\in\mathbb{R}\}$$

haben. Aufgrund der Definition des Elements $[z,\hat{v},t]$ gilt nun

$$\begin{cases} z &= f^{-\nu}(z)+v\\ \hat{v} &= f^{-\nu}(\hat{v})-v\\ t+s &= t+\nu\log q\end{cases}$$

und

$$\begin{cases} z-f^{-\nu}(z) &= v\\ \hat{v}-f^{-\nu}(\hat{v}) &= -v\\ s &= \nu\log q.\end{cases}$$

Sei $\gamma_{[z,\hat{v},t]}$ ein Orbit mit Periode $s\in\mathbb{R}$, d.h $[z,\hat{v},t]=[z,\hat{v},t+s]$. Also ist $z-f^{-\nu}(z)\in V$ und $\hat{v}-f^{-\nu}(\hat{v})\in V$, d.h $(Id_{2g}-(f^{adj}\otimes\frac{1}{d})^{\nu})z\in V$ und $(Id_{2g}-(f^{adj}\otimes\frac{1}{d})^{\nu})\hat{v}\in V$. Für ein $[z,\hat{v},t]$ mit

$$z\in(Id_{2g}-(f^{adj}\otimes\frac{1}{d})^{-\nu})V \text{ und } \hat{v}\in(Id_{2g}-(f^{adj}\otimes\frac{1}{d})^{-\nu})V$$

haben wir

$$l(\gamma_{[z,\hat{v},t]})=\nu\log q.$$

Jetzt betrachten wir die Aktion von Λ auf $\hat{M}=\mathbb{C}^g\times_V V_f\Gamma$ wo
$\Lambda=\log q\ \mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$. Diese hat die Orbits

$$O_{[z,\hat{v}]}=\{[f^{-\nu}(z),f^{-\nu}(\hat{v})],\nu\in\mathbb{Z}\}=\{(f^{-\nu}(z)+v,f^{-\nu}(\hat{v})-v)/v\in V,\nu\in\mathbb{Z}\}.$$

Das heißt dass $O_{[z,\hat{v}]}$ endlich ist, wenn es ein $\nu\in\mathbb{N}-\{0\}$ gibt , so dass

$$[z,\hat{v}]=[f^{-\nu}(z)+v,f^{-\nu}(\hat{v})-v].$$

Das heißt $z = f^{-\nu}(z) + v$ und $\hat{v} = f^{-\nu}(\hat{v}) - v$. Dann ist $z \in (Id_{2g} - (f^{adj} \otimes \frac{1}{d})^{-\nu})V$ und $\hat{v} \in (Id_{2g} - (f^{adj} \otimes \frac{1}{d})^{-\nu})V$, und in diesem Fall haben wir:

$$\sharp O_{[z,\hat{v}]} = \nu.$$

$\square$

1.3. Haar-Maß

Die abelsche Gruppe $V_f\Gamma = T_f\Gamma \otimes \mathbb{Q}$ ist lokalkompakt, und wir haben ein Haar-Maß μ_f auf $V_f\Gamma$. Auf $\tilde{X} = \mathbb{C}^g \times V_f\Gamma \times \mathbb{R}$ definieren wir das Maß

$$\tilde{\mu} = dx_1...dx_g.dy_1...dy_g \otimes \mu_f \otimes dt.$$

Proposition 2. *$\tilde{\mu}$ ist ein Λ-und V-invariantes Maß.*

Beweis
Sei $A \subset \mathbb{C}^g \times V_f\Gamma \times \mathbb{R}$ eine messbare Menge. Es genügt, den Fall zu betrachten, dass A von der Form $A = A_1 \times A_2 \times A_3$ ist, für $A_1 \subset \mathbb{C}^g$, $A_2 \subset V_f\Gamma$ und $A_3 \subset \mathbb{R}$ messbare Menge. Es ist

$$\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(A_1 \times A_2 \times A_3) = dx_1 \times ... \times dx_g.dy_1 \times ...dy_g(A_1) \times \mu_f(A_2) \times dt(A_3).$$

Die Operationen von Λ und V auf $\tilde{X}$ sind von der Form

$$(z, \hat{v}, t).\lambda = (f^{-\nu}(z), f^{-\nu}(\hat{v}), t + \nu \log q) \text{ für } \lambda = \nu \log q \in \Lambda$$

und

$$(z, \hat{v}).v = (z + v, z - v) \text{ für } v \in V.$$

Wir kürzen $dx_1...dx_g.dy_1...dy_g$ und dt durch μ_1 beziehungsweise μ_2 ab.

$$\tilde{\mu}(A) = \mu_1(A_1) \times \mu_f(A_2) \times \mu_2(A_3).$$

Wir kommen nun zu dem Beweis, dass $\tilde{\mu}$ invariant unter Λ und V ist. Per Definition ist

$$[z, \hat{v}, t] = \{(f^{-\nu}(z) + v, f^{-\nu}(\hat{v}) - v, t + \nu \log q); v \in V, \nu \in \mathbb{Z}\}.$$

Dann ist

$$\tilde{\mu}(A+v) = \mu_1(A_1+v) \times \mu_f(A_2-v) \times \mu_2(A_3).$$

Weil μ_1 und μ_f Haar Maße sind, haben wir

$$\tilde{\mu}(A+v) = \mu_1(A_1) \times \mu_f(A_2) \times \mu_2(A_3).$$

Für $\lambda = \nu \log q$, $\nu \in \mathbb{Z}$ ist

$$\tilde{\mu}(f^{-\nu}(A)) = \mu_1(f^{-\nu}(A_1)) \times \mu_f(f^{-\nu}(A_2)) \times \mu_2(A_3 + \nu \log q).$$

Um $\mu_f(f^{-\nu}(A_2))$ auszurechnen, betrachten wir die Sequenz

$$0 \to \varprojlim \Gamma/f^s(\Gamma) \xrightarrow{f^\nu} \varprojlim \Gamma/f^s(\Gamma) \xrightarrow{\varepsilon_\nu} \Gamma/f^\nu(\Gamma) \to 0.$$

Diese ist exakt, d.h die Sequenz

$$0 \to T_f\Gamma \xrightarrow{f^\nu} T_f\Gamma \xrightarrow{\varepsilon_\nu} \Gamma/f^\nu(\Gamma) \to 0,$$

ist exakt für alle $\nu \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$T_f\Gamma/f^\nu(T_f\Gamma) \cong \Gamma/f^\nu(\Gamma), \text{ für } \nu \in \mathbb{Z}.$$

Also gilt

$$\sharp T_f\Gamma/f^\nu(T_f\Gamma) = \sharp\Gamma/f^\nu(\Gamma) = |\det f^\nu| = |\det f|^\nu.$$

Aus der Isomorphie $f^{-\nu}(T_f\Gamma)/T_f\Gamma \xrightarrow{f^\nu} T_f\Gamma/f^\nu(T_f\Gamma)$ folgt

$$\sharp f^{-\nu}(T_f\Gamma)/T_f\Gamma = |\det f|^\nu,$$

also $\mu_f(f^{-\nu}(T_f\Gamma)/T_f\Gamma) = |\det f|^\nu$ und somit

$$\begin{aligned} \mu_f(f^{-\nu}(T_f\Gamma)) &= \mu_f(f^{-\nu}(T_f\Gamma)/T_f\Gamma)\mu_f(T_f\Gamma) \\ &= |\det f|^\nu \mu_f(T_f\Gamma). \end{aligned}$$

Sei nun $A_2 \subset T_f\Gamma \otimes \mathbb{Q}$ eine messbare Menge. Aus dem Isomorphismus $f : V_f\Gamma \to V_f\Gamma$ und dem Haar-Maß $\mu_f : V_f\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^+$ erhält man das Haar-Maß $f^{-\nu} * \mu_f(A_2) := \mu_f(f^{-\nu}(A_2))$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}^+$ mit $f^{-\nu} * \mu_f(A_2) = c.\mu_f(A_2)$. Für $A_2 = T_f\Gamma$ gilt

$$f^{-\nu} * \mu_f(T_f\Gamma) = \mu_f(f^{-\nu}(T_f\Gamma)) = |\det f|^\nu \mu_f(T_f\Gamma).$$

Dann ist $c = |\det f|^\nu$ und

$$\mu_f(f^{-\nu}(A_2)) = |\det f|^\nu \mu_f(A_2).$$

Für eine messbare Menge $A_3 \subset \mathbb{R}$. Sei μ_2 das Lebesgue-Maß. Dieses ist auch ein Haar Maß, und es gilt

$$\mu_2(A_3 + \nu \log q) = \mu_2(A_3).$$

Sei $A_1 \subset \mathbb{C}^g$ eine messbare Menge. Da

$$\begin{array}{rcl} \mu_1(f^{-\nu}(A_1)) & = & \int_{f^{-\nu}(A_1)} du^{2g} \\ & = & \int_{A_1} |Jf^{-\nu}| du^{2g} \\ & = & |Jf|^{-\nu} \mu_1(A_1) \end{array}$$

gilt und f linear ist, folgt $|Jf| = |\det f|$ und $\mu_1(f^{-\nu}(A_1)) = |\det f^{-\nu}| \mu_1(A_1)$. Für eine messbare Menge $A = A_1 \times A_2 \times A_3$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\mu}(f^{-\nu}(A)) & = & |Jf|^{-\nu} |\det f|^\nu \mu_1(A_1) \mu_f(A_2) \mu_2(A_3) \\ & = & |\det f|^{-\nu} |\det f|^\nu \tilde{\mu}(A) \\ & = & \tilde{\mu}(A). \end{array}$$

Daraus folgt die Behauptung.
$\tilde{\mu}$ ist Λ-und V-invariantes Maß auf $\tilde{X} = \mathbb{C}^g \times V_f\Gamma \times \mathbb{R}$, es induziert ein Maß μ auf dem kompakten Raum $X = (\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma) \times_\Lambda \mathbb{R}$. □

1.4. Blätterung

X ist ein $2g+1$-dimensionaler kompakter Raum. Wir definieren zwei Blätterungen auf X. Eine Blätterung $\mathcal{H}$ auf

$$X = (\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma) \times_\Lambda \mathbb{R}$$

ist durch $\Pi(\mathbb{C}^g \times \{\hat{v}\} \times \mathbb{R})$ gegeben. Hier ist

$$\Pi : \mathbb{C}^g \times V_f\Gamma \times \mathbb{R} \to (\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma) \times_\Lambda \mathbb{R}$$

die Projektion. Sei $\hat{v} \in V_f\Gamma$ fest und $[z, \hat{v}, t] \in X$, sei $z' \in \mathbb{C}^g$ und $t' \in \mathbb{R}$, so dass $\Pi(z', \hat{v}, t') = [z, \hat{v}, t]$, d.h $[z, \hat{v}, t] = [z', \hat{v}, t']$. Dann existiert ein $\nu \in \mathbb{Z}$ mit

$$(z, \hat{v}, t) = (f^{-\nu}(z') + v, f^{-\nu}(\hat{v}) - \hat{v}, t' + \nu \log q)$$

Also gilt

$$\begin{cases} z = & f^{-\nu}(z') + v \\ \hat{v} = & f^{-\nu}(\hat{v}) - v \\ t = & t' + \nu \log q \end{cases},$$

d.h.

$$\begin{cases} f^{-\nu}(z') - z & \in & V \\ f^{-\nu}(\hat{v}) - \hat{v} & \in & V \\ t' - t & = & -\nu \log q \end{cases}$$

Insbesondere ist $f^{-\nu}(\hat{v}) - \hat{v} \in V$.
Sei $\Lambda_{\hat{v}} = \{\nu \log q; f^{-\nu}(\hat{v}) - \hat{v} \in V\}$ eine Untergruppe von Λ.
Erster Fall: ist $\Lambda_{\hat{v}} = 0$, so gilt

$$\Pi(\mathbb{C}^g \times \{\hat{v}\} \times \mathbb{R}) = \mathbb{C}^g \times \{\hat{v}\} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{C}^g \times \mathbb{R}.$$

Zweiter Fall: für $\Lambda_{\hat{v}} \neq 0$, ist

$$\Pi(\mathbb{C}^g \times \{\hat{v}\} \times \mathbb{R}) \cong \mathbb{C}^g \times_{\Lambda_{\hat{v}}} \mathbb{R}$$

wobei $\Lambda_{\hat{v}}$ auf $\mathbb{C}^g \times \mathbb{R}$ durch

$$\nu \log q.(z,t) = (f^{-\nu}(z) + f^{-\nu}(\hat{v}) - \hat{v}, t + \nu \log q)$$

operiert. Sei j die durch

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^g \times_{\Lambda_{\hat{v}}} \mathbb{R} & \stackrel{j}{\hookrightarrow} & (\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma) \times_\Lambda \mathbb{R} \\ [z,t] & \longrightarrow & [z,\hat{v},t] \end{array}$$

definierte Abbildung. Sie ist injektiv und wohldefiniert. Und somit sind die Blätter von X entweder isomorph zu $\mathbb{C}^g \times \mathbb{R}$, oder isomorph zu $\mathbb{C}^g \times_{\Lambda_{\hat{v}}} \mathbb{R}$.
Die zweite Blätterung $\mathcal{F}$ auf X ist durch $\Pi(\mathbb{C}^g \times \{\hat{v}\} \times \{t\})$ gegeben. Die Blätter sind in diesem Fall isomorph zu $\mathbb{C}^g$.

1.5. Konforme Metrik

Eine Riemannsche Metrik g auf dem Tangentialraum $T\mathcal{F}$ der Blätter auf $(\mathbb{C}^g \times V_f\Gamma) \times \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\begin{array}{rlcl} g_{(z,\hat{v},t)}: & T\mathcal{F} \times T\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (u,w) & \longmapsto & \exp(gt) \sum_{i=1}^{g} Re(u_i \bar{w}_i). \end{array}$$

Wir bezeichnen das Skalarprodukt $\sum_{i=1}^{g} Re(u_i \bar{w}_i)$ mit $< u, w >$.

Lemma 5. *Die oben definierte Riemannsche Metrik g ist V-und Λ-invariant.*

Beweis
Sei

$$\begin{array}{rlcl} h_{(\nu,v)}: & \mathbb{C}^g \times V_f\Gamma \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}^g \times V_f\Gamma \times \mathbb{R} \\ & (z,\hat{v},t) & \longmapsto & (f^{-\nu}(z) + v, f^{-\nu}(\hat{v}) - v, t + \nu \log q) \end{array}$$

die induzierte Abbildung der Λ-und V-Operation auf $\tilde{X}$ mit $\nu \in \mathbb{Z}$ und $v \in V$. Wir bezeichnen im folgenden mit dh (bzw df) das totale Differential der Funktion h(bzw f) Jetzt zeigen wir, dass g konform ist

$$\begin{aligned} g_{h(z,\hat{v},t)}(dh(u), dh(w)) &= g(df^{-\nu}_{(z,\hat{v},t)}(u), df^{-\nu}_{(z,\hat{v},t)}(w)) \\ &= exp(g(t + \nu \log q)) < df^{-\nu}_{(z,\hat{v},t)}(u), df^{-\nu}_{(z,\hat{v},t)}(w) > \\ &= exp(gt).q^{g\nu} < f^{-\nu}(u), f^{-\nu}(w) > \\ &= exp(gt).q^{g\nu} < (f^{-\nu})^* f^{-\nu}(u), w > . \end{aligned}$$

In unserer Behauptung ist $f^*.f = \det f.Id$, mit $f^* = \overline{A}^t$ die transponierte Konjugierte von A. Die Koeffizienten von A sind ganze Zahlen. Dann gilt $f^* = A^t$ und damit

$$\begin{aligned} (f^{-\nu})^* f^{-\nu} &= (f^*)^{-\nu} f^{-\nu} \\ &= (f^{-1} \det f)^{-\nu} f^{-\nu} \\ &= (\det f)^{-\nu} id, \end{aligned}$$

und es folgt

$$\begin{aligned} g_{h(z,\hat{v},t)}(dh(u), dh(w)) &= exp(gt) q^{g\nu} < (\det f)^{-\nu} id.u, w > \\ &= exp(gt) q^{g\nu} (\det f)^{-\nu} < u, w > \\ &= exp(gt) < u, w > \\ &= g_{(z,\hat{v},t)}(u, w). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass g für $q^g = \det f$ konform ist. □

1.6. Index des de Rham-Operators

Die Riemannsche Metrik g auf $T\mathcal{F}$ induziert eine Riemannsche Metrik auf $\Lambda^\bullet T^*\mathcal{F}$. Zusammen mit den Maß μ auf X definiert diese ein Skalarprodukt auf $\mathcal{A}^\bullet_\mathcal{F}(X)$. Hier ist $\mathcal{A}^j_\mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \Lambda^j T^*X)$ der Raum der j-Formen auf X. Wir betrachten den De Rham-Komplex entlang der $\mathcal{F}$-Blätterung. Hier ist $d_\mathcal{F}$ die äußere Ableitung.

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^0_\mathcal{F}(X) \xrightarrow{d_\mathcal{F}} \mathcal{A}^1_\mathcal{F}(X) \xrightarrow{d_\mathcal{F}} \dots \xrightarrow{d_\mathcal{F}} \mathcal{A}^{2g}_\mathcal{F}(X) \longrightarrow 0.$$

Der Operator $d_\mathcal{F}$ besitzt einen adjungierten Operator

$$d^\dagger_\mathcal{F} : \mathcal{A}^\bullet_\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{A}^{\bullet-1}_\mathcal{F}(X),$$

das heißt

$$(d_\mathcal{F} w, u) = (w, d^\dagger_\mathcal{F} u).$$

Sei $f \in C^\infty(X)$, der Operator $d_\mathcal{F} : \mathcal{A}^0_\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{A}^1_\mathcal{F}(X)$ ist durch die Formel

$$d^0_\mathcal{F} f = \sum_{i=1}^g \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i\right)$$

gegeben. Wir berechnen nun $d^j_\mathcal{F} w$ und $d^{\dagger j}_\mathcal{F} w$ für $j \geq 1$.
Sei $w \in \mathcal{A}^1_\mathcal{F}(X)$ mit $w = \sum\limits_{i=1}^g (\alpha_i dx_i + \beta_i dy_i)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d^1_\mathcal{F} w &= \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g \tfrac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i + \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g \tfrac{\partial \alpha_i}{\partial y_j} dy_j \wedge dx_i + \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g \tfrac{\partial \beta_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dy_i \\ &+ \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g \tfrac{\partial \beta_i}{\partial y_j} dy_j \wedge dy_i. \end{aligned}$$

Also

$$d^1_\mathcal{F} w = \sum_{i,j,i\neq j} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i + \sum_{i,j,i\neq j} \left(-\frac{\partial \alpha_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i}\right) dx_i \wedge dy_j + \sum_{i,j,i\neq j} \frac{\partial \beta_i}{\partial y_j} dy_j \wedge dy_i.$$

Für $f \in C^\infty(X)$ und $w \in \mathcal{A}^1_{\mathcal{F}}(X)$ gilt

$$\begin{aligned}
(d^{0\dagger}_{\mathcal{F}} w, f) &= (w, d^0_{\mathcal{F}} f) \\
&= (\sum_{i=1}^{g} \alpha_i dx_i + \beta_i dy_i, \sum_{j=1}^{g} \tfrac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \tfrac{\partial f}{\partial y_j} dy_j) \\
&= \sum_{i=1}^{g} \sum_{j=1}^{g} (\alpha_i dx_i + \beta_i dy_i, \tfrac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \tfrac{\partial f}{\partial y_j} dy_j) \\
&= \sum_{i=1}^{g} \int_X \alpha_i \tfrac{\partial f}{\partial x_i} < dx_i, dx_i > + \beta_i \tfrac{\partial f}{\partial y_i} < dy_i, dy_i > d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{g} \int_X \exp gt (\alpha_i \tfrac{\partial f}{\partial x_i} + \beta_i \tfrac{\partial f}{\partial y_i}) d\mu.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der partiellen Integration erhält man

$$\begin{aligned}
(d^{0\dagger}_{\mathcal{F}} w, f) &= -\sum_{i=1}^{g} \int_X \exp gt (\tfrac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} f + \tfrac{\partial \beta_i}{\partial y_i} f) d\mu \\
&= -\sum_{i=1}^{g} \int_X \exp gt (\tfrac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} + \tfrac{\partial \beta_i}{\partial y_i}) f d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{g} < -\exp gt (\tfrac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} + \tfrac{\partial \beta_i}{\partial y_i}), f > \\
&= < -\exp gt \sum_{i=1}^{g} (\tfrac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} + \tfrac{\partial \beta_i}{\partial y_i}), f > .
\end{aligned}$$

Es folgt

$$d^{0\dagger}_{\mathcal{F}} w = -\exp gt \sum_{i=1}^{g} (\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \beta_i}{\partial y_i}).$$

Nun sei $w \in \mathcal{A}^j_{\mathcal{F}}(X)$ mit $w = \sum\limits_{\nu_1 < \ldots < \nu_j} w_{\nu_1 \ldots \nu_j} du_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge du_{\nu_j}$ und $u_{\nu_i} = x_{\nu_i}$ *oder* $u_{\nu_i} = y_{\nu_i}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
d^j w &= \sum_{\nu_1 < \ldots < \nu_j} dw_{\nu_1 \ldots \nu_j} \wedge du_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge du_{\nu_j} \\
&= \sum_{\nu_1 < \ldots < \nu_j} (\sum_{i=1}^{2g} \tfrac{\partial w_{\nu_1 \ldots \nu_j}}{\partial u_i} du_i) \wedge du_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge du_{\nu_j} \\
&= \sum_{\nu_1 < \ldots < \nu_{j+1}} (\sum_{i=1}^{j+1} (-1)^{i-1} \tfrac{\partial w_{\nu_1 \ldots \widehat{\nu_i} \ldots \nu_{j+1}}}{\partial u_{\nu_i}}) du_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge du_{\nu_{j+1}}.
\end{aligned}$$

Das Skalarprodukt auf $\mathcal{A}^j_{\mathcal{F}}(X)$ ist definiert durch

$$\begin{aligned}
(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_j, dx_1 \wedge \ldots . \wedge dx_j) &= \int_X < dx_1, dx_1 > \ldots < dx_j, dx_j > d\mu \\
&= \int_X \exp(jgt) d\mu.
\end{aligned}$$

Um die $(j-1)^{te}$-Form $d_{\mathcal{F}}^{j-1\dagger}w$ zu berechnen, betrachten wir $\eta \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{j-1}(X)$ mit

$$\eta = \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_{j-1}} \alpha_{\nu_1\ldots\nu_{j-1}} du_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge du_{\nu_{j-1}}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
(d_{\mathcal{F}}^{j-1\dagger}w, \eta) &= (w, d_{\mathcal{F}}^{j-1}\eta) \\
&= \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_j} (w_{\nu_1\ldots\nu_j} du_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge du_{\nu_j}, \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i-1} \tfrac{\partial \alpha_{\nu_1\ldots\widehat{\nu_i}\ldots\nu_j}}{\partial u_{\nu_i}} du_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge du_{\nu_j}) \\
&= \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_j} \int_X w_{\nu_1\ldots\nu_j} \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i-1} \tfrac{\partial \alpha_{\nu_1\ldots\widehat{\nu_i}\ldots\nu_j}}{\partial u_{\nu_i}} < du_{\nu_1}, du_{\nu_1} > \ldots < du_{\nu_j}, du_{\nu_j} > d\mu \\
&= \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_j} \int_X \exp(jgt) w_{\nu_1\ldots\nu_j} \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i-1} \tfrac{\partial \alpha_{\nu_1\ldots\widehat{\nu_i}\ldots\nu_j}}{\partial u_{\nu_i}} d\mu \\
&= \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_j} \int_X \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i-1} \exp(jgt) w_{\nu_1\ldots\nu_j} \tfrac{\partial \alpha_{\nu_1\ldots\widehat{\nu_i}\ldots\nu_j}}{\partial u_{\nu_i}} d\mu \\
&= - \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_j} \int_X \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i-1} \exp(jgt) \tfrac{\partial w_{\nu_1\ldots\nu_j}}{\partial u_{\nu_i}} \alpha_{\nu_1\ldots\widehat{\nu_i}\ldots\nu_j} d\mu \\
&= \exp gt \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_j} \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i} (\tfrac{\partial w_{\nu_1\ldots\nu_j}}{\partial u_{\nu_i}} du_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{du_{\nu_i}} \wedge \ldots \wedge du_{\nu_j}, \\
&\qquad \alpha_{\nu_1\ldots\hat{\nu}_i\ldots\nu_j} du_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{du_{\nu_i}} \wedge \ldots \wedge du_{\nu_j}) \\
&= \exp gt \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_j} (\sum_{i=1}^{j} (-1)^{i} \tfrac{\partial w_{\nu_1\ldots\nu_j}}{\partial u_{\nu_i}} du_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{du_{\nu_i}} \wedge \ldots \wedge du_{\nu_j}, \\
&\qquad \sum_{i=1}^{j} \alpha_{\nu_1\ldots\widehat{\nu_i}\ldots\nu_j} du_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{du_{\nu_i}} \wedge \ldots \wedge du_{\nu_j}) \\
&= (\exp gt \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_j} \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i} \tfrac{\partial w_{\nu_1\ldots\nu_j}}{\partial u_{\nu_i}} du_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{du_{\nu_i}} \wedge \ldots \wedge du_{\nu_j}, \\
&\qquad \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_j} \sum_{i=1}^{j} \alpha_{\nu_1\ldots\hat{\nu}_i\ldots\nu_j} du_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{du_{\nu_i}} \wedge \ldots \wedge du_{\nu_j}).
\end{aligned}$$

Also

$$d_{\mathcal{F}}^{j-1\dagger}w = \exp gt \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_j} \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i} \frac{\partial w_{\nu_1\ldots\nu_j}}{\partial u_{\nu_i}} du_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{du_{\nu_i}} \wedge \ldots \wedge du_{\nu_j}.$$

Sei $\mathcal{A}_{\mathcal{F},L^2}(X)$ die L^2- Komplettierung von $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{\bullet}(X)$. Wir definieren den Operator $\tilde{d} := d^{\dagger *}$

$$\tilde{d} : \mathcal{A}_{\mathcal{F},L^2}^{\bullet}(X) \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{F},L^2}^{\bullet+1}(X)$$

Wir setzen

$$Harm^j_{L^2}(X) = Ker\widetilde{d}^j_{\mathcal{F}} \cap Ker(\widetilde{d}^{j-1}_{\mathcal{F}})^*$$

und

$$\widetilde{Harm}^j_{L^2}(X) = Ker\widetilde{d}^j_{\mathcal{F}} \cap Ker\widetilde{d^{\dagger j-1}_{\mathcal{F}}}.$$

Ein $w \in \mathcal{A}^j_{\mathcal{F}}(X)$ heißt eine $\mathcal{F}$-harmonische Form auf X, wenn $\Delta_{\mathcal{F}} w = 0$ gilt. Hier ist $\Delta_{\mathcal{F}} = \tilde{d}_{\mathcal{F}}\tilde{d}^*_{\mathcal{F}} + \tilde{d}^*_{\mathcal{F}}\tilde{d}_{\mathcal{F}}$ der Laplace-Operator auf X. Wir wollen eine Basis von $Harm^j_{L^2}(X)$ berechnen. Sei $w = \alpha_w du_{\nu_{n_1}} \wedge ... \wedge du_{\nu_{n_j}}$ mit α_w eine V-invariante, $\mathbb{C}$-wertige L^2_{Loc}-Funktion auf $\tilde{X}$. Eine Form w ist eine Λ-Invariante, wenn für $\lambda = \nu \log q \in \Lambda$ gilt

$$\begin{aligned}
w &= (f^\nu)^* w \\
&= (f^\nu)^*(\alpha_w\ du_{\nu_{n_1}} \wedge ... \wedge du_{\nu_{n_j}}) \\
&= ((f^\nu)^*\alpha_w)\ d(f^\nu)^* u_{\nu_{n_1}} \wedge ... \wedge d(f^\nu)^* u_{\nu_{n_j}} \\
&= (f^\nu)^*\alpha_w\ d(f^\nu)u_{\nu_{n_1}} \wedge ... \wedge d(f^\nu)u_{\nu_{n_j}} \\
&= (f^\nu)^*\alpha_w\ (\sum_{i=1}^{2g} \frac{\partial(f^\nu)_{\nu_{n_1}}}{\partial u_i} du_i) \wedge ... \wedge (\sum_{i=1}^{2g} \frac{\partial(f^\nu)_{\nu_{n_j}}}{\partial u_i} du_i) \\
&= (f^\nu)^*\alpha_w \sum_{m_1,...,m_j \in \{1,...,2g\}} \frac{\partial(f^\nu)_{\nu_{n_1}}}{\partial u_{m_1}} ... \frac{\partial(f^\nu)_{\nu_{n_j}}}{\partial u_{m_j}} du_{m_1} \wedge ... \wedge du_{m_j}.
\end{aligned}$$

Hier ist $(f^\nu)^* : \mathcal{A}^j_{\mathcal{F}}(\tilde{X}) \longrightarrow \mathcal{A}^j_{\mathcal{F}}(\tilde{X})$ die lineare Abbildung, die von $f^\nu : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ induziert wird. Aus $(f^\nu)^* w = w$ folgt

$$(f^\nu)^*\alpha_w\ (\sum_{m_1,...,m_j \in \{1,...,2g\}} \frac{\partial(f^\nu)_{\nu_{n_1}}}{\partial u_{m_1}} ... \frac{\partial(f^\nu)_{\nu_{n_j}}}{\partial u_{m_j}} du_{m_1} \wedge ... \wedge du_{m_j}) = \alpha_w\ du_{\nu_{n_1}} \wedge ... \wedge du_{\nu_{n_j}}.$$

Also ist

$$(f^\nu)^*\alpha_w(\sum_{(m_1,...,m_j)=(\sigma(n_1),...,\sigma(n_j)),\sigma \in S_j} (-1)^{sign\sigma} \frac{\partial(f^\nu)_{\nu_{n_1}}}{\partial u_{m_1}} ... \frac{\partial(f^\nu)_{\nu_{n_j}}}{\partial u_{m_j}}) = \alpha_w.$$

Hier ist S_j die symmetrische Gruppe der Ordnung n. Dann folgt

$$(f^\nu)^*\alpha_w(J(f^\nu)|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}) = \alpha_w.$$

Aus der Linearität von f folgt die Linearität von f^ν. Also ist

$$J(f^\nu)|_{u_{n_1},...,u_{n_j}} = \det(f^\nu|_{u_{n_1},...,u_{n_j}})$$

und somit $(f^\nu)^*\alpha_w \det(f^\nu|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}) = \alpha_w$, d.h. $(f^\nu)^*\alpha_w = [\det(f^\nu|_{u_{n_1},...,u_{n_j}})]^{-1}\alpha_w$.
Um die Rechnung zu vereinfachen, betrachten wir eine Funktion $g \in C^\infty(\tilde{X})$, so dass $\alpha_w g$ Λ-Invariante ist das heißt

$$(f^\nu)^*(\alpha_w g) = (f^\nu)^*\alpha_w (f^\nu)^* g = (\det(f^\nu|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}))^{-1}\alpha_w . g \circ f^\nu.$$

Aus der Gleichung

$$(f^\nu)^*(\alpha_w g) = \alpha_w g$$

folgt

$$(\det(f^\nu|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}))^{-1}\alpha_w . g \circ f^\nu = \alpha_w g,$$

also

$$g \circ f^\nu = \det(f^\nu|_{u_{n_1},...,u_{n_j}})\ g.$$

Sei

$$\begin{aligned} g(t) &= \exp(-t \log_q \ \det \ f|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}) \\ &= \exp(-t \log_q \ \det(f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}). \end{aligned}$$

Wir haben $g \in C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\tilde{X})$, g ist unabhängig von den Variablen z und $\hat{v}$, sie erfüllt

$$\begin{aligned} & g \circ f^\nu(t) = g(t - \nu \log q) \\ & = \exp(-t\ log_q \det(f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}) \exp(\nu \log q \log_q \det(f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}) \\ & = g(t) \exp(\nu \log q \log_q \det(f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}) \\ & = g(t) \det((f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}})^\nu. \end{aligned}$$

Wir wollen nun $\det((f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}})^\nu$ berechnen. Dafür betrachten wir zuerst den Fall mit

$$f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{2g} \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall, dass die Abbildung f Diagonal ist, haben wir

$$\begin{aligned} g \circ f^\nu(t) &= g(t) \det((f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}})^\nu \\ &= g(t) \det(f^\nu_{n_1}, ..., f^\nu_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}} \\ &= g(t) \det(f^\nu|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}). \end{aligned}$$

Also für

$$g(t) = \exp(-t \log_q \ \det(f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}),$$

haben wir $\alpha_w g$ ist Λ-invariant

$$\begin{array}{rcl}(f^\nu)^*(\alpha_w g) & = & (\det(f^\nu|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}))^{-1}\alpha_w g(t)\det(f^\nu|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}) \\ & = & \alpha_w g.\end{array}$$

Das Produkt $\alpha_w g \in L^2(\mathbb{R}/\Lambda, \mathbb{C})$ ist und die Menge $\{t + \Lambda \longmapsto \exp(\frac{2i\pi\nu t}{\log q}), \nu \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Basis von $L^2(\mathbb{R}/\Lambda, \mathbb{C})$. Daraus folgt

$$\alpha_w = \exp(t(\log_q \det(f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}} + \frac{2i\pi\nu}{\log q})),$$

und damit ist eine j-harmonisch Form auf X durch die Formel

$$w = \exp(t(\log_q \det((f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}} + \frac{2i\pi\nu}{\log q})))du_{n_1} \wedge ... \wedge du_{n_j}$$

wo $n_1 < ... < n_j$ und $\nu \in \mathbb{Z}$ gegeben.

Proposition 3. *Die Menge*

$$\{\exp(t(\log_q \det(f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}} + \frac{2i\pi\nu}{\log q}))du_{n_1} \wedge ... \wedge du_{n_j}, n_1 < ... < n_j, \nu \in \mathbb{Z}\}$$

ist eine Orthogonal Basis von $Harm^j_{L^2}(X)$.

Beweis

Der Beweis verläuft analog zu dem entsprechenden etwas schwierigerem Argument für den Dolbeault-Operator in Abschnitt 1.7.

Sei $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Wir definieren den Operator

$$S_j(\alpha) := \int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\phi^{t*}dt.$$

Hier ist $\phi(s) = \int_{\mathbb{R}} \exp(ts)\alpha(t)dt$. Der transversale Index des De Rham Komplexes entlang den $\mathcal{F}$-Blätterung ist

$$\begin{array}{rcl}Ind_t(d_{\mathcal{F}})(\alpha) & = & \sum_{j=0}^{2g}(-1)^j Tr(S_j(\alpha)|Harm^j_{L^2}(X)) \\ & = & \sum_{j=0}^{2g}(-1)^j \sum_{i\in I}(S_j(\alpha)h_i, h_i) \\ & = & \sum_{j=0}^{2g}(-1)^j \sum_{i\in I}(\int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\phi^{t*}(h_i)dt, h_i).\end{array}$$

Hier gehört h_i zur Basis von $Harm^j_{L^2}(X)$. Für

$$h_i = \{\exp(s(\log_q \det(f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}} + \frac{2i\pi\nu}{\log q}))du_{n_1} \wedge ... \wedge du_{n_j}, n_1 < ... < n_j\}$$

gilt

$$\begin{aligned}
&(\textstyle\int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\phi^{t*}(h_i)dt, h_i)\\
&\quad = (\textstyle\int_{\mathbb{R}} \alpha(t)((\exp(t+s)(\log_q(\det(f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}) + \frac{2i\pi\nu}{\log q}))du_{n_1} \wedge ... \wedge du_{n_j}dt,\\
&\qquad \exp(s(\log_q(\det(f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}) + \frac{2i\pi\nu}{\log q}))du_{n_1} \wedge ... \wedge du_{n_j})\\
&\quad = \quad (\textstyle\int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\exp(t)(\log_q(\det(f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}) + \frac{2i\pi\nu}{\log q})dt\\
&\qquad \exp(s(\log_q(\det(f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}) + \frac{2i\pi\nu}{\log q})du_{n_1} \wedge ... \wedge du_{n_j},\\
&\qquad \exp(s)(\log_q(\det(f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}) + \frac{2i\pi\nu}{\log q})du_{n_1} \wedge ... \wedge du_{n_j})\\
&\quad = \quad \textstyle\int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\exp(t.(\log_q(\det(f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}) + \frac{2i\pi\nu}{\log q}))dt\\
&\quad = \quad \phi(\log_q(\det(f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}) + \frac{2i\pi\nu}{\log q}).
\end{aligned}$$

Da $\phi(s) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\exp(st)dt$ ist, gilt

$$Ind_t(d_{\mathcal{F}})(\alpha) = \sum_{j=0}^{2g}(-1)^j \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \sum_{n_1<...<n_j} \phi(\log_q(\det(f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}) + \frac{2i\pi\nu}{\log q}).$$

Dann ist der transversale Index $Ind_t(d_{\mathcal{F}})$ der de Rham Komplexes auf einer Teste Funktion α

$$Ind_t(d_{\mathcal{F}})(\alpha) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{2g}(-1)^j \sum_{n_1<...<n_j} \phi(\log_q(\det(f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}}) + \frac{2i\pi\nu}{\log q}).$$

Wegen f diagonal ist

$$Matf = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{2g} \end{pmatrix}$$

so gilt $\det(f_{n_1}, ..., f_{n_j})|_{u_{n_1},...,u_{n_j}} = \lambda_{n_1}...\lambda_{n_j}$ und somit

$$Ind_t(d_{\mathcal{F}})(\alpha) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{2g}(-1)^j \sum_{n_1<...<n_j} \phi(\log_q(\lambda_{n_1}...\lambda_{n_j}) + \frac{2i\pi\nu}{\log q}).$$

Andererseits ist

$$\phi(\log_q(\lambda_{n_1}...\lambda_{n_j}) + \frac{2i\pi\nu}{\log q}) = \int_{\mathbb{R}} \exp(t(\log_q(\lambda_{n_1}...\lambda_{n_j}) + \frac{2i\pi\nu}{\log q}))\alpha(t)dt.$$

Wir substituieren die Variable T durch $\frac{t}{\log q}$ und erhalten

$$\phi(\log_q(\lambda_{n_1}...\lambda_{n_j}) + \frac{2i\pi\nu}{\log q}) = \log q \int_{\mathbb{R}} \exp(2i\pi\nu T)\exp((\log(\lambda_{n_1}...\lambda_{n_j})T)\alpha(\log qT)dT.$$

Für jede $n_1 < ... < n_j$, setzen wir

$$\psi_{n_1,...,n_j}(T) = \exp(\log(\lambda_{n_1}...\lambda_{n_j}))T)\alpha(\log qT).$$

Mit Hilfe der Poissonschen Summationformel

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_{n_1,...,n_j}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}_{n_1,...,n_j}(n),$$

wobei $\hat{\psi}$ durch

$$\hat{\psi}_{n_1,...,n_j}(T) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-2i\pi Tx)\psi_{n_1,...,n_j}(x)dx$$

definiert ist, folgt also

$$\phi(\log_q(\lambda_{n_1}...\lambda_{n_j}) + \frac{2i\pi\nu}{\log q}) = \log q \int_{\mathbb{R}} \exp(2i\pi\nu T)\psi_{n_1,...,n_j}(T)dT, \ \nu \in \mathbb{Z}.$$

Für $\nu = -n$, $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} \phi(\log_q(\lambda_{n_1}...\lambda_{n_j}) + \tfrac{2i\pi\nu}{\log q}) &= \log q \textstyle\int_{\mathbb{R}} \exp(-2i\pi nT)\psi_{n_1,...,n_j}(T)dT \\ &= \log q\hat{\psi}_{n_1,...,n_j}(n). \end{aligned}$$

Durch

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}_{n_1,...,n_j}(n) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_{n_1,...,n_j}(n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(\log(\lambda_{n_1}...\lambda_{n_j})n)\alpha(n\log q). \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
Ind_t(d_{\mathcal{F}})(\alpha) &= \log q \sum_{j=0}^{2g}(-1)^j \sum_{n_1<\ldots<n_j} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}_{n_1,\ldots,n_j}(n) \\
&= \log q \sum_{j=0}^{2g}(-1)^j \sum_{n_1<\ldots<n_j} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_{n_1,\ldots,n_j}(n) \\
&= \log q \sum_{j=0}^{2g}(-1)^j \sum_{n_1<\ldots<n_j} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(n \log \lambda_{n_1}\ldots\lambda_{n_j})\alpha(n\log q) \\
&= \log q \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (\sum_{j=0}^{2g}(-1)^j \sum_{n_1<\ldots<n_j} (\lambda_{n_1}\ldots\lambda_{n_j})^n)\alpha(n\log q) \\
&= \log q \sum_{n\in\mathbb{Z}} \prod_{j=1}^{2g}(1-\lambda_j^n)\alpha(n\log q).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$Ind_t(d_{\mathcal{F}})(\alpha) = \log q \sum_{n\in\mathbb{Z}} \det(1-f^n)\alpha(n\log q). \qquad (*)$$

Sei nun f diagonalisierbar. Dann gibt es zwei Isomorphismen S und F, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}^g & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^g \\
S\downarrow & & \downarrow S \\
\mathbb{C}^g & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^g
\end{array}$$

kommutiert. Setzen wir $\Gamma' = S(\Gamma)$, so ist $F(S(\Gamma)) = F(\Gamma') \subset \Gamma'$. Es bezeichne V' die Gruppe $\cup_n \frac{1}{(\det F)^n} S(\Gamma)$ und $V_F\Gamma$ die Gruppe $\varprojlim S(\Gamma)/F^n(S(\Gamma))$. Mit dieser Notation ist X' der Raum $(\mathbb{C}^g \times_{V'} V_F\Gamma) \times_\Lambda \mathbb{R}$.
Sei $\tilde{S} : (\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma) \times_\Lambda \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{C}^g \times_{V'} V_F\Gamma) \times_\Lambda \mathbb{R}$ die Abbildung die durch

$$\tilde{S}([z,\hat{v},t]) = [S(z), S(\hat{v}), t]$$

definiert wird. Dann kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma) \times_\Lambda \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma) \times_\Lambda \mathbb{R} \\
\tilde{S}\downarrow & & \downarrow\tilde{S} \\
(\mathbb{C}^g \times_{V'} V_F\Gamma) \times_\Lambda \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{F}} & (\mathbb{C}^g \times_{V'} V_F\Gamma) \times_\Lambda \mathbb{R}
\end{array}$$

d.h. es gilt

$$[F(S(z)), F(S(\hat{v})), t-\log q] = [S(f(z)), S(f(\hat{v})), t-\log q].$$

Hierbei ist

$$\tilde{f}([z,\hat{v},t]) = [f(z), f(\hat{v}), t - \log q]$$

und

$$\tilde{F}([z,\hat{v},t]) = [F(z), F(\hat{v}), t - \log q].$$

Für jeden Homomorphismus $h : X \mapsto Y$ haben wir eine lineare Abbildung

$$h^* : \mathcal{A}^i_{\mathcal{F}}(Y) \mapsto \mathcal{A}^i_{\mathcal{F}}(X)$$

derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^i_{\mathcal{F}}(X) & \xleftarrow{\tilde{f}^*} & \mathcal{A}^i_{\mathcal{F}}(X) \\ \tilde{S}^*\uparrow & & \uparrow\tilde{S}^* \\ \mathcal{A}^i_{\mathcal{F}}(X') & \xleftarrow{\tilde{F}^*} & \mathcal{A}^i_{\mathcal{F}}(X') \end{array}$$

kommutativ ist. Man hat folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} & \mathcal{A}^0_{\mathcal{F}}(X) & \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} & \mathcal{A}^1_{\mathcal{F}}(X) & \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} & ... & \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} & \mathcal{A}^{2g}_{\mathcal{F}}(X) & \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} & 0 \\ & & \tilde{S}^*\uparrow & & \tilde{S}^*\uparrow & & & & \tilde{S}^*\uparrow & & \\ 0 & \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} & \mathcal{A}^0_{\mathcal{F}}(X') & \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} & \mathcal{A}^1_{\mathcal{F}}(X') & \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} & ... & \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} & \mathcal{A}^{2g}_{\mathcal{F}}(X') & \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} & 0 \end{array}$$

Aus der Funktorialität von $d_{\mathcal{F}}$ folgt

$$(\tilde{S}^* \circ d_{\mathcal{F}})(w) = d_{\mathcal{F}}(\tilde{S}^*(w))$$

mit $w \in \mathcal{A}^j_{\mathcal{F}}(X')$. Sei nun $w \in Harm^j_{L^2}(X) = Ker\widetilde{d^j_{\mathcal{F}}} \cap Ker(\widetilde{d^{j-1}_{\mathcal{F}}})^*$ Dann ist $d^j_{\mathcal{F}}w = 0$ und es gilt $\tilde{S}^* \circ d^j_{\mathcal{F}}w = 0$, also $d^j_{\mathcal{F}}(\tilde{S}^*w) = 0$, d.h

$$\tilde{S}^*w \in Kerd^j_{\mathcal{F}}.$$

Aus $d^{\dagger j}_{\mathcal{F}}w = 0$ folgt $(d^{\dagger j}_{\mathcal{F}}w, \eta) = 0$ für alle η, also $(w, d^j_{\mathcal{F}}\eta) = 0$ für alle η. Für $u, v \in \mathcal{A}^j_{\mathcal{F}}(X')$ mit $u = \alpha\ du_{n_1} \wedge ... \wedge du_{n_j}$ und $w = \beta\ du_{n_1} \wedge ... \wedge du_{n_j}$ gilt

$$\begin{aligned} (\tilde{S}^*(u), \tilde{S}^*(w)) &= (\alpha \circ SdS_{n_1} \wedge ... \wedge dS_{n_j}, \beta \circ SdS_{n_1} \wedge ... \wedge dS_{n_j}) \\ &= \int_X \alpha \circ S.\beta \circ S \exp(jgt) |\det DS| d\mu \\ &= \int_X \alpha\beta \exp(jgt) d\mu \\ &= (u, w). \end{aligned}$$

Hier ist DS das totale Differential von S. Die Abbildung $\tilde{S}^* : \mathcal{A}^j_{\mathcal{F}}(X') \longrightarrow \mathcal{A}^j_{\mathcal{F}}(X)$ ist eine Isometrie, also für alle η

$$\begin{aligned}(\partial^{\dagger j} w, \eta) &= (w, \partial^j \eta)\\ &= (\tilde{S}^*(w), \tilde{S}^*(\partial^j \eta))\\ &= (\tilde{S}^*(w), \partial^j \tilde{S}^* \eta)\\ &= (\partial^{\dagger j} \tilde{S}^* w, \tilde{S}^* \eta).\end{aligned}$$

Wegen $(\partial^{\dagger j} w, \eta) = 0$ ist $(\partial^{\dagger j} S^* w, \tilde{S}^* \eta) = 0$ für alle η, es gilt also $\partial^{\dagger j} \tilde{S}^*(w) = 0$, d.h

$$\tilde{S}^*(w) \in Ker \partial^{\dagger j}.$$

Daraus folgt

$$\tilde{S}^*(Harm^j_{L^2}(X')) \subset Harm^j_{L^2}(X).$$

Ähnlich wie oben findet man, dass

$$\widetilde{S^{-1}}^*(Harm^j_{L^2}(X)) \subset Harm^j_{L^2}(X')$$

ist. Es gilt $\widetilde{S^{-1}}^* = (\widetilde{S}^*)^{-1}$, denn ist $(f \circ g)^* = g^* \circ f^* = id^* = id$, so haben wir

$$\tilde{S}^*(Harm^j_{L^2}(X')) = Harm^j_{L^2}(X).$$

Ist h_i ein Element der Basis von $Harm^j_{L^2}(X')$, so ist $H_i = \tilde{S}^*(h_i)$ ein Element der Basis von $Harm^j_{L^2}(X)$. Also berechnet sich der transversale Index der de Rham-Komplexe entlang der Blätter $\mathcal{F}$ zu

$$\begin{aligned}Ind_t(d_{\mathcal{F}})(\alpha) &= \sum_{j=0}^{2g}(-1)^j \sum_{i\in I}(\textstyle\int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\phi^{t^*}(H_i)dt, H_i)\\ &= \sum_{j=0}^{2g}(-1)^j \sum_{i\in I}(\textstyle\int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\phi^{t^*}(\tilde{S}^*(h_i))dt, \tilde{S}^*(h_i)).\end{aligned}$$

Für

$$h_i = exp(s(\det(F_{n_1}, ..., F_{n_j})|_{u_{n_1}\dots u_{n_j}} + \frac{2i\pi\nu}{\log q}))du_{n_1} \wedge ... \wedge du_{n_j}$$

gilt

$$\tilde{S}^*(h_i) = exp(s(\det(F_{n_1} \circ S, ..., F_{n_j} \circ S)|_{u_{n_1}\dots u_{n_j}} + \frac{2i\pi\nu}{\log q}))dS_{n_1} \wedge ... \wedge dS_{n_j}.$$

Also

$$\phi^{t*}(S^*(h_i)) = exp((s+t)\det(F_{n_1}\circ S,...,F_{n_j}\circ S)|_{u_{n_1}...u_{n_j}} + \frac{2i\pi\nu}{\log q})dS_{n_1}\wedge ... \wedge dS_{n_j}.$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}
Ind_t(d_{\mathcal{F}})(\alpha) = & \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{2g}(-1)^j \sum_{n_1<...<n_j} (\textstyle\int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\exp((s+t) \\
& (\log_q \det(F_{n_1}\circ S,...,F_{n_j}\circ S)|_{u_{n_1}...u_{n_j}} + \tfrac{2i\pi\nu}{\log q}))dS_{n_1}\wedge ... \wedge dS_{n_j}, \\
& \exp(s(\log_q \det(F_{n_1}\circ S,...,F_{n_j}\circ S)|_{u_{n_1}...u_{n_j}} + \tfrac{2i\pi\nu}{\log q}))dS_{n_1}\wedge ... \wedge dS_{n_j}) \\
& = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{2g}(-1)^j \sum_{n_1<...<n_j} \textstyle\int_{\mathbb{R}} \alpha(t) \\
& \exp(t(\log_q \det(F_{n_1}\circ S,...,F_{n_j}\circ S)|_{u_{n_1}...u_{n_j}} + \tfrac{2i\pi\nu}{\log q})) \\
& (\exp(s(\log_q \det(F_{n_1}\circ S,...,F_{n_j}\circ S)|_{u_{n_1}...u_{n_j}} + \tfrac{2i\pi\nu}{\log q}))dS_{n_1}\wedge ... \wedge dS_{n_j}, \\
& \exp(s(\log_q \det(F_{n_1}\circ S,...,F_{n_j}\circ S)|_{u_{n_1}...u_{n_j}} + \tfrac{2i\pi\nu}{\log q}))dS_{n_1}\wedge ... \wedge dS_{n_j}) \\
& = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{2g}(-1)^j \sum_{n_1<...<n_j} \phi(\log_q \det(F_{n_1}\circ S,...,F_{n_j}\circ S)|_{u_{n_1}...u_{n_j}} + \tfrac{2i\pi\nu}{\log q}) \\
& = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{2g}(-1)^j \sum_{n_1<...<n_j} \phi(\log_q(\det(F_{n_1},...,F_{n_j})\det S) + \tfrac{2i\pi\nu}{\log q}) \\
& = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{2g}(-1)^j \sum_{n_1<...<n_j} \phi(\log_q \det(F_{n_1},...,F_{n_j})|_{u_{n_1}...u_{n_j}} + \tfrac{2i\pi\nu}{\log q}) \\
& = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{2g}(-1)^j \sum_{n_1<...<n_j} \phi(\log_q(\lambda_{n_1}...\lambda_{n_j}) + \tfrac{2i\pi\nu}{\log q}).
\end{aligned}$$

Nach $(*)$ gilt

$$\begin{aligned}
Ind_t(d_{\mathcal{F}})(\alpha) &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{2g}(-1)^j \sum_{n_1<...<n_j} \phi(\log_q(\lambda_{n_1}...\lambda_{n_j}) + \tfrac{2i\pi\nu}{\log q}) \\
&= \log q \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \det(1-F^\nu)\alpha(\nu\log q) \\
&= \log q \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \det(1-f^\nu)\alpha(\nu\log q).
\end{aligned}$$

Mit $l(\gamma)$ bezeichnen wir die Länge der periodischen Orbits γ der $\mathbb{R}$-Operation auf

$(\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma) \times_\Lambda \mathbb{R}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\sum_\gamma l(\gamma)\sum_{k\geq 1}\alpha(kl(\gamma)) &= \sum_{n\geq 1}\sum_{l(\gamma)/n\log q} l(\gamma)\alpha(n\log q)\\ &= \sum_{n\geq 1}\sum_{\log q|\gamma_{\hat{M}}|/n\log q}\log q|\gamma_{\hat{M}}|\alpha(n\log q)\\ &= \log q\sum_{n\geq 1}(\sum_{|\gamma_M|/n}|\gamma_{\hat{M}}|)\alpha(n\log q).\end{aligned}$$

Es bezeichne $\hat{M}$ die $\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma$ und $\gamma_{\hat{M}}$ die endlichen Orbits der Operation von $\Lambda = \log q\mathbb{Z}$ auf $\hat{M}$. Wegen Lemma 1, Lemma 2 und Lemma 3 ist

$$\begin{aligned}\sum_{|\gamma_{\hat{M}}|/\nu}|\gamma_{\hat{M}}| &= \sum_{m\in\hat{M},|\gamma_m|/\nu} 1\\ &= \sharp\{[z,\hat{v}]\in\hat{M};\ni n\in\mathbb{N}^*,\{z,\hat{v}\}\in(Id_{2g}-f^n)^{-1}(V),n/\nu,z=-\hat{v}\}\\ &= \sharp\{[z,-z]\in\hat{M};z\in(f^\nu-1)^{-1}(V)\}\\ &= \sharp(1-f^\nu)^{-1}(V)/V\\ &= \sharp V/(1-f^\nu)(V)\\ &= \sharp\Gamma/(1-f^\nu)(\Gamma)\\ &= |\det(1-f^\nu)|.\end{aligned}$$

Für $k\geq 1$ erhalten wir

$$\sum_\gamma l(\gamma)\sum_{k\geq 1}\alpha(kl(\gamma)) = \log q\sum_{n\geq 1}|\det(1-f^n)|\alpha(n\log q).$$

Für $k\leq -1$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_\gamma l(\gamma)\sum_{k\leq -1}\exp(gkl(\gamma))\alpha(kl(\gamma)) &= \sum_{n\leq -1}\sum_{l(\gamma)/n\log q} l(\gamma)\exp(gn\log q)\alpha(n\log q)\\ &= \sum_{n\leq -1}\sum_{\log q|\gamma_{\hat{M}}|/n\log q}\log q|\gamma_M|\exp(gn\log q)\alpha(n\log q)\\ &= \log q\sum_{n\leq -1}(\sum_{|\gamma_{\hat{M}}|/-n}|\gamma_M|)q^{gn}\alpha(n\log q)\\ &= \log q\sum_{n\leq -1}|\det(1-f^{-n})|q^{gn}\alpha(n\log q)\\ &= \log q\sum_{n\leq -1}|\det(1-f^{-n})||\det f^n|\alpha(n\log q)\\ &= \log q\sum_{n\leq -1}|\det(1-f^n)|\alpha(n\log q).\end{aligned}$$

Dies zusammen ergibt

$$\begin{aligned}&\sum_\gamma l(\gamma)\sum_{k\geq 1}\alpha(kl(\gamma))+\sum_\gamma l(\gamma)\sum_{k\leq -1}\exp(gkl(\gamma))\alpha(kl(\gamma))\\&=\log q\sum_{n\geq 1}|\det(1-f^n)|\alpha(n\log q)+\quad\log q\sum_{n\leq -1}|\det(1-f^n)|\alpha(n\log q)\\&=\log q\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\det(1-f^n)|\alpha(n\log q).\end{aligned}$$

Damit ist der folgende Satz gezeigt

Satz 1. *Für $\alpha\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ gilt*

$$Ind_t(d_{\mathcal{F}}(\alpha))=\sum_\gamma l(\gamma)\sum_{k\geq 1}\alpha(kl(\gamma))+\sum_\gamma l(\gamma)\sum_{k\leq -1}\exp(gkl(\gamma))\alpha(kl(\gamma)).$$

Die transversal Index von de Rham Operator der verallgemeinerte Solenoid X ist geschrieben mit Hilfe von kompakte Orbits der $\mathbb{R}$-Operation auf X.

1.7. Index des Dolbeault-Operators

Wir betrachten jetzt $X=(\mathbb{C}^g\times_V V_f\Gamma)\times_\Lambda\mathbb{R}$ mit der komplexen Struktur auf dem Tangentialraum $T\mathcal{F}$ der Blätter. Der Dolbeault-Komplex auf X ist

$$0\longrightarrow\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{0,0}(X)\xrightarrow{\bar\partial_{\mathcal{F}}}\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{0,1}(X)\xrightarrow{\bar\partial_{\mathcal{F}}}\dots\xrightarrow{\bar\partial_{\mathcal{F}}}\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{0,g}(X)\longrightarrow 0.$$

Für $f\in C^\infty(X,\mathbb{C})$ ist

$$\bar\partial_{\mathcal{F}}f=\sum_{i=1}^g\frac{\partial f}{\partial\bar z_i}d\bar z_i.$$

Auf $T_c\mathcal{F}$ nehmen wir die hermitsche Metrik

$$g_{(z,\hat v,t)}(u,w)=\exp(gt)\sum_{i=1}^g u_i\bar w_i.$$

Diese Metrik induziert ein Skalarprodukt auf $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{0,\bullet}(X)$. Insbesondere ist

$$(d\bar z_i,d\bar z_i)=\int_X d\bar z_i\wedge\bar{*}d\bar z_i=2\exp gt\int_X d\mu.$$

Sei nun $w \in \mathcal{A}^{0,1}_{\mathcal{F}}(X)$ mit $w = \sum\limits_{i=1}^{g} \beta_i(z_1, ..., z_g)d\bar{z}_i$. Dann ist der adjungierte des Dolbeault-Operators auf eines 1-Form w gegeben durch

$$\bar{\partial}^{0\dagger}_{\mathcal{F}} w = -2 \exp gt \sum_{i=1}^{g} \frac{\partial \beta_i}{\partial z_i}.$$

Das Skalarprodukt der 1-Form w mit dem Dolbeault-Operator angewandt auf die Funktion f gibt

$$\begin{aligned}
(w, \bar{\partial}_{\mathcal{F}} f) &= (\sum_{i=1}^{g} \beta_i d\bar{z}_i, \sum_{j=1}^{g} \tfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j) \\
&= \int_X \sum_{i=1}^{g} \beta_i d\bar{z}_i \wedge \bar{*} \sum_{i=1}^{g} \tfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \\
&= \int_X \sum_{i=1}^{g} \beta_i d\bar{z}_i \wedge \sum_{i=1}^{g} \overline{(\tfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}) * d\bar{z}_i} \\
&= \int_X \sum_{i=1}^{g} \beta_i \overline{(\tfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_i})} dz_i \wedge \bar{*} d\bar{z}_i \\
&= 2 \exp gt \int_X \sum_{i=1}^{g} \beta_i \overline{(\tfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_i})} d\mu \\
&= 2 \exp gt \int_X \sum_{i=1}^{g} \beta_i (\tfrac{\partial \bar{f}}{\partial z_i}) d\mu \\
&= -2 \exp gt \int_X \sum_{i=1}^{g} (\tfrac{\partial \beta_i}{\partial z_i}) \bar{f} d\mu.
\end{aligned}$$

Ferner haben wir

$$\begin{aligned}
(\bar{\partial}^{0\dagger}_{\mathcal{F}} w, f) &= \int_X \bar{\partial}^{0\dagger} w \wedge \bar{*} f \\
&= \int_X \bar{\partial}^{0\dagger} w \bar{f} d\mu.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\bar{\partial}^{0\dagger}_{\mathcal{F}} w = -2 \exp gt \sum_{i=1}^{g} \frac{\partial \beta_i}{\partial z_i}.$$

Sei $w \in \mathcal{A}^{0,j}_{\mathcal{F}}(X)_{\mathbb{C}}$ mit $w = \alpha d\bar{z}_{n_1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_{n_j}$. Dann erhält man

$$\bar{\partial}^{j}_{\mathcal{F}} w = \sum_{i=1}^{g} \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \wedge d\bar{z}_{n_1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_{n_j}.$$

Der Operator $\bar{\partial}_{\mathcal{F}} : \mathcal{A}^{0,j}_{\mathcal{F}}(X)_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{A}^{0,j+1}_{\mathcal{F}}(X)_{\mathbb{C}}$ besitzt einen adjungierten Operator

$$\bar{\partial}^{\dagger}_{\mathcal{F}} : \mathcal{A}^{0,j+1}_{\mathcal{F}}(X)_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{A}^{0,j}_{\mathcal{F}}(X)_{\mathbb{C}}.$$

Für die $j-1$-Form $\eta=\sum\limits_{i=1}^{j}\beta_i d\bar z_{n_1}\wedge...\wedge\widehat{d\bar z_{n_i}}\wedge...\wedge d\bar z_{n_j}$ und j-form $w=\alpha d\bar z_{n_1}\wedge...\wedge d\bar z_{n_j}$ gilt

$$\begin{aligned}
(\bar\partial_{\mathcal F}^{\dagger}w,\eta) &= (w,\bar\partial_{\mathcal F}\eta)\\
&= (\alpha d\bar z_{n_1}\wedge...\wedge d\bar z_{n_j},\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{g}\tfrac{\partial\beta_i}{\partial\bar z_k}d\bar z_k\wedge d\bar z_{n_1}\wedge...\wedge\widehat{d\bar z_{n_i}}\wedge...\wedge d\bar z_{n_j})\\
&= \textstyle\int_X \alpha d\bar z_{n_1}\wedge...\wedge d\bar z_{n_j}\wedge\bar *\sum\limits_{i=1}^{j}\sum\limits_{k=1}^{g}\tfrac{\partial\beta_i}{\partial\bar z_k}d\bar z_k\wedge d\bar z_{n_1}\wedge...\wedge\widehat{d\bar z_{n_i}}\wedge...\wedge d\bar z_{n_j}\\
&= \textstyle\int_X \alpha d\bar z_{n_1}\wedge...\wedge d\bar z_{n_j}\wedge\sum\limits_{i=1}^{j}\sum\limits_{k=1}^{g}\overline{(\tfrac{\partial\beta_i}{\partial\bar z_k})}\bar *(d\bar z_k\wedge d\bar z_{n_1}\wedge...\wedge\widehat{d\bar z_{n_i}}\wedge...\wedge d\bar z_{n_j})\\
&= \textstyle\int_X \alpha\sum\limits_{i=1}^{j}\tfrac{\partial\overline{\beta_i}}{\partial z_{n_i}}d\bar z_{n_1}\wedge...\wedge d\bar z_{n_j}\wedge\bar *(d\bar z_{n_i}\wedge d\bar z_{n_1}\wedge...\wedge\widehat{d\bar z_{n_i}}\wedge...\wedge d\bar z_{n_j})\\
&= \textstyle\int_X \alpha\sum\limits_{i=1}^{j}(-1)^{i-1}\tfrac{\partial\overline{\beta_i}}{\partial z_{n_i}}d\bar z_{n_1}\wedge...\wedge d\bar z_{n_j}\wedge\bar *(d\bar z_{n_1}\wedge...\wedge d\bar z_{n_j})\\
&= 2^j\exp(jgt)\textstyle\int_X \alpha\sum\limits_{i=1}^{j}(-1)^{i-1}\tfrac{\partial\overline{\beta_i}}{\partial z_{n_i}}d\mu\\
&= 2^j\exp(jgt)\textstyle\int_X \sum\limits_{i=1}^{j}(-1)^{i}\tfrac{\partial\alpha}{\partial z_{n_i}}\overline{\beta_i}d\mu.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
(\bar\partial_{\mathcal F}^{\dagger}w,\eta) &= \textstyle\int_X\bar\partial_{\mathcal F}^{\dagger}w\wedge\bar *\eta\\
&= \textstyle\int_X\bar\partial_{\mathcal F}^{\dagger}w\wedge\bar *\sum\limits_{i=1}^{j}\beta_i d\bar z_{n_1}\wedge...\wedge\widehat{d\bar z_{n_i}}\wedge...\wedge d\bar z_{n_j}\\
&= \textstyle\int_X\sum\limits_{i=1}^{j}\bar\partial_{\mathcal F}^{\dagger}w\overline{\beta_i}\wedge\bar *(d\bar z_{n_1}\wedge\widehat{d\bar z_{n_i}}\wedge...\wedge d\bar z_{n_j}).
\end{aligned}$$

Also

$$2^j\exp(jgt)\int_X\sum_{i=1}^{j}(-1)^i\frac{\partial\alpha}{\partial z_{n_i}}\overline{\beta_i}d\mu=\int_X\sum_{i=1}^{j}\bar\partial_{\mathcal F}^{\dagger}w\overline{\beta_i}\wedge\bar *(d\bar z_{n_1}\wedge\widehat{d\bar z_{n_i}}\wedge...\wedge d\bar z_{n_j}).$$

Die Form $\bar\partial_{\mathcal F}^{\dagger}w$ ist eine $j-1$-Form, dann

$$\bar\partial_{\mathcal F}^{\dagger j}w=2\exp gt\sum_{i=1}^{j}(-1)^i\frac{\partial\alpha}{\partial z_{n_i}}d\bar z_{n_1}\wedge...\wedge\widehat{d\bar z_{n_i}}\wedge...\wedge d\bar z_{n_j}.$$

Sei $f \in Ker\tilde{\bar{\partial}}_{\mathcal{F}}$ eine $\mathbb{C}$-wertige H-invariante L^2_{Loc}-Funktion auf $\tilde{X} = \mathbb{C}^g \times V_f\Gamma \times \mathbb{R}$. Wir setzen

$$f_t[z_1, ..., z_g, \hat{v}] = f[z_1, ..., z_g, \hat{v}, t].$$

Aus $f \in L^2_{Loc}(\tilde{X})$ folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^g \times V_f\Gamma} |f|^2 dz_1 ... dz_g d\bar{z}_1 ... d\bar{z}_g d\mu_f dt < \infty.$$

Nach dem Satz von Fubini, ist

$$\int_{\mathbb{C}^g \times V_f\Gamma} |f|^2 dz_1 ... dz_g d\bar{z}_1 ... d\bar{z}_g d\mu_f < \infty \text{ fast überall } t \in \mathbb{R}.$$

So erhalten wir $f_t \in L^2(\hat{M})$ mit $\hat{M} = \mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma$. Die Charaktergruppe der kompakten abelschen Gruppe $\hat{M}$ ist

$$\hat{M}^\vee = \{\chi \otimes \chi' / \chi \in \mathbb{C}^{g\vee}, \chi' \in (V_f\Gamma)^\vee \text{sodass } \chi|_V = \chi'|_V\}.$$

Jedes Element $f_t \in L^2(\hat{M})$ hat die Form

$$f_t(z_1, ..., z_g, \hat{v}) = \sum_{\chi|_V = \chi'|_V} a_{\chi,\chi'} \chi(z_1, ..., z_g) \chi'(\hat{v}).$$

Für $\chi \in (\mathbb{C})^\vee$ existiert $w \in \mathbb{C}$, so dass $\chi(z) = \chi_w(z) = exp(z\bar{w} - \bar{z}w)$. Wegen $\chi \in (\mathbb{C}^g)^\vee = (\mathbb{C}^\vee)^g$ gilt

$$\chi(z_1, ..., z_g) = \prod_{i=1}^g \chi_i(z_i) = \prod_{i=1}^g exp(z_i\bar{w}_i - \bar{z}_i w_i) = exp(\sum_{i=1}^g z_i\bar{w}_i - \bar{z}_i w_i).$$

Für $f_t \in L^2(\hat{M})$ ist

$$\bar{\partial}_{z_i} f_t = \sum_{\chi|_V = \chi'|_V} a_{\chi,\chi'} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}_i}(z_1, ..., z_g) \chi'(\hat{v}) d\bar{z}_i \qquad \text{für } i = 1, ..., g.$$

Also gilt für $z = (z_1, ..., z_g)$

$$\bar{\partial}_z f_t = \sum_{i=1}^g \frac{\partial f_t}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i = \sum_{i=1}^g \sum_{\chi|_V = \chi'|_V} a_{\chi,\chi'} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}_i}(z_1, ..., z_g) \chi'(\hat{v}) d\bar{z}_i.$$

Sei $f_t \in \ker \bar{\partial}_z$ d.h $\bar{\partial}_z f_t = 0$ also $\sum_{\chi|_V = \chi'|_V} a_{\chi,\chi'} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}_i}(z_1, ..., z_g)\chi'(\hat{v}) = 0.$ für $i = 1, ..., g$. Aus

$$\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}_i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{g} exp(z_j \bar{w}_j - \bar{z}_j w_j) \frac{\partial (z_i \bar{w}_i - \bar{z}_i w_i)}{\partial \bar{z}_i} exp(z_i \bar{w}_i - \bar{z}_i w_i) = -w_i \chi$$

folgt dann

$$\sum_{\chi|_V = \chi'|_V} a_{\chi,\chi'} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}_i}(z_1, ..., z_g)\chi'(\hat{v}) = \sum_{\chi|_V = \chi'|_V} -a_{\chi,\chi'} w_i \chi(z_1, ..., z_g)\chi'(\hat{v}) \quad \text{für } i = 1, ..., g.$$

Wir erhalten

$$\sum_{\chi|_V = \chi'|_V} a_{\chi,\chi'} w_i \chi(z_1, ..., z_g)\chi'(\hat{v}) = 0.$$

Sei $\chi_1 \chi_1'$ ein Element der Basis des Raumes $L^2(\hat{M})$. Dann ist

$$(- \sum_{\chi|_V = \chi'|_V} a_{\chi,\chi'} w_i \chi(z_1, ..., z_g)\chi'(\hat{v}) d\bar{z}_i, \chi(z_1, ..., z_g)\chi'(\hat{v}) d\bar{z}_i) = 0.$$

Dann ist

$$-2 \int_X a_{\chi,\chi'} w_i \exp gt d\mu = 0.$$

Dies zeigt, dass

$$\exp(gt) a_{\chi,\chi'} w_i = 0.$$

Im Fall $w_i \neq 0$ haben wir $\chi \neq 1$ und $a_{\chi,\chi'} = 0$.
Im Fall $w_i = 0$ ist $\chi(z) = \exp(w_i z - \bar{w}_i \bar{z}) = 1$. Wegen $\chi = 1$ und $\chi|_V = \chi'|_V$ ist $\chi'|_V = 1$. V ist dicht in $V_f \Gamma$, also $\chi' = 1$ in $V_f \Gamma$ und somit $f_t(z, \hat{v}) = a_{1,1}$. d.h $f_t(z, \hat{v})$ ist fest in $L^2(\hat{M})$. Also

$$Ker \tilde{\bar{\partial}}_{\mathcal{F}} = L^2(\mathbb{R}/\Lambda, \mathbb{C}).$$

Sei nun $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Wir betrachten den Operator

$$S_0(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(t) \phi^{t*} dt$$

auf dem Raum $Ker \tilde{\bar{\partial}}_{\mathcal{F}}$. Mit $T_0(\alpha) = Tr(S_0(\alpha)|Ker \tilde{\bar{\partial}}_{\mathcal{F}})$ bezeichnen wir die Spur von $S_0(\alpha)$ in $\ker \tilde{\bar{\partial}}_{\mathcal{F}}$. Die Menge $\{t \mapsto \exp(\frac{2i\pi\nu t}{\log q}), \nu \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Basis von $L^2(\mathbb{R}/\Lambda, \mathbb{C})$. Wir haben also

$$\begin{aligned}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} < \int_{\mathbb{R}} \alpha(s)\phi^{s*}(f)ds, f > &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} < \int_{\mathbb{R}} \alpha(s)\exp(\tfrac{2i\pi\nu(t+s)}{\log q})ds, \exp(\tfrac{2i\pi\nu t}{\log q}) > \\ &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} < (\int_{\mathbb{R}} \alpha(s)\exp(\tfrac{2i\pi\nu s}{\log q})ds)\exp(\tfrac{2i\pi\nu t}{\log q}), \exp(\tfrac{2i\pi\nu t}{\log q}) > \\ &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \phi(\tfrac{2i\pi\nu}{\log q}).\end{aligned}$$

und somit ist die Spur des Operators S_0 auf $\ker \bar{\bar{\partial}}_{\mathcal{F}}$

$$T_0(\alpha) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \phi(\frac{2i\pi\nu}{\log q}).$$

Sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{0,0}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{0,1}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \ldots \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{0,g}(X) \longrightarrow 0.$$

der Dolbeault Komplex. Dann definieren wir den transversalen Index von $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ als

$$Ind_t(\bar{\partial}_{\mathcal{F}}) = \sum_{i=1}^{g}(-1)^i T_i$$

mit $T_i(\alpha) = Tr(S_i(\alpha)|Harm^i_{L^2}(X))$.
Sei nun $w \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{0,j}(X)_{\mathbb{C}}$ mit $w = \alpha d\bar{z}_{n_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{n_j}$, dann ist

$$\bar{\partial}^j_{\mathcal{F}} w = \sum_{i=1}^{g} \frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}_i} d\bar{z}_i \wedge d\bar{z}_{n_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{n_j}$$

und

$$\bar{\partial}^{\dagger j-1}_{\mathcal{F}} w = 2\exp gt \sum_{i=1}^{j}(-1)^i \frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}_{n_i}} d\bar{z}_{n_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{d\bar{z}_{n_i}} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{n_j}.$$

Sei $\hat{M} = (\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma) \cong (\mathbb{C}^g \times_\Gamma T_f\Gamma)$. Das ist eine kompakte abelsche Gruppe. Die Charaktere sind der Form $\chi(z,a) = \chi(z)\chi'(a)$ wobei χ Charakter von $\mathbb{C}^g$ und χ' Charakter von $T_f\Gamma$. Dabei muss gelten $\chi_{|\Gamma} = \chi'_{|\Gamma}$ dann ist für $\gamma \in \Gamma$

$$\chi(z+\gamma, a-\gamma) = \chi(z+\gamma)\chi'(z-\gamma) = \chi(z)\chi'(a)\frac{\chi(\gamma)}{\chi'(\gamma)} = \chi(z)\chi'(a).$$

Jeder Charakter χ von $\mathbb{C}^g$ hat die Form

$$\chi(z) = \exp(< z, \bar{w} > - < \bar{z}, w >) = \exp(2i\mathrm{I}m < z, \bar{w} >)$$

für ein festes $w = w_\chi \in \mathbb{C}^g$. Hier ist $< z, \bar{w} >= \sum_{\nu=1}^{g} z_\nu \bar{w}_\nu$.

Proposition 4. *Sei* $\eta = \sum_{|I|=j} \eta_I d\bar{z}_I$ *ein* j*-Form mit* $\eta_I \in \mathbb{C}$ *für* $|I| = j$, $I = (i_1 < ... < i_j)$, $d\bar{z}_I = d\bar{z}_{i_1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_{i_j}$, *es gilt*

$$\Delta^j_{\bar{\partial}}(\chi\eta) = 2\|w_\chi\|^2 \chi\eta.$$

Dabei ist χ *ein Charakter von* $\mathbb{C}^g$.

Beweis
Sei $\eta = \sum_{|I|=j} \eta_I d\bar{z}_I$. Nach [Gri, Abschnitt 6. pp. 83] gilt die Formel

$$\Delta(\chi d\bar{z}_I) = (-2 \sum_{i=1}^{g} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z_i \partial \bar{z}_i}) d\bar{z}_I.$$

Wir haben

$$\chi(z) = \exp(< z, \bar{w} > - < \bar{z}, w >) = \exp \sum_{i=1}^{g} (z_i \bar{w}_i - \bar{z}_i w_i).$$

Dann $\frac{\partial \chi}{\partial z_i} = \bar{w}_i \chi$ und $\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}_i} = -w_i \chi$ und damit

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} = -\bar{w}_i w_i \chi = -\|w_i\|^2 \chi.$$

Es folgt

$$\Delta(\chi d\bar{z}_I) = (\sum_i -2(-\|w_i\|^2)) \chi d\bar{z}_I = 2\|w\|^2 \chi d\bar{z}_I.$$

Und damit

$$\Delta^j_{\bar{\partial}}(\chi\eta) = 2\|w_\chi\|^2 \chi\eta.$$

Sei $\eta \in \mathcal{A}^{0,j}_{\mathcal{F},L^2}(\hat{M})$. Es gilt $\eta = \sum_{|I|=j} \eta_I d\bar{z}_I$ mit L^2-Funktion η_I auf $\hat{M}$. Fourierentwicklung von η_I auf $\hat{M}$ gilt

$$\eta_I = \sum_{\substack{\chi,\chi' \\ \chi_{|\Gamma} = \chi'_{|\Gamma}}} \eta_I^{\chi,\chi'} . \chi\chi'$$

in $L^2(\hat{M})$, wobei $\eta_I^{\chi,\chi'} \in \mathbb{C}$. Setze $\eta_{\chi,\chi'} = \sum_{|I|=j} \eta_I^{\chi,\chi'} d\bar{z}_I \in \mathcal{A}^{0,j}_{\mathcal{F},L^2}(\hat{M})$. Das ist eine Form mit konstanten Koeffizienten. Es gilt

$$\eta = \sum_{\substack{\chi,\chi' \\ \chi_{|\Gamma}=\chi'_{|\Gamma}}} \eta_{\chi,\chi'} \cdot \chi\chi'$$

in $L^2(\hat{M})$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\Delta^j_{\mathcal{F},L^2}\eta &= \sum_{\substack{\chi,\chi' \\ \chi_{|\Gamma}=\chi'_{|\Gamma}}} \Delta^j_{\mathcal{F},L^2}(\eta_{\chi,\chi'} \cdot \chi\chi') \\
&= \sum_{\substack{\chi,\chi' \\ \chi_{|\Gamma}=\chi'_{|\Gamma}}} \chi' \Delta^j_{\mathcal{F},L^2}(\eta_{\chi,\chi'} \cdot \chi) \\
&= 2 \sum_{\substack{\chi,\chi' \\ \chi_{|\Gamma}=\chi'_{|\Gamma}}} \|w_\chi\|^2 \eta_{\chi,\chi'} \cdot \chi\chi' \, .
\end{aligned}$$

η ist eine harmonische Form auf $\hat{M}$, wenn

$$\Delta^j_{\mathcal{F},L^2}\eta = 0$$

gilt. Also gilt $\|w_\chi\|^2 \eta_{\chi,\chi'} = 0$. Für alle χ, χ' mit $\chi_{|\Gamma} = \chi'_{|\Gamma}$.
Für $w_\chi \neq 0$ d.h $\chi \neq 1$ ist also $\eta_{\chi,\chi'} = 0$.
Also gilt

$$\eta = \sum_{\substack{\chi' \\ \chi'_{|\Gamma}=1}} \eta_{1,\chi'} \chi' = \eta_{1,1}.$$

Da $\Gamma \subset T_f\Gamma$ dicht und χ' stetig ist. Also $\chi'(\Gamma) = 1$ dann $\chi'(T_f\Gamma) = 1$ dann $\chi' = 1$. Also ist η eine konstante Funktion auf dem Raum $\mathbb{C}^g \times_V V_f\Gamma$.
Jetzt sei $\eta = \alpha d\bar{z}_{n_1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_{n_j}$ ein harmonisch Form in $\mathcal{A}^{0,j}_{\mathcal{F},L^2}(X)$ fest unter der Λ-Operation, d.h für $\lambda = \nu \log q \in \Lambda$ es gilt $(f^\nu)^*\eta = \eta$ und

$$(f^\nu)^*\eta = \alpha \circ f^\nu d((f^\nu)^*\bar{z}_{n_1}) \wedge ... \wedge d((f^\nu)^*\bar{z}_{n_j}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}(f^\nu)^*\eta &= \alpha \circ (f^{-\nu}(z), f^{-\nu}(\hat{v}), t + \nu \log q)\\
&(\sum_{i=1}^{g} \frac{\partial\overline{(f^{-\nu})_{n_1}}}{\partial z_i} d\bar{z}_i + \sum_{i=1}^{g} \frac{\partial\overline{(f^{-\nu})_{n_1}}}{\partial \bar{z}_i} dz_i) \wedge ... \wedge (\sum_{i=1}^{g} \frac{\partial\overline{(f^{-\nu})_{n_j}}}{\partial z_i} d\bar{z}_i + \sum_{i=1}^{g} \frac{\partial\overline{(f^{-\nu})_{n_j}}}{\partial \bar{z}_i} dz_i)\\
&= \alpha \circ (f^{-\nu}(z), f^{-\nu}(\hat{v}), t + \nu \log q)\\
&\sum_{i=1}^{g} \frac{\partial\overline{(f^{-\nu})_{n_1}}}{\partial z_{m_1}} ... \frac{\partial\overline{(f^{-\nu})_{n_k}}}{\partial z_{m_k}} \frac{\partial\overline{(f^{-\nu})_{n_{k+1}}}}{\partial \bar{z}_{m_{k+1}}} ... \frac{\partial\overline{(f^{-\nu})_{n_j}}}{\partial \bar{z}_{m_j}} d\bar{z}_{m_1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_{m_k} \wedge dz_{m_{k+1}} \wedge ... \wedge dz_{m_j}.\end{aligned}$$

Aus $(f^\nu)^*\eta = \eta$ folgt

$$\begin{aligned}\alpha(z, \hat{v}, t) d\bar{z}_{n_1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_{n_j} &= \alpha \circ (f^{-\nu}(z), f^{-\nu}(\hat{v}), t + \nu \log q)\\
&\sum_{(m_1,...,m_j)\in(\sigma(n_1),...,\sigma(n_j));\sigma\in S} (-1)^{sign(\sigma)} \frac{\partial\overline{(f^{-\nu})_{n_1}}}{\partial z_{m_1}} ... \frac{\partial\overline{(f^{-\nu})_{n_j}}}{\partial z_{m_j}} d\bar{z}_{n_1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_{n_j}.\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\alpha(z, \hat{v}, t) &= \alpha \circ (f^{-\nu}(z), f^{-\nu}(\hat{v}), t + \nu \log q) \overline{\sum (-1)^{sign(\sigma)} \frac{\partial(f^{-\nu})_{n_1}}{\partial z_{m_1}} ... \frac{\partial(f^{-\nu})_{n_j}}{\partial z_{m_j}}}\\
&= \alpha \circ (f^{-\nu}(z), f^{-\nu}(\hat{v}), t + \nu \log q) \overline{J(f^{-\nu})}_{|z_{n_1},...,z_{n_j}}.\end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt den Fall, dass die Abbildung $f : \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}^g$ ist diagonal ist, d.h es gibt $\xi_1, ..., \xi_g$ in $\mathbb{C}$ so dass

$$f = \begin{pmatrix} \xi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \xi_g \end{pmatrix}$$

und $f(z_1, ..., z_g) = (\xi_1 z_1, ..., \xi_g z_g)$ mit $(z_1, .., z_g) \in \mathbb{C}^g$ gilt. Für $\nu \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\overline{Jf^{-\nu}}_{|z_{n_1},...,z_{n_j}} = \overline{\det(f^{-\nu})}_{|z_{n_1},...,z_{n_j}} = \bar{\xi}_{n_1}^{-\nu} ... \bar{\xi}_{n_j}^{-\nu}.$$

Dann folgt

$$\alpha(z, \hat{v}, t) = \alpha(f^{-\nu}(z), f^{-\nu}(\hat{v}), t + \nu \log q) \overline{Jf^{-\nu}}_{|z_{n_1},...,z_{n_j}} = \bar{\xi}_{n_1}^{-\nu} ... \bar{\xi}_{n_j}^{-\nu} \alpha(f^{-\nu}(z), f^{-\nu}(\hat{v}), t + \nu \log q).$$

Ist $g \in L^2_{Loc}(X)$ mit $(f^{-\nu})^*(\alpha g) = \alpha g$, so gilt

$$\begin{aligned}\alpha \circ (f^{-\nu}(z), f^{-\nu}(\hat{v}), t+\nu \log q).g(f^{-\nu}(z), f^{-\nu}(\hat{v}), t+\nu \log q) \\ = \bar{\xi}^{\nu}_{n_1}...\bar{\xi}^{\nu}_{n_j}\alpha(z,\hat{v},t)g(f^{-\nu}(z), f^{-\nu}(\hat{v}), t+\nu \log q) \\ = \alpha(z,\hat{v},t)g(z,\hat{v},t).\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$g(f^{-\nu}(z), f^{-\nu}(\hat{v}), t+\nu \log q) = \bar{\xi}^{-\nu}_{n_1}...\bar{\xi}^{-\nu}_{n_j} g(z,\hat{v},t).$$

Wir setzen

$$g(t) = \exp(-t\log_q(\bar{\xi}_{n_1}...\bar{\xi}_{n_j})) = \exp(-t\sum_{i=1}^{j}\log_q \bar{\xi}_{n_i}) = \prod_{i=1}^{j}(-t\log_q \bar{\xi}_{n_i}).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} g\circ f^{-\nu}(t) &= g(t+\nu\log q) \\ &= \prod_{i=1}^{j}\exp(-(t+\nu\log q)\log_q \bar{\xi}_{n_i}) \\ &= \prod_{i=1}^{j}\exp(-t\log_q \bar{\xi}_{n_i} - \nu\log \bar{\xi}_{n_i}) \\ &= \prod_{i=1}^{j}\exp(-t\log_q \bar{\xi}_{n_i})\prod_{i}^{j}\exp(-\nu\log \bar{\xi}_{n_i}) \\ &= \prod_{i=1}^{j}\bar{\xi}^{-\nu}_{n_i}\prod_{i=1}^{j}\exp(-t\log_q \bar{\xi}_{n_i}).\end{aligned}$$

Sei $\alpha g \in L^2(\mathbb{R}/\Lambda, \mathbb{C})$, d.h αg ist fest unter der Λ-Operation. Dies zeigt, dass

$$(f^{-\nu})^*(\alpha g) = \bar{\xi}^{\nu}_{n_1}...\bar{\xi}^{\nu}_{n_j}\alpha\prod_{i=1}^{j}\bar{\xi}^{-\nu}_{n_i}\prod_{i=1}^{j}\exp(-t\log_q \bar{\xi}_{n_i}) = \alpha g.$$

Also gilt

$$\alpha\prod_{i=1}^{j}\exp(-t\log_q \bar{\xi}_{n_i}) = \exp\frac{2\pi i\nu t}{\log q} \qquad \text{für } \nu \in \mathbb{Z}.$$

Dann ist

$$\alpha = \exp(\frac{2\pi i\nu t}{\log q})\prod_{i=1}^{j}\exp(t\log_q \bar{\xi}_{n_i}) = \exp(t(\sum_{i=1}^{j}\log_q \bar{\xi}_{n_i} + \frac{2\pi i\nu}{\log q})).$$

Daraus folgt die folgende Proposition.

Proposition 5. *Die Menge*

$$\{\exp(t(\sum_{i=1}^{j} \log_q \bar{\xi}_{n_i} + \frac{2\pi i\nu}{\log q}))d\bar{z}_{n_1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_{n_j},\ n_1 < ... < n_j,\ \nu \in \mathbb{Z}\}$$

ist eine Orthogonalbasis von $Harm^j_{L^2}(X)$.

Sei $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ und sei S_j der Operator, auf $Harm^j_{L^2}(X)$, der durch

$$S_j(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\phi^{t*}dt$$

gegeben wird. Dann berechnet sich der transversale Index des Dolbeault-Operators des verallgemeinerten Solenoids X zu

$$\begin{aligned}
Ind_t(\bar{\partial}_{\mathcal{F}})(\alpha) &= \sum_{j=0}^{g}(-1)^j T_j(\alpha) \\
&= \sum_{j=0}^{g}(-1)^j tr(S_j(\alpha)|Harm^j_{L^2}(X)) \\
&= \sum_{j=0}^{g}(-1)^j \sum_{i\in I} < S_i(\alpha)h_i, h_i > \\
&= \sum_{j=0}^{g}(-1)^j \sum_{i\in I} < \textstyle\int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\phi^{t*}_{h_i}dt, h_i > \\
&= \sum_{j=0}^{g}(-1)^j \sum_{n_1<...<n_j}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} < \textstyle\int_{\mathbb{R}} \alpha(t)exp((t+s)(\sum_{i=1}^{j} \log_q \bar{\xi}_{n_i} + \frac{2i\pi\nu}{\log q})) \\
&\quad d\bar{z}_{n_1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_{n_j}dt, exp(s(\sum_{i=1}^{j} \log_q \bar{\xi}_{n_i} + \frac{2i\pi\nu}{\log q}))d\bar{z}_{n_1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_{n_j} >
\end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned}
Ind_t(\bar{\partial}_{\mathcal{F}})(\alpha) &= \sum_{j=0}^{g}(-1)^j \sum_{n_1<...<n_j}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \textstyle\int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\exp(t(\sum_{i=1}^{j} \log_q \bar{\xi}_{n_i} + \frac{2i\pi\nu}{\log q}))dt \\
&= \sum_{j=0}^{g}(-1)^j \sum_{n_1<...<n_j}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \phi(\sum_{i=1}^{j} \log_q \bar{\xi}_{n_i} + \frac{2i\pi\nu}{\log q}).
\end{aligned}$$

Also

$$Ind_t(\bar{\partial}_{\mathcal{F}})(\alpha) = \sum_{j=0}^{g}(-1)^j \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\sum_{n_1\leq...\leq n_j} \phi(\sum_{i=1}^{j} \log_q \bar{\xi}_{n_i} + \frac{2i\pi\nu}{\log q}).$$

Für $\nu \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\phi(\sum_{i=1}^{j} \log_q \bar{\xi}_{n_i} + \frac{2i\pi\nu}{\log q}) = \int_{\mathbb{R}} \exp(t(\sum_{i=1}^{j} \log_q \bar{\xi}_{n_i} + \frac{2i\pi\nu}{\log q}))\alpha(t)dt.$$

Wir substituieren die Variable T durch $\frac{t}{\log q}$ und erhalten

$$\phi(\sum_{i=1}^{j} \log_q \bar{\xi}_{n_i} + \frac{2i\pi\nu}{\log q}) = \log q \int_{\mathbb{R}} \exp(2i\pi\nu T) \prod_{i=1}^{j} \exp(T \log \bar{\xi}_{n_i})\alpha(T \log q)dT.$$

Mit Hilfe der Poissonschen Summenformel

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi(n),$$

wobei

$$\psi_{n_1,\ldots,n_j}(T) = \exp(T(\sum_{i=1}^{j} \log \bar{\xi}_{n_i}))\alpha(T \log q)$$

und

$$\hat{\psi}_{n_1,\ldots,n_j}(T) = \int_{\mathbb{R}} exp(-2i\pi Tx)\psi_{n_1,\ldots,n_j}(x)dx$$

sei, folgt hieraus

$$\begin{aligned} \phi(\sum_{i=1}^{j} \log_q \bar{\xi}_{n_i} + \tfrac{2i\pi\nu}{\log q}) &= \log q \textstyle\int_{\mathbb{R}} exp(-2i\pi\nu T)\psi_{n_1,\ldots,n_j}(T)dT \\ &= \log q \ \hat{\psi}_{n_1,\ldots,n_j}(\nu). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} Ind_t(\bar{\partial}_{\mathcal{F}})(\alpha) &= \log q \sum_{j=0}^{g} (-1)^j \sum_{n_1<\ldots<n_j} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \psi_{n_1,\ldots n_j}(\nu) \\ &= \log \sum_{j=0}^{g} (-1)^j \sum_{n_1<\ldots<n_j} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} exp(\sum_{i=1}^{j} \nu \log \bar{\xi}_{n_i})\alpha(\nu \log q) \\ &= \log q \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (\sum_{j=0}^{g} (-1)^j \sum_{n_1<\ldots<n_j} \bar{\xi}_{n_1}^{\nu} \ldots \bar{\xi}_{n_j}^{\nu} \alpha(\nu \log q) \\ &= \log q \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \prod_{j=1}^{g} (1 - \bar{\xi}_j^{\nu})\alpha(\nu \log q). \end{aligned}$$

Damit ist

$$Ind_t(\bar{\partial}_{\mathcal{F}})(\alpha) = \log q \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \prod_{i=1}^{g} (1-\bar{\xi}_i^{\nu})\alpha(\nu \log q).$$

Andererseits ist die ϕ^s auf $T\mathcal{F}$ induzierte Ableitung gegeben durch

$$T_{cx}\phi^s(\eta_1, ..., \eta_g) = (\xi_1^{\frac{s}{\log q}}\eta_1, ..., \xi_g^{\frac{s}{\log q}}\eta_g) = f^{\frac{s}{\log q}}(\eta_1, ..., \eta_g),$$

und damit wird

$$\det_{\mathbb{C}}(1 - T_{cx}\phi^s|T_{cx}\mathcal{F})^{-1} = \det \begin{pmatrix} 1-\xi_1^{\frac{s}{\log q}} & & \\ & \ddots & \\ & & 1-\xi_g^{\frac{s}{\log q}} \end{pmatrix}^{-1} = \prod_{i=1}^{g}(1-\xi_i^{\frac{s}{\log q}})^{-1}.$$

Hierbei ist x ein Punkt des abgeschlossenen Orbits γ. Wir setzen $s = kl(\gamma)$ und erhalten

$$\det_{\mathbb{C}}(1 - T_{cx}\phi^{kl(\gamma)}|T_{cx}\mathcal{F})^{-1} = \prod_{i=1}^{g}(1-\xi_i^{\frac{kl(\gamma)}{\log q}})^{-1}.$$

Sei jetzt $f : \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}^g$ diagonalisierbar, dann es gibt $S \in GL_g(\mathbb{C})$ so dass

$$SfS^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \xi_g \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$\det_{\mathbb{R}}(1-f^{\nu}) = \det_{\mathbb{R}}(1-(SfS)^{\nu}) = \prod_{i=1}^{g}|1-\xi_i^{\nu}|^2.$$

Für abgeschlossene Orbits γ der $\mathbb{R}$-Operation auf X gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma} l(\gamma) \sum_{k\geq 1} \det_{\mathbb{C}}(1 - T_{cx}\phi^{kl(\gamma)}|T_{cx}\mathcal{F})^{-1}\alpha(kl(\gamma)) &= \sum_{\gamma} l(\gamma) \sum_{k\geq 1} \prod_{i=1}^{g}(1-\xi_i^{\frac{kl(\gamma)}{\log q}})^{-1}\alpha(kl(\gamma)) \\
&= \sum_{\nu\geq 1} \sum_{kl(\gamma)=\nu\log q} l(\gamma) \prod_{i=1}^{g}(1-\xi_i^{\nu})^{-1}\alpha(\nu\log q) \\
&= \sum_{\nu\geq 1}(\sum_{l(\gamma)/\nu} l(\gamma)) \prod_{i=1}^{g}(1-\xi_i^{\nu})^{-1}\alpha(\nu\log q) \\
&= \log q \sum_{\nu\geq 1}(\sharp\Gamma/(1-f^{\nu})\Gamma) \prod_{i=1}^{g}(1-\xi_i^{\nu})^{-1}\alpha(\nu\log q).
\end{aligned}$$

Aus Lemma 1 und den obigen Rechnungen folgt

$$\begin{aligned}\sum_\gamma l(\gamma)\sum_{k\geq 1}\det{}_{\mathbb{C}}(1-T_{cx}\phi^{kl(\gamma)}|T_{cx}\mathcal{F})^{-1}\alpha(kl(\gamma)) &= \log q\sum_{\nu\geq 1}\det{}_{\mathbb{R}}(1-f^\nu)\prod_{i=1}^g(1-\xi_i^\nu)^{-1}\alpha(\nu\log q)\\ &= \log q\sum_{\nu\geq 1}\prod_{i=1}^g|1-\xi_i^\nu|^2\prod_{i=1}^g(1-\xi_i^\nu)^{-1}\alpha(\nu\log q)\\ &= \log q\sum_{\nu\geq 1}\prod_{i=1}^g(1-\bar{\xi}_i^\nu)\alpha(\nu\log q).\end{aligned}$$

Andererseits gibt die Summe über $k\in\mathbb{Z}-\{0\}$

$$\sum_\gamma l(\gamma)\sum_{k\geq 1}\prod_{i=1}^g(1-\xi_i^{\frac{kl(\gamma)}{\log q}})^{-1}\alpha(kl(\gamma))+\sum_\gamma l(\gamma)\sum_{k\leq -1}\exp(gkl(\gamma))\prod_{i=1}^g(1-\xi_i^{\frac{kl(\gamma)}{\log q}})^{-1}\alpha(kl(\gamma))$$

$$\begin{aligned}&=\sum_{\nu\geq 1}\sum_{l(\gamma)/\nu\log q}l(\gamma)\prod_{i=1}^g(1-\xi_i^\nu)^{-1}\alpha(\nu\log q)\\ &\quad+\sum_{\nu\leq -1}\sum_{l(\gamma)/\nu\log q}l(\gamma)\exp(g\nu\log q)\prod_{i=1}^g(1-\xi_i^\nu)^{-1}\alpha(\nu\log q)\\ &=\log q\sum_{\nu\geq 1}(\sum_{|\gamma_M|/\nu}|\gamma_M|)\prod_{i=1}^g(1-\xi_i^\nu)^{-1}\alpha(\nu\log q)\\ &\quad+\log q\sum_{\nu\leq -1}(\sum_{|\gamma_M|/-\nu}|\gamma_M|)q^{g\nu}\prod_{i=1}^g(1-\xi_i^\nu)^{-1}\alpha(\nu\log q)\\ &=\log q\sum_{\nu\geq 1}|\det{}_{\mathbb{R}}(1-f^\nu)|\prod_{i=1}^g(1-\xi_i^\nu)^{-1}\alpha(\nu\log q)\\ &\quad+\log q\sum_{\nu\leq -1}|\det{}_{\mathbb{R}}(1-f^{-\nu})|q^\nu\prod_{i=1}^g(1-\xi_i^\nu)^{-1}\alpha(\nu\log q)\\ &=\log q\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|\det{}_{\mathbb{R}}(1-f^\nu)|\prod_{i=1}^g(1-\xi_i^\nu)^{-1}\alpha(\nu\log q).\end{aligned}$$

Wegen

$$|\det(1-f^{-\nu})|q^{g\nu}=|\det{}_{\mathbb{R}}(1-f^{-\nu})||\det f^\nu|=|\det(1-f^\nu)|.$$

ist

$$\sum_\gamma l(\gamma)\sum_{k\geq 1}\prod_{i=1}^g(1-\xi_i^{\frac{kl(\gamma)}{\log q}})^{-1}\alpha(kl(\gamma))+\sum_\gamma l(\gamma)\sum_{k\leq -1}\exp(gkl(\gamma))\prod_{i=1}^g(1-\xi_i^{\frac{kl(\gamma)}{\log q}})^{-1}\alpha(kl(\gamma))$$

$$\begin{aligned}&=\log q\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\prod_{i=1}^g|1-\xi_i^\nu|^2\prod_{i=1}^g(1-\xi_i^\nu)^{-1}\alpha(\nu\log q)\\ &=\log q\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\prod_{i=1}^g(1-\bar{\xi}_i^\nu)\alpha(\nu\log q).\end{aligned}$$

Proposition 6. *Sei $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Der transversale Index des Dolbeault Operators auf dem verallgemeinerte Solenoid X ist*

$$
\begin{aligned}
Ind_t(\bar{\partial}_{\mathcal{F}})(\alpha) \quad = \quad & \sum_\gamma l(\gamma) \sum_{k \geq 1} \det{}_{\mathbb{C}}(1 - T_{cx}\phi^{kl(\gamma)} | T_{cx}\mathcal{F})^{-1} \alpha(kl(\gamma)) \\
& + \sum_\gamma l(\gamma) \sum_{k \leq -1} \exp(gkl(\gamma)) \det{}_{\mathbb{C}}(1 - T_{cx}\phi^{kl(\gamma)} | T_{cx}\mathcal{F})^{-1} \alpha(kl(\gamma)).
\end{aligned}
$$

2. Gewöhnliche abelsche Varietäten

2.1. CM-abelsche Varietäten

Definition 4. *Sei A eine abelsche Varietät der Dimension g über einem Körper k mit* $\mathrm{char}k = p$. *Dann heißt A gewöhnlich, wenn die Gruppe der geometrischen Punkte von Ordnung p die Ordnung p^g besitzt, d.h*

$$A_p(\bar{k}) := \ker(p : A \longrightarrow A)(\bar{k})$$

Ordnung p^g hat.

Definition 5. *Sei A eine abelsche Varietät über K, und B eine abelsche Varietät über k. Dann heißen A und B isogenous, wenn es einen Körper L gibt, so dass $k \subset L$, $K \subset L$, $char k = char K$ gilt, $A \otimes_K L$ und $B \otimes_k L$ L-isogenous sind, mit anderen Worten, ein surjektiver Homomorphismus*

$$\alpha : B \otimes_k L \longrightarrow A \otimes_K L$$

mit endlichem Kern existiert.

Definition 6. *Ein Zahlkörper L ist ein* CM*-Körper, wenn $[L : \mathbb{Q}] < \infty$ gibt und ein Unterkörper $L_0 \subset L$ existiert, so dass $L_0/\mathbb{Q}$ total reell ist, das heißt für alle*

$$\psi_0 : L_0 \longrightarrow \mathbb{C}, \ \psi_0(L_0) \subset \mathbb{R},$$

und wenn L/L_0 quadratisch total imaginär ist, das heißt, wenn

$$[L : L_0] = 2 \textit{ und für alle } \psi : L \longrightarrow \mathbb{C}, \ \psi(L) \nsubseteq \mathbb{R}.$$

Definition 7. *Eine abelsche Varietät A über einen Körper k hat genügend viele komplexe Multiplikationen, kurz* smCM, *über L, wenn es ein $L \supset k$ gibt, so dass $A \otimes_k L$ L-isogen zu dem Produkt $A_1 \times ... \times A_n$ von L-einfachen abelschen Varietäten ist, und Einbettungen*

$$F_i \hookrightarrow End_L(A_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \textit{ mit } [F_i : \mathbb{Q}] = 2dimA_i$$

existieren, wobei F_i Körper sind für alle $1 \leq i \leq n$. Eine abelsche Varietät mit smCM *heißt* CM *abelsche Varietät.*

Bemerkung 1. *Eine abelsche Varietät über einem endlichen Körper hat* smCM*, und jede abelsche Varietät, die isogenous zu ihr ist, hat* smCM.*(siehe [Oor2, Remark 1.4])*

Satz 2. *([Ung, Satz 6.]) Für jede abelsche Varietät A gibt es eine Isogenie zu einem Produkt der Form*

$$A_1^{n_1} \times ... \times A_k^{n_k},$$

wobei die A_i einfache abelsche Varietäten sind, zwischen denen keine Isogenien existieren.

Seien A und B zwei abelsche Varietäten über einen Körper k. Dann gibt es einfache abelsche Varietäten A_i und B_j, so dass A isogen zu dem Produkt $\prod A_i^{n_i}$ und B isogen zu dem Produkt ΠB_j^{mj} ist. Für zwei Isogenien $\prod A_i^{n_i} \longrightarrow A$ und $B \longrightarrow \prod B_j^{mj}$ ist die Abbildung

$$Hom_k(A, B) \hookrightarrow \prod_{i,j} Hom_k(A_i, B_j)$$

injektiv.
Wenn A_i und B_j nicht isogen sind, so ist $Hom_k(A_i, B_j) = (0)$, sonst ist die Abbildung

$$Hom_k(A_i, B_j) \hookrightarrow End_k(A_i)$$

injektiv. Für Struktur von $End_k(A)$ können wir uns also auf den Fall beschränken, dass A eine einfache abelsche Varietät ist.

Bemerkung 2. *Sei A ein abelsch Varietät über ein Körper k, Der Ring $End_k(A)$ ist eine Algebra über $\mathbb{Z}$.*
Sei $End_k^0(A) := End_k(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Dies ist ein $\mathbb{Q}$-algebra. Für eine einfache abelsche Varietät A ist $End_k^0(A)$ eine Divisions algebra.

Satz 3. *([Tat1, Satz 2.],[Oor2, Remark 1.4]) Sei A eine einfache abelsche Varietät über einem endlichen Körper $k = \mathbb{F}_q$. Dann ist*

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\pi_A) = Z(End_k^0(A)) \subset L \subset End_k^0(A),$$

wobei L ein CM *Körper ist mit $[L : \mathbb{Q}] = 2\dim A$ und π_A die Frobenius-Abbildung von A relativ zu k ist.*

Definition 8. *Sei p eine Primzahl,* $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ *und* $q = p^r$. *Dann heißt* π *eine q-Weil-Zahl, wenn* π *algebraisch ganz ist und für alle Einbettungen*

$$\psi : \mathbb{Q}(\pi) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$|\psi(\pi)| = q^{\frac{1}{2}}$ *gilt.*

Sei A eine abelsche Varietät über $k = \mathbb{F}_q$, mit $q = p^r$. Sei $F : A \longrightarrow A^{(p)}$ die Frobenius-Abbildung und

$$\pi_A : A \xrightarrow{F} A^{(p)} \xrightarrow{F^2} A^{(p^2)} \longrightarrow ... \longrightarrow A^{(p^r)} = A \in End_k A,$$

der relative Frobenius-Endomorphismus von k.

Proposition 7. *([Cha, Proposition 1.]) Für eine einfache abelsche Varietät A über* $k = \mathbb{F}_q$ *haben wir*

$$\pi_A.\rho(\pi_A) = q.$$

Hierbei ist $\rho : End_k^0(A) \longrightarrow End_k^0(A)$ *die Rosati Involution.*

Satz 4. *(Weil) Sei A eine einfache abelsche Varietät über* $k = \mathbb{F}_q$, *und* π_A *die Frobenius Endomorphismus von A relativ zu k. Dann ist* π_A *eine q-Weil Zahl.(siehe [Oor1, Satz 5.4])*

Beweis
Sei π_A der Frobenius-Endomorphismus. Dann ist $\mathbb{Q}(\pi_A) \subset End_k^0(A)$ ein Unterkörper und π_A algebraisch ganz. Sei $\pi_A \in \mathbb{Q}(\pi_A) \subset L$, wobei L ein CM Körper ist. Für eine Einbettung $\sigma : L \hookrightarrow \mathbb{C}$ und ρ die Rosati-Bewertung (für Definition siehe [Cha, Abschnitt 3.1]) gilt.

$$q = \sigma(q) = \sigma(\pi_A.\rho(\pi_A)) = \sigma(\pi_A)\sigma(\rho(\pi_A)) = \sigma(\pi_A)\overline{\sigma(\pi_A)} = |\sigma(\pi_A)|^2.$$

also haben alle Konjugierten von π_A denselben Betrag. Dahier ist π_A eine Weil Zahl. $\square$

2.2. Die kanonische Liftung einer gewöhnlichen abelschen Varietät

Sei A_0 einen gewöhnliche abelsche Varietät über einen endlichen Körper $k = \mathbb{F}_q$ mit $q = p^r$, p prim, $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $g = \dim A_0$. Sei $\pi_{A_0} : A_0 \to A_0$ der Frobenius-Endomorphismus über $\mathbb{F}_q$, der durch

$$\begin{array}{rccc} \pi_{A_0}: & A_0 & \longrightarrow & A_0 \\ & x & \longmapsto & x^q \end{array}$$

definiert ist. Sei $R = W(\mathbb{F}_q)$ der Ring der Witt-Vektoren von $\mathbb{F}_q$, $m = pR$ dessen maximales Ideal und
$L = Quot(W(\mathbb{F}_q))$ der Quotientenkörper von $W(\mathbb{F}_q)$. Wir haben $R/m = \mathbb{F}_q$.
Serre und Tate haben eine kanonische Liftung einer gewöhnlichen abelschen Varietät über einem perfekten Körper k von Charakteristik p konstruiert.

Definition 9. CM-*Liftung ([Oor1, Definition 13.1])*
Sei A_0 eine abelsche Varietät über k, so dass A_0 smCM *hat und $k \supset \mathbb{F}_p$ ist. A ist die Liftung von A_0, wenn es einen Integritätsbereich R von Charakteristik null, einen surjektiven Homomorphismus $R \twoheadrightarrow k$ und ein abelsches Schema $\mathcal{A} \to \mathrm{spec}(R)$ gibt, sodass*

$$\mathcal{A} \otimes_R k \cong A_0$$

mit $A := \mathcal{A} \otimes_R L$ und $L = Quot(R)$ gibt. A ist eine CM-*Liftung, wenn A* smCM *hat.*

Für A_0 ein gewöhnliche abelsche Varietät über einem perfekten Körper k mit $\mathrm{char} k = p$ gilt

$$End_k(A_0) \cong End_R(\mathcal{A}) \cong End_L(A).$$

Der erste Isomorphismus folgt dabei aus einem Satz von W. Messing.

Satz 5. *([Mes, Satz 3.3]) Sei A_0 eine gewöhnliche abelsche Varietät über k. Es gibt ein projektives abelsches Schema $\mathcal{A}$ über $R = W(k)$, so dass die Abbildung*

$$End_R(\mathcal{A}) \longrightarrow End_k(A_0)$$

bijektiv ist.

Korollar 1. *Seien A_0 und B_0 gewöhnliche abelsche Varietäten über k und A und B seien ihre jeweiligen kanonischen Liftungen. Dann ist die Abbildung*

$$Hom(A, B) \longrightarrow Hom(A_0, B_0)$$

bijektiv.

Sei A_0 ein einfache gewöhnliche abelsche Varietät, also gibt es für A_0 eine Liftung $\mathcal{A}$ über $R = W(\mathbb{F}_q)$, sodass

$$End_R\mathcal{A} \cong End_{\mathbb{F}_q}A_0$$

und

$$\mathcal{A} \otimes_R \mathbb{F}_q \cong A_0.$$

Für $B_0 = A_0$ und $k = \mathbb{F}_q$ im Korollar 1 sei $\varphi \in End(\mathcal{A})$ die Abbildung mit der Eigenchaft

$$(\mathcal{A}, \varphi) \otimes_R \mathbb{F}_q \cong (A_0, \varphi_0).$$

wobei φ_0 die Frobenius-Abbildung von A_0 bezüglich $\mathbb{F}_q$ ist. Das Korollar zeigt, dass die Liftung

$$\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

des Endomorphismus φ_0 eindeutig ist.
Für $L := Quot(W(\mathbb{F}_q))$ haben wir

$$End_L(\mathcal{A} \otimes_R L) \cong End_R(\mathcal{A}) \xrightarrow{\cong} End_{\mathbb{F}_q}(A_0).$$

Setzen wir $A = \mathcal{A} \otimes_R L$ und $End_L^0(A) = End_L(A) \otimes \mathbb{Q}$, so gilt

$$End^0_{\mathbb{F}_q}(A_0) = End_{\mathbb{F}_q}(A_0) \otimes \mathbb{Q} \cong End_L(A) \otimes \mathbb{Q} = End^0_L(A).$$

Nach unserer Voraussetzung gibt es einen CM-Körper $\mathcal{L}$ mit $[\mathcal{L} : \mathbb{Q}] = 2g$ und

$$\mathbb{Q}(\varphi_0) \subset \mathcal{L} \subset End^0_{\mathbb{F}_q}(A_0).$$

Hierbei ist $g = \dim A_0$. Deshalb ist $\mathcal{L} \subset End^0_L(A)$. Weil $\dim A = \dim A_0 = g$, ist A eine CM- Liftung von A_0 nach Charakteristik null.
Außerdem gilt

$$[\mathbb{Q}(\varphi) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\varphi_0) : \mathbb{Q}] \leq [\mathcal{L} : \mathbb{Q}] = 2g < \infty.$$

Das charakteristische Polynom P_φ von φ hat ganzzahlige Koeffizienten, deshalb ist φ eine algebraische Zahl und alle Nullstellen von P_φ sind algebraische Zahlen.
Nach dem Satz 4 von Weil gilt $|\varphi_0| = q^{\frac{1}{2}}$, und alle Konjugierten von φ_0 haben denselben Betrag.

Definition 10. *Sei $\mathcal{L}$ ein* CM-*Körper mit $[\mathcal{L} : \mathbb{Q}] = 2g$. Der* CM-*Typ von $\mathcal{L}$ ist die Menge der Einbettungen $\psi_1, ..., \psi_g$ von $\mathcal{L}$ in $\mathbb{C}$, so dass die Menge aller Einbettungen von $\mathcal{L}$ in $\mathbb{C}$*

$$\psi_1, ..., \psi_g, \rho\psi_1, ..., \rho\psi_g$$

ist, wobei ρ die komplexe Konjugation ist.

Proposition 8. *Sei φ die Liftung des Frobenius-Endomorphismus φ_0, Dann haben alle Konjugierte von φ den Betrag $q^{\frac{1}{2}}$.*

Beweis
Sei $\xi_{0i} = \psi_i(\varphi_0)$ für $i = 1, .., g$ und $\xi_{0g+i} = \rho\psi_i(\varphi_0)$ für $i = 1, .., g$. φ_0 ist eine q-Weil-Zahl, deshalb $|\xi_{0i}| = q^{\frac{1}{2}}$ für $i = 1, .., 2g$. Sei h der Isomorphismus

$$\mathbb{Q}(\varphi) \xrightarrow{h} \mathbb{Q}(\varphi_0).$$

Wir haben

$$\mathbb{Q}(\varphi) \xrightarrow{h} \mathbb{Q}(\varphi_0) \xrightarrow{\psi_i} \mathbb{C}$$

und erhalten

$$|\xi_i| := |\psi_i \circ h(\varphi)| = |\psi_i(\varphi_0)| = q^{\frac{1}{2}} \text{ und } |\xi_{i+g}| := |\rho\psi_i \circ h(\varphi)| = |\rho\psi_i(\varphi_0)| = q^{\frac{1}{2}}.$$

Deshalb haben alle Konjugierten ξ_i von φ für $i = 1, ..., 2g$ den Betrag $q^{\frac{1}{2}}$. □

Bemerkung 3. *Für eine einfache abelsche Varietät A_0 über $\mathbb{F}_q$ mit $q = p^r$ und Frobenius-Endomorphismus $\pi_{A_0} \in End_{\mathbb{F}_q}(A_0)$ von A_0 über $\mathbb{F}_q$, sei $P_{\pi_{A_0}}$ das charakteristische Polynom von π_{A_0} über $\mathbb{Z}$. Es hat den Grad $2g$ mit $g = \dim A_0$. Sei I_{A_0} das irreduzibel Polynom von π_{A_0} über $\mathbb{Q}$ und $d := [End^0_{\mathbb{F}_q}(A_0) : \mathbb{Q}(\pi_{A_0})]$. Dann ist $\pi_{A_0} = I^d_{A_0}$. In dem Fall, das π_{A_0} irreduzibel ist, gilt*

$$\mathbb{Q}(\pi_{A_0}) = End^0_{\mathbb{F}_q}(A_0).$$

Falls A eine einfache abelsche Varietät von Dimension g über einem Körper L der Charakteristik null ist und smCM *hat, so ist*

$$Z(End_L^0(A)) = End_L^0(A)$$

ein kommutativen CM-*Körper von Grad $2g$ über $\mathbb{Q}$.*
Aus der Gleichung

$$End_{\mathbb{F}_q}^0(A_0) = End_L^0(A)$$

folgt, dass die Liftung A der einfachen abelschen Varietät A_0 eine einfache abelsche Varietät über L ist. Dann A ist ein einfache abelsche Varietät über einem Körper L der Charakteristik null und smCM *hat. Dann ist $End_L^0(A)$ kommutativ. Wir haben dann*

$$\mathbb{Q}(\varphi) \subset Z(End_L^0(A)) \subset \mathcal{L} \subset End_L^0(A)$$

und

$$Z(End_L^0(A)) = End_L^0(A).$$

Also haben wir $End_L^0(A)$ ist ein CM-*Körper, dahier ist $[End_L^0(A) : \mathbb{Q}] = 2g$, und wir haben $End_L^0(A) \cong End_{\mathbb{F}_q}^0(A)$. So folgt $[End_{\mathbb{F}_q}^0(A) : \mathbb{Q}] = 2g$ nach dem Satz von Tate([Tat1, Satz 2.])*

$$End_{\mathbb{F}_q}^0(A) = \mathbb{Q}(\varphi_0).$$

Also $\mathbb{Q}(\varphi_0) = \mathcal{L}$ ist ein CM-*Körper.*

2.3. Der Abel-Jacobi Isomorphismus

Sei $\sigma : L \hookrightarrow \mathbb{C}$ eine Einbettung, und sei $A(\mathbb{C})$ die komplexe abelsche Varietät, die von A und σ der Erweiterung von L nach $\mathbb{C}$ durch σ induziert wird. Es gilt also $A(\mathbb{C}) = A \otimes_L \mathbb{C}$, und $dim_{\mathbb{C}} A(\mathbb{C}) = g$. Sei $H^0(A(\mathbb{C}), \Omega^1)$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der holomorphen Einsformen auf $A(\mathbb{C})$, dann ist

$$dim_{\mathbb{C}} H^0(A(\mathbb{C}), \Omega^1) = g$$

Sei $w_1, ..., w_g$ eine Basis von $H^0(A(\mathbb{C}), \Omega^1)$. Sei $\pi_1(A(\mathbb{C}), 0)$ die Fundamentalgruppe von $A(\mathbb{C})$ mit Basispunkt $0 \in A(\mathbb{C})$.

Satz 6. *$\pi_1(A(\mathbb{C}), 0)$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}^{2g}$.*

Sei Γ definierte durch

$$\Gamma := \{(\int_\gamma w_1, ..., \int_\gamma w_g)/\gamma \in \pi_1(A(\mathbb{C}), 0)\} \subset \mathbb{C}^g.$$

Satz 7. *[Klei1, Abschnitt 2.]* Γ *ist ein Gitter in* $\mathbb{C}^g$.

Jetzt definieren wir der Abel Jacobi Isomorphismus

Satz 8. *Sei* $\Gamma = \{(\int_\gamma w_1, ..., \int_\gamma w_g)/\gamma \in \pi_1(A(\mathbb{C}), 0)\}$ *und sei* Θ *die Abbildung*

$$\begin{array}{rccl} \Theta: & A(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C}^g/\Gamma \\ & x & \longmapsto & (\int_{\gamma_x} w_1, ..., \int_{\gamma_x} w_g) \ mod\ \Gamma \end{array}$$

wobei γ_x *ein Weg von* 0 *nach* x *ist. Dann ist* Θ *ein Isomorphismus.*

Der kompakte Quotient $\mathbb{C}^g/\Gamma$ heißt die Jacobische Varietät von $A(\mathbb{C})$, und man bezeichnet ihn mit $J(A(\mathbb{C}))$.
Beweis:
Θ ist wohldefiniert. Seien γ_x und C_x zwei Wege von 0 nach x, dann

$$(\int_{\gamma_x} w_1, ..., \int_{\gamma_x} w_g) - (\int_{C_x} w_1, ..., \int_{C_x} w_g) = (\int_\gamma w_1, ..., \int_\gamma w_g)$$

γ ist ein geschlossener Weg und $0 \in \gamma$, $\gamma \in \pi_1(\mathcal{A}(\mathbb{C}), 0)$ dann ist $(\int_\gamma w_1, ..., \int_\gamma w_g) \in \Gamma$.
Zum Beweis der Tatsache, dass Θ ein Isomorphismus ist, (siehe [Klei1, Abschnitt 3.])
Für $\alpha \in End(A(\mathbb{C}))$ sei $\beta := \Theta \circ \alpha \circ \Theta^{-1} \in End(\mathbb{C}^g/\Gamma)$

$$\begin{array}{ccc} A(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\alpha} & A(\mathbb{C}) \\ \Theta \downarrow\cong & & \cong\downarrow \Theta \\ \mathbb{C}^g/\Gamma & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{C}^g/\Gamma \end{array}$$

So dass das Diagramm kommutiert. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} End(A(\mathbb{C})) & \longrightarrow & End(\mathbb{C}^g/\Gamma) \\ \alpha & \longmapsto & \Theta \circ \alpha \circ \Theta^{-1} \end{array}$$

ist ein Isomorphismus und induziert einen Isomorphismus h

$$h : End^0(A(\mathbb{C})) \longrightarrow End^0(\mathbb{C}^g/\Gamma)$$

Bemerkung 4. *Sei A eine abelsche Varietät über K, und $K \subset K'$ eine Körpererweiterung. Sei $A' = A \otimes_K K'$ dann sind $End(A) \hookrightarrow End(A')$ injektiv ([Oor1, Abschnitt 11.1]). Sei $L \hookrightarrow \mathbb{C}$ eine Einbettung, dann ist die Homomorphismus $End_L(A) \hookrightarrow End(A(\mathbb{C}))$ und $End^0_L(A) \hookrightarrow End^0(A(\mathbb{C}))$ injektiv, und wir haben einen Homomorphismus θ*

$$\begin{array}{ccc} End^0_L(A) & \overset{i}{\hookrightarrow} & End^0(A(\mathbb{C})) \\ \theta \searrow & & \cong \swarrow h \\ & End^0(\mathbb{C}^g/\Gamma) & \end{array}$$

so dass das Diagramm kommutiert.
Sei $f = \theta(\varphi \otimes L)$, das ist einfach zu sehen dass $f \in End(\mathbb{C}^g/\Gamma)$, dann korrespondiert f zu einer $\mathbb{C}$-linear Abbildung

$$f : \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}^g$$

die Γ nach Γ abbildet, $f(\Gamma) \subset \Gamma$. f ist auch ein Homomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln

$$f \in End_{\mathbb{Z}}(\Gamma) \cong M_{2g}(\mathbb{Z}).$$

Sei $\{\lambda_1, ..., \lambda_{2g}\} \subset \mathbb{C}$ die Eigenwerte von f. Wir haben

$$\mathbb{Q}(\varphi_0) \cong \mathbb{Q}(\varphi) \cong \mathbb{Q}(\lambda_i).$$

Dahier ist $\mathbb{Q}(\lambda_i)$ ein CM-Körper und $|\lambda_i| = |\varphi_0| = q^{\frac{1}{2}}$, für $i = 1, .., 2g$.

2.4. Torsionspunkte

Sei $\bar{L}$ ein algebraischer Abschluss von L in $\mathbb{C}$, $\bar{R}$ der ganze Abschluss von R in $\bar{L}$, $\bar{m}$ das maximale Ideal über m in $\bar{R}$, wir haben $\bar{R}/\bar{m} = \bar{\mathbb{F}}_q$.
Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, die n-Torsionsuntergruppe von A ist die Menge

$$A_n(k) = \{p \in A/np = 0\}$$

von Punkten haben Ordnung n. Sei

$$A_{tors}(k) = \cup_{n=1}^{\infty} A_n(k)$$

die Menge von Punkten die endliche Ordnung in $A(k)$ haben.

Bemerkung 5. *Wenn A eine abelsche Varietät über einen Zahlkörper K ist und A_{tors} die Torsionsuntergruppe von A ist, dann ist nach dem Mordell-Weil Satz $A_{tors}(K)$ endlich. (siehe [Rup, Abschnitt 1.])*
Für eine abelsche Varietät A über einen abgeschlossenen Körper k haben wir

$$A_n(k) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \text{ wenn } \mathrm{char} k \text{ nicht } n \text{ teilt },$$

und

$$A_{p^n}(k) \cong (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^i \text{ wenn } \mathrm{char} k = p \text{ und } n > 0,$$

wo $0 \leq i \leq g = dim A$ und i den p-Rank von A bezeichnet (siehe [Mum, Abschnitt 4.]).
Für eine gewöhnliche abelsche Varietät A über einem endlichen Körper $k = \mathbb{F}_q$ mit $q = p^r$ und $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ gilt

$$A_{p^n}(\overline{\mathbb{F}}_q) = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g \text{ für } n \geq 1 \text{ und } g = dim A.$$

Wenn Γ ein Gitter in $\mathbb{C}^g$ ist, sodass $A(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^g/\Gamma$, dann gilt

$$A(\mathbb{C})_n \cong (\mathbb{C}^g/\Gamma)_n \cong \frac{1}{n}\Gamma/\Gamma \cong \Gamma/n\Gamma \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}.$$

Die Torsionuntergruppe des Torus ist

$$(\mathbb{C}^g/\Lambda)_{tors} \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2g}_{tors} \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2g}.$$

2.5. Die Reduktion der abelschen Varietät $A(\mathbb{C})$ über $\overline{\mathbb{F}}_q$

Definition 11. *Ein S-Schema X ist eigentlich, wenn der Struktur-Morphismus $X \longrightarrow S$ vom endlichen Typ, separiert und universell abgeschlossen ist.(Universell abgeschlossen heißt dass für jeden Basiswechsel $S' \longrightarrow S$ der Morphismus $X \times_S S' \longrightarrow S'$ abgeschlossen ist.)*

Satz 9. *([Liu, Satz 3.25]) Sei X ein eigentliches Schema über einen Bewertungsring O_K, und sei $K = Frac(O_K)$, dann ist die kanonische Abbildung*

$$X(O_K) \longrightarrow X_K(K)$$

bijektiv.

Die Liftung A der abelschen Varietät A_0 ist eigentlich über dem Spektrum $SpecR$, und nach Satz 9 erhalten wir einen Isomorphismus.

$$\mathcal{A}(R) \xrightarrow{\cong} A(L).$$

Nach Satz 9 ist auch die Abbildung $\mathcal{A}(\bar{R}) \longrightarrow A(\bar{L})$ ein Isomorphismus.
Ist $L \subset \mathbb{C}$ ein Körper von Charakteristik Null, dann sind

$$A_n(\bar{L}) \cong A_n(\mathbb{C})$$

isomorph, und damit sind auch ihre Torsiongruppen isomorph, weil

$$A(\bar{L})_{tors} = \cup_{n=1}^{\infty} A_n(\bar{L}) \cong \cup_{n=1}^{\infty} A_n(\mathbb{C}) = A_{tors}(\mathbb{C}).$$

Es existiert eine Reduktionsabbildung

$$red : A(\mathbb{C})_{tors} \cong A(\bar{L})_{tors} \cong \mathcal{A}(\bar{R})_{tors} \longrightarrow \mathcal{A}(\bar{R}/\bar{m})_{tors} = A_0(\overline{\mathbb{F}}_q).$$

Wir haben $f \in End^0(\mathbb{C}^g/\Gamma) \xleftarrow{h} End^0(A(\mathbb{C}))$. Sei $H = h^{-1}$ dann $H(f) \in End^0(A(\mathbb{C}))$. Es gilt

$$\begin{aligned} (A(\mathbb{C})_{tors})^{H(f^n)=1} &= \{z \in A(\mathbb{C})_{tors} \ / \ H(f^n)(z) = z\} \\ &= \{z \in A(\mathbb{C}) \ / \ H(f^n)(z) = z\} \\ &= (A(\mathbb{C}))^{H(f^n)=1} \\ &\cong \{z \in \mathbb{C}^g/\Gamma \ / \ h \circ H(f^n)(z) = z\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}^g/\Gamma \ / \ f^n(z) = z\} \end{aligned}$$

und damit haben wir

$$\begin{aligned} (A(\mathbb{C})_{tors})^{H(f^n)=1} &= (\mathbb{C}^g/\Gamma)^{f^n=1} \\ &= \{z \in \mathbb{C}^g/\Gamma \ / \ f^n(z) = z\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}^g \ / \ (f^n - 1)(z) \in \Gamma\} \\ &= \Gamma/(f^n - 1)(\Gamma) \\ &\cong (f^n - 1)^{-1}(\Gamma)/\Gamma. \end{aligned}$$

Nach Lemma 1 gilt

$$\sharp(f^n - 1)^{-1}(\Gamma)/\Gamma = |\det(f^n - 1)|, \text{ mit } f \in End(\mathbb{C}^g/\Gamma).$$

Anderseits haben wir

$$\begin{aligned} A_0(\overline{\mathbb{F}}_q)^{\varphi_0^n=1} &= \{z \in A_0(\overline{\mathbb{F}}_q)/\varphi_0^n(z) = z\} \\ &= \{z \in A_0(\overline{\mathbb{F}}_q)/z^{q^n} = z\} \\ &= A_0(\mathbb{F}_{q^n}). \end{aligned}$$

dann

$$\sharp A_0(\mathbb{F}_{q^n}) = \sharp A_0(\overline{\mathbb{F}}_q)^{\varphi_0^n=1} = \sharp A(\mathbb{C})^{H(f^n)=1}.$$

Die letzte Gleichung gilt weil

$$red : A(\mathbb{C})_n \xrightarrow{\cong} A_0(\overline{\mathbb{F}}_q)_n.$$

Nach folgendem Lemma ein Isomorphismus ist.

Lemma 6. *([Ser2, Lemma 2.]) Wenn n prim ist zu p, dann ist die Reduktionsabbildung ein Isomorphismus zwischen A_n und $\tilde{A}_n$ wobei $\tilde{A} = \mathcal{A} \times_{\bar{R}} \bar{\mathbb{F}}_q$ ist.*

2.6. p-divisiblen Gruppen

Definition 12. *([Tat2, Definition 2.1]) Sei p eine Primzahl und $h \in \mathbb{Z}_{>0}$. Eine p-divisible Gruppe G über R mit Höhe h ist ein induktives System $G = (G_\nu, i_\nu), \nu \geq 0$, wo*

i) G_ν ein endliches Gruppenschema über R von Ordnung $p^{\nu h}$ ist, und

ii) für alle $\nu \geq 0$ die Folge $0 \longrightarrow G_\nu \xrightarrow{i_\nu} G_{\nu+1} \xrightarrow{p^\nu} G_{\nu+1}$ exakt ist.

Für gewöhnliche abelsche Gruppen ist

$$G_\nu \cong (\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})^h$$

und

$$G = \varinjlim G_\nu = (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^h.$$

Definition 13. *([Tat2, Definition 2.1]) Ein Homomorphismus $f : G \longrightarrow H$ von p-divisiblen Gruppen ist ein System von Homomorphismen $f_\nu : G_\nu \longrightarrow H_\nu$ von R-Gruppen, sodass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} G_\nu & \xrightarrow{i_\nu} & G_{\nu+1} \\ f_\nu\downarrow & & \downarrow f_{\nu+1} \\ H_\nu & \xrightarrow{i'_\nu} & H_{\nu+1} \end{array}$$

für alle $\nu \geq 1$ kommutiert.

Beispiel
Sei A ein abelsches Scheme über R von dimension g, $A_n = ker(n : A \longrightarrow A)$. Dann ist (A_{p^ν}, i_ν) eine p-divisible Gruppe $A(p)$ der Höhe $h = 2g$. Hierbei ist i_ν der Inklusions Homomorphismus

$$A[p^\nu] \hookrightarrow A[p^{\nu+1}].$$

Für die multiplikative Gruppe $\mathbb{G}_m$ ist $\mathbb{G}_m(p) = (\mu_{p^\nu}, i_\nu)$ von Höhe $h = 1$ mit

$$\mu_{p^\nu} = Ker \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m & \longrightarrow & \mathbb{G}_m \\ x & \longmapsto & x^{p^\nu} \end{array} \right\}.$$

$\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ ist p-divisible Gruppe als Induktiver Limes der konstanten Gruppenschemata $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ bezüglich der Inklusions Abbildungen

$$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} p\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}.$$

Sei R ein vollständiger Noetherscher lokaler Ring. Wenn G eine Gruppe von endlicher Ordnung über R ist, dann gibt es nach ([Tat2, Abschnitt 1.4]) eine kanonische exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow G^0 \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G^{et} \longrightarrow 0$$

wo i die offen-abgeschlossene Einbettung ist, G^0 die maximal zusammenhängende Gruppe in G ist, und G^{et} étale über R ist.
Sei $G = (G_n, i_n)$ eine p-divisible Gruppe über R. Dann für jedes n die Sequenz

$$0 \longrightarrow G_n^0 \longrightarrow G_n \longrightarrow G_n^{et} \longrightarrow 0$$

exakt. Die Gruppe G_n^0 definiert ein zusammenhänge p-divisible Gruppe G^0 und die Gruppen G_n^{et} definiert ein étale p-divisible Gruppe G^{et}.
Für eine gewöhnliche abelsche Varietät A_0 über einen perfekten Körper $k = \mathbb{F}_q$, haben wir

$$A_{0p^n}(\overline{\mathbb{F}}_q) \cong (\mu_{p^n}(\overline{\mathbb{F}}_q))^g \times (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g.$$

(siehe [Mes, Anhang Lemma 1.] pp. 175). Dann haben wir ein spaltende exakte Sequenz

$$0 \to (\mu_{p^n}(\overline{\mathbb{F}}_q))^g \to A_{0p^n}(\overline{\mathbb{F}}_q) \overset{s}{\leftrightarrows} (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g \to 0.$$

Die abelsche Varietät $\mathcal{A}$ ist die kanonisch Liftung von A_0 zu R. Dann erhalten wir ein spaltende exakte Sequenz

$$0 \to (\mu_{p^n}(\bar{R}))^g \to \mathcal{A}_{p^n}(\bar{R}) \overset{s}{\leftrightarrows} (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g \to 0.$$

Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & (\mu_{p^n}(\bar{R}))^g & \to & \mathcal{A}_{p^n}(\bar{R}) & \overset{s}{\leftrightarrows} & (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & red \downarrow & & \downarrow\cong & & \\
0 & \to & (\mu_{p^n}(\overline{\mathbb{F}}_q))^g & \to & A_{0p^n}(\overline{\mathbb{F}}_q) & \overset{s}{\leftrightarrows} & (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g & \to & 0
\end{array}$$

wir haben $(\mu_{p^n}(\overline{\mathbb{F}}_q))^g = \{1\}$, $\mathcal{A}_{p^n}(\bar{R}) \cong A_{p^n}(\bar{L})$ und $A_{0p^n}(\overline{\mathbb{F}}_q) \cong (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g$ dann erhalten wir ein exakte Sequenz mit einer Spaltung

$$0 \longrightarrow (\mu_{p^n}(\bar{R}))^g \longrightarrow A_{p^n}(\bar{L}) \overset{red}{\rightleftarrows} A_{0p^n}(\overline{\mathbb{F}}_q) \longrightarrow 0$$

und für $N \geq 1$, $N = N_p.n$ mit p nicht teilt n. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & A_N(\bar{L}) & \xrightarrow{red} & A_{0N}(\overline{\mathbb{F}}_q) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & (\mu_{N_p}(\bar{R}))^g & \longrightarrow & A_{N_p}(\bar{L}) & \xrightarrow{red} & A_{0N_p}(\overline{\mathbb{F}}_q) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

kommutiert.

Proposition 9. *Für $N \in \mathbb{N} - \{0\}$, hat der Kern der Reduktions Abbildung*

$$red : A_N(\bar{L}) \longrightarrow A_{0N}(\overline{\mathbb{F}}_q)$$

p-Potenzordnung.

Beweis
Folgt aus Lemma 6. □
Es folgt

$$ker\{red : A(\bar{L})_N \longrightarrow A_0(\overline{\mathbb{F}}_q)_N\} \cong \mu_{N_p}(\bar{R}).$$

Für $N \geq 1$ haben wir eine spaltende exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (\mu_{N_p}(\bar{R}))^g \longrightarrow A_N(\bar{L}) \xrightarrow{red} A_{0N}(\overline{\mathbb{F}}_q) \longrightarrow 0.$$

Sei $N = \sharp A_0(\mathbb{F}_{q^n})$, es gilt

$$A_{0N}(\overline{\mathbb{F}}_q)^{\varphi_0^n=1} = A_0(\mathbb{F}_{q^n}).$$

Dann erhalten wir eine spaltende exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (\mu_{N_p}(\bar{R})^g)^{H(f)^n=1} \longrightarrow A(\bar{L})^{H(f)^n=1} \xrightarrow{red} A_0(\mathbb{F}_{q^n}) \longrightarrow 0.$$

Wir haben

$$\sharp A(\bar{L})^{H(f)^n=1} = \sharp A_0(\mathbb{F}_{q^n}) = |\det(f^n - 1)|.$$

Also ist die Reduktions Abbildung

$$red : A(\mathbb{C})^{H(f)^n=1} \cong A(\bar{L})^{H(f)^n=1} \xrightarrow{\cong} A_0(\mathbb{F}_{q^n})$$

ein Isomorphismus.

Proposition 10. *Die abgeschlossenen Punkte der abelschen Varietät A_0 der Ordnung n sind in Bijektion mit den endlichen Orbits des f-Operation auf $A(\mathbb{C})$ der Ordnung n.*

3. Eine explizite Formel für die abelsche Varietät $A_0/\mathbb{F}_q$

3.1. Weil's explizite Formel

Sei A_0 eine abelsche Varietät über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$. Sei C_T der Rand des Vierecks

$$R = \{\sigma + it \in \mathbb{C} : -\varepsilon \leq \sigma \leq g + \varepsilon, -T \leq t \leq T\}.$$

Aus dem Residuen Satz folgt dann

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} -\tfrac{1}{2\pi i} \int_{C_T} \tfrac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)} \phi(s) ds &= -\sum_{\rho} ord_{s=\rho}(\zeta_{A_0}(s))\phi(\rho) \\ &= \sum_{\rho \text{Polstelle von } \zeta_{A_0}(s)} \phi(\rho) - \sum_{\rho \text{Nullstelle von } \zeta_{A_0}(s)} \phi(\rho). \end{aligned}$$

Hier ist

$$\zeta_{A_0}(s) = \prod_{x \in |A_0|} \frac{1}{1 - N_x^{-s}} = \prod_{x \in |A_0|} \zeta_x(s)$$

die ζ-Funktion der abelschen Varietät A_0, $|A_0|$ sind ihre abgeschlossenen Punkte und $Nx = |k(x)|$ ist die Ordnung des Restklassenkörpers im Punkt x.

Satz 10. *Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\phi(s) = \int_{\mathbb{R}} \exp(ts)\alpha(t)dt$. Dann gilt*

$$\sum_{\rho \textit{Polstelle von } \zeta_{A_0}(s)} \phi(\rho) - \sum_{\rho \textit{Nullstelle von } \zeta_{A_0}(s)} \phi(\rho)$$

$$= \sum_{x \in |A_0|} \log Nx \sum_{\nu \geq 1} \varphi(\nu \log Nx) + \sum_{x \in |A_0|} \log Nx \sum_{\nu \leq -1} N_x^{\nu g} \varphi(\nu \log Nx),$$

mit $g = dim A_0$.

Beweis
Wir benutzen die klassische Methode aus [Bar, Abschnitt 4.]. Wir berechnen zuerst das Integral

$$\lim_{T\to\infty} \int_{g+\epsilon+iT}^{-\epsilon+iT} \frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)} \phi(s) ds.$$

Wir haben $\zeta_{A_0}(s) = Z_{A_0}(q^{-s})$ mit $Z_{A_0}(t) \in \mathbb{Q}(t)$. Seien λ_i die Nullstellen von $Z_{A_0}(t)$ für $i = 1, ..., n$ und μ_j die Polstellen von $Z_{A_0}(t)$ für $j = 1, ..., m$. Dann ist

$$\zeta_{A_0}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(q^{-s} - \lambda_i)}{\prod_{j=1}^{m}(q^{-s} - \mu_j)}.$$

Es folgt

$$\frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-\log q)q^{-s}}{q^{-s} - \lambda_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{(-\log q)q^{-s}}{q^{-s} - \mu_j}$$

und

$$|\frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)}| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\log q}{|1 - \lambda_i q^s|} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\log q}{|1 - \mu_j q^s|}.$$

Sei $s = \sigma + it \in R$ mit $t = T$ und $-\epsilon \leq \sigma \leq g + \epsilon$.
Wir wollen $|\frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)}|$ nach oben beschränken.
Seien λ_i die Nullstellen von $Z_{A_0}(t)$ und seien μ_j die Polstellen. Es gilt $|\lambda_i| = q^{-n_i/2}$ für $n_i \in \{0, ..., 2g\}$ und $|\mu_j| = q^{-m_j/2}$ für $m_j \in \{0, ...2g\}$. Dann gibt es ein $\theta_{n_i} \in [0, 2\pi[$ und ein $\theta_{m_j} \in [0, 2\pi[$, so dass $\lambda_i = q^{n_i/2} \exp(i\theta_{n_i})$ und $\mu_j = q^{m_j/2} \exp(i\theta_{m_j})$.
Sei $s \in R$, aus der Gleichung $1 - \lambda_i q^s = 0$ folgt $q^s = \lambda_i^{-1}$ und damit

$$\exp(\log q(\sigma + iT)) = q^{n_i/2} \exp(i\theta_{n_i}),$$

also gilt $q^\sigma \exp(i(\log q)T) = q^{n_i/2} \exp(i\theta_{n_i})$. Dann ist $\sigma = n_i/2$ und $(\log q)T = \theta_{n_i} + 2\pi\nu$.
Daraus folgt, dass für

$$\begin{cases} \sigma & \neq & n_i/2 \\ T & \neq & \frac{\theta_{n_i}}{\log q} + \frac{2\pi\nu}{\log q} \end{cases}$$

und für $n_i \in \{0, ..., 2g\}$ der Wert $|\zeta_{A_0}(s)|$ ungleich 0 ist. Eine ähnliche Rechnung für

$$\begin{cases} \sigma & \neq & m_j/2 \\ T & \neq & \frac{\theta_{m_j}}{\log q} + \frac{2\pi\nu}{\log q} \end{cases}$$

für $m_j \in \{0, ..., 2g\}$ liefert

$$|\zeta_{A_0}(s)| \neq \infty.$$

Wir wählen nun

$$s \in R\backslash\{\frac{n_i}{2}+i(\frac{\theta_{n_i}}{\log q}+\frac{2\pi\nu}{\log q}); \frac{m_j}{2}+i(\frac{\theta_{m_j}}{\log q}+\frac{2\pi\nu}{\log q})|n_i \in \{0,...,2g\}, m_j \in \{0,...,2g\}, \nu \in \mathbb{Z}\}.$$

Seien jetzt $\vartheta_{n_i} := |\frac{\theta_{n_i}}{\log q}|$ und $\vartheta_{m_j} := |\frac{\theta_{m_j}}{\log q}|$ Elemente aus $]0, \frac{2\pi\nu}{\log q}[$. Dann setzen wir

$$\vartheta_0 = min_{n_i \in \{1,...,2g\}, m_j \in \{1,...,2g\}}\{\vartheta_{n_i}, \vartheta_{m_j}\}.$$

Definiere $T_0 := \vartheta_0$, $T_\nu := \vartheta_0 + \frac{2\pi\nu}{\log q}$ für $\nu \in \mathbb{Z}$ und $s_\nu := \sigma + iT_\nu$ mit $-\epsilon \leq \sigma \leq g + \epsilon$. Zur Vereinfachung der Notationen werde s_ν mit s bezeichnet. Also ist

$$q^s = \exp(s \log q) = \exp((\sigma + iT_\nu)\log q)$$

und

$$|q^s| = \exp(\sigma \log q) = q^\sigma.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} |\frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)}| &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\log q}{|1-\lambda_i q^s|} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\log q}{|1-\mu_j q^s|} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\log q}{|1-|\lambda_i||q^s||} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\log q}{|1-|\mu_j||q^s||} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\log q}{|1-q^{\frac{n_i}{2}} q^\sigma|} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\log q}{|1-q^{\frac{m_j}{2}} q^\sigma|} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\log q}{|1-q^{\frac{n_i}{2}+g+\epsilon}|} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\log q}{|1-q^{\frac{m_j}{2}+g+\epsilon}|} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Ferner ist $|\frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)}|$ eine periodische Funktion der Periode $\frac{2i\pi\nu}{\log q}$. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ außerhalb der Polstellen und der Nullstellen von ζ_{A_0}

$$|\frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)}| = |\frac{\zeta'_{A_0}(\sigma + i(T_0 + \frac{2\pi\nu}{logq}))}{\zeta_{A_0}(\sigma + i(T_0 + \frac{2\pi\nu}{logq}))}| = |\frac{\zeta'_{A_0}(\sigma + iT_0)}{\zeta_{A_0}(\sigma + iT_0)}| \leq C.$$

Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ definiere

$$\phi(s) = \int_{\mathbb{R}} \exp(st)\varphi(t)dt.$$

Es existieren $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\mathrm{supp}(\varphi) \subset]a,b[$. Dann ist $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ und damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \exp(st)\varphi(t)dt &= [\tfrac{1}{s}\exp(st)\varphi(t)]_a^b - \int_a^b \tfrac{1}{s}\varphi'(t)\exp(st)dt \\ &= -\tfrac{1}{s}\int_a^b \varphi'(t)\exp(st)dt. \end{aligned}$$

Wegen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt $|\varphi'(t)| \leq C$ für $t \in]a,b[$. Also folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\exp(st)\varphi(t)|dt &\leq \tfrac{1}{|s|}\int_a^b C|\exp(st)|dt \\ &\leq \tfrac{1}{|s|}\int_a^b |\exp(\sigma t)|dt. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |\int_{g+\epsilon+iT_\nu}^{-\epsilon+iT_\nu} \tfrac{\zeta_A'(s)}{\zeta_A(s)}\phi(s)ds| &\leq \int_{g+\epsilon+iT_\nu}^{-\epsilon+iT_\nu} |\tfrac{\zeta_A'(s)}{\zeta_A(s)}||\phi(s)|ds \\ &\leq C\int_{g+\epsilon+iT_\nu}^{-\epsilon+iT_\nu} |\phi(s)|ds \\ &\leq C\int_{g+\epsilon+iT_\nu}^{-\epsilon+iT_\nu} |\int_{\mathbb{R}} \exp(st)\varphi(t)dt|ds \\ &\leq C\int_{g+\epsilon+iT_\nu}^{-\epsilon+iT_\nu} \tfrac{1}{|s|}\int_a^b \exp(\sigma t)dtds \\ &\leq C\int_{g+\epsilon+iT_\nu}^{-\epsilon+iT_\nu} \tfrac{ds}{|s|}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$|\int_{g+\epsilon+iT_\nu}^{-\epsilon+iT_\nu} \tfrac{\zeta_A'(s)}{\zeta_A(s)}\phi(s)ds| \leq C\int_{g+\epsilon}^{-\epsilon} \tfrac{d\sigma}{|\sigma+iT_\nu|} \leq C\int_{g+\epsilon}^{-\epsilon} \tfrac{d\sigma}{|iT_\nu|} \leq \tfrac{C(g+2\epsilon)}{|T_\nu|}.$$

(Die Konstante C kann verschiedene Konstanten bezeichnen.) Wegen

$$\lim_{T_\nu\to\infty} |\int_{g+\epsilon+iT_\nu}^{-\epsilon+iT_\nu} \frac{\zeta_A'(s)}{\zeta_A(s)}\phi(s)ds| \leq \lim_{T_\nu\to\infty} \frac{C}{|T_\nu|} = 0$$

ist

$$\lim_{T_\nu\to\infty} \int_{g+\epsilon+iT_\nu}^{-\epsilon+iT_\nu} \frac{\zeta_A'(s)}{\zeta_A(s)}\phi(s)ds = 0.$$

Jetzt zeigen wir, dass

$$\lim_{T_\nu\to\infty}\int_{-\epsilon-iT_\nu}^{g+\epsilon-iT_\nu}\frac{\zeta_A'(s)}{\zeta_A(s)}\phi(s)ds=0$$

gilt. Für $s=\sigma+iT_\nu$ mit $-\epsilon\leq\sigma\leq g+\epsilon$ und $T_\nu=T_0+\frac{2\pi\nu}{\log q}$ gilt $\zeta_A(s)\neq 0$, $\zeta_A(s)\neq\infty$ und $|\frac{\zeta_A'(s)}{\zeta_A(s)}|\leq C$, $|\phi(s)|\leq\frac{C}{|T_\nu|}$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
|\int_{-\epsilon-iT_\nu}^{g+\epsilon-iT_\nu}\frac{\zeta_A'(s)}{\zeta_A(s)}\phi(s)ds| &\leq \int_{-\epsilon-iT_\nu}^{g+\epsilon-iT_\nu}|\frac{\zeta_A'(s)}{\zeta_A(s)}||\phi(s)|ds\\
&\leq C\int_{-\epsilon-iT_\nu}^{g+\epsilon-iT_\nu}|\phi(s)|ds\\
&\leq C\int_{-\epsilon-iT_\nu}^{g+\epsilon-iT_\nu}\frac{ds}{|T_\nu|}\\
&\leq \frac{C(g+2\epsilon)}{|T_\nu|}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\lim_{T_\nu\to\infty}\int_{-\epsilon-iT_\nu}^{g+\epsilon-iT_\nu}\frac{\zeta_A'(s)}{\zeta_A(s)}\phi(s)ds=0.$$

Wir berechnen jetzt $\int_{g+\varepsilon-iT_\nu}^{g+\varepsilon+iT_\nu}\phi(s)\frac{\zeta_{A_0}'(s)}{\zeta_{A_0}(s)}ds$

Es gilt $\zeta_{A_0}(s)=\prod\limits_{x\in|A_0|}\frac{1}{1-N_x^{-s}}$. Setzen wir $\zeta_x(s)=\frac{1}{1-N_x^{-s}}$, dann ist $\zeta_{A_0}(s)=\prod\limits_{x\in|A_0|}\zeta_x(s)$ und damit

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta_{A_0}'(s)}{\zeta_{A_0}(s)} &= \frac{(\prod\limits_x\zeta_x(s))'}{\prod\limits_x\zeta_x(s)}\\
&= \frac{\sum\limits_y\prod\limits_{x\neq y}\zeta_x(s)\zeta_y'(s)}{\prod\limits_x\zeta_x(s)}\\
&= \sum_x\frac{\zeta_x'(s)}{\zeta_x(s)}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta_{A_0}'(s)}{\zeta_{A_0}(s)} &= \sum_x\frac{(\log N_x)N_x^{-s}}{1-N_x^{-s}}\\
&= \sum_x\log N_x\sum_{\nu=0}^{\infty}N_x^{-(\nu+1)s}\\
&= \sum_x\log N_x\sum_{\nu=1}^{\infty}\exp(-\nu s\log N_x).
\end{aligned}$$

Also haben wir

$$\begin{aligned}
\int_{g+\varepsilon-iT_\nu}^{g+\varepsilon+iT_\nu} \frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)}\phi(s)ds &= \sum_x \log N_x \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{g+\varepsilon-iT_\nu}^{g+\varepsilon+iT_\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\exp(st)\exp(-s\nu\log N_x)dtds \\
&= \sum_x \log N_x \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{g+\varepsilon-iT_\nu}^{g+\varepsilon+iT_\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\exp(s(t-\nu\log N_x))dtds \\
&= i\sum_x \log N_x \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\exp(g+\varepsilon+iy)(t-\nu\log N_x)dtdy.
\end{aligned}$$

In der letzten Gleichung haben wir s durch $g+\varepsilon+iy$ substituiert. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{g+\varepsilon-iT_\nu}^{g+\varepsilon+iT_\nu} \frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)}\phi(s)ds = i\sum_x \log N_x \sum_{\nu=1}^{\infty} \exp(-(g+\varepsilon)\nu\log N_x) \\
\int_{-T_\nu}^{T_\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(t)\exp(g+\varepsilon)t\exp(iyt)dt)\exp(-iy\nu\log N_x)dy.
\end{aligned}$$

Wir betrachten $T_\nu \to \infty$ und benutzen die Fourier-Transformation.
Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\int_{g+\varepsilon-i\infty}^{g+\varepsilon+i\infty} \frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)}\phi(s)ds \\
&= i\sum_x \log N_x \sum_{\nu=1}^{\infty} \exp(-(g+\varepsilon)\nu\log N_x)\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi(t)\exp((g+\varepsilon)t)](y)](\nu\log N_x) \\
&= 2\pi i\sum_x \log N_x \sum_{\nu=1}^{\infty} \exp(-(g+\varepsilon)\nu\log N_x)\varphi(\nu\log N_x)\exp((g+\varepsilon)(\nu\log N_x)) \\
&= 2\pi i\sum_x \log N_x \sum_{\nu=1}^{\infty} (N_x)^{-\nu(g+\varepsilon)}(N_x)^{\nu(g+\varepsilon)}\varphi(\nu\log N_x) \\
&= 2\pi i\sum_x \log N_x \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\nu\log N_x).
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\int_{g+\varepsilon-i\infty}^{g+\varepsilon+i\infty} \frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)}\phi(s)ds = i2\pi \sum_{x\in|A_0|} \log N_x \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\nu\log N_x).$$

Wir berechnen jetzt $\int_{-\varepsilon-iT_\nu}^{-\varepsilon+iT_\nu} \frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)}\phi(s)ds$.

Wir erinnern jetzt an die Funktionalgleichung für eine abelsche Varietät A der Dimension g über $\mathbb{F}_q$ (siehe [Har, Anhang C (1.2)]). Sei $\zeta(s)$ die Zeta-Funktion von A. Dann gilt die Funktionalgleichung

$$Z(\frac{1}{q^g t}) = \pm q^{\frac{gE}{2}} s^E Z(t),$$

wobei E die Euler Charakteristik von A ist. Da für A_0 eine abelsche Varietät $E = 0$ ist, folgt also

$$Z(\frac{1}{q^g t}) = \pm Z(t).$$

Für $t = q^s$ gilt $Z(\frac{1}{q^g q^s}) = \pm Z(q^s)$, also $\zeta_{A_0}(s) = Z(q^{-s}) = \pm Z(q^{-g+s}) = \pm\zeta_{A_0}(g-s)$ und damit

$$\frac{\zeta'_{A_0}(g-s)}{\zeta_{A_0}(g-s)} = \pm\frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)}.$$

Nach der Substitution $s = g - s$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\varepsilon-iT_\nu}^{-\varepsilon+iT_\nu} \frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)}\phi(s)ds &= -\int_{g+\varepsilon-iT_\nu}^{g+\varepsilon+iT_\nu} \frac{\zeta'_{A_0}(g-s)}{\zeta_{A_0}(g-s)}\phi(g-s)ds \\
&= \pm\int_{g+\varepsilon-iT_\nu}^{g+\varepsilon+iT_\nu} \frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)}\phi(g-s)ds.
\end{aligned}$$

Wir berechnen jetzt $\int_{g+\varepsilon-i\infty}^{g+\varepsilon+i\infty} \frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)}\phi(g-s)ds$. Die Rechnung ist ähnlich wie oben

$$\int_{g+\varepsilon-iT_\nu}^{g+\varepsilon+iT_\nu} \frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)}\phi(g-s)ds = \sum_x \int_{g+\varepsilon-iT_\nu}^{g+\varepsilon+iT_\nu} \phi(g-s)\log N_x \sum_{\nu=1}^{\infty} \exp(-\nu s \log N_x)ds$$

$$= \sum_x \int_{g+\varepsilon-iT_\nu}^{g+\varepsilon+iT_\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\exp(t(g-s))dt \log N_x \sum_{\nu=1}^{\infty} \exp(-\nu s\log N_x)ds$$

$$= \sum_x \log N_x \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{g+\varepsilon-iT_\nu}^{g+\varepsilon+iT_\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\exp(s(-t-\nu\log N_x))\exp(tg)dtds$$

Wir substituieren $s = g + \varepsilon + iy$ und für $T_\nu \to \infty$

erhalten wir

$$\lim_{T_\nu\to\infty}\int_{g+\varepsilon-iT_\nu}^{g+\varepsilon+iT_\nu}\frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)}\phi(g-s)ds$$

$$= i\sum_x \log N_x\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\exp((g+\varepsilon+iy)(-t-\nu\log N_x))\exp(tg)dtdy$$

$$= i\sum_x \log N_x\sum_{\nu=1}^{\infty}\exp(-(g{+}\varepsilon)\nu\log N_x)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\exp(-(g{+}\varepsilon)t)\exp(-iyt)$$
$$\exp(tg)dt\exp(-i\nu\log N_x)dy$$

$$= i\sum_x \log N_x\sum_{\nu=1}^{\infty}\exp(-(g+\varepsilon)\nu\log N_x)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi(-t)\exp(\varepsilon t))$$
$$\exp(iyt)dt\exp(-iy\nu\log N_x)dy$$

$$= i\sum_x \log N_x\sum_{\nu=1}^{\infty}\exp(-(g+\varepsilon)\nu\log N_x)\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi(-t)\exp(\varepsilon t)](y)](\nu\log N_x).$$

Es folgt

$$\int_{g+\varepsilon-i\infty}^{g+\varepsilon+i\infty}\frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)}\phi(g-s)ds$$

$$= i\sum_x \log N_x\sum_{\nu=1}^{\infty}\exp(-(g+\varepsilon)\nu\log Nx)2\pi\varphi(-\nu\log Nx)\exp(\nu\varepsilon\log Nx)$$

$$= 2\pi i\sum_x \log N_x\sum_{\nu=1}^{\infty}N_x^{-\nu(g+\varepsilon)}N_x^{\nu\varepsilon}\varphi(-\nu\log Nx).$$

Und damit

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{g+\varepsilon-i\infty}^{g+\varepsilon+i\infty}\frac{\zeta'_{A_0}(s)}{\zeta_{A_0}(s)}\phi(g-s)ds &= 2\pi i\sum_{x\in|A_0|}\log N_x\sum_{\nu=1}^{\infty}N_x^{-\nu g}\varphi(-\nu\log Nx)\\ &= 2\pi i\sum_{x\in|A_0|}\log N_x\sum_{\nu\le -1}N_x^{\nu g}\varphi(\nu\log Nx).\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned}\lim_{T_\nu\to\infty}-\tfrac{1}{2\pi i}\textstyle\int_{C_{T_\nu}}\frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)}\phi(s)ds &= \sum_{x\in|A_0|}\log N_x\sum_{\nu\ge 1}\varphi(\nu\log Nx)\\ &\quad+\sum_{x\in|A_0|}\log N_x\sum_{\nu\le -1}N_x^{\nu g}\varphi(\nu\log Nx).\end{aligned}$$

Nach dem Residuensatz gilt

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2\pi i}\int_{C_\infty}\tfrac{\zeta_A'(s)}{\zeta_A(s)}\phi(s)ds &= -\sum_{\rho} ord_{s=\rho}\zeta_A(s)\phi(\rho) \\ &= \sum_{\rho Pol}\phi(\rho) - \sum_{\rho Nulls}\phi(\rho). \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\sum_{\rho Pol}\phi(\rho) - \sum_{\rho Nulls}\phi(\rho) = \sum_{x\in|A_0|}\log N_x \sum_{\nu\geq 1}\varphi(\nu\log Nx) + \sum_{x\in|A_0|}\log N_x \sum_{\nu\leq -1} N_x^{\nu g}\varphi(\nu\log Nx).$$

□

3.2. Eine explizite Formel für die Zetafunktion von A_0

Sei A_0 eine abelsche Varietät über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$, l ein Primzahl mit $l \neq p$ und π die Frobenius-Morphismus über $\overline{\mathbb{F}}_q$. Wir haben die Formel

$$\zeta_{A_0}(s) = \prod_{i=0}^{2g}\det{}_{\mathbb{Q}_l}(1-q^{-s}\pi^*|H^i(A_0\otimes\overline{\mathbb{F}}_q,\mathbb{Q}_l))^{(-1)^{i+1}}.$$

mit $g = \mathrm{dimA}_0$, π^* die induzierte Abbildung auf der Kohomologie von $A_0\otimes\overline{\mathbb{F}}_q$ und

$$H^i(A_0\otimes\overline{\mathbb{F}}_q,\mathbb{Q}_l) = (\varprojlim H^i_{et}(A_0\otimes\overline{\mathbb{F}}_q,\mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}_l}\mathbb{Q}_l)$$

die l-adic Kohomologie von $A_0\otimes\overline{\mathbb{F}}_q$. Setzen wir

$$P_i(T) = \det{}_{\mathbb{Q}_l}(1-T\pi^*|H^i(A_0\otimes\overline{\mathbb{F}}_q,\mathbb{Q}_l)).$$

Dies ist ein Polynom vom Grade $\binom{2g}{i}$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, unabhängig von l. siehe ([Har, Anhang C, Satz 4.5]). Dann gilt

$$\zeta_{A_0}(s) = \prod_{i=0}^{2g}P_i(q^{-s})^{(-1)^{i+1}} = \frac{P_1(q^{-s})P_3(q^{-s})...P_{2g-1}(q^{-s})}{P_0(q^{-s})P_2(q^{-s})...P_{2g}(q^{-s})}.$$

Die Tate Module von A_0 ist definiert durch

$$T_l(A_0) = \varprojlim A_0[l^n]$$

bezüglich der Abbildung $[l] : A_0[l^{n+1}] \longrightarrow A_0[l^n]$. Sei

$$V_l(A_0) := T_l(A_0) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$$

$V_l(A_0)$ ist ein $2g$-dimensional $\mathbb{Q}_l$-Vektorraum, es gilt

$$H^1(A_0 \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_l) = V_l(A_0)^* := Hom(V_l(A_0), \mathbb{Q}_l).$$

und damit folgt

$$H^i(A_0 \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_l) = \wedge^i H^1(A_0 \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_l) = \wedge^i V_l(A_0)^*.$$

Satz 11. *(A. Weil)*
Für $0 \leq i \leq 2g$ ist $Res = \frac{i}{2}$, falls $P_i(q^{-s}) = 0$.

Beweis
Die Eigenwerte von π^* auf $V_l(A_0)$ haben den Betrag $q^{\frac{1}{2}}$. Dann die Eigenwerte von π^* auf $V_l(A_0)^*$ haben auch den Betrag $q^{\frac{1}{2}}$. Es folgt das die Eigenwerte von π^* auf $\wedge^i V_l(A_0)^* = H^i(A_0 \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_l)$ haben den Betrag $q^{\frac{i}{2}}$. Sei λ ein Nullstelle von $P_i(T)$ also

$$P_i(\lambda) = \det_{\mathbb{Q}_l}(1 - \lambda\pi^* | H^i(A_0 \otimes \overline{\mathbb{F}}_q)) = 0.$$

Und damit

$$\det_{\mathbb{Q}_l}(\lambda^{-1} - \pi^* | H^i(A_0 \otimes \overline{\mathbb{F}}_q)) = 0.$$

Also ist λ^{-1} ein Eigenwert von π^* auf $H^i(A_0 \otimes \overline{\mathbb{F}}_q)$ Also ist $|\lambda^{-1}| = q^{\frac{i}{2}}$ und somit $|\lambda| = q^{-\frac{i}{2}}$. Aus $P_i(q^{-s}) = 0$ folgt $|q^{-s}| = q^{-\frac{i}{2}}$, dann $q^{-\mathrm{Re}s} = q^{-\frac{i}{2}}$ also $\mathrm{Re}s = \frac{i}{2}$. Es folgt, daß die Nullstellen und Polstellen von $\zeta_{A_0}(s)$ auf dem Achsen $Res = \frac{i}{2}$ für $0 \leq i \leq 2g$ liegen. □
Wir erhalten die Gleichung

$$\sum_{\substack{\rho \\ \rho\text{Polstelle von } \zeta_{A_0}(s)}} \phi(\rho) - \sum_{\substack{\rho \\ \rho\text{Nullstelle von } \zeta_{A_0}(s)}} \phi(\rho) = \sum_{i=0}^{2g} (-1)^i \Big(\sum_{\substack{\rho \\ P_i(q^{-\rho})=0}} \phi(\rho) \Big).$$

Es folgt nach Abschnitt 3.1

$$\sum_{i=0}^{2g} (-1)^i \Big(\sum_{\substack{\rho \\ P_i(q^{-\rho})=0}} \phi(\rho) \Big) = \sum_{x \in |A_0|} \log N_x \sum_{\nu \geq 1} \varphi(\nu \log N_x) + \sum_{x \in |A_0|} \log N_x \sum_{\nu \leq -1} N_x^{\nu g} \varphi(\nu \log N_x).$$

Es gilt $P_0(T) = 1 - T$. Also hat $P_0(q^{-s})$ die Nullstellen

$$\rho = \frac{2\pi i\nu}{\log q}$$

für $\nu \in \mathbb{Z}$.
Es gilt $P_{2g}(T) = 1 - q^g T$. Also hat $P_{2g}(q^{-s})$ die Nullstellen

$$\rho = g + \frac{2\pi i\nu}{\log q}$$

für $\nu \in \mathbb{Z}$. Insgesamt gilt die explizite Formel

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \phi(\frac{2\pi i\nu}{\log q}) + \sum_{i=1}^{2g-1} (-1)^i (\sum_{\rho} \phi(\rho)) + \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \phi(g + \frac{2\pi i\nu}{\log q}) \\ = &\sum_{x\in|A_0|} \log N_x \sum_{\nu\geq 1} \varphi(\nu \log N_x) + \sum_{x\in|A_0|} \log N_x \sum_{\nu\leq -1} N_x^{\nu g} \varphi(\nu \log N_x). \end{aligned}$$

Proposition 11. *Die abgeschlossenen Punkte von A_0 vom Grad n sind in Bijektion mit den endlichen Frobenius-Orbits auf $A_0 \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$ der Ordnung n, und sie sind auch in Bijektion mit den kompakten $\mathbb{R}$-Orbits auf X der Länge $l(\gamma) = n \log q$, wobei $n = degx := \dim_{\mathbb{F}_q} k(x)$.*

Unter der Bijektion von Proposition 11 und $l(\gamma_x) = \deg x \log q = \log |k(x)| = \log Nx$ wird die obige explizite Formel zur Formel des transversalen Index des de Rham Operators des verallgemeinerten Solenoids X von Satz 1.

Literaturverzeichnis

[Art] M. Artin. *Algebra.* 1991

[Ati] M.F. Atiyah. *Elliptic operators and compact groups.* Springer LNM 401, 1974.

[Bar] K. Barner. *On A. Weil's Explicit Formula.* volume 323 of J. Reine Ang. Math., 1981, 139-152.

[Cha] C.L. Chai und F. Oort. *Moduli of Abelian Varieties and p-Divisible Groups, pp.6-21.* Informal Notes, Conference on Arithmetic Geometry, Göttingen, 2006.

[Cip] B. Cipra *A prime case of chaos.* In: Whatt's happening in the mathematical sciences. Vol. 4, AMS 1999.

[Del] P. Deligne. *Variétés abéliennes ordinaires sur un corps fini.* Inventiones math. 8, 238-243, 1969.

[Den1] C. Deninger. *On the nature of the explicit formulas in analytic number theory-a simple example.* Number theoretic methods (Iizuka, 2001), 97-118, Dev. Math., 8, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.

[Den2] C. Deninger. *Number theory and dynamical systems on foliated spaces.* Jber. d. Dt. Math.-Verein. 103(2001), 79-100.

[Gri] P. Griffiths. und J. Harris. *Principles of algebraic geometry.* A Wiley Interscience Publication, 1978.

[Jän] K. Jänich. *Vector Analysis.* Springer, 2000.

[Hal] P.R. Halmos. *Measure Theory.* New York, Springer-Verlag, 1950.

[Har] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* New York (Springer), 1977.

[Hin] M. Hindry und J. Silverman. *Diophantine Geometry: An Introduction.* Gradute Texts in Mathematics 201, New York (Springer), 2000.

[Klei1] S. Kleinerman. *The Jacobian, The Abel-Jacobi Map, and Abel's Theorem.* Deutschland (artikel), 2003.

[Klei2] S. Kleinerman. *On The Torsion Points of Elliptic Curves and Modular Abelian Varieties, pp.3-4.* Deutschland (artikel), 2004.

[Kram] J. Kramer *Die Riemannsche Vermutung.* Elem. Math. 57 (2002), 90-95.

[Lan] S. Lang. *Complex Multiplication.* New York, Springer-Verlag, 1983.

[Liu] Q. Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves.* Oxford University Press, 2002.

[Loo] L.H. Loomis *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis.* New York, D. Van Nostrand Company, 1953.

[Lub] J. Lubin, J.P. Serre und J. Tate. *Elliptic Curves and Formal Groups.* Woods Hole Summer Institue (1964).

[Mes] W. Messing. *The Crystals Associated to Brasotti-Tate Groups: with Application to Abelian Schemes.* Lecture Notes in Math. 264, Springer, Berlin, 1972.

[MS] C.C. Moore und C. Schochet. *Global analysis on foliated spaces.* MSRI Publication 9, Springer (1988)

[Mum] D. Mumford. *Abelian Varieties.* (pp.39.) Bombay, Oxford University Press, 1974.

[Oor1] F. Oort. *Abelian Varieties over Finite Fields.* Netherlands, 2005.

[Oor2] F. Oort. *The Isogeny Class of a CM-Type Abelian Variety is Defined over a Finite Extension of the Prime Field.* Journ. Pure Appl. Algebra 3, 1973, 399-408.

[Oor3] F. Oort. *Lifting an endomorphism of an elliptic Curve to Characteristic zero.* zero. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 76. Indag. Math. 35 (1973), 466-470.

[Rup] W.M. Ruppert. *Torsion points of abelian varieties in abelian extensions.* arXiv:math.NT/9803169V1 (1998), 1-7.

[Ser1] J.P. Serre *Cours d'arithmétique.* Collection SIP, Le mathématiticien, 2, Presse Universitaires de France, Paris, 1970.

[Ser2] J.P. Serre und J. Tate. *Good Reduction of Abelian Varieties.* (1968), Ann. of Math. (2) 88, 492-517.

[Ser3] J.P. Serre. *Groupes p-Divisibles.* Sém. Bourbaki, Vol. 10, Exp. No. 318, Paris, 1966, pp. 73-86.

[Ser4] J.P. Serre und J. Tate. *Good Reduction of Abelian Varieties.* Ann. Math. 88, 1968, 492-517.

[Shi] G. Shimura. *Abelian Varieties with Complex Multiplication and modular Functions.* Princeton University Press, 1998.

[Silv1] J. H. Silverman. *The Arithmetic of Elliptic Curves.* New York (Springer), 1986.

[Silv2] J.H. Silverman. *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves.* (pp.71.) New York (Springer), 1994.

[Tat1] J. Tate. *Endomorphisms of Abelian Varieties over Finite Fields.* Sém. Bourbaki 21 (1966), Invent. Math.(2), 134-144.

[Tat2] J. Tate. *p-Divisible Groups.* Proc. Conf. Local Fields, Springer, 1967, pp. 158-183.

[Tat3] J. Tate. *Classes d'isogénie des variétés abéliennes sur un corps fini.* Séminaire Bourbaki 21e année, 1968/69, n. 352.

[Ung] A. Unger. *Structure of Endomorphism Algebras of Abelian Varieties.* Number Theory Seminar, 2005, University of Sydney.

[Wei] J. Weidmann. *Lineare Operatoren in Hilberträumen.* B. G. Teubner Stuttgart, 1976.