Martin Hohelüchter

Zahlen als Begriffe

Eine Revision der Fregeschen Zahlendefinition

Einleitung. Mit den Zahlen bietet die Geistesgeschichte ein Beispiel für die Entwicklung des Denkens im Umgang mit einem Gegenstand. Auffällig ist dabei deren vielfältige Ambiguität. Einerseits werden sie bereits im Beginn der Geschichte genutzt, andrerseits sind noch heute nicht alle ihre Geheimnisse aufgedeckt. Einerseits sind sie überall in der Welt anzutreffen, andrerseits gehören sie selbst nicht zur Welt. Einerseits stehen sie für Ratio und Klarheit, insofern dasjenige, was durch Zahlen erfaßbar ist, der Ratio zugänglich ist, andrerseits waren sie selbst nicht der Ratio zugänglich. Einerseits galt die Theorie der Zahlen, die Arithmetik, als eine Grunddisziplin nicht nur der Mathematik, sondern des Denkens überhaupt, andrerseits galten die Gegenstände der Arithmetik, falls sie überhaupt thematisiert wurden, als nicht definierbar. So sind zwar sämtliche Zahlen auf die natürlichen Zahlen zurückzuführen, diese aber hielt man für undefinierbar, was zu Ausdruck kommt in dem bekannten Kroneckerwort: „Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alle anderen sind Menschenwerk.“ Erst Frege ist es in seinen „Grundgesetzen der Arithmetik“ gelungen, eine akzeptable Definition (einzelner) natürlicher Zahlen aufzuzeigen:

(0.1) Die *Anzahl, welche dem Begriff F* zukommt, ist der Umfang des Begriffes „gleichzahlig dem Begriffe F“. (§ 68)[1]

[1] Frege, GdA*. Der Verweis auf einen bloßen § bezieht sich stets auf diese Arbeit.

Er definiert also Zahlen ausschließlich als Anzahlen von *Begriffen*. Unabhängig davon definiert Russell sie in ähnlicher Weise ausschließlich als Zahlen von *Klassen*:

(0.2) Die *Zahl einer Klasse* ist die Klasse aller Klassen, die der gegebenen Klasse „ähnlich" sind.[1]

Damit scheint die erste Frage der inhaltlichen Arithmetik, die nach ihrem Gegenstand endgültig beantwortet. Alternative Definitionsansätze sind nämlich entweder *axiomatisch* wie der von Peano für die natürlichen Zahlen und beschreiben somit lediglich eine Struktur; oder sie geben ein *Modell* vor wie Zermolo und von Neumann, die auf speziellen *Mengen*, diese Struktur realisieren.[2] In beiden Ansätzen werden also nicht absolute Einzelzahlen ohne jede Struktur, sondern aufeinander bezogene und damit *strukturierte* (Ordinal)zahlen definiert. Beide umgehen demnach das Problem einer Definition von Zahlen und dürfen daher hier unbeachtet bleiben.

Frege und Russell dagegen geben mit ihren Definitionen (0.1) f je eine Antwort auf die Frage nach dem Status von Zahlen. Beide definieren jedoch jede Zahl als eine *Klasse*, Russell sogar als eine Klasse von Klassen. Damit haben beide einen grundsätzlichen Mangel. Denn wie an anderer Stelle aufgezeigt wurde,[3] muß eine Klasse zwar aus *Einheiten* bestehen, ist aber – anders als eine Menge – selbst *keine Einheit*. Insofern jede Zahl eine Einheit sein soll, sind die Definitionen (0.1) f also verfehlt, die Russellsche sogar zwiefach, da der Inhalt einer Klasse ja nur Einheiten und daher keine Klassen enthalten kann. Beide Antworten gehen das Problem somit zwar *inhaltlich* überzeugend an, sind aber beide aus demselben Grunde logisch unhaltbar.[4]

Daher sind sie in logischer Hinsicht zu revidieren. Dieser Aufgabe wollen wir uns in dieser Arbeit unterziehen und versuchen deshalb den Fregeschen Ansatz *inhaltlich* beizubehalten, ihn aber in logischer Hinsicht so zu modifizieren, dass daraus eine haltbare Definition von Zahlen zu gewinnen ist. Dabei gehen wir entscheidend über Frege hinaus. Denn dieser versucht nur allgemein (beliebige) einzelne Anzahlen zu definieren, nicht aber einen *Begriff* der *Anzahl* anzugeben. Eine Klasse von Einheiten induziert ja nicht einen Begriff, (dessen Extension sie ist).

Wir dagegen werden gerade *beginnen* mit der Explikation eines solchen *Begriffs* der Anzahl. Dazu werden wir eine Modifikation der Fregeschen Definitionen vorstellen, die auf einer Modifikation seiner Attributionstheorie beruht.[5] Sie ermöglicht eine allgemeine Lösung, indem im Fregeschen Ansatz Klassen durch Begriffe ersetzt werden, die ja Einheiten sind. Jede Anzahl ist dann ein (höherstufiger) Begriff. Dadurch wird dann die Ambiguität der Zahlen erklärbar, denn sie können dann – anders als bei Frege – sowohl in der Rolle eines *Attributes* als auch in der eines *Gegenstandes*, d.h. als Träger eines (anderen) Attributes auftreten. Damit sind dann *Begriffe* und Anzahlen, d.h. Einheiten, die unter den *Begriff* der Anzahl fallen, als endlich oder unendlich, abzählbar oder überabzählbar zu definieren. Weiter sind mittels der Anzahlen *Zahlen* einzuführen, die keine Anzahlen sind.

---

[1] Russell, PM, §§109 ff. Dabei gelten zwei Klassen als „ähnlich", wenn ihre Elemente bijektiv aufeinander abzubilden sind.

[2] So stützt sich die heute übliche rekursive von Neumannsche Definition einzelner Anzahlen auf die „leere Menge" $\emptyset$, durch die die 0, die „Menge" $\{\emptyset\}$, durch die die 1, die „Menge" $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, durch die die 2, die „Menge" $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$, durch die die 3 definiert wird, usw.

[3] M.H., fMT

[4] Von diesem Einwand betroffen ist auch die zweite offene Frage, die nach den Anzahlen unendlicher Größe. Darauf hat Georg Cantor auf der Basis einer von ihm entwickelten Mengenlehre eine Antwort gegeben. Auch diese Antwort steht unter dem Vorbehalt, dass sie nur soweit haltbar ist, wie sie sich auf Mengen und nicht auf Klassen stützt.

* Zu den Abkürzungen sei auf das Literaturverzeichnis verwiesen.

[5] Siehe dazu z.B. M.H., EfK

§ 1 Zur Fregeschen Definition von Anzahlen

1. Die Fregeschen Sicht des Problems der Zahl. In seinem Ansatz, den er in den „Grundlagen der Arithmetik“ entwickelt hat,[1] geht Frege aus von beliebigen Zahlen wie 1 oder 4 und sucht dann einen Weg zu finden, wie der Status solcher Zahlen zu begreifen ist. Da sie in vielerlei Gleichungen auftritt, muß jede Zahl eine (logische) *Einheit* sein; genauer muß sie sogar ein „Item“, d.h. Träger eines Attributes sein,[2] insofern sie Argument in Gleichungen wie 1+1=2 ist. Daher kann Frege feststellen:

(1.1) Jede einzelne Zahl ist ein selbständiger *Gegenstand* (§55).

Da er in seinem Aufbau der Logik eine (vollständige) Disjunktion zwischen Begriffen und Gegenständen annimmt[3], meint er aber mit (1.1) nicht nur, jede Zahl sei *auch* ein Gegenstand, sondern darüber hinaus, sie sei *nur* ein Gegenstand:

(1.2) Keine Zahl ist ein *Begriff*.[4]

Damit hat er den logischen Status jeder Zahl bzgl. seiner Attributionstheorie fixiert. In seinen weiteren Überlegungen hat er daher nun das Ziel, Zahlen als Einheiten zu konstruieren und sie so zu konstruieren, dass sie den Vorgaben (1.1) f entsprechen. Dabei stützt es sich auf das scheinbare Gegenteil seines Zieles, nämlich darauf, dass jede Zahl*angabe attributiven* Charakter hat:

(1.3) „Jede Zahlangabe enthält eine Aussage von [etwas, nämlich] einem Begriff.“(§ 55)

Als Beleg dafür führt er Beispiele an wie etwa:

(1.4) ´Dem Begriff Jupitermond kommt die Zahl 4 zu` bzw. allgemein

(1.5) ´Dem Begriff F kommt die Zahl n zu` (§ 56)

Darin tritt die Zahl 4 aber nicht als Attribut auf, was direkt die Bedingung (1.2) verletzte, sondern nur als *Teil* eines Attributes. Sie ist darin nämlich lediglich Argument einer 2-stelligen Relation, der Identität, aus der sich somit durch „Teilsättigung“[5] das Attribut ´ist identisch mit 4` ergibt. Das Beispiel (1.4) ist damit zu begreifen als

(1.6) ´Die Anzahl der Jupitermonde ist [gleich] 4.` (§ 57)

Nach diesem Muster ist der allgemeine Fall (1.5) aufzufassen als

(1.7) ´Die Anzahl der unter den Begriff F fallenden Einheiten ist [gleich] n`.

Somit erhält man vermöge der Identität eine Möglichkeit, Zahlen zu definieren: Eine Zahl n wäre definierbar als ´die Anzahl der unter einen Begriff F fallenden Einheiten`. Dazu muß allerdings zuvor geklärt werden, was unter der

(1.8) ´*Anzahl* der unter einen Begriff F fallenden Einheiten`

zu verstehen ist. Um diese Frage zu beantworten, verbindet Frege zwei Definienda der Gestalt (1.8) in einer Gleichung:

(1.9) ´Die Anzahl der unter den Begriff F fallenden Einheiten ist [gleich]
der Anzahl der unter den Begriff G fallenden Einheiten`

und versucht daraus den Inhalt von Einheiten der Gestalt (1.8) zu gewinnen.

2. Äquivalenzrelationen als Schlüssel zur Problemlösung. Den Schlüssel dazu sieht Frege in einem Zusammenhang zwischen der Identität (auf gewissen Einheiten)

---

[1] Dabei übergehen wir seinen latenten Bezug auf die Sprache, da er die eigentliche Problematik zu verdecken geeignet ist, zur Lösung nichts beitragen kann und daher nicht nur überflüssig ist, sondern sogar irritieren kann.

[2] Wie in M.H., EfK dargelegt, ist (innerhalb eines einfachen Verhaltes) jedes Item an ein Attribut und jedes Attribut an ein Item gebunden. Ein Attribut wäre etwa der 1-stellige Begriff ´ist eine Zahl(-)` in dem einfachen Verhalt ´4 ist eine Zahl` mit ´4` als Item.

[3] Frege, FuB

[4] Frege, GdA, „Die Selbständigkeit von Zahlen soll nicht bedeuten, daß ein Zahlwort außerhalb des Satzes etwas bezeichne,sondern [...] nur dessen Gebrauch als Prädikat oder Attribut ausschließen.“(§ 60)

[5] *Teilsättigung* ist für jede Relation R möglich; dabei entsteht z.B. aus jeder 2-stelligen Relation R für jedes Argument a ein neues Attribut R(a,-) bzw. R(-,a). Siehe dazu Frege, FuB.

und Äquivalenzrelationen.[1] Wie jede Relation ist auch eine Äquivalenzrelation nicht nur ganz, d.h. in *allen* Argumentstellen, sondern auch teilweise, d.h. in nur *einigen* Stellen, zu „sättigen". Für jede Äquivalenzrelation Ä(-,-) ergibt sich durch Teilsättigung mit einem Argument a ein 1-stelliger Begriff Ä(a,-). Dieser ist anwendbar genau auf die Argumente der Äquivalenzrelation. Diese bilden also den „Itembereich"[2] von Ä(a,-). Dieser Bereich zerfällt in zueinander disjunkte Klassen äquivalenter Einheiten. Jedes Item liegt also in genau einer dieser Klassen.

Seine weitere Argumentation verdeutlicht Frege nun am Beispiel einer bekannten Äquivalenzrelation, der Parallelität. Durch Teilsättigung induziert jedes Argument a der Relation ´ist parallel zu (-,-)` einen 1-stelligen Begriff ´ist parallel zu (a,-)`.[3] Items zu diesem Begriff sind genau die Argumente der Äquivalenzrelation. Dafür gilt

(1.10) Falls a parallel ist zu b, ist der Umfang des Attributes ´ist parallel zu a` gleich dem des Attributes ´ist parallel zu b`.

Entsprechend folgt allgemein für jede Äquivalenzrelation Ä

Lemma 1.1 : Falls für Einheiten a,b gilt Ä(a,b), dann ist die Extension von Ä(a,-) gleich der von Ä(b,-).

Die Äquivalenzklassen zueinander äquivalenter Einheiten sind demnach gleich, die inäquivalenter Einheiten disjunkt. Lemma 1.1 liefert also einen Zusammenhang zwischen Äquivalenz und Gleichheit: Sind zwei Einheiten a,b äquivalent, dann sind zwei Extensionen gleich. Frege möchte nun diesen Zusammenhang nutzen, um die Gleichheit von Anzahlen in (1.9) auf eine Äquivalenz zurückzuführen. Dazu muß er jede Anzahl als Extension einer geeigneten teilgesättigten Äquivalenzrelation auffassen.

Dieses Verfahren verdeutlicht er an seinem Beispiel, der ´Parallelität`, und definiert

(1.11) „Die *Richtung der Geraden a* ist gleich dem Umfang des Begriffes ´parallel zu a`".

Insofern Begriffsumfänge, d.h. Extensionen, *keine* Begriffe sind, genügt er damit seiner Bedingung (1.2) (§ 68). Auch für jede andere Äquivalenzrelation ist diese Mehode anwendbar. So definiert er etwa für die Äquivalenzrelation der Ähnlichkeit

(1.12) „Die *Gestalt des Dreiecks A* ist gleich dem Umfang des Begriffes ´ähnlich mit A`".

Der Umfang einer teilgesättigten Äquivalenzrelation ist jeweils genau gleich einer Äquivalenzklasse. Frege definiert also die *Richtung* von a bzw. die Gestalt von A als die Äquivalenzklasse, in der a bzw. A liegt. Dadurch ist wunschgemäß gesichert, dass die Richtung von a gleich der von b bzw. die Gestalt von A gleich der von B ist genau dann, wenn a zu b parallel bzw. A zu B ähnlich ist. Jede Richtung und damit jede Äquivalenzklasse wird also durch jedes beliebige ihrer Elemente repräsentiert.

3. Die Gleichzahligkeit als Schlüssel zu Anzahlen. Dieses allgemeine Verfahren, aus einer Äquivalenzrelation einen Begriff zu gewinnen, versucht Frege nun auf die Gleichung (1.9) zu übertragen, um einzelne *Anzahlen* zu definieren. Dazu muß er allerdings seine Suchrichtung umkehren: Er kann nicht von einer Äquivalenzrelation ausgehen und dazu einen Begriffsumfang suchen, sondern muß bei einem vorgeblichen Begriffsumfang beginnen und dazu eine geeignete Äquivalenzrelation suchen.[4] Er möchte nämlich die *Anzahl* einer Einheit X als *Umfang* einer (noch zu suchenden) durch X teilgesättigten *Äquivalenzrelation* definieren. Dabei ist – als zusätzliche Schwierigkeit – die Einheit X nach (1.3) nicht mehr irgendein kategorialer Gegenstand, sondern ein *Begriff*. Daher sucht Frege nach einer geeigneten Äquivalenzrela-

[1] d.h. 2-stelligen Relationen auf einem Argumentbereich, die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind.

[2] Der „Itembereich" eines Attributes umfaßt genau die Items, auf die das Attribut anwendbar ist, d.h. mit denen zusammen es jeweils einen „(Sach)verhalt" bildet.

[3] Die Symmetrie der Parallelität erlaubt es, die Begriffe ´parallel zu (a,-)` und ´parallel zu (-,a)` gleichzusetzen.

[4] Er fragt dabei nicht, unter welchen Umständen eine solche Suche überhaupt erfolgreich sein kann.

tion auf *Begriffen*. Eine solche Relation findet er in der „Gleichzahligkeit“.[1] Da diese Relation *ausschließlich* auf Begriffen[2] definiert ist, gilt für sie

Lemma 1.2 : Die Gleichzahligkeit ist Attribut (n+1)-ter Stufe[3] genau zu jedem Bitupel von Attributen n-ter Stufe.

Ob diese Relation nun einfach oder auf andere Einheiten reduzierbar ist, mag hier offen bleiben. Ihre Extension ist nach Frege (§ 72) charakterisierbar durch:

F ist gleichzahlig mit G genau dann, wenn die Extensionen von F und G bijektiv aufeinander abzubilden sind.[4]

Die Relation (n+1)-ter Stufe der Gleichzahligkeit ist nun durch jedes ihrer Argumente, d.h. durch jeden Begriff n-ter Stufe teilweise zu „sättigen“; durch Teilsättigung mit dem Begriff F ergibt sich der Begriff (n+1)-ter Stufe ´ist gleichzahlig dem Begriffe F(-)`. Dessen Itembereich umfaßt genau die mit F gleichstufigen Attribute.

Damit kann Frege dann analog zu (1.11) f seine o.g. Definition (0.1) formulieren:

(1.13) „Die *Anzahl*, welche dem Begriffe F zukommt ist gleich dem Umfang des Begriffes ´gleichzahlig dem Begriffe F`“.

Die Anzahl von F ist somit die Extension eines Begriffes (n+1)-ter Stufe. Sie ist gleich der Äquivalenzklasse von Begriffen, in der F liegt. Dabei ist die Anzahl von F genau dann gleich der von G, wenn F und G in derselben Äquivalenzklasse liegen.

Mit dieser Definition kann Frege zeigen (§73), dass für beliebige Begriffe F,G gilt:

Satz 1.3 : Ist F gleichzahlig zu G, ist der Umfang von ´ist gleichzahlig zu F` gleich dem von ´ist gleichzahlig zu G` und damit die Anzahl von F gleich der von G.

4. Zur Fregeschen Definition natürlicher Zahlen. Die Definition (1.13) ermöglicht es Frege nun, mittels beliebiger Begriffe einzelne Anzahlen zu definieren. Er fängt an mit den natürlichen Zahlen in ihrer natürlichen Abfolge. Die erste Zahl ist dabei die Zahl 0. Sie will er definieren durch die Klasse der Begriffe *n-ter Stufe* mit leerer Extension. Diese Klasse kann ja wegen Lemma 1.1 durch jedes ihrer Elemente repräsentiert werden. Als solchen Repräsentanten sucht Frege einen Begriff n-ter Stufe, dessen Extension nicht nur faktisch, sondern aus logischen Gründen leer ist, und wählt dazu (§ 74) den Begriff ´sich selbst ungleich` Damit setzt er fest

(1.14) 0 ist die Anzahl, welche dem Begriff ´sich selbst ungleich` zukommt.

0 ist demnach die Klasse der Begriffe *n-ter Stufe* mit leerer Extension. Die weiteren natürlichen Zahlen versucht Frege nun (§ 76 f) rekursiv zu definieren. Auch dabei kann er jeweils repräsentative Begriffe verwenden. Ein solcher Begriff ist der Begriff ´ist gleich 0`. Seine Extension ist nicht leer; unter ihn fällt ja die 0, d.i. eine Klasse von Begriffen n-ter Stufe. Aufgrund der Transitivität der Gleichheit ist 0 zudem der einzige Gegenstand, der unter ihn fällt. Frege kann daher definieren:

(1.15) 1 ist die Anzahl, welche dem Begriff ´ist gleich 0` zukommt.

In gleicher Weise meint er der Reihe nach sämtliche natürlichen Zahlen definieren zu können. Wir werden hier diese seine Vorgehensweise nicht weiter verfolgen, da ihr Ungenügen schon aus diesen ersten Schritten ersichtlich ist.

5. Eine Kritik der Frege-Definition möchten wir beginnen mit einem attributionstheoretisch grundsätzlichen Hinweis darauf, was der Fregesche Ansatz *nicht* leistet und auch nicht zu leisten versucht: Frege untersucht und definiert nicht die *Begriffe*

[1] Sie entspricht der Cantorschen „Gleichmächtigkeit“, die sich jedoch (vgl. (0.2)) auf Klassen bezieht.

[2] Die Begriffe können dabei durchaus mehrstellig und somit etwa Relationen sein.

[3] Die damit verwendete Zahl n ist für die Argumentation unerheblich; sie dient nur zur Formulierung der *Allgemeinheit* der Darstellung.

[4] Der Ausdruck „Der Begriff F ist gleichzahlig dem Begriffe G“ sei gleichbedeutend mit dem Ausdruck „ Es gibt eine Bijektion, der unter F fallenden Gegenstände auf die unter G fallenden“.

´ist eine Richtung` bzw. ´ist eine Anzahl`. Er versucht lediglich, *einzelne* Richtungen bzw. *einzelne* Anzahlen zu definieren; er sucht somit nur einige Gegenstände zu fixieren, die als Richtungen bzw. Anzahlen gelten sollen, d.h. unter noch zu konzipierende Begriffe der Richtung bzw. der Anzahl fallen sollen.

(i) Bei der Kritik dieses Versuches sehen wir davon ab, dass bereits seine Begriffswahl zur Definition der Zahl 0 unglücklich ist. Er definiert sie (§ 74) mittels des Begriffs ´sich selbst ungleich`. Doch ist dieser Begriff für ihn gar nicht zu bilden, falls man ihn versteht als ´ist nicht sich selbst gleich`, d.h. als ´nicht x=x`. Denn Frege hat keine Möglichkeit, einen *Begriff* zu negieren.[1] Besser entspräche der Fregeschen Intention also der Begriff ´ist von sich verschieden`, darstellbar als ´ist verschieden von (x,x)`.[2] Die Extension dieses Begriffs ist leer. Die Zahl 0 ist demnach definiert als die Klasse aller k-stelligen Attribute (einer Stufe) mit leerer Extension.

(ii) Weiter sehen wir darüber hinweg, dass Frege bei seiner (mit der Definition der 0 beginnenden) rekursiven Definition weiterer Anzahlen die Frage der Stufe der Definientia, die ja Klassen sind, nicht beachtet. Für *Klassen von Gegenständen* mag diese Nachlässigkeit folgenlos sein, falls man konzidiert, dass jede solche Klasse ein Gegenstand ist, der dieselben Attribute tragen kann und damit auf derselben Stufe liegt wie die einzelnen Elemente der Klasse. Für *Klassen von Begriffen* ist aber unvermeidlich die Stufe jeder dieser Klassen zu klären. Denn eine Klasse (von Begriffen) muß ja die Extension eines Begriffes sein. Dieser Begriff ist höherstufig als die Begriffe, die unter ihn fallen. Somit gilt

Lemma 1.4 : Jede Klasse von Begriffen enthält nur Begriffe n-ter Stufe, die unter einen Begriff (n+1)-ter Stufe fallen.

Zu fragen ist also nach der Stufe dieser Klasse von Begriffen n-ter Stufe. Kann sie – wie im Falle einer Klasse von *Gegenständen* – ebenso wie die Elemente der Klasse Attribute *(n+1)-ter Stufe* tragen oder trägt sie Attribute *n-ter Stufe*? Jede der beiden Antworten führt zu Schwierigkeiten. Bei der ersten lägen die successiv definierten Anzahlen nicht auf ein und derselben Stufe, sodass später keine Relation, etwa die Addition, zwischen ihnen auftreten könnte, weil jede Relation nur auf Argumenten ein und derselben Stufe anwendbar ist. Bei der zweiten könnte ein Attribut F anwendbar sein auf eine Klasse, in der F selbst enthalten ist.

(iii) Nicht zu übergehen ist aber, dass seine rekursive Definition der einzelnen Anzahlen einen logischen Zirkel enthält. Denn die Definition der 1 setzt den Umfang des Begriffes ´gleichzahlig dem Begriffe ´ist gleich 0`` voraus. Dieser Umfang aber muß nun den Begriff ´ist gleich 1` einerseits umfassen, da dessen Extension genau eine Einheit, die 1, enthält,[3] andrerseits kann er ihn nicht umfassen, da die 1 erst mit Hilfe dieses Umfangs definiert werden soll.

(iv) Während die bisherige Kritik lediglich die Definitionsweise einzelner, wenngleich sämtlicher Anzahlen betraf, gilt die folgende dem Fregeschen Verständnis des logischen Status jeder Anzahl. Er stützt sich bei der Definition von Anzahlen auf die Grundvoraussetzung seiner gesamten Logik, die *absolute* Trennung zwischen Begriff und Gegenstand; kein Begriff ist nach Frege zugleich ein Gegenstand. Danach kann eine Anzahl kein Begriff sein, wenn sie ein Gegenstand ist. Sie muß, wie er mit (1.2) betont, *nur* Gegenstand sein. Seine Definition (1.5), zu der er aus dieser seiner Grundannahme geführt wird, ist aber ungenügend. Dies jedoch nicht aus Gründen, die spezifisch in den Zahlen zu suchen wären, sondern aus einem Grund, der bedeutend tiefer liegt. Frege definiert nämlich jede Anzahl – wie jede Richtung und jede

[1] Bei einem anderen Ansatz ist dies aber durchaus möglich. Vgl. M.H., Kon.

[2] Frege unterscheidet Begriffe nicht nach der Zahl ihrer Argumentstellen, sondern nach der Zahl ihrer *verschiedenen* Argumente.

[3] Gleiches gilt für jedes n.

Gestalt – als einen Begriffsumfang. Nun ist aber jeder Umfang eine Klasse; eine Klasse jedoch ist – anders als eine Menge, die ja eine *Einheit* sein muß, um diese Rolle (in der Elementschaftsrelation) übernehmen zu können, – *keine* Einheit.[1] Die Frage nach ihrer Existenz o.ä. also sinnlos. Daher kann eine Klasse auch keine Zahl sein, da ja jede Zahl ein Gegenstand und damit eine Einheit ist.

Frege legt also zwar – zu Recht – in seiner Theorie Wert darauf, dass die Richtung von a, die Gestalt von A und die Anzahl von F je *Gegenstände* sind, nach seinem tatsächlichen Definitionsvorschlag sind sie aber nicht einmal *Einheiten*, und damit a fortiori *weder* Gegenstände *noch* Begriffe. Sein Ansatz genügt also seinen eigenen Forderungen nicht und ist daher in seiner originalen Form unhaltbar.

§ 2 Weg zu einer revidierten Definition

1. Anzahlbegriff und Attribution. Um zu einem haltbaren Zahlbegriff zu gelangen, versuchen wir nun dem Fregeschen Ansatz zu folgen, dabei aber dessen Mängel zu vermeiden. Dies ist leicht möglich, denn alle diese Mängel haben eine gemeinsame Ursache; sie sind Folgen (der Schwäche) seiner Attributionstheorie. Diese stützt sich ja entscheidend auf seine zentrale Forderung der Unterscheidung von Begriff und Gegenstand. So sehr diese Unterscheidung zu begrüßen ist, so mißlich ist es, dass er sie *absolut* setzt und absolut setzen muß, damit sie zu der für seinen attributionstheoretischen Ansatz nötigen vollständigen Disjunktion zwischen Begriff und Gegenstand führt. Wie an anderer Stelle gezeigt,[2] ist diese absolute Unterscheidung aber verfehlt und durch eine andere zu ersetzen, die Begriff und Gegenstand *nicht absolut*, sondern in den Funktionen Attribut und Item nur *relativ* unterscheidet. Damit ist es möglich, eine Modifikation seiner Attributionstheorie zu entwickeln. Auf der Basis dieser modifizierten Theorie nehmen wir dann die Fregeschen auf Äquivalenzrelationen gestützten Überlegungen wieder auf und verzichten lediglich auf seine einschränkende Bedingung (1.2).

Wir gehen also wie Frege vor und entwickeln zunächst am Beispiel der Richtung ein allgemeines Definitionsverfahren und wenden dies dann auf Zahlen an. Er zeigt ja am Beispiel der Parallelität, dass in jeder Äquivalenzrelation eine *Gleichheit* bzgl. eines Aspektes angelegt ist. Durch die Parallelität wird so der Aspekt der Richtung induziert. Richtungen sind somit an die Parallelität gebunden. Für sie gilt (vgl. (1.8))

(2.1) Einheiten sind parallel genau dann, wenn ihre Richtungen *gleich* sind.
Richtungen von Einheiten sind gleich genau dann, wenn diese parallel sind.

2. Richtungen als Begriffe. Demnach ist nun die in dieser – wie in jeder – Äquivalenzrelation angelegte aspektbezogene *Gleichheit* zu thematisieren. Entscheidend ist dann die Frage, wie ein solcher Aspekt aufgefaßt und konstruiert werden kann. Frege hat dafür die durch Teilsättigung aus der Äquivalenzrelation hervorgehenden Begriffe herangezogen und wir folgen ihm darin. Im Falle der Parallelität sind das die Begriffe ´ist parallel zu a` für jeweils ein a. Er faßt dann die *Richtung einer Einheit a* auf als die *Extension* dieses Begriffs. Er ist ja an seine Forderung der absoluten Distinktion zwischen Begriff und Gegenstand gebunden. Wir dagegen sind nicht gebunden an diese Forderung und können daher jeden Begriff ´ist parallel zu a` auch

[1] Eine *Klasse* wird ja durch ihre Elemente nicht bestimmt, sondern *gebildet*, sie ist nichts anderes als die gesammelten Einheiten, also selbst als solche keine Einheit. Eine *Menge* dagegen kann, insofern sie ein Argument ist, als Einheit vielleicht durch eines oder mehrere ihrer Elemente eindeutig *bestimmt* werden. Aus der Vernachlässigung dieser Unterscheidung erwachsen viele „Antinomien der Mengenlehre“. Eine Auszeichnung gewisser Klassen als „Mengen“ durch die Bedingung der *Konsistenz* ist unzulässig, da diese Eigenschaft höherstufig, d.h. relativ transzendent ist und daher wie etwa auch die Existenz nicht zur Definition von Einheiten niederer Stufe herangezogen werden kann.

[2] M.H., EfK

als *Item* (zu einem Attribut) auffassen. Im Begriff ´ist eine Richtung` sehen wir ein solches Attribut. Es ist höherstufig und somit anwendbar nur auf Begriffe niederer Stufe und mindestens auf die Begriffe ´ist parallel zu (-,a)` mit a aus dem Argumentbereich der Parallelität.[1] Beispiele von Verhalten mit diesem Attribut sind also

´ist parallel zu (-,a)` ist eine Richtung,

´ist parallel zu (b,-)` ist eine Richtung.

Nach diesem Ansatz treten Begriffe wie ´ist parallel zu a` in zwei Funktionen auf,

(2.2) in Verhalten wie ´b ist parallel zu a´ als Attribut,

(2.3) in Verhalten wie ´ist parallel zu a ist eine Richtung` als Item.

Zunächst ist dann die Extension des Begriffs ´ist eine Richtung` zu klären: Komplexe Begriffe wie

´ist parallel zu a $\wedge$ parallel zu b`

liegen zwar im Itembereich, nicht aber in der *Extension* des Begriffs ´ist eine Richtung`. Somit gilt

Satz 2.1 : Genau die (einfachen) Begriffe der Gestalt ´ist parallel zu a` sind Richtungen.

Danach ist der Begriff ´ist parallel zu a` auch als ´die Richtung von a` zu bezeichnen. Die beiden Funktionen, in denen dieser *Begriff* der ´Richtung von a` gemäß (2.2)f in Verhalten auftreten kann, sind dann darstellbar als:

(2.4) ´b *hat* die Richtung von a´

(2.5) ´die Richtung von a ist eine Richtung`.

In ersterer ist ´*die Richtung von a*` ein Attribut, in letzterer ein Item. Für den so eingeführten Begriff der Richtung ist zu prüfen, ob (2.1) gilt. Dazu ist die Extension des Attributes `Richtung von a` zu untersuchen. Sie ist nach Definition gleich der Extension des Attributes ´ist parallel zu a`. Somit gilt

(2.6) b hat die Richtung von a. $\Leftrightarrow$ b ist parallel zu a.

Wegen der Reflexivität der Parallelität gilt somit

a hat die Richtung von a.

Damit ergibt sich

Ist b parallel zu a, haben sowohl a als auch b die Richtung von a.

Parallele Einheiten haben also dieselbe Richtung. Da die Parallelität in disjunkte Klassen einteilt, gilt auch die Umkehrung. Es folgt

(2.7) Genau die parallelen Einheiten haben dieselbe Richtung.

Somit erfüllt unsere Charakterisierung der ´Richtung von a` als *Begriff* (und nicht wie bei Frege als *Extension*) die Forderung (2.1):

Satz 2.2 : Wird jede Richtung als ein Attribut eingeführt, gilt (2.1).

Damit folgt

Satz 2.3 : Jedes Argument der Parallelität hat genau eine Richtung, die der Einheiten seiner Äquivalenzklasse.

Daraus wiederum ergibt sich

Satz 2.4 :(i) Jedes Argument der Parallelität repräsentiert genau eine Richtung.

(ii) Genau die zueinander parallelen Einheiten repräsentieren dieselbe Richtung.

3. Beispiele. Dieselben Überlegungen gelten für *jede* Äquivalenzrelation. Wie die Parallelität die Einführung eines *Begriffs* der Richtung ermöglichte, so gilt allgemein

Satz 2.5 : Jede Äquivalenzrelation Ä(-,-) n-ter Stufe induziert genau einen Begriff (n+1)-ter Stufe $H_{Ä}$, der auf den teilgesättigten Begriffen Ä(a,-) definiert ist.

So induziert die Ähnlichkeit den Begriff ´ist eine *Gestalt*`

die Gleichfarbigkeit den Begriff ´ist eine *Farbe*`.

[1] Eine exakte Abgrenzung des Anwendungsbereiches ist hier entbehrlich.

In Entsprechung zu Satz 2.4 (i) repräsentiert nun jedes Argument der Äquivalenzrelation Ä als solches ein Attribut höherer Stufe. Gemäß Satz 2.1 fallen unter dies Attribut genau die teilgesättigten Begriffe Ä(a,-). Somit ist es möglich, jeden der Begriffe Ä(a,-), die unter den Begriff $H_Ä$ fallen, durch ein Item a zu repräsentieren. Für Beispiele bietet sich etwa die Äquivalenzrelation der Gleichfarbigkeit an. Einzelne Farben sind durch einzelne Items zu definieren. So führt etwa

´*die Farbe des Blutes* ist eine Farbe`
(2.8) ´b hat *die Farbe des Blutes*` (d.i. nach Definition gleich)
´b *ist gleichfarbig mit Blut*`

zu der abkürzenden Definition ´ist rot`:=´ist gleichfarbig mit Blut`. Damit ist (2.8) darstellbar als ´*rot* ist eine Farbe`

´b ist *rot*`

Dabei kann man die Itemrolle von der Attributrolle unterscheiden, indem ´rot` in der Itemrolle als `Röte` dargestellt wird.

In gleicher Weise führt

´*die Farbe des Klees* ist eine Farbe`
(2.9) ´b hat *die Farbe des Klees*` (d.i. nach Definition gleich)
´b *ist gleichfarbig mit Klee*`

zu der Definition ´ist grün`:=´ist gleichfarbig mit Klee`. Damit ist (2.9) darstellbar als

´*grün* ist eine Farbe`
´b ist *grün*`

Ob nun der so definierte Begriff ´grün` etwa auf Gras *zutrifft*, ist nach Definition davon abhängig, ob Gras und Klee in derselben Klasse der Äquivalenzrelation ´ist gleichfarbig mit` liegen. Dies wiederum ist abhängig von der (Feinheit der) Definition der Äquivalenzrelation. Diese wiederum ist völlig frei wählbar; verschiedene Definitionen führen zu verschiedenen Klasseneinteilungen.

Liegt Gras aber in der Extension von ´grün`, d.h. ist Gras grün, dann gilt auch

(2.10) ´ist grün`=´ist gleichfarbig mit Gras`,

sodass der Begriff ´ist grün` auch durch (2.10) definierbar ist.

§ 3 Zur Modifikation der Fregeschen Definition

1. Anzahlen als *Begriffe*. Diese allgemeinen Überlegungen sind nun auf die Definition der Anzahl anzuwenden. Dazu behalten wir als Ziel die von Frege angestrebte Analogie zwischen den durch Äquivalenzrelationen induzierten Begriffen bei und werden daher das Definitionsverfahren für den Begriff der *Anzahl* in gleicher Weise modifizieren wie oben das für die Begriffe *Richtung*, *Farbe* und *Gestalt*. Dabei haben wir die Fregesche Einsicht (1.3) zu berücksichtigen, nach der jede Zahlangabe eine Aussage von einem Begriff enthält.

Wie Frege gehen wir aus von der Äquivalenzrelation der Gleichzahligkeit. Das ist nach Satz 1.2 eine Relation (n+1)-ter Stufe, deren Argumente Begriffe n-ter Stufe sind. Verhalte damit haben also die Gestalt ´der Begriff G ist gleichzahlig dem Begriffe F`. Nach Satz 2.5 induziert diese Relation genau einen Begriff (n+2)-ter Stufe ´<u>ist eine Anzahl</u>`, definiert insbesondere auf den teilgesättigten Begriffen der Gestalt

(3.1) ´ist gleichzahlig dem Begriffe F`.

Das sind Begriffe (n+1)-ter Stufe, deren Items genau diejenigen Einheiten sind, die neben dem Begriff F Argumente der Gleichzahligkeit sind. Weitere Items zum Attribut ´ist eine Anzahl` sind z.B. Komplexe von Begriffen der Gestalt (3.1).

Damit ist es zum einen gelungen, über Frege hinausgehend, nicht-extensional einen *Begriff* ´ist eine Anzahl` zu definieren. Für die Extension dieses Begriffs (n+2)-ter Stufe ergibt sich in Analogie zu Satz 2.1

Satz 3.1 : Genau die Begriffe ´ist gleichzahlig mit F` sind Anzahlen.

Dabei kann F ein beliebiger einfacher oder komplexer Begriff n-ter Stufe sein.

Zum andern ist damit auch jedes Element dieser Extension, d.h. jede *Anzahl* einer Einheit abweichend von Frege – analog zur *Richtung* einer Einheit – nicht als Extension, sondern als *Begriff* eingeführt. Die Richtung einer Einheit a ist ja nach Satz 2.1 aufzufassen als der *Begriff* ´ist parallel zu a`. In gleicher Weise ist nun

´die Anzahl von F` aufzufassen als der *Begriff* ´ist gleichzahlig mit F`.

Demnach ist analog zu (2.4) f ´*die Anzahl von F*`

in ´G hat *die Anzahl von F*` ein Attribut,
in ´*die Anzahl von F* ist eine Anzahl` ein Item.

In Analogie zu (2.7) folgt, dass die (Entsprechung zur) Bedingung (2.1) erfüllt ist:

(3.2) Genau die gleichzahligen Begriffe haben *dieselbe* Anzahl.

Danach gilt in Analogie zu Satz 2.3

Satz 3.2 : Jedes Argument der Gleichzahligkeit hat genau eine Anzahl, die der Einheiten seiner Äquivalenzklasse.

Somit repräsentiert jedes Argument, d.h. jeder Begriff, genau eine Anzahl, die seiner Äquivalenzklasse; es gilt analog zu Satz 2.4

Satz 3.3 :(i) Jeder Begriff repräsentiert genau eine Anzahl.
(ii) Genau die gleichzahligen Begriffe repräsentieren dieselbe Anzahl.

Wir nennen die durch den Begriff F repräsentierte (Kardinal)zahl „card(F)".

2. Zur Definition einzelner Anzahlen. Satz 3.3 ermöglicht nun die Definition einzelner Anzahlen mittels einzelner Begriffe. Wie Frege beginnen wir dabei mit Begriffen, deren Extension leer ist. Sie bilden (§ 75) bzgl. der Gleichzahligkeit eine Äquivalenzklasse. Daher hat nach Satz 3.3 jeder Begriff mit leerer Extension dieselbe Anzahl. Diese Anzahl wird also durch jeden beliebigen dieser Begriffe repräsentiert. Wir wählen als Repräsentanten den Begriff ´ist von sich verschieden`. Dieser Begriff führt analog (2.8) f vermöge

´*die Anzahl von ´ist von sich verschieden`* ist eine Anzahl`
(3.3) ´G hat *die Anzahl von ´ist von sich verschieden``* (d.i. nach Definition gleich)
´G ist *gleichzahlig mit ´ist von sich verschieden``*

zu der Definition ´ist 0-zahlig`:=´ist gleichzahlig mit ´*ist von sich verschieden*``.

Damit ist (3.3) darstellbar als ´*0-zahlig* ist eine Anzahl`
´G ist *0-zahlig*`

Dabei können wir – wie oben im Falle der Röte – die Rolle des Items von der des Attributes abheben, indem wir ´ist 0-zahlig` in der ersten Rolle darstellen als ´0`. Somit gilt dann ´0 ist eine Anzahl` bzw. auch ´card(ist von sich verschieden) = 0`.

Natürlich sind in gleicher Weise durch einzelne Begriffe weitere einzelne Anzahlen definierbar wie etwa

(3.4) 1 als Anzahl von ´ist identisch mit Napoleon`,
4 als Anzahl von ´ist ein Jupitermond`.

3. Zur Addition von Anzahlen. Ziel ist es aber, nicht nur einzelne, sondern *sämtliche* Anzahlen zu definieren. Das ist offenbar nicht durch die Angabe von Beispielen möglich, sondern nur durch das einzige Mittel, das eine *allgemeine* Untersuchung von Gegenständen erlaubt, die Einführung von Attributen auf ihnen. Dies ist hier möglich, weil jede Anzahl ja nach Definition (auch) ein Item ist, d.h. ein Attribut trägt. Dabei werden wir Anzahlen wie Frege nicht als einzelne, sondern in Zusammenhang zu definieren versuchen. Das (rekursive) Fregesche Verfahren ist dazu jedoch – wie gesehen – ungeeignet. Wir haben also nach einem anderen zu suchen.

Nun hat ja nach Satz 3.3 jeder Begriff (genau) eine Anzahl, und umgekehrt ist nach Definition jede Anzahl die (mindestens) eines Begriffes.[1] Danach hat auch jeder *komplexe* und jeder *mehrstellige* Begriff eine Anzahl, und umgekehrt muß nicht jede Anzahl die eines *einfachen* oder die eines *1-stelligen* Begriffes sein.

Beispiele komplexer Begriffe sind etwa die auf der Konjunktion bzw. der Disjunktion[2] soziabler Begriffen F und G basierenden Begriffe $F\wedge G$ bzw. $F\vee G$. Auch die *Extension* eines komplexen Begriffs wird durch die Extension der Eingangsbegriffe eindeutig bestimmt. Die Extension von $F\wedge G$ umfaßt genau die Einheiten, die sowohl in der Extension von F als auch in der von G liegen; die Extension von $F\vee G$ umfaßt genau die Einheiten, die in der Extension von F oder in der von G liegen.[3]

Daher ist es möglich, mittels Relationen auf *Begriffen* Relationen auf *Anzahlen* zu gewinnen und so einer Übersicht über sämtliche Anzahlen näher zu kommen. Eine erste solche Relation auf Anzahlen ist die 3-stellige Relation der „Addition" +(-,-,-). Sie definieren wir mit Hilfe der Disjunktion und der Konjunktion auf Tripeln [F,G,H] zueinander soziabler Begriffen. Dabei soll der Inhalt der letzten Argumentstelle jeweils durch den der beiden anderen eindeutig bestimmt sein. Die Extension der Addition legen wir zunächst fest nur für Begriffe F,G, deren Extension disjunkt ist. Dafür gilt $H:= F\vee G$ und somit

Anzahl von F + Anzahl von G := Anzahl von $F\vee G$ mit Anzahl von $F\wedge G = 0$.

Allgemein ergibt sich daraus

Satz 3.4 : Für je zwei soziable Begriffe F,G gilt

Anzahl von F + Anzahl von G = Anzahl von $F\vee G$ + Anzahl von $F\wedge G$.

Damit folgt aus den Eigenschaften der Junktionen

Satz 3.5 : Die Addition ist eine linksbitotale, kommutative, assoziative und rechtseindeutige Relation mit neutralem Element, der 0.

Die Addition ist also eine kommutative Halbgruppe. In welchem Verhältnis die Extensionen der beteiligten Attribute F und G zueinander stehen ist für die Addition unerheblich. Damit ist auch jede Addition der Gestalt Anzahl F + Anzahl F möglich. Somit ist nun eine endlose Abfolge einzelner Anzahlen definierbar, nämlich

(3.5) 2 als 1+1, 3 als 2+1, 4 als 3+1, usw.

§ 4 Zur Anzahl von Zahlen

1. Endliche und unendliche Anzahlen. Auch auf diese Weise erreicht man aber nicht jede Anzahl, d.h. nicht die Anzahl jedes Begriffs. Denn bzgl. der Gleichzahligkeit sind die Begriffe mehrfach zu untergliedern. Zunächst heißt ein Begriff „unendlich", wenn er mit einem ihm echt untergeordneten Begriff[4] gleichzahlig ist – auch dieser ist daher unendlich –, andernfalls heißt er „endlich". Beiderlei Begriffe haben nach Definition je genau eine Anzahl; die eines endlichen Begriffes heißt „natürlich" oder „endlich", die eines unendlichen Begriffes „unendlich" oder „transfinit".

Beispiele *endlicher* Begriffe sind in (3.4) bereits genannt. Ein Beispiel eines *unendlichen* Begriffes ist der Begriff ´ist eine natürliche Zahl`, denn er ist gleichzahlig z.B. mit dem Begriff ´ist eine natürliche Zahl und verschieden von 1`. card(ist eine natür-

[1] Nach Frege (§ 72) ist `n ist eine Anzahl` gleichbedeutend mit `Es gibt einen Begriff F mit n ist Anzahl von F`.

[2] Auf soziablen Begriffen, d.h. auf Begriffen mit demselben Itembereich, sind die 16 sog. aussagenlogischen Junktionen Konjunktion, Disjunktion usw. definierbar. Dies sind je 3-stellige Relationen, die u.a. rechtseindeutig sind, d.h. die Argumente der zwei ersten Stellen bestimmen das der letzten.

[3] Insbesondere ist damit durch die Konjunktion zweier zueinander konträrer Begriffe wie ´rot(x)` und ´grün(x)` ein komplexer Begriff ´rot $\wedge$ grün(x)` eindeutig bestimmt. Da dessen Extension aufgrund des Satzes vom Widerspruch leer ist und somit gilt: card(rot und grün(x))=0, ist auch er zur Definition der 0-Zahligkeit geeignet.

[4] Ein Begriff heißt einem Begriff G echt „untergeordnet", falls seine Extension in der von G echt enthalten ist. Vgl. dazu M.H., Kon.

liche Zahl) heißt „∞". Ein weiteres Beispiel eines unendlichen Begriffes ist, wie Frege erläutert (§ 54), der Begriff ´ist rot`. Jedem unendlichen Begriff ist nach Definition mindestens ein unendlicher Begriff untergeordnet. Da auch diesem wiederum mindestens ein unendlicher Begriff untergeordnet und diese Überlegung somit iterierbar ist, ergibt sich wegen der Transitivität der Unterordnung

Folgerung 4.1 : a) Jedem unendlichen Begriff sind mindestens abzählbar unendlich viele (verschiedene) unendliche Begriffe untergeordnet.

b) *Unendliche* Begriffe sind nicht reduzierbar auf infimae species.

Die Addition mag nun zwar auf *allen* Zahlen definiert sein, gemäß (3.5) gewährt sie aber eine vollständige Übersicht lediglich über die *endlichen* Anzahlen. Eine weitere Relation, die 2-stellige Relation ´≤(-,-)` ermöglicht darüber hinaus eine Gliederung auch der *unendlichen* Anzahlen. Die Extension dieser Relation ist definiert durch

$\mathrm{card}(F) \leq \mathrm{card}(G) \Leftrightarrow$ F ist gleichzahlig mit einem G untergeordneten Begriff.

Da die Unterordnung nur auf *Begriffen* gleicher Stufe definiert ist, ist auch diese Relation ≤(-,-) nur auf *Anzahlen* gleicher Stufe definiert. Sie ist eine „Ordnungsrelation", insofern sie reflexiv, identitiv und transitiv ist. Da sie zudem konnex ist,[1] gilt

Satz 4.2 : ≤(-,-) ist eine konnexe Ordnungsrelation auf Anzahlen gleicher Stufe.

Alternativ ist auf Anzahlen auch eine „strenge Ordnungsrelation" ´<(-,-)` einzuführen, die asymmetrisch statt reflexiv ist. Beide Relationen induzieren einander; für ihre Extensionen gilt nämlich:

$x \leq y \Leftrightarrow x < y \vee x = y$

Anzahlen als solche sind also zwar verschieden, vergleichbar sind sie aber erst nach der Definition einer Ordnung bzw. einer strengen Ordnung zwischen ihnen; diese induziert auf ihnen eine *lineare* Ordnung. Bzgl. <(-,-) ist damit jede Anzahl entweder größer oder kleiner als jede andere. Bzgl. dieser Ordnungen ist dann eine weitere Unterteilung der Begriffe möglich:

Ein Begriff F heißt „abzählbar", wenn gilt: card(F) ≤ card(ist eine natürliche Zahl),
er heißt „abzählbar unendlich", wenn gilt card(F) = card(ist eine natürliche Zahl),
er heißt „überabzählbar", wenn gilt card(ist eine natürliche Zahl) <card(F).

Ordnungsrelationen sind ja nur auf Einheiten derselben Stufe definiert. Sämtliche Einheiten n-ter Stufe sind aber isoton, d.h. unter Erhalt ihrer Ordnung in die geordneten Einheiten (n+1)-ter Stufe einzubetten. Damit sind auch Einheiten originär *verschiedener* Stufen vergleichbar. Insbesondere ist für jeden Begriff F n-ter Stufe die Anzahl von F, d.h. der Begriff (n+1)-ter Stufe ´ist gleichzahlig mit F` vergleichbar mit der Anzahl von ´ist gleichzahlig mit F`, d.h. mit dem Begriff (n+2)-ter Stufe ´ist gleichzahlig mit ´ist gleichzahlig mit F``. Es gilt nämlich

Satz 4.3 : card(F) ≤ card(ist gleichzahlig mit F).

Die Anzahl der Einheiten, die unter einen Begriff F fällt, ist also mindestens so groß wie die Anzahl der Begriffe, die diese Anzahl repräsentieren. Für endliche Begriffe ist das offensichtlich, für unendliche Begriffe wie etwa den Begriff ´ist eine natürliche Zahl` ergibt es sich aus der Argumentation von Folgerung 4.1.

2. Zur Anzahl von Mengen. Die Begriffe der Mengenlehre, auf die sich ja die von Neumannsche Definition von Anzahlen stützt, liegen zwar unserer Definition nicht zugrunde, liefern aber *Beispiele* von Begriffen. Dabei betrachten wir natürlich insbesondere die Elementschaftsrelation ∈ und die Teil(mengen)relation ⊆. So induziert ja jede Menge M

durch Teilsättigung der ∈-Relation einen 1-stelligen Begriff ´∈(-,M)`,
durch Teilsättigung der ⊆-Relation einen 1-stelligen Begriff ´⊆(-,M)`.

[1] r ist konnex $\Leftrightarrow$ (x)(y). r(x,y) $\vee$ r(y,x)

Die beiden Relationen ´$\in$` und ´$\subseteq$` müssen dabei auf derselben Stufe liegen, da sie auf dasselbe Argument M anwendbar sind. Daher folgt

Bemerkung 4.4 : Die Begriffe ´$\in$(-,M)` und ´$\subseteq$(-,M)` liegen auf derselben Stufe.

Jeder dieser Begriffe hat in Abhängigkeit von M eine gewisse Anzahl. Nach Cantor ist dabei für jede Menge M die Anzahl der *Elemente* kleiner als die ihrer *Teilmengen*:

Satz 4.5 :(Teilmengensatz) Die Anzahl von ´$\in$(-,M)` < die Anzahl von´$\subseteq$(-,M)`.

Dieser Satz macht eine Aussage über das Verhältnis zweier Relationen, die durch dieselbe Einheit teilgesättigt sind. Er ist aber im Widerspruch zur üblichen Ansicht nicht iterierbar. Denn die Teilmengen von M sind zwar Einheiten, die in der Extension des Begriffs ´$\subseteq$(-,M)`, d.h. in der Klasse {x;x$\subseteq$M} liegen und insofern auch als „*Elemente*“ dieser Klasse bezeichnet werden, sie sind aber dadurch *nicht Elemente einer Menge*; eine Klasse ist ja, insofern sie keine Einheit ist, niemals eine Menge, während umgekehrt die Rolle einer `Menge` in der $\in$-Relation – wie jede Rolle – *nur* von Einheiten eingenommen werden kann. Die o.g. Klasse {x;x$\subseteq$M}, d.i. die sog. „Potenzmenge“ von M ist also nur dann eine Menge, wenn sie auf anderem Wege als eine Einheit erwiesen werden kann:

Folgerung 4.6 : Eine „Potenzmenge“ ist als solche keine Menge.

Damit kann sie natürlich auch keine Teilmengen haben. Der Teilmengensatz ist somit jeweils nur *einmal* anwendbar. Er erzwingt also selbst im Falle einer unendlichen Menge nicht weitere Mengen mit noch größerer Mächtigkeit, schließt sie aber nicht aus und führt somit nicht zu einem Automatismus beliebig großer Anzahlen. Da eine Klasse keinen Begriff generiert, ist somit ´ist eine Potenzmenge` kein Begriff. Die Anzahl ist also nicht nur *gebunden* an die Begrifflichkeit, diese hat ihr gegenüber sogar stets Priorität.

3. Zur Definition von Zahlen durch Anzahlen. Mit Hilfe der Relationen auf den Anzahlen und insbesondere durch die Forderung der Totalität als Eigenschaft dieser Relationen ist dann der Bereich der *Anzahlen* zu dem der „Zahlen“ zu erweitern. Jede Zahl ist mittels einer Relation (evtl. indirekt) durch Anzahlen zu kennzeichnen und so auf sie zurückzuführen. So ist mittels der Addition durch jedes Paar [a,b] natürlicher Zahlen a,b genau eine Einheit c bestimmt, für die gilt: Add(c,a,b) d.h. c+a=b.[1] Jede solche durch ein Bitupel ganzer Zahlen *darstellbare* Einheit heißt eine „ganze Zahl“. Dabei können verschiedene Bitupel durchaus dieselbe Zahl darstellen. Entsprechend ist mittels der Multiplikation durch jedes Paar *ganzer* Zahlen genau eine „rationale Zahl“ darstellbar.

Weder eine *ganze*, noch eine *rationale* Zahl ist aber eine *Anzahl*, denn keine von ihnen hat die Gestalt ´ist gleichzahlig mit F`, keine von ihnen ist also die Anzahl eines Begriffs F, was ja nach Definition Bedingung für den Status einer Anzahl ist. Damit sind die Anzahlen scharf von den anderen Zahlen unterschieden:

Satz 4.7 : Genau die Anzahlen sind vermöge der Gleichzahligkeit definiert.

Das bekannte o.g. Kroneckerwort wäre danach abzuwandeln zu: Die *Anzahlen* hat der liebe Gott gemacht, die Zahlen sind Menschenwerk.

Weiter sind es ausschließlich die *Anzahlen*, die nicht nur Items, sondern auch Attribute sind; die anderen Zahlen dagegen sind ausschließlich Items, d.h. sie sind keine Attribute. Wohl aber haben natürlich die Begriffe ´ist eine ganze Zahl` und ´ist eine rationale Zahl`, da sie Begriffe sind, je eine Anzahl.

[1] In gleicher Weise ist etwa eindeutig Napoleon darstellbar als „der Sieger von Jena“ oder Homer als „der Dichter der Ilias“. Die Frage der Existenz ist dafür irrelevant.

4. Zur Valenz von Zahlen. Anders als Frege berücksichtigen wir ja bei unserer Definition die *Stufe* der beteiligten Begriffe.[1] Dadurch ist es auch möglich, die eventuelle Daseinsweise dieser Begriffe und damit insbesondere der Anzahlen zu klären. Diese wird ja mittels gestufter (positiver) *Valenzen* gefaßt:

die einer Einheit und insbesondere eines Begriffes 1. Stufe[2] durch *´existiert`* als der positiven Valenz 2.Stufe,

die einer Einheit 2. Stufe durch *´ist wahr`* als der positiven Valenz 3.Stufe,

die einer Einheit 3. Stufe durch die *´ist gültig`* als der positiven Valenz 4.Stufe, usw. Jede Stufe ist durch genau eine solche positive Valenz charakterisierbar.

Für Begriffe 1.Stufe wie ´`Jupitermond` ist die positive Valenz ihrer Anzahl, d.h. des Begriffes 2.Stufe

´ist gleichzahlig dem Begriffe ´Jupitermond``

demnach nicht die Existenz, sondern die *Wahrheit*. Anzahlen höherer Stufe haben noch höherstufige Valenzen. Somit folgt zunächst

Bemerkung 4.8 : Keine Anzahl kann *existieren*.

Wie jeder Begriff 1.Stufe genau dann *existiert*, wenn seine Extension nicht leer ist, so ist jeder Begriff 2.Stufe genau dann *wahr*, wenn seine Extension nicht leer ist. Da Äquivalenzklassen nach Definition nicht leer sein können, ergibt sich

Satz 4.9 : Die Anzahl jedes kategorialen Begriffs ist *wahr*.

Dieselbe Argumentationsweise gilt für die Valenzen der Anzahlen von Begriffen beliebiger Stufe. So ist etwa die Anzahl jedes Begriffs 2.Stufe *gültig*. Allgemein folgt

Satz 4.11 : Die Anzahl jedes Begriffs n-ter Stufe fällt unter die positive Valenz (n+2) Stufe.

Damit sind die Stufen und damit die Valenzen der Anzahlen spezieller Typen von Begriffen zu untersuchen. So haben z.B. die Begriffe ´$\in$(-,M)` und ´$\subseteq$(-,M)` nach Bemerkung 4.3 dieselbe Valenz. Der Teilmengensatz vergleicht also Anzahlen derselben Stufe. Verschiedene Anzahlen können somit, selbst wenn sie teils endlich, teils unendlich sind, originär auf derselben Stufe liegen. So sind etwa die Begriffe ´ist ein Jupitermond` und ´ist rot` beide kategorial; ihre Anzahlen sind also beide Begriffe zweiter Stufe, wenngleich die des ersten *endlich*, die des zweiten *überabzählbar unendlich* ist. Für einen Übergang zu einem unendlichen Begriff ist also nicht ein Schritt zu einem Begriff höherer Stufe nötig, wie er etwa beim Übergang zum Begriff ´ist eine natürliche Zahl` vollzogen wird.

Ergebnis

Die Frage nach dem Status von Anzahlen hat erstmalig Gottlob Frege in seinen „Grundlagen der Arithmetik“ befriedigend beantwortet. Seine Antwort weist jeder Anzahl den Status einer logischen Einheit zu. Nach seiner Attributionstheorie muß sie daher entweder ein Begriff oder ein Gegenstand sein; er faßt als einen *Gegenstand* auf und sucht sie daher als einen Gegenstand zu konstruieren. Mit Bezug auf die Äquivalenzrelation der Gleichzahligkeit, die allein auf Begriffen definiert ist, definiert er jede Anzahl als eine Äquivalenzklasse gleichzahliger Begriffe:

Die Anzahl des Begriffes F ist die *Extension* des Begriffes ´gleichzahlig mit F`.

Genau die Begriffe, mögen sie einfach oder komplex, 1- oder mehrstellig sein, haben danach je eine Anzahl, und diese Anzahl ist nach Frege eine Klasse.

---

[1] Dabei folgen wir einer Intention Freges, der ja später (in FuB) eine Stufung von Begriffen einführt.

[2] d.h. eines sog. *kategorialen* Begriffs

Klassen sind jedoch, wie an anderer Stelle gezeigt, keine Einheiten und daher a fortiori keine Gegenstände. Sein Ansatz hat also zwar einen Definitionsweg gewiesen, die von ihm vorgeschlagene Definition ist aber unhaltbar. Der Grund dafür liegt in seiner Attributionstheorie, die Begriff und Gegenstand *absolut* unterscheidet. Auf der Basis einer modifizierten Attributionstheorie, die Begriff und Gegenstand nur *relativ* unterscheidet, ist es möglich, auch den Begriff ´ist gleichzahlig mit F` als einen *Gegenstand* aufzufassen, etwa in dem Verhalt ´ist gleichzahlig mit F` ist eine Anzahl.

Damit ermöglichen uns die Fregeschen Vorarbeiten die Definition:

Die Anzahl des Begriffes F ist der *Begriff* ´ist gleichzahlig mit F`.

Auch in dieser modifizierten Definition ist jede Anzahl (vermöge der definierenden Gleichzahligkeit) an die Extension von Begriffen n-ter Stufe gebunden. Sie ist aber selbst keine Klasse, sondern ein Begriff (n+1)-ter Stufe. Daher ist diese Definition von den Mängeln des originalen Fregeschen Ansatzes frei, ermöglicht aber eine gleichartige und mindestens ebenso reiche Theorie.

Beispiele von Anzahlen sind mit Bezug auf spezielle Begriffe zu gewinnen, so etwa ´ist 0-zahlig` als ´ist gleichzahlig mit ´ist von sich verschieden``,

´ist 4-zahlig` als ´ist gleichzahlig mit ´ist ein Jupitermond`.

Jede dieser Einheiten tritt in der Funktion eines Gegenstandes und in der eines Attributes auf, so z.B. *´0-zahlig`*

in *´0-zahlig* ist eine Anzahl` als Gegenstand und

in ´´ist leicht und schwer´ ist *0-zahlig`* als Attribut.

Um die Einheiten in der ersten Funktion von denen in der zweiten abzuheben, werden sie in der Gegenstandsfunktion auch dargestellt als 0, 1, 4 usw.

Durch diesen Ansatz sinkt, da Klassen keine Mengen sind, die Bedeutung der Mengenlehre für die Theorie der Zahlen. So ist jede sog. „Potenzmenge“ lediglich eine Klasse und damit *keine* Menge. Damit bleibt der Cantorsche „Teilmengensatz“ zwar gültig, er ist jedoch nicht iterierbar und verliert dadurch einen Großteil seiner große Anzahlen sichernden Bedeutung.

Doch reicht ebenso wie beim Fregeschen auch bei diesem revidierten Ansatz die Theorie der Anzahlen genau so weit wie die Begriffe reichen. Die bekannten Sätze der auf die Fregesche Definition gegründeten Theorie behalten ihre Gültigkeit. Insofern sie Gegenstände sind, können aber die Anzahlen Attribute tragen. Damit wird es möglich und nötig, auch die Stufung der Attribute und insbesondere der (als transzendente Attribute aufzufassenden) Valenzen zu berücksichtigen. So ermöglichen 1-stellige Attribute Einteilungen nicht nur in endliche und unendliche *Anzahlen*, sondern auch in endliche und unendliche *Begriffe*. In gleicher Weise ermöglichen Relationen auf *Begriffen* wie etwa die Konjunktion $F \wedge G$ die Definition von Relationen auf *Anzahlen* wie z.B. die Addition card(F) + card(G). Solche Relationen auf Anzahlen wiederum erlauben es, den Bereich der Zahlen über den der Anzahlen hinaus zu erweitern.

Verwendete Literatur:

Bolzano, Bernard,
PdU Paradoxien des Unendlichen. Leipzig 1851. Neudruck Darmstadt 1964

Bourbaki, Nicolas,
EdM Elemente der Mathematikgeschichte. Göttingen 1971

Dedekind, Richard,
WsZ Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1888

Cantor, Georg,
BtM Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre I. Math.Ann. 46 (1895) 481-512

Frege, Gottlob,

FuB Funktion und Begriff. Vortrag, gehalten in der Sitzung vom 9.1.1891 der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft. Nachdr. in: G.Frege, *Funktion,Begriff,Bedeutung*, hrsg. von G.Patzig, Göttingen 1975, S.18-39

GdA Die Grundlagen der Arithmetik. Breslau 1884. Nachdr. Stuttgart 1987

Hohelüchter, Martin,

EfK Entwurf eines formalen Kategoriensystems. Münster 2006

FAA Formale Axiome als Attribute. Münster 2007

fMT Formale Mengenlehre und Topologie. Münster 2007

Kon Kontrarietät. Münster 1988

Russell, Bertrand,

PM Principles of Mathematics. 1903