Burkard Rosenberger

Charakterisierungen unbestimmter Integrale

MSC 2000: 26A24, 26A46

Münster 2004
Durchgesehene, inhaltlich unveränderte Neuausgabe der Originalausgabe (Kiel 1995).

Vorbemerkung

Der vorliegende Text wurde im Jahr 1995 als Diplomarbeit am Mathematischen Seminar der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel eingereicht. Mit Hilfe des Satzsystems LaTeX konnte nun eine optisch ansprechende Neuausgabe erfolgen. Abgesehen von der Korrektur einiger Schreibfehler wurden dabei jedoch keine Änderungen vorgenommen.

Münster, im Dezember 2004
Burkard Rosenberger

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Für die folgenden Überlegungen fixieren wir ein nicht-triviales kompaktes Intervall I mit linkem Randpunkt a und rechtem Randpunkt b, einen Banachraum X sowie eine Abbildung $f : I \to X$. Mit $\mathfrak{B}$ wird die σ-Algebra der Borelschen Teilmengen von I bezeichnet. Ferner wird mit λ^* das äußere Lebesgue-Maß und mit λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bezeichnet.[1]

0.1 Überblick über die vorliegende Arbeit

Bekanntermaßen ist die Abbildung f genau dann unbestimmtes Integral, wenn sie λ-fast überall differenzierbar mit Lebesgue-integrierbarer Ableitung ist.[2] Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wird ein neuer Beweis dieser Tatsache sowie eine weitere äquivalente Aussage etabliert, die bisher nur für den reellwertigen Fall vorlag. Um diese Aussage formulieren zu können, muß auf dem Banachraum X ein zur Längenmessung geeignetes äußeres Maß zur Verfügung stehen; die Konstruktion eines derartigen äußeren Maßes findet man in meiner Staatsexamensarbeit *Konstruktion eines äußeren Längenmaßes auf Banachräumen*. Die Vorgehensweise der vorliegenden Arbeit orientiert sich am Artikel *On Absolutely Continuous Functions* von D.E.Varberg, in welchem im Spezialfall $X = \mathbb{R}$ die eben genannte Charakterisierung unbestimmter Integrale unter Zuhilfenahme des sogenannten *Fundamental-Lemmas*, einer Verallgemeinerung der bekannten Mittelwert-Ungleichung für reellwertige Funktionen, bewiesen wird. Als ein in vergleichbarer Weise brauchbares Instrument zum Beweis des allgemeinen Falls erweist sich das in der vorliegenden Arbeit erstmals vorgestellte sogenannte *Mittelwert-Lemma*, eine Banachraum-wertige Verallgemeinerung des Fundamental-Lemmas. Der Beweis des Mittelwert-Lemmas läßt sich jedoch nicht durch eine einfache Übertragung des Varberg-Beweises bewerkstelligen; dies liegt daran, daß beim Beweis des Fundamental-Lemmas entscheidend von der Ordnungs-Struktur des Bildraumes $\mathbb{R}$ Gebrauch gemacht wird. —

[1] Das Lebesgue-Maß λ ist die Restriktion von λ^* auf die σ-Algebra der Lebesgue-meßbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$; diese σ-Algebra enthält bekanntermaßen alle Lebesgue-Nullmengen sowie die σ-Algebra der Borelschen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

[2] Siehe beispielsweise [DIE], Theorem IV.3.2, S. 107 in Verbindung mit Theorem II.2.9, S. 49. Weil keine Verwechslungen zu befürchten sind, sprechen sprechen wir im folgenden abkürzend stets von *integrierbar* anstelle von *Lebesgue-integrierbar*.

Im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit werden mit Hilfe der Ergebnisse des ersten Teils die Borel-Maße mit Lebesgue-Dichten durch die Angabe mehrerer äquivalenter Bedingungen charakterisiert.

Die soeben kurz umrissene Problemstellung sowie sowie der in der vorliegenden Arbeit eingeschlagene Lösungsweg sollen auf den folgenden Seiten nun noch einmal ausführlich *ab ovo* geschildert werden.

0.2 Der klassische Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In der Grundvorlesung Analysis lernt man den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung — im folgenden abkürzend mit HDI bezeichnet — üblicherweise in den beiden folgenden „klassischen" Fassungen kennen:

HDI (Klassische Fassung 1) *Ist f stetig differenzierbar, so gilt für alle $x \in I$ die „Hauptsatz-Formel": $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$.*

HDI (Klassische Fassung 2) *Ist f stetig, so ist die Abbildung $F : I \to X, x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$, stetig differenzierbar, und es gilt $F' = f$.*

Während bei der ersten klassischen Fassung des HDI der Akzent eindeutig auf der Frage nach der Darstellbarkeit einer Abbildung durch ihre Ableitung liegt, steht bei der zweiten Fassung die Frage im Vordergrund, welche Differentiations-Eigenschaften solche Abbildungen haben, die durch Integralbildung zustandekommen. Hinsichtlich möglicher Verallgemeinerungen des HDI ergeben sich angesichts der verschiedenen Schwerpunkte, die in den beiden klassischen Versionen des HDI gesetzt werden, die beiden folgenden unterschiedlichen Fragestellungen:

Frage 1: Welche Voraussetzungen an f sind notwendig und hinreichend dafür, daß die Hauptsatz-Formel gilt? Gilt die Hauptsatz-Formel möglicherweise auch dann, wenn f lediglich differenzierbar ist?

Frage 2: Wie lassen sich solche Abbildungen charakterisieren, die durch Integralbildung zustandekommen? Welche Differentiations-Eigenschaften haben derartige Abbildungen, und welcher Zusammenhang besteht zwischen ihrer Ableitung und der jeweiligen Integrandenfunktion?

Wir werden im folgenden beide Fragen vollständig beantworten. Es wird sich dabei jedoch als zweckmäßig erweisen, Frage 1 zunächst zurückzustellen und Frage 2 als Leit-Frage zu verfolgen. Um die in diesem Zusammenhang auftretenden mathematischen

Objekte begrifflich präzise fassen zu können, führen wir die folgenden Sprechweisen ein: Die Abbildung f wird als *unbestimmtes Integral* bezeichnet, wenn sie die sogenannte *UI-Eigenschaft* hat:

(UI) *Es gibt eine integrierbare Abbildung $g : I \to X$ derart, daß für alle $x \in I$ gilt: $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\, dt$.*

Ist f unbestimmtes Integral, so nennen wir jede integrierbare Abbildung $g : I \to X$, für die die Bedingung (UI) erfüllt ist, eine *Integrandenfunktion für f*.[3] Ferner werden wir mit $\mathcal{D}_f$ im folgenden die Menge aller Punkte bezeichnen, in denen f differenzierbar ist. Unter der *Ableitung* der (nicht notwendig überall differenzierbaren) Abbildung f verstehen wir dann die Abbildung

$$f_0' \; : \; I \to X \; , \; x \mapsto \begin{cases} f'(x) & , \quad \text{falls } x \in \mathcal{D}_f \; , \\ 0 & , \quad \text{sonst} \; . \end{cases}$$

0.3 Differentiations-Eigenschaften unbestimmter Integrale

Wir gehen zunächst auf den zweiten Teil der Frage 2 ein, also auf die Frage nach den Differentiations-Eigenschaften unbestimmte Integrale. Gemäß der klassischen Version 1 des HDI ist f bereits dann unbestimmtes Integral, wenn f stetig differenzierbar ist; in diesem Fall ist die Ableitung f' eine Integrandenfunktion für f. Daß unbestimmte Integrale jedoch im allgemeinen nicht einmal überall differenzierbar, geschweige denn stetig differenzierbar sind, zeigt das folgende einfache Beispiel:

Beispiel 1: Ein unbestimmtes Integral, das nicht überall differenzierbar ist.
Gegeben sei die Funktion

$$g \; : \; [0,2] \to \mathbb{R} \; , \; x \mapsto \begin{cases} x & , \quad \textit{falls } x < 1 \; , \\ 2 - x & , \quad \textit{sonst} \; . \end{cases}$$

Obwohl g nicht überall differenzierbar ist, ist g unbestimmtes Integral, denn g_0' ist offensichtlich eine Integrandenfunktion für g.

Zwar lassen sich an dem eben notierten Beispiel nicht ohne weiteres typische Differentiations-Eigenschaften unbestimmter Integrale ablesen, jedoch wird zumindest die Vermutung nahegelegt, daß, falls f unbestimmtes Integral ist, die Ableitung f_0'

[3] Ein elementares Ergebnis der Integrationstheorie besagt, daß derartige Integrandenfunktionen nur λ-fast überall eindeutig bestimmt sind; daher verwenden wir die Formulierung „*eine* Integrandenfunktion“; siehe Satz 1.3, S. 17.

eine Integrandenfunktion für f ist. Vollständig geklärt wird die Frage nach den Differentiations-Eigenschaften unbestimmter Integrale durch das im folgenden Satz formulierte klassische Resultat; der Beweis dieses Satzes beruht im wesentlichen auf dem Differentiations-Satz von Lebesgue.

Satz 1 *Ist f unbestimmtes Integral, so ist f λ-fast überall differenzierbar mit integrierbarer Ableitung, und f_0' ist eine Integrandenfunktion für f.*[4]

0.4 Charakterisierung unbestimmter Integrale (vorläufige Fassung)

Angesichts des soeben notierten Satzes stellt sich die Frage, ob durch die dort auftauchende Bedingung

(DIFF-INT) *f ist λ-fast überall differenzierbar mit integrierbarer Ableitung.*

die unbestimmten Integrale hinreichend charakterisiert werden, d.h. ob die Abbildung f bereits dann unbestimmtes Integral ist, wenn sie die Bedingung (DIFF-INT) erfüllt. Daß jedoch ein derartiger Zusammenhang zwischen den Bedingungen (DIFF-INT) und (UI) nicht besteht, zeigt das folgende nicht-triviale Beispiel:

Beispiel 2: Die Cantor-Funktion.[5] *Die Cantor-Funktion $C : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist stetig, monoton wachsend von C(0)=0 auf C(1)=1 und λ-fast überall differenzierbar mit Ableitung 0; insbesondere erfüllt die Cantor-Funktion also die Bedingung (DIFF-INT). Weil jedoch die Ableitung C_0' λ-fast überall konstant ist, ist sie keine Integrandenfunktion für C. Nach Satz 1 ist die Cantor-Funktion kein unbestimmtes Integral.*

Die Bedingung (DIFF-INT) ist also zwar notwendig, aber nicht hinreichend für das Vorliegen der UI-Eigenschaft von f. Aus diesem Grund wird man weitere Bedingungen finden wollen, die in Kombination mit (DIFF-INT) die UI-Eigenschaft von f garantieren. Orientiert man sich bei der Suche nach derartigen Bedingungen wiederum an den bisherigen Beispielen, so fällt auf, daß die oben notierten Beispielfunktionen unterschiedliche Grade der Stetigkeit aufweisen. Während sowohl die stetig differenzierbaren Abbildungen als auch die Funktion aus Beispiel 1 Lipschitz-stetig sind, läßt sich von der Cantor-Funktion zwar die Stetigkeit, nicht jedoch die Lipschitz-Stetigkeit nachweisen. Der naheliegende Gedanke, daß die Lipschitz-Stetigkeit eine für die unbestimmten

[4] siehe Satz 1.7, S. 18

[5] Die Definition sowie eine Diskussion der Eigenschaften der Cantor-Funktion findet sich im Anhang, siehe S. 93ff.

Integrale charakteristische Stetigkeits-Eigenschaft ist, wird durch das folgende Beispiel widerlegt:

Beispiel 3: Ein unbestimmtes Integral, das nicht Lipschitz-stetig ist. *Die Funktion*

$$h : [0,1] \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \begin{cases} 0 & , \quad \textit{falls } x = 0 , \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & , \quad \textit{sonst} \end{cases}$$

ist Integrandenfunktion für $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, *d.h.* g *ist unbestimmtes Integral. Bekanntermaßen ist* g *jedoch nicht Lipschitz-stetig.*

Als diejenige Stetigkeits-Eigenschaft, die allen unbestimmten Integralen gemeinsam ist, erweist sich die *Absolutstetigkeit*:[6]

Satz 2 *Unbestimmte Integrale sind absolutstetig.*[7]

Wie man leicht zeigen kann, impliziert die Lipschitz-Stetigkeit die Absolutstetigkeit und diese wiederum die gewöhnliche Stetigkeit. Insofern ist die Absolutstetigkeit in der Tat eine Eigenschaft, die sich „zwischen" der gewöhnlichen Stetigkeit und der Lipschitz-Stetigkeit einordnen läßt, was zu den bisher angegebenen Beispielen kompatibel ist. Die nicht-triviale Tatsache, daß die beiden Eigenschaften Absolutstetigkeit von f und Gültigkeit der Bedingung (DIFF-INT) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für das Vorliegen der UI-Eigenschaft von f sind, notieren wir im folgenden

Hauptsatz (vorläufige Fassung) *Die Abbildung* f *ist genau dann unbestimmtes Integral, wenn sie absolutstetig ist und die Bedingung (DIFF-INT) erfüllt. In diesem Fall ist* f_0' *eine Integrandenfunktion für* f.

Bereits in dieser vorläufigen Version liefert der Hauptsatz also eine ausreichende Antwort auf die eingangs gestellte Frage 2. Im Hinblick auf das Beispiel der Cantor-Funktion ist diese Fassung des Hauptsatzes allerdings noch nicht völlig befriedigend: Zwar kann man indirekt aus dem Hauptsatz schließen, daß die Cantor-Funktion nicht absolutstetig ist, jedoch sieht man dies der Cantor-Funktion nicht unmittelbar an. Es wäre also wünschenswert, eine für absolutstetige Abbildungen typische Eigenschaft angeben zu können, von der unmittelbar zu sehen ist, daß die Cantor-Funktion sie nicht besitzt.

[6] Zur Definition der Absolutstetigkeit siehe Definition 1.8, S. 20.
[7] siehe Satz 1.13, S. 21

0.5 Nullmengentreue Abbildungen

Einen Ansatzpunkt zur Lösung des eben formulierten Problems liefert die folgende Beobachtung:

Beispiel 2': Die Cantor-Funktion. *Mit C wird wieder die Cantor-Funktion bezeichnet. Die Cantor-Menge $K \subset [0,1]$ ist zwar eine Lebesgue-Nullmenge, jedoch ist ihre Bildmenge, das Intervall $[0,1]$, keine Lebesgue-Nullmenge.*

In der Tat ist die Eigenschaft, Lebesgue-Nullmengen auf Lebesgue-Nullmengen abzubilden, eine charakteristische Eigenschaft *reellwertiger* absolutstetiger Funktionen.[8] Beim Versuch, die eben formulierte Nullmengen-Eigenschaft für beliebige *Banachraum-wertige* Abbildungen zu etablieren, stößt man auf die Schwierigkeit, daß im Gegensatz zum Körper $\mathbb{R}$ auf dem Banachraum X im allgemeinen noch kein „geeignetes" äußeres Maß zur Verfügung steht, mit dem man die Länge von Teilmengen des Bildes von f messen könnte. Darüberhinaus ist intuitiv zunächst unklar, was man überhaupt unter der „Länge" einer beliebigen Teilmenge von X verstehen soll. Eine ausführliche Diskussion derjenigen Anforderungen, die an ein äußeres Maß auf einem Banachraum gestellt werden sollen, damit es als geeignetes Instrument zur Längenmessung angesehen werden kann, findet man im einleitenden Abschnitt meiner Staatsexamensarbeit *Konstruktion eines äußeren Längenmaßes auf Banachräumen*. Überträgt man die bekannte Konstruktion des äußeren Lebesgue-Maßes λ^* auf den Banachraum-Fall, so erfüllt das resultierende äußere Maß λ_∞^X zumindest die wichtigsten der in der eben genannten Arbeit diskutierten Anforderungen; insbesondere stimmen im Fall $X = \mathbb{R}$ äußeres Lebesgue-Maß λ^* und $\lambda_\infty^{\mathbb{R}}$ überein.[9]

Im folgenden bezeichnen wir f als *nullmengentreu*, wenn für jede Lebesgue-Nullmenge $A \subset I$ das f-Bild $f(A)$ eine λ_∞^X-Nullmenge ist. Mit elementaren Mitteln läßt sich zeigen, daß die Nullmengentreue von f auch im Falle Banachraum-wertiger Abbildungen eine notwendige Voraussetzung für die Absolutstetigkeit von f ist:

Satz 3 *Absolutstetige Abbildungen sind nullmengentreu.*[10]

Eine einfache Folgerung aus dem später ausführlich diskutierten *Mittelwert-Lemma* ist die für die Beantwortung der Frage 1 wichtige Tatsache, daß überall differenzierbare Abbildungen ebenfalls nullmengentreu sind:

Satz 4 *Überall differenzierbare Abbildungen sind nullmengentreu.*[11]

[8] siehe z.B. [BEN] Theorem 4.12, S. 146f
[9] siehe [ROS] S. 1ff
[10] siehe Satz 3.6, S. 28
[11] siehe Satz 4.4, S. 34

0.6 Charakterisierung unbestimmter Integrale (endgültige Fassung)

Mit dem soeben eingeführten Begriff der Nullmengentreue können wir nun die endgültige Version des Hauptsatzes formulieren; angesichts der Beispiele 2 und 2' zieht man aus dieser Fassung des Hauptsatzes die Schlußfolgerung, daß die Nullmengentreue genau diejenige Eigenschaft ist, die der Cantor-Funktion fehlt, um unbestimmtes Integral zu sein.

Hauptsatz *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) f *ist unbestimmtes Integral.*

(ii) f *ist absolutstetig und erfüllt die Bedingung (DIFF-INT).*

(iii) f *ist stetig, nullmengentreu und erfüllt die Bedingung (DIFF-INT).*

In diesem Fall ist f_0' *eine Integrandenfunktion für* f*.*[12]

Offensichtlich beantwortet diese endgültige Fassung des Hauptsatzes die Frage 2 ausführlicher als die oben notierte vorläufige Version. Bezüglich der Beantwortung von Frage 1 erhält man unter Berücksichtigung von Satz 4 aus der Äquivalenz (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) des Hauptsatzes unmittelbar das folgende

Korollar *Ist* f *überall differenzierbar, so gilt die Hauptsatz-Formel genau dann, wenn* f' *integrierbar ist.*[13]

Weil also die beiden eingangs gestellten Fragen durch die endgültige Version des Hauptsatzes in befriedigender Weise beantwortet werden, werden wir dieses Theorem auch als *verallgemeinerten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* bezeichnen. Bevor wir im folgenden Unter-Abschnitt näher auf die Struktur des Beweises des Hauptsatzes eingehen, merken wir noch an, daß im allgemeinen die Absolutstetigkeit von f und die Gültigkeit der Bedingung (DIFF-INT) voneinander unabhängige Eigenschaften sind. Daß die Bedingung (DIFF-INT) nicht stets die Absolutstetigkeit impliziert, wird durch das Beispiel der Cantor-Funktion belegt. Die umgekehrte Implikation ist im allgemeinen ebenfalls nicht gültig; dies zeigt

Beispiel 4: Eine absolutstetige Abbildung, die nirgends differenzierbar ist. *Für alle Teilmengen* $A \subset \mathbb{R}$ *bezeichne* $\mathbf{1}_A$ *die charakteristische Funktion von* A*. Sei*

$$g \;:\; I \to L^1(I)\;,\; t \mapsto \mathbf{1}_{[a,t]}\;.$$

[12] siehe Satz 5.1, S. 41

[13] siehe Korollar 5.3, S. 43

Für alle $s, t \in I$ gilt dann:

$$\| g(s) - g(t) \| \ = \ \int_I \left| \mathbf{1}_{[a,s]} - \mathbf{1}_{[a,t]} \right| \, d\lambda \ = \ | s - t | \ .$$

g ist also Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1, insbesondere also absolutstetig. Aus der für alle $s, t \in I$ mit $s < t$ gültigen Beziehung

$$\frac{g(t) - g(s)}{t - s} \ = \ \frac{\mathbf{1}_{]s,t]}}{t - s}$$

liest man ab, daß g nirgends differenzierbar ist. (Im Distributionen-Sinne konvergiert für alle $t \in I$ der Differenzen-Quotient $\frac{g(t)-g(s)}{t-s}$ für $s \to t$ gegen das Dirac-Maß δ_t an der Stelle t.)

0.7 Zum Beweis des Hauptsatzes

Die Implikationen (i)⇒(ii) und (ii)⇒(iii) des Hauptsatzes zeigt man durch Kombination der Sätze 1 bis 3. Als entscheidendes Hilfsmittel zum Beweis der noch fehlenden Implikation (iii)⇒(i) wird in der vorliegenden Arbeit das sogenannte *Mittelwert-Lemma* etabliert.[14] Den Ausgangspunkt für die diesbezüglichen Überlegungen liefert die Arbeit *On Absolutely Continuous Functions* von D.E.Varberg, in der für reellwertige Funktionen auf I ein Spezialfall des Hauptsatzes bewiesen wird (siehe unten). Eine zentrale Rolle in diesem Beweis von Varberg spielt das sogenannte

Fundamental-Lemma *Für beliebige Funktionen $g : I \to \mathbb{R}$ und Teilmengen $A \subset \mathcal{D}_g$ mit der Eigenschaft $K := \sup_{x \in A} \| g'(x) \| < \infty$ gilt: $\lambda^*(g(A)) \ \leq \ K \cdot \lambda^*(A)$.*[15]

Eine Verallgemeinerung des Fundamental-Lemmas auf Banachraum-wertige Abbildungen ist das im folgenden notierte Mittelwert-Lemma; für die Formulierung dieses Lemmas greifen wir auf das oben beschriebene äußere Maß λ_∞^X auf X zurück:

Mittelwert-Lemma *Für alle $A \subset \mathcal{D}_f$ mit der Eigenschaft $K := \sup_{x \in A} \| f'(x) \| < \infty$ gilt: $\lambda_\infty^X(f(A)) \ \leq \ K \cdot \lambda^*(A)$.*[16]

An dieser Stelle sei nochmals erwähnt, daß sich ein Beweis des Mittelwert-Lemmas deswegen nicht durch eine einfache „Übertragung" des Varberg-Beweises gewinnen läßt, weil letzterer ganz entscheidend die Ordnungsstruktur des Bildraumes $\mathbb{R}$ ausnutzt. Sowohl das Mittelwert-Lemma als auch der mit seiner Hilfe durchgeführte Beweis des

[14] Die Implikation (ii)⇒(i) läßt sich auch unter Zuhilfenahme des sogenannte *Pettis-Integrals* beweisen, siehe z.B. [DIE] S. 107.

[15] siehe [VAR] S. 832f

[16] siehe Lemma 4.3, S. 32, und Lemma 4.3', S. 38

Hauptsatzes finden sich meines Wissens erstmals in der vorliegenden Arbeit; dies trifft insbesondere auf die mit Hilfe des neuen Begriffs der Nullmengentreue formulierte äquivalente Eigenschaft (iii) des Hauptssatzes zu.

0.8 Die reelle Version des Hauptsatzes

Bekanntermaßen erfüllen die reellwertigen Funktionen von beschränkter Variation (und damit insbesondere auch die reellwertigen absolutstetigen Funktionen) automatisch die Bedingung (DIFF-INT).[17] Aus diesem Grund vereinfacht sich im Spezialfall $X = \mathbb{R}$ die Formulierung des Hauptsatzes folgendermaßen:

Hauptsatz (reelle Fassung) *Ist $X = \mathbb{R}$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) f ist unbestimmtes Integral.

(ii) f ist absolutstetig.

(iii) f ist stetig, nullmengentreu und von beschränkter Variation.

Insbesondere ist in diesem Fall f_0' eine Integrandenfunktion für f.[18]

Diese Version des Hauptsatzes ist ein klassisches Resultat der Analysis, für welches Varberg den bereits mehrfach erwähnten eleganten Beweis liefert.[19] Die Äquivalenz (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) dieser Fassung wird häufig auch separat notiert und als *Satz von Banach-Zaretski* bezeichnet.[20] Eine ausführliche Diskussion der hier angedeuteten Zusammenhänge findet man in der vorliegenden Arbeit im Abschnitt 5.

0.9 Gel'fand-Räume

Der im letzten Unter-Abschnitt notierten reellen Version des Hauptsatzes entnimmt man, daß im Fall $X = \mathbb{R}$ die folgende Aussage gilt:

(UI=AC) *Die unbestimmten Integrale mit Werten in X sind genau die X-wertigen absolutstetigen Abbildungen.*

Daß diese Äquivalenz keineswegs für beliebige Banachräume gültig ist, zeigt Beispiel 4. In Anlehnung an Diestel/Uhl werden wir den Banachraum X als *Gel'fand-Raum*

[17] siehe z.B. [BEN] Theorem 4.8, S. 135ff

[18] siehe Satz 5.1', S. 43

[19] siehe [VAR] Theorem 3, S. 835 und Theorem 10, S. 836

[20] siehe z.B. [BEN] Theorem 4.12, S. 146f

bezeichnen, wenn die Bedingung (UI=AC) erfüllt ist.[21] Durch das übliche komponentenweise Vorgehen sieht man sofort, daß jeder endlich-dimensionale Banachraum bereits die Gel'fand-Raum-Eigenschaft hat. Erstaunlich genug ist in diesem Zusammenhang jedoch die Tatsache, daß es überhaupt unendlich-dimensionale Gel'fand-Räume gibt; wir zitieren an dieser Stelle einige Beispiele:

- Banachräume, die die Gel'fand-Raum-Eigenschaft besitzen:
  reflexive Banachräume, separable Dualräume, l_1, $L^p(I)$ für $1 < p < \infty$.

- Banachräume, die die Gel'fand-Raum-Eigenschaft nicht besitzen:
  $L^1(I)$, c_0, c, l_∞, $L^\infty(I)$.[22]

Vom geometrischen Standpunkt aus gesehen ist die Definition der Gel'fand-Räume insofern unbefriedigend, als sie nicht auf intrinsische Eigenschaften des jeweils fixierten Banachraumes X, sondern auf Eigenschaften bestimmter Abbildungen mit Werten in X Bezug nimmt. Von daher stellt sich die Frage, ob und gegebenenfalls wie sich Gel'fand-Räume geometrisch charakterisieren lassen. Wir beschränken uns an dieser Stelle darauf, lediglich zwei von vielen möglichen derartigen Charakterisierungen anzugeben und verweisen ansonsten auf die umfangreiche Liste bei Diestel/Uhl.[23] Zu diesem Zweck notieren wir zunächst die folgende Definition: Eine Teilmenge A von X heißt *dentable*,[24] falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in A$ gibt, welches nicht in der abgeschlossenen konvexen Hülle von $A \setminus \mathrm{K}(x, \varepsilon)$ liegt.[25]

Satz 5 *Jede der beiden folgenden Bedingungen ist zur Gel'fand-Raum-Eigenschaft äquivalent:*

(i) Jede beschränkte Teilmenge von X ist dentable.

(ii) Jede abgeschlossene beschränkte konvexe Teilmenge von X ist dentable.[26]

0.10 Eine Anwendung des Hauptsatzes

In der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie steht man häufig vor der Frage, ob ein gegebenes Borel-Maß eine Lebesgue-Dichte besitzt, und wie man gegebenenfalls eine solche Dichte findet. Um zu einer Lösung dieses Problems zu gelangen, notieren wir zunächst die folgende einfache Beobachtung: Ist μ ein X-wertiges Maß auf $\mathfrak{B}$, so wird

[21] siehe [DIE] S. 107
[22] Vgl. [DIE] S. 218f in Verbindung mit Theorem IV.3.2, S. 107 und Corollary V.3.8, S. 138.
[23] siehe [DIE] S. 217ff
[24] engl. *to dent* = ausbeulen
[25] vgl. [DIE] S. 133
[26] Siehe [DIE] Theorem V.3.7, S. 136 und Theorem V.3.10 (i), S. 138 in Verbindung mit Theorem IV.3.2.

offenbar durch $x \mapsto \mu([\,a,x\,])$ eine Abbildung $\Pi(\mu)$ auf I mit Werten in X definiert, die sogenannte *Punkt-Abbildung von μ*. Mit maßtheoretischen Hilfsmitteln läßt sich dann der folgende nicht-triviale Satz zeigen:

Satz 6 *Sei μ ein X-wertiges Maß auf $\mathfrak{B}$. Genau dann besitzt μ eine Lebesgue-Dichte, wenn die Abbildung $\Pi(\mu)$ unbestimmtes Integral ist. In diesem Fall ist jede Lebesgue-Dichte von μ eine Integrandenfunktion für $\Pi(\mu)$ und umgekehrt.*[27]

Als Kombination von Satz 6 mit dem Hauptsatz erhält man unmittelbar den

Satz 7 *μ sei ein X-wertiges Maß auf $\mathfrak{B}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *μ besitzt eine Lebesgue-Dichte.*

(ii) *$\Pi(\mu)$ ist unbestimmtes Integral.*

(iii) *$\Pi(\mu)$ ist absolutstetig und erfüllt die Bedingung (DIFF-INT).*

(iv) *$\Pi(\mu)$ ist stetig, nullmengentreu und erfüllt die Bedingung (DIFF-INT).*

In diesem Fall ist die Ableitung von $\Pi(\mu)$ eine Lebesgue-Dichte von μ.[28]

0.11 Die Radon-Nikodým-Eigenschaft bezüglich λ

Die erste Aussage von Satz 6 ist lediglich ein Spezialfall eines viel allgemeineren Zusammenhanges zwischen Borel-Maßen und Abbildungen auf I, der sich mit Hilfe des Begriffs der Punkt-Abbildung von Borel-Maßen beweisen läßt. Um diese Verallgemeinerung formulieren zu können, bemerken wir zunächst, daß die Menge $\mathsf{UI}(I,X)$ der unbestimmten Integrale auf I mit Werten in X ein Unterraum des $\mathbb{K}$-Vektorraumes $\mathsf{AC}(I,X)$ der X-wertigen absolutstetigen Abbildungen auf I ist. Entsprechendes gilt für die beiden Mengen $\mathsf{UI}_0(I,X) := \{f \in \mathsf{UI}(I,X) \mid f(a) = 0\}$ und $\mathsf{AC}_0(I,X) := \{f \in \mathsf{AC}(I,X) \mid f(a) = 0\}$. Auf der Seite der Borel-Maße läßt sich auf ebenso einfache Weise zeigen, daß die Menge $\mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{B},X)$ der X-wertigen Borel-Maße mit Lebesgue-Dichten ein Unterraum des $\mathbb{K}$-Vektorraumes $\mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{B},X)$ der λ-absolutstetigen Borel-Maße mit Werten in X ist.[29] Nach diesen Vorbereitungen können wir den folgenden nicht-trivialen Satz notieren:

Satz 8 *Durch $F \mapsto \Pi(F)$ wird ein Vektorraum-Isomorphismus $\widetilde{\pi}$ von $\mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{B},X)$ auf $\mathsf{AC}_0(I,X)$ definiert. Das Bild von $\mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{B},X)$ unter $\widetilde{\pi}$ ist $\mathsf{UI}_0(I,X)$.*[30]

[27] siehe Satz 12.10, S. 87

[28] siehe Satz 12.18, S. 90

[29] Zur Definition der λ-Absolutstetigkeit von Maßen (allgemeiner: von Inhalten) siehe Definition 8.4, S. 58.

[30] siehe Korollar 12.14, S. 88

Gemäß der im Unter-Abschnitt 0.9 notierten Definition ist der Banachraum X genau dann ein Gel'fand-Raum, wenn die beiden Räume $\mathsf{UI}(I,X)$ und $\mathsf{AC}(I,X)$ übereinstimmen. Wie man sofort sieht, ist dies äquivalent zur Bedingung $\mathsf{UI}_0(I,X) = \mathsf{AC}_0(I,X)$. Mit Hilfe von Satz 8 läßt sich daher die Gel'fand-Raum-Eigenschaft auf die Seite der Maße transportieren:

Satz 9 *Der Banachraum X ist genau dann ein Gel'fand-Raum, wenn $\mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{B},X) = \mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{B},X)$ gilt.*[31]

Die in diesem Zusammenhang auftretende Eigenschaft $\mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{B},X) = \mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{B},X)$ wird in üblicherweise als *Radon-Nikodým-Eigenschaft (von X) bezüglich* λ bezeichnet.[32]

0.12 Zum Aufbau der vorliegenden Arbeit

Der erste Teil der vorliegenden Arbeit ist dem Beweis des verallgemeinerten Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung gewidmet. Zunächst werden die wichtigen Sätze 1 und 2 bereitgestellt. Um den Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht zu sprengen, werden wir die zum Beweis der Sätze 3 und 4 sowie des Mittelwert-Lemmas nötigen Eigenschaften des äußeren Maßes λ_∞^X auf X — unter Verweis auf die entsprechenden Sätze in der oben angegebenen Staatsexamensarbeit — lediglich zitieren. Die Etablierung des Mittelwert-Lemmas sowie einiger wichtiger Folgerungen bildet sowohl vom Umfang als auch vom Inhalt her das Zentrum des ersten Teils. Der abschließend formulierte Beweis des Hauptsatzes ist dann mehr oder weniger eine Routine-Angelegenheit.

Im zweiten Teil werden die in Satz 8 formulierten Isomorphie-Beziehungen zwischen Borel-Maßen und Abbildungen auf I hergeleitet. Der Beweis dieses Satzes, der sich in der Literatur meist nur in recht knapper Form findet, wird in der vorliegenden Arbeit sorgfältig durchgeführt.

Wie oben bereits erwähnt, findet man im Anhang die Definition sowie eine Diskussion wichtiger Eigenschaften der Cantor-Funktion.

0.13 Einige Definitionen und Notationen

- Eine Menge heißt **abzählbar**, falls sie endlich oder abzählbar unendlich ist.
- Sei Ω eine Menge. Die Potenzmenge von Ω wird mit $\mathfrak{P}(\Omega)$ bezeichnet. Eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{P}(\Omega)$ bezeichnet man als **Mengensystem**. Für jedes Mengensystem $\mathcal{M} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ verwendet man die Notationen $\bigcup \mathcal{M} := \bigcup_{A\in\mathcal{M}} A$ und $\bigcap \mathcal{M} := \bigcap_{A\in\mathcal{M}} A$. Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt **disjunkt**, falls je zwei

[31] siehe Satz 12.20, S. 91

[32] siehe z.B. [DIE] Definition III.1.3, S. 61

verschiedene in $\mathcal{M}$ enthaltene Mengen disjunkt sind. Sei $A \subset \Omega$. Ein Mengensystem $\mathcal{U} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ wird als **Überdeckung** von A bezeichnet, wenn $\bigcup \mathcal{U} \supset A$ gilt. Das Komplement von A in Ω wird mit A^c bezeichnet.

- Seien (M, d) ein metrischer Raum, $x \in M$ und $r \geq 0$. Als **offene** (bzw. **abgeschlossene**) **M-Kugel** mit **Mittelpunkt** x und **Radius** r wird die Menge $\mathrm{K}_M(x,r) := \{ y \in M \mid d(x,y) < r \}$ (bzw. $\overline{\mathrm{K}}_M(x,r) := \{ y \in M \mid d(x,y) \leq r \}$) bezeichnet. Eine Menge $K \subset M$ heißt **M-Kugel**, falls es $x \in M$ und $r \geq 0$ gibt derart, daß $\mathrm{K}_M(x,r) \subset K \subset \overline{\mathrm{K}}_M(x,r)$. Sind Verwechslungen ausgeschlossen, so unterbleibt der Einfachheit halber der Zusatz „M". — Für jede nichtleere Menge $A \subset M$ heißt die Größe $\mathrm{diam}(A) := \sup \{ d(x,y) \mid x, y \in A \}$ **Durchmesser von** A. Man setzt $\mathrm{diam}(\emptyset) := 0$.

- Seien Ω eine Menge und $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Für jede Abbildung $f : \Omega \to X$ bezeichnet $|f|$ die durch $x \mapsto \| f(x) \|$ definierte reellwertige Funktion auf Ω.

- Sind Ω, Ω' Mengen, so wird die Menge aller Abbildungen von Ω nach Ω' mit $\mathsf{Abb}(\Omega, \Omega')$ bezeichnet. Ist zusätzlich (M, d) ein metrischer Raum, so wird der Raum der beschränkten Abbildungen von Ω nach M mit $\mathsf{B}(\Omega, M)$ bezeichnet.

- Sind (Y, τ), (Y', τ') topologische Räume, so wird die Menge der stetigen Abbildungen von Y nach Y' mit $\mathsf{C}(Y, Y')$ bezeichnet.

0.14 General-Voraussetzungen

- $\mathbb{K}$ sei einer der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

- X sei ein $\mathbb{K}$-Banachraum.

- I sei ein nicht-triviales kompaktes Intervall mit linkem Randpunkt a und rechtem Randpunkt b. Mit $\mathfrak{B}$ wird die σ-Algebra der Borelschen Teilmengen von I, mit $\mathcal{T}$ die Menge der Teil-Intervalle von I und mit $\mathfrak{A}$ die Mengen-Algebra der endlichen Vereinigungen von Teil-Intervallen von I bezeichnet.

- $f : I \to X$ sei eine Abbildung.

- Ω sei eine nicht-leere Menge, und $\mathcal{M} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ sei ein Mengensystem. $\Sigma \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ sei eine σ-Algebra, und μ sei ein positives endliches Maß auf Σ (d.h. (Ω, Σ, μ) ist ein endlicher Maßraum). $\mathfrak{D}$ sei eine Teil-Algebra von Σ.

Teil 1
Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In diesem Teil wird das in der Einleitung ausführlich dargestellte Programm zur Gewinnung der verallgemeinerten Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung durchgeführt.

Die Definitionen unbestimmter Integrale und absolutstetiger Abbildungen werden im ersten Abschnitt bereitgestellt. Ebenfalls an dieser Stelle werden die bekannten Tatsachen bewiesen, daß unbestimmte Integrale λ-fast überall differenzierbar mit integrierbarer Ableitung und absolutstetig sind.

Bezugnehmend auf meine Staatsexamensarbeit *Konstruktion eines äußeren Längenmaßes auf Banachräumen* wird im zweiten Abschnitt zunächst die Konstruktion der sogenannten *äußeren d-Maße* zitiert.[33] Ferner findet man in diesem Abschnitt eine Zusammenstellung der für die hiesigen Zwecke notwendigen Eigenschaften der äußeren d-Maße. Der Begriff der *Nullmengentreue* von Abbildungen wird mit Hilfe der äußeren d-Maße im dritten Abschnitt definiert. Von Bedeutung ist die in diesem Zusammenhang bewiesene Tatsache, daß absolutstetige Abbildungen bereits nullmengentreu sind.

Im vierten Abschnitt wird zunächst das sogenannte *Mittelwert-Lemma* etabliert. Obwohl die dort formulierte Mittelwert-Ungleichung relativ schwach ist, lassen sich daraus bereits alle für den Beweis der verallgemeinerten Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung wichtigen Folgerungen ziehen. Insbesondere folgert man aus dem Mittelwert-Lemma, daß jede überall differenzierbare Abbildung bereits nullmengentreu ist. Eine deutliche Verschärfung der Aussage des Mittelwert-Lemmas erhält man unter Zuhilfenahme des Überdeckungssatzes von Vitali; diese verschärfte Fassung des Mittelwert-Lemmas wird zum Abschluß des vierten Abschnitts bewiesen. Schließlich werden im fünften Abschnitt die in der Einleitung vorgestellte verallgemeinerte Fassung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bewiesen sowie in einigen Spezialfällen Varianten des Hauptsatzes vorgestellt und diskutiert.

[33] Dem maßtheoretisch bewanderten Leser wird dabei nicht entgehen, daß sich die Konstruktion der äußeren d-Maße eng an die Konstruktion des *Hausdorff-Maßes der Dimension 1* anlehnt; diesbezügliche Kommentierungen findet man in der oben genannten Arbeit, S. 15ff.

1 Unbestimmte Integrale und absolutstetige Abbildungen

1.1 Integrandenfunktionen und unbestimmte Integrale

Definition 1.1 *Eine integrierbare Abbildung $g : I \to X$ mit der Eigenschaft*

$$\forall\, x \in I \;\;:\;\; f(x) \;=\; f(a) + \int_a^x g(t)\, dt$$

heißt **Integrandenfunktion für** *f. f heißt* **unbestimmtes Integral***, wenn es eine Integrandenfunktion für f gibt. Die Menge der unbestimmten Integrale auf I mit Werten in X wird mit $\mathsf{UI}(I, X)$ bezeichnet.*

Unmittelbar aus der Linearität des Integrals ergibt sich die

Bemerkung 1.2 *(i) Seien f_1, f_2, g_1, g_2 Abbildungen auf I mit Werten in X, und sei $\alpha \in \mathbb{K}$. Sind g_1 bzw. g_2 Integrandenfunktionen für f_1 bzw. f_2, so ist $\alpha g_1 + g_2$ eine Integrandenfunktion für $\alpha f_1 + f_2$.*

(ii) $\mathsf{UI}(I, X)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. ■

Satz 1.3 *$g : I \to X$ sei Integrandenfunktion für f. Jede weitere Abbildung $h : I \to X$ ist genau dann Integrandenfunktion für f, wenn g λ-fast überall mit h übereinstimmt.*

Beweis. Dieser Satz gehört zum Standard-Repertoire der Integrationstheorie. Einen Beweis findet man im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit in Korollar 11.12, Äquivalenz (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii), S. 80. $\diamond$

Satz 1.4 *Ist f unbestimmtes Integral, so gibt es eine separabelwertige Integrandenfunktion für f.*

Beweis. Sei $g : I \to X$ eine Integrandenfunktion für f. Als integrierbare Abbildung ist g insbesondere meßbar, also λ-wesentlich separabelwertig (vgl. [DIE] Theorem II.1.2, S. 42). Also findet man eine separabelwertige Abbildung $h : I \to X$, die λ-fast überall mit g übereinstimmt. Nach Satz 1.3 ist auch h Integrandenfunktion für f. ■

1.2 Differentiations-Eigenschaften unbestimmter Integrale

Zunächst notieren wir nochmals die bereits aus der Einleitung bekannte Bedingung

(DIFF-INT) *f ist λ-fast überall differenzierbar mit integrierbarer Ableitung.*

Der Beweis der Tatsache, daß unbestimmte Integrale die Bedingung (DIFF-INT) erfüllen, beruht im wesentlichen auf dem Differentiations-Satz von Lebesgue, den wir der Vollständigkeit halber an dieser Stelle zitieren:

Satz 1.5 (Differentiations-Satz von Lebesgue) *Sei $g : I \to \mathbb{R}$ monoton. Dann erfüllt g die Bedingung (DIFF-INT), und für alle $x, y \in I$, $x \leq y$, gilt: $\int_x^y |\, g_0'(t) \,| \; dt \leq |\, g(y) - g(x) \,|$.*

Beweis. [BEN] Theorem 4.8, S. 135ff. $\diamond$

Lemma 1.6 *$g, h : I \to \mathbb{R}$ seien integrierbare Abbildungen. Genau dann gilt*

$$\int_x^y g(t)\, dt \;\leq\; \int_x^y h(t)\, dt$$

für alle $x, y \in I$, $x \leq y$, wenn $g \leq h$ λ-fast überall.

Beweis. Die Implikation „$\Leftarrow$“ ist klar. Zum Beweis der umgekehrten Implikation gelte $\int_x^y g(t)\, dt \leq \int_x^y h(t)\, dt$ für alle $x, y \in I$, $x \leq y$. Wegen der Additivität des Integrals bedeutet dies: $\int_A g\, d\lambda \leq \int_A h\, d\lambda$ für alle $A \in \mathfrak{A}$. Weil die σ-Algebra $\mathfrak{B}$ von der Algebra $\mathfrak{A}$ erzeugt wird, folgt: $\int_A g\, d\lambda \leq \int_A h\, d\lambda$ für alle $A \in \mathfrak{B}$. (Vergleiche hierzu auch die Korollare 10.10 und 10.12 im zweiten Teil dieser Arbeit.) Dies impliziert schließlich die gewünschte Ungleichung $g \leq h$ λ-fast überall. $\blacksquare$

Satz 1.7 *Sei $f : I \to X$ unbestimmtes Integral. Dann erfüllt f die Bedingung (DIFF-INT), und die Ableitung f_0' ist eine Integrandenfunktion für f.*

Beweis. (Vgl. [DIE] Theorem II.2.9, S. 49f.) Nach Satz 1.4 findet man eine separabelwertige Integrandenfunktion $g : I \to X$ für f. Sei $\{p_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge von Bild(g). Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $|\, g - p_n \,|$ ist positiv und Lebesgue-integrierbar, d.h.

$$\varphi_n \;:\; I \to \mathbb{R} \,,\; x \mapsto \int_a^x \|\, g(t) - p_n \,\| \;\; dt \,,$$

ist eine monoton wachsende Abbildung. Anstelle von $(\varphi_n)_0'$ werde die Ableitung von φ_n der Einfachheit halber mit φ_n' bezeichnet. Nach dem Differentiations-Satz von Lebesgue ist φ_n λ-fast überall differenzierbar mit Lebesgue-integrierbarer Ableitung φ_n'; da φ_n monoton wachsend ist, ist $\varphi_n' \geq 0$. Ferner gilt für alle $x, y \in I$, $x \leq y$:

$$\int_x^y \varphi_n'(t)\, dt \;\leq\; \varphi_n(y) - \varphi_n(x) \;=\; \int_x^y \|\, g(t) - p_n \,\| \; dt \; .$$

Nach Lemma 1.6 impliziert dies $\varphi_n' \leq |\, g - p_n \,|$ λ-fast überall. Man findet also eine λ-Nullmenge $E_n \subset I$ so, daß für alle $x \in I \setminus E_n$ gilt: φ_n ist in x differenzierbar, und es gilt $0 \leq \varphi_n'(x) \leq \|\, g(x) - p_n \,\|$. Als abzählbare Vereinigung von λ-Nullmengen ist auch $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ eine λ-Nullmenge. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist also φ_n in jedem Punkt $x \in I \setminus E$ differenzierbar, und es gilt:

$$0 \;\leq\; \varphi_n'(x) \;\leq\; \|\, g(x) - p_n \,\| \; . \tag{1.1}$$

Sei nun $x \in I \setminus E$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\limsup_{h \to 0} \left\| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t)\, dt - g(x) \right\| \\
&= \limsup_{h \to 0} \left\| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (g(t) - p_n)\, dt \,+\, (p_n - g(x)) \right\| \\
&\leq \limsup_{h \to 0} \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \|\, g(t) - p_n \,\| \; dt \right| \;+\; \|\, p_n - g(x) \,\| \\
&= \limsup_{h \to 0} \left| \frac{1}{h} \left(\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x) \right) \right| \;+\; \|\, p_n - g(x) \,\| \\
&= \lim_{h \to 0} \left| \frac{\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)}{h} \right| \;+\; \|\, p_n - g(x) \,\| \;=\; \left| \varphi_n'(x) \right| \;+\; \|\, p_n - g(x) \,\| \\
&\leq\; 2\; \|\, p_n - g(x) \,\| \;\; ,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung eine Folgerung aus (1.1) ist. Da diese Rechnung für alle $n \in \mathbb{N}$ gültig ist, und da $\{p_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge von Bild(g) ist, folgt:

$$\limsup_{h \to 0} \left\| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t)\, dt - g(x) \right\| \;\leq\; 2 \inf_{n \in \mathbb{N}} \|\, p_n - g(x) \,\| \;=\; 0 \; .$$

Dies impliziert dann sofort

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t)\, dt \;=\; g(x) \; .$$

Also ist f auf $I \setminus E$ und damit λ-fast überall differenzierbar. Weil ferner f_0' und g λ-fast überall übereinstimmen, ist f_0' nach Satz 1.3 eine Integrandenfunktion für f. Insbesondere ist f_0' integrierbar, d.h. f erfüllt die Bedingung (DIFF-INT). ∎

1.3 Absolutstetige Abbildungen

Definition 1.8 *f heißt* **absolutstetig***, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, b_1, ..., a_n, b_n \in I$ mit $a \leq a_1 \leq b_1 \leq ... \leq a_n \leq b_n \leq b$ gilt:*

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \ < \ \delta \implies \sum_{k=1}^{n} \| f(b_k) - f(a_k) \| \ < \varepsilon \, .$$

Die Menge der absolutstetigen Abbildungen auf I mit Werten in X wird mit $\mathsf{AC}(I, X)$ bezeichnet.

Die folgende Formulierung der Absolutstetigkeit ist eleganter als die in der Definition notierte:

Bemerkung 1.9 *Genau dann ist f absolutstetig, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, daß für jede endliche disjunkte Teilmenge $\mathcal{S}$ von $\mathcal{T}$ gilt:*

$$\lambda\left(\bigcup \mathcal{S}\right) \ < \ \delta \implies \sum_{W \in \mathcal{S}} \| f(\sup W) - f(\inf W) \| \ < \varepsilon \, . \quad \blacksquare$$

Unmittelbar aus den Eigenschaften der Norm auf X erhält man die folgende

Bemerkung 1.10 $\mathsf{AC}(I, X)$ *ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.* $\blacksquare$

Den Zusammenhang zwischen den Begriffen Stetigkeit, Absolutstetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit notieren wir in der folgenden Bemerkung.

Bemerkung 1.11 *(i) Absolutstetige Abbildungen sind stetig. Insbesondere ist also $\mathsf{AC}(I, X)$ ein $\mathbb{K}$-Untervektorraum von $\mathsf{C}(I, X)$.*

(ii) Ist f Lipschitz-stetig, so auch absolutstetig. Insbesondere ist f absolutstetig, falls f stetig differenzierbar ist.

Beweis. (i) : Setzt man in der Definition der Absolutstetigkeit insbesondere $n = 1$, so erhält man die gewünschte Aussage.

(ii) : f sei Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$, d.h. es gilt für alle $x, y \in I$ mit $x \leq y$:

$$\| f(y) - f(x) \| \ \leq \ L\,(y - x) \ = \ L \cdot \lambda([\,x, y\,]) \, .$$

Im Fall $L = 0$ ist f offenbar konstant, also auch absolutstetig. Sei also $L > 0$. Für $\varepsilon > 0$ setzt man dann $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ und verifiziert damit sofort die Absolutstetigkeit von f. Sei nun f stetig differenzierbar. Wegen der Kompaktheit von I gilt dann:

$$L \ := \ \sup_{x \in I} \left\| f'(x) \right\| \ < \ \infty \, .$$

Die Mittelwert-Ungleichung impliziert die Lipschitz-Stetigkeit von f bezüglich der Lipschitz-Konstanten L. Also ist f absolutstetig. $\blacksquare$

1.4 Unbestimmte Integrale sind absolutstetig

Lemma 1.12 *$g : I \to X$ sei eine integrierbare Abbildung. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß für jede Lebesgue-meßbare Menge $A \subset I$ gilt:*

$$\lambda(A) < \delta \implies \int_A |g|\, d\lambda \, < \, \varepsilon \, .$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ setzt man zuerst $A_k := \{ \, x \in I \mid |g|(x) \leq k \, \}$ und dann $g_k := |g| \cdot \mathbf{1}_{A_k}$. Da $|g|$ eine Lebesgue-integrierbare, insbesondere also Lebesgue-meßbare Funktion ist, ist $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Mengenfolge in $\mathfrak{B}$. Daher ist $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen, die punktweise gegen $|g|$ konvergiert. Also gilt nach dem Satz von Beppo-Levi über die monotone Konvergenz:

$$\lim_{k \to \infty} \int_I g_k \, d\lambda \; = \; \int_I |g| \, d\lambda \, .$$

Man findet daher $n \in \mathbb{N}$ so, daß gilt:

$$\int_I |g| \, d\lambda \; < \; \int_I g_n \, d\lambda \, + \, \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Setze $\delta := \frac{\varepsilon}{2\,n}$. Sei ferner $A \subset I$ eine Lebesgue-meßbare Menge derart, daß $\lambda(A) < \delta$. Dann gelten

$$\int_A (|g| - g_n) \, d\lambda \; \leq \; \int_I (|g| - g_n) \, d\lambda \; < \; \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\int_A g_n \, d\lambda \; \leq \; \int_A \| \, g_n \, \|_\infty \; d\lambda \; \leq \; \int_A n \, d\lambda \; = \; n \, \lambda(A) \; < \; n \, \delta \; = \; \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Kombination dieser beiden Ungleichungen liefert die gewünschte Abschätzung

$$\int_A |g| \, d\lambda \; < \; \varepsilon \, . \quad \blacksquare$$

Satz 1.13 *Unbestimmte Integrale sind absolutstetig. Insbesondere ist also $\mathsf{UI}(I, X)$ ein $\mathbb{K}$-Untervektorraum von $\mathsf{AC}(I, X)$.*

Beweis. Sei f unbestimmtes Integral, und sei $g : I \to X$ eine Integrandenfunktion für f. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 1.12 findet man $\delta > 0$ so, daß für jede Lebesgue-meßbare Menge $A \subset I$ gilt:

$$\lambda(A) < \delta \implies \int_A |g| \, d\lambda \, < \, \varepsilon \, .$$

Sei $\mathcal{S}$ eine endliche disjunkte Teilmenge von $\mathcal{T}$ so, daß gilt:

$$\lambda\left(\bigcup \mathcal{S}\right) \, < \, \delta \, .$$

Offensichtlich ist $B := \bigcup \mathcal{S}$ eine Borelsche, mithin eine Lebesgue-meßbare Menge. Es folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{W\in\mathcal{S}} \| f(\sup W) - f(\inf W) \| \; &= \; \sum_{W\in\mathcal{S}} \left\| \int_W g(t)\, dt \right\| \\ &\leq \; \sum_{W\in\mathcal{S}} \int_W \| g(t) \| \; dt \; = \; \int_B |\, g \,| \; d\lambda \; < \; \varepsilon \; . \quad \blacksquare\end{aligned}$$

1.5 Absolutstetige Abbildungen sind von beschränkter Variation

Bei der Formulierung der reellen Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung wird die Tatsache, daß absolutstetige Abbildungen stets von beschränkter Variation sind, eine wichtige Rolle spielen. Der Vollständigkeit halber notieren wir an dieser Stelle die bekannte Definition der BV-Abbildungen:

Definition 1.14 *f heißt* **von beschränkter Variation** *(oder* **BV-Abbildung***), falls*

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} \| f(a_k) - f(a_{k-1}) \| \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\,,\; a = a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_n = b \right\} \; < \; \infty \; .$$

Die Menge der BV-Abbildungen auf I mit Werten in X wird mit $\mathsf{BV}(I, X)$ bezeichnet.

Unmittelbar aus den Eigenschaften der Norm auf X erhält man die folgende

Bemerkung 1.15 $\mathsf{BV}(I, X)$ *ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.* $\blacksquare$

Satz 1.16 *Absolutstetige Abbildungen sind von beschränkter Variation. Insbesondere ist also $\mathsf{AC}(I, X)$ ein $\mathbb{K}$-Untervektorraum von $\mathsf{BV}(I, X)$.*

Beweis. Der Beweis dieses Satzes läßt sich mit den Hilfsmitteln aus Teil 2 sehr elegant führen, siehe Korollar 12.9. $\diamond$

2 Die äußeren d-Maße auf Banachräumen

2.1 Das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$

Erinnerung 2.1 *Sei $A \subset \mathbb{R}$. Bezeichnet man mit $IV(A)$ die Menge aller abzählbaren Überdeckungen von A, die nur aus reellen Intervallen bestehen, so gilt:*

$$\lambda^*(A) \;=\; \inf \left\{ \sum_{I \in \mathcal{N}} \operatorname{diam}(I) \;\middle|\; \mathcal{N} \in IV(A) \right\} . \quad \diamond$$

2.2 Konstruktion der äußeren d-Maße auf X

Satz und Definition 2.2 *Für alle $A \subset X$ bezeichne $\mathfrak{K}_\infty^X(A)$ die Menge aller abzählbaren Überdeckungen von A, die nur aus X-Kugeln bestehen (den sogenannten* X**-Kugel-Überdeckungen von** A*). Eine derartige X-Kugel-Überdeckung $\mathcal{K}$ wird als* **offen** *(bzw.* **abgeschlossen***) bezeichnet, wenn jede in $\mathcal{K}$ enthaltene X-Kugel offen (bzw. abgeschlossen) ist. Für alle $A \subset X$ und $d \in \,]\,0,\infty\,[$ setzt man ferner*

$$\mathfrak{K}_d^X(A) \;:=\; \left\{\; \mathcal{K} \in \mathfrak{K}_\infty^X(A) \;\middle|\; \forall\, K \in \mathcal{K} \;:\; \operatorname{diam}(K) < d \;\right\} \;;$$

jedes der Elemente von $\mathfrak{K}_d^X(A)$ wird als X**-Kugel-Überdeckung von** A **zum Durchmesser** d *bezeichnet. Für alle $d \in \,]\,0,\infty\,]$ ist dann die Mengenfunktion*

$$\lambda_d^X \;:\; \mathfrak{P}(X) \to [\,0,\infty\,] \;,\; A \mapsto \inf \left\{ \sum_{K \in \mathcal{K}} \operatorname{diam}(K) \;\middle|\; \mathcal{K} \in \mathfrak{K}_d^X(A) \right\} ,$$

ein äußeres Maß auf X. Ferner ist

$$\lambda_0^X \;:\; \mathfrak{P}(X) \to [\,0,\infty\,] \;,\; A \mapsto \sup \left\{\; \lambda_d^X(A) \;\middle|\; d \in \,]\,0,\infty\,] \;\right\} ,$$

ein äußeres Maß auf X. Für alle $d \in [\,0,\infty\,]$ wird λ_d^X als **äußeres** d**-Maß auf** X *bezeichnet. Insbesondere heißt λ_0^X* **äußeres Längenmaß auf** X*. Im Falle $X = \mathbb{R}$ stimmt für alle $d \in [\,0,\infty\,]$ das äußere d-Maß $\lambda_d^{\mathbb{R}}$ mit dem äußeren Lebesgue-Maß λ^* überein.*

Beweis. [ROS] Satz 2.7, S. 17 und Satz 7.1, S. 45. $\diamond$

2.3 Über Nullmengen

Bemerkung 2.3 *Für alle $d \in [0, \infty]$ sind die abzählbaren Teilmengen von X λ_d^X-Nullmengen.*

Beweis. [ROS] Lemma 3.2, S. 19f. $\diamond$

Satz 2.4 (Nullmengen-Äquivalenz der äußeren d-Maße) *Für alle $A \subset X$ gilt:*

$$\big(\exists\, d \in [0, \infty] \;:\; \lambda_d^X(A) = 0\big) \iff \big(\forall\, d \in [0, \infty] \;:\; \lambda_d^X(A) = 0\big) \;.$$

Beweis. [ROS] Satz 3.8, S. 21. $\diamond$

2.4 Approximationen

Lemma 2.5 (Approximation durch offene Mengen) *Seien $A \subset X$ und $d \in]0, \infty]$ so, daß $\lambda_d^X(A) < \infty$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:*

(i) Es existiert eine abgeschlossene (bzw. offene) X-Kugel-Überdeckung $\mathcal{K} \in \mathfrak{K}_d^X(A)$ so, daß

$$\sum_{K \in \mathcal{K}} \operatorname{diam}(K) \;<\; \lambda_d^X(A) + \varepsilon \;.$$

(ii) Es existiert eine offene Obermenge $U \subset X$ von A derart, daß $\lambda_d^X(U) < \lambda_d^X(A) + \varepsilon$.

Im Spezialfall $X = \mathbb{R}$ gilt: Ist $A \subset \mathbb{R}$ derart, daß $\lambda^*(A) < \infty$, so gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

(i) Es existiert eine abzählbare Überdeckung $\mathcal{U}$ von A bestehend aus offenen (bzw. abgeschlossenen) reellen Intervallen so, daß

$$\sum_{J \in \mathcal{U}} \lambda(J) \;<\; \lambda^*(A) + \varepsilon \;.$$

(ii) Es existiert eine offene Obermenge $U \subset \mathbb{R}$ von A derart, daß $\lambda(U) < \lambda^*(A) + \varepsilon$. Insbesondere gibt es also eine offene Obermenge $U \subset \mathbb{R}$ von A so, daß $\lambda(U) < \infty$.

Beweis. [ROS] Lemma 3.10, S. 22ff und Satz 7.1, S. 45. $\diamond$

Satz 2.6 (Approximation durch Borelsche Mengen) *Seien $A \subset X$ und $d \in [0, \infty]$. Dann existiert eine Borelsche Obermenge $U \subset X$ von A so, daß $\lambda_d^X(A) = \lambda_d^X(U)$. Im Spezialfall $X = \mathbb{R}$ gilt: Zu jeder Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ existiert eine Borelsche Obermenge $U \subset \mathbb{R}$ so, daß $\lambda^*(A) = \lambda(U)$.*

Beweis. [ROS] Satz 3.11, S. 24f und Satz 7.1, S. 45. $\diamond$

2.5 Vergleich von Durchmesser und äußeren d-Maßen

Satz 2.7 *Für alle $A \subset X$ gilt: $\lambda_\infty^X(A) \leq 2\,\mathrm{diam}(A)$. Ist insbesondere $K \subset X$ eine X-Kugel, dann gilt sogar $\lambda_d^X(K) \leq \mathrm{diam}(K)$ für alle $d \in \,]\,\mathrm{diam}(K)\,,\infty\,]$.*

Beweis. [ROS] Lemma 3.3, S. 20, Lemma 4.2, S. 27 und Beispiel 4.6, S. 28. $\diamond$

Satz 2.8 *Ist $A \subset X$ wegzusammenhängend, so gilt: $\mathrm{diam}(A) \leq \lambda_\infty^X(A)$. Insbesondere gilt $\mathrm{diam}(f(J)) \leq \lambda_\infty^X(f(J))$ für jedes Teilintervall J von I, falls f stetig ist.*

Beweis. [ROS] Bemerkung 4.8, S. 29 und Satz 4.14, S. 33. $\diamond$

3 Nullmengentreue Abbildungen

3.1 Definition und einige einfache Bemerkungen

Definition 3.1 *Sei $M \subset I$. f heißt* **nullmengentreu auf** *M, wenn für jede λ-Nullmenge $A \subset M$ die Bildmenge $f(A)$ eine λ_∞^X-Nullmenge ist. f heißt* **nullmengentreu**, *falls f nullmengentreu auf I ist.*

Die Nullmengen-Äquivalenz der äußeren d-Maße auf X (Satz 2.4) impliziert unmittelbar die folgende

Bemerkung 3.2 *Sei $M \subset I$. Genau dann ist f nullmengentreu auf M, wenn für jede λ-Nullmenge $A \subset M$ die Bildmenge $f(A)$ eine λ_0^X-Nullmenge ist.* ■

Die einfache Tatsache, daß jede abzählbare Teilmenge von X bereits eine λ_∞^X-Nullmenge ist, spiegelt sich in der folgenden Bemerkung wider.

Bemerkung 3.3 *Sei $M \subset I$, und sei $B \subset M$ abzählbar. Ist f auf $M \backslash B$ nullmengentreu, so auch auf M.*

Beweis. f sei auf $M \setminus B$ nullmengentreu. Sei $A \subset M$ eine λ-Nullmenge. Als abzählbare Menge ist $f(B)$ eine λ_∞^X-Nullmenge. Ferner ist $A \backslash B$ als Teilmenge der λ-Nullmenge A ebenfalls eine λ-Nullmenge. Daher ist nach Voraussetzung $\lambda_\infty^X(f(A \setminus B)) = 0$, es gilt also:

$$\lambda_\infty^X(f(A)) \;\leq\; \lambda_\infty^X(f(A \setminus B)) + \lambda_\infty^X(f(B)) \;=\; 0\,. \quad ■$$

3.2 Absolutstetige Abbildungen sind nullmengentreu

Lemma 3.4 *Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen. Dann besteht die Menge der Zusammenhangskomponenten von U aus abzählbar vielen paarweise disjunkten offenen nicht-leeren Intervallen.*

Beweis. Die Menge der Zusammenhangskomponenten von U werde im folgenden mit $\mathcal{K}$ bezeichnet. Sei $W \in \mathcal{K}$. Per Definition ist W eine nicht-leere zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$, also ein nicht-leeres Intervall. Sei $x \in W$. Da U offen ist, findet man $\varepsilon > 0$ so, daß

$$V \;:=\;]\,x-\varepsilon, x+\varepsilon\,[\; \subset\; U\,.$$

Da V zusammenhängend ist, ist $V \subset W$. Also ist W offen. Ferner sind offenbar je zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten von U disjunkt, d.h. $\mathcal{K}$ besteht aus paarweise disjunkten offenen nicht-leeren Intervallen. Da jede Zusammenhangskomponente offen und nicht-leer ist, findet man schließlich eine Familie $(q_W)_{W \in \mathcal{K}}$ in $\mathbb{Q}$ so, daß $q_W \in W$ für alle $W \in \mathcal{K}$. Da $\mathcal{K}$ disjunkt ist, ist die Abbildung $\mathcal{K} \to \mathbb{Q}$, $W \mapsto q_W$, injektiv. Also ist $\mathcal{K}$ abzählbar. ■

Lemma 3.5 *Seien $A \subset I$ und $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(I)$ eine abzählbare Überdeckung von A. Dann gilt:*

$$\lambda_\infty^X(f(A)) \;\le\; 2 \sum_{E \in \mathcal{F}} \operatorname{diam}(f(E)) \;.$$

Beweis. Auf Grund der Monotonie und der σ-Subadditivität von λ_∞^X erhält man zunächst:

$$\lambda_\infty^X(f(A)) \;\le\; \lambda_\infty^X\left(\bigcup_{E \in \mathcal{F}} f(E)\right) \;\le\; \sum_{E \in \mathcal{F}} \lambda_\infty^X(f(E)) \;.$$

Nach Satz 2.7 gilt ferner $\lambda_\infty^X(f(E)) \le 2 \operatorname{diam}(f(E))$ für alle $E \in \mathcal{F}$. Kombination beider Ungleichungen liefert die Behauptung. ■

Satz 3.6 *Absolutstetige Abbildungen sind nullmengentreu.*

Beweis. f sei absolutstetig. Wegen Bemerkung 3.3 genügt es, die Nullmengentreue von f auf $]\,a,b\,[$ zu zeigen. Sei also $A \subset\,]\,a,b\,[$ eine λ-Nullmenge. Sei $\varepsilon > 0$. Da f absolutstetig ist, findet man $\delta > 0$ so, daß für jede endliche disjunkte Teilmenge $\mathcal{S}$ von $\mathcal{T}$ gilt:

$$\sum_{W \in \mathcal{S}} \lambda(W) \;<\; \delta \;\Longrightarrow\; \sum_{W \in \mathcal{S}} \|\, f(\sup W) - f(\inf W) \,\| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} \;. \tag{3.1}$$

Nach Lemma 2.5 findet man eine offene Obermenge $U \subset \mathbb{R}$ von A so, daß $\lambda(U) < \delta$; wegen $A \subset\,]\,a,b\,[$ kann man o.B.d.A. auch $U \subset\,]\,a,b\,[$ annehmen. Im folgenden bezeichne $\mathcal{K}$ die Menge der Zusammenhangskomponenten von U. Nach Lemma 3.4 besteht $\mathcal{K}$ aus abzählbar vielen paarweise disjunkten Intervallen. Lemma 3.5 impliziert daher:

$$\lambda_\infty^X(f(A)) \;\le\; 2 \sum_{W \in \mathcal{K}} \operatorname{diam}(f(W)) \;. \tag{3.2}$$

Wegen $U \subset\,]\,a,b\,[$ ist für alle $W \in \mathcal{K}$ das abgeschlossene Intervall $\overline{W}$ eine kompakte Teilmenge von I. Aufgrund der Stetigkeit von f findet man daher für alle $W \in \mathcal{K}$ ein offenes Teil-Intervall $J_W \subset W$ so, daß gilt:

$$\|\, f(\sup J_W) - f(\inf J_W) \,\| \;=\; \operatorname{diam}(f(W)) \;.$$

Kombiniert man dies mit (3.2), so ergibt sich:

$$\lambda_\infty^X(f(A)) \;\leq\; 2 \sum_{W \in \mathcal{K}} \| \, f(\sup J_W) - f(\inf J_W) \, \| \;\; . \tag{3.3}$$

Aufgrund der Monotonie und σ-Additivität von λ gilt nun:

$$\sum_{W \in \mathcal{K}} \lambda(J_W) \;\leq\; \sum_{W \in \mathcal{K}} \lambda(W) \;=\; \lambda\left(\bigcup_{W \in \mathcal{K}} W \right) \;=\; \lambda(U) \;<\; \delta \; .$$

Für jede endliche Teilmenge $\mathcal{S}$ von $\mathcal{K}$ ist daher $\{ \; J_W \mid W \in \mathcal{S} \; \}$ eine endliche disjunkte Teilmenge von $\mathcal{T}$ mit der Eigenschaft:

$$\sum_{W \in \mathcal{S}} \lambda(J_W) \;\leq\; \sum_{W \in \mathcal{K}} \lambda(J_W) \;<\; \delta \; .$$

Aussage (3.1) impliziert also

$$\sum_{W \in \mathcal{S}} \| \, f(\sup J_W) - f(\inf J_W) \, \| \;<\; \frac{\varepsilon}{2}$$

für jede endliche Teilmenge $\mathcal{S}$ von $\mathcal{K}$, woraus man unmittelbar

$$\sum_{W \in \mathcal{K}} \| \, f(\sup J_W) - f(\inf J_W) \, \| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2}$$

folgert. Kombiniert man dies mit (3.3), so erhält man schließlich die gewünschte Ungleichung:

$$\lambda_\infty^X(f(A)) \;\leq\; 2 \sum_{W \in \mathcal{K}} \| \, f(\sup J_W) - f(\inf J_W) \, \| \;\leq\; 2 \, \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon \; . \quad \blacksquare$$

4 Verallgemeinerungen der Mittelwert-Ungleichung

4.1 Das Mittelwert-Lemma

Lemma 4.1 *Seien* $A \subset \mathcal{D}_f \cap \,]\,a,b\,[$ *und* $K := \sup_{x \in A} \| \, f\,'(x) \, \| < \infty$. *Ferner sei* $\varepsilon > 0$. *Dann gibt es eine offene Obermenge* $U \subset \,]\,a,b\,[$ *von* A *und eine Familie* $(\delta_x)_{x \in A}$ *positiver Zahlen so, daß gilt:*

$$\lambda(U) \;\leq\; \lambda^*(A) + \varepsilon \, , \tag{4.1}$$

$$\forall \, x \in A \quad : \quad]\, x - \delta_x, x + \delta_x \,[\; \subset \; U \, , \tag{4.2}$$

$$\forall \, x \in A \; \forall \, y \in \,]\, x - \delta_x, x + \delta_x \,[\quad : \quad \| \, f(y) - f(x) \, \| \;\leq\; (K + \varepsilon) \cdot | \, y - x \, | \quad . \tag{4.3}$$

Beweis. Nach Lemma 2.5 findet man eine offene Obermenge $U \subset \mathbb{R}$ von A mit der Eigenschaft (4.1), wobei man wegen $A \subset \,]\,a,b\,[$ o.B.d.A. auch $U \subset \,]\,a,b\,[$ annehmen kann. Aufgrund der Offenheit von U und wegen $K < \infty$ findet man ferner eine Familie $(\delta_x)_{x \in A}$ positiver Zahlen mit den Eigenschaften (4.2) und (4.3). ∎

Lemma 4.2 *Seien* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, *und* $\delta_1, \delta_2 > 0$. *Damit definiert man für* $j \in \{1, 2\}$ *die Intervalle* $E_j := \,]\, x_j - \delta_j, x_j + \delta_j \,[$. *Dann gilt:*

(i) $(\, \exists \, \alpha < x_1 \; : \; \alpha \in E_2 \setminus E_1 \,) \implies E_1 \subset E_2$.

(ii) $(\, \exists \, \alpha > x_2 \; : \; \alpha \in E_1 \setminus E_2 \,) \implies E_2 \subset E_1$.

Beweis. (i) : Sei $\alpha < x_1$ so, daß $\alpha \in E_2 \setminus E_1$. Wegen $\alpha \notin E_1$ folgt zunächst:

$$\alpha \;\leq\; x_1 - \delta_1 \, . \tag{4.4}$$

Wegen $x \in E_2$ gilt ferner:

$$x_2 - \delta_2 \;<\; \alpha \;<\; x_2 + \delta_2 \, . \tag{4.5}$$

Kombiniert man dies mit (4.4) und beachtet $x_1 < x_2$, so folgt $\delta_1 \leq x_1 - \alpha < x_2 - \alpha < \delta_2$. Dies impliziert schließlich unter Beachtung von (4.4) und (4.5)

$$x_2 - \delta_2 \;<\; \alpha \;\leq\; x_1 - \delta_1 \;<\; x_1 + \delta_1 \;<\; x_2 + \delta_2 \, ,$$

also $E_1 \subset E_2$.
(ii) : Sei $\alpha > x_2$ so, daß $\alpha \in E_1 \setminus E_2$. Man setzt $\widehat{x}_j := -x_j$ und $\widehat{E}_j := -E_j$ für $j \in \{1,2\}$ sowie $\widehat{\alpha} := -\alpha$. Offenbar ist $\widehat{\alpha} < \widehat{x}_2 < \widehat{x}_1$ und $\widehat{\alpha} \in \widehat{E}_1 \setminus \widehat{E}_2$. Nach (i) folgt daher $\widehat{E}_2 \subset \widehat{E}_1$, d.h. also $E_2 \subset E_1$. ∎

Lemma 4.3 (Mittelwert-Lemma) *Seien $A \subset \mathcal{D}_f$ und $K := \sup_{x\in A} \| f'(x) \| < \infty$. Dann gilt:*

$$\lambda_\infty^X(f(A)) \;\leq\; 2\,K \cdot \lambda^*(A)\,.$$

Beweis. Es genügt offenbar, die Behauptung für $A \subset \,]\,a,b\,[$ zu verifizieren; im folgenden sei also $A \subset \,]\,a,b\,[$. Ferner ist der Fall $A = \emptyset$ trivial; es sei also $A \neq \emptyset$. Sei $\varepsilon > 0$. Es genügt zu zeigen:

$$\lambda_\infty^X(f(A)) \;\leq\; 2\,(K+\varepsilon)\cdot(\lambda^*(A)+\varepsilon)\,.$$

Nach Lemma 4.1 findet man eine offene Obermenge $U \subset \,]\,a,b\,[$ von A und eine Familie $(\delta_x)_{x\in A}$ positiver Zahlen so, daß (4.1) – (4.3) gelten. Für alle $x \in A$ setzt man zunächst $E_x := \,]\,x-\delta_x, x+\delta_x\,[$. Offensichtlich ist dann die Menge $E := \bigcup_{x\in A} E_x$ eine offene Menge, und es gilt $A \subset E \subset U$. Im folgenden bezeichne $\mathcal{K}$ die Menge der Zusammenhangskomponenten von E. Aus Lemma 3.4 folgt, daß $\mathcal{K}$ aus abzählbar vielen paarweise disjunkten offenen nicht-leeren Intervallen besteht. Daher erhält man unter Verwendung von (4.1) die Abschätzung

$$\sum_{W\in\mathcal{K}} \lambda(W) \;=\; \lambda(E) \;\leq\; \lambda(U) \;\leq\; \lambda^*(A)+\varepsilon\,. \tag{4.6}$$

Wegen $A \subset E$ ist $\mathcal{K}$ eine abzählbare Überdeckung von A; Lemma 3.5 liefert daher die Ungleichung

$$\lambda_\infty^X(f(A)) \;\leq\; 2\sum_{W\in\mathcal{K}} \operatorname{diam}(f(W))\,. \tag{4.7}$$

Man zeigt im folgenden noch die Aussage

$$\forall\, W \in \mathcal{K} \;:\; \operatorname{diam}(f(W)) \;\leq\; (K+\varepsilon)\cdot\lambda(W)\,. \tag{4.8}$$

Kombiniert man dies mit (4.6) und (4.7), so erhält man die zu zeigende Ungleichung:

$$\begin{aligned}\lambda_\infty^X(f(A)) \;&\leq\; 2\sum_{W\in\mathcal{K}} \operatorname{diam}(f(W)) \;\leq\\ &\leq\; 2\,(K+\varepsilon)\cdot\sum_{W\in\mathcal{K}}\lambda(W) \;\leq\; 2\,(K+\varepsilon)\cdot(\lambda^*(A)+\varepsilon)\,.\end{aligned}$$

Beweis von (4.8) : Seien $W \in \mathcal{K}$ und $x,y \in W$, $x \leq y$. Da W zusammenhängend ist, gilt $[\,x,y\,] \subset W$. Wegen

$$W \;=\; \bigcup_{v\in A\cap W} E_v \tag{4.9}$$

ist also $\{\ E_v \mid v \in A \cap W\ \}$ eine offene Überdeckung des Kompaktums $[\,x, y\,]$. Man findet folglich eine endliche Menge $P \subset A \cap W$ so, daß

$$[\,x, y\,] \ \subset \ \bigcup_{v \in P} E_v \tag{4.10}$$

gilt. Indem man P gegebenenfalls verkleinert, erreicht man, daß zusätzlich zu (4.10) die beiden folgenden Aussagen gelten:

$$\forall\, v \in P \quad : \quad E_v \cap [\,x, y\,] \ \neq \ \emptyset\,, \tag{4.11}$$

$$\forall\, v \in P\ \forall\, w \in P \setminus \{v\} \quad : \quad E_v \ \not\subset \ E_w\,. \tag{4.12}$$

Setzt man $n := |\,P\,|$, so kann man die Elemente von P aufsteigend mit $x_1, x_2, ..., x_n$ durchnumerieren, d.h. es ist $P = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ und $x_j < x_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}_{<n}$. Ferner setzt man $E_j := E_{x_j}$ und $\delta_j := \delta_{x_j}$ für alle $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$.
Behauptung: Es gelten die folgenden Aussagen:

$$x \ \in \ E_1\,, \tag{4.13}$$

$$y \ \in \ E_n\,, \tag{4.14}$$

$$\forall\, j \in \mathbb{N}_{<n} \ : \ E_j \cap E_{j+1} \ \neq \ \emptyset\,. \tag{4.15}$$

Beweis: (4.13) : Angenommen $x \notin E_1$. Wegen (4.11) folgt daraus zunächst $x \leq x_1 - \delta_1 < x_1$. Aufgrund der Überdeckungseigenschaft findet man $j \in \mathbb{N}_{\leq n} \setminus \{1\}$ so, daß $x \in E_j$. Wegen $x < x_1 < x_j$ liefert Lemma 4.2 (i) daher $E_1 \subset E_j$ im Widerspruch zu (4.12).
(4.14) : Angenommen $y \notin E_n$. Wegen (4.11) folgt daraus zunächst $y \geq x_n + \delta_n > x_n$. Aufgrund der Überdeckungseigenschaft findet man $j \in \mathbb{N}_{<n}$ so, daß $y \in E_j$. Wegen $x_j < x_n < y$ liefert Lemma 4.2 (ii) daher $E_n \subset E_j$ im Widerspruch zu (4.12).
(4.15) : Sei $j \in \mathbb{N}_{<n}$. Angenommen $E_j \cap E_{j+1} = \emptyset$. Wegen $x_j < x_{j+1}$ findet man daher $z \in [\,x_j, x_{j+1}\,]$ so, daß gilt

$$x_j \ < \ x_j + \delta_j \ \leq \ z \ \leq \ x_{j+1} - \delta_{j+1} \ < \ x_{j+1}\,.$$

Aufgrund der Überdeckungseigenschaft findet man ferner $k \in \mathbb{N}_{\leq n} \setminus \{j, j+1\}$ so, daß $z \in E_k$. Im Fall $k > j+1$ gilt dann $z < x_{j+1} < x_k$ und $z \in E_k \setminus E_{j+1}$. Daher liefert Lemma 4.2 (i) $E_{j+1} \subset E_k$ im Widerspruch zu (4.12). Im Fall $k < j$ gilt $x_k < x_j < z$ und $z \in E_k \setminus E_j$. Daher liefert Lemma 4.2 (ii) $E_j \subset E_k$ im Widerspruch zu (4.12). $\diamond$

Wegen (4.15) findet man nun zu jedem $j \in \mathbb{N}_{<n}$ ein $p_j \in E_j \cap E_{j+1} \cap [\,x_j, x_{j+1}\,]$.

Daher gilt unter Verwendung von (4.3):

$$\begin{aligned} &\| f(x) - f(y) \| &(4.16)\\ &\leq \| f(x) - f(x_1) \| + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\| f(x_j) - f(p_j) \| + \| f(p_j) - f(x_{j+1}) \| \right) \\ &\quad + \| f(x_n) - f(y) \| \\ &\leq (K+\varepsilon) \cdot \left(|x - x_1| + \sum_{j=1}^{n-1} ((p_j - x_j) + (x_{j+1} - p_j)) + |x_n - y| \right) \\ &\leq (K+\varepsilon) \cdot \left(\delta_1 + (x_n - x_1) + \delta_n \right) = (K+\varepsilon) \cdot \left((x_n + \delta_n) - (x_1 - \delta_1) \right) . \end{aligned}$$

Weil die Punkte x_1 und x_n in P und damit auch in $A \cap W$ liegen, ist nach (4.9) das Intervall $]\, x_1 - \delta_1, x_n + \delta_n \,[$ in der zusammenhängenden Menge W enthalten. Es folgt also aus (4.16):

$$\| f(x) - f(y) \| \leq (K+\varepsilon) \cdot (\sup W - \inf W) = (K+\varepsilon) \cdot \lambda(W) .$$

Weil x, y beliebig aus W fixiert waren, liefert dies schließlich die zu zeigende Ungleichung (4.8). ■

4.2 Differenzierbarkeit und Nullmengentreue

Satz 4.4 *f ist auf $\mathcal{D}_f$ nullmengentreu. Insbesondere ist f bereits dann nullmengentreu, wenn f überall differenzierbar ist.*

Beweis. Sei $A \subset \mathcal{D}_f$ eine λ-Nullmenge. Für alle $k \in \mathbb{N}$ setzt man

$$A_k := \left\{ x \in A \;\middle|\; \left\| f'(x) \right\| \leq k \right\} .$$

Nach dem Mittelwert-Lemma gilt dann: $\lambda_\infty^X(f(A_k)) \leq 2k \cdot \lambda(A_k) = 0$. Dies impliziert:

$$\lambda_\infty^X(f(A)) = \lambda_\infty^X\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(A_k) \right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_\infty^X(f(A_k)) = 0 . \quad ■$$

Als unmittelbare Kombination von Satz 4.4 und Bemerkung 3.3 erhält man das

Korollar 4.5 *Ist $I \setminus \mathcal{D}_f$ abzählbar, so ist f nullmengentreu.* ■

Ist $I \setminus \mathcal{D}_f$ eine (überabzählbare) λ-Nullmenge, so ist f im allgemeinen nicht nullmengentreu, wie man am Beispiel der Cantor-Funktion sieht. Wann genau die Bedingung $\lambda(I \setminus \mathcal{D}_f) = 0$ die Nullmengentreue von f impliziert, zeigt das folgende Korollar:

Korollar 4.6 *f sei λ-fast überall differenzierbar. Genau dann ist f nullmengentreu, wenn $f(I \setminus \mathcal{D}_f)$ eine λ_∞^X-Nullmenge ist.*

Beweis. Ist f nullmengentreu, so gilt $\lambda_\infty^X(f(I \setminus \mathcal{D}_f)) = 0$ wegen $\lambda(I \setminus \mathcal{D}_f) = 0$. Ist andererseits $\lambda_\infty^X(f(I \setminus \mathcal{D}_f)) = 0$, so gilt wegen der Nullmengentreue von f auf $\mathcal{D}_f$ für jede λ-Nullmenge $A \subset I$:

$$\lambda_\infty^X(f(A)) \;\leq\; \lambda_\infty^X(f(A \cap \mathcal{D}_f)) + \lambda_\infty^X(f(A \setminus \mathcal{D}_f)) \;\leq\; 0 + \lambda_\infty^X(f(I \setminus \mathcal{D}_f)) \;=\; 0\,,$$

d.h. f ist nullmengentreu. ■

4.3 Eine weitere Anwendung des Mittelwert-Lemmas

Zum Beweis des folgenden Satzes wird neben dem Mittelwert-Lemma auch der keineswegs triviale Satz 2.8 verwendet.

Satz 4.7 *f sei stetig, nullmengentreu, und es gelte $f'(x) = 0$ für λ-fast alle $x \in I$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Man setzt $A := \{\; x \in \mathcal{D}_f \;\mid\; f'(x) = 0 \;\}$. Aus dem Mittelwert-Lemma folgt dann $\lambda_\infty^X(f(A)) = 0$. Nach Voraussetzung ist ferner $I \setminus A$ eine λ-Nullmenge; aufgrund der Nullmengentreue von f erhält man also $\lambda_\infty^X(f(I \setminus A)) = 0$. Kombiniert man diese beiden Ergebnisse, so folgt:

$$\lambda_\infty^X(f(I)) \;\leq\; \lambda_\infty^X(f(A)) + \lambda_\infty^X(f(I \setminus A)) \;=\; 0\,.$$

Weil f stetig ist, gilt nach Satz 2.8 schließlich: $\mathrm{diam}(f(I)) \leq \lambda_\infty^X(f(I)) = 0$. Also ist f konstant. ■

Korollar 4.8 *f sei absolutstetig, und es gelte $f'(x) = 0$ für λ-fast alle $x \in I$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Dies ist eine Kombination von Satz 4.7, Bemerkung 1.11 (ii) und Satz 3.6. ■

Korollar 4.9 *f sei stetig, nicht-konstant, und es gelte $f'(x) = 0$ für λ-fast alle $x \in I$. Dann ist $\lambda_\infty^X(f(I \setminus \mathcal{D}_f)) > 0$.*

Beweis. Gemäß der Kontraposition von Satz 4.7 ist f nicht nullmengentreu. Korollar 4.6 liefert daher die Behauptung. ■

Im Fall $X = \mathbb{R}$ ist die Aussage des eben formulierten Korollars genau das Ergebnis der Arbeit *Concerning a Result of Zahorski on the Differentiability of Functions* von A.Bravo ([BRA]). Illustriert wird dieses Ergebnis wiederum durch die Cantor-Funktion.

4.4 Integral-Varianten des Mittelwert-Lemmas

Lemma 4.10 *f_0' sei integrierbar. Dann gilt für jede Lebesgue-meßbare Menge $A \subset \mathcal{D}_f$:*

$$\lambda_\infty^X(f(A)) \;\leq\; 2 \int_A |\, f_0' \,|\; d\lambda\,.$$

Beweis. Weil f_0' integrierbar ist, trifft dies auch auf $|f_0'|$ zu. Sei $A \subset \mathcal{D}_f$ eine Lebesgue-meßbare Menge. Sei $n \in \mathbb{N}$. Es genügt zu zeigen:

$$\lambda_\infty^X(f(A)) \;\leq\; 2 \int_A |\, f_0' \,|\; d\lambda \,+\, 2^{-n} \cdot \lambda(A)\,. \tag{4.17}$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist wegen der Meßbarkeit von $|\, f_0' \,|$ die Menge

$$\begin{aligned} E_k \;&:=\; \left\{\, x \in A \;\middle|\; \frac{k-1}{2^{n+1}} \leq \|\, f_0'(x) \,\| < \frac{k}{2^{n+1}} \,\right\} \\ &=\; |\, f_0' \,|^{-1} \left(\left[\, \frac{k-1}{2^{n+1}}\,,\, \frac{k}{2^{n+1}} \,\right[\right) \cap A \end{aligned}$$

Lebesgue-meßbar. Offenbar ist A disjunkte Vereinigung der Mengen E_k, $k \in \mathbb{N}$. Ferner gilt nach dem Mittelwert-Lemma für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_\infty^X(f(E_k)) \;\leq\; \frac{2\,k}{2^{n+1}} \cdot \lambda(E_k) \;=\; k\,2^{-n} \cdot \lambda(E_k)\,.$$

Daher folgt:

$$\begin{aligned} \lambda_\infty^X(f(A)) \;&=\; \lambda_\infty^X\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(E_k) \right) \;\leq\; \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_\infty^X(f(E_k)) \;\leq\; \sum_{k\in\mathbb{N}} k\,2^{-n} \cdot \lambda(E_k) \\ &=\; 2 \sum_{k\in\mathbb{N}} (k-1)\,2^{-(n+1)} \cdot \lambda(E_k) \,+\, 2^{-n} \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(E_k) \\ &\leq\; 2 \sum_{k\in\mathbb{N}} \inf\left\{\; \|\, f_0'(x) \,\| \;\middle|\; x \in E_k \,\right\} \cdot \lambda(E_k) \,+\, 2^{-n} \cdot \lambda\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \right) \\ &\leq\; 2 \int_A |\, f_0' \,|\; d\lambda \,+\, 2^{-n}\, \lambda(A)\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lemma 4.11 *f sei nullmengentreu und erfülle die Bedingung (DIFF-INT). Dann gilt für jede Lebesgue-meßbare Menge $A \subset I$:*

$$\lambda_\infty^X(f(A)) \;\leq\; 2 \int_A |\, f_0' \,|\; d\lambda\,.$$

Beweis. Sei $A \subset I$ eine Lebesgue-meßbare Menge. Wegen $\lambda(I \setminus \mathcal{D}_f) = 0$ ist $A \setminus \mathcal{D}_f$ eine λ-Nullmenge. Die Nullmengentreue von f impliziert daher $\lambda_\infty^X(f(A \setminus \mathcal{D}_f)) = 0$. Kombiniert man dies mit Lemma 4.10, so erhält man:

$$\begin{aligned} \lambda_\infty^X(f(A)) &\leq \lambda_\infty^X(f(A \cap \mathcal{D}_f)) + \lambda_\infty^X(f(A \setminus \mathcal{D}_f)) = \lambda_\infty^X(f(A \cap \mathcal{D}_f)) \\ &\leq 2 \int_{A \cap \mathcal{D}_f} |\, f_0' \,| \; d\lambda \leq 2 \int_A |\, f_0' \,| \; d\lambda \,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Satz 4.12 *f sei stetig, nullmengentreu und erfülle die Bedingung (DIFF-INT). Dann gilt für jedes Teil-Intervall $J \subset I$:*

$$\operatorname{diam}(f(J)) \leq 2 \int_J |\, f_0' \,| \; d\lambda \,.$$

Beweis. Dies ist eine unmittelbare Kombination von Lemma 4.11 und Satz 2.8. $\blacksquare$

4.5 Die verschärfte Version des Mittelwert-Lemmas

Die Aussage des folgenden Lemma 4.3' ist in zweierlei Hinsicht eine Verschärfung des Mittelwert-Lemmas: Zum einen erweist sich der Faktor 2 in der Abschätzung des Mittelwert-Lemmas als obsolet, zum anderen gelingt es, das relativ schwache äußere Maß λ_∞^X durch das sehr viel stärkere äußere Längenmaß λ_0^X zu ersetzen. Das entscheidende Hilfsmittel ist dabei der Überdeckungssatz von Vitali, den wir der Vollständigkeit halber an dieser Stelle zitieren.

Definition 4.13 *Sei $A \subset \mathbb{R}$. Eine nicht-leere Menge $\mathcal{V}$ reeller Intervalle heißt* **Vitali-Überdeckung von** *A, wenn gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, x \in A \;\; \exists\, I \in \mathcal{V} \;:\; x \in I \;\wedge\; \lambda(I) \in \,]\,0, \varepsilon\,[\;.$$

Beispiel 4.14 *Sei $A \subset \mathbb{R}$. Sei $(\delta_x)_{x \in A}$ eine Familie positiver Zahlen. Dann ist die Menge*

$$\left\{ \;\left]\, x - \frac{\delta_x}{n} \,,\, x + \frac{\delta_x}{n} \,\right[\;\middle|\; x \in A,\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

eine Vitali-Überdeckung von A. $\blacksquare$

Satz 4.15 (Überdeckungs-Satz von Vitali) *Sei $A \subset \mathbb{R}$ so, daß $\lambda^*(A) < \infty$. Sei $\mathcal{V}$ eine Vitali-Überdeckung von A. Dann gibt es eine abzählbare disjunkte Teilmenge $\mathcal{W}$ von $\mathcal{V}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge $\mathcal{W}_\varepsilon \subset \mathcal{W}$ derart, daß $\lambda^*\Big(A \setminus \bigcup \mathcal{W}_\varepsilon\Big) < \varepsilon$.

(ii) $\lambda^*\Big(A\setminus\bigcup\mathcal{W}\Big) \;=\; 0\,.$

Beweis. [BEN] Theorem 4.7, S. 132ff. $\diamond$

Lemma 4.3' *Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.3 gilt:* $\lambda_0^X(f(A)) \le K\cdot\lambda^*(A)$.

Beweis. O.B.d.A. kann man $A\subset\,]\,a,b\,[$ annehmen. Zum Beweis der Behauptung genügt es offenbar, die Aussage

$$\forall\, d\in\,]\,0,\infty\,[\;\;\forall\,\varepsilon>0\;:\;\lambda_d^X(f(A)) \;\le\; (K+\varepsilon)\cdot(\lambda^*(A)+\varepsilon)$$

zu verifizieren; es seien also $d\in\,]\,0,\infty\,[$ und $\varepsilon>0$. Damit setzt man

$$c \;:=\; \frac{d}{2\,(K+\varepsilon)}\;.$$

Nach Lemma 4.1 findet man eine offene Obermenge $U\subset\,]\,a,b\,[$ von A und eine Familie $(\delta_x)_{x\in A}$ positiver Zahlen so, daß (4.1) – (4.3) gelten; o.B.d.A. kann man dabei

$$\sup_{x\in A}\delta_x \;<\; c \tag{4.18}$$

annehmen. Gemäß Beispiel 4.14 ist

$$\mathcal{V} \;:=\; \left\{\;\left]\,x-\frac{\delta_x}{n}\,,\,x+\frac{\delta_x}{n}\,\right[\;\middle|\;x\in A,\;n\in\mathbb{N}\right\}$$

eine Vitali-Überdeckung von A. Nach dem Überdeckungs-Satz von Vitali findet man daher eine abzählbare disjunkte Teilmenge $\mathcal{W}$ von $\mathcal{V}$ so, daß

$$\lambda^*\Big(A\setminus\bigcup\mathcal{W}\Big) \;=\; 0\,.$$

Der Satz 4.4 und die Nullmengen-Äquivalenz der äußeren d-Maße (Satz 2.4) implizieren deshalb:

$$\lambda_d^X\Big(f\Big(A\setminus\bigcup\mathcal{W}\Big)\Big) \;=\; 0\,. \tag{4.19}$$

Für alle $W\in\mathcal{W}$ findet man nun nach der Definition von $\mathcal{V}$ ein $x_W\in A$ und $\delta_W\in\,]\,0,\delta_{x_W}\,]$ so, daß $W=\,]\,x_W-\delta_W, x_W+\delta_W\,[$. Aus (4.3) ergibt sich dann zunächst

$$f(W) \;\subset\; \mathrm{K}\,(f(x_W),(K+\varepsilon)\,\delta_W)$$

für alle $W\in\mathcal{W}$. Daraus folgt mit (4.19):

$$\begin{aligned}
\lambda_d^X(f(A)) \;&\le\; \lambda_d^X\Big(f\Big(A\cap\bigcup\mathcal{W}\Big)\Big) + \lambda_d^X\Big(f\Big(A\setminus\bigcup\mathcal{W}\Big)\Big) \\
&=\; \lambda_d^X\Big(f\Big(A\cap\bigcup\mathcal{W}\Big)\Big) \\
&\le\; \lambda_d^X\Big(f\Big(\bigcup\mathcal{W}\Big)\Big) \;=\; \lambda_d^X\Bigg(\bigcup_{W\in\mathcal{W}} f(W)\Bigg) \\
&\le\; \sum_{W\in\mathcal{W}}\lambda_d^X(f(W)) \;\le\; \sum_{W\in\mathcal{W}}\lambda_d^X(\,\mathrm{K}\,(f(x_W),(K+\varepsilon)\,\delta_W)\,)\,.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Für alle $W \in \mathcal{W}$ gilt nun wegen der Wahl von δ_W unter Beachtung von (4.18):

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(\mathrm{K}\,(f(x_W), (K+\varepsilon)\,\delta_W)) &= 2\,(K+\varepsilon)\,\delta_W \;\le\; 2\,(K+\varepsilon)\,\delta_{x_W} \\ &< 2\,(K+\varepsilon)\,c \;=\; d\,.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich mit Satz 2.7:

$$\lambda_d^X(\,\mathrm{K}\,(f(x_W), (K+\varepsilon)\,\delta_W)\,) \;\le\; 2\,(K+\varepsilon)\,\delta_W\,.$$

Kombiniert man dies mit (4.20), so folgt:

$$\lambda_d^X(f(A)) \;\le\; \sum_{W\in\mathcal{W}} 2\,(K+\varepsilon)\,\delta_W \;=\; (K+\varepsilon)\sum_{W\in\mathcal{W}} \lambda(W)\,.$$

Weil $\mathcal{W}$ ein disjunktes Mengensystem ist, impliziert die σ-Additivität von λ:

$$\lambda_d^X(f(A)) \;\le\; (K+\varepsilon)\,\lambda\Big(\bigcup\mathcal{W}\Big)\;.\;\le\; (K+\varepsilon)\,\lambda\Big(\bigcup\mathcal{V}\Big)\,.$$

Wegen (4.2) und (4.1) gilt ferner:

$$\lambda\Big(\bigcup\mathcal{V}\Big) \;\le\; \lambda\left(\bigcup_{x\in A}\,]\,x-\delta_x, x+\delta_x\,[\right) \;\le\; \lambda(U) \;\le\; \lambda^*(A)+\varepsilon\,.$$

Kombiniert man die beiden letzten Abschätzungen, so erhält man die zu zeigende Ungleichung

$$\lambda_d^X(f(A)) \;\le\; (K+\varepsilon)\cdot(\lambda^*(A)+\varepsilon)\,. \quad \blacksquare$$

Ersetzt man in den Beweisen von Lemma 4.10, Lemma 4.11 sowie Satz 4.12 das äußere Maß λ_∞^X durch das äußere Längenmaß λ_0^X und die Abschätzung des Mittelwert-Lemmas 4.3 durch die des verschärften Mittelwert-Lemmas 4.3', so erhält man die folgenden Aussagen:

Lemma 4.10' *Unter der Voraussetzung von Lemma 4.10 gilt für jede Lebesgue-meßbare Menge $A \subset \mathcal{D}_f$:*

$$\lambda_0^X(f(A)) \;\le\; \int_A |\,f_0'\,|\;d\lambda\,. \quad \blacksquare$$

Lemma 4.11' *Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.11 gilt für jede Lebesgue-meßbare Menge $A \subset I$:*

$$\lambda_0^X(f(A)) \;\le\; \int_A |\,f_0'\,|\;d\lambda\,. \quad \blacksquare$$

Satz 4.12' *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.12 gilt für jedes Teil-Intervall $J \subset I$:*

$$\operatorname{diam}(f(J)) \;\le\; \int_J |\,f_0'\,|\;d\lambda\,. \quad \blacksquare$$

5 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

5.1 Die verallgemeinerte Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

Satz 5.1 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) f ist unbestimmtes Integral.

(ii) f ist absolutstetig und erfüllt die Bedingung (DIFF-INT).

(iii) f ist stetig, nullmengentreu und erfüllt die Bedingung (DIFF-INT).

Insbesondere ist in diesem Fall f_0' eine Integrandenfunktion für f.

Beweis. (i)⇒(ii) : Folgt unmittelbar aus den Sätzen 1.13 und 1.7.
(ii)⇒(i) : f sei absolutstetig und erfülle die Bedingung (DIFF-INT). Dann ist die Abbildung

$$g \ : \ I \to X \ , \ x \mapsto \int_a^x f_0'(t)\,dt \ + \ f(a) \ ,$$

unbestimmtes Integral. Aus der eben bewiesenen Implikation (i)⇒(ii) folgt, daß auch g absolutstetig ist und die Bedingung (DIFF-INT) erfüllt. Daher ist auch die Abbildung $h := f - g$ absolutstetig und erfüllt die Bedingung (DIFF-INT). Weil nach den Sätzen 1.7 und 1.3 die Ableitung von g λ-fast überall mit f_0' übereinstimmt, gilt für λ-fast alle $x \in I$:

$$h'(x) \ = \ f_0'(x) - g'(x) \ = \ f_0'(x) - f_0'(x) \ = \ 0 \ .$$

Aus Korollar 4.8 folgt $h \equiv const$, wegen $h(a) = 0$ also $h \equiv 0$. Dies bedeutet $f = g$, d.h. f ist unbestimmtes Integral, und f_0' ist eine Integrandenfunktion für f.
(ii)⇒(iii) : Diese Implikation folgt unmittelbar aus Bemerkung 1.11 (i) und Satz 3.6.
(iii)⇒(ii) : f sei stetig, nullmengentreu und erfülle die Bedingung (DIFF-INT). Sei

$\varepsilon > 0$. Da f_0' integrierbar ist, findet man nach Lemma 1.12 ein $\delta > 0$ derart, daß für jede Lebesgue-meßbare Menge $A \subset I$ gilt:

$$\lambda(A) < \delta \implies \int_A |\, f_0' \,| \; d\lambda < \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Sei $\mathcal{S}$ eine endliche disjunkte Teilmenge von $\mathcal{T}$ so, daß $\sum_{W \in \mathcal{S}} \lambda(W) < \delta$. Offenbar ist $A := \bigcup \mathcal{S}$ eine Borelsche, mithin eine Lebesgue-meßbare Teilmenge von I, und es gilt: $\lambda(A) = \sum_{W \in \mathcal{S}} \lambda(W) < \delta$. Dies impliziert nach Wahl von δ:

$$\int_A |\, f_0' \,| \; d\lambda < \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Satz 4.12 impliziert daher:

$$\begin{aligned} \sum_{W \in \mathcal{S}} \| \, f(\sup W) - f(\inf W) \, \| \quad &\leq \quad \sum_{W \in \mathcal{S}} \operatorname{diam}(f(W)) \; \leq \; \sum_{W \in \mathcal{S}} 2 \int_W |\, f_0' \,| \; d\lambda \\ &= \quad \sum_{W \in \mathcal{S}} 2 \int_W |\, f_0' \,| \; d\lambda \; = \; 2 \int_A |\, f_0' \,| \; d\lambda < \varepsilon \, , \end{aligned}$$

d.h. f ist absolutstetig. ■

Man beachte, daß beim Beweis der Implikation (ii)⇒(i) wesentlich auf das Korollar 4.8 (und damit auf das Mittelwert-Lemma in der originalen Version sowie auf den nicht-trivialen Satz 2.8) zurückgegriffen wurde, während beim Beweis der Implikation (iii)⇒(ii) der Satz 4.12 (und damit die Integral-Variante des Mittelwert-Lemmas) die zentrale Rolle spielte. Ferner beachte man, daß beim Beweis der beiden nicht-trivialen Implikationen (ii)⇒(i) und (iii)⇒(ii) jeweils *beide* Teile der Bedingung (DIFF-INT) (d.h. die Differenzierbarkeit λ-fast überall sowie die Integrierbarkeit der Ableitung) eingingen. In der Tat ist es jedoch so, daß die Ableitung einer absolutstetigen, λ-fast überall differenzierbaren Abbildung stets integrierbar ist; aus diesem Grund kann die Aussage (ii) des Hauptsatzes durch die schwächere Aussage

(ii)' f ist absolutstetig und λ-fast überall differenzierbar.

ersetzt werden. Zum Beweis der soeben notierten Tatsache verweisen wir auf Diestel/Uhl, Theorem IV.3.2, S. 107; dieser Beweis beruht auf einigen wichtigen Eigenschaften des sogenannten *Pettis-Integrals.*

5.2 Folgerungen aus dem Hauptsatz für differenzierbare Abbildungen

Korollar 5.2 *f sei stetig, und $I \setminus \mathcal{D}_f$ sei abzählbar. Genau dann ist f unbestimmtes Integral, wenn f_0' integrierbar ist. In diesem Fall ist f_0' eine Integrandenfunktion für f.*

Beweis. Nach Satz 4.4 ist f nullmengentreu. Daher folgt die Behauptung aus der Äquivalenz (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) von Satz 5.1. ■

Ein Spezialfall dieses Korollars ist das folgende

Korollar 5.3 *f sei überall differenzierbar. Genau dann ist f unbestimmtes Integral, wenn f' integrierbar ist. In diesem Fall ist f' eine Integrandenfunktion für f.* ■

5.3 Die Hauptsatz-Version für reellwertige Abbildungen

Im Spezialfall $X = \mathbb{R}$ vereinfacht sich die Formulierung des Hauptsatzes aufgrund der Tatsache, daß die reellwertigen Funktionen von beschränkter Variation (und damit insbesondere auch die reellwertigen absolutstetigen Funktionen) automatisch die Bedingung (DIFF-INT) erfüllen. Entscheidendens Hilfsmittel zum Beweis dieses klassischen Resultates ist neben dem Differentiations-Satz von Lebesgue der sogenannte *Jordansche Zerlegungs-Satz*:

Satz 5.4 (Jordanscher Zerlegungs-Satz) *Eine reellwertige Funktion ist genau dann von beschränkter Variation, wenn sie Differenz zweier monoton wachsender Funktionen ist.*

Beweis. Siehe z.B. [BEN] Theorem 4.1, S. 118. ◇

Kombiniert man dies mit dem Differentiations-Satz von Lebesgue, so ist der oben notierte Sachverhalt bewiesen:

Satz 5.5 *Jede reellwertige Funktion von beschränkter Variation erfüllt bereits die Bedingung (DIFF-INT).* ■

Gemäß Satz 1.16 impliziert die Absolutstetigkeit einer Abbildung stets (d.h. nicht nur für reellwertige Funktionen) die Beschränktheit der Variation. Kombiniert man dies mit Satz 5.5 und der verallgemeinerten Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, so erhält man schließlich die folgende reellwertige Version des Hauptsatzes:

Satz 5.1' *Ist $X = \mathbb{R}$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) f ist unbestimmtes Integral.

(ii) f ist absolutstetig.

(iii) f ist stetig, nullmengentreu und von beschränkter Variation.

Insbesondere ist in diesem Fall f_0' eine Integrandenfunktion für f. ∎

Da monotone Funktionen nach dem Jordanschen Zerlegungs-Satz stets von beschränkter Variation sind, läßt sich für diesen Spezialfall die folgende Variante des Hauptsatzes formulieren:

Satz 5.1” *$g : I \to \mathbb{R}$ sei monoton. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) g ist unbestimmtes Integral.

(ii) g ist absolutstetig.

(iii) g ist stetig und nullmengentreu.

Insbesondere ist in diesem Fall g_0' eine Integrandenfunktion für g. ∎

Eine direkte Beweis-Möglichkeit der einzigen nicht-trivialen Implikation (iii)⇒(i) dieser Version beruht neben dem Differentiations-Satz von Lebesgue im wesentlichen auf der Aussage von Satz 4.12’:

Beweis von Satz 5.1” (iii)⇒(i) : g sei stetig und nullmengentreu. O.B.d.A. sei g monoton wachsend. Nach dem Differentiations-Satz von Lebesgue erfüllt g die Bedingung (DIFF-INT), und es gilt für alle $x \in I$:

$$\int_a^x g_0'(t)\,dt \;\le\; g(x) - g(a)\ .$$

Kombiniert man dies mit der Aussage von Satz 4.12’, so folgt wegen der für alle $x \in I$ gültigen Ungleichung $g(x) - g(a) \le \operatorname{diam}(g(\,[a,x]\,))$:

$$\int_a^x g_0'(t)\,dt \;=\; g(x) - g(a)\ .$$

Also ist g unbestimmtes Integral mit Integrandenfunktion g_0'. ∎

Teil 2
λ-absolutstetige Borel-Maße und Borel-Maße mit Lebesgue-Dichten

Hauptgegenstand dieses zweiten Teils der vorliegenden Arbeit sind die maßtheoretischen Analoga der absolutstetigen Abbildungen und der unbestimmten Integrale, also die λ-absolutstetigen Borel-Maße und die Borel-Maße mit Lebesgue-Dichten. Ziel ist es dabei, die in der Einleitung formulierten Sätze 6 und 8 zu beweisen, um auf diese Weise die an derselben Stelle notierte Anwendung des verallgemeinerten Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zu etablieren. Die beiden Begriffe *μ-absolutstetiges Maß* und *μ-Integralmaß (Maß mit μ-Dichte)* lassen sich im Rahmen des beliebig fixierten endlichen Maßraumes (Ω, Σ, μ) definieren; die spezielle Struktur des endlichen Maßraumes $(I, \mathfrak{B}, \lambda)$ spielt für diese Begriffsbildung keine Rolle. In den ersten fünf Abschnitten dieses Teils, die sich inhaltlich weitgehend an den entsprechenden Paragraphen bei Diestel/Uhl, Dinculeanu und Dunford/Schwartz orientieren, wird das entsprechende Programm durchgeführt. Die so gewonnenen allgemeinen Aussagen werden anschließend auf den Spezialfall $(\Omega, \Sigma, \mu) = (I, \lambda, \mathfrak{B})$ übertragen.

Im ersten Abschnitt dieses Teils findet man der Vollständigkeit halber eine kurze Zusammenstellung der im weiteren Verlauf verwendeten Grundbegriffe der Theorie Banachraum-wertiger Maße. Um die Eigenschaft der μ-Absolutstetigkeit von Inhalten formulieren zu können, muß man als Hilfs-Begriff zunächst die *Variation* von Inhalten etablieren; dies geschieht in Abschnitt 7. Im folgenden Abschnitt werden neben der *μ-Absolutstetigkeit* von Inhalten auch die beiden damit verwandten Eigenschaften der *μ-Nullmengen-Stetigkeit* und der *μ-Stetigkeit* von Inhalten diskutiert. Dabei ist die μ-Nullmengen-Stetigkeit ein in dieser Arbeit *ad hoc* eingeführter Begriff, findet sich also in der einschlägigen Literatur nicht. Die beiden anderen Stetigkeits-Begriffe werden in der Literatur meist synonym verwendet, wenn auch die inhaltliche Bedeutung nicht bei allen Autoren dieselbe ist. Wir werden hier diese drei Begriffe bzw. die damit verbundenen inhaltlichen Sachverhalte streng unterscheiden.

Für jede μ-integrierbare Abbildung $g : \Omega \to X$ wird bekanntermaßen durch $A \mapsto \int_A g \, d\mu$ eine additive Mengenfunktion, also ein Inhalt auf $\mathfrak{D}$ mit Werten in X definiert. Kern von Abschnitt 9 ist der Beweis der Tatsache, daß diese Inhalte μ-absolutstetig und

σ-additiv, also μ-absolutstetige Maße sind. Diese Maße nennt man *μ-Integralmaße* (*auf* $\mathfrak{D}$) oder auch *Maße mit μ-Dichten*; im Spezialfall $(\Omega, \Sigma, \mu) = (I, \lambda, \mathfrak{B})$ spricht man auch von *Borel-Maßen mit Lebesgue-Dichten*.

Alle bis zu diesem Zeitpunkt untersuchten Inhalte bzw. Maße waren auf der Teil-Algebra $\mathfrak{D}$ von Σ definiert. Die im Abschnitt 10 behandelten Fragen betreffen zum einen die Vererbung von Eigenschaften, insbesondere von Stetigkeits-Eigenschaften, eines Inhaltes bei Restriktion auf eine Teil-Algebra $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{D}$; dabei ergibt sich auf nahezu triviale Weise, daß sich sowohl die Beschränktheit der Variation als auch alle drei oben genannten Stetigkeits-Eigenschaften in der gewünschten Weise vererben. Zum anderen wird die Frage beantwortet, unter welchen Voraussetzungen sich ein Inhalt auf $\mathfrak{D}$ zu einem Inhalt auf der σ-Algebra Σ fortsetzen läßt, ob gegebenenfalls eine solche Fortsetzung eindeutig ist und welche Eigenschaften sich vom Inhalt auf seine Fortsetzung übertragen. Zur Erreichung dieses Zweckes wird es sich als vorteilhaft erweisen, die σ-Algebra Σ mit einer geeigneten Halbmetrik auszustatten, um dann den Fortsetzungs-Satz für gleichmäßig stetige Abbildungen auf halbmetrischen Räumen mit Werten in einem vollständigen metrischen Raum anwenden zu können.

Die bisherigen Ergebnisse bezüglich der μ-absolutstetigen Inhalte bzw. der μ-Integralmaße werden in Abschnitt 11 auf den Spezialfall $\Omega = I$, $\mu = \lambda$, $\Sigma = \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D} \in \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ übertragen. Aufgrund der speziellen Struktur der σ-Algebra $\mathfrak{B}$ bzw. der sie erzeugenden Algebra $\mathfrak{A}$ läßt sich in diesem Zusammenhang die Tatsache bewiesen, daß λ-(absolut)stetige Inhalte auf $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ stets σ-additiv, mithin also Maße sind; o.B.d.A. werden wir daher im folgenden stets von λ-(absolut)stetigen Maßen auf $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ sprechen. Für das weitere ebenfalls sehr wichtig ist die Tatsache, daß die λ-stetigen Maße auf $\mathfrak{B}$ (und damit auch die λ-absolutstetigen Maße sowie die λ-Integralmaße auf $\mathfrak{B}$) bereits dann vollständig bestimmt sind, wenn man ihr Verhalten auf der Menge $\{\,[\,a, x\,]\,|x \in I\}$, d.h. auf der Menge der Teil-Intervalle von I mit linkem Randpunkt a kennt. Im letzten Abschnitt wird zunächst der bereits in der Einleitung definierte Begriff der Punkt-Abbildung $\Pi(F)$ eines Borel-Maßes F genauer studiert. Insbesondere wird für die durch $F \mapsto \Pi(F)$ auf der Menge der λ-Nullmengen-stetigen Inhalte definierte Abbildung die Umkehr-Abbildung etabliert; diese Umkehrung erreicht man durch Bilden des sogenannten *Inkrement-Inhalts*. Die Beweise der oben genannten Sätze 6 und 8 der Einleitung sowie eine ausführliche Diskussion der entsprechenden Ergebnisse und Anwendungen beenden diesen Teil.

6 Einige Grundbegriffe der Maßtheorie

6.1 Mengensysteme und Mengenfunktionen

Definition 6.1 *Ein unter Vereinigungsbildung (bzw. abzählbarer Vereinigungsbildung bzw. Durchschnittbildung bzw. abzählbarer Durchschnittbildung bzw. Differenzbildung bzw. Komplementbildung) abgeschlossenes Mengensystem heißt* **vereinigungsstabil** *(bzw.* **σ-vereinigungsstabil** *bzw.* **durchschnittstabil** *bzw.* **σ-durchschnittstabil** *bzw.* **differenzstabil** *bzw.* **komplementstabil***). Ein vereinigungs- und differenzstabiles Mengensystem, das die leere Menge enthält, heißt* **Ring**. *Ein komplementstabiler Ring heißt* **Algebra**. *Eine σ-vereinigungsstabile Algebra heißt* **σ-Algebra**.

Bemerkung 6.2 *Ringe sind durchschnittstabil. σ-Algebren sind σ-durchschnittstabil.*
■

Ringe bzw. Algebren werden häufig auch als Mengen-Ringe bzw. Mengen-Algebren bezeichnet. Da in der vorliegenden Arbeit Verwechslungen mit gleichlautenden algebraischen Objekten ausgeschlossen sind, werden wir der Kürze halber die Begriffe Ring und Algebra ohne das erläuternde Präfix „Mengen-“ verwenden.

Definition 6.3 *Eine* **Mengenfunktion** *ist eine Abbildung auf einem Mengensystem. Eine Mengenfunktion mit Werten in $[\,0,\infty\,]$ heißt* **positive Mengenfunktion**, *falls sie mindestens einen endlichen Wert hat.*

Für die im Falle positiver Mengenfunktionen gegebenenfalls auftretende Größe ∞ notieren wir die üblichen Rechenregeln. Wie man sofort sieht, gilt aufgrund dieser Rechenregeln die Dreiecksungleichung auch für die durch ∞ erweiterte reelle Zahlengerade $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Rechenregeln 6.4 *Für alle $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gelten $x + \infty := \infty$ und $x \leq \infty$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt ferner $x < \infty$. Schließlich setzt man $|\infty| := \infty$.*

Die im Zusammenhang mit Banachraum-wertigen bzw. reellwertigen Mengenfunktionen gegebenenfalls auftretenden Normstriche $||\cdot||$ bedeuten je nach Kontext die Norm auf dem fixierten Banachraum bzw. den reellen Betrag. Werden speziell reellwertige oder positive Mengenfunktionen untersucht, so notieren wir wie üblich die Betragsstriche $|\cdot|$. Im unmittelbaren Zusammenhang zur Norm bzw. zum reellen Betrag stehen die folgenden Begriffe:

Definition 6.5 *Seien F, G Banachraum-wertige oder positive Mengenfunktionen auf $\mathcal{M}$. F heißt* **beschränkt**, *falls* $\| F \|_\infty := \sup\{ \| F(A) \| \mid A \in \mathcal{M} \} < \infty$. *$F$ heißt* **endlich**, *falls* $\| F(A) \| < \infty$ *für alle* $A \in \mathcal{M}$. *F heißt* **σ-endlich**, *falls es für jedes $A \in \mathcal{M}$ eine abzählbare Menge $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$ derart gibt, daß $A = \bigcup \mathcal{P}$ und $\| F(P) \| < \infty$ für alle $P \in \mathcal{P}$. Die durch $A \mapsto \| F(A) \|$ definierte positive Mengenfunktion auf $\mathcal{M}$ wird wie üblich mit $|F|$ bezeichnet. Gilt $|F| \geq |G|$, so sagt man auch: F* **dominiert** *G.*

6.2 Additive Mengenfunktionen

Definition 6.6 *Sei F eine Banachraum-wertige oder positive Mengenfunktion auf $\mathcal{M}$. F heißt* **additiv** *(bzw.* **σ-additiv***), falls für jede endliche (bzw. abzählbare) disjunkte Menge $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$ gilt:*

$$\bigcup \mathcal{P} \in \mathcal{M} \implies F\Big(\bigcup \mathcal{P}\Big) = \sum_{P \in \mathcal{P}} F(P) .$$

F heißt **subtraktiv**, *falls für alle $A, B \in \mathcal{M}$ gilt:*

$$\big(A \subset B \wedge B \setminus A \in \mathcal{M} \wedge \| F(A) \| < \infty\big) \implies F(B \setminus A) = F(B) - F(A) .$$

Die in der Definition der σ-Additivität auftretende „Summe“ $\sum_{P \in \mathcal{P}} F(P)$ ist als Summen-Grenzwert der als summierbar vorausgesetzten Familie $(F(P))_{P \in \mathcal{P}}$ zu verstehen. Da der Summen-Grenzwert summierbarer Familien bekanntermaßen von der Reihenfolge der Summation unabhängig ist, ist obige Definition der σ-Additivität sinnvoll.

Bemerkung 6.7 *Sei F eine additive Banachraum-wertige oder positive Mengenfunktion auf $\mathcal{M}$. Dann gilt:*

(i) F ist subtraktiv.

(ii) Ist $\emptyset \in \mathcal{M}$, so gilt $F(\emptyset) = 0$.

(iii) Ist $\mathcal{M}$ vereinigungsstabil, so ist F additiv genau dann, wenn für alle disjunkten Mengen $A, B \in \mathcal{M}$ die Identität $F(A \cup B) = F(A) + F(B)$ gilt.

Beweis. (i) : Seien $A, B \in \mathcal{M}$ so, daß $A \subset B$, $B \setminus A \in \mathcal{M}$ und $\| F(A) \| < \infty$. Dann gilt wegen der Additivität von F:

$$F(B) = F((B \setminus A) \cup A) = F(B \setminus A) + F(A) .$$

Wegen $\| F(A) \| < \infty$ folgt daraus $F(B \setminus A) = F(B) - F(A)$.
(ii) : Sei $\emptyset \in \mathcal{M}$. Man findet $A \in \mathcal{M}$ so, daß $\| F(A) \| < \infty$. Dann gilt $F(A) = F(A \cup \emptyset) = F(A) + F(\emptyset)$. Wegen $\| F(A) \| < \infty$ folgt $F(\emptyset) = 0$.
(iii) : Die Implikation „$\Rightarrow$" ist trivial, die umgekehrte Implikation „$\Leftarrow$" ergibt sich über eine einfache Induktion. ■

6.3 Monotone und subadditive Mengenfunktionen

Definition 6.8 *Sei F eine reellwertige oder positive Mengenfunktion auf $\mathcal{M}$. F heißt* **monoton***, falls für alle $A, B \in \mathcal{M}$ gilt:*

$$A \subset B \implies F(A) \leq F(B) .$$

F heißt **subadditiv** *(bzw.* **σ-subadditiv***), falls für jede endliche (bzw. abzählbare) Menge $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$ gilt:*

$$\bigcup \mathcal{P} \in \mathcal{M} \implies F\left(\bigcup \mathcal{P}\right) \leq \sum_{P \in \mathcal{P}} F(P) .$$

Bemerkung 6.9 *Sei F eine reellwertige oder positive Mengenfunktion auf $\mathcal{M}$. Ist $\mathcal{M}$ vereinigungsstabil, so ist F subadditiv genau dann, wenn für alle $A, B \subset \mathcal{M}$ die Identität $F(A \cup B) \leq F(A) + F(B)$ gilt.*

Beweis. Einfache Induktion. ■

6.4 Inhalte und Maße

Definition 6.10 *Ein* **Inhalt** *ist eine Banachraum-wertige oder positive additive Mengenfunktion auf einem Ring. Ein* **Maß** *ist eine Banachraum-wertige oder positive σ-additive Mengenfunktion auf einer Algebra; Maße auf $\mathfrak{B}$ heißen* **Borel-Maße***.*

Bemerkung 6.11 *(i) Inhalte sind subtraktiv.*

(ii) Der Inhalt der leeren Menge ist 0.

(iii) Positive Inhalte sind monoton und subadditiv.

(iv) Sei F ein positiver Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$. Ist $\Omega \in \mathfrak{R}$, so ist F endlich genau dann, wenn $F(\Omega) < \infty$.

Beweis. (i), (ii) : Unmittelbare Anwendung von Bemerkung 6.7 (i), (ii).
(iii) : Sei F ein positiver Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$. Seien $A, B \in \mathfrak{R}$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{R}$ unter Differenzbildung ist die Menge $B \setminus A$ ebenfalls

in $\mathfrak{R}$ enthalten. Also folgt aus der Positivität sowie der Additivität von F im Falle $A \subset B$:

$$F(A) \;\leq\; F(A) + F(B \setminus A) \;=\; F(B)\,.$$

Also ist F monoton. Dies impliziert dann wegen $B \setminus A \subset B$:

$$F(A \cup B) \;=\; F(A) + F(B \setminus A) \;\leq\; F(A) + F(B)\,.$$

Also ist F subadditiv.
(iv) : Ist $\Omega \in \mathfrak{R}$ und $F(\Omega) < \infty$, so gilt $F(C) < \infty$ für alle $C \in \mathfrak{R}$ aufgrund der Monotonie von F. Also ist F in diesem Fall endlich. Die Umkehrung ist trivial. ■

Bemerkung 6.12 *(i) Jedes Maß ist ein Inhalt.*

(ii) Positive Maße sind monoton.

(iii) Ein positives Maß ν ist endlich genau dann, wenn $\nu(\Omega) < \infty$.

Beweis. (i) ist trivial. (ii) und (iii) folgen mit (i) aus Bemerkung 6.11 (iii), (iv). ■

7 Die Variation von Inhalten

7.1 Zerlegungen und Verfeinerungen von Zerlegungen

Als Hilfsmittel werden wir zunächst die Begriffe *Zerlegung* und *Verfeinerung einer Zerlegung* definieren. Da die Struktur des jeweils zugrundliegenden Mengensystems in diesem Zusammenhang keine Rolle spielt, werden wir diese Begriffsbildung bezüglich des beliebig fixierten Mengensystems $\mathcal{M} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ durchführen.

Definition 7.1 *Sei $A \subset \Omega$. Eine* $\mathcal{M}$**-Zerlegung** *von A ist eine nicht-leere endliche disjunkte Menge $\mathcal{Z} \subset \mathcal{M}$ derart, daß $A = \bigcup \mathcal{Z}$. Die Menge aller $\mathcal{M}$-Zerlegungen von A wird mit $\mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(A)$ bezeichnet. Sind $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$ zwei $\mathcal{M}$-Zerlegungen von A derart, daß*

$$\forall\, E' \in \mathcal{Z}' \;\; \exists\, E \in \mathcal{Z} \;:\; E' \subset E$$

gilt, so heißt $\mathcal{Z}'$ **Verfeinerung von** $\mathcal{Z}$.

Bemerkung 7.2 *Sei $A \in \mathcal{M}$. Dann gilt:*

(i) $\{A\} \in \mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(A)$

(ii) Sei $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(A)$. Für jedes $E \in \mathcal{Z}$ sei ferner $\mathcal{Y}_E \in \mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(E)$. Dann ist

$$\mathcal{Y} := \bigcup_{E \in \mathcal{Z}} \mathcal{Y}_E$$

ebenfalls eine $\mathcal{M}$-Zerlegung von A, und zwar eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$.

7.2 Definition und einige elementare Eigenschaften der Variation

Bei der folgenden Definition der Variation von Inhalten ist es *a priori* nicht notwendig, sich auf Inhalte zu beschränken. Weil jedoch die meisten Anwendungen der Variation sowohl die Algebra-Struktur des zugrundeliegenden Mengensystems als auch die Additivität der jeweils fixierten Mengenfunktion voraussetzen, wird die oben genannte Einschränkung auf Inhalte üblicherweise vorgenommen.

Definition 7.3 *F sei ein Inhalt auf $\mathfrak{D}$. Für alle $A \in \mathfrak{D}$ und alle $\mathfrak{D}$-Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von A heißt*

$$Var(F, A, \mathcal{Z}) \;:=\; \sum_{E \in \mathcal{Z}} \| F(E) \|$$

die **$\mathcal{Z}$-Variation von F auf** *A. Die durch*

$$A \;\mapsto\; \sup \{ \; Var(F, A, \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{D}}(A) \; \}$$

definierte positive Mengenfunktion auf $\mathfrak{D}$ heißt **Variation von** *F und wird mit V_F bezeichnet. Ist $A \in \mathfrak{D}$ und $V_F(A) < \infty$, so heißt F* **von beschränkter Variation auf** *A. F heißt* **von beschränkter Variation** *(oder abkürzend* **BV***), falls V_F beschränkt ist.*

Unmittelbare aus der Homogenität der Norm auf X bzw. der Dreiecksungleichung erhält man folgende

Bemerkung 7.4 *Seien F, G Inhalte auf $\mathfrak{D}$ mit Werten in X. Sei $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gilt:*

(i) $V_{\alpha F} \;=\; |\alpha| \cdot V_F$.

(ii) $V_{F+G} \;\leq\; V_F + V_G$.

(iii) Die Menge der BV-Inhalte auf $\mathfrak{D}$ mit Werten in X bildet einen $\mathbb{K}$-Vektorraum. ■

Bemerkung 7.5 *F sei ein Inhalt auf $\mathfrak{D}$. Dann gilt:*

(i) $|F| \leq V_F$.

(ii) Ist F von beschränkter Variation, so auch beschränkt.

(iii) Genau dann ist $V_F \equiv 0$, wenn $F \equiv 0$.

Beweis. (i) : Sei $A \in \mathfrak{D}$. Wegen $\mathcal{Z} := \{A\} \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{D}}(A)$ gilt:

$$|F|(A) \;=\; \| F(A) \| \;=\; Var(F, A, \mathcal{Z}) \;\leq\; V_F(A) \;.$$

(ii) : Folgt unmittelbar aus (i).
(iii) : Die Implikation „$\Rightarrow$“ folgt sofort aus (i), die umgekehrte Implikation „$\Leftarrow$“ ist trivial. ■

7.3 Die Verfeinerungs-Ungleichung

Ein im folgenden häufig angewendetes Hilfsmittel ist die sogenannte *Verfeinerungs-Ungleichung*:

Lemma 7.6 (Verfeinerungs-Ungleichung) *F sei ein Inhalt auf $\mathfrak{D}$. Seien $A \in \mathfrak{D}$ und $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}' \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{D}}(A)$. Ist $\mathcal{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$, so gilt $Var(F, A, \mathcal{Z}) \leq Var(F, A, \mathcal{Z}')$.*

Beweis. Sei $\mathcal{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$. Ist $E \in \mathcal{Z}$, so gilt für alle $E' \in \mathcal{Z}'$ wegen der Disjunktheit von $\mathcal{Z}$ sowie wegen der Verfeinerungs-Eigenschaft die Äquivalenz

$$E' \cap E \neq \emptyset \iff E' \subset E \,.$$

Für alle $E \in \mathcal{Z}$ ist daher

$$\mathcal{Y}_E := \left\{ E' \in \mathcal{Z}' \;\middle|\; E' \subset E \right\}$$

eine $\mathfrak{D}$-Zerlegung von E. Für alle $E \in \mathcal{Z}$ liefern die Additivität von F sowie die Dreiecksungleichung dann:

$$\| F(E) \| = \left\| F\left(\bigcup \mathcal{Y}_E\right) \right\| = \left\| \sum_{E' \in \mathcal{Y}_E} F(E') \right\| \leq \sum_{E' \in \mathcal{Y}_E} \| F(E') \| \,.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} Var(F, A, \mathcal{Z}) &= \sum_{E \in \mathcal{Z}} \| F(E) \| \leq \sum_{E \in \mathcal{Z}} \sum_{E' \in \mathcal{Y}_E} \| F(E') \| \\ &= \sum_{E' \in \mathcal{Z}'} \| F(E') \| = Var(F, A, \mathcal{Z}') \,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7.4 Die Variation ist additiv

Die Kernaussage des folgenden Satzes ist, daß die Variation eines Inhaltes F selbst wieder ein (positiver) Inhalt ist; in der Tat ist V_F sogar der *kleinste* positive Inhalt, welcher F dominiert. Diese Tatsache hat einige einfache Konsequenzen, die wir in einem Korollar festhalten werden.

Satz 7.7 *F sei ein Inhalt auf $\mathfrak{D}$. Dann gilt:*

(i) V_F ist ein monotoner positiver Inhalt auf $\mathfrak{D}$.

(ii) V_F ist der kleinste positive Inhalt auf $\mathfrak{D}$, der F dominiert.

Beweis. (i) : Zu verifizieren ist zunächst die Additivität von V_F. Dazu seien $A, B \in \mathfrak{D}$ disjunkte Mengen. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{D}$ unter Vereinigungsbildung ist $A \cup B \in \mathfrak{D}$. Sei $\mathcal{Z}$ eine $\mathfrak{D}$-Zerlegung von $A \cup B$. Man setzt nun

$$\mathcal{Z}_A := \{ E \cap A \mid E \in \mathcal{Z} \} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{Z}_B := \{ E \cap B \mid E \in \mathcal{Z} \} .$$

Aufgrund der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{D}$ unter Durchschnittsbildung ist $\mathcal{Z}_A$ eine $\mathfrak{D}$-Zerlegung von A und $\mathcal{Z}_B$ eine $\mathfrak{D}$-Zerlegung von B. Ferner ist offenbar $\mathcal{Z}_A \cup \mathcal{Z}_B$ eine $\mathfrak{D}$-Zerlegung von $A \cup B$, und zwar eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$. Daher gilt nach der Verfeinerungs-Ungleichung:

$$\begin{aligned} Var(F, A \cup B, \mathcal{Z}) &\leq Var(F, A \cup B, \mathcal{Z}_A \cup \mathcal{Z}_B) \\ &= Var(F, A, \mathcal{Z}_A) + Var(F, B, \mathcal{Z}_B) \\ &\leq V_F(A) + V_F(B) . \end{aligned}$$

Dies impliziert $V_F(A \cup B) \leq V_F(A) + V_F(B)$. Seien nun $\mathcal{Y}_A \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{D}}(A)$ und $\mathcal{Y}_B \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{D}}(B)$. Offenbar ist $\mathcal{Y}_A \cup \mathcal{Y}_B$ eine $\mathfrak{D}$-Zerlegung von $A \cup B$. Es gilt:

$$Var(F, A, \mathcal{Y}_A) + Var(F, B, \mathcal{Y}_B) = Var(F, A \cup B, \mathcal{Y}_A \cup \mathcal{Y}_B) \leq V_F(A \cup B) .$$

Es folgt $V_F(A) + V_F(B) \leq V_F(A \cup B)$, also insgesamt $V_F(A) + V_F(B) = V_F(A \cup B)$. Daher ist V_F additiv, also ein Inhalt. Aufgrund der Positivität ist V_F also auch monoton.
(ii) : Sei G ein positiver Inhalt auf $\mathfrak{D}$, der F dominiert. Sei $A \in \mathfrak{D}$. Wegen der Additivität von G gilt dann für jede $\mathfrak{D}$-Zerlegung $\mathcal{Z}$ von A:

$$Var(F, A, \mathcal{Z}) = \sum_{E \in \mathcal{Z}} \| F(E) \| \leq \sum_{E \in \mathcal{Z}} G(E) = G\Big(\bigcup \mathcal{Z}\Big) = G(A) .$$

Dies impliziert $V_F(A) \leq G(A)$. Damit ist auch (ii) bewiesen. ■

Korollar 7.8 *F sei ein Inhalt auf $\mathfrak{D}$. Dann gilt:*

(i) F ist von beschränkter Variation genau dann, wenn $V_F(\Omega) < \infty$.

(ii) Ist F positiv, so gilt: $V_F = F$. Insbesondere ist $V_{V_F} = V_F$.

Beweis. (i) : Folgt unmittelbar aus der Monotonie von V_F.
(ii) : F sei positiv. Nach Bemerkung 7.5 (i) wird F von V_F dominiert, d.h. es gilt $F = |F| \leq V_F$. Andererseits wird F von sich selber dominiert; Satz 7.7 (ii) impliziert daher $V_F \leq F$. Kombiniert man dies mit Satz 7.7 (i), so folgt schließlich auch $V_{V_F} = V_F$. ■

7.5 Wann ist die Variation σ-additiv?

Wie eben gezeigt wurde, ist die Variation eines Inhaltes, also einer *additiven* Mengenfunktion, ebenfalls additiv. Ausgehend von dieser Tatsache stellt man sich die Frage, ob sich in ähnlicher Weise auch die σ-Additivität eines Inhaltes F auf die Variation V_F (oder umgekehrt) überträgt. Unter der zusätzliche Voraussetzung, daß F von beschränkter Variation ist, läßt sich zeigen, daß F genau dann σ-additiv ist, wenn auch V_F dies ist.

Satz 7.9 *F sei ein BV-Inhalt auf $\mathfrak{D}$. Genau dann ist F σ-additiv, wenn auch V_F σ-additiv ist.*

Beweis. (Vgl. [DIE] Proposition I.1.9, S. 3f.) Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Folge in $\mathfrak{D}$ derart, daß $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{D}$.

„$\Leftarrow$“ : V_F sei σ-additiv. Wegen der Beschränktheit und σ-Additivität von V_F gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_F(A_k) \;=\; V_F(A) \;<\; \infty\ .$$

Da F von V_F dominiert wird, konvergiert also die Reihe $\sum(F(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ absolut. Wegen der Additivität und Subtraktivität von F und wegen $|F| \le V_F$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left\| F(A) - \sum_{k=1}^{n} F(A_k) \right\| \;&=\; \left\| F(A) - F\left(\bigcup_{k=1}^{n} F(A_k) \right) \right\| \\
&=\; \left\| F\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} F(A_k) \right) \right\| \;=\; \left\| F\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} F(A_k) \right) \right\| \\
&\le\; V_F\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} F(A_k) \right) \;=\; \sum_{k=n+1}^{\infty} V_F(A_k)\ .
\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} V_F(A_k) = 0$ folgt daraus:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| F(A) - \sum_{k=1}^{n} F(A_k) \right\| \;=\; 0\ .$$

Dies bedeutet $F(A) = \sum_{k=1}^{\infty} F(A_k)$. Das war zu zeigen.

„$\Rightarrow$“ : F sei σ-additiv. Sei $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{D}}(A)$. Dann gilt für alle $E \in \mathcal{Z}$:

$$\begin{aligned}
F(E) \;&=\; F(E \cap A) \;=\; F\left(E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \\
&=\; F\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E \cap A_k \right) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} F(E \cap A_k)\ .
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} Var(F,A,\mathcal{Z}) &= \sum_{E\in\mathcal{Z}} \| F(E) \| = \sum_{E\in\mathcal{Z}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} F(E\cap A_k) \right\| \\ &\le \sum_{E\in\mathcal{Z}} \sum_{k=1}^{\infty} \| F(E\cap A_k) \| = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{E\in\mathcal{Z}} \| F(E\cap A_k) \| \ . \end{aligned}$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist nun offenbar $\mathcal{Y}_k := \{ \ E\cap A_k \mid E \in \mathcal{Z} \ \}$ eine $\mathfrak{D}$-Zerlegung von A_k. Also folgt:

$$Var(F,A,\mathcal{Z}) \le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{E\in\mathcal{Y}_k} \| F(E) \| = \sum_{k=1}^{\infty} Var(F,A_k,\mathcal{Y}_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} V_F(A_k) \ .$$

Dies impliziert $V_F(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} V_F(A_k)$. Ferner gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ wegen der Additivität und Monotonie von V_F:

$$\sum_{k=1}^{n} V_F(A_k) = V_F\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \le V_F(A) \ .$$

Dies liefert schließlich die noch fehlende Ungleichung:

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_F(A_k) = \sup\left\{ \sum_{k=1}^{n} V_F(A_k) \ \middle| \ n\in\mathbb{N} \right\} \le V_F(A) \ . \quad \blacksquare$$

8 μ-absolutstetige Inhalte

8.1 μ-Nullmengen-Stetigkeit

Der Begriff der *μ-Nullmengen-Stetigkeit* wird in dieser Arbeit *ad hoc* eingeführt; die Sinnfälligkeit der Namensgebung ergibt sich unmittelbar aus der Definition.

Definition 8.1 *Ein Inhalt F auf $\mathfrak{D}$ heißt μ-**Nullmengen-stetig**, falls $F(A) = 0$ für jede μ-Nullmenge $A \in \mathfrak{D}$ gilt.*

Bemerkung 8.2 *Sei F ein Inhalt auf $\mathfrak{D}$. Genau dann ist F μ-Nullmengen-stetig, wenn auch V_F μ-Nullmengen-stetig ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“ : F sei μ-Nullmengen-stetig. Sei $A \in \mathfrak{D}$ eine μ-Nullmenge. Wegen der Monotonie von μ gilt für alle $E \in \mathfrak{D}$:

$$E \subset A \implies \mu(E) = 0 .$$

Daher gilt nach Voraussetzung für alle in $\mathfrak{D}$ enthaltenen Teilmengen E von A: $F(E) = 0$. Folglich ist $Var(F, A, \mathcal{Z}) = 0$ für alle $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{D}}(A)$. Dies impliziert $V_F(A) = 0$.

„$\Leftarrow$“ : Diese Implikation folgt unmittelbar aus der Ungleichung $|F| \leq V_F$. ∎

8.2 μ-Stetigkeit und μ-Absolutstetigkeit

Die Einführung des Begriffs μ-Stetigkeit geschieht im folgenden über die Formulierung zweier äquivalenter Eigenschaften. Diese beiden Eigenschaften beschreiben — ähnlich wie bei der Definition der Stetigkeit von Abbildungen — die μ-Stetigkeit von Inhalten einerseits durch Folgen-Grenzwerte, andererseits durch eine ε-δ-Charakterisierung. Die im Zusammenhang mit den Folgen-Grenzwerten verwendete Notation $\lim_{\mu(A)\to 0} F(A) = 0$ bedeutet dabei: Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{D}$, für welche die Folge $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, konvergiert auch die Bildfolge $(F(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0.

Lemma 8.3 *Sei F ein Inhalt auf $\mathfrak{D}$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\lim_{\mu(A)\to 0} F(A) = 0$.

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, A \in \mathfrak{D} \;:\; \mu(A) < \delta \implies \|\, F(A) \,\| < \varepsilon$.

Beweis. (i)⇒(ii) : (Via Kontraposition.) Es gelte ¬(ii). Man findet also $\varepsilon > 0$ so, daß gilt:

$$\forall\, \delta > 0\; \exists\, A \in \mathfrak{D} \;:\; \mu(A) < \delta \;\wedge\; \|\, F(A) \,\| \geq \varepsilon \;.$$

Insbesondere findet man also eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{D}$ derart, daß $\mu(A_n) < \frac{1}{n}$ und $\|\, F(A_n) \,\| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$, aber es gilt $\liminf_{n\to\infty} \|\, F(A_n) \,\| \geq \varepsilon > 0$. Also gilt ¬(i).
(ii)⇒(i) : Es gelte (ii). Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{D}$ mit $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung findet man $\delta > 0$ derart, daß gilt:

$$\forall\, A \in \mathfrak{D} \;:\; \mu(A) < \delta \implies \|\, F(A) \,\| < \varepsilon \;.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ findet man $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $\mu(A_n) < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Also ist $\|\, F(A_n) \,\| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Dies bedeutet $\lim_{n\to\infty} \|\, F(A_n) \,\| = 0$, also auch $\lim_{n\to\infty} F(A_n) = 0$. ■

Definition 8.4 *Sei F ein Inhalt auf $\mathfrak{D}$. F heißt* μ-**stetig**, *falls F eine (und damit beide) der äquivalenten Eigenschaften aus Lemma 8.3 hat. F heißt* μ-**absolutstetig**, *falls V_F μ-stetig ist.*

μ-stetige Inhalte sind also lax gesprochen solche Inhalte, die auf μ-kleinen Mengen nie allzugroße Werte annehmen. In der Literatur wird daher häufig zur Kennzeichnung der μ-Stetigkeit eines Inhaltes F (manchmal aber auch zur Kennzeichnung der μ-Nullmengen-Stetigkeit!) die suggestive Schreibweise $F \ll \mu$ eingeführt; in der vorliegenden Arbeit findet diese Notation keine Verwendung.

8.3 Hierarchie der drei Stetigkeits-Begriffe

Bemerkung 8.5 *Sei F ein Inhalt auf $\mathfrak{D}$. Dann gilt:*

(i) Ist F μ-stetig, so auch μ-Nullmengen-stetig.

(ii) Ist F μ-absolutstetig, so auch μ-stetig.

Beweis. Zum Beweis von (i) sei F μ-stetig. Ist $A \in \mathfrak{D}$ eine μ-Nullmenge, so folgt $\|\, F(A) \,\| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. es ist $F(A) = 0$. Die Aussage (ii) folgt sofort aus $|F| \leq V_F$. ■

Es ist im allgemeinen nicht so, daß alle drei behandelten Stetigkeits-Begriffe äquivalent sind; ein diesbezügliches Beispiel findet man in Diestel/Uhl, Example I.2.2, S. 11. Für BV-Maße mit Definitionsbereich Σ ist dies jedoch der Fall, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 8.6 *Sei F ein BV-Maß auf Σ. Dann sind äquivalent:*

(i) F ist μ-Nullmengen-stetig.

(ii) F ist μ-stetig.

(iii) F ist μ-absolutstetig.

Beweis. (Vgl. [DIE] Theorem I.2.1, S. 10f.) Wegen Bemerkung 8.5 ist lediglich die Implikation (i)$\Rightarrow$(iii) zu zeigen. F sei also μ-Nullmengen-stetig. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Σ mit $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = 0$. Zu zeigen ist: $\lim_{n\to\infty} V_F(A_n) = 0$. Dazu genügt es zu zeigen, daß jede Teilfolge von $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge besitzt, deren V_F-Bildfolge gegen 0 konvergiert. Sei also $(A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty}\mu(A_{n_k}) = 0$. Daher findet man eine Teilfolge $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $(A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ derart, daß gilt:

$$\forall\, k\in\mathbb{N} \,:\, \mu(B_k) \,\le\, 2^{-k}\,. \tag{8.1}$$

Für alle $n\in\mathbb{N}$ setzt man nun $C_n := \bigcup_{k=n}^\infty B_k$. Ferner sei $C := \bigcap_{n=1}^\infty C_n$. Da Σ eine σ-Algebra ist, sind sowohl die (monoton fallende) Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch deren Grenzwert C Elemente von Σ. Wegen der Bedingung (8.1) gilt zunächst für alle $n\in\mathbb{N}$:

$$\mu(C_n) \;=\; \mu\left(\bigcup_{k=n}^\infty B_k\right) \;\le\; \sum_{k=n}^\infty \mu(B_k) \;\le\; \sum_{k=n}^\infty 2^{-k} \;=\; 2^{-n+1}\,.$$

Dies impliziert $\lim_{n\to\infty}\mu(C_n) = 0$. Wegen der Monotonie von μ folgt aus der für alle $n\in\mathbb{N}$ gültigen Inklusion $C\subset C_n$ sowie aus dem eben Gezeigten $\mu(C) = 0$.
Man setzt nun $E_n := C_n\setminus C_{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Weil $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Mengen-Folge ist, gilt für alle $n\in\mathbb{N}$ und für alle $N\in\mathbb{N}_{\ge n}$:

$$C_n \;=\; C_{N+1}\cup(C_n\setminus C_{N+1}) \;=\; C_{N+1}\cup\bigcup_{k=n}^N C_k\setminus C_{k+1} \;=\; C_{N+1}\cup\bigcup_{k=n}^N E_k\,.$$

Durch Grenzwert-Bildung erhält man also für alle $n\in\mathbb{N}$:

$$C_n \;=\; C\cup\bigcup_{k=n}^\infty E_k\,. \tag{8.2}$$

F ist von beschränkter Variation, σ-additiv und μ-Nullmengen-stetig. Nach Satz 7.9 und Bemerkung 8.2 ist also V_F σ-additiv und μ-Nullmengen-stetig. Da C eine μ-Nullmenge ist, folgt $V_F(C) = 0$. Ferner ist offenbar $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Folge in Σ. Schließlich gilt per Definition $C\cap E_n = \emptyset$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Daher folgt aus (8.2) für alle $n\in\mathbb{N}$:

$$V_F(C_n) \;=\; V_F\left(C\cup\bigcup_{k=n}^\infty E_k\right) \;=\; V_F(C) + \sum_{k=n}^\infty V_F(E_k) \;=\; \sum_{k=n}^\infty V_F(E_k)\,. \tag{8.3}$$

Da V_F beschränkt und monoton ist, gilt:

$$\infty \;>\; V_F(\Omega) \;\geq\; V_F\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} V_F(E_k)\;.$$

Dies impliziert:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} V_F(E_k) \;=\; 0\;.$$

Kombiniert man dies mit (8.3), so folgt:

$$\lim_{n\to\infty} V_F(C_n) \;=\; 0\;.$$

Schließlich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ aufgrund der Monotonie von V_F:

$$V_F(B_n) \;\leq\; V_F\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k\right) \;=\; V_F(C_n)\;,$$

d.h. es gilt $\lim_{n\to\infty} V_F(B_n) = 0$. Dies war zu zeigen. ■

8.4 μ-stetige endliche Inhalte sind σ-additiv

Satz 8.7 *μ-stetige endliche Inhalte sind σ-additiv.*

Beweis. Sei F ein μ-stetiger endlicher Inhalt auf $\mathfrak{D}$. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Folge in $\mathfrak{D}$ derart, daß $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{D}$. Man setzt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$B_n \;:=\; \bigcup_{k=1}^{n} A_k\;.$$

Offenbar ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Mengenfolge in $\mathfrak{D}$ mit $\lim_{n\to\infty} B_n = A$. Daher gilt wegen der Stetigkeit von μ für aufsteigende Mengenfolgen

$$\mu(A) \;=\; \mu\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)\;.$$

Dies wiederum impliziert wegen der Endlichkeit von μ:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus B_n) \;=\; 0. \tag{8.4}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund der μ-Stetigkeit von F findet man $\delta > 0$ derart, daß gilt:

$$\forall\, D \in \mathfrak{D} \;:\; \mu(D) < \delta \;\Longrightarrow\; \|\, F(D)\,\| \;<\varepsilon\;.$$

Wegen (8.4) findet man $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $\mu(A \setminus B_n) < \delta$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dies impliziert $\| F(A \setminus B_n) \| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Wegen der Endlichkeit von F ist $F(A \setminus B_n) = F(A) - F(B_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gilt

$$\| F(A) - F(B_n) \| = \| F(A \setminus B_n) \| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Dies liefert schließlich:

$$F(A) = \lim_{n\to\infty} F(B_n) = \lim_{n\to\infty} F\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} F(A_k) .$$

Das war zu zeigen. ■

Korollar 8.8 *Sei F ein μ-absolutstetiger Inhalt auf $\mathfrak{D}$. Ist F von beschränkter Variation, so sind F und V_F σ-additiv.*

Beweis. F sei von beschränkter Variation. Damit ist V_F ein beschränkter, mithin endlicher Inhalt. Weil V_F nach Voraussetzung μ-stetig ist, erhält man aus Satz 8.7 die σ-Additivität von V_F. Nach Satz 7.9 ist dann auch F σ-additiv. ■

8.5 μ-fein zerlegbare Mengen

Bekanntermaßen lassen sich beschränkte Teil-Intervalle für jedes $\varepsilon > 0$ in eine endliche Anzahl disjunkter Intervalle, deren Lebesgue-Maß kleiner als ε ist, zerlegen; insbesondere gilt dies für das kompakte Intervall I. Diese Eigenschaft wird im allgemeinen Fall durch die folgende *ad hoc*-Begriffsbildung beschrieben:

Definition 8.9 *Sei $\mathcal{M} \subset \Sigma$. Ω heißt* **μ-fein zerlegbar in** *$\mathcal{M}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $\mathcal{M}$-Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon$ von Ω gibt derart, daß $\mu(E) < \varepsilon$ für alle $E \in \mathcal{Z}_\varepsilon$.*

Beispiel 8.10 *I ist λ-fein zerlegbar in $\mathcal{T}$, in $\mathfrak{A}$ und in $\mathfrak{B}$.*

Ist Ω μ-fein zerlegbar in $\mathfrak{D}$, so sind bereits alle μ-stetigen Inhalte auf $\mathfrak{D}$ beschränkt. Dies zeigt

Satz 8.11 *Ω sei μ-fein zerlegbar in $\mathfrak{D}$. Ferner sei F ein Inhalt auf $\mathfrak{D}$. Dann gilt:*

(i) Ist F μ-stetig, so beschränkt.

(ii) Ist F μ-absolutstetig, so von beschränkter Variation.

Beweis. F sei μ-stetig. Dann findet man $\delta > 0$ so, daß gilt:

$$\forall\, A \in \mathfrak{D} \;:\; \mu(A) < \delta \implies \|\, F(A) \,\| < 1 \,.$$

Sei $\mathcal{Z}$ eine $\mathfrak{D}$-Zerlegung von Ω derart, daß $\mu(E) < \delta$ für alle $E \in \mathcal{Z}$. Sei $M \in \mathbb{N}$ die Mächtigkeit von $\mathcal{Z}$. Sei $A \in \mathfrak{D}$. Dann ist offenbar $\mathcal{Z}' := \{\, E \cap A \mid E \in \mathcal{Z} \,\}$ eine $\mathfrak{D}$-Zerlegung von A, und es gilt $\mu(E') \le \mu(E) < \delta$ für alle $E' \in \mathcal{Z}'$. Wegen der Additivität von F folgt:

$$\begin{aligned} \|\, F(A) \,\| &= \left\| F\left(\bigcup \mathcal{Z}'\right) \right\| = \left\| \sum_{E' \in \mathcal{Z}'} F(E') \right\| \\ &\le \sum_{E' \in \mathcal{Z}'} \|\, F(E') \,\| \le \sum_{E' \in \mathcal{Z}'} 1 = M \,. \end{aligned}$$

Also ist F beschränkt, d.h. es gilt (i). Wendet man (i) auf die Variation V_F anstelle von F an, so folgt (ii). ∎

Als Kombination von Korollar 8.8 und Satz 8.11 erhält man das

Korollar 8.12 *Ω sei μ-fein zerlegbar in $\mathfrak{D}$. Ferner sei F ein μ-absolutstetiger Inhalt auf $\mathfrak{D}$. Dann sind F und V_F σ-additiv.* ∎

9 μ-Integralmaße

9.1 Definition und einige elementare Eigenschaften der μ-Integralmaße

Bemerkung und Definition 9.1 *Für jede μ-integrierbare Abbildung $g : \Omega \to X$ wird durch $A \mapsto \int_A g\, d\mu$ ein Inhalt $G : \mathfrak{D} \to X$ definiert. Die Abbildung g heißt* μ-**Dichte von** G*; im Fall $(\Omega, \Sigma, \mu) = (I, \mathfrak{B}, \lambda)$ spricht man von* **Lebesgue-Dichte**. ■

Analog zu Lemma 1.12 zeigt man das folgende

Lemma 9.2 *Sei $g : \Omega \to X$ eine μ-integrierbare Abbildung. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß für jede Menge $A \in \Sigma$ gilt:*

$$\mu(A) < \delta \implies \int_A |g|\, d\mu \, < \, \varepsilon \, . \quad ■$$

Satz und Definition 9.3 *Sei $g : \Omega \to X$ μ-integrierbar. Ferner setzt man $G : \mathfrak{D} \to X$, $A \mapsto \int_A g\, d\mu$, und $G_0 : \mathfrak{D} \to [\,0, \infty\,]$, $A \mapsto \int_A |g|\, d\mu$. Dann gilt:*

(i) G_0 ist beschränkt.

(ii) $V_G \leq G_0$. Insbesondere ist G von beschränkter Variation.

(iii) G ist ein μ-absolutstetiges Maß, das sogenannte μ-**Integralmaß von** g **auf** $\mathfrak{D}$.

Im Fall $\mathfrak{D} = \Sigma$ gilt sogar:

(ii)' $V_G = G_0$.

Beweis. (Vgl. [DIE] Theorem II.2.4, S. 46f.)

(i) : Da $|g|$ Lebesgue-integrierbar ist, ist $G_0(\Omega) < \infty$. Dies impliziert wegen der Monotonie von G_0 auch die Beschränktheit von G_0.

(ii) : Sei $A \in \mathfrak{D}$. Sei $\mathcal{Z}$ eine $\mathfrak{D}$-Zerlegung von A. Dann gilt:

$$\begin{aligned} Var(G, A, \mathcal{Z}) \;&=\; \sum_{E \in \mathcal{Z}} \|\, G(E) \,\| \;=\; \sum_{E \in \mathcal{Z}} \left\| \int_E g\, d\mu \right\| \;\leq\; \sum_{E \in \mathcal{Z}} \int_E |g|\, d\mu \\ &=\; \int_{\bigcup \mathcal{Z}} |g|\, d\mu \;=\; \int_A |g|\, d\mu \;=\; G_0(A) \, . \end{aligned}$$

Dies impliziert $V_G(A) \leq G_0(A)$, mithin also $V_G \leq G_0$. Da G_0 nach (i) beschränkt ist, ist G von beschränkter Variation.
(iii) : Kombiniert man die Aussage (ii) mit der von Lemma 9.2, so gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;\forall\, A \in \mathfrak{D} \;:\; \mu(A) < \delta \implies V_G(A) < \varepsilon \,.$$

Also ist G μ-absolutstetig. Weil G zudem von beschränkter Variation ist, ist G auch σ-additiv nach Korollar 8.8, d.h. G ist ein Maß.
(ii)' : Es sei $\mathfrak{D} = \Sigma$. Sei $A \in \Sigma$. Zu zeigen ist: $G_0(A) \leq V_G(A)$. Da g μ-integrierbar ist, findet man eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen auf Σ mit Werten in X mit der Eigenschaft:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\, g_n - g \,| \; d\mu \;=\; 0 \,. \tag{9.1}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Da g_n eine Treppenfunktion auf Σ ist, findet man eine Zerlegung $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_\Sigma(A)$ derart, daß g_n auf allen in $\mathcal{Z}$ enthaltenen Mengen konstant ist. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int_A |g_n|\, d\mu \quad &= \quad \sum_{E\in\mathcal{Z}} \int_E |g_n|\, d\mu \;=\; \sum_{E\in\mathcal{Z}} \left\| \int_E g_n\, d\mu \right\| \\
&\leq \quad \sum_{E\in\mathcal{Z}} \left\| \int_E (g_n - g)\, d\mu \right\| \;+\; \sum_{E\in\mathcal{Z}} \left\| \int_E g\, d\mu \right\| \\
&= \quad \sum_{E\in\mathcal{Z}} \left\| \int_E (g_n - g)\, d\mu \right\| \;+\; \mathit{Var}(G, A, \mathcal{Z}) \\
&\leq \quad \sum_{E\in\mathcal{Z}} \int_E |g_n - g|\, d\mu \;+\; V_G(A) \\
&= \quad \int_A |g_n - g|\, d\mu \;+\; V_G(A) \;\leq\; \int_\Omega |g_n - g|\, d\mu \;+\; V_G(A) \,.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieses Zwischen-Ergebnisses erhält man die folgende Abschätzung:

$$\int_A |g|\, d\mu \;\leq\; \int_A |g_n - g|\, d\mu \;+\; \int_A |g_n|\, d\mu \;\leq\; 2 \cdot \int_\Omega |g_n - g|\, d\mu \;+\; V_G(A) \,.$$

Kombiniert man dies mit (9.1), so folgt die gewünschte Ungleichung $G_0(A) \leq V_G(A)$. ■

Bemerkung 9.4 *Seien $g, h : \Omega \to X$ μ-integrierbar. Seien G bzw. H die μ-Integralmaße von g bzw. h auf $\mathfrak{D}$. Sei $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist $\alpha G + H$ das μ-Integralmaß von $\alpha g + h$ auf $\mathfrak{D}$.* ■

9.2 Zur Eindeutigkeit von μ-Integralmaßen

Das aus dem folgenden Satz abgeleitete Korollar klärt die Frage, wann zwei μ-integrierbare Abbildungen dasselbe μ-Integralmaß erzeugen.

Satz 9.5 *Sei $g : \Omega \to X$ μ-integrierbar, und sei G das μ-Integralmaß von g auf $\mathfrak{D}$. Dann gilt:*

(i) Ist $g \equiv 0$ μ-fast überall, so gilt: $G \equiv 0$.

(ii) Ist $\mathfrak{D} = \Sigma$, so folgt umgekehrt aus $G \equiv 0$ bereits $g \equiv 0$ μ-fast überall.

Beweis. (i) Es gilt für alle $A \in \mathfrak{D}$:

$$\| G(A) \| \;=\; \left\| \int_A g \, d\mu \right\| \;\leq\; \int_A |g| \, d\mu \;\leq\; \int_\Omega |g| \, d\mu \, .$$

Ist nun $g \equiv 0$ μ-fast überall, so folgt $G \equiv 0$.
(ii) : Es gelte $\mathfrak{D} = \Sigma$. Sei $G \equiv 0$. Dann ist auch $V_G \equiv 0$. Also gilt nach Satz 9.3 (ii)':

$$0 \;=\; V_G(\Omega) \;=\; \int_\Omega |g| \, d\mu \, .$$

Daraus folgt $|g| \equiv 0$ μ-fast überall, d.h. $g \equiv 0$ μ-fast überall. ∎

Korollar 9.6 *Seien $g, h : \Omega \to X$ μ-integrierbar, und seien G bzw. H die μ-Integralmaße von g bzw. h auf Σ. Genau dann ist $G = H$, wenn $g = h$ μ-fast überall.*

Beweis. Man wende Satz 9.5 auf $g - h$ an. ∎

10 Über Restriktionen und die Fortsetzbarkeit von Inhalten

10.1 Vererbung von Eigenschaften eines Inhaltes bei Restriktion

Ist F ein auf der Algebra $\mathfrak{D}$ definierter Inhalt, so ist offenbar für jede Teil-Algebra $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{D}$ auch die Restriktion $F\big|_{\mathfrak{E}}$ additiv, also ein Inhalt. Weil in dieser Situation offenbar $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{E}}(A) \subset \mathfrak{Z}_{\mathfrak{D}}(A)$ für alle $A \in \mathfrak{E}$ gilt, erhält man sofort die folgende

Bemerkung 10.1 *Sei F ein Inhalt auf $\mathfrak{D}$, und sei $\mathfrak{E}$ eine Teil-Algebra von $\mathfrak{D}$. Sei $G := F\big|_{\mathfrak{E}}$. Dann gilt $V_G(A) \leq V_F(A)$ für alle $A \in \mathfrak{E}$.* ■

Bemerkung 10.2 *Sei F ein Inhalt auf $\mathfrak{D}$, und sei $\mathfrak{E}$ eine Teil-Algebra von $\mathfrak{D}$. Dann überträgt sich jede der Eigenschaften Beschränktheit der Variation, μ-Nullmengen-Stetigkeit, μ-Stetigkeit bzw. μ-Absolutstetigkeit von F auf $F\big|_{\mathfrak{E}}$.*

Beweis. Offensichtlich ist die Behauptung in Bezug auf die Eigenschaften μ-Nullmengen-Stetigkeit sowie μ-Stetigkeit wahr. Daß sich die beiden anderen Eigenschaften von F auf $F\big|_{\mathfrak{E}}$ übertragen, ist eine unmittelbare Konsequenz aus Bemerkung 10.1. ■

10.2 Halbmetrische Räume und der Fortsetzungs-Satz

Als geeignetes Hilfsmittel zur Beantwortung der Frage, unter welchen Voraussetzungen sich ein Inhalt auf $\mathfrak{D}$ zu einem Inhalt auf der σ-Algebra Σ fortsetzen läßt, erweist sich der Fortsetzungs-Satz für gleichmäßig stetige Abbildungen auf halbmetrischen Räumen mit Werten in einem vollständigen metrischen Raum. Da der Umgang mit halbmetrischen Räumen unter Umständen ungewohnt ist, notieren wir an dieser Stelle zumindest die entsprechende Definition:

Definition 10.3 *Sei M eine nicht-leere Menge. Sei $d : M \times M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. d heißt* **Halbmetrik auf** *M, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt:*

(H 1) $d(x, x) = 0$,

(H 2) $d(x,y) = d(y,x)$,

(H 3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

In diesem Fall heißt das Paar (M,d) **halbmetrischer Raum**.

Die vom Studium metrischer Räume her gewohnten topologischen und metrischen Begriffe (Offenheit, Abgeschlossenheit, Abschluß, Dichtheit, Konvergenz, Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit etc.) werden ganz analog auch in halbmetrischen Räumen eingeführt. Der wesentliche Unterschied zwischen metrischen Räumen und und halbmetrischen Räumen besteht darin, daß letztere im allgemeinen nicht Hausdorffsch sind. Demzufolge ist auch die Eindeutigkeit des Grenzwertes konvergenter Folgen in halbmetrischen Räumen im allgemeinen nicht mehr gegeben. Der Beweis des folgenden aus der Grundstudium der Analysis bekannten Fortsetzungs-Satzes läßt sich dennoch wortwörtlich von der Situation metrischer Räume auf die halbmetrischer Räume übertragen.

Satz 10.4 (Fortsetzungs-Satz) *Seien* (M,d) *ein halbmetrischer Raum und* (M',d') *ein vollständiger metrischer Raum. Sei* $U \subset M$*, und sei* $f : U \to M'$ *eine gleichmäßig stetige Abbildung. Dann gibt es genau eine stetige Abbildung* $\widetilde{f} : \overline{U} \to M'$*, die* f *fortsetzt. Diese Fortsetzung ist ebenfalls gleichmäßig stetig.*

10.3 Konstruktion der μ-Halbmetrik auf Σ

Um den eben zitierten Fortsetzungs-Satz in der vorliegenden speziellen Situation anwenden zu können, etabliert man zunächst eine geeignete Halbmetrik auf Σ, die sogenannte *μ-Halbmetrik*. Für die Konstruktion dieser Halbmetrik benötigt man den Begriff der *symmetrischen Differenz* zweier Mengen:

Definition 10.5 *Seien* $A, B \subset \Omega$*. Die Menge* $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ *heißt* **symmetrische Differenz von A und B**.

Lemma 10.6 *Seien* $n \in \mathbb{N}$ *und* $A, B, C, A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n \subset \Omega$*. Dann gilt:*

(i) $A \triangle A = \emptyset$.

(ii) $A \triangle B = B \triangle A$.

(iii) $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$.

(iv) $A \triangle B = A^c \triangle B^c$.

(v) $A \triangle \emptyset = A$.

(vi) $A \cap B = \emptyset \iff A \triangle B = A \cup B$.

(vii) $B \subset A \iff A \triangle B = A \setminus B$.

(viii) $(\bigcup_{k=1}^n A_k) \triangle (\bigcup_{k=1}^n B_k) \subset \bigcup_{k=1}^n A_k \triangle B_k$.

Beweis. (i), (ii) : Trivial.
(iii) : Sei $x \in A \triangle B$. O.B.d.A. sei $x \in A \setminus B$. Ist $x \in C$, so $x \in C \setminus B$, also $x \in C \triangle B$. Ist $x \notin C$, so $x \in A \setminus C$, also $x \in A \triangle C$.
(iv) : Es gilt: $A^c \triangle B^c = (A^c \setminus B^c) \cup (B^c \setminus A^c) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = A \triangle B$.
(v), (vi), (vii) : Trivial.
(viii) : O.B.d.A. sei $x \in (\bigcup_{k=1}^n A_k) \setminus (\bigcup_{k=1}^n B_k)$. O.B.d.A. sei $x \in A_1$. Da $x \notin \bigcup_{k=1}^n B_k$, ist $x \notin B_1$. Also ist $x \in A_1 \setminus B_1$ und daher $x \in A_1 \triangle B_1 \subset \bigcup_{k=1}^n A_k \triangle B_k$.
■

Satz und Definition 10.7 *Die Abbildung* $d_\Sigma : \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \mu(A \triangle B)$ *, ist eine Halbmetrik auf* Σ*, die sogenannte* μ-**Halbmetrik**.

Beweis. Seien $A, B, C \in \Sigma$. Die Aussagen (i) und (ii) von Lemma 10.6 implizieren $d_\Sigma(A, A) = \mu(\emptyset) = 0$ und $d_\Sigma(A, B) = d_\Sigma(B, A)$. Aussage (iii) desselben Lemmas liefert unter Beachtung der Monotonie und Subadditivität von μ:

$$\begin{aligned} d_\Sigma(A, B) &= \mu(A \triangle B) \leq \mu(A \triangle C \cup C \triangle B) \leq \mu(A \triangle C) + \mu(C \triangle B) \\ &= d_\Sigma(A, C) + d_\Sigma(C, B) . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Aus den Aussagen (iv) bis (viii) von Lemma 10.6 gewinnt man weitere nützliche Informationen über die μ-Halbmetrik:

Lemma 10.8 *Seien* $n \in \mathbb{N}$ *und* $A, B, A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n \in \Sigma$*. Dann gilt:*

(i) $d_\Sigma(A, B) = d_\Sigma(A^c, B^c)$.

(ii) $d_\Sigma(A, \emptyset) = \mu(A)$.

(iii) $|\mu(A) - \mu(B)| \leq d_\Sigma(A, B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

(iv) $A \cap B = \emptyset \implies d_\Sigma(A, B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(v) $B \subset A \implies d_\Sigma(A, B) = \mu(A) - \mu(B)$.

(vi) $d_\Sigma(\bigcup_{k=1}^n A_k, \bigcup_{k=1}^n B_k) \leq \sum_{k=1}^n d_\Sigma(A_k, B_k)$.

Beweis. (i), (ii) : Dies folgt sofort aus den Aussagen (iv) und (v) von Lemma 10.6.
(iii) : Es gilt:

$$\begin{aligned} \mu(A) - \mu(B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) - \mu(B) = \mu(A \setminus B) - \mu(B \setminus (A \cap B)) \\ &= \mu(A \setminus B) - \mu(B \setminus A) \leq \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) \\ &= \mu(A \triangle B) = d_\Sigma(A, B) . \end{aligned}$$

Analog folgt $\mu(B) - \mu(A) \leq d_\Sigma(A, B)$, also insgesamt die erste zu zeigende Ungleichung aus (iii). Ferner gilt aufgrund der Dreiecksungleichung und wegen (ii):

$$d_\Sigma(A, B) \ \leq \ d_\Sigma(A, \emptyset) + d_\Sigma(B, \emptyset) \ = \ \mu(A) + \mu(B) \ .$$

(iv) – (vi) : Diese Aussagen folgen sofort aus den Aussagen (vi) bis (viii) von Lemma 10.6. ∎

10.4 Die Äquivalenz von μ-Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit

Der folgende Satz 10.9 zeigt, daß die bezüglich d_Σ gleichmäßig stetigen Inhalte mit Werten in X genau die μ-stetigen Inhalte auf $\mathfrak{D}$ mit Werten in X sind; man beachte dabei, daß im Beweis sowohl die Additivität des fixierten Inhalts F als auch die Algebra-Struktur von $\mathfrak{D}$ wesentlich ausgenutzt wird.

Satz 10.9 *Sei $F : \mathfrak{D} \to X$ ein Inhalt. Dann sind äquivalent:*

(i) F ist gleichmäßig stetig.

(ii) F ist in $\emptyset$ stetig.

(iii) F ist μ-stetig.

Beweis. (i)⇒(ii) : Trivial.
(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) : Dies folgt sofort aus der Gültigkeit von $d_\Sigma(A, \emptyset) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathfrak{D}$ sowie wegen $F(\emptyset) = 0$.
(iii)⇒(i) : F sei μ-stetig. Sei $\varepsilon > 0$. Dann findet man $\delta > 0$ so, daß gilt:

$$\forall \ D \in \mathfrak{D} \ : \ \mu(D) < \delta \implies \| \, F(D) \, \| < \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Seien $A, B \in \mathfrak{D}$ derart, daß $d_\Sigma(A, B) < \delta$. Dies impliziert $\mu(A \setminus B) < \delta$ und $\mu(B \setminus A) < \delta$. Es folgt

$$\begin{aligned} \| \, F(A) - F(B) \, \| \ &= \ \| \, F(A \cap B) + F(A \setminus B) - F(B \cap A) - F(B \setminus A) \, \| \\ &\leq \ \| \, F(A \setminus B) \, \| + \| \, F(B \setminus A) \, \| \ < \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon \, . \end{aligned}$$

Also ist F gleichmäßig stetig. ∎

Korollar 10.10 *Seien F und G zwei μ-stetige Inhalte auf $\mathfrak{D}$ mit Werten in X. $\mathcal{M}$ liege dicht in $\mathfrak{D}$. Dann gilt:*

(i) Stimmen F und G auf $\mathcal{M}$ überein, so gilt bereits $F = G$.

(ii) *Im Fall* $X = \mathbb{R}$ *folgt aus* $F\big|_{\mathcal{M}} \le G\big|_{\mathcal{M}}$ *bereits* $F \le G$.

Beweis. Beide Behauptungen folgen unmittelbar aus der Tatsache, daß die μ-stetigen Inhalte F und G stetig sind und auf einer dichten Teilmenge von $\mathfrak{D}$ in der jeweils fixierten Relation („=“ bzw. „$\le$“) zueinander stehen. ∎

10.5 Der Abschluß von $\mathfrak{D}$ ist eine σ-Algebra

Nach dem eben bewiesenen Satz 10.9 und dem Fortsetzungs-Satz 10.4 besitzt jeder μ-stetige Inhalt $F : \mathfrak{D} \to X$ eine eindeutige gleichmäßig stetige Fortsetzung auf $\overline{\mathfrak{D}}$. Um davon sprechen zu können, daß diese Fortsetzung ebenfalls ein (μ-stetiger) Inhalt ist, muß man zunächst noch klären, ob der Abschluß von $\mathfrak{D}$ die Struktur einer Algebra trägt. Diesbezüglich stellt sich erfreulicherweise heraus, daß $\overline{\mathfrak{D}}$ sogar eine σ-Algebra ist; die Abschlußbildung bezüglich der μ-Halbmetrik ist also sozusagen mit einer „Struktur-Verbesserung“ verbunden. Wird insbesondere Σ von $\mathfrak{D}$ erzeugt, so ist $\overline{\mathfrak{D}} = \Sigma$ (d.h. $\mathfrak{D}$ liegt dicht in Σ). Diese Tatsache wird später von Bedeutung sein.

Satz 10.11 *Der Abschluß* $\overline{\mathfrak{D}}$ *der Algebra* $\mathfrak{D}$ *im halbmetrischen Raum* (Σ, d_Σ) *ist eine Teil-*σ*-Algebra von* Σ.

Beweis. Wegen $\emptyset \in \mathfrak{D}$ ist auch $\emptyset \in \overline{\mathfrak{D}}$. Sei $A \in \overline{\mathfrak{D}}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann findet man $B \in \mathfrak{D}$ derart, daß $d_\Sigma(A, B) < \varepsilon$. Offenbar ist $B^c \in \mathfrak{D}$. Nach Lemma 10.8 (i) folgt ferner $d_\Sigma(A^c, B^c) < \varepsilon$. Also ist $A^c \in \overline{\mathfrak{D}}$, d.h. $\overline{\mathfrak{D}}$ ist unter Differenzbildung abgeschlossen. Sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathfrak{D}}$. Wegen $\overline{\mathfrak{D}} \subset \Sigma$ ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Σ. Daher ist $A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \Sigma$. Man setzt nun für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n \;:=\; \bigcup_{k=1}^{n} A_k \;.$$

$(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine aufsteigende Folge in Σ, und es gilt:

$$\mu(A) \;=\; \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \;.$$

Wegen der Monotonie und Endlichkeit von μ ist ferner $\mu(B_n) \le \mu(A) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man findet also $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $n \ge n_0$ gilt:

$$\mu(A \setminus B_n) \;=\; \mu(A) - \mu(B_n) \;<\; \frac{\varepsilon}{2} \;.$$

Sei $n \ge n_0$. Da $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathfrak{D}}$ ist, findet man Mengen $C_1, ..., C_n \in \mathfrak{D}$ derart, daß

$$d_\Sigma(A_k, C_k) \;<\; \frac{\varepsilon}{2n}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$. Man setzt nun $C := \bigcup_{k=1}^{n} C_k$. Offenbar ist $C \in \mathfrak{D}$. Es folgt unter Verwendung von Lemma 10.8 (ii) und (vi):

$$\begin{aligned} d_\Sigma(A, C) &= d_\Sigma((A \setminus B_n) \cup B_n, \emptyset \cup C) \leq d_\Sigma(A \setminus B_n, \emptyset) + d_\Sigma(B_n, C) \\ &= \mu(A \setminus B_n) + d_\Sigma\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k, \bigcup_{k=1}^{n} C_k\right) \\ &\leq \mu(A \setminus B_n) + \sum_{k=1}^{n} d_\Sigma(A_k, C_k) < \frac{\varepsilon}{2} + n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon . \end{aligned}$$

Also ist auch $A \in \overline{\mathfrak{D}}$, d.h. $\overline{\mathfrak{D}}$ ist abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigungsbildung. Damit ist $\overline{\mathfrak{D}}$ eine Teil-σ-Algebra von Σ. ■

Korollar 10.12 *Wird Σ von $\mathfrak{D}$ erzeugt, so ist $\overline{\mathfrak{D}} = \Sigma$, d.h. $\mathfrak{D}$ liegt dicht in Σ.*

Beweis. Wird Σ von $\mathfrak{D}$ erzeugt, so ist Σ die kleinste σ-Algebra in $\mathfrak{P}(\Omega)$, die $\mathfrak{D}$ und damit auch $\overline{\mathfrak{D}}$ enthält. Nach Satz 10.11 ist deshalb $\overline{\mathfrak{D}} = \Sigma$. ■

10.6 Der Fortsetzungs-Satz für μ-stetige Inhalte

Die folgende Bemerkung sowie die beiden sich anschließenden Lemmata dienen dem Zweck, die Additivität der Fortsetzung eines μ-stetigen Inhaltes nachzuweisen.

Bemerkung 10.13 *Auf dem Produktraum $\Sigma \times \Sigma$ wird in gewohnter Weise durch*

$$((A, A'), (B, B')) \mapsto d_\Sigma(A, B) + d_\Sigma(A', B')$$

eine Halbmetrik $d_{\Sigma \times \Sigma}$ definiert. ■

Lemma 10.14 *Die Vereinigungs-Abbildung $v : \Sigma \times \Sigma \to \Sigma$, $(A, B) \mapsto A \cup B$, ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1.*

Beweis. Seien $A, B, A', B' \in \Sigma$. Dann gilt wegen Lemma 10.8 (vi):

$$\begin{aligned} d_\Sigma(v(A, A'), v(B, B')) &= d_\Sigma(A \cup A', B \cup B') \leq d_\Sigma(A, B) + d_\Sigma(A', B') \\ &= d_{\Sigma \times \Sigma}((A, A'), (B, B')) . \quad ■ \end{aligned}$$

Lemma 10.15 *Ist $F : \Sigma \to X$ stetig, so auch $\alpha_F : \Sigma \times \Sigma \to X$, $(A, B) \mapsto F(A) + F(B)$.*

Beweis. Als Hintereinanderausführung der durch $(A, B) \mapsto (F(A), F(B))$ definierten stetigen Abbildung auf $\Sigma \times \Sigma$ mit Werten in $X \times X$ und der (stetigen) Addition auf X ist α_F stetig. ■

Satz und Definition 10.16 (Fortsetzungs-Satz für μ-stetige Inhalte) *Sei* $F : \mathfrak{D} \to X$ *ein* μ*-stetiger Inhalt. Dann gibt es genau einen* μ*-stetigen Inhalt* $\widetilde{F} : \overline{\mathfrak{D}} \to X$*, der* F *fortsetzt.* $\widetilde{F}$ *wird im folgenden als* **die μ-stetige Fortsetzung von** F *bezeichnet.*

Beweis. Nach Satz 10.9 ist F gleichmäßig stetig. Nach dem Fortsetzungs-Satz 10.4 findet man genau eine gleichmäßig stetige Abbildung $\widetilde{F} : \overline{\mathfrak{D}} \to X$, die F fortsetzt. Nach den Lemmata 10.14 und 10.15 sind (unter Verwendung der dort eingeführten Notationen) die beiden Abbildungen $\widetilde{F} \circ v$ und $\alpha_{\widetilde{F}}$ stetig. Weil diese beiden stetigen Abbildungen auf der in $\overline{\mathfrak{D}} \times \overline{\mathfrak{D}}$ dichten Menge $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ übereinstimmen, stimmen sie auch global überein. Also gilt $\widetilde{F}(A \cup B) = \widetilde{F}(A) + \widetilde{F}(B)$ für alle $A, B \in \overline{\mathfrak{D}}$, d.h. $\widetilde{F}$ ist additiv, mithin ein Inhalt. Erneute Anwendung von Satz 10.9 liefert nun die μ-Stetigkeit von $\widetilde{F}$. ■

Kombiniert man den eben bewiesenen Fortsetzungs-Satz für μ-stetige Inhalte mit der Aussage von Korollar 10.12, so erhält man das

Korollar 10.17 *Sei* $F : \mathfrak{D} \to X$ *ein* μ*-stetiger Inhalt. Wird* Σ *von* $\mathfrak{D}$ *erzeugt, so gibt es genau einen* μ*-stetigen Inhalt* $\widetilde{F} : \Sigma \to X$*, der* F *fortsetzt.* ■

10.7 Die Variation der μ-stetigen Fortsetzung

Am Ende dieses Abschnitts werden wir uns noch mit der Variation der μ-stetigen Fortsetzung befassen. Diesbezüglich läßt sich zeigen, daß jeder Inhalt $F : \mathfrak{D} \to X$ die BV-Eigenschaft auf seine μ-stetige Fortsetzung $\widetilde{F}$ überträgt. Das dabei auftretende Problem ist, daß beim Bilden der Variation von $\widetilde{F}$ wesentlich mehr Zerlegungen zur Verfügung stehen, als dies beim Bilden der Variation von F der Fall ist. Als Hilfsmittel zur Erreichung dieses Zieles etablieren wir zunächst die beiden Lemmata 10.18 und 10.19.

Lemma 10.18 *Seien* $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \Sigma$*. Sind* A_1 *und* A_2 *disjunkt, so gilt:*

$$\mu(B_1 \cap B_2) \;\leq\; 2 \cdot (d_\Sigma(A_1, B_1) + d_\Sigma(A_2, B_2)) \,.$$

Beweis. Setze $m := d_\Sigma(A_1, B_1) + d_\Sigma(A_2, B_2)$. Es gelte $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Zunächst gilt nach der Dreiecksungleichung:

$$d_\Sigma(A_1, A_2) \;\leq\; d_\Sigma(B_1, B_2) + m \,.$$

Damit folgt wegen $B_1 \cap B_2 = (B_1 \cup B_2) \setminus (B_1 \triangle B_2)$ und unter Verwendung der

Aussagen (iv) und (iii) aus Lemma 10.8:

$$\begin{aligned}\mu(B_1 \cap B_2) &= \mu(B_1 \cup B_2) - \mu(B_1 \triangle B_2) \ \le\ \mu(B_1) + \mu(B_2) - d_\Sigma(B_1, B_2)\\ &\le \mu(B_1) + \mu(B_2) - d_\Sigma(A_1, A_2) + m\\ &= \mu(B_1) + \mu(B_2) - (\mu(A_1) + \mu(A_2)) + m\\ &= (\mu(B_1) - \mu(A_1)) + (\mu(B_2) - \mu(A_2)) + m\\ &\le d_\Sigma(B_1, A_1) + d_\Sigma(B_2, A_2) + m \ =\ 2m\ . \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Lemma 10.19 *Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

($*$) *Für alle paarweise disjunkten Mengen $A_1, ..., A_n \in \overline{\mathfrak{D}}$ und für jedes $\delta > 0$ gibt es paarweise disjunkte Mengen $A'_1, ..., A'_n \in \mathfrak{D}$ derart, daß $d_\Sigma(A_k, A'_k) < \delta$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\le n}$.*

Beweis. Induktion nach n. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist trivial aufgrund der Definition des Abschlusses bezüglich der μ-Halbmetrik. Sei also $n \in \mathbb{N}$ derart, daß ($*$) gilt. Seien $A_1, ..., A_{n+1} \in \overline{\mathfrak{D}}$ paarweise disjunkt. Sei $\delta > 0$. Nach Induktions-Voraussetzung findet man paarweise disjunkte Mengen $A'_1, ..., A'_n \in \mathfrak{D}$ derart, daß

$$d_\Sigma(A_k, A'_k) \ <\ \frac{\delta}{5n}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_{\le n}$. Gesucht ist nun noch eine zu $A'_1, ..., A'_n$ disjunkte Menge $A'_{n+1} \in \mathfrak{D}$, für welche die Ungleichung $d_\Sigma(A_{n+1}, A'_{n+1}) < \delta$ erfüllt ist. — Man setzt

$$A_0 \ =\ \bigcup_{k=1}^{n} A_k \qquad \text{und} \qquad A'_0 \ =\ \bigcup_{k=1}^{n} A'_k\ .$$

Nach Lemma 10.8 (vi) gilt daher:

$$d_\Sigma(A_0, A'_0) \ \le\ \sum_{k=1}^{n} d_\Sigma(A_k, A'_k) \ <\ n \cdot \frac{\delta}{5n} \ =\ \frac{\delta}{5}\ . \tag{10.1}$$

Wegen der Dichtheit von $\mathfrak{D}$ in $\overline{\mathfrak{D}}$ findet man nun $C \in \mathfrak{D}$ so, daß

$$d_\Sigma(A_{n+1}, C) \ <\ \frac{\delta}{5}\ . \tag{10.2}$$

Man setzt $A'_{n+1} := C \setminus A'_0$. Dann gilt offenbar $A'_{n+1} \in \mathfrak{D}$ und $A'_{n+1} \cap A'_0 = \emptyset$, also $A'_{n+1} \cap A'_k = \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\le n}$. Es bleibt zu zeigen: $d_\Sigma(A_{n+1}, A'_{n+1}) < \delta$. Zunächst gilt wegen (10.2):

$$d_\Sigma(A_{n+1}, A'_{n+1}) \ \le\ d_\Sigma(A_{n+1}, C) + d_\Sigma(C, A'_{n+1}) \ <\ \frac{\delta}{5} + d_\Sigma(C, A'_{n+1})\ . \tag{10.3}$$

Wegen $A'_{n+1} \subset C$ gilt nach Lemma 10.8 (v):

$$d_\Sigma(C, A'_{n+1}) \;=\; \mu(C) - \mu(A'_{n+1}) \;=\; \mu(C \setminus A'_{n+1}) \;=\; \mu(C \setminus (C \setminus A'_0)) \;=\; \mu(C \cap A'_0)\,.$$

Kombiniert man dies mit Lemma 10.18 sowie mit (10.1) und (10.2), so folgt:

$$d_\Sigma(C, A'_{n+1}) \;=\; \mu(C \cap A'_0) \;\le\; 2 \cdot (d_\Sigma(C, A_{n+1}) + d_\Sigma(A_0, A'_0)) \;<\; 2 \cdot 2 \cdot \frac{\delta}{5} \;=\; \frac{4\delta}{5}\,.$$

Setzt man dies in (10.3) ein, so erhält man schließlich die gewünschte Ungleichung $d_\Sigma(A_{n+1}, A'_{n+1}) < \delta$. ■

Satz 10.20 *Sei $F : \mathfrak{D} \to X$ ein μ-stetiger Inhalt. Sei $\widetilde{F} : \overline{\mathfrak{D}} \to X$ die μ-stetige Fortsetzung von F. Dann gilt $V_F(A) = V_{\widetilde{F}}(A)$ für alle $A \in \mathfrak{D}$.*

Beweis. Sei $A \in \mathfrak{D}$. Nach Bemerkung 10.1 gilt $V_F(A) \le V_{\widetilde{F}}(A)$. Sei $\mathcal{Z}$ eine $\overline{\mathfrak{D}}$-Zerlegung von A. Sei $n \in \mathbb{N}$ die Mächtigkeit von $\mathcal{Z}$. Die Elemente von $\mathcal{Z}$ werden im folgenden mit $B_1, ..., B_n$ bezeichnet. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\widetilde{F}$ nach Satz 10.9 gleichmäßig stetig ist, findet man $\delta > 0$ so, daß gilt:

$$\forall\, U, V \in \overline{\mathfrak{D}} \;:\; d_\Sigma(U, V) < \delta \implies \left\| \widetilde{F}(U) - \widetilde{F}(V) \right\| < \frac{\varepsilon}{n}\,. \tag{10.4}$$

Nach Lemma 10.19 findet man paarweise disjunkte Mengen $B'_1, ..., B'_n \in \mathfrak{D}$ so, daß $d_\Sigma(B_k, B'_k) < \delta$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\le n}$. Man setzt nun $B''_k := B'_k \cap A$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\le n}$ und $B''_{n+1} := A \setminus \bigcup_{k=1}^n B''_k$. Dann ist offenbar $\mathcal{Z}'' := \{B''_1, ..., B''_{n+1}\}$ eine $\mathfrak{D}$-Zerlegung von A. Sei $k \in \mathbb{N}_{\le n}$. Wegen $B_k \subset A$ folgt $B_k \setminus B'_k = B_k \setminus (B'_k \cap A) = B_k \setminus B''_k$. Wegen $B''_k \subset B'_k$ gilt ferner $B''_k \setminus B_k \subset B'_k \setminus B_k$. Diese beiden Ergebnisse implizieren:

$$\begin{aligned} d_\Sigma(B''_k, B_k) \;&=\; \mu(B_k \setminus B''_k) + \mu(B''_k \setminus B_k) \\ &\le\; \mu(B_k \setminus B'_k) + \mu(B'_k \setminus B_k) \;=\; d_\Sigma(B'_k, B_k) \;<\; \delta\,. \end{aligned}$$

Es folgt schließlich mit (10.4):

$$\begin{aligned} Var(\widetilde{F}, A, \mathcal{Z}) \;&=\; \sum_{k=1}^n \left\| \widetilde{F}(B_k) \right\| \;\le\; \sum_{k=1}^n \left\| \widetilde{F}(B_k) - \widetilde{F}(B''_k) \right\| + \left\| \widetilde{F}(B''_k) \right\| \\ &<\; n \cdot \frac{\varepsilon}{n} + \sum_{k=1}^{n+1} \left\| F(B''_k) \right\| \;=\; \varepsilon + Var(F, A, \mathcal{Z}'') \;\le\; \varepsilon + V_F(A)\,. \end{aligned}$$

Dies liefert schließlich $Var(\widetilde{F}, A, \mathcal{Z}) \;\le\; V_F(A)$ und damit die noch fehlende Ungleichung $V_{\widetilde{F}}(A) \le V_F(A)$. ■

Korollar 10.21 *Sei $F : \mathfrak{D} \to X$ ein μ-stetiger Inhalt, und sei $\widetilde{F} : \overline{\mathfrak{D}} \to X$ die μ-stetige Fortsetzung von F. Genau dann ist F von beschränkter Variation, wenn $\widetilde{F}$ von beschränkter Variation ist.*

Beweis. Nach Satz 10.20 gilt $V_F(\Omega) = V_{\widetilde{F}}(\Omega)$. Dies liefert die Behauptung. ■

11 λ-absolutstetige Maße und λ-Integralmaße

11.1 Begriffs-Hierarchien

Bemerkung 11.1 *Sei $\mathfrak{D} \in \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$. Dann gilt:*

(i) λ-stetige Inhalte auf $\mathfrak{D}$ sind λ-Nullmengen-stetig, beschränkt und σ-additiv.

(ii) λ-absolutstetige Inhalte auf $\mathfrak{D}$ sind λ-stetig und von beschränkter Variation.

(iii) λ-Integralmaße auf $\mathfrak{D}$ sind λ-absolutstetig.

Beweis. (i) : Sei F ein λ-stetiger Inhalt auf $\mathfrak{D}$. Die λ-Nullmengen-Stetigkeit von F folgt sofort aus Bemerkung 8.5 (i). Gemäß Beispiel 8.10 ist I λ-fein zerlegbar in $\mathfrak{D}$; aus Satz 8.11 (i) folgt daher die Beschränktheit von F. Weil F also insbesondere endlich ist, liefert Satz 8.7 schließlich die σ-Additivität.
(ii) : Analog zum Beweis von (i) kombiniert man Bemerkung 8.5 (ii) und Satz 8.11 (ii).
(iii) : Dies folgt aus Satz 9.3 (iii). ■

Die soeben notierten Tatsache, daß die λ-Stetigkeit eines Inhaltes auf $\mathfrak{D} \in \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ stets dessen σ-Additivität impliziert, bedeutet, daß die Begriffe „ λ-(absolut)stetiges Maß auf $\mathfrak{D}$“ und „ λ-(absolut)stetiger Inhalt auf $\mathfrak{D}$“ äquivalent sind. O.B.d.A. können wir daher im folgenden stets von λ-(absolut)stetigen Maßen auf $\mathfrak{D}$ sprechen.

11.2 Charakterisierung λ-absolutstetiger Maße auf $\mathfrak{B}$

Satz 11.2 *Sei F ein Inhalt auf $\mathfrak{B}$. Dann sind äquivalent:*

(i) F ist λ-absolutstetig.

(ii) F ist λ-stetig und von beschränkter Variation.

(iii) F ist λ-Nullmengen-stetig, σ-additiv und von beschränkter Variation.

Beweis. (i)$\Rightarrow$(ii) : Bemerkung 11.1 (iii).
(ii)$\Rightarrow$(iii) : Bemerkung 11.1 (ii).
(iii)$\Rightarrow$(i) : Satz 8.6. ■

11.3 Charakterisierung λ-Nullmengen-stetiger Inhalte auf $\mathfrak{A}$

Aufgrund der speziellen Struktur der Algebra $\mathfrak{A}$ lassen sich die λ-Nullmengen-stetigen Inhalte auf $\mathfrak{A}$ folgendermaßen charakterisieren:

Lemma 11.3 *F sei ein Inhalt auf $\mathfrak{A}$. Genau dann ist F λ-Nullmengen-stetig, wenn $F(\{x\}) = 0$ für jedes $x \in I$ gilt.*

Beweis. Die Implikation „$\Rightarrow$“ ist offensichtlich wahr, da $\{x\}$ für alle $x \in I$ eine in $\mathfrak{A}$ enthaltene λ-Nullmenge ist. Zum Beweis der umgekehrten Implikation gelte $F(\{x\}) = 0$ für jedes $x \in I$. Sei $A \in \mathfrak{A}$ eine λ-Nullmenge. Da A in $\mathfrak{A}$ enthalten ist, besteht A aus endlich vielen Teilintervallen von I. Da A eine λ-Nullmenge ist, sind diese Teilintervalle ebenfalls λ-Nullmengen, also höchstens einpunktig. Die Voraussetzung über F sowie die Additivität von F implizieren daher $F(A) = 0$, d.h. F ist λ-Nullmengen-stetig. ■

11.4 Zur Eindeutigkeit λ-(Nullmengen-)stetiger Inhalte

Das zentrale Ergebnis dieses Unter-Abschnitts ist der Beweis der Tatsache, daß λ-stetige Inhalte auf $\mathfrak{B}$ bereits dann vollständig bestimmt sind, wenn man ihr Verhalten auf der Menge der Teil-Intervalle von I mit linkem Randpunkt a kennt. Als Hilfsmittel zur Erreichung dieses Zieles wird zunächst der Begriff der *kanonischen Fortsetzung* einer auf $\mathcal{T}$ definierten Mengenfunktion eingeführt.

Notation 11.4 *Für jedes $A \in \mathfrak{A}$ wird die Menge der Zusammenhangskomponenten von A mit $\mathcal{Z}_A$ bezeichnet.*

Bemerkung und Definition 11.5 *Für alle $A \in \mathfrak{A}$ gilt:*

(i) Genau dann ist $A \in \mathcal{T}$, wenn $\mathcal{Z}_A = \{A\}$.

(ii) $\mathcal{Z}_A$ ist eine $\mathcal{T}$-Zerlegung von A, und jede $\mathcal{T}$-Zerlegung von A ist eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}_A$. Daher wird $\mathcal{Z}_A$ als **die minimale $\mathcal{T}$-Zerlegung von** *A bezeichnet.*

Beweis. Folgt sofort aus der Tatsache, daß die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ genau die Intervalle sind. ■

Definition 11.6 *F sei eine additive Mengenfunktion auf $\mathcal{T}$. Die auf $\mathfrak{A}$ durch*

$$A \;\mapsto\; \sum_{E \in \mathcal{Z}_A} F(E)$$

definierte Mengenfunktion $\overline{F}$ wird als **die kanonische Fortsetzung von** *F bezeichnet.*

Bemerkung 11.7 *F sei eine additive Mengenfunktionen auf $\mathcal{T}$. Ferner sei G ein Inhalt auf $\mathfrak{A}$. Dann gilt:*

(i) $\overline{F}$ *ist additiv, also ein Inhalt auf* $\mathfrak{A}$.

(ii) $\overline{F}\big|_{\mathcal{T}} \;=\; F$.

(iii) $\overline{G\big|_{\mathcal{T}}} \;=\; G$.

Beweis. (i) : Seien $A, B \in \mathfrak{A}$ disjunkt. Offenbar ist $\;\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_A \cup \mathcal{Z}_B\;$ eine $\mathcal{T}$-Zerlegung von $A \cup B$, und zwar eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}_{A\cup B}$. Aufgrund der Definition der kanonischen Fortsetzung sowie aufgrund der Additivität von F folgt:

$$\begin{aligned} \overline{F}(A \cup B) \;&=\; \sum_{E \in \mathcal{Z}_{A\cup B}} F(E) \;=\; \sum_{E \in \mathcal{Z}} F(E) \\ &=\; \sum_{E \in \mathcal{Z}_A} F(E) \,+\, \sum_{E \in \mathcal{Z}_B} F(E) \;=\; \overline{F}(A) \,+\, \overline{F}(B)\;. \end{aligned}$$

Also ist $\overline{F}$ additiv.
(ii) : Trivial.
(iii) : Sei $A \in \mathfrak{A}$. Dann gilt aufgrund der Definition der minimalen Zerlegung von A sowie wegen der Additivität von G:

$$\overline{G\big|_{\mathcal{T}}}(A) \;=\; \sum_{E \in \mathcal{Z}_A} G\big|_{\mathcal{T}}(E) \;=\; \sum_{E \in \mathcal{Z}_A} G(E) \;=\; G(A)\;. \quad \blacksquare$$

Satz 11.8 *F sei ein λ-Nullmengen-stetiger Inhalt auf $\mathfrak{A}$. Genau dann ist $F \equiv 0$, wenn $F(\,[\,a,x\,]\,) = 0$ für alle $x \in I$.*

Beweis. Die Implikation „⇒“ ist trivial. Zum Beweis der umgekehrten Implikation gelte $F(\,[\,a,x\,]\,) = 0$ für alle $x \in I$. Sei J ein Teil-Intervall von I mit linkem Randpunkt x und rechtem Randpunkt y. Weil F λ-Nullmengen-stetig und additiv ist, folgt:

$$F(J) \;=\; F(J) + 0 \;=\; F(\,]\,x,y\,]\,) + F(\,[\,a,x\,]\,) \;=\; F(\,[\,a,y\,]\,) \;=\; 0\;.$$

Also ist $F\big|_{\mathcal{T}} \equiv 0$. Nach Bemerkung 11.7 (iii) gilt dann: $F = \overline{F\big|_{\mathcal{T}}} \equiv 0$. $\blacksquare$

Korollar 11.9 *F und G seien λ-Nullmengen-stetige Inhalte auf $\mathfrak{A}$ mit Werten in X. Genau dann ist $F = G$, wenn $F(\,[\,a,x\,]\,) = G(\,[\,a,x\,]\,)$ für alle $x \in I$.* $\blacksquare$

Satz 11.10 *F sei ein λ-stetiger Inhalt auf $\mathfrak{B}$. Genau dann ist $F \equiv 0$, wenn $F([a,x]) = 0$ für alle $x \in I$.*

Beweis. Die Implikation „$\Rightarrow$" ist trivial. Zum Beweis der umgekehrten Implikation gelte $F([a,x]) = 0$ für alle $x \in I$. Weil $F\big|_{\mathfrak{A}}$ ein λ-Nullmengen-stetiger Inhalt ist, gilt $F\big|_{\mathfrak{A}} \equiv 0$ nach Satz 11.8. Deshalb sind sowohl F als auch die Null-Abbildung auf $\mathfrak{B}$ λ-stetige Fortsetzungen von $F\big|_{\mathfrak{A}}$. Nach Korollar 10.17 ist daher $F \equiv 0$. ∎

Korollar 11.11 *F und G seien λ-stetige Inhalte auf $\mathfrak{B}$ mit Werten in X. Genau dann ist $F = G$, wenn $F([a,x]) = G([a,x])$ für alle $x \in I$.* ∎

Korollar 11.12 *Seien $g, h : I \to X$ integrierbar, und seien G bzw. H die λ-Integralmaße von g bzw. h auf $\mathfrak{B}$. Dann sind äquivalent:*

(i) $G = H$.

(ii) $\int_a^x g(t)\,dt = \int_a^x h(t)\,dt$.

(iii) $g = h$ *λ-fast überall.*

Beweis. Kombination von Korollar 11.11 mit Korollar 9.6. ∎

11.5 Vektorraum-Strukturen

Notation 11.13 *Für $\mathfrak{D} \in \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ setzt man:*

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}(\mathfrak{D},X) &:= \{\ F \in \mathsf{Abb}(\mathfrak{D},X) \mid F \text{ ist additiv } \} \\
\mathsf{NC}_\lambda(\mathfrak{D},X) &:= \{\ F \in \mathsf{A}(\mathfrak{D},X) \mid F \text{ ist } \lambda\text{-Nullmengen-stetig } \} \\
\mathsf{C}_\lambda(\mathfrak{D},X) &:= \{\ F \in \mathsf{A}(\mathfrak{D},X) \mid F \text{ ist } \lambda\text{-stetig } \} \\
\mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{D},X) &:= \{\ F \in \mathsf{A}(\mathfrak{D},X) \mid F \text{ ist } \lambda\text{-absolutstetig } \} \\
\mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{D},X) &:= \{\ F \in \mathsf{A}(\mathfrak{D},X) \mid F \text{ ist } \lambda\text{-Integralmaß } \} \\
\mathsf{ABV}(\mathfrak{D},X) &:= \{\ F \in \mathsf{A}(\mathfrak{D},X) \mid F \text{ ist von beschränkter Variation } \} \\
\mathsf{ABV}_0(\mathfrak{D},X) &:= \mathsf{ABV}(\mathfrak{D},X) \cap \mathsf{NC}_\lambda(\mathfrak{D},X)
\end{aligned}$$

Sei $\mathfrak{D} \in \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$. Unter Berücksichtigung der Eigenschaften der Norm auf X ergibt sich unmittelbar aus den entsprechenden Definitionen, daß $\mathsf{NC}_\lambda(\mathfrak{D},X)$, $\mathsf{C}_\lambda(\mathfrak{D},X)$ und $\mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{D},X)$ $\mathbb{K}$-Vektorräume sind. Bemerkung 9.4 liefert ferner die $\mathbb{K}$-Vektorraum-Eigenschaft von $\mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{D},X)$. Schließlich verifiziert man durch einen kurzen Blick auf Bemerkung 7.4, daß $\mathsf{ABV}(\mathfrak{D},X)$ und damit auch $\mathsf{ABV}_0(\mathfrak{D},X)$ $\mathbb{K}$-Vektorräume sind. Unmittelbar aus der Definition von $\mathsf{ABV}_0(\mathfrak{D},X)$ bzw. aus Bemerkung 11.1 erhält man die folgende

Bemerkung 11.14 *Sei $\mathfrak{D} \in \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$. Dann gilt:*

(i) $\mathsf{ABV}_0(\mathfrak{D}, X)$ *ist* $\mathbb{K}$*-Untervektorraum sowohl von* $\mathsf{ABV}(\mathfrak{D}, X)$ *als auch von* $\mathsf{NC}_\lambda(\mathfrak{D}, X)$.

(ii) $\mathsf{C}_\lambda(\mathfrak{D}, X)$ *ist ein* $\mathbb{K}$*-Untervektorraum von* $\mathsf{NC}_\lambda(\mathfrak{D}, X)$.

(iii) $\mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{D}, X)$ *ist* $\mathbb{K}$*-Untervektorraum sowohl von* $\mathsf{ABV}_0(\mathfrak{D}, X)$ *als auch von* $\mathsf{C}_\lambda(\mathfrak{D}, X)$.

(iv) $\mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{D}, X)$ *ist ein* $\mathbb{K}$*-Untervektorraum von* $\mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{D}, X)$. ∎

Der folgende Satz zeigt, daß der Vektorraum $\mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{A}, X)$ zu $\mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{B}, X)$ isomorph ist:

Satz 11.15 *Die Abbildung* $\varrho : \mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{B}, X) \to \mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{A}, X)$, $F \mapsto F\big|_{\mathfrak{A}}$, *ist ein linearer Isomorphismus. Seine Umkehrabbildung ist durch* $F \mapsto \widetilde{F}$ *gegeben, wobei mit* $\widetilde{F}$ *wie üblich die* λ*-stetige Fortsetzung von* F *bezeichnet wird.*

Beweis. Für alle $F \in \mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{B}, X)$ ist nach Bemerkung 10.2 $\varrho(F)$ ebenfalls λ-absolutstetig, d.h. $\mathrm{Bild}(\varrho) \subset \mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{A}, X)$. Also ist ϱ wohldefiniert. Sei $F \in \mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{A}, X)$. Nach Bemerkung 11.1 (iii) ist F λ-stetig und von beschränkter Variation. Da $\mathfrak{B}$ die von $\mathfrak{A}$ erzeugte σ-Algebra ist, gibt es nach Korollar 10.17 genau einen λ-stetigen Inhalt $\widetilde{F} : \mathfrak{B} \to X$, der F fortsetzt. Da F von beschränkter Variation ist, ist nach Korollar 10.21 auch $\widetilde{F}$ von beschränkter Variation. Nach Satz 11.2 ist also $\widetilde{F}$ λ-absolutstetig, also ein Element von $\mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{B}, X)$. Wegen $\varrho(\widetilde{F}) = F$ ist ϱ surjektiv; wegen der Eindeutigkeit der λ-stetigen Fortsetzung ist ϱ zudem injektiv. Da schließlich ϱ offensichtlich linear ist, ist der Satz bewiesen. ∎

Korollar 11.16 *Es sei* ϱ *die in Satz 11.15 definierte Abbildung. Dann ist* $\varrho\big|_{\mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{B}, X)}$ *ein linearer Isomorphismus auf* $\mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{A}, X)$.

Beweis. Wegen Satz 11.15 genügt es zu zeigen: $\varrho(\mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{B}, X)) = \mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{A}, X)$. Die Inklusion „$\subset$“ ist trivial. Sei also $G \in \mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{A}, X)$, und sei $g : I \to X$ eine Lebesgue-Dichte von G. Das λ-Integralmaß von g auf $\mathfrak{B}$ werde mit $\widehat{G}$ bezeichnet. Nach Satz 9.3 ist $\widehat{G}$ λ-absolutstetig. Also ist $\widehat{G}$ die λ-stetige Fortsetzung von G ist, d.h. es gilt: $\widehat{G} = \varrho^{-1}(G)$. Es folgt: $\varrho(\widehat{G}) = G$. ∎

12 Die Äquivalenz von Borel-Maßen und Abbildungen auf I

12.1 Punkt-Abbildung und Inkrement-Inhalt

Bemerkung und Definition 12.1 *Durch* $F \mapsto \{\ (x\,,\ F(\,[\,a,x\,]\,))\mid x\in I\ \}$ *wird eine Abbildung*

$$\Pi\ :\ \bigcup_{\mathfrak{M}\in\{\mathcal{T},\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}} \mathsf{Abb}(\mathfrak{M},X)\ \to\ \mathsf{Abb}(I,X)$$

definiert. Für beliebige X-wertige Mengenfunktionen F auf $\mathfrak{M}\in\{\mathcal{T},\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}$ wird die Abbildung $\Pi(F)$ als **Punkt-Abbildung von** *F bezeichnet. — Durch*

$$f\ \mapsto\ \left\{\ \left(A\,,\ \sum_{E\in\mathcal{Z}_A} f(\sup E)-f(\inf E)\right)\ \middle|\ A\in\mathfrak{A}\ \right\}$$

wird eine Abbildung $\Delta:\mathsf{Abb}(I,X)\to\mathsf{Abb}(\mathfrak{A},X)$ definiert.[1] ■

Bemerkung und Definition 12.2 *Für alle $f\in\mathsf{Abb}(I,X)$ ist $\Delta(f)$ ein λ-Nullmengen-stetiger Inhalt auf $\mathfrak{A}$, der sogenannte* **Inkrement-Inhalt von** *f.*[2]

Beweis. $\Delta(f)$ ist die kanonische Fortsetzung der Mengenfunktion

$$F\ :\ \mathcal{T}\to X\ ,\ A\ \mapsto\ f(\sup A)-f(\inf A)\ ,$$

d.h. es ist $\Delta(f)=\overline{F}$. Sei $\mathcal{P}$ eine endliche disjunkte Teilmenge von $\mathcal{T}$ so, daß $A:=\bigcup\mathcal{P}\in\mathcal{T}$, d.h. A ist ein Intervall. O.B.d.A. sei A nicht-leer. Bezeichnet man die Mächtigkeit von $\mathcal{P}$ mit n, so lassen sich die Elemente von $\mathcal{P}$ derart mit $P_1,\dots,P_n$ durchnumerieren, daß $\inf A=\inf P_1$, $\sup A=\sup P_n$ und $\sup P_j=\inf P_{j+1}$ für alle $j\in\mathbb{N}_{<n}$ gilt. Es folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{P\in\mathcal{P}} F(P)\ &=\ \sum_{j=1}^{n} F(P_j)\ =\ \sum_{j=1}^{n} f(\sup P_j)-f(\inf P_j)\\ &=\ f(\sup A)-f(\inf A)\ =\ F(A)\ .\end{aligned}$$

[1] An dieser Stelle wird wegen der besseren Lesbarkeit der sogenannte *freischwebende Abbildungsbegriff* verwendet.

[2] Diese Namensgebung orientiert sich an einer ähnlichen Begriffsbildung bei Saks, vgl. [SAK] S. 96.

Also ist F additiv. Nach Bemerkung 11.7 (i) ist $\Delta(f)$ ein Inhalt auf $\mathfrak{A}$. Ferner gilt für alle $x \in I$ die Identität $\Delta(f)(\{x\}) = f(x) - f(x) = 0$. Also ist $\Delta(f)$ nach Lemma 11.3 bereits λ-Nullmengen-stetig. ∎

Bemerkung 12.3 *(i) Für alle $F \in \mathsf{NC}_\lambda(\mathfrak{A}, X)$ gilt:* $\Delta(\Pi(F)) = F$.

(ii) Für alle $g \in \mathsf{Abb}(I, X)$ gilt: $\Pi(\Delta(g)) = g - g(a)$.

Beweis. (i) : Sei $F \in \mathsf{NC}_\lambda(\mathfrak{A}, X)$. Es gilt für alle $x \in I$:

$$\Delta(\Pi(F))([\,a,x\,]) \;=\; \Pi(F)(x) - \Pi(F)(a) \;=\; F([\,a,x\,]) - F([\,a,a\,]) \;=\; F([\,a,x\,]) \;.$$

Weil nach Bemerkung 12.2 auch $\Delta(\Pi(F))$ ein λ-Nullmengen-stetiger Inhalt auf $\mathfrak{A}$ ist, impliziert Korollar 11.9 die gewünschte Gleichheit $\Delta(\Pi(F)) = F$.
(ii) : Sei $f \in \mathsf{Abb}(I, X)$. Dann gilt für alle $x \in I$:

$$\Pi(\Delta(f))(x) \;=\; \Delta(f)([\,a,x\,]) \;=\; f(x) - f(a) \;. \quad ∎$$

12.2 Korrespondenzen zwischen Abbildungen auf I und Inhalten auf $\mathfrak{A}$

In diesem Unter-Abschnitt werden wir Korrespondenzen zwischen Abbildungen auf I und Inhalten auf $\mathfrak{A}$ herleiten, indem wir unter verschiedenen zusätzlichen Voraussetzungen an f die jeweiligen Eigenschaften des zugehörigen Inkrement-Inhaltes $\Delta(f)$ bestimmen. Auf diese Weise stellt man fest, daß 1:1-Korrespondenzen zwischen BV-Abbildungen und BV-Inhalten, zwischen absolutstetigen Abbildungen und λ-absolutstetigen Maßen sowie zwischen unbestimmten Integralen und λ-Integralmaßen bestehen. Der durch das eben angedeutete Vorgehen eingenommene Standpunkt mit Blickwinkel *von* den Abbildungen *hin zu* den Inhalten ist in natürlich willkürlich; mittels Bemerkung 12.3 lassen sich alle im folgenden notierten Ergebnisse auf den umgekehrten Standpunkt übertragen. — Wir beginnen mit den BV-Abbildungen. Die folgende Bemerkung zeigt, daß man zur Bestimmung der Variation eines Inhaltes F auf $\mathfrak{A}$ bezüglich einer Menge $A \in \mathfrak{A}$ bei der Supremumsbildung nicht alle $\mathfrak{A}$-Zerlegungen von A berücksichtigen muß, sondern sich auf die $\mathcal{T}$-Zerlegungen von A beschränken kann.

Bemerkung 12.4 *Sei F ein Inhalt auf $\mathfrak{A}$. Dann gilt für alle $A \in \mathfrak{A}$:*

$$V_F(A) \;=\; \sup\{\; \mathit{Var}(F, A, \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_{\mathcal{T}}(A) \;\} \;.$$

Beweis. Wegen $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{A}}(A) \supset \mathfrak{Z}_{\mathcal{T}}(A)$ gilt:

$$\sup\{\; \mathit{Var}(F, A, \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{A}}(A) \;\} \;\geq\; \sup\{\; \mathit{Var}(F, A, \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_{\mathcal{T}}(A) \;\} \;.$$

Sei nun $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{A}}(A)$. Dann ist $\mathcal{Z}' := \bigcup_{J \in \mathcal{Z}} \mathcal{Z}_J$ eine $\mathcal{T}$-Zerlegung von A, und zwar eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$. Also folgt wegen der Verfeinerungs-Ungleichung die noch fehlende Ungleichung

$$\sup\{\ Var(F, A, \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{A}}(A)\ \} \ \le\ \sup\{\ Var(F, A, \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_{\mathcal{T}}(A)\ \}\ . \quad \blacksquare$$

Bemerkung 12.5 *Für jedes Teil-Intervall A von I gilt:*

$$V_{\Delta(f)}(A) \ = \ \sup\left\{ \sum_{J \in \mathcal{Z}} \| f(\sup J) - f(\inf J) \| \ \middle|\ \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_{\mathcal{T}}(A) \right\} \ =$$
$$= \ \sup\left\{ \sum_{k=1}^{n} \| f(a_k) - f(a_{k-1}) \| \ \middle|\ n \in \mathbb{N}\ ,\ \inf A = a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_n = \sup A \right\} .$$

Beweis. Sei A ein Teil-Intervall von I. Unmittelbar aus der Definition des Inkrement-Inhalts $\Delta(f)$ folgt für alle $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_{\mathcal{T}}(A)$:

$$Var(\Delta(f), A, \mathcal{Z}) \ = \ \sum_{J \in \mathcal{Z}} \| f(\sup J) - f(\inf J) \| \ .$$

Kombiniert man dies mit Bemerkung 12.4, so folgt die erste Gleichheit. Die zweite Gleichheit erhält man dann sofort unter Berücksichtigung der Definition der $\mathcal{T}$-Zerlegungen. $\blacksquare$

Satz 12.6 *(i) Genau dann ist f von beschränkter Variation, wenn auch der Inkrement-Inhalt $\Delta(f)$ von beschränkter Variation ist.*

(ii) Sei $F \in \mathsf{NC}_\lambda(\mathfrak{A}, X)$. Genau dann ist F von beschränkter Variation, wenn auch die Punkt-Abbildung $\Pi(F)$ von beschränkter Variation ist.

Beweis. Nach Bemerkung 12.5 ist f genau dann von beschränkter Variation, wenn $V_{\Delta(f)}(I)$ endlich ist. Wegen der Monotonie der Variation ist damit Aussage (i) bewiesen. Aussage (ii) folgt mittels Bemerkung 12.3 (i) aus (i). $\blacksquare$

In der Literatur wird üblicherweise die Variation $V_{\Delta(f)}$ des Inkrement-Inhalts $\Delta(f)$ abkürzend mit V_f notiert. Man nennt V_f dann die *Variation von f*, die Größe $V_f(I)$ heißt *Totalvariation von f*. Gemäß Satz 12.6 übertragen sich die Eigenschaften von $V_{\Delta(f)}$ dementsprechend auf V_f.

Korollar 12.7 *Ist f von beschränkter Variation, so auch beschränkt. Insbesondere ist also $\mathsf{BV}(I, X)$ ein $\mathbb{K}$-Untervektorraum von $\mathsf{B}(I, X)$.*

Beweis. f sei von beschränkter Variation. Dann ist $\Delta(f)$ nach Satz 12.6 ein BV-Inhalt, insbesondere also beschränkt. Sei $M := \| \Delta(f) \|_\infty + \| f(a) \|$. Es folgt für alle $x \in I$:

$$\| f(x) \| \;\leq\; \| f(x) - f(a) \| + \| f(a) \| \;=\; \| \Delta(f)([a,x]) \| + \| f(a) \| \;\leq\; M\,.$$

Also ist f beschränkt. ■

Indem wir lediglich die entsprechenden Definitionen umformulieren, erhalten wir für die absolutstetigen Abbildungen die folgende Korrespondenz:

Satz 12.8 *(i) Genau dann ist f absolutstetig, wenn der Inkrement-Inhalt $\Delta(f)$ λ-absolutstetig ist.*

(ii) Sei $F \in \mathsf{NC}_\lambda(\mathfrak{A}, X)$. Genau dann ist F λ-absolutstetig, wenn die Punkt-Abbildung $\Pi(F)$ absolutstetig ist.

Beweis. (i) „$\Rightarrow$“ : f sei absolutstetig. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ gemäß der Absolutstetigkeit von f für $\frac{\varepsilon}{2}$ anstelle von ε. Sei $A \in \mathfrak{A}$ so, daß $\lambda(A) < \delta$. Nach Bemerkung 12.4 und gemäß der Definition der λ-Absolutstetigkeit von $\Delta(f)$ ist zu zeigen:

$$\sup \{ \; \mathit{Var}(\Delta(f), A, \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_\mathcal{T}(A) \; \} \;<\; \varepsilon\,.$$

Sei $\mathcal{Z}$ eine $\mathcal{T}$-Zerlegung von A. Dann findet man $n \in \mathbb{N}$ und Teilintervalle $J_1, ..., J_n$ von I derart, daß $\mathcal{Z} = \{J_1, ..., J_n\}$. Wegen

$$\sum_{k=1}^{n} (\sup(J_k) - \inf(J_k)) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda(J_k) \;=\; \lambda(A) \;<\; \delta$$

folgt nach Voraussetzung:

$$\mathit{Var}(\Delta(f), A, \mathcal{Z}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \| f(\sup(J_k)) - f(\inf(J_k)) \| \;<\; \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Dies impliziert:

$$\sup \{ \; \mathit{Var}(\Delta(f), A, \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_\mathcal{T}(A) \; \} \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2} \;<\; \varepsilon\,.$$

(i) „$\Leftarrow$“ : $\Delta(f)$ sei λ-absolutstetig. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ gemäß der λ-Absolutstetigkeit von $\Delta(f)$. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, b_1, ..., a_n, b_n \in I$ derart, daß $a \leq a_1 \leq b_1 \leq ... \leq a_n \leq b_n \leq b$ und $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$. Setzt man

$$A \;:=\; \bigcup_{k=1}^{n} \,]\, a_k, b_k \,[\;\;,$$

so gilt offenbar $\lambda(A) < \delta$. Ferner ist die minimale $\mathcal{T}$-Zerlegung $\mathcal{Z}_A$ von A gerade die Menge $\{\,]\, a_1, b_1\, [\, , ..., \,]\, a_n, b_n\, [\, \}$. Nach Voraussetzung über $\Delta(f)$ folgt also:

$$\sum_{k=1}^{n} \| f(b_k) - f(a_k) \| \;=\; Var(\Delta(f), A, \mathcal{Z}_A) \;\leq\; V_{\Delta(f)}(A) \;<\; \varepsilon\,.$$

(ii) : Folgt mittels Bemerkung 12.3 (i) aus (i). ■

Korollar 12.9 *Absolutstetige Abbildungen sind von beschränkter Variation. Insbesondere ist also* $\mathsf{AC}(I, X)$ *ein* $\mathbb{K}$-*Untervektorraum von* $\mathsf{BV}(I, X)$.

Beweis. f sei absolutstetig. Dann ist $\Delta(f)$ nach Satz 12.8 λ-absolutstetig, insbesondere also von beschränkter Variation gemäß Bemerkung 11.1 (ii). Daher ist auch f von beschränkter Variation nach Satz 12.6. ■

Für die unbestimmten Integrale ergibt sich schließlich der folgende

Satz 12.10 *(i) Genau dann ist eine Abbildung Integrandenfunktion für f, wenn sie Lebesgue-Dichte des Inkrement-Inhalts $\Delta(f)$ ist. Insbesondere ist f genau dann unbestimmtes Integral, wenn $\Delta(f)$ λ-Integralmaß ist.*

(ii) Sei $F \in \mathsf{NC}_\lambda(\mathfrak{A}, X)$. Genau dann ist eine Abbildung Lebesgue-Dichte von F, wenn sie Integrandenfunktion für $\Pi(F)$ ist. Insbesondere ist F genau dann λ-Integralmaß, wenn $\Pi(F)$ unbestimmtes Integral ist.

Beweis. (i) „$\Rightarrow$“ : $g : I \to X$ sei Integrandenfunktion für f, und G sei das λ-Integralmaß von g auf $\mathfrak{A}$. Offensichtlich gilt dann für alle $x \in I$:

$$G(\,[\,a, x\,]\,) \;=\; \int_a^x g(t)\,dt \;=\; f(x) - f(a) \;=\; \Delta(f)(\,[\,a, x\,]\,)\,.$$

Also stimmen die beiden λ-Nullmengen-stetigen Inhalte G und $\Delta(f)$ nach Satz 11.8 überein, d.h. $g : I \to X$ ist Lebesgue-Dichte von $\Delta(f)$.
(i) „$\Leftarrow$“ : $g : I \to X$ sei Lebesgue-Dichte von $\Delta(f)$. Dann gilt für alle $x \in I$:

$$f(x) \;=\; f(a) + \Delta(f)(\,[\,a, x\,]\,) \;=\; f(a) + \int_a^x g(t)\,dt\,,$$

d.h. g ist Integrandenfunktion für f.
(ii) : Folgt mittels Bemerkung 12.3 (i) aus (i). ■

12.3 Vektorraum-Isomorphismen

Wie im folgenden ohne nennenswerten Aufwand gezeigt wird, ist die durch $F \mapsto \Pi(F)$ auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathsf{NC}_\lambda(\mathfrak{A}, X)$ definierte Abbildung linear und injektiv, also ein Vektorraum-Isomorphismus auf ihr Bild.

Notation 12.11 *Man setzt:*

$$\begin{aligned}
\mathsf{Abb}_0(I,X) &:= \{\ f \in \mathsf{Abb}(I,X) \mid f(a) = 0\ \} \\
\mathsf{BV}_0(I,X) &:= \mathsf{BV}(I,X) \cap \mathsf{Abb}_0(I,X) \\
\mathsf{AC}_0(I,X) &:= \mathsf{AC}(I,X) \cap \mathsf{Abb}_0(I,X) \\
\mathsf{UI}_0(I,X) &:= \mathsf{UI}(I,X) \cap \mathsf{Abb}_0(I,X)
\end{aligned}$$

Satz 12.12 *Durch $F \mapsto \Pi(F)$ wird ein $\mathbb{K}$-Vektorraum-Isomorphismus π von $\mathsf{NC}_\lambda(\mathfrak{A}, X)$ auf $\mathsf{Abb}_0(I,X)$ definiert. Seine Umkehrabbildung ist durch $f \mapsto \Delta(f)$ gegeben.*

Beweis. Sei $F \in \mathsf{NC}_\lambda(\mathfrak{A}, X)$. Wegen der λ-Nullmengen-Stetigkeit von F ist $\Pi(F)(a) = F(\{a\}) = 0$, d.h. $\Pi(F) \in \mathsf{Abb}_0(I,X)$. Also ist π wohldefiniert. Die Linearität von π ist offensichtlich. Für jedes $F \in \mathrm{Kern}(\pi)$ gilt nach Satz 11.8 bereits $F \equiv 0$, d.h. π ist injektiv. Bemerkung 12.3 liefert schließlich die Surjektivität von π sowie die Umkehr-Eigenschaft. ∎

Kombiniert man den eben bewiesenen Satz mit den Sätzen 12.6, 12.9 und 12.10, so erhält man das

Korollar 12.13 *Es bezeichne π die in Satz 12.12 definierte Abbildung. Dann gilt:*

(i) Das Bild von $\mathsf{ABV}_0(\mathfrak{A}, X)$ unter π ist $\mathsf{BV}_0(I,X)$.

(ii) Das Bild von $\mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{A}, X)$ unter π ist $\mathsf{AC}_0(I,X)$.

(iii) Das Bild von $\mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{A}, X)$ unter π ist $\mathsf{UI}_0(I,X)$. ∎

Im Falle λ-absolutstetiger Maße auf $\mathfrak{B}$ gewinnt man schließlich noch folgende Aussage:

Korollar 12.14 *(i) Durch $F \mapsto \Pi(F)$ wird ein $\mathbb{K}$-Vektorraum-Isomorphismus $\widetilde{\pi}$ von $\mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{B}, X)$ auf $\mathsf{AC}_0(I,X)$ definiert. Seine Umkehrabbildung ist durch $f \mapsto \widetilde{\Delta(f)}$ gegeben, wobei mit $\widetilde{\Delta(f)}$ wie üblich die λ-stetige Fortsetzung von $\Delta(f)$ bezeichnet wird.*

(ii) Das Bild von $\mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{B}, X)$ unter $\widetilde{\pi}$ ist $\mathsf{UI}_0(I,X)$.

Beweis. Aussage (i) ist eine Kombination von Satz 11.15 und Korollar 12.13, wenn man beachtet, daß für alle $F \in \mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{B}, X)$ die Beziehung $\Pi(F|_{\mathfrak{A}}) = \Pi(F)$ gilt. Die zweite Aussage folgt dann mittels Korollar 11.16. ∎

12.4 Erläuternde Skizzen und Beispiele

Zur Verdeutlichung der Zusammenhänge zwischen den im letzten Unter-Abschnitt behandelten Vektorräume dient die folgende Skizze:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{NC}_\lambda(\mathfrak{A},X) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{isomorph}"] \arrow[d, dash] & \mathsf{Abb}_0(I,X) \arrow[d, dash] \\
 & \mathsf{ABV}_0(\mathfrak{A},X) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{isomorph}"] \arrow[d, dash] & \mathsf{BV}_0(I,X) \arrow[d, dash] \\
\mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{B},X) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{isomorph}"] \arrow[d, dash] & \mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{A},X) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{isomorph}"] \arrow[d, dash] & \mathsf{AC}_0(I,X) \arrow[d, dash] \\
\mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{B},X) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{isomorph}"] & \mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{A},X) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{isomorph}"] & \mathsf{UI}_0(I,X)
\end{tikzcd}
$$

Für unsere Zwecke von besonderem Interesse sind die absolutstetigen Abbildungen und die unbestimmten Integrale. Mittels Korollar 12.14 erhalten wir aus obiger Skizze die folgende Detail-Ansicht:

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{B},X) \arrow[r, shift left, "\widetilde{\pi}"] \arrow[d, dash] & \mathsf{AC}(I,X) \arrow[l, shift left, "\widetilde{\pi}^{-1}"] \arrow[d, dash] \\
\mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{B},X) \arrow[r, shift left, "\widetilde{\pi}"] & \mathsf{UI}(I,X) \arrow[l, shift left, "\widetilde{\pi}^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

Im folgenden notieren wir noch einige Beispiele zu den in diesem Abschnitt behandelten Funktionenräumen:

Beispiel 12.15 Eine beschränkte Abbildung, die nicht von beschränkter Variation ist. *Sei $e \in X$ ein Einheitsvektor. Die Abbildung*

$$
g \ : \ [\,0,1\,] \to X \ , \ x \mapsto \begin{cases} 0 & , \quad \textit{falls } x = 0 \ , \\ e \cdot x \cdot \left(\sin \frac{\pi}{2x}\right)^2 & , \quad \textit{falls } x > 0 \ . \end{cases}
$$

ist zwar beschränkt, aber nicht von beschränkter Variation.

Beweis. Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $b_k := \frac{1}{k}$. Dann gilt offensichtlich $g(b_k) = b_k \cdot e$, falls k ungerade ist, andernfalls gilt $g(b_k) = 0$. Man setzt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n \;:=\; \bigcup_{k=1}^{n} [\, b_{2k}, b_{2k-1}\,] \ .$$

Offenbar gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\|\, \Delta(g)(A_n) \,\| \;=\; \left\| \sum_{k=1}^{n} g(b_{2k-1}) - g(b_{2k}) \right\| \;=\; \left\| \sum_{k=1}^{n} b_{2k-1} \cdot e \right\| \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \ .$$

Weil A_n für alle $n \in \mathbb{N}$ in der Algebra $\mathfrak{A}$ enthalten ist, ist $\Delta(g)$ unbeschränkt. Also ist g nicht von beschränkter Variation. ■

Beispiel 12.16 Eine BV-Abbildung, die nicht absolutstetig ist. *Die Cantor-Funktion ist monoton, also von beschränkter Variation. Weil die Cantor-Funktion nicht nullmengentreu ist, ist sie nicht absolutstetig (siehe Beispiele 2 und 2' der Einleitung).* ■

Beispiel 12.17 Eine absolutstetige Abbildung, die kein unbestimmtes Integral ist. *Die Abbildung aus Beispiel 4 der Einleitung ist absolutstetig. Weil sie nirgends differenzierbar ist, ist sie kein unbestimmtes Integral.* ■

12.5 Eine Anwendung des verallgemeinerten HDI

Kombiniert man den verallgemeinerten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 5.1) mit Korollar 12.15, so erhält man den

Satz 12.18 *F sei ein X-wertiges Maß auf $\mathfrak{B}$. Dann sind äquivalent:*

(i) F ist Integralmaß, d.h. F besitzt eine Lebesgue-Dichte.

(ii) $\Pi(F)$ ist unbestimmtes Integral.

(iii) F ist λ-absolutstetig, und $\Pi(F)$ erfüllt die Bedingung (DIFF-INT).

(iv) $\Pi(F)$ ist absolutstetig und erfüllt die Bedingung (DIFF-INT).

(v) $\Pi(F)$ ist stetig, nullmengentreu und erfüllt die Bedingung (DIFF-INT).

In diesem Fall ist die Ableitung von $\Pi(F)$ eine Lebesgue-Dichte von F. ■

12.6 Gel'fand-Räume und die Radon-Nikodým-Eigenschaft bezüglich λ

Der Vollständigkeit halber notieren wir an dieser Stelle nochmals die bereits in der Einleitung gegebenen Definitionen der Begriffe *Gel'fand-Raum* und *Radon-Nikodým-Eigenschaft bezüglich* λ sowie den dort formulierten Satz 8:

Definition 12.19 *(i) Der Banachraum X wird als* **Gel'fand-Raum** *bezeichnet, wenn alle absolutstetigen Abbildungen auf I mit Werten in X bereits unbestimmte Integrale sind, d.h. wenn $\mathsf{AC}(I, X) = \mathsf{UI}(I, X)$ gilt.*

(ii) Man sagt, der Banachraum X habe die **Radon-Nikodým-Eigenschaft bezüglich** λ*, wenn jedes λ-absolutstetige Maß auf $\mathfrak{B}$ mit Werten in X bereits ein λ-Integralmaß ist, d.h. wenn $\mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{B}, X) = \mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{B}, X)$ gilt.*

Satz 12.20 *Genau dann ist X Gel'fand-Raum, wenn X die Radon-Nikodým-Eigenschaft bezüglich λ hat.*

Beweis. Genau dann ist X ein Gel'fand-Raum, wenn die beiden $\mathbb{K}$-Vektorräume $\mathsf{UI}(I, X)$ und $\mathsf{AC}(I, X)$ übereinstimmen. Dies ist offenbar äquivalent zur Bedingung $\mathsf{UI}_0(I, X) = \mathsf{AC}_0(I, X)$. Kombiniert man dies mit den Korollar 12.14, so folgt die Behauptung. ■

Zu diesem Satz notieren wir abschließend zwei Bemerkungen:

(1) Bei Diestel/Uhl wird in der Definition der Radon-Nikodým-Eigenschaft bezüglich λ anstelle der Bedingung $\mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{B}, X) = \mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{B}, X)$ die folgende Bedingung verwendet:

Jedes λ-stetige BV-Maß auf $\mathfrak{B}$ mit Werten in X ist Integralmaß.

Dies ist jedoch angesichts von Satz 11.2 äquivalent zu der hier verwendeten knapperen Bedingung $\mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{B}, X) = \mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{B}, X)$.

(2) Von der *Radon-Nikodým-Eigenschaft (von X)* schlechthin spricht man, wenn für jeden endlichen Maßraum (Ω, Σ, μ) die μ-stetigen BV-Maße auf Σ mit Werten in X bereits Integralmaße sind.[3] Ein nicht-trivialer Satz zeigt, daß der Banachraum X die Radon-Nikodým-Eigenschaft bereits dann besitzt, wenn die Radon-Nikodým-Eigenschaft bezüglich λ vorliegt.[4]

[3] siehe [DIE] Definition III.1.3, S. 61
[4] siehe [DIE] Corollary V.3.8, S. 138

Anhang
Die Cantor-Funktion

General-Voraussetzung: Es sei $I := [\,0,1\,]$.

Konstruktion der Cantor-Menge

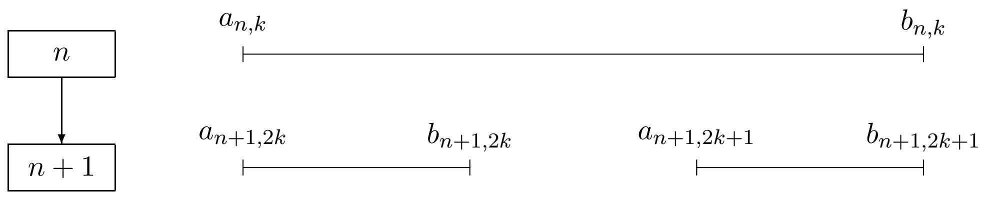
Zunächst setzt man

$$a_{0,0} \;:=\; 0 \qquad \text{und} \qquad b_{0,0} \;:=\; 1\;.$$

Damit definiert man rekursiv für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in U_n := \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$:

$$\begin{aligned}
a_{n+1,2k} &:= a_{n,k} \\
b_{n+1,2k} &:= a_{n,k} + 3^{-(n+1)} \\
a_{n+1,2k+1} &:= a_{n,k} + 2 \cdot 3^{-(n+1)} \\
b_{n+1,2k+1} &:= b_{n,k}
\end{aligned}$$

Den Rekursionsschritt veranschaulichen wir durch eine Skizze:



Offenbar gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $k \in U_n$:

$$b_{n,k} - a_{n,k} \;=\; 3^{-n}\;. \tag{12.1}$$

Ferner ergibt sich sofort aus der oben angegebenen Rekursionsvorschrift für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Beziehung

$$\bigcup_{k \in U_n} \{a_{n,k}\,,\, b_{n,k}\} \;\subset\; \bigcup_{k \in U_{n+1}} \{a_{n+1,k}\,,\, b_{n+1,k}\}\;. \tag{12.2}$$

Daher wird durch

$$J_n := \bigcup_{k \in U_n} [\, a_{n,k}, b_{n,k} \,]$$

eine fallende Folge $(J_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ abgeschlossener Teilmengen von I definiert. Der Grenzwert

$$K \ := \ \lim_{n\to\infty} J_n \ = \ \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} J_n$$

dieser Folge heißt **Cantor-Menge**. Als Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist auch die Cantor-Menge abgeschlossen. Aus (12.2) ergibt sich ferner unmittelbar für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\bigcup_{k\in U_n} \{a_{n,k} \, , \, b_{n,k}\} \ \subset \ K \, . \tag{12.3}$$

Weil nach (12.1) für alle $\mathbb{N}_0$ die Gleichung

$$\lambda(J_n) \ = \ \sum_{k\in U_n} (b_{n,k} - a_{n,k}) \ = \ 2^n \cdot 3^{-n} \ = \ \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

gilt, folgt aus der Stetigkeit von λ bezüglich fallender Mengenfolgen:

$$\lambda(K) \ = \ \lambda\left(\lim_{n\to\infty} J_n\right) \ = \ \lim_{n\to\infty} \lambda(J_n) \ = \ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \ = \ 0 \, .$$

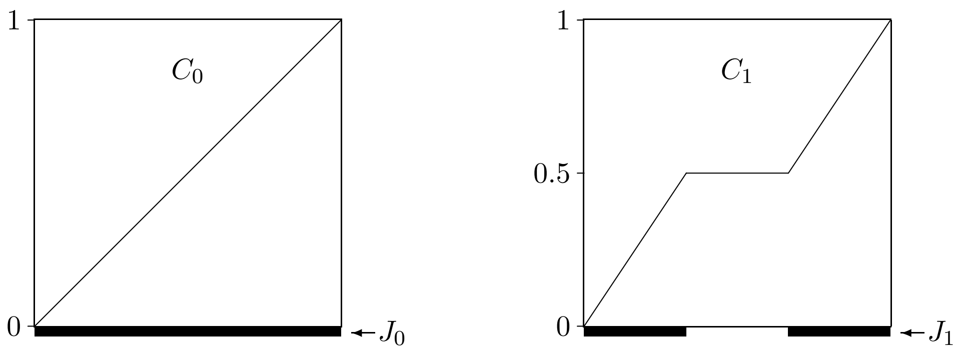
Die Cantor-Menge ist also eine λ-Nullmenge.

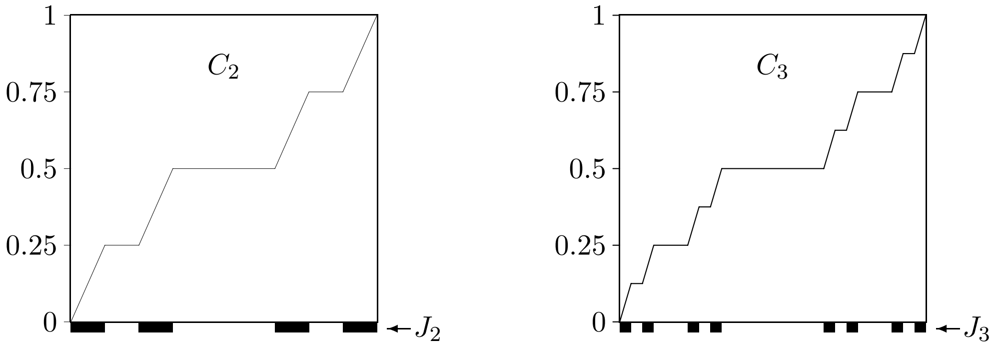
Konstruktion der Cantor-Funktion

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man

$$C_n \ : \ I \to \mathbb{R} \, , \ x \mapsto \begin{cases} 2^{-n}\,(k + 3^n(x - a_{n,k})) & , \quad \text{falls } x \in [\, a_{n,k}, b_{n,k} \,] \ , \\ 2^{-n}(k+1) & , \quad \text{falls } x \in \,]\, b_{n,k}, a_{n,k+1} \,[\ . \end{cases}$$

Zur Veranschaulichung skizzieren wir die Funktionen C_0 bis C_3:





Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wie man leicht verifiziert, ist die Funktion C_n stetig. Ferner stimmen die Funktionen C_n und C_{n+1} auf der Menge $I \setminus J_n$ überein, d.h. es gilt:

$$C_n\big|_{I\setminus J_n} \;=\; C_{n+1}\big|_{I\setminus J_n} \,. \tag{12.4}$$

Aus dieser Tatsache leitet man ohne größere Schwierigkeiten die für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gültige Beziehung

$$\|\, C_{n+1} - C_n \,\|_\infty \;=\; \frac{1}{3}\, 2^{-(n+1)} \;<\; 2^{-(n+1)}$$

her. Dies bedeutet, daß $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge ist. Folglich konvergiert $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion $C : I \to \mathbb{R}$, die sogenannte **Cantor-Funktion**.

Differenzierbarkeits-Eigenschaften der Cantor-Funktion

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Aus (12.4) erhält man sofort die Beziehung

$$C\big|_{I\setminus J_n} \;=\; C_n\big|_{I\setminus J_n} \,. \tag{12.5}$$

Da C_n auf den Zusammenhangskomponenten der offenen Menge $I \setminus J_n$ konstant ist, ist C_n und damit auch die Cantor-Funktion C auf $I \setminus J_n$ differenzierbar mit Ableitung 0. Folglich gilt

$$I \setminus K \;=\; I \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} J_n \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} (I \setminus J_n) \;\subset\; \mathcal{D}_C \;,$$

und es ist $C'(x) = 0$ für alle $x \in I \setminus K$. Demzufolge ist die Cantor-Funktion λ-fast überall differenzierbar mit Ableitung 0.

Das C-Bild der Cantor-Menge

Sei $x \in I \setminus K$. Dann findet man ein $n \in \mathbb{N}$ so, daß $x \in I \setminus J_n$. Aufgrund der Definition von J_n findet man ferner ein $k \in U_n$ derart, daß $x \in V := \,]\, b_{n,k}, a_{n,k+1}\, [$. Nach (12.5) gilt

$$C\big|_V \;=\; C_n\big|_V \;\equiv\; C(x) \,.$$

Dies impliziert aufgrund der Stetigkeit von C

$$C(b_{n,k}) \;=\; C(x) \;=\; C(a_{n,k+1}) \;.$$

Weil nach (12.3) die Punkte $b_{n,k}$ und $a_{n,k+1}$ zur Cantor-Menge gehören, folgt:

$$C(I \setminus K) \;\subset\; C(K) \;.$$

Wegen der Stetigkeit der Cantor-Funktion ist $C(I) = I$. Dies impliziert unter Beachtung der eben notierten Teilmengen-Beziehung die Identität $C(K) = I$. Insbesondere ist also C-Bild der Cantor-Menge keine Nullmenge.

Literaturverzeichnis

[BEN] Benedetto, John J.: Real variable and integration : with historical notes. – Stuttgart : Teubner, 1976. – (Mathematische Leitfäden)

[BRA] Bravo, Alejandro: Concerning a result of Zahorski about differentiability of functions. – In: Anales del Instituto de Matemáticas. Universidad Nacional Autónoma de México, 18 (1978) 1, S. 1–6.

[DIE] Diestel, Joseph; Uhl, John Jerry: Vector measures. – Providence, R. I. : American Mathematical Society, 1977. – (Mathematical surveys ; 15)

[DIN] Dinculeanu, Nicolae: Vector measures. – Oxford [u.a.] : Pergamon Press [u.a.], 1967. – (International series of monographs in pure and applied mathematics ; 95)

[DUN] Dunford, Nelson; Schwartz, Jacob T.: Linear Operators : 1, General Theory. – New York : Interscience, 1957. – (Pure and applied mathematics ; 7)

[GUZ] Guzmán, Miguel de: Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$. – Berlin [u.a.] : Springer, 1975. – (Lecture notes in mathematics ; 481)

[HAL] Halmos, Paul R.: Measure theory. – New York [u.a.] : Springer, 1974. – (Graduate texts in mathematics ; 18)

[HEW] Hewitt, Edwin; Stromberg, Karl: Real and abstract analysis : a modern treatment of the theory of functions of a real variable. – New York [u.a.] : Springer, 1965. – (Graduate texts in mathematics ; 25)

[NAT] Natanson, Isidor P.: Theory of functions of real variable. – New York : Ungar, 1960.

[RIE] Riesz, Frigyes; Sz.-Nagy, Béla: Functional analysis. – New York : Ungar, 1955.

[ROS] Rosenberger, Burkard: Konstruktion eines äußeren Längenmaßes auf Banachräumen. – Kiel : Univ., 1994.

[SAK] Saks, Stanislaw: Theory of the integral. – 2., rev. ed.. – New York : Hafner, 1937. – (Monografje matematyczne ; 7)

[VAR] Varberg, Dale E.: On absolutely continuous functions. – In: Amer. Math. Monthly, 72 (1965), S. 831–841.

Tabelle der verwendeten Symbole

$\mathsf{Abb}(\Omega, \Omega')$	Abbildungen von Ω nach Ω', S. 12f
$\mathsf{Abb}_0(I, X)$	Abbildungen $g : I \to X$ mit $g(a) = 0$, S. 88
$\mathsf{ABV}(\mathfrak{D}, X)$	BV-Inhalte auf $\mathfrak{D}$ mit Werten in X, S. 80
$\mathsf{ABV}_0(\mathfrak{D}, X)$	λ-Nullmengen-stetige BV-Inhalte auf $\mathfrak{D}$ mit Werten in X, S. 80
$\mathsf{AC}(I, X)$	absolutstetige Abbildungen von I nach X, S. 20
$\mathsf{AC}_0(I, X)$	absolutstetige Abbildungen $g : I \to X$ mit $g(a) = 0$, S. 88
$\mathsf{AC}_\lambda(\mathfrak{D}, X)$	λ-absolutstetige Inhalte auf $\mathfrak{D}$ mit Werten in X, S. 80
A^c	Komplement der Menge A, S. 12f
$A \triangle B$	Symmetrische Differenz von A und B, S. 68
$\mathsf{B}(\Omega, M)$	beschränkte Abbildungen von Ω nach M, S. 12f
$\mathsf{BV}(I, X)$	BV-Abbildungen von I nach X, S. 22
$\mathsf{BV}_0(I, X)$	BV-Abbildungen $f : I \to X$ mit $f(\inf I) = 0$, S. 88
$\mathsf{C}(Y, Y')$	stetige Abbildungen von Y nach Y', S. 12f
$\mathsf{C}_\lambda(\mathfrak{D}, X)$	λ-stetige Inhalte auf $\mathfrak{D}$ mit Werten in X, S. 80
$\mathcal{D}_f$	Menge der Differenzierbarkeits-Punkte von $f : I \to X$, S. 3
$\operatorname{diam}(A)$	Durchmesser der Menge A, S. 12f
d_Σ	μ-Halbmetrik, S. 69
$\Delta(f)$	Inkrement-Inhalt von f, S. 83
$\lvert f \rvert$	die durch $x \mapsto \| f(x) \|$ definierte Abbildung, S. 12f
f'_0	Ableitung von $f : I \to X$ (auf $I \setminus \mathcal{D}_f$ durch 0 fortgesetzt), S. 12f
$\overline{F}$	kanonische Fortsetzung von F, S. 79
$\mathsf{IM}_\lambda(\mathfrak{D}, X)$	λ-Integralmaße auf $\mathfrak{D}$ mit Werten in X, S. 80
$\mathbb{K}$	einer der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, S. 12f
$\mathrm{K}(x, r)$, $\overline{\mathrm{K}}(x, r)$	offene bzw. abgeschlossene Kugel um x mit Radius r, S. 12f
$\mathfrak{K}_d^X(A)$	X-Kugel-Überdeckungen von A zum Durchmesser d, S. 23
$\mathfrak{K}_\infty^X(A)$	X-Kugel-Überdeckungen von A, S. 23
λ, λ^*	Lebesgue-Maß, äußeres Lebesgue-Maß, S. 12f
λ_d^X	äußeres d-Maß auf X, S. 23
$\mathsf{NC}_\lambda(\mathfrak{D}, X)$	λ-Nullmengen-stetige Inhalte auf $\mathfrak{D}$ mit Werten in X, S. 80

$\mathfrak{P}(\Omega)$	Potenzmenge von Ω, S. 12f
$\Pi(F)$	Punkt-Abbildung von F, S. 83
$\mathsf{UI}(I,X)$	unbestimmte Integrale von I nach X, S. 17
$\mathsf{UI}_0(I,X)$	unbestimmte Integrale $f : I \to X$ mit $f(\inf I) = 0$, S. 88
$Var(F,A,\mathcal{Z})$	$\mathcal{Z}$-Variation von F auf A, S. 52
V_F	Variation von F, S. 52
$\mathcal{Z}_A$	Menge der Zusammenhangskomponenten von A bzw. minimale $\mathcal{T}$-Zerlegung von A, S. 78
$\mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}(A)$	$\mathcal{M}$-Zerlegungen von A, S. 51
$\bigcup\mathcal{M}, \bigcap\mathcal{M}$	Vereinigung bzw. Durchschnitt von Mengensystemen, S. 12f

Register