T^3-Regionaltagung Aachen 2003

Workshop 5

Siegfried Weiß

Anwendungsorientierte Einführung in die Integralrechnung

Siegfried Weiß
Arndtstraße 4
31141 Hildesheim

siegfried.weiss@gmx.de

Anwendungsorientierte Einführung in die Integralrechnung mit dem Voyage 200

0. Vorbemerkung

Die Einführung in die Integralrechnung wird meistens anhand eines Problems aus der Flächenberechnung durchgeführt, und auch in den Übungsaufgaben treten überwiegend Flächenberechnungen auf. Hier soll ein Zugang zur Integralrechnung vorgestellt werden, der von Beginn an auch andere Anwendungen wie Volumina, Mantelflächen und Bogenlängen einbezieht. Der Begriff Integral wird dabei so früh benutzt, dass im Unterricht mehrfach der Übergang von der Summation zur Integration erfolgen kann.

1. Einstieg

Eine Vase oder ein ähnliches Objekt wird präsentiert. Schülervorschläge zu möglichen Fragestellungen (z. B. Berechnung des Volumens der Mantelfläche, der Länge der Seitenlinie (Bogenlänge), des Materialverbrauchs oder der Lage von Eichstrichen (z. B. bei Gläsern) werden gesammelt.

2. Entwicklung einer Untersuchungsstrategie für die Volumenbestimmung

Naheliegend ist es, zuerst das Volumen experimentell (durch Füllen mit Wasser) zu bestimmen. Für die unten abgebildete Vase ergab sich ein Volumen von ca. 730 ml.
Für eine mathematische Behandlung wäre zunächst eine Funktion zu bestimmen, die die Randlinie der Vase beschreibt. Anschließend kann das aus der Mittelstufe bekannte Näherungsverfahren mit ein- und umbeschriebenen Treppenkörpern aus Zylinderscheiben angewandt werden.

3. Datenerfassung und Modellierung der Randfunktion

3.1 Datenerfassung

Mit Hilfe von Lineal und Faden lässt sich der Vasenumfang an verschiedenen Stellen bestimmen. Die ermittelten Werte in einem Cellsheet-Tabellenkalkulationsblatt[1] eingetragen.

Der Radius wird berechnet. In der Bearbeitungszeile sieht man, welche Formel in Zelle C2 einzugeben ist. Sie wird anschließend zunächst über [F1] Dat, 5: Kopieren oder einfacher mit [♦][C] in die „Zwischenablage“ kopiert. Schließlich markiert man die darunter liegenden Zellen C2 bis C9 und fügt die Formel ein (am einfachsten mit [♦][V]).

F1 File | F2 Plot | F3 Edit | F4 Undo | F5 $ | F6 Funcs | F7 Stat | F8 ReCalc

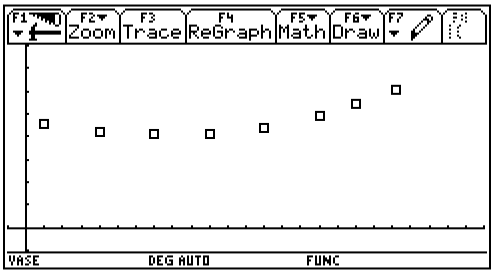
vas	A	B	C	D	E	F
1	Höhe	Umfang	Radius			
2	1.	28.8	4.5837			
3	4.	26.6	4.2335			
4	7.	25.9	4.1221			
5	10.	26.	4.138			
6	13.	27.6	4.3927			
7	16.	30.6	4.8701			
8	18.	34.	5.4113			
9	20.2	38.3	6.0956			

C2: =B2/(2π)

VASE DEG AUTO FUNC

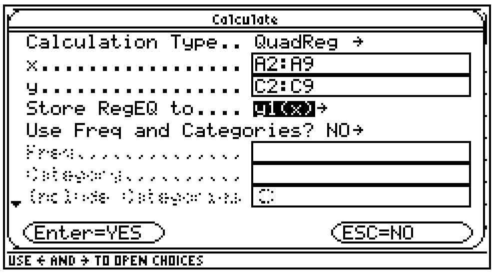
[1] Cellsheet bietet an dieser Stelle noch keine Vorteile gegenüber dem Data-Matrix-Editor. Bei den weiteren Rechnungen ist Cellsheet aber dem Data-Matrix-Editor deutlich überlegen und wird deshalb auch schon hier eingesetzt.

Der zugehörige Datenplot gibt grob das Profil wieder.
Über F2 (Plot) 1:Plot Setup, F1 (Define) kommt man in das Definitionsfenster für den Datenplot. Hatte man den Bereich A2:A9 in der Tabelle markiert, so erscheint jetzt die Eintragung bei xRange. Für yRange ist entsprechend C2:C9 einzugeben.



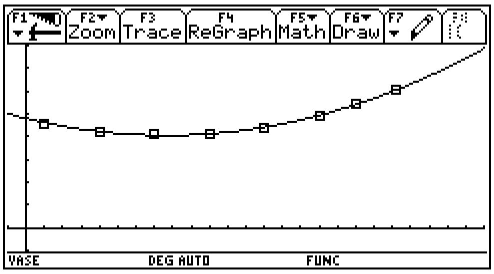
3.2 Datenanalyse mit dem Voyage 200

Cellsheet bietet zur Bestimmung einer zugehörigen Randkurve umfangreiche Regressionsanalysen. Diese Werkzeuge sind über F7 (Stat) 1: Calculate zugänglich.



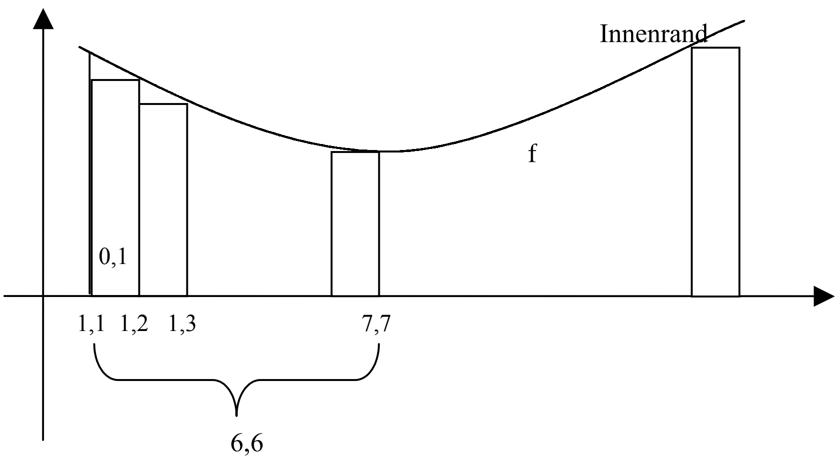
Der Vergleich verschiedener Regressionspolynome zeigt, dass die Vasenkontur hinreichend gut schon durch folgendes Regressionspolynom 2. Grades beschrieben wird:

$$y1(x)=0{,}012683x^2-0{,}194121x+4{,}797775.$$



4. Das Volumen der Vase

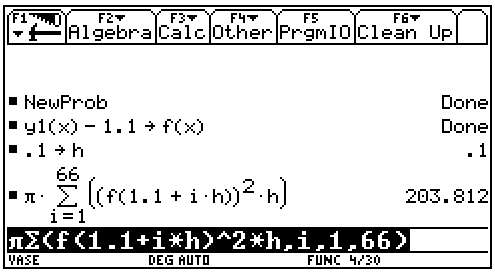
Die folgende Skizze zeigt u. a. , dass man zur Bestimmung des Volumens einer einbeschriebenen Zylinderscheibe im allgemeinen je nach Monotonieverhalten der Funktion mit der rechten oder linken Intervallgrenze zu rechnen hat. Bei einer willkürlichen Intervalleinteilung könnte zudem das Problem auftreten, dass das Minimum oder Maximum des Intervalls nicht am Rande des Intervalls liegt. Daher sollte man die Randfunktion zunächst in streng monotone Abschnitte teilen und das Volumen abschnittsweise ermitteln und dann die Summe bilden. Exemplarisch soll das für den ersten Abschnitt gezeigt werden.



Der Außenrand wird durch die oben bestimmte Funktion y1 beschrieben. Der Innenrand wird durch die Funktion f mit $f(x)=y1(x)-1{,}1$ und $1 \le x \le 20{,}2$ angenähert (bei einer als konstant angenommenen Materialdicke von 1,1 cm).
Das Minimum der Funktion f kann über F5 (Math) 3: Minimum grafisch bestimmt werden.
Die Funktion ist für $1{,}1 \le x \le 7{,}7$ streng monoton fallend.

Es sollen zunächst einbeschriebene Treppenkörper betrachtet werden.
Wählt man in einem ersten Schritt für die Höhe der Zylinderscheiben h=0,1, so benötigt man 66 Zylinderscheiben für den entsprechenden Treppenkörper. Für sein Volumen gilt:

$$V_u(66) = \pi \cdot \sum_{i=1}^{66} ((f(1{,}1 + h \cdot i))^2 \cdot h) \approx 203{,}81 .$$



Nach Definition der Funktion f wird 0,1 als h gespeichert.
Dann wird die Summe

$$\pi * \sum (f(1.1 + h * i)\,\hat{}\,2 * h, i, 1, 66)$$

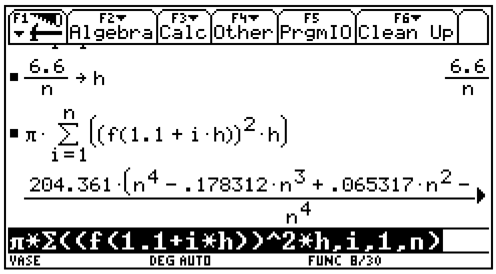
eingegeben.

Wählt man in einem zweiten Schritt h=0,01 so erhält man:

$$V_u(660) = \pi \cdot \sum_{i=1}^{660} ((f(1{,}1 + h \cdot i))^2 \cdot h) \approx 204{,}31 .$$

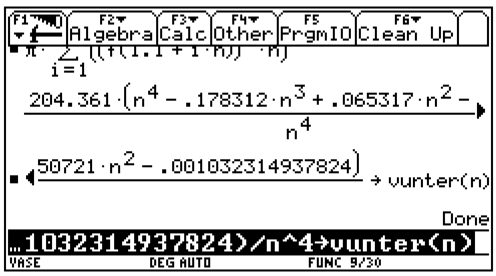
Für dieses Teilintervall beträgt das Volumen eines einbeschriebenen Treppenkörpers aus n gleich hohen Zylinderscheiben:

$$V_u(n) = \pi \cdot \sum_{i=1}^{n} ((f(1{,}1 + h \cdot i))^2 \cdot h) \text{, dabei ist } h = \frac{6{,}6}{n} .$$



Damit ein Vergleich mit weiteren Summen erfolgen kann soll die Formel zur Berechnung der Summen gespeichert werden.

Zunächst wird h gespeichert, dann der Summenterm in den Voyage 200 eingegeben und vereinfacht.



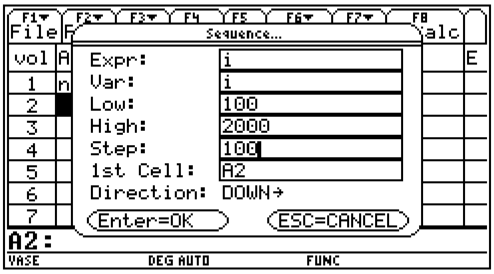
Der **vereinfachte** Summenterm wird als Untersummenfunktion vunter(n) gespeichert. Würde man auf die vorherige Vereinfachung verzichten, so müssten die entsprechenden Umformungen immer wieder vom Rechner durchgeführt werden, was (deutlich spürbar) Zeit kosten würde.

Entsprechend kann auch das Volumen des umbeschriebenen Treppenkörpers beschrieben werden. Bei einer Teilung in n gleich hohe Zylinderscheiben wird das Volumen beschrieben durch:

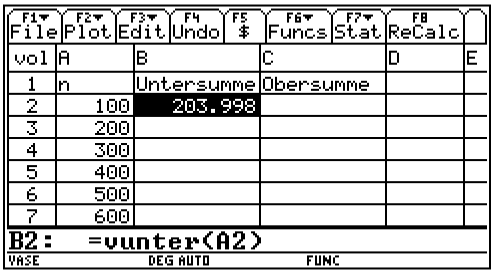
$$V_o(n) = \pi \cdot \sum_{i=0}^{n-1} ((f(1{,}1 + h \cdot i))^2 \cdot h) \text{, dabei ist } h = \frac{6{,}6}{n} .$$

Die Annäherung an den Grenzwert soll visualisiert werden. Dazu können weitere Volumina berechnet und die Ergebnisse in einer Tabelle festgehalten werden.

Es wird eine Cellsheet-Tabelle angelegt. In Spalte A (Überschrift: n) erzeugt man mit $\boxed{\text{F3}}$(Edit), 4: Sequence die Zahlenfolge 100;200;300;...;2000.



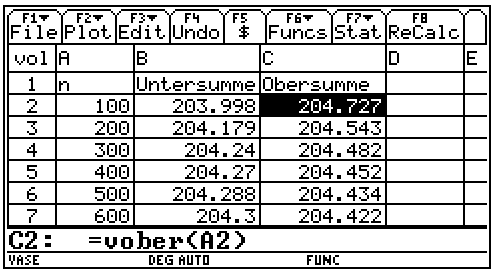
Die Breite der Spalten B und C wird über $\boxed{\text{F3}}$(Edit), 8: Column Format der Überschriftenbreite angepasst. In Spalte B (Überschrift: Untersumme) wird in Zelle B2 die Formel = vunter(A2) eingeben und anschließend nach unten kopiert.



vol	A	B	C	D	E
1	n	Untersumme	Obersumme		
2	100	203.998			
3	200				
4	300				
5	400				
6	500				
7	600				

B2: =vunter(A2)

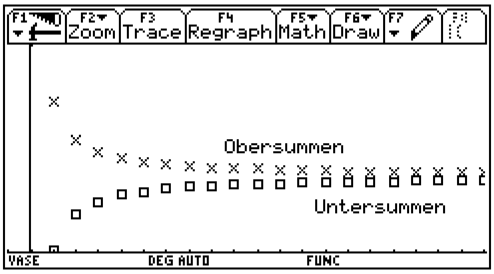
Entsprechend verfährt man mit den Obersummen.



vol	A	B	C	D	E
1	n	Untersumme	Obersumme		
2	100	203.998	204.727		
3	200	204.179	204.543		
4	300	204.24	204.482		
5	400	204.27	204.452		
6	500	204.288	204.434		
7	600	204.3	204.422		

C2: =vober(A2)

Mit den so erzeugten Werten werden Plots definiert und gezeichnet. Die Grafik zeigt die Konvergenz gegen einen Grenzwert.
Der Voyage 200 kann auch den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} vunter(n)$ bestimmen:
Syntax: 6.6/n→n; limit(vunter(n),n,∞)
Die Grenzwertbestimmung ist bei komplizierteren Ausdrücken u.U. nicht mehr möglich.



Meines Erachtens kann man hier erstmals den Begriff Integral benutzen:
Da die Grenzwerte von Unter- und Obersumme existieren und identisch sind, nennt man die Funktion f^2 integrierbar und schreibt:

$$\pi \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} ((f(1{,}1+h\cdot i))^2 \cdot h) = \pi \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} ((f(1{,}1+h\cdot i))^2 \cdot h) = \pi \cdot \int_{1,1}^{7,7} (f(x))^2\,dx$$

(mit $h = \dfrac{6{,}6}{n}$).

Man könnte eventuell noch f(1,1+h·i) durch $f(x_i)$ und h durch Δx ersetzen um die Übersetzung von der Summenformel zur Formel mit Integral zu erleichtern.

Führt man das Verfahren zur Volumenberechnung für den nächsten Abschnitt entsprechend durch und bildet dann die Summe, so erhält man einen Wert, der überraschend gut mit dem gemessenen Volumen übereinstimmt.

5. Bestimmung der Mantelfläche

Die Berechnung des Mantelflächeninhalts und die Länge der Seitenlinie der Vase können gut in Gruppenarbeit erfolgen. Fast alle Gruppen wählen bei der Berechnung des Mantelflächeninhalts den in 5.1 beschriebenen nahe liegenden, aber falschen Weg. Dank der vorgeschlagenen Überprüfung wird klar, dass ein Fehler vorliegen muss. Die Suche nach dem Fehler und nach Erklärungen führt in der Regel zu interessanten Diskussionen.
Zu rechnen ist jetzt wieder mit dem Außenrand der Vase, also mit der Funktion y1. Um vertraute Darstellungen zu erhalten wird y1 als f gespeichert: y1(x) →f(x).

5.1 Nahe liegender (aber falscher) Ansatz: Annäherung durch Zylinderscheiben

Von der Sek I her ist die Formel für die Mantelfläche des Zylinders bekannt: M = 2πrh.
Bei der Unterteilung der Vasenhöhe in n Teilintervalle der Höhe h liefert dieser Ansatz

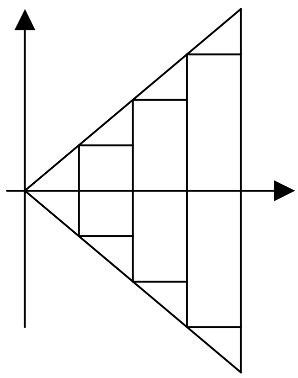
$$M_u(n) = 2\pi \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (f(i \cdot h) \cdot h) \text{ , wobei } h = \frac{7,7}{n}.$$

M_u ist mit dem TI 92 numerisch bestimmbar, auch die direkte Grenzwertbestimmung ist möglich, erforderliche Eingaben für M_u:

7,7/n→h
limit(2 π *Σ(f(i*h)*h,i,0,n-1),n,∞).
Ergebnis: M_u = 208,088

5.2 Überprüfung des Ansatzes

Für die verwendete Vase wurde als Näherungswert für den ersten Abschnitt der Mantelfläche 208,088 bestimmt. Ist dies Ergebnis hinreichend genau? Zur Überprüfung des Zylinderscheibenansatzes werde ein einfacher Kegel mit h=r=10 betrachtet. Seine Spitze liege im Ursprung, die Mantellinie wird dann beschrieben durch y = x. Die bekannte Formel für den Kegelmantel lautet M = π r s.
Für s erhält man mit Hilfe des Satzes des Pythagoras $s=\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.
Für M ergibt sich somit $M = \pi \cdot 100\sqrt{2}$.
Die Anwendung des obigen Ansatzes liefert jedoch $M = 100\pi$.



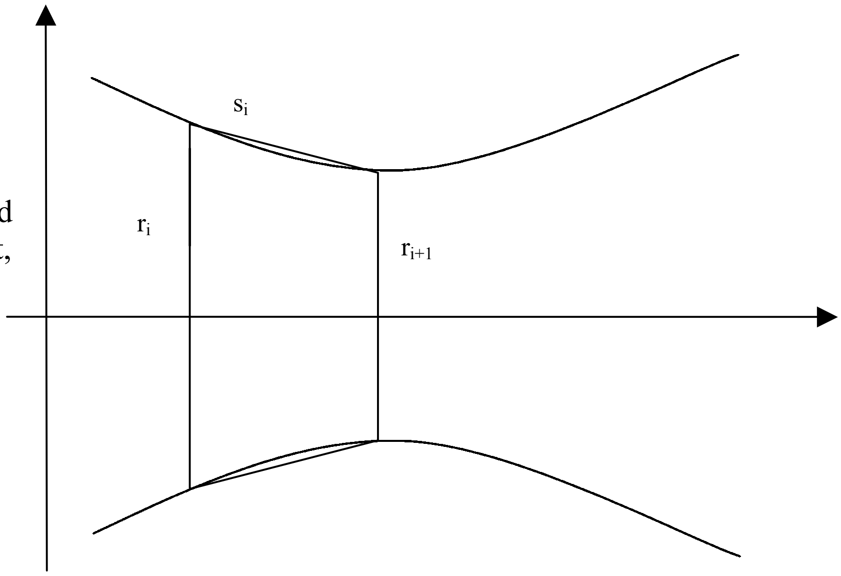
Wie ist der Fehler zu erklären? Man mache sich anhand der Skizze klar, dass sich bei jeder noch so feinen Unterteilung für jede Zylinderscheibe stets ein Höhenabschnitt, aber nie ein Mantellinienabschnitt ergibt. Der Mantellinienabschnitt ist stets um den Faktor $\sqrt{2}$ länger als der Höhenabschnitt. Das Ergebnis ist um genau diesen Faktor zu klein.

5.3 Zweiter Ansatz: Annäherung über Kegelstümpfe

Anstelle der Zylinderscheiben wird jetzt mit Kegelstümpfen gearbeitet, deren Mantelfläche sich nach

$$M_i = (r_i + r_{i+1})\ \pi\ s_i$$

ergibt.

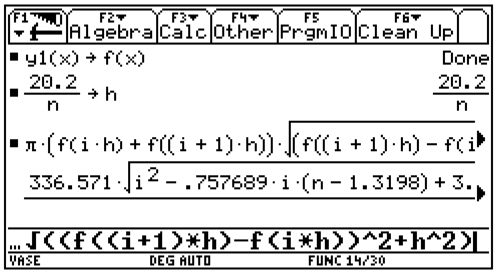


Je nachdem ob die Vase (bzw. der Vasenabschnitt) nach außen oder innen gewölbt ist, ergeben sich Unter- oder Obersummen bei diesem Verfahren.

Bei Unterteilung der Gesamthöhe der Vase in n Teilintervalle hat der i-te Kegelstumpf die Mantelfläche

$$M_i = \pi \cdot \left(f(i \cdot h) + f((i+1) \cdot h) \right)$$
$$\bullet \sqrt{\left(f((i+1) \cdot h) - f(i \cdot h) \right)^2 + h^2}$$

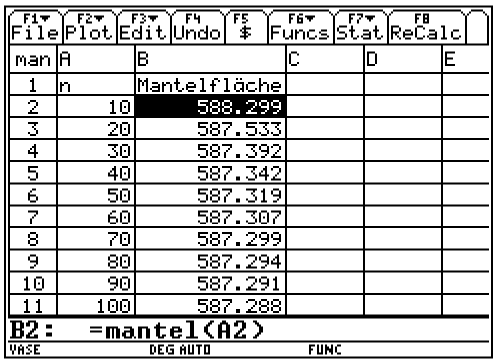
mit $h = \dfrac{20{,}2}{n}$



Dieser Ausdruck wird eingegeben. Der vereinfachte Ausdruck wird als mantel(n) gespeichert.

Die Mantelfläche ist der Grenzwert der Summe: $M = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i$.

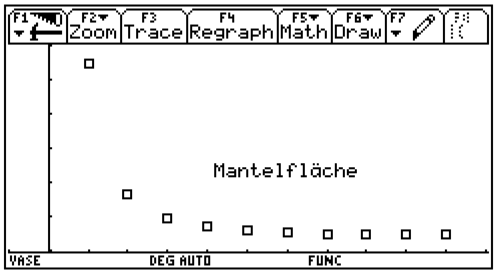
Diesen Grenzwert kann der Voyage 200 nicht bestimmen, wohl aber einzelne durch Summation gewonnene Näherungswerte (für kleine n).



man	A	B	C	D	E
1	n	Mantelfläche			
2	10	588.299			
3	20	587.533			
4	30	587.392			
5	40	587.342			
6	50	587.319			
7	60	587.307			
8	70	587.299			
9	80	587.294			
10	90	587.291			
11	100	587.288			

B2: =mantel(A2)

Man könnte die rechts stehende Grafik erzeugen, um die Konvergenz zu visualisieren.



Will man die bekannten Integralformeln für die Mantelfläche (und später auch für die Bogenlänge) herleiten, so sind die Summenterme umzuformen. Die Umformung betrifft die Polygonstücke s_i :

$$s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x_i \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

Aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung ergibt sich:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(x_j) \quad , \quad x_j \in [x_i ; x_{i+1}]$$

Damit folgt:

$$s_i = \Delta x_i \cdot \sqrt{1+\left(f'(x_j)\right)^2}$$

Somit ist folgende Umformung möglich:

$$M = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} M_i = \pi \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left((f(x_i)+f(x_{i+1}))\sqrt{1+\left(f'(x_j)\right)^2}\cdot\Delta x\right)$$

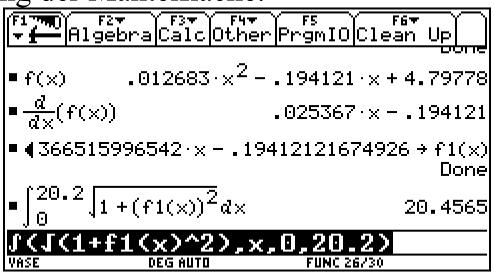
$$= \pi \int_0^{20,2} (2f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2})dx = 2\pi \int_0^{20,2} (f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2})dx.$$

6. Bestimmung der Bogenlänge

Aus der Entwicklung des numerischen Zugriffs auf die Mantelfläche ergibt sich gleichzeitig eine Methode, auch die Bogenlänge numerisch zu bestimmen. Der gesamte Graph wird durch einen Streckenzug angenähert, wobei die Längen der einzelnen Teilstrecken durch den Wurzelterm der Mantelflächenformel gegeben sind. Für die Bogenlänge gilt dann

$$b = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\left(f((i+1)\cdot h) - f(i\cdot h)\right)^2 + h^2}\text{ , mit } h = \frac{20,2}{n}.$$

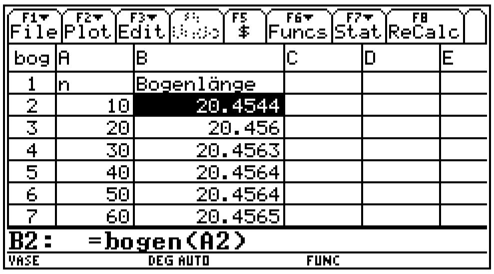
Auch dieser Summengrenzwert kann mit Hilfe eines Integrals berechnet werden. Die Umformung erfolgt ähnlich wie schon bei der Berechnung der Mantelfläche.



Hier die Berechnung mit Hilfe des Integrals:

Die erste Ableitung von f wird bestimmt und als f1 gespeichert.

Das Integral wird berechnet.



Mit dem Voyage 200 lässt sich der Grenzwert der Summen nicht berechnen, wohl aber die Summe für konkrete Werte von n.

Man sieht in der Tabelle, dass bereits die erste Summe mit nur 10 Summanden sich praktisch nicht vom Integral unterscheidet.