



DARSTELLBARKEIT GANZER ZAHLEN
DURCH KAPLANSKYS
TERNÄRE QUADRATISCHE FORM

Thomas Reinke

2002

Reine Mathematik

DARSTELLBARKEIT GANZER ZAHLEN
DURCH KAPLANSKYS
TERNÄRE QUADRATISCHE FORM

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
im Fachbereich Mathematik und Informatik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Thomas Reinke
aus Rheine

2002

Dekan:

Prof. Dr. F. Natterer

Erster Gutachter:

Prof. Dr. M. Peters

Zweiter Gutachter:

Prof. Dr. J. Elstrodt

Tage der mündlichen Prüfungen:

15., 17., 25. Oktober 2002

Tag der Promotion:

4. Dezember 2002

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Überblick	1
2	Grundlagen der verwendeten Theorien	5
2.1	Quadratische Formen	5
2.2	Dirichletsche L-Reihen	7
2.3	Klassenzahlen imaginär-quadratischer Zahlkörper	8
2.4	Modulformen und Hecke-Operatoren	9
2.5	Die Shimura-Liftung	12
2.6	Elliptische Kurven und Hasse-Weilsche L-Reihen	13
3	Die Kaplansky-Form und ihre Begleiter	19
3.1	Elementare Ergebnisse	21
3.2	Zuordnung einer elliptischen Kurve	27
3.3	Zusammenhang mit Klassenzahlen	32
3.4	Anwendungen des Satzes von Waldspurger	39
3.5	Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung	44
3.6	Formulierung des Hauptsatzes und Beweisskizze	45
4	Explizite Abschätzung von L-Reihen	49
4.1	Formulierung der Ergebnisse	49
4.2	Hilfssaussagen für den Beweis	51
4.3	Beweis von Proposition 1	57
4.4	Beweis von Proposition 2	64
5	Beweis des Hauptsatzes	73
5.1	Beweis der Abschätzung (53) für „kleine“ $N \in \mathbb{N}$	74
5.2	Beweis der Abschätzung (53) für „große“ $N \in \mathbb{N}$	78
A	Anhang	83
A.1	Die Gammafunktion	83
A.2	Hilfssaussagen über L-Reihen	93
A.3	Eine Restgliedabschätzung	95
A.4	Uneigentliche Integrale	96
A.5	Computergestützte Abschätzungen	97
A.6	Abschätzungen für $\delta(X)$ und $\gamma(X)$	106
A.7	Ermittlung der quadratfreien Ausnahmen bis $2 \cdot 10^{12}$	110
	Literaturverzeichnis	111

Notationsverzeichnis

Grundlegende Bezeichnungen

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}_0	Menge $\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{Q}	Körper der rationalen Zahlen
\mathbb{Z}	Ring der ganzen rationalen Zahlen
\mathbb{C}	Körper der komplexen Zahlen
\mathbb{H}	obere Halbebene
\mathbb{P}	Menge der Primzahlen
\mathbb{P}_∞	Menge $\mathbb{P} \cup \{\infty\}$
\mathbb{Q}_p	Körper der p -adischen Zahlen (für $p \in \mathbb{P}_\infty$) mit $\mathbb{Q}_\infty := \mathbb{R}$
\mathbb{Z}_p	Ring der ganzen p -adischen Zahlen (für $p \in \mathbb{P}_\infty$) mit $\mathbb{Z}_\infty := \mathbb{R}$
\mathbb{R}^*	Menge der invertierbaren Elemente eines Ringes \mathbb{R}
$M_n(\mathbb{R})$	Ring der quadratischen $n \times n$ -Matrizen über einem Ring \mathbb{R}
$GL_n(\mathbb{R})$	Teilmenge der invertierbaren Elemente von $M_n(\mathbb{R})$
$SL_n(\mathbb{R})$	Teilmenge aller Elemente von $GL_n(\mathbb{R})$ mit Determinante 1
$\#M$	Anzahl der Elemente einer Menge M
(m, n)	größter gemeinsamer Teiler von $m, n \in \mathbb{Z}$
$\Re z$	Realteil einer Zahl $z \in \mathbb{C}$
$\Im z$	Imaginärteil einer Zahl $z \in \mathbb{C}$
\bar{z}	komplex konjugierte Zahl zu $z \in \mathbb{C}$
$[a; b]$	reelles Intervall mit Grenzen a und b

Modulformen (s. S. 9ff)

$\Gamma_0(N)$	Hecke-Untergruppe der Stufe N
$M_k(N, \chi)$	Vektorraum der Modulformen mit Gewicht k , Stufe N und Charakter χ
$S_k(N, \chi)$	Teilraum der Spitzenformen in $M_k(N, \chi)$
$S_k^{neu}(N, \chi)$	Teilraum der Neufornen in $S_k(N, \chi)$
$T(m)$	Hecke-Operator zu $m \in \mathbb{N}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Petersson'sches Skalarprodukt
$g \otimes \chi$	Twist einer Modulform g mit einem Charakter χ

Spezielle Bezeichnungen

$r_{k,j}(n)$	Anzahl der Darstellungen einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ durch $\phi_{k,j}$
$a_k(n)$	n -ter Koeffizient der Spitzenform f_k (s. S. 27)
$A(n)$	n -ter Koeffizient der Spitzenform F (s. S. 28)
$E(D)$	D -quadratischer Twist der elliptischen Kurve E (s. S. 30)
$L(s)$	Dirichlet'sche L-Reihe zu χ_{-28N} (s. S. 46)
$L_a(s)$	Hasse-Weilsche L-Reihe zu $E(-7N)$ (s. S. 46)

Schreibweisen

Für zwei Funktionen f und g bedeutet $f(z) = \mathcal{O}(g(z))$ die Existenz einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ mit $|f(z)| \leq C |g(z)|$, gültig für den im Einzelfall angegebenen Bereich. Bei fehlender Angabe eines solchen Gültigkeitsbereiches ist „für $z \rightarrow \infty$ “, also für $|z| \geq |z_0|$ mit geeignetem $z_0 \in \mathbb{C}$ gemeint. Weiter wird $f(z) \sim g(z)$ geschrieben, wenn $\lim f(z)/g(z) = 1$ gilt, sobald z dem im jeweiligen Einzelfall angegebenen Grenzwert zustrebt.

Eine ganze Funktion f hat endliche Ordnung, falls eine Zahl $\alpha > 0$ existiert mit $f(z) = \mathcal{O}(\exp(|z|^\alpha))$ für $|z| \rightarrow \infty$. In diesem Fall ist die Ordnung ρ_f von f als das Infimum über alle α mit dieser Eigenschaft definiert.

Eine multiplikative Abbildung $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cup \{0\}$ heißt Charakter modulo $k \in \mathbb{N}$, falls $\chi(n+k) = \chi(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ erfüllt ist und $\chi(n) = 0$ genau für $(n, k) > 1$ gilt. Der Führer eines Charakters ist die kleinste natürliche Zahl, modulo der dieser Charakter definierbar ist. Zur Definition eines Kronecker-Charakters wird das Legendre-Symbol benötigt, welches für $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ und $d \in \mathbb{Z}$ mit $(d, p) = 1$ gegeben ist durch

$$\left(\frac{d}{p}\right) := \begin{cases} +1 & \text{falls } x^2 \equiv d \pmod{p} \text{ über } \mathbb{Z} \text{ lösbar ist,} \\ -1 & \text{falls } x^2 \equiv d \pmod{p} \text{ nicht über } \mathbb{Z} \text{ lösbar ist.} \end{cases}$$

Eine reelle Zahl x wird durch die Signumfunktion sgn auf ihr Vorzeichen aus $\{-1, 0, +1\}$ und durch die Entierfunktion $[\cdot]$ auf diejenige natürliche Zahl n mit $n \leq x < n+1$ abgebildet. Die von-Mangoldt-Funktion Λ ordnet einer Primzahlpotenz p^k den Wert $\log p$ und einer natürlichen Zahl mit zwei oder mehr verschiedenen Primfaktoren den Wert 0 zu.

Die Gammafunktion Γ wird im Anhang ab Seite 83 behandelt, und die Riemannsche Zetafunktion ζ ist für $\Re s > 1$ definiert als die absolut und kompakt konvergente Dirichlet-Reihe $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.

Mit \log wird der Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet, der für reelle Argumente gerade mit dem natürlichen Logarithmus übereinstimmt.

Abkürzungen

s. o.	siehe oben
d. h.	das heißt
s. S.	siehe Seite(n)
z. B.	zum Beispiel
vgl.	vergleiche
bzw.	beziehungsweise
bzgl.	bezüglich
def.	definierte

„If it is proved some day that these four lists are complete,
our knowledge of the integers represented by f and g will
be complete.“
Irving Kaplansky

1 Einleitung und Überblick

Im Jahre 1995 stellte Irving Kaplansky in seiner Arbeit [Kap95] alle ihm bekannten Ergebnisse im Zusammenhang mit der ternären Form $x^2 + y^2 + 7z^2$ zusammen. Besonders interessierte ihn dabei das Problem der Darstellbarkeit ganzer Zahlen durch diese quadratische Form, die in der Literatur (z. B. in [Kel01]) jetzt *Kaplansky-Form* genannt wird. Er stellte also die Frage

(F) Für welche $N \in \mathbb{Z}$ ist die Gleichung $N = x^2 + y^2 + 7z^2$ über \mathbb{Z} lösbar?

Zunächst sind offenbar keine negativen Zahlen darstellbar und aus der Struktur der Kaplansky-Form läßt sich eine arithmetische Progression ableiten, deren sämtliche Elemente ebenfalls nicht darstellbar sein können: Da jede Quadratzahl bei Division durch 7 einen der Reste 0, 1, 2 oder 4 besitzt, ist die Summe zweier Quadratzahlen entweder gar nicht durch 7 teilbar oder sogar ein Vielfaches von 49. Daraus folgt einerseits, daß die gesamten Restklassen 21, 35 und 42 modulo 49 nicht durch die Kaplansky-Form darstellbar sind. Andererseits ist demnach eine Zahl $49N$ genau dann darstellbar, wenn schon $N \in \mathbb{N}$ selbst darstellbar ist. Neben den insofern *unzulässigen* Zahlen der Gestalt $49^a(49b + c)$ mit $a, b \in \mathbb{N}_0$ und $c \in \{21, 35, 42\}$ verfehlt die Kaplansky-Form allerdings noch weitere Zahlen – sogenannte *Ausnahmen*: Offenbar ist weder 3 noch 6 darstellbar und Kaplansky listete in seiner Arbeit weitere 51 Ausnahmen auf, von denen die Zahl 73906 die größte ist.

Im Gegensatz zu den Formen $x^2 + y^2 + az^2$ mit $1 \leq a \leq 6$, die jeweils alle nicht durch Kongruenzbedingungen ausgeschlossenen Zahlen darstellen, ist die Kaplansky-Form also *irregulär*. Diese Beobachtung motivierte Kaplansky zu dem Titel „The first non-trivial genus of positive definite ternary forms“ für seine Arbeit [Kap95]. Die oben erwähnten regulären Formen liegen in einklassigen Geschlechtern, d. h. alle „lokal“ (über \mathbb{Z}_p für jede Primzahl p) zu diesen äquivalente Formen sind auch „global“ (über \mathbb{Z}) äquivalent zu ihnen. Die Kaplansky-Form liegt dagegen in einem zweiklassigen Geschlecht und die Form $x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2yz$ ist ein Vertreter der anderen Klasse.

Kaplansky wies mit elementaren Methoden die Darstellbarkeit für alle zulässigen Elemente der Restklassen 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9 und 11 modulo 12 nach, die nicht die Gestalt $14t^2$ haben. Später zeigten Kelley sowie Pei, Wang und Rosenberger (siehe [Kel01], [PRW01] oder [PW01]), daß alle Ausnahmen der Kaplansky-Form bis auf eventuelle Faktoren 49^k mit $k \in \mathbb{N}$ quadratfrei sind.

In den oben aufgeführten Restklassen modulo 12 liegen daher lediglich die Ausnahmen $14 \cdot 49^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ und die Untersuchung der Darstellbarkeit durch die Kaplansky-Form kann auf die quadratfreien natürlichen Zahlen aus den Restklassen 3, 6, 7 und 10 modulo 12 beschränkt werden. Schließlich existieren nach einem nicht-trivialen Resultat von Duke und Schulze-Pillot aus [DSP90] überhaupt nur endlich viele quadratfreie Ausnahmen.

Es liegt nun die schon von Kaplansky formulierte Vermutung nahe, daß die Kaplansky-Form neben den 53 bekannten keine weiteren quadratfreien Ausnahmen mehr besitzt. In dieser Arbeit wird unter Annahme der Richtigkeit einer Verallgemeinerten Riemannschen Vermutung der Nachweis dieser Aussage erbracht und damit eine bedingte Antwort auf die eingangs gestellte Frage (F) gegeben. Das Vorgehen dazu orientiert sich im wesentlichen an der Arbeit [OS97] von Ken Ono und Kannan Soundararajan bzw. an meiner darauf basierenden Diplomarbeit [Rei99], in denen die entsprechenden Fragestellungen für die ternären Formen $x^2 + y^2 + 10z^2$ bzw. $x^2 + y^2 + 18z^2$ aufgeklärt wurden. Im Gegensatz zu diesen beiden Formen verfehlt die Kaplansky-Form jedoch auch gerade Zahlen und zulässige Vielfache ihrer Determinante (z. B. sind die Zahlen 6 und 14 Ausnahmen). Auf solche Zahlen ist das Verfahren aus [OS97] wegen der Verwendung eines Resultats von Waldspurger nicht direkt anwendbar. Eine vollständige Klärung der Frage (F) ist aber mit Hilfe des in Theorem 1 formulierten Ergebnisses möglich, nach dem die Frage der Darstellbarkeit durch die Kaplansky-Form äquivalent ist zu der entsprechenden Frage für die Formen $x^2 + y^2 + 14z^2$, $x^2 + 7y^2 + 7z^2$ bzw. $2x^2 + 7y^2 + 7z^2$, die im folgenden *Begleiter* der Kaplansky-Form genannt werden: Durch Übergang zu einer dieser Formen kann man sich eines Faktors 2, 7 bzw. 14 entledigen und dann das Verfahren aus [OS97] auf diesen Begleiter anwenden. Wie die Kaplansky-Form liegen diese Formen in zweiklassigen Geschlechtern und auch für die Vertreter der jeweils anderen Klasse, die ebenfalls als *Begleiter* der Kaplansky-Form bezeichnet werden, wird sich die Frage der Darstellbarkeit als untereinander äquivalent erweisen. Das Vorgehen zur Untersuchung der Kaplansky-Form und ihrer Begleiter wird nun zusammengefaßt:

Im ersten Schritt werden den auftretenden Geschlechtern ternärer Formen über deren Thetareihen zunächst Modulformen halbganzen Gewichts zugeordnet, die durch unwesentliche Modifikationen zu simultanen Eigenformen aller Hecke-Operatoren werden. Erfreulicherweise stimmen die zugehörigen Shimura-Liftungen überein und stellen sich als normierte Neuform mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten heraus, so daß mit Hilfe der Eichler-Shimura-Theorie die Zuordnung einer elliptischen Kurve erfolgen kann – die Details finden sich in Abschnitt 3.2, in dem der Kaplansky-Form und ihren Begleitern die Kurve $E : y^2 + xy + y = x^3 + 4x - 6$ zugeordnet wird.

Im zweiten Schritt werden die Fourierkoeffizienten der obigen Thetareihen

einerseits mit Hilfe des Satzes von Waldspurger durch die kritischen Werte der Hasse-Weilschen L-Reihen der $-7N$ -quadratischen Twists dieser elliptischen Kurve ausgedrückt. Andererseits stehen diese Fourierkoeffizienten bzw. die Darstellungsanzahlen durch die auftretenden ternären Formen nach der Minkowski-Siegelschen Formel (genauer wird das explizite Resultat von Jones aus [Jon67] verwendet) in engem Zusammenhang mit den Klassenzahlen der imaginär-quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-28N})$ und daher aufgrund der Dirichletschen Klassenzahlformel auch mit den Werten der Dirichletschen L-Reihen der zugehörigen Kronecker-Charaktere an der Stelle 1. Die genaue Herleitung der entsprechenden Formeln findet sich in den Abschnitten 3.3 und 3.4 – zusammen liefern diese für jede Ausnahme N der Kaplansky-Form eine Abschätzung nach unten für den Quotienten aus $L(1, E(-7N))$ und $L(1, \chi_{-28N})^2$.

Im letzten Schritt wird dieser Quotient dann unter Annahme der Riemannschen Vermutung für die auftretenden L-Reihen so nach oben abgeschätzt, daß sich für als hinreichend groß angenommene Ausnahmen ein Widerspruch zu der im zweiten Schritt ermittelten Abschätzung ergibt. Genauer wird auf diese Weise für alle zulässigen quadratfreien Zahlen $N \geq 2 \cdot 10^{12}$ der (bedingte) Nachweis der Darstellbarkeit durch beide Vertreter des Kaplansky-Geschlechts erbracht. Die mühsamen Details finden sich in den Kapiteln 4 und 5, wobei als wesentliche Hilfsmittel der Hadamardsche Faktorisierungssatz sowie die in den Lemmata 2 und 3 formulierten expliziten Abschätzungen verwendet werden (vgl. Abschnitt 4.2) – im Gegensatz zu den entsprechenden Ergebnissen aus [OS97] oder [Rei99] sind insbesondere die Ergebnisse des vierten Kapitels so allgemein gehalten, daß das vorgestellte Verfahren zur Untersuchung der Kaplansky-Form und ihrer Begleiter ohne allzu großen Aufwand auf andere ternäre Formen in zweiklassigen Geschlechtern übertragen werden kann. Alle zulässigen Zahlen kleinergleich $2 \cdot 10^{12}$ aus den fraglichen Restklassen modulo 12 wurden schließlich mit Computereinsatz auf Darstellbarkeit geprüft, ohne daß dabei neben den schon von Kaplansky gefundenen noch weitere Ausnahmen der Kaplansky-Form auftauchten.

Damit kann – unter Annahme einer Verallgemeinerung der Riemannschen Vermutung (VRV) – die Ausgangsfrage (F) vollständig beantwortet werden:

- (A) *Unter VRV ist die Gleichung $N = x^2 + y^2 + 7z^2$ genau dann über \mathbb{Z} lösbar, wenn $N \in \mathbb{N}$ nicht das Produkt einer Potenz 49^a ($a \in \mathbb{N}_0$) mit $b \in 49\mathbb{N}_0 + \{21, 35, 42\}$ oder mit einer der 53 Zahlen 3, 6, 14, 19, 22, 31, 51, 55, 66, 94, 139, 142, 154, 159, 166, 214, 235, 283, 322, 406, 439, 534, 559, 595, 651, 670, 714, 874, 946, 1435, 1726, 2086, 2131, 2170, 2310, 2419, 2506, 3262, 3346, 3559, 4759, 4879, 6034, 6643, 8554, 9814, 10591, 13699, 13846, 20734, 24514, 50155 oder 73906 ist.*

Fast ohne zusätzlichen Aufwand wird auch das Problem der Darstellbarkeit durch den zweiten Vertreter des Kaplansky-Geschlechts (unter VRV) aufgeklärt und mit Hilfe der oben beschriebenen Äquivalenz ergibt sich daraus eine (bedingte) Antwort auf die entsprechend formulierte Fragestellung für die anderen sechs Begleiter der Kaplansky-Form.

An dieser Stelle bedanke ich mich herzlich bei allen Personen, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben:

Meine Vorgesetzten bei der Westfälischen Provinzial Lebensversicherung AG haben mir durch eine flexible Auslegung des Mobilzeitmodells eine berufs begleitende Promotion ermöglicht. Insbesondere bedanke ich mich bei meinem Abteilungsleiter Herrn Rupieper, der mein Vorhaben in jeder Hinsicht unterstützt und sogar einen Entwurf der Dissertation Korrektur gelesen hat.

Herr Professor Peters hat mich immer wieder zur Fortsetzung meiner im Diplom begonnenen Studien ermutigt und meine Absicht zur Promotion bestärkt. Bei Fragen und Problemen stand er mir stets mit gutem Rat und wertvollen Vorschlägen zur Seite. Seine herzliche und hilfsbereite Art werde ich in dankbarer Erinnerung behalten. Für die freundliche Bereitschaft, meine Arbeit als Zweitgutachter zu referieren, spreche ich Herrn Professor Elstrodt meinen Dank aus.

Vor allem bedanke ich mich bei meiner langjährigen Freundin Katja Flüthmann, die mir die nötigen Freiräume für meine Dissertation geschaffen hat und dabei manche persönliche Einschränkung auf sich nehmen mußte. Ohne ihre Unterstützung und ihr Verständnis hätte ich diese Arbeit nicht erfolgreich zum Abschluß bringen können. Ich freue mich auf die Zeit mit ihr, wenn diese Arbeit nicht mehr unser ständiger Begleiter ist.

Schließlich seien hier meine Eltern erwähnt, die mir eine hervorragende Ausbildung ermöglicht haben und denen ich mit der für sie überraschenden Abgabe dieser Arbeit für alles danken möchte.

2 Grundlagen der verwendeten Theorien

Bevor in Kapitel 3 die Untersuchung der Kaplansky-Form beginnt, wird zunächst eine Einführung in die dabei verwendeten Theorien gegeben, wobei insbesondere einige später benötigte grundlegende Resultate zur Verfügung gestellt werden. Im ersten Abschnitt werden wesentliche Grundbegriffe aus der Theorie quadratischer Formen eingeführt, die in den weiteren Kapiteln als bekannt vorausgesetzt werden. Die Abschnitte 2.2 und 2.3 beschäftigen sich dann mit Dirichletschen L-Reihen bzw. mit den Klassenzahlen imaginär-quadratischer Zahlkörper, wobei die auf Seite 9 formulierte Dirichletsche Klassenzahlformel einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Theorien liefert und sich als ein wichtiges Hilfsmittel für den Beweis des Hauptsatzes dieser Arbeit erweisen wird.

Im verbleibenden Teil dieser Einführung werden Instrumente (Thetareihen, Shimura-Liftung und Eichler-Shimura-Theorie) bereitgestellt, mit deren Hilfe dem Problem der Darstellbarkeit ganzer Zahlen durch die Kaplansky-Form in Kapitel 3 zunächst Modulformen halbganzen sowie ganzzahligen Gewichts und schließlich eine elliptische Kurve zugeordnet werden. In den einzelnen Abschnitten 2.4 bis 2.6 werden die genannten Theorien in ihren Grundzügen vorgestellt, wobei in Abschnitt 2.6 darüber hinaus noch einige Resultate über Hasse-Weilsche L-Reihen elliptischer Kurven zusammengestellt sind, die insbesondere im vierten Kapitel benötigt werden.

2.1 Quadratische Formen

Eine ganzzahlige *quadratische Form* in n Variablen $x = (x_1, \dots, x_n)$ ist ein homogenes Polynom vom Grad 2, genauer eine Funktion

$$\phi(x) := \sum_{1 \leq i, j \leq n} \phi_{ij} x_i x_j \quad \text{mit } \phi_{ij} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \phi_{ii} \in \mathbb{Z} \text{ und } \phi_{ij} = \phi_{ji}.$$

Für die zugehörige Matrix $\Phi := (\phi_{ij}) \in M_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ gilt dann[†] $\phi(x) = x^t \Phi x$. Andererseits ist mit dieser Zuordnung eine quadratische Form durch die Angabe einer symmetrischen Matrix $\Phi \in M_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ mit ganzzahligen Diagonalelementen festgelegt. Es ist daher naheliegend, die *Determinante* $d = d(\phi)$ einer Form ϕ als die Determinante der zugehörigen Matrix Φ zu definieren[‡].

[†] Der Variablenvektor einer quadratischen Form ist – insbesondere bei der Multiplikation mit Matrizen – immer als Spaltenvektor aufzufassen, dessen Komponenten aber aus traditionellen und drucktechnischen Gründen dennoch in einer Zeile geschrieben werden.

[‡] Die Definition der Determinante erfolgt in der Literatur nicht ganz einheitlich; manchmal wird auch der Begriff der Diskriminante verwendet – im folgenden sind bei Verwendung solcher Literatur die Begriffe jeweils an die hier angegebene Definition angepaßt.

Eine Zahl N heißt *über einem Ring R darstellbar* durch eine quadratische Form ϕ , falls eine sogenannte *Darstellung* $x \in R^n$ mit $\phi(x) = N$ existiert. Über \mathbb{Z} darstellbare Zahlen werden auch kurz *darstellbar* genannt. Weiter heißt eine ganze Zahl *zulässig* für eine Form ϕ , falls sie für jedes $p \in \mathbb{P}_\infty$ über \mathbb{Z}_p dargestellt wird. Diese Bedingung ist offenbar notwendig für die Darstellbarkeit über \mathbb{Z} . Für die Untersuchung quadratischer Formen und speziell für Fragen der Darstellbarkeit hat es sich als hilfreich erwiesen, quadratische Formen wie folgt in Äquivalenzklassen einzuteilen:

Zwei Formen ϕ und ϕ' in n Variablen heißen \mathbb{Z}_p -*äquivalent* für $p \in \mathbb{P}_\infty$, falls eine Matrix $T_p \in \text{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ existiert, so daß $\phi(x) = \phi'(T_p x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}^n$ gilt. Die Äquivalenzklassen bezüglich \mathbb{Z}_p -Äquivalenz für alle $p \in \mathbb{P}_\infty$ werden *Geschlechter* genannt. Gemäß Definition haben Formen desselben Geschlechts die gleichen zulässigen Zahlen und gleiche Determinanten.

Weiter heißen ϕ und ϕ' \mathbb{Z} -*äquivalent*, falls eine Matrix $T \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ existiert, so daß $\phi(x) = \phi'(Tx)$ für alle $x \in \mathbb{Z}^n$ gilt. Offenbar stellen \mathbb{Z} -äquivalente Formen die gleichen Zahlen über \mathbb{Z} dar und liegen im gleichen Geschlecht. Die induzierten Äquivalenzklassen werden kurz *Klassen* genannt.

Zwei Formen ϕ und ϕ' eines Geschlechts mit Determinante d heißen schließlich *spinoräquivalent*, falls eine Matrix $S \in \text{GL}_n(\mathbb{Q})$ existiert, deren Gewicht[§] quadratisch und koprim zu $2d$ ist, so daß $\phi(x) = \phi'(Sx)$ für alle $x \in \mathbb{Z}^n$ gilt. Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen *Spinorgeschlechter* und bestehen aus jeweils endlich vielen Klassen. Ebenso besteht jedes Geschlecht aus endlich vielen Spinorgeschlechtern und somit aus endlich vielen Klassen. Grundlegend ist das folgende Resultat, das sich z. B. in [Cas78] findet:

Satz 1: *Ist eine ganze Zahl zulässig für eine quadratische Form ϕ , so wird sie von mindestens einer Form aus dem Geschlecht von ϕ dargestellt.*

Eine quadratische Form ϕ heißt *positiv definit*, wenn $\phi(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $x \neq 0$ gilt. Wie durch die Determinante und die Menge der zulässigen Zahlen ist auch dadurch eine Invariante des Geschlechts definiert. Weiter heißt eine quadratische Form *regulär*, wenn sie alle zulässigen Zahlen darstellt. Andernfalls existieren sogenannte *Ausnahmen* – also zulässige Zahlen, die nicht dargestellt werden – und die Form heißt *irregulär*. Aus obigem Satz folgt unmittelbar, daß Formen regulär sind, wenn ihr Geschlecht nur eine Klasse enthält. Dies trifft nach den Tabellen aus [BI58] zum Beispiel für die Formen $x^2 + y^2 + az^2$ mit $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zu. Zur Klärung der Frage, welche ganzen Zahlen durch eine solche reguläre Form dargestellt werden, sind dann lediglich die zulässigen Zahlen zu bestimmen und nach folgendem

[§] Das Gewicht einer rationalen Matrix S ist gemäß [Wat60] definiert als kleinste natürliche Zahl k mit $k \cdot \det(S_1) \in \mathbb{Z}$ für alle quadratischen Untermatrizen S_1 von S .

Kriterium aus [Jon67, Seite 186] liegen die nicht zulässigen Zahlen in endlich vielen arithmetischen Progressionen, die explizit bestimmt werden können:

Bemerkung 1: Eine Zahl $N \in \mathbb{Z}$ ist genau dann zulässig für eine ternäre Form ϕ mit Determinante d , wenn beide folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) N wird über \mathbb{R} von einer Form aus dem Geschlecht von ϕ dargestellt,
- (ii) $\phi(x) \equiv N \pmod{p^{r+1}}$ ist für jeden Primteiler p von $2d$ über \mathbb{Z} lösbar,

$$\text{wobei } r := \begin{cases} \max\{s \in \mathbb{N}_0 : p^s | N\} & \text{falls } p \neq 2, \\ \max\{s \in \mathbb{N}_0 : p^s | 4N\} & \text{falls } p = 2. \end{cases}$$

2.2 Dirichletsche L-Reihen

Für $d \in \mathbb{N}$ sei $\chi := \chi_{-d}$ der in [Ayo63, Seiten 288ff] definierte Kronecker-Charakter modulo der Diskriminante $D \neq 1$ des imaginär-quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Dann ist die *Dirichletsche L-Reihe* zu χ definiert als

$$L(s, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \chi(p) p^{-s}} \quad (\Re s > 1).$$

Dadurch ist gemäß [Kna92, Seite 202ff] eine in $\Re s > 1$ holomorphe Funktion definiert, die eine analytische Fortsetzung in die gesamte komplexe Ebene besitzt und dort der folgenden Funktionalgleichung genügt:

$$(1) \quad \left(\frac{D}{\pi}\right)^{\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(s, \chi) = \left(\frac{D}{\pi}\right)^{\frac{2-s}{2}} \Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right) L(1-s, \chi).$$

Wegen der Darstellung als Euler-Produkt ist $L(s, \chi)$ für $\Re s > 1$ nullstellenfrei und hat daher in $\Re s < 0$ aufgrund der Funktionalgleichung lediglich die *trivialen* Nullstellen $\xi \in -2\mathbb{N}_0 - 1$, welche gerade den Polstellen von $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ entsprechen. Die *nicht-trivialen* Nullstellen liegen somit alle im *kritischen Streifen* $0 \leq \Re s \leq 1$. Nach [Pra57, Seite 224] sind sie überdies symmetrisch zur Geraden mit Realteil $1/2$ und zur reellen Achse verteilt. Logarithmisches Differenzieren der obigen Funktionalgleichung ergibt im Falle $L(s, \chi) \neq 0$

$$(2) \quad -\frac{L'}{L}(s, \chi) = \frac{L'}{L}(1-s, \chi) + \log \frac{D}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{2-s}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+1}{2}\right).$$

Schließlich gelten nach [Lan32, Satz 239] für $\Re s > 1$ die Reihenentwicklungen

$$(3) \quad -\frac{L'}{L}(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \chi(n)}{n^s} \quad \text{und} \quad \log L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \chi(n)}{n^s \log n}.$$

2.3 Klassenzahlen imaginär-quadratischer Zahlkörper

Sei $d < 0$ eine ganze Zahl mit $d \equiv 0, 1 \pmod{4}$. Gemäß [Dav80, Kapitel 6] ist die *Klassenzahl* $h(d)$ definiert als die Anzahl der im eigentlichen Sinne nicht-äquivalenten Formen $ax^2 + bxy + cy^2$ mit $a > 0$ und $b^2 - 4ac = d$, also die Anzahl der eigentlichen Klassen positiv definiter binärer Formen mit Determinante $-d/4$. Ist d sogar Diskriminante von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, so gibt $h(d)$ die Anzahl der Idealklassen dieses imaginär-quadratischen Zahlkörpers an und heißt daher auch *Klassenzahl von* $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. In Abschnitt 3.3 wird die folgende Indexformel benötigt, die sich in [Cox89, Seite 148] findet – der Zusatz über ν ergibt sich wegen der schärferen Voraussetzung aus [Cox89, Seite 117].

Satz 2: Sei $d \in -\mathbb{N}$ die Diskriminante von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Dann gilt für $m \geq 2$:

$$h(dm^2) = \frac{h(d)m}{\nu} \prod_{p|m} \left(1 - \left(\frac{d}{p}\right) \frac{1}{p}\right) \quad \text{mit } \nu = \begin{cases} 1 & \text{falls } d < -4, \\ 2 & \text{falls } d = -4, \\ 3 & \text{falls } d = -3. \end{cases}$$

Ein (*eigentlicher*) *Automorphismus* einer quadratischen Form ϕ in n Variablen mit zugehöriger Matrix Φ ist eine Matrix $B \in \text{SL}_n(\mathbb{Z})$ mit $B^t \Phi B = \Phi$. Für jede Darstellung $x \in \mathbb{Z}^n$ einer gegebenen Zahl $N \in \mathbb{N}$ ist dann offenbar auch Bx eine Darstellung von N . Daraufhin heißen zwei Darstellungen x und x' *wesentlich verschieden*, falls sie nicht durch einen Automorphismus ineinander übergehen, also falls $x' \neq Bx$ für alle Automorphismen B von ϕ gilt. Weiter heißt eine Darstellung *primitiv*, wenn der größte gemeinsame Teiler der einzelnen Komponenten gleich 1 ist. In [Jon67, Theorem 86] ist nun eine Formel angegeben, welche für das Geschlecht einer ternären Form die Anzahl der wesentlich verschiedenen primitiven Darstellungen einer ungeraden und zur Determinante der Form primen Zahl $N \in \mathbb{Z}$ durch die Klassenzahl eines von N abhängigen imaginär-quadratischen Zahlkörpers ausdrückt:

Satz 3: Sei ϕ eine ternäre quadratische Form mit zugehöriger Matrix Φ und Determinante $d = \det(\Phi)$. Seien weiter $q \in \mathbb{Z}$ mit $q \neq \pm 1$ prim zu $2d$, Ω der größte gemeinsame Teiler der 2-reihigen Unterdeterminanten von Φ und $\Delta = qd/\Omega^2$. Dann gilt für die Anzahl $G(\phi, q)$ der wesentlich verschiedenen primitiven Darstellungen von q durch das Geschlecht von ϕ

$$G(\phi, q) \in \{0, 2^{-t(d/\Omega^2)} h(-4\Delta) \rho\},$$

wobei $t(\omega)$ die Anzahl (ohne Vielfachheiten) der ungeraden Primfaktoren von $\omega \in \mathbb{Z}$ bezeichne und ρ sich gemäß den in [Jon67, Theorem 86] angegebenen Kriterien ergibt.

Das nachfolgende Resultat bringt die Klassenzahl eines gegebenen imaginär-quadratischen Zahlkörpers in Beziehung mit dem kritischen Wert der Dirichletschen L-Reihe des zugehörigen Kronecker-Charakters. Es wird sich als ein wichtiges Hilfsmittel für den Beweis des Hauptsatzes dieser Arbeit erweisen und findet sich zum Beispiel in [Ayo63, Theorem 2.8]:

Satz (Dirichletsche Klassenzahlformel): Sei $d \in -\mathbb{N}$ die Diskriminante des imaginär-quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Dann gilt

$$(4) \quad h(d) = \frac{\omega\sqrt{|d|}}{2\pi} L(1, \chi_d) \quad \text{mit } \omega = \begin{cases} 2 & \text{falls } d < -4, \\ 4 & \text{falls } d = -4, \\ 6 & \text{falls } d = -3. \end{cases}$$

Wegen $1 \leq h(d) < \infty$ folgt daraus insbesondere $L(1, \chi_d) \neq 0$.

2.4 Modulformen und Hecke-Operatoren

Seien $k \in \mathbb{Z}$ und χ ein Charakter modulo $N \in \mathbb{N}$, wobei sogar $N \in 4\mathbb{N}$ für ungerade k vorausgesetzt wird. Bezeichne mit

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

die Hecke-Untergruppe der Stufe N zur Modulgruppe $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$. Eine *Modulform* mit Gewicht $k/2$, Stufe N und Charakter χ ist eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, die holomorph in allen Spitzen $\kappa \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ ist, insbesondere also in ∞ eine Fourierentwicklung

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n) q^n \quad \text{mit } b(n) \in \mathbb{C} \text{ und } q := e^{2\pi iz}$$

besitzt und für alle $z \in \mathbb{H}$ sowie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ folgende Bedingung[¶] erfüllt:

$$g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \begin{cases} \chi(d) \cdot (cz+d)^{k/2} \cdot g(z) & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \chi(d) \cdot \varepsilon_d^{-k} \cdot \chi_c(d)^k \cdot (cz+d)^{k/2} \cdot g(z) & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Eine Modulform heißt *Spitzenform*, falls sie in allen Spitzen $\kappa \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ verschwindet – insbesondere gilt dann $b(0) = 0$ in der Fourierentwicklung in ∞ . Die Spitzenformen bilden einen Unterraum $S_{k/2}(N, \chi)$ im Vektorraum $M_{k/2}(N, \chi)$ der Modulformen mit Gewicht $k/2$, Stufe N und Charakter χ .

[¶] Dabei sei $\varepsilon_d = 1$ für $d \equiv 1 \pmod{4}$ und $\varepsilon_d = i$ für $d \equiv 3 \pmod{4}$.

Mit Hilfe der Formeln aus [Kna92, Seiten 235 und 272] sowie [CO76] lassen sich die Dimensionen dieser Räume bestimmen, welche im Falle des trivialen Charakters modulo N kurz mit $M_{k/2}(N)$ bzw. $S_{k/2}(N)$ bezeichnet werden. Gemäß [Kob84, Seiten 153ff sowie 202ff] können auf $M_{k/2}(N, \chi)$ lineare Operatoren $T(m)$ ($m \in \mathbb{N}$) definiert werden, welche diesen Raum und auch den Unterraum $S_{k/2}(N, \chi)$ in sich überführen. Die von diesen *Hecke-Operatoren* erzeugte kommutative *Hecke-Algebra* wird für $k \in 2\mathbb{Z}$ sogar schon von den Operatoren $T(p)$ ($p \in \mathbb{P}$) erzeugt, und deren Wirkung auf Fourierkoeffizienten ist gegeben durch $T(p) [\sum_{n=0}^{\infty} b(n) q^n] = \sum_{n=0}^{\infty} c_p(n) q^n$ mit

$$(5) \quad c_p(n) = b(pn) + \chi(p) p^{k/2-1} b(n/p), \quad \text{wobei } b(n/p) := 0 \text{ für } p \nmid n.$$

Für $k \in 2\mathbb{Z} + 1$ gilt $T(p) \equiv 0$ ($p \in \mathbb{P}$), und die Hecke-Algebra wird von den Operatoren $T(p^2)$ ($p \in \mathbb{P}$) erzeugt. Die Wirkung auf Fourierkoeffizienten ist in diesem Fall gegeben durch $T(p^2) [\sum_{n=0}^{\infty} b(n) q^n] = \sum_{n=0}^{\infty} c_p(n) q^n$ mit

$$(6) \quad c_p(n) = b(p^2 n) + p^{\lambda-1} \chi(p) \left(\frac{n}{p}\right) \left(\frac{-1}{p}\right)^{\lambda} b(n) + p^{k-2} \chi(p^2) b(n/p^2),$$

wobei $b(n/p^2) := 0$ für $p^2 \nmid n$ sowie $\lambda := (k-1)/2$ definiert seien. Orthogonalität von Modulformen wird über das *Peterssonsche Skalarprodukt* erklärt. Dieses ist gemäß [Stu82, Seite 354] für $g, h \in S_{k/2}(N, \chi)$ definiert als

$$\langle g, h \rangle := \frac{1}{m(N)} \int_{\Gamma(N) \backslash \mathbb{H}} \overline{g(z)} h(z) y^{k/2-2} dx dy \quad \text{mit } m(N) := \int_{\Gamma(N) \backslash \mathbb{H}} y^{-2} dx dy,$$

wobei $\Gamma(N) \backslash \mathbb{H}$ einen Fundamentalbereich der Hauptkongruenzuntergruppe

$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

bezeichne. Das folgende Resultat ist hilfreich für die Bildung neuer Modulformen aus bestehenden und findet sich z. B. in [Iwa97, Seiten 107f und 124].

Satz 4: *Es seien $r, s, N \in \mathbb{N}$, χ ein Charakter modulo N vom Führer s und $g \in S_{k/2}(N, \chi)$ mit Fourierentwicklung $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) q^n$.*

- (i) *Es bezeichne χ' den durch χ induzierten Charakter modulo rN . Dann gilt $g(rz) \in S_{k/2}(rN, \chi')$. Für $r > 1$ heißt $g(rz)$ Altform in $S_{k/2}(rN, \chi')$.*
- (ii) *Es seien ψ ein Charakter vom Führer r und M das kleinste gemeinsame Vielfache von N , rs und r^2 . Dann gilt $g \otimes \psi \in S_{k/2}(M, \chi\psi^2)$ für den durch $g \otimes \psi(z) := \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\psi(n)q^n$ definierten Twist von g mit ψ .*

Motiviert durch (i) wird ein Unterraum $S_{k/2}^{alt}(N, \chi)$ in $S_{k/2}(N, \chi)$ definiert als das Erzeugnis aller Formen $g(rz)$ mit $r > 1$, $r|N$ und $g(z) \in S_{k/2}(N/r, \chi')$, wobei χ und χ' den gleichen Führer haben. Das orthogonale Komplement dieses Raums der Altformen bezüglich des Petersson'schen Skalarproduktes wird mit $S_{k/2}^{neu}(N, \chi)$ bezeichnet. Schließlich heißt $g \in S_{k/2}^{neu}(N, \chi)$ *Neuform*, falls g Eigenform aller Hecke-Operatoren $T(m)$ ($m \in \mathbb{N}$) ist.

Für eine Neuform $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B(n)q^n \in S_k(N)$ vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$ wird die zugehörige *automorphe L-Reihe* für $\Re s > (k+1)/2$ definiert als

$$L(s, G) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(n)}{n^s}.$$

Dadurch ist gemäß [Cre92, Seite 19f] eine in diesem Bereich holomorphe Funktion definiert, die eine analytische Fortsetzung in die gesamte komplexe Ebene besitzt und dort mit $\varepsilon(G) \in \{-1, +1\}$ der Funktionalgleichung

$$(7) \quad \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) L(s, G) = \varepsilon(G) \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{k-s} \Gamma(k-s) L(k-s, G)$$

genügt. In der Anwendung ab Seite 28 wird G sogar normierte Neuform mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten sein. Für solche Formen stimmt die zugehörige automorphe L-Reihe gemäß Abschnitt 2.6 mit der Hasse-Weilschen L-Reihe einer elliptischen Kurve überein. Daher wird an dieser Stelle auf die Formulierung weiterer Resultate für automorphe L-Reihen verzichtet und stattdessen auf die Ergebnisse für Hasse-Weilsche L-Reihen verwiesen.

Ist nun ϕ eine positiv definite ternäre Form mit zugehöriger Matrix Φ und Determinante d , so ist die zugehörige Thetafunktion definiert als

$$\theta_\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \theta_\phi(z) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^3} q^{\phi(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} r(n) q^n,$$

wobei $r(n) := \#\{x \in \mathbb{Z}^3 : \phi(x) = n\}$ die Anzahl der Darstellungen von $n \in \mathbb{Z}$ durch die Form ϕ bezeichne. Ist weiter N die kleinste natürliche Zahl, so daß die Matrix $\frac{1}{2}N\Phi^{-1}$ ganzzahlige Einträge und gerade Hauptdiagonalelemente hat, so gilt der folgende Satz, der eine entscheidende Motivation für die Theorie der Modulformen darstellt. Er ist ein Spezialfall von Proposition 2.1 in [Shi73] und findet sich in dieser Formulierung z. B. in [Leh87, Seite 259]. Dabei sei mit χ'_{4d} der durch χ_{4d} induzierte Charakter modulo N bezeichnet:

Satz 5: *Es gilt $\theta_\phi \in M_{3/2}(N, \chi'_{4d})$.*

Für eine weitere Form ϕ' aus dem Geschlecht von ϕ ist die Differenz der zugehörigen Thetafunktionen nach folgendem Resultat eine Spitzenform:

Satz 6: *Es gilt $\theta_\phi - \theta_{\phi'} \in S_{3/2}(N, \chi'_{4d})$.*

Dieser Satz läßt sich genauso beweisen wie die analoge Aussage über quadratische Formen ganzzahligen Gewichts in [Sie66, Seite 376] und findet sich in dieser Formulierung zum Beispiel in [Leh87, Seite 259]. Gemäß dem folgenden Resultat (siehe [SP84, Hilfssatz 1]) lassen fast alle Hecke-Operatoren $T(p^2)$ den von den Thetareihen der Formen aus dem Geschlecht von ϕ erzeugten Teilraum $M_{3/2}^\phi(N, \chi'_{4d})$ von $M_{3/2}(N, \chi'_{4d})$ invariant:

Satz 7: *Für alle $p \in \mathbb{P}$ mit $p \nmid N$ gilt $T(p^2)M_{3/2}^\phi(N, \chi'_{4d}) \subset M_{3/2}^\phi(N, \chi'_{4d})$.*

2.5 Die Shimura-Liftung

Goro Shimura entwickelte in [Shi73] den folgenden Zusammenhang zwischen Modulformen halbganzen und ganzzahligen Gewichts:

Satz 8: *Es seien $k \geq 3$ ungerade, χ ein Charakter modulo $N \in 4\mathbb{N}$ und $f(z) \in S_{k/2}(N, \chi)$ eine Eigenform aller Hecke-Operatoren $T(p^2)$ ($p \in \mathbb{P}$) mit zugehörigen Eigenwerten λ_p . Definiere die Shimura-Liftung von f als die Funktion $\mathcal{S}(f) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\mathcal{S}(f)(z) := \sum_{n=1}^{\infty} B(n) q^n$, wobei*

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(n)}{n^s} := \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \lambda_p p^{-s} + \chi(p)^2 p^{k-2-2s}}.$$

Dann gilt $\mathcal{S}(f) \in M_{k-1}(N/2, \chi^2)$. Für $k \geq 5$ gilt sogar $\mathcal{S}(f) \in S_{k-1}(N/2, \chi^2)$.

Beweis: siehe Korollar zum Main Theorem in [Shi73, Seite 458]. Shimura vermutete allerdings nur, daß $\mathcal{S}(f)$ das Gewicht $N/2$ hat – dies bewies später zum Beispiel Niwa (siehe [Niw75]). \square

Durch Ausmultiplizieren des Euler-Produktes in (8) folgt direkt $B(1) = 1$ sowie $B(p) = \lambda_p$ für alle $p \in \mathbb{P}$. Während Shimura zeigen konnte, daß die Shimura-Liftung im Fall $k \geq 5$ immer Spitzenform ist, stellte er für $k = 3$ lediglich eine Vermutung auf, die erst später nachgewiesen wurde. Vor der Formulierung des entsprechenden Zusatzes zu Satz 8 müssen noch einige Bezeichnungen eingeführt werden: Gemäß [Cip83, Proposition 3.1] gilt

$$h_\psi(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) n q^{n^2} \in S_{3/2} \left(4s^2, \psi \left(\frac{-1}{\cdot} \right) \right)$$

für jeden ungeraden primitiven Charakter ψ modulo $s \in \mathbb{N}$. Daraufhin wird mit $U_{3/2}(N, \chi)$ derjenige Unterraum von $S_{3/2}(N, \chi)$ bezeichnet, der erzeugt wird von den Formen $h_\psi(r^2z)$, wobei ψ ein solcher Charakter mit $\chi = \psi\left(\frac{-1}{\cdot}\right)$ ist und $r \in \mathbb{N}$ die Bedingung $4r^2s^2|N$ erfüllt. Wird Orthogonalität von Modulformen gemäß Abschnitt 2.4 über das Petersson'sche Skalarprodukt erklärt, so gilt in den Bezeichnungen von Satz 8 der von Shimura vermutete

Zusatz: Für $k = 3$ ist $\mathcal{S}(f) \in S_{k-1}(N/2, \chi^2)$ äquivalent zu $f \perp U_{k/2}(N, \chi)$.

Ein Beweis findet sich in [Cip83] auf Seite 104 – es gab jedoch vorher bereits Beweise mit anderen Methoden. Nach der folgenden Bemerkung ist die Bedingung des Zusatzes für viele kleine Werte von N trivialerweise erfüllt:

Bemerkung: Es gilt $U_{3/2}(N, \chi) = 0$ für alle $N < 100$ mit $N \notin \{36, 64, 72\}$.

Beweis: Ein Charakter modulo $s \in \mathbb{N}$ kann nur für $s \geq 3$ ungerade sein, denn modulo 1 bzw. 2 existiert nur der triviale Charakter. Daher kann $4r^2s^2|N$ und $\psi(-1) = -1$ nur erfüllt sein für $N \in \{36, 64, 72, 100, \dots\}$. \square

Das folgende Resultat von Schulze-Pillot liefert ein weiteres hinreichendes Kriterium, das speziell auf solche Modulformen anwendbar ist, die gemäß Abschnitt 2.4 aus ternären Formen konstruiert wurden (siehe [SP84, Satz 4]).

Satz 9: Sind ϕ und ϕ' ternäre Formen im gleichen Spinorgeschlecht, so ist die Differenz ihrer Thetafunktionen orthogonal zu $U_{3/2}(N, \chi)$.

2.6 Elliptische Kurven und Hasse-Weilsche L-Reihen

Die folgenden grundlegenden Definitionen und Resultate aus der Theorie der elliptischen Kurven sind zum Beispiel in [Kna92], [Cre92] oder [Kob84] zu finden. Eine *elliptische Kurve* E (über \mathbb{Q}) ist eine reguläre^{||} Kurve definiert durch eine Gleichung in sogenannter Weierstraß-Form

$$(9) \quad E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{Q}.$$

Die Lösung $(x, y) = (\infty, \infty)$ wird als Punkt der elliptischen Kurve angesehen und im folgenden kurz mit ∞ bezeichnet. Die Menge $E(\mathbb{Q})$ der rationalen Lösungen dieser Gleichung einschließlich ∞ bildet nach dem Satz von Mordell eine endlich erzeugte abelsche Gruppe (mit einer geometrisch durch die sogenannte „Sehnen- und Tangenten-Regel“ motivierten Additionsvorschrift).

^{||} Eine Kurve $f(x, y) = 0$ heißt regulär, falls sie keine singulären Punkte enthält, das heißt keine Punkte, bei denen beide partiellen Ableitungen verschwinden.

Ausgehend von den Koeffizienten a_i werden nun zunächst die Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} b_2 &= a_1^2 + 4a_2^2, & b_4 &= 2a_4 + a_1a_3, \\ b_6 &= a_3^2 + 4a_6, & b_8 &= a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 - a_2a_3^2 - a_4^2, \\ c_4 &= b_2^2 - 24b_4 & \text{sowie } c_6 &= -b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6 \end{aligned}$$

und damit dann die *Diskriminante* sowie die *j-Invariante*

$$\Delta = \frac{c_4^3 - c_6^2}{1728} \quad \text{bzw. } j = \frac{c_4^3}{\Delta}$$

einer elliptischen Kurve definiert, wobei sich aus der geforderten Regularität stets $\Delta \neq 0$ ergibt. Zwei elliptische Kurven heißen *isomorph (über \mathbb{Q})*, falls sie durch eine sogenannte *zulässige Variablensubstitution*

$$(x, y) \mapsto (u^2x + r, u^3y + su^2x + t) \quad \text{mit } u, r, s, t \in \mathbb{Q} \text{ und } u \neq 0$$

ineinander übergehen. Isomorphe Kurven besitzen identische j -Invarianten, während sich die Diskriminanten um einen Faktor u^{12} unterscheiden. Weiter kann jede elliptische Kurve E durch eine geeignete Variablensubstitution auf die Form $y^2 = P(x)$ gebracht werden, wobei $P(x) = x^3 + a'_2x^2 + a'_4x + a'_6$ ein kubisches Polynom mit paarweise verschiedenen (komplexen) Nullstellen ist. Für $D \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ wird der *D -quadratische Twist von E* als die über $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ zu E isomorphe elliptische Kurve $Dy^2 = P(x)$ definiert, deren Gleichung durch die zulässige Variablensubstitution $(x, y) \mapsto (x/D, y/D^2)$ übergeht in

$$E(D) : y^2 = x^3 + Da'_2x^2 + D^2a'_4x + D^3a'_6.$$

Die Menge aller Twists von E ist nach [Cre92, Seite 82] gegeben durch die Menge aller elliptischen Kurven mit der gleichen j -Invariante wie E .

Eine Gleichung (9) in Weierstraß-Form mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{Z}$ heißt *global-minimal*, falls für jede Primzahl p die p -adische Norm von Δ nicht durch eine zulässige Variablensubstitution vergrößert werden kann, ohne dabei auf gebrochen-rationale Koeffizienten überzugehen. Nach Néron (siehe [Kna92, Seite 292]) kann jede elliptische Kurve durch eine zulässige Variablensubstitution in global-minimale Weierstraß-Form gebracht werden, wobei zwei global-minimale Gleichungen durch eine zulässige Variablensubstitution mit $u = \pm 1$ und $r, s, t \in \mathbb{Z}$ ineinander übergehen. Der Kraus-Laska-Connell-Algorithmus (siehe [Cre92, Seiten 47f]) überführt eine gegebene elliptische Kurve in global-minimale Weierstraß-Form und liefert die benötigte Variablensubstitution.

Für die Definition der reellen Periode einer elliptischen Kurve wird die festlegende Gleichung (9) zunächst in global-minimale Weierstraß-Form, etwa in

$$(10) \quad E : y^2 + a'_1 xy + a'_3 y = x^3 + a'_2 x^2 + a'_4 x + a'_6 \quad \text{mit } a'_i \in \mathbb{Q}$$

überführt. Die holomorphe 1-Form $dx/(2y + a'_1 x + a'_3)$ heißt dann *invariantes Differential von E* und die *reelle Periode von E* wird gemäß [Sto00, Seite 18] definiert als das Integral

$$\Omega(E) = \int_{E(\mathbb{R})} \left| \frac{dx}{2y + a'_1 x + a'_3} \right|$$

entlang der Menge $E(\mathbb{R})$ der reellen Lösungen von (10), welche aus einer oder zwei Zusammenhangskomponenten besteht (je nachdem, ob eine oder drei Lösungen $(x, 0)$ von (10) mit $x \in \mathbb{R}$ existieren).

Auch zur Definition der Hasse-Weilschen L -Reihe einer elliptischen Kurve ist zunächst die global-minimale Weierstraß-Form (10) und daraus dann für jede Primzahl $p \in \mathbb{P}$ die Reduktion E_p von E modulo p zu bestimmen. Diese reduzierte Kurve ergibt sich nach [Kna92, Seite 136] einfach durch Reduktion der Koeffizienten modulo p , wobei die zugehörige Diskriminante $\Delta_p \equiv \Delta \pmod{p}$ erfüllt. Insbesondere ist E_p genau im Fall $p \nmid \Delta$ regulär. Definiere

$$B(p) := p + 1 - \#E_p(\mathbb{Z}_p) \quad (p \in \mathbb{P}),$$

wobei $\#E_p(\mathbb{Z}_p)$ die Anzahl der Lösungen von (10) modulo p einschließlich der Lösung ∞ bezeichne. Ein Resultat von Hasse liefert dabei $|B(p)| < 2\sqrt{p}$ und nach [Kna92, Seiten 77ff] gilt für $p \nmid \Delta$ sogar $B(p) \in \{-1, 0, +1\}$. Die *Hasse-Weilsche L -Reihe von E* wird nun definiert als

$$(11) \quad L(s, E) := \prod_{p \mid \Delta} \frac{1}{1 - B(p)p^{-s}} \cdot \prod_{p \nmid \Delta} \frac{1}{1 - B(p)p^{-s} + p^{1-2s}}.$$

Wegen Hasses Schranke konvergiert dieses Euler-Produkt für $\Re s > 3/2$ und ist dort durch eine absolut konvergente Dirichlet-Reihe gegeben. Insbesondere ist $L(s, E)$ in der Halbebene $\Re s > 3/2$ holomorph und besitzt eine analytische Fortsetzung in die gesamte komplexe Ebene – letzteres ergibt sich seit dem Beweis der Taniyama-Weil-Vermutung durch Breuil, Conrad, Diamond und Taylor (siehe dazu [Edi00]) direkt aus dem entsprechenden Resultat für automorphe L -Reihen von Neufornen des Gewichts 2 (vgl. Seite 11):

Satz (Taniyama-Weil-Vermutung): *Zu jeder elliptischen Kurve E über \mathbb{Q} existiert ein $q \in \mathbb{N}$ und eine Spitzenform $G \in S_2(q)$ mit $L(\cdot, G) = L(\cdot, E)$.*

Wird q dabei minimal gewählt, so ist G Neuforn und q der *Führer von E* .

Umgekehrt läßt sich einer Spitzenform vom Gewicht 2 nach dem folgenden Resultat aus der Eichler-Shimura-Theorie unter bestimmten Voraussetzungen eine elliptische Kurve mit derselben L-Reihe zuordnen – der konstruktive Beweis findet sich in [Kna92, Seiten 374 und 391]:

Satz (Eichler-Shimura/Carayol): *Es sei $q \in \mathbb{N}$ und $G \in S_2(q)$ eine normierte Neuf orm mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten. Dann existiert eine elliptische Kurve E vom Führer q mit $L(\cdot, E) = L(\cdot, G)$.*

Dadurch wird also einer solchen Neuf orm eine *Isogenieklasse* elliptischer Kurven zugeordnet, die aus Kurven mit der gleichen L-Reihe besteht – genauer heißen zwei elliptische Kurven *isogen*, falls sie durch einen nicht-konstanten Morphismus auseinander hervorgehen; entscheidend ist für die Zwecke dieser Arbeit aber nur, daß isogene Kurven gleiche L-Reihen haben.

Der soeben formulierte Zusammenhang zwischen elliptischen Kurven und Modulformen wird die Ausführungen zur Darstellbarkeit ganzer Zahlen durch die Kaplansky-Form vereinfachen, da explizite Werte für Hasse-Weilsche L-Reihen mit Computereinsatz meistens einfacher zu bestimmen sind als die entsprechenden Werte für automorphe L-Reihen – zwingend erforderlich ist die Zuordnung einer elliptischen Kurve für das weitere Vorgehen indes nicht. Als weitere Konsequenz aus dem Beweis der Taniyama-Weil-Vermutung kann aus der Funktionalgleichung (7) einer automorphen L-Reihe direkt ein entsprechendes Resultat für Hasse-Weilsche L-Reihen abgeleitet werden. Zu jeder elliptischen Kurve E vom Führer q existiert also $\varepsilon(E) \in \{-1, +1\}$ mit

$$(12) \quad \left(\frac{\sqrt{q}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) L(s, E) = \varepsilon(E) \left(\frac{\sqrt{q}}{2\pi}\right)^{2-s} \Gamma(2-s) L(2-s, E).$$

Im Fall $\varepsilon(E) = -1$ folgt aus dieser Funktionalgleichung direkt $L(1, E) = 0$. Bei der Anwendung in den folgenden Kapiteln gilt aber $L(1, E) \neq 0$ (siehe Ungleichung (20) in Abschnitt 3.6) und somit $\varepsilon(E) = +1$. In diesem Fall ergibt logarithmisches Differenzieren für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $L(s, E) \neq 0$

$$(13) \quad -\frac{L'}{L}(s, E) = \frac{L'}{L}(2-s, E) + \log \frac{q}{4\pi^2} + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(2-s) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s).$$

Wegen der Darstellung (11) als Euler-Produkt ist $L(s, E)$ für $\Re s > 3/2$ nullstellenfrei und hat somit aufgrund der Funktionalgleichung in $\Re s < 1/2$ lediglich die sogenannten *trivialen* Nullstellen $\xi \in -\mathbb{N}_0$, welche den Polstellen der Gammafunktion entsprechen. *Nicht-triviale* Nullstellen können also nur im *kritischen Streifen* $1/2 \leq \Re s \leq 3/2$ existieren. Weiter kann völlig analog zu [Pra57, Seite 224] gezeigt werden, daß diese symmetrisch zur Geraden mit Realteil 1 sowie zur reellen Achse verteilt sind.

Es werden nun zu (3) aus Abschnitt 2.2 analoge Darstellungen für den Logarithmus und die logarithmische Ableitung einer Hasse-Weilschen L-Reihe hergeleitet. Definiere dazu für $L(s, E) = \sum_{n=1}^{\infty} B(n)q^n$ zunächst

$$\alpha_p := \frac{B(p)}{2} + i\sqrt{p - \left(\frac{B(p)}{2}\right)^2} \quad \text{für } p \in \mathbb{P} \text{ mit } p \nmid \Delta.$$

Nach Hasses Schranke $|B(p)| < 2\sqrt{p}$ ist dies wohldefiniert mit $|\alpha_p| = \sqrt{p}$. Definiere außerdem für $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda_E(n) := \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ keine Primpotenz ist,} \\ (\alpha_p^m + \overline{\alpha_p}^m) \cdot \log p & \text{falls } n = p^m \text{ mit } m \in \mathbb{N} \text{ und } p \nmid \Delta \\ B(p)^m \cdot \log p & \text{falls } n = p^m \text{ mit } m \in \mathbb{N} \text{ und } p \mid \Delta \end{cases}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt nun der folgende

Satz 10: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $|\lambda_E(n)| \leq 2\sqrt{n} \Lambda(n)$ und für $\Re s > 3/2$ gilt

$$(14) \quad -\frac{L'}{L}(s, E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_E(n)}{n^s} \quad \text{sowie} \quad \log L(s, E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_E(n)}{n^s \log n}.$$

Beweis: Wegen $|\alpha_p| = \sqrt{p}$ für $p \nmid \Delta$ und $B(p) \in \{-1, 0, +1\}$ für $p \mid \Delta$ ergibt sich die Abschätzung aus der Definition von $\lambda_E(n)$. Weiter folgt für $\Re s > 3/2$

$$\begin{aligned} L(s, E) &\stackrel{(11)}{=} \prod_{p \mid \Delta} \left(1 - \frac{B(p)}{p^s}\right)^{-1} \cdot \prod_{p \nmid \Delta} \left(1 - \frac{B(p)}{p^s} + p^{1-2s}\right)^{-1} \\ &= \prod_{p \mid \Delta} \left(1 - \frac{B(p)}{p^s}\right)^{-1} \cdot \prod_{p \nmid \Delta} \left(1 - \frac{\alpha_p}{p^s}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{\overline{\alpha_p}}{p^s}\right)^{-1} \\ &\downarrow \\ &[\text{Für } p \nmid \Delta \text{ gelten } B(p) = \alpha_p + \overline{\alpha_p} \text{ und } \alpha_p \overline{\alpha_p} = p.] \\ &= \prod_{p \mid \Delta} \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B(p)^m}{mp^{ms}} \cdot \prod_{p \nmid \Delta} \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_p^m}{mp^{ms}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{\alpha_p}^m}{mp^{ms}} \right) \\ &= \exp \sum_{p \mid \Delta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_E(p^m)}{p^{ms} \log p^m} + \sum_{p \nmid \Delta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_E(p^m)}{p^{ms} \log p^m} \\ &= \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_E(n)}{n^s \log n}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die zweite Gleichung und wegen der lokal gleichmäßigen und absoluten Konvergenz für $\Re s > 3/2$ auch die Differenzierbarkeit von $L(s, E)$ mit

$$L'(s, E) = -L(s, E) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_E(n)}{n^s}. \quad \square$$

„Die 7 ist nicht einfach nur eine Zahl – sie ist Geschichte, Legende, Mystik und irgendwie auch ein Gefühl. Sie ist universell und wie eine Melodie.“ Fatin Kemali

3 Die Kaplansky-Form und ihre Begleiter

Irving Kaplansky stellte in seinem im Jahr 1995 erschienenen Artikel [Kap95] die bis heute nicht vollständig beantwortete Frage nach den Ausnahmen der ternären Form $x^2 + y^2 + 7z^2$. Für acht Restklassen modulo 12 konnte er die Darstellbarkeit durch diese im folgenden als Kaplansky-Form bezeichnete quadratische Form mit elementaren Methoden aufklären. Weiter ermittelte er mit Computereinsatz alle Ausnahmen im Bereich bis 100000. Inzwischen wurde die Kaplansky-Form noch in einigen weiteren Arbeiten untersucht, z. B. in [PRW00], [Kel01], [PRW01] oder [PW01]). Sie liegt in einem Geschlecht der Determinante 7, dessen zwei Klassen repräsentiert werden durch

$$\phi_{7,1}(x, y, z) := x^2 + y^2 + 7z^2 \quad \text{und} \quad \phi_{7,2}(x, y, z) := x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2yz.$$

Um sich des bei $\phi_{7,2}$ auftretenden gemischten Terms $2yz$ zu entledigen, betrachtete Kaplansky auch die beiden nachstehend definierten Formen, welche die Klassen eines Geschlechts der Determinante 14 repräsentieren:

$$\phi_{14,1}(x, y, z) := x^2 + y^2 + 14z^2 \quad \text{und} \quad \phi_{14,2}(x, y, z) := x^2 + 2y^2 + 7z^2.$$

Es wird sich zeigen, daß die Frage der Darstellbarkeit durch die Formen des Kaplansky-Geschlechts äquivalent ist zu der entsprechenden Frage für $\phi_{14,1}$ und $\phi_{14,2}$ und daß die Untersuchung einer gegebenen Zahl $N \in 4\mathbb{N} + 2$ mittels Division durch 2 von einem Geschlecht auf das andere übertragen werden kann. Die Einführung des zweiten Geschlechts ist hier vor allem durch die Verwendung zweier Resultate von Jones und Waldspurger in den folgenden Abschnitten motiviert: Beide sind nur auf ungerade und zur Determinante der betrachteten Form prime Zahlen anwendbar. Daher werden auch

$$\phi_{49,1}(x, y, z) := x^2 + 7y^2 + 7z^2 \quad \text{und} \quad \phi_{49,2}(x, y, z) := 2x^2 + 4y^2 + 7z^2 + 2xy$$

studiert: Zwischen diesen Formen der Determinante 49 und dem Geschlecht der Kaplansky-Form kann hin- und hergeschaltet werden, indem eine gegebene Zahl mit 7 multipliziert bzw. durch 7 dividiert wird. Die Formen

$$\phi_{98,1}(x, y, z) := 2x^2 + 7y^2 + 7z^2 \quad \text{und} \quad \phi_{98,2}(x, y, z) := x^2 + 7y^2 + 14z^2$$

werden schließlich für die Untersuchung von Vielfachen von 14 benötigt.

Zunächst seien nun einige einfach einzusehende Beobachtungen aufgeführt, die den engen Zusammenhang zwischen den vier Geschlechtern verdeutlichen und von denen sich die meisten in Kaplanskys Arbeit [Kap95] finden:

Lemma (Kaplansky): *Sei $j \in \{1, 2\}$. Dann gelten*

- a) *Eine natürliche Zahl N ist genau dann darstellbar durch $\phi_{7,j}$, wenn $2N$ darstellbar durch $\phi_{14,j}$ ist. Umgekehrt ist eine ungerade Zahl M genau dann darstellbar durch $\phi_{14,j}$, wenn $2M$ darstellbar durch $\phi_{7,j}$ ist.*
- b) *Eine natürliche Zahl N ist genau dann darstellbar durch $\phi_{7,j}$, wenn $7N$ darstellbar durch $\phi_{49,j}$ ist. Umgekehrt ist eine natürliche Zahl M genau dann darstellbar durch $\phi_{49,j}$, wenn $7M$ darstellbar durch $\phi_{7,j}$ ist.*
- c) *Eine natürliche Zahl N ist genau dann darstellbar durch $\phi_{49,j}$, wenn $2N$ darstellbar durch $\phi_{98,j}$ ist. Umgekehrt ist eine ungerade Zahl M genau dann darstellbar durch $\phi_{98,j}$, wenn $2M$ darstellbar durch $\phi_{49,j}$ ist.*

Diese größtenteils von Kaplansky gefundenen Zusammenhänge werden im ersten Abschnitt dieses Kapitels deutlich verschärft: Gemäß Theorem 1 sind sogar die entsprechenden Darstellungsanzahlen durch die jeweiligen Formen identisch. Mit elementaren Methoden wird im ersten Abschnitt außerdem die Darstellbarkeit für bestimmte Restklassen modulo 12 sowie für nicht quadratfreie Zahlen aufgeklärt. Dort werden auch die von Kaplansky durchgeführten Computerberechnungen auf einen wesentlich größeren Bereich ausgeweitet, ohne daß sich weitere Ausnahmen als die schon von Kaplansky aufgeführten ergeben. Motiviert durch diese Ergebnisse wird bereits der Hauptsatz dieser Arbeit über die Ausnahmen der Kaplansky-Form und ihrer Begleiter indirekt als Vermutung formuliert.

In den Abschnitten 3.2 bis 3.5 werden Vorbereitungen für die endgültige Formulierung und den sich anschließenden Beweis dieses Hauptsatzes getroffen: Zunächst wird den oben eingeführten Geschlechtern über die zugehörigen Thetareihen und die Shimura-Liftung eine Modulform vom Gewicht 2 und dann via Eichler-Shimura-Theorie eine elliptische Kurve zugeordnet. Im darauf folgenden Abschnitt 3.3 wird ein Zusammenhang zwischen den Darstellungsanzahlen durch die Formen $\phi_{k,j}$ und den Klassenzahlen gewisser imaginär-quadratischer Zahlkörper hergeleitet. Diese beiden Ergebnisse werden schließlich in Abschnitt 3.4 mit Hilfe des Satzes von Waldspurger zu einer Klassenzahlformel für die Hasse-Weilschen L-Reihen der über den erwähnten imaginär-quadratischen Zahlkörpern zu der elliptischen Kurve aus Abschnitt 3.2 isomorphen Twists zusammengeführt. In den beiden letzten Abschnitten finden sich dann die Formulierungen des Hauptsatzes und der dabei unterstellten verallgemeinerten Riemannschen Vermutung.

Im Anschluß daran wird mit dem Beweis des Hauptsatzes begonnen und ein Überblick über das weitere Vorgehen gegeben – erst in Kapitel 5 wird dieser Beweis dann abgeschlossen: Unter der Annahme, daß neben den in Abschnitt 3.1 gefundenen Ausnahmen von $\phi_{7,1}$ und $\phi_{7,2}$ noch eine weitere existiert, wird dort mit Hilfe der expliziten Abschätzungen des vierten Kapitels eine Ungleichung aufgestellt, die im Widerspruch steht zu den Ergebnissen dieses Kapitels bzw. zu einer daraus abgeleiteten Ungleichung.

3.1 Elementare Ergebnisse

Nach dem folgenden Satz weisen die Geschlechter, in denen die Kaplansky-Form und ihre Begleiter liegen, untereinander die gleiche Struktur auf:

Satz 11: *Für jedes $k \in \{7, 14, 49, 98\}$ repräsentieren $\phi_{k,1}$ und $\phi_{k,2}$ die Klassen eines Geschlechts der Determinante k , das genau ein Spinorgeschlecht enthält. Zulässig für dieses Geschlecht sind für $k \in \{7, 14\}$ genau diejenigen natürlichen Zahlen, die nicht in der Menge*

$$\mathcal{M} := \{7^{2a+1}(7b+c) : a, b \in \mathbb{N}_0 \text{ und } c \in \{3, 5, 6\}\}$$

liegen. Für $k \in \{49, 98\}$ sind genau die Elemente der Menge $\mathcal{M}/7$ unzulässig.

Beweis: Die Aussage über die Klassen findet sich in [BI58], die über das Spinorgeschlecht in [Hsi81, Seite 235]. Die zulässigen Zahlen für $k = 7$ sind in [Kap95] angegeben und mit dem obigen Lemma können daraus die zulässigen Zahlen für $k \in \{14, 49, 98\}$ abgeleitet werden. \square

Als nächstes wird nun die angekündigte Verschärfung der von Kaplansky gefundenen Zusammenhänge formuliert und nachgewiesen. Bezeichne dazu für $j \in \{1, 2\}$ und $k \in \{7, 14, 49, 98\}$ mit

$$r_{k,j}(N) := \#\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : \phi_{k,j}(x, y, z) = N\}$$

die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl N durch die Form $\phi_{k,j}$.

Theorem 1: *Für $j \in \{1, 2\}$ und $N \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Identitäten:*

$$a) \ r_{7,j}(N) = r_{14,j}(2N) \quad \text{und} \quad r_{14,j}(2N+1) = r_{7,j}(4N+2),$$

$$b) \ r_{7,j}(N) = r_{49,j}(7N) \quad \text{und} \quad r_{49,j}(N) = r_{7,j}(7N),$$

$$c) \ r_{49,j}(N) = r_{98,j}(2N) \quad \text{und} \quad r_{98,j}(2N+1) = r_{49,j}(4N+2).$$

Beweis: Es werden jeweils Bijektionen zwischen den Darstellungen durch die betrachteten Formen angegeben. Sei dazu $N \in \mathbb{N}$. Die Abbildung

$$g_1 : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x + y, x - y, z)$$

liefert eine Bijektion von \mathbb{Q}^3 auf sich mit Umkehrabbildung

$$g_1^{-1} : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3, \quad (a, b, c) \mapsto \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}, c \right)$$

und es gilt $\phi_{14,1}(g_1(x, y, z)) = 2\phi_{7,1}(x, y, z)$. Für eine Darstellung $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ von $2N$ durch $\phi_{14,1}$ haben a und b gleiche Parität, so daß $g_1^{-1}(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ folgt. Somit ist durch g_1 eine Bijektion zwischen den Darstellungen von N durch $\phi_{7,1}$ und den Darstellungen von $2N$ durch $\phi_{14,1}$ gegeben. Ebenso ist

$$g_2 : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (2y + z, x, z)$$

eine Bijektion von \mathbb{Q}^3 auf sich mit Umkehrabbildung

$$g_2^{-1} : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3, \quad (a, b, c) \mapsto \left(b, \frac{a-c}{2}, c \right).$$

Es gilt $\phi_{14,2}(g_2(x, y, z)) = 2\phi_{7,2}(x, y, z)$ und für eine Darstellung $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ von $2N$ durch $\phi_{14,2}$ haben a und c gleiche Parität, so daß $g_2^{-1}(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ folgt. Also überführt g_2 die Darstellungen von N durch $\phi_{7,2}$ in Darstellungen von $2N$ durch $\phi_{14,2}$ et vice versa. Damit ist die erste Identität aus a) gezeigt. Für die zweite Identität betrachte zunächst die Abbildung

$$g_3 : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x + y, x - y, 2z).$$

Diese liefert eine Bijektion von \mathbb{Q}^3 auf sich mit Umkehrabbildung

$$g_3^{-1} : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3, \quad (a, b, c) \mapsto \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}, \frac{c}{2} \right)$$

und es gilt $\phi_{7,1}(g_3(x, y, z)) = 2\phi_{14,1}(x, y, z)$. Ist $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ eine Darstellung von $4N + 2$ durch $\phi_{7,1}$, so haben a und b die gleiche Parität, c ist gerade und es folgt $g_3^{-1}(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. Ebenso ist

$$g_4 : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (2y, x - z, 2z)$$

eine Bijektion von \mathbb{Q}^3 auf sich mit Umkehrabbildung

$$g_4^{-1} : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3, \quad (a, b, c) \mapsto \left(\frac{2b+c}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2} \right).$$

Es gilt $\phi_{7,2}(g_4(x, y, z)) = 2\phi_{14,2}(x, y, z)$ und für eine Darstellung $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ von $4N + 2$ durch $\phi_{7,2}$ sind a und c beide gerade, b ist ungerade und somit folgt $g_4^{-1}(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. Damit ist auch die zweite Identität aus a) bewiesen. Die Identitäten aus b) und c) ergeben sich analog – dazu werden nun im wesentlichen nur noch die benötigten Bijektionen zwischen den Darstellungen durch die jeweiligen Formen angegeben: Für $j \in \{1, 2\}$ erfüllt die Bijektion

$$g_{5,j} : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{cases} (7z, x, y) & \text{falls } j = 1, \\ (y + 4z, -2y - z, x) & \text{falls } j = 2, \end{cases}$$

zunächst $\phi_{49,j}(g_{5,j}(x, y, z)) = 7\phi_{7,j}(x, y, z)$. Weiter besitzt $g_{5,j}^{-1}(a, b, c)$ für den Fall $\phi_{49,j}(a, b, c) \in 7\mathbb{Z}$ ganzzahlige Komponenten, so daß $g_{5,j}$ eine Bijektion zwischen den Darstellungen von N durch $\phi_{7,j}$ und den Darstellungen von $7N$ durch $\phi_{49,j}$ liefert. Umgekehrt sind auch die Abbildungen

$$g_{6,j} : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{cases} (7y, 7z, x) & \text{falls } j = 1, \\ (7z, -x - 4y, 2x + y) & \text{falls } j = 2, \end{cases}$$

bijektiv und überführen Darstellungen von N durch $\phi_{49,j}$ in Darstellungen von $7N$ durch $\phi_{7,j}$ et vice versa, denn es gilt $\phi_{7,j}(g_{6,j}(x, y, z)) = 7\phi_{49,j}(x, y, z)$ sowie $g_{6,j}^{-1}(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ im Fall $\phi_{7,j}(a, b, c) \in 7\mathbb{Z}$. Damit ist auch b) gezeigt. Analog liefert für $j \in \{1, 2\}$ die Bijektion

$$g_{7,j} : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{cases} (x, y + z, y - z) & \text{falls } j = 1, \\ (2x + y, y, z) & \text{falls } j = 2, \end{cases}$$

einerseits $\phi_{98,j}(g_{7,j}(x, y, z)) = 2\phi_{49,j}(x, y, z)$. Andererseits ist $g_{7,j}^{-1}(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ zumindest im Fall $\phi_{98,j}(a, b, c) \in 2\mathbb{Z}$ erfüllt. Ebenso gilt für die Bijektionen

$$g_{8,j} : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{cases} (2x, y + z, y - z) & \text{falls } j = 1, \\ (x - y, 2y, 2z) & \text{falls } j = 2, \end{cases}$$

jeweils $\phi_{49,j}(g_{8,j}(x, y, z)) = 2\phi_{98,j}(x, y, z)$ und überdies $g_{8,j}^{-1}(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ im Fall $\phi_{49,j}(a, b, c) \in 4\mathbb{Z} + 2$. Daraus folgt schließlich auch Teil c). \square

Die Frage nach den Ausnahmen der Kaplansky-Form ist also vollständig äquivalent zu der entsprechenden Frage für die Formen $\phi_{14,1}$, $\phi_{49,1}$ oder $\phi_{98,1}$. Dieses Resultat wird in den folgenden Abschnitten an verschiedenen Stellen verwendet: Zum Beispiel werden bei den Beweisen von Satz 17 und Theorem 5 Ergebnisse von Jones bzw. Waldspurger benutzt, die nur auf ungerade

und zur Determinante der betrachteten Form prime Zahlen anwendbar sind. Enthält eine gegebene Zahl aber einen Primfaktor 2 oder 7, so kann dieser wegen Theorem 1 durch Übergang zu einer der anderen Formen eliminiert werden. Ebenso lassen sich damit aus dem nächsten Resultat, das die Beschränkung der Suche nach den Ausnahmen der Formen $\phi_{7,1}$ und $\phi_{7,2}$ auf wenige Restklassen modulo 12 rechtfertigt, direkt entsprechende Aussagen für die anderen Begleiter der Kaplansky-Form ableiten.

Theorem 2: *Es gelten die folgenden Aussagen:*

- a) *Jede zulässige Zahl $N \in 4\mathbb{N}_0 + \{0, 1\}$ ist darstellbar durch $\phi_{7,1}$ und $\phi_{7,2}$. Für $N \in 8\mathbb{N}_0 + 5$ gilt sogar $r_{7,1}(N) = r_{7,2}(N)$.*
- b) *Eine zulässige Zahl $N \in 3\mathbb{N}_0 + 2$ ist genau dann darstellbar durch $\phi_{7,1}$, wenn sie nicht die Gestalt $14 \cdot 7^{2k}$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ hat.*
- c) *Jede zulässige Zahl $N \in 3\mathbb{N}_0 + \{0, 2\}$ ist darstellbar durch $\phi_{7,2}$.*

Beweis: Die Aussage c) ist in [Kap95] als Theorem 1 formuliert und das dortige Theorem 2 wurde in [PRW01, Theorem 5] zu b) verschärft. Schließlich ist der erste Teil der Aussage a) genau das Theorem 3 aus [Kap95] – zum Beweis wird dort implizit gezeigt, daß mit Hilfe der Bijektionen $g, h : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$,

$$g(x, y, z) := \left(x, \frac{y - 3z}{2}, \frac{y + z}{2} \right) \text{ und } h(x, y, z) := \left(\frac{y + 4z}{2}, x, \frac{y}{2} \right),$$

aus jeder Darstellung einer Zahl $N \in 4\mathbb{N}_0 + \{0, 1\}$ durch $\phi_{7,1}$ eine Darstellung von N durch $\phi_{7,2}$ gewonnen werden kann und umgekehrt. Für $N \in 8\mathbb{N}_0 + 5$ liefert einerseits g eine Bijektion zwischen den Darstellungen $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ mit $y \in 2\mathbb{Z}$ durch $\phi_{7,1}$ und den Darstellungen $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ mit $b \in 2\mathbb{Z} + 1$ durch $\phi_{7,2}$. Andererseits überführt h die Darstellungen $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ von N mit $y \in 2\mathbb{Z} + 1$ durch $\phi_{7,1}$ bijektiv in die Darstellungen $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ von N mit $b \in 2\mathbb{Z}$ durch $\phi_{7,2}$. Daher können g und h zu einer Bijektion zwischen den Darstellungen von N durch $\phi_{7,1}$ und $\phi_{7,2}$ verdichtet werden. \square

Aufgrund des folgenden Theorems können die Überlegungen zur Darstellbarkeit durch die Formen aus dem Geschlecht der Kaplansky-Form überdies auf quadratfreie Zahlen beschränkt werden. Wiederum liefert Theorem 1 eine entsprechende Aussage für die Formen $\phi_{k,1}$ und $\phi_{k,2}$ mit $k \in \{14, 49, 98\}$.

Theorem 3: *Seien $j \in \{1, 2\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.*

- a) *Jede zulässige Zahl p^2n mit $p \in \mathbb{P} \setminus \{7\}$ ist darstellbar durch $\phi_{7,j}$.*
- b) *Es ist 7^{2n} genau dann darstellbar durch $\phi_{7,j}$, wenn dies für n gilt.*

Beweis: Die Aussage b) folgt direkt aus Teil b) von Theorem 1. Weiter sind alle zulässigen Vielfachen von 4 nach Teil a) von Theorem 2 durch beide Vertreter des Kaplansky-Geschlechts darstellbar. Schließlich folgt die Darstellbarkeit von p^2n für $n \in \mathbb{N}_0$ und hinreichend große $p \in \mathbb{P} \setminus \{2, 7\}$ direkt aus [HJ97, Seite 485] – der vollständige Beweis von Teil a) wird jedoch erst in Abschnitt 3.3 mit Hilfe der Theorie der Modulformen erbracht. \square

Aus der Struktur des Kaplansky-Geschlechts mit zwei Klassen im selben Spinorgeschlecht folgt der nachstehend formulierte Satz, nach dem fast alle quadratfreien zulässigen Zahlen durch beide Vertreter dieses Geschlechts darstellbar sind. Wieder kann mit Hilfe von Theorem 1 eine analoge Aussage für die Begleiter $\phi_{k,j}$ mit $k \in \{14, 49, 98\}$ und $j \in \{1, 2\}$ abgeleitet werden:

Satz 12: *Für $j \in \{1, 2\}$ hat $\phi_{7,j}$ nur endlich viele quadratfreie Ausnahmen.*

Beweis: Nach [DSP90, Seite 56] stellt eine positiv definite ternäre quadratische Form fast alle Zahlen dar, die vom Spinorgeschlecht dieser Form primitiv dargestellt werden. Nun sind Darstellungen quadratfreier Zahlen immer primitiv und jede zulässige Zahl wird von dem durch $\phi_{7,1}$ und $\phi_{7,2}$ repräsentierten Spinorgeschlecht dargestellt, da dieses nach Satz 11 mit dem Geschlecht zusammenfällt. Somit stellt also jede der beiden Formen fast alle zulässigen quadratfreien Zahlen dar. \square

Das zum Beweis verwendete Resultat von Duke und Schulze-Pillot aus dem Jahre 1990 beruht allerdings auf der ineffektiven Siegelschen Abschätzung für Klassenzahlen imaginär-quadratischer Zahlkörper, so daß keine Aussage über die genaue Anzahl der Ausnahmen möglich ist oder über eine Schranke, oberhalb derer alle zulässigen Zahlen dargestellt werden. In dieser Arbeit wird unter Annahme der Richtigkeit einer Verallgemeinerten Riemannschen Vermutung eine solche Schranke ($2 \cdot 10^{12}$) hergeleitet. Die Zahlen unterhalb dieser Schranke werden mit Computereinsatz auf Darstellbarkeit untersucht, woraus sich für die Kaplansky-Form $\phi_{7,1}$ und ihre Begleiter eine bedingte Antwort auf die Frage nach den Ausnahmen ergibt. Ohne größeren Aufwand ist die Darstellbarkeit relativ kleiner Zahlen nachzuprüfen, z. B. gelten

$1 = \phi_{7,1}(1, 0, 0)$	$2 = \phi_{7,1}(1, 1, 0)$	3 Ausnahme von $\phi_{7,1}$
$4 = \phi_{7,1}(2, 0, 0)$	$5 = \phi_{7,1}(2, 1, 0)$	6 Ausnahme von $\phi_{7,1}$
$7 = \phi_{7,1}(0, 0, 1)$	$8 = \phi_{7,1}(2, 2, 0)$	$9 = \phi_{7,1}(3, 0, 0)$
$10 = \phi_{7,1}(3, 1, 0)$	$11 = \phi_{7,1}(2, 0, 1)$	$12 = \phi_{7,1}(2, 1, 1)$
$13 = \phi_{7,1}(3, 2, 0)$	14 Ausnahme von $\phi_{7,1}$	$15 = \phi_{7,1}(2, 2, 1)$.

Der Ansatz $\phi_{7,1}(x, y, z) = N$ liefert dabei für gegebenes $N \in \mathbb{N}$ unmittelbar

die Schranken $|x|, |y| \leq \sqrt{N}$ sowie $|z| \leq \sqrt{N/7}$, so daß jeweils nach endlich vielen Versuchen entschieden werden kann, ob eine Zahl darstellbar ist oder nicht. Mit einer Kombination zweier darauf basierender Algorithmen wurden alle zulässigen quadratfreien Zahlen bis $2 \cdot 10^{12}$ computergestützt auf Darstellbarkeit durch $\phi_{7,1}$ bzw. $\phi_{7,2}$ überprüft, sofern diese nicht schon aus Theorem 2 folgt. Bei diesen Untersuchungen (für Details siehe Anhang A.7) tauchten neben den schon von Kaplansky im Bereich bis 10^5 gefundenen Ausnahmen der beiden Formen keine weiteren mehr auf:

Satz 13: *Die Form $\phi_{7,1}$ stellt alle quadratfreien zulässigen Zahlen $N \leq 2 \cdot 10^{12}$ bis auf die 53 Zahlen 3, 6, 14, 19, 22, 31, 51, 55, 66, 94, 139, 142, 154, 159, 166, 214, 235, 283, 322, 406, 439, 534, 559, 595, 651, 670, 714, 874, 946, 1435, 1726, 2086, 2131, 2170, 2310, 2419, 2506, 3262, 3346, 3559, 4759, 4879, 6034, 6643, 8554, 9814, 10591, 13699, 13846, 20734, 24514, 50155 und 73906 dar. Die quadratfreien Ausnahmen von $\phi_{7,2}$ in diesem Bereich sind genau die 5 Zahlen 7, 10, 79, 259 und 1771.*

Mit Hilfe von Theorem 1 lassen sich entsprechende Ergebnisse über die Ausnahmen der Formen $\phi_{k,j}$ mit $k \in \{14, 49, 98\}$ und $j \in \{1, 2\}$ ableiten.

Zusammenfassend hat die Kaplansky-Form nur endlich viele quadratfreie Ausnahmen, von denen genau 53 kleiner als 2 Billionen sind – die größte unter diesen bekannten Ausnahmen ist 73906. Zudem kann $\phi_{7,1}$ abgesehen von der Zahl 14 nur solche quadratfreien zulässigen Zahlen verfehlen, die bei Division durch 12 einen Rest 3, 6, 7 oder 10 haben. Für $\phi_{7,2}$ kommen hier sogar nur die Reste 7 und 10 in Frage und die größte quadratfreie Ausnahme im Bereich bis 2 Billionen ist die Zahl 1771. Folgende Vermutung liegt nahe:

Vermutung: *Die Formen $\phi_{7,1}$ und $\phi_{7,2}$ haben keine weiteren quadratfreien Ausnahmen als die in Satz 13 angegebenen.*

Da mit Hilfe von Theorem 3 die Darstellbarkeit nicht-quadratfreier Zahlen aufgeklärt bzw. auf quadratfreie Zahlen zurückgeführt werden kann, wäre die Frage nach den Ausnahmen der Formen $\phi_{7,1}$ und $\phi_{7,2}$ im Falle eines Beweises dieser Vermutung vollständig beantwortet und aus Theorem 1 ergäbe sich die Lösung des entsprechenden Problems für die Begleiter dieser Formen. Ein vollständiger Beweis scheint mit den heutigen Methoden und Computern jedoch nicht möglich zu sein – siehe hierzu [OS97, Seite 418f]. Allerdings kann unter Annahme der Richtigkeit einer (in Abschnitt 3.5 präzise formulierten) Verallgemeinerung der Riemannschen Vermutung ein solcher Beweis erbracht werden. Dafür wird im folgenden Abschnitt zunächst über Thetareihen und die Shimura-Liftung ein Zusammenhang zu den Modulformen und dann mit Hilfe der Eichler-Shimura-Theorie zu den elliptischen Kurven hergestellt.

3.2 Zuordnung einer elliptischen Kurve

Die Thetareihen zu quadratischen Formen sind gemäß Abschnitt 2.4 eine wichtige Motivation für die Theorie der Modulformen und liefern zugleich eine Fülle von Beispielen, bei denen als Fourierkoeffizienten also die Darstellungsanzahlen durch diese quadratischen Formen auftreten. Hier gilt nun für alle $k \in \{7, 14, 49, 98\}$ und $n \in \mathbb{N}$ wegen $\phi_{k,j}(x, y, z) = \phi_{k,j}(-x, -y, -z)$

$$a_k(n) := \frac{1}{2} (r_{k,1}(n) - r_{k,2}(n)) \in \mathbb{Z}.$$

Da für jedes solche k die Formen $\phi_{k,1}$ und $\phi_{k,2}$ im selben Geschlecht liegen, sind durch diese Festlegung nach Satz 6 aus Abschnitt 2.4 sogar die Fourierkoeffizienten einer Spitzenform vom Gewicht $3/2$ definiert:

$$f_k(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_k(n) q^n \in \begin{cases} S_{3/2}(28, \chi'_{4k}) & \text{für } k \in \{7, 49\}, \\ S_{3/2}(56, \chi'_{4k}) & \text{für } k \in \{14, 98\}, \end{cases}$$

wobei χ'_{4k} den durch χ_{4k} induzierten Charakter modulo 28 bzw. 56 bezeichne. Im Beweis von M 5 aus Anhang A.5 wird der Beginn der Fourierentwicklung von f_7 ermittelt und mit Hilfe von Theorem 1 können daraus auch die ersten Fourierkoeffizienten der Formen f_{14} , f_{49} und f_{98} gewonnen werden:

$$f_7(z) = q + q^2 - 2q^3 - q^4 - 2q^6 + q^7 - q^8 - q^9 + 4q^{10} + 2q^{11} + \dots$$

Diesen Modulformen soll durch Anwenden der Shimura-Liftung eine Modulform vom Gewicht 2 zugeordnet werden. Der entsprechende Satz 8 kann aber nur auf simultane Eigenformen aller Hecke-Operatoren angewendet werden, was nach folgendem Resultat nicht für alle auftretenden Formen erfüllt ist:

Lemma 1: f_7 und f_{49} sind simultane Eigenformen aller Hecke-Operatoren, während f_{14} und f_{98} nur Eigenformen von $T(p^2)$ für $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ sind.

Beweis: Für $k \in \{7, 49\}$ ist der Raum $S_{3/2}(28, \chi'_{4k})$ nach [Leh92, Seite 417] eindimensional, so daß f_7 und f_{49} trivialerweise Eigenformen aller Hecke-Operatoren sind. Seien nun $k \in \{14, 98\}$ und $p \in \mathbb{P}$.

Für $p \notin \{2, 7\}$ läßt $T(p^2)$ gemäß [SP84, Hilfssatz 1] nicht nur $S_{3/2}(56, \chi'_{4k})$ invariant, sondern auch den von den Thetareihen zu $\phi_{k,1}$ und $\phi_{k,2}$ erzeugten Unterraum von $M_{3/2}(56, \chi'_{4k})$. Da der Durchschnitt dieser beiden Räume eindimensional ist und von der Form f_k erzeugt wird, ist diese also Eigenform von $T(p^2)$. Nach (6) auf Seite 10 gilt $T(p^2)f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,p}(n) q^n$ mit

$$a_{k,p}(n) = a_k(p^2 n) + p \chi'_{4k}(p) \left(\frac{n}{p}\right) \left(\frac{-1}{p}\right) a_k(n) + p \chi'_{4k}(p^2) a_k(n/p^2).$$

Für $p \in \{2, 7\}$ folgt dabei $\chi'_{4k}(p) = \chi'_{4k}(p^2) = 0$ und somit $a_{k,p}(n) = a_k(p^2 n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da χ'_{4k} Charakter modulo 56 ist. Mit Theorem 1 ergibt sich daher direkt $a_{k,7}(n) = a_k(49n) = a_k(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so daß f_k Eigenform von $T(7^2)$ mit Eigenwert 1 ist. Auf der vorigen Seite sind die ersten Fourierkoeffizienten von f_7 angegeben und zusammen mit Theorem 1 kann

$$\frac{a_{14}(4)}{a_{14}(1)} = \frac{a_{98}(4)}{a_{98}(1)} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{a_{14}(8)}{a_{14}(2)} = \frac{a_{98}(8)}{a_{98}(2)} = -1,$$

verifiziert werden, so daß also weder f_{14} noch f_{98} Eigenform von $T(2^2)$ ist. \square

Die Formen f_{14} und f_{98} erfüllen also nicht die Voraussetzungen des Satzes über die Shimura-Liftung. Durch Anwendung des Hecke-Operators $T(2^2)$, dessen Wirkung auf die Fourierkoeffizienten der beiden Formen in dem obigen Beweis beschrieben ist, ergeben sich die folgenden modifizierten Formen:

$$f_k^*(z) := T(2^2)f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k(4n)q^n \in S_{3/2}(56, \chi'_{4k}).$$

Nach Theorem 1 gilt $a_k(8n+4) = a_k(2n+1)$ für $k \in \{14, 98\}$ und $n \in \mathbb{N}$, so daß sich durch diese Modifikation nur die Koeffizienten zu den geraden Potenzen von q ändern, auf die der Satz von Waldspurger in Abschnitt 3.4 ohnehin nicht anwendbar ist. Aus dieser Modifikation ergeben sich also für das weitere Vorgehen keine Einschränkungen und das folgende Resultat zeigt, daß die modifizierten Spitzenformen den geforderten Ansprüchen genügen:

Theorem 4: f_7, f_{14}^*, f_{49} und f_{98}^* sind simultane Eigenformen aller Hecke-Operatoren $T(p^2)$, $p \in \mathbb{P}$. Die Shimura-Liftung zu jeder dieser Formen ist

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} A(n)q^n := \eta(z)\eta(2z)\eta(7z)\eta(14z) \in S_2(14).$$

Beweis: Nach Lemma 1 sind f_7 und f_{49} simultane Eigenformen aller Hecke-Operatoren und für $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ sind auch f_{14} und f_{98} Eigenformen von $T(p^2)$. Werden die Fourierkoeffizienten von $T(p^2)f_k$ mit $a_{k,p}(n)$ bezeichnet, so gilt also $a_{k,p}(n) = \lambda_{k,p} a_k(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und geeignete $\lambda_{k,p} \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist diese Gleichung für alle $n \in 4\mathbb{N}$ erfüllt, so daß f_{14}^* und f_{98}^* ebenfalls Eigenformen von $T(p^2)$ ($p \neq 2$) sind. Für $k \in \{14, 98\}$ wird nun gezeigt, daß f_k^* auch Eigenform von $T(2^2)$ ist. Nach [CO76] ist der Raum $S_{3/2}(56, \chi'_{4k})$ zweidimensional und wird daher von den linear unabhängigen Formen f_k und f_k^* erzeugt. Somit ist $T(2^2)f_k^*$ Linearkombination dieser beiden Formen und es existieren $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ mit $T(2^2)f_k^* = \beta f_k^* + \gamma f_k$. Insbesondere ergibt sich

$$a_k(16) = \beta a_k(4) + \gamma a_k(1) \quad \text{und} \quad a_k(32) = \beta a_k(8) + \gamma a_k(2)$$

und dieses lineare Gleichungssystem geht durch Einsetzen der Koeffizienten, die sich mit Hilfe von Theorem 1 aus den im Anhang auf Seite 103 berechneten Werten $a_7(n)$ ergeben, über in das System

$$-1 = \beta + \gamma \quad \text{und} \quad 1 = -\beta + \gamma,$$

dessen eindeutige Lösung gegeben ist durch $\beta = -1$ und $\gamma = 0$. Daher ist f_k^* Eigenform von $T(2^2)$ zum Eigenwert -1 .

Auf die Formen f_k mit $k \in \{7, 49\}$ und f_k^* mit $k \in \{14, 98\}$ ist daher die Shimura-Liftung anwendbar: Bezeichnet $\lambda_{k,p}$ für $p \in \mathbb{P}$ den Eigenwert von f_k bzw. f_k^* zu $T(p^2)$, so folgt $F_k(z) := \sum_{n=1}^{\infty} A_k(n) q^n \in M_2(14)$ bzw. $\in M_2(28)$ aus Satz 8, falls die $A_k(n)$ definiert werden durch

$$(15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_k(n)}{n^s} := \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \lambda_{k,p} p^{-s} + \chi'_{4k}(p)^2 p^{1-2s}}.$$

Da $\phi_{k,1}$ und $\phi_{k,2}$ im gleichen Spinorgeschlecht liegen, gilt $f_k \perp U_{3/2}(28, \chi'_{4k})$ bzw. $f_k^* \perp U_{3/2}(56, \chi'_{4k})$ nach Satz 9 und somit $F_k \in S_2(14)$ bzw. $F_k \in S_2(28)$ aufgrund des Zusatzes zu Satz 8.

Bezeichnet $\eta(z) := q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ die Dedekindsche Eta-Funktion, so gilt nach [MO97, Theorem 1] auch $F(z) := \eta(z)\eta(2z)\eta(7z)\eta(14z) \in S_2(14)$. Aus der Dimensionformel in [Kna92, Seite 272] ergibt sich aber $\dim S_2(14) = 1$ und somit $F_k \equiv F$ für $k \in \{7, 49\}$, da F_k als Shimura-Liftung von f_k ebenso normiert ist wie F .

Aus [Kna92, Seite 272] ergibt sich weiter $\dim S_2(28) = 2$, so daß dieser Raum von den Formen $F(z)$ und $F(2z)$ erzeugt wird. Daher ist F_k für $k \in \{14, 98\}$ Linearkombination dieser beiden Formen, die wegen der Normiertheit von F_k und F die Gestalt $F_k(z) = F(z) + \beta F(2z)$ mit $\beta \in \mathbb{C}$ hat. Insbesondere gilt $A_k(2) = A(2) + \beta A(1)$, wobei einerseits $A(2) = -1$ sowie $A(1) = 1$ nach Definition von F folgt und andererseits über den Eigenwert $\lambda_{k,2} = -1$ von f_k^* zu $T(2^2)$ mit (15) auch $A_k(2) = -1$ berechnet werden kann. Daraus folgt direkt $\beta = 0$ und somit auch in diesem Fall $F_k \equiv F$. \square

Durch Ausmultiplizieren des Eta-Produktes ergibt sich für diese Modulform

$$F(z) = q - q^2 - 2q^3 + q^4 + 2q^6 + q^7 - q^8 + q^9 - 2q^{12} - 4q^{13} + \dots$$

Nach dem folgenden Satz existiert nun eine elliptische Kurve, deren Hasse-Weilsche L-Reihe mit der automorphen L-Reihe von F übereinstimmt. Dieses Resultat wird sich als hilfreich erweisen, weil konkrete Werte im Zusammenhang mit L-Reihen für elliptische Kurven meistens (mit Computereinsatz) einfacher zu berechnen sind als die entsprechenden Werte für Modulformen.

Es ist zwar im wesentlichen schon in [OS97, Theorem 2] formuliert, wird aber an dieser Stelle aufgrund der zentralen Bedeutung nochmals bewiesen:

Satz 14: *F ist normierte Neuform in $S_2(14)$ mit $A(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für die elliptische Kurve*

$$E : y^2 + xy + y = x^3 + 4x - 6$$

vom Führer 14 gilt $L(s, F) = L(s, E)$.

Beweis: Aus [Kna92, Seite 272] folgt $S_2(M) = \{0\}$ für alle $M|14$ mit $M \neq 14$. Daher gilt $S_2^{alt}(14) = \{0\}$ und somit $F \in S_2^{neu}(14)$. Wegen $\dim S_2(14) = 1$ ist F automatisch Eigenform aller Hecke-Operatoren $T(m)$ ($m \in \mathbb{N}$), also Neuform in $S_2(14)$. Als Shimura-Liftung von f ist F insbesondere normiert. Weiter sind wegen $F(z) = \eta(z)\eta(2z)\eta(7z)\eta(14z)$ alle Fourierkoeffizienten $A(n)$ ganze Zahlen. Nach dem Satz von Eichler-Shimura/Carayol auf Seite 16 existiert somit eine elliptische Kurve E vom Führer 14, deren Hasse-Weilsche L-Reihe gegeben ist durch $L(s, E) = \sum_{n=1}^{\infty} A(n) n^{-s}$. Nach den Tabellen in [Cre92] existiert aber nur eine Isogenieklasse zum Führer 14, welche repräsentiert wird durch die im Satz angegebene Kurve. \square

Die elliptische Kurve E kann durch die Variablensubstitution $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ in die Weierstraß-Form $y^2 = x^3 + x^2 + 72x - 368$ überführt werden. Diese Darstellung ist zwar nicht mehr global-minimal, erlaubt aber für $D \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ das Aufstellen einer Gleichung des über $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ zu E isomorphen Twists

$$E(D) : y^2 = x^3 + Dx^2 + 72D^2x - 368D^3.$$

Der nächste Satz enthält Darstellungen für die L-Reihen, deren Logarithmen und logarithmische Ableitungen sowie die reellen Perioden dieser Twists:

Satz 15: *Sei $D \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dann gilt $L(\cdot, E(D)) = L(\cdot, F \otimes \chi_D)$ und somit*

$$L(s, E(D)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n)\chi_D(n)}{n^s} \quad \text{für } \Re s > 3/2.$$

Weiter gilt $\lambda_{E(D)}(n) = \lambda_E(n)\chi_D(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher

$$-\frac{L'(s, E(D))}{L(s, E(D))} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_E(n)\chi_D(n)}{n^s}$$

$$\text{so wie } \log L(s, E(D)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_E(n)\chi_D(n)}{n^s \log n} \quad \text{für } \Re s > 3/2.$$

Schließlich ist die reelle Periode von $E(D)$ gegeben durch

$$\Omega(E(D)) = u \cdot \int_{4D}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + Dx^2 + 72D^2x - 368D^3}},$$

wobei u im Fall $D \in 4\mathbb{Z} + 1$ gleich 2 und ansonsten gleich 1 ist.

Beweis: Ohne Einschränkung kann D als quadratfrei angenommen werden, da das Twisten mit einer Quadratzahl zu einer über \mathbb{Q} isomorphen Kurve führt. Gemäß [Cre92, Seite 82] besitzt der D -quadratische Twist von E für $D \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ die gleiche L-Reihe wie die mit dem Kronecker-Charakter des imaginär-quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ getwistete Spitzenform F .

Die Diskriminante von $E(D)$ ist ein Vielfaches der Diskriminante 14 von E . Für $p \in \{2, 7\}$ gilt daher $\lambda_{E(D)}(p^m) = A(p)^m \chi_D(p)^m \log p = \lambda_E(p^m) \chi_D(p^m)$ nach der Definition auf Seite 17. Für Primteiler p von D ist $\chi_D(p) = 0$, so daß diese Gleichheit ebenfalls gegeben ist. Schließlich ergibt sich diese für $p \nmid 14D$ wiederum aus der Definition, da sich der Realteil von α_p durch das Twisten um den Faktor $\chi_D(p)$ und der Imaginärteil um einen Faktor $\pm\chi_D(p)$ ändert. Für die Bestimmung der reellen Periode ist $E(D)$ zunächst in eine global-minimale Weierstraß-Form $y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2^2x + a_4x + a_6$ zu überführen. Die dazu benötigte zulässige Variablensubstitution $(u, r, s, t) \in \mathbb{Q}^4$ liefert der in [Cre92] auf den Seiten 47f abgedruckte Kraus-Laska-Connell-Algorithmus[†]. Die reelle Periode ergibt sich dann gemäß Abschnitt 2.6 durch Integration des Betrags des invarianten Differentials $dx/(2y + a_1x + a_3)$ über $[E(D)](\mathbb{R})$, wobei dieser Integrationsweg nur aus einer Zusammenhangskomponente besteht, da $4D$ einzige reelle Nullstelle des Polynoms $x^3 + Dx^2 + 72D^2x - 368D^3$ ist. Bei der Definition des Integranden heben sich die Parameter s und t auf und durch die Substitution $t = u^2x + r$ wird die vorher auf die Koeffizienten von $E(D)$ angewendete Variablensubstitution bis auf einen Faktor u rückgängig gemacht. Auf diese Weise kann die Gleichheit mit dem im Satz angegebenen Integral gezeigt werden, wobei eine genauere Analyse des Kraus-Laska-Connell-Algorithmus auch die Aussage über den konkreten Wert von u liefert: Die Invarianten und die Diskriminante von $E(D)$ sind gegeben durch

$$c_4 = -2^4 \cdot 5 \cdot 43 \cdot D^2, \quad c_6 = 2^6 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot D^3, \quad \Delta = -2^{18} \cdot D^6.$$

Daraus folgt $(c_6^2, \Delta) = 2^{12}D^6$ sowie $\text{ord}(3, c_6) \in \{0, 3\}$, so daß u einen Wert ± 1 oder ± 2 annehmen muß. Wegen $\text{ord}(2, c_4) \in \{4, 6\}$ ist $u = \pm 2$ äquivalent zu

$$-5 \cdot 43 \cdot D^2 \equiv 1 \pmod{2} \quad \text{und} \quad 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot D^3 \equiv -1 \pmod{4}.$$

[†] Unter <http://www.maths.nott.ac.uk/personal/jec/book/amec.html> finden sich Errata zur ersten Auflage des Buches und insbesondere zum Kraus-Laska-Connell-Algorithmus.

Beide Bedingungen gleichzeitig sind offenbar genau für $D \in 4\mathbb{Z} + 1$ erfüllt. \square

Das folgende Resultat aus [Jam98] wird im weiteren Verlauf nicht benutzt und ist hier nur deshalb aufgeführt, weil zum Beweis interessanterweise der soeben geschilderte Zusammenhang zwischen der elliptischen Kurve E und den Begleitern $\phi_{49,1}$ bzw. $\phi_{49,2}$ der Kaplansky-Form ausgenutzt wird. Nach diesem Resultat haben zumindest knapp elf Prozent der über imaginär-quadratischen Zahlkörpern zu E isomorphen Twists den Rang 0:

Satz: Für mindestens $\frac{7}{64}$ aller quadratfreien $D \in \mathbb{N}$ gilt $L(1, E(-D)) \neq 0$.

Nach einer (bislang unbewiesenen) Vermutung von Goldfeld gilt die Aussage dieses Satzes sogar für die Hälfte aller quadratfreien Zahlen (siehe [Gol79]). Als erste Anwendung der in diesem Abschnitt gefundenen Zuordnungen wird im folgenden Abschnitt der ausstehende Beweis zu Theorem 3 geführt. Vorher werden dazu einige Resultate über Klassenzahlen imaginär-quadratischer Zahlkörper nachgewiesen, die später auch beim Beweis des Hauptsatzes über die Ausnahmen der Kaplansky-Form eine entscheidende Rolle spielen.

3.3 Zusammenhang mit Klassenzahlen

Nach dem auf Seite 8 formulierten Satz von Jones kann die Anzahl der wesentlich verschiedenen primitiven Darstellungen einer natürlichen Zahl N durch die Vertreter eines Geschlechts ternärer Formen in Zusammenhang gebracht werden mit der Klassenzahl eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers. In Satz 17 findet sich eine solche Formel für den Spezialfall des Kaplansky-Geschlechts. Zuvor wird für $k \in \{7, 14, 49, 98\}$ die im folgenden mit $G_k(N)$ bezeichnete Anzahl der wesentlich verschiedenen primitiven Darstellungen durch die beiden Formen $\phi_{k,1}$ und $\phi_{k,2}$ mittels einer Untersuchung der zugehörigen Automorphismen auf die Darstellungsanzahlen $r_{k,j}(N)$ zurückgeführt:

Satz 16: Für $N > 14$ quadratfrei und $k \in \{7, 14, 49, 98\}$ gilt

$$G_k(N) = \frac{1}{8} r_{k,1}(N) + \frac{1}{4} r_{k,2}(N).$$

Beweis: Seien $N > 14$ quadratfrei und $k \in \{7, 14, 49, 98\}$. Nach den Tabellen in [BI58] hat $\phi_{k,1}$ genau 8 und $\phi_{k,2}$ genau 4 (eigentliche) Automorphismen. Weiter ist für quadratfreie Zahlen jede Darstellung primitiv und so bleibt zu zeigen, daß durch Anwenden der Automorphismen auf eine beliebige Darstellung von N durch $\phi_{k,1}$ bzw. $\phi_{k,2}$ jeweils genau 8 bzw. 4 paarweise verschiedene Darstellungen entstehen. Dies kann in allen Fällen durch Vergleich sämtlicher entstehender Darstellungen leicht verifiziert werden – das Vorgehen dazu wird im folgenden an einigen repräsentativen Beispielen demonstriert:

(i) Im Fall $k \in \{7, 14\}$ sind die Automorphismen von $\phi_{k,1}$ gerade die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Würde z. B. Anwenden des dritten und sechsten Automorphismus auf eine Darstellung (x, y, z) von N durch $\phi_{k,1}$ die gleiche Darstellung liefern, so wäre

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und somit $(-x, -y, z) = (-y, x, z)$. Damit würde dann $x = y = 0$ folgen und daraus direkt $N = \phi_{k,1}(0, 0, z) = kz^2$ im Widerspruch zu $N > 14$ quadratfrei.

(ii) Für $k \in \{49, 98\}$ sind die 8 Automorphismen von $\phi_{k,1}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier folgt beispielsweise aus der Annahme, daß durch Anwenden des ersten und vierten Automorphismus auf eine Darstellung (x, y, z) von N durch $\phi_{k,1}$ jeweils die gleiche Darstellung entsteht, unmittelbar $(x, y, z) = (-x, y, -z)$ und daher $N = \phi_{k,1}(0, y, 0) = 7y^2$ im Widerspruch zu $N > 14$ quadratfrei.

(iii) Die Automorphismen von $\phi_{7,2}$ sind gegeben durch die 4 Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Würde hier etwa Anwenden des ersten und dritten Automorphismus auf eine Darstellung (x, y, z) von N durch $\phi_{7,2}$ die gleiche Darstellung liefern, so folgte direkt $(x, y, z) = (-x, -y - z, z)$ und daraus $x = 0$ sowie $z = -2y$. Damit wäre $N = \phi_{7,2}(0, y, -2y) = 14y^2$ im Widerspruch zu $N > 14$ quadratfrei.

(iv) Im Fall $k \in \{14, 98\}$ sind die 4 Automorphismen von $\phi_{k,2}$ die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hier folgt zum Beispiel aus der Annahme, daß durch Anwenden des dritten und vierten Automorphismus auf eine Darstellung (x, y, z) von N durch $\phi_{k,2}$ die gleiche Darstellung entsteht, unmittelbar $(-x, -y, z) = (-x, y, -z)$ und daher $N = \phi_{k,2}(x, 0, 0) = x^2$ im Widerspruch zu $N > 14$ quadratfrei.

(v) Schließlich sind die 4 Automorphismen von $\phi_{49,2}$ gerade die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Annahme, daß etwa durch Anwenden des zweiten und dritten Automorphismus auf eine Darstellung (x, y, z) von N durch $\phi_{49,2}$ jeweils die gleiche Darstellung entsteht, führt hier zu $(-x, -y, z) = (-x - y, y, -z)$ und daher zu $N = \phi_{49,2}(x, 0, 0) = 2x^2$ im Widerspruch zu $N > 14$ quadratfrei. \square

Wie angekündigt wird nun mit Hilfe des in Abschnitt 2.3 auf Seite 8 formulierten Satzes von Jones der Zusammenhang zu den Klassenzahlen der imaginär-quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-28N})$ hergestellt:

Hilfssatz 1: *Es sei $N \in 4\mathbb{N} + \{2, 3\}$ eine für $\phi_{7,1}$ und $\phi_{7,2}$ zulässige Zahl, die weder Vielfaches von 4 noch von 49 ist. Dann gilt*

$$h(-28N) = \begin{cases} 4G_7(N) & \text{falls } N \text{ ungerade,} \\ 4G_{14}(N/2) & \text{falls } N \text{ gerade,} \end{cases}$$

sofern N prim zu 7 ist, und ansonsten

$$h(-4N/7) = \begin{cases} 2G_{49}(N/7) & \text{falls } N \text{ ungerade,} \\ 2G_{98}(N/14) & \text{falls } N \text{ gerade.} \end{cases}$$

Beweis: Satz 3 (von Jones) ist nur auf solche natürlichen Zahlen anwendbar, die prim zu 2 und zur Determinante der jeweiligen Form, hier also zu 14 sind. (i) Auf $N \in \mathbb{N}$ mit $(N, 14) = 1$ sowie $\phi = \phi_{7,1}$ ist Satz 3 anwendbar und in den dortigen Bezeichnungen gilt $d = 7$, $\Omega = 1$ sowie $t(d/\Omega^2) = 1$. Außerdem ist in diesem Fall $N \in 4\mathbb{N} + 3$ und damit $\Delta = 7N \equiv 1 \pmod{4}$, so daß $\rho = 1/2$ und daher insgesamt $G_7(N) = h(-28N)/4$ folgt.

(ii) Sei nun N gerade mit $(N, 7) = 1$. Dann ist Satz 3 auf $N/2$ und $\phi = \phi_{14,1}$ anwendbar. In den dortigen Bezeichnungen ergibt sich $d = 14$, $\Omega = 1$ und somit $t(d/\Omega^2) = 1$. Wegen $N \in 4\mathbb{N} + 2$ folgt hier $\Delta = 14N/2 \equiv 2 \pmod{4}$ und daraus $\rho = 1/2$. Insgesamt ergibt sich $G_{14}(N/2) = h(-28N)/4$.

(iii) Für $(N, 2) = 1$ und $(N, 7) > 1$ ist Satz 3 auf $N/7$ und die Form $\phi_{49,1}$ anwendbar. In den dortigen Bezeichnungen gilt $d = 49$, $\Omega = 7$, $t(d/\Omega^2) = 0$. Wegen $N \in 4\mathbb{N} + 3$ ergibt sich $\Delta = N/7 \equiv 1 \pmod{4}$ und daher $\rho = 1/2$. Es gilt also $G_{49}(N/7) = h(-28N)/2$.

(iv) Für $N \in 14\mathbb{N}$ ist Satz 3 auf $N/14$ und die Form $\phi_{98,1}$ anwendbar. In den dortigen Bezeichnungen ergibt sich $d = 98$, $\Omega = 7$ und damit $t(d/\Omega^2) = 0$. Wegen N quadratfrei gilt $N \in 28\mathbb{N} + 14$ und daher $\Delta = 2N/14 \equiv 2 \pmod{4}$, so daß $\rho = 1/2$ folgt. Insgesamt folgt $G_{98}(N/14) = h(-4N/7)/2$. \square

Aus diesem Hilfssatz ergibt sich mit Hilfe von Theorem 1 und Satz 16 nun direkt die folgende Klassenzahlformel für die Anzahl der wesentlich verschiedenen primitiven Darstellungen einer quadratfreien Zahl $N \in 4\mathbb{N} + \{2, 3\}$ mit $N > 196$ durch das Kaplansky-Geschlecht, wobei die gegenüber dem Hilfssatz schärferen Voraussetzungen aus der Anwendung von Satz 16 resultieren:

Satz 17: *Es sei $N \in 4\mathbb{N} + \{2, 3\}$ mit $N > 196$ eine quadratfreie und für die Formen $\phi_{7,1}$ und $\phi_{7,2}$ zulässige Zahl. Dann gilt*

$$G_7(N) = \begin{cases} \frac{1}{4} h(-28N) & \text{falls } (N, 7) = 1, \\ \frac{1}{2} h(-\frac{4}{7}N) & \text{falls } (N, 7) > 1. \end{cases}$$

Mit Hilfe von Theorem 2 aus Abschnitt 3.1 lassen sich die beiden Sätze 16 und 17 dieses Abschnitts zu einer vollständigen Charakterisierung der Ausnahmen von $\phi_{7,1}$ und $\phi_{7,2}$ über die Klassenzahlen der imaginär-quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-28N})$ zusammenfassen:

Korollar 1: *Für $j \in \{1, 2\}$ ist eine quadratfreie zulässige Zahl $N \neq 7$ genau dann Ausnahme von $\phi_{7,j}$, wenn sie $N \equiv 2, 3 \pmod{4}$ erfüllt mit*

$$r_{7,3-j}(N) = \begin{cases} j h(-28N) & \text{falls } (N, 7) = 1, \\ 2j h(-\frac{4}{7}N) & \text{falls } (N, 7) > 1. \end{cases}$$

Beweis: Sei $j \in \{1, 2\}$ und zunächst $N > 196$ eine quadratfreie Zahl. Ist N dann Ausnahme von $\phi_{7,j}$, so erfüllt diese $N \equiv 2, 3 \pmod{4}$ nach Theorem 2. Weiter liefert Satz 16 wegen $r_{7,j}(N) = 0$ unmittelbar $r_{7,3-j}(N) = 4j G_7(N)$, so daß aus Satz 17 die erste Implikation folgt.

Ist umgekehrt $N \in 4\mathbb{N} + \{2, 3\}$ zulässig mit $r_{7,3-j}(N)$ wie im Korollar angegeben, so ergibt sich wiederum aus den obigen Sätzen 16 und 17

$$\frac{r_{7,1}(N)}{8} + \frac{r_{7,2}(N)}{4} = G_7(N) = \begin{cases} \frac{1}{4} h(-28N) & \text{falls } (N, 7) = 1 \\ \frac{1}{2} h(-\frac{4}{7}N) & \text{falls } (N, 7) > 1 \end{cases} = \frac{r_{7,3-j}(N)}{4j}$$

und damit $r_{7,j}(N) = 0$, so daß die Äquivalenz für $N > 196$ bewiesen ist. Schließlich wurde für alle quadratfreien zulässigen $N \leq 196$ mit Hilfe eines in Microsoft® Visual Basic 6.0 für Microsoft® Excel 2000 geschriebenen Makros die Klassenzahl des imaginär-quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-28N})$ bestimmt und mit den im Anhang auf Seite 103 ermittelten Darstellungsanzahlen durch die beiden Formen des Kaplansky-Geschlechts verglichen – auf diese Weise ergab sich die Äquivalenz auch für alle quadratfreien zulässigen Zahlen $N \leq 196$ mit $N \neq 7$. \square

Als eine erste Anwendung dieses Resultats und der Ergebnisse der beiden vorigen Abschnitte wird an dieser Stelle nun der noch ausstehende Beweis zu Teil a) von Theorem 3 geführt. In [Kel01], [PRW01] und [PW01] finden sich mit ähnlichen Methoden erbrachte Beweise – allerdings bleiben diese auf die Kaplansky-Form sowie zu 7 prime Zahlen beschränkt, wobei Kelleys Arbeit sogar einige Lücken und Fehler aufweist.

Theorem 3a): *Jede zulässige Zahl p^2n mit $p \in \mathbb{P} \setminus \{7\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist sowohl durch $\phi_{7,1}$ als auch durch $\phi_{7,2}$ darstellbar.*

Beweis: Nach Theorem 2a) sind alle zulässigen Vielfachen von 4 darstellbar, was wegen $\phi_{7,1}(n, 0, 0) = \phi_{7,2}(n, 0, 0) = n^2$ auch für reine Quadratzahlen gilt. Nun wird angenommen, es existieren $j \in \{1, 2\}$, $p \in \mathbb{P} \setminus \{2, 7\}$ und $n > 1$, so daß p^2n Ausnahme von $\phi_{7,j}$ ist. Dann ist auch n Ausnahme dieser Form, denn sonst müßte n darstellbar oder unzulässig sein – aus einer Darstellung von n würde sich jedoch durch Multiplikation mit p eine Darstellung von p^2n ergeben und aus $n = 7^{2a+1}(7b + c)$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ sowie $c \in \{3, 5, 6\}$ (vgl. Satz 11) würde auch $p^2c \in \{3, 5, 6\}$ und somit die Unzulässigkeit von p^2n folgen. Da nach dem gleichen Argument auch der quadratfreie Anteil von n Ausnahme ist, kann n ohne Einschränkung als quadratfrei angenommen werden. Es ist

$$f_7(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_7(m) q^m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2} (r_{7,1}(m) - r_{7,2}(m)) q^m \in S_{3/2}(28, \chi_{28})$$

nach den Ergebnissen des vorigen Abschnitts eine simultane Eigenform aller Hecke-Operatoren $T(p^2)$ ($p \in \mathbb{P}$), wobei die Eigenwerte $\lambda_7(p)$ gegeben sind

durch die Fourierkoeffizienten $A(p)$ der zugehörigen Shimura-Liftung

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} A(m) q^m = \eta(z) \eta(2z) \eta(7z) \eta(14z) \in S_2(14).$$

Wegen der Quadratfreiheit ist insbesondere p^2 kein Teiler von n , so daß sich Gleichung (6) auf Seite 10, welche die Wirkung von Hecke-Operatoren auf die Fourierkoeffizienten zu Modulformen halbganzen Gewichts beschreibt, zu

$$A(p) a_7(n) = a_7(p^2 n) + \chi_{28}(p) \left(\frac{-n}{p} \right) a_7(n).$$

vereinfacht. Zusammen mit Hasses Schranke $|A(p)| \leq 2\sqrt{p}$ folgt daraus

$$(16) \quad \frac{a_7(p^2 n)}{a_7(n)} = A(p) - \chi_{28}(p) \left(\frac{-n}{p} \right) \leq A(p) + 1 \leq 2\sqrt{p} + 1.$$

Für den Quotienten auf der linken Seite wird nun eine untere Schranke hergeleitet, die im Widerspruch zu dieser oberen Schranke stehen wird. Dazu ist wegen $|a_7(p^2 n)| = r_{7,3-j}(p^2 n)/2$ die Anzahl der Darstellungen von $p^2 n$ durch $\phi_{7,3-j}$ zu untersuchen. Aufgrund der Quadratfreiheit von n sind die nicht-primitiven Darstellungen genau die mit p multiplizierten Darstellungen von n und insbesondere liefert $r_{7,3-j}(n)$ deren Anzahl. Weiter ist die Anzahl der wesentlich verschiedenen primitiven Darstellungen wegen $r_{7,j}(p^2 n) = 0$ durch $G_7(p^2 n)$ gegeben und durch Anwenden der Automorphismen von $\phi_{7,3-j}$ können daraus mindestens $2j G_7(p^2 n)$ paarweise verschiedene primitive Darstellungen erzeugt werden: Beide Formen besitzen den Automorphismus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und durch Anwenden auf eine primitive Darstellung (x, y, z) vom $p^2 n$ entsteht immer eine weitere, denn aus $(x, y, z) = (x, -y, -z)$ würde $y = z = 0$ und somit $p^2 n = \phi_{7,3-j}(x, 0, 0) = x^2$ im Widerspruch zur Quadratfreiheit von $n > 1$ folgen. Analog kann im Fall $j = 2$ gezeigt werden, daß durch Anwenden der beiden Automorphismen

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

auf eine primitive Darstellung von $p^2 n$ durch $\phi_{7,1}$ zwei weitere Darstellungen entstehen, die sich untereinander und von den beiden obigen unterscheiden,

da aus $(-x, y, -z) = (x, y, z)$ direkt $x = z = 0$ bzw. $p^2n = \phi_{7,1}(0, y, 0) = y^2$ folgt und sich aus $(y, x, -z) = (x, y, z)$ ebenso $p^2n = \phi_{7,1}(x, x, 0) = 2x^2$ ergibt – beides im Widerspruch zur Quadratfreiheit von $n > 1$. Insgesamt ergibt sich nun für die Anzahl der Darstellungen von p^2n durch $\phi_{7,3-j}$

$$r_{7,3-j}(p^2n) \geq r_{7,3-j}(n) + 2j G_7(p^2n).$$

Analoge Überlegungen für die Formen $\phi_{14,3-j}$, $\phi_{49,3-j}$ bzw. $\phi_{98,3-j}$ ergeben im Fall $(n, 14) > 1$ unter Benutzung von Theorem 1 zusätzlich die Abschätzung

$$r_{7,3-j}(p^2n) \geq r_{7,3-j}(n) + \begin{cases} 2j G_{14}(p^2n/2) & \text{falls } n \in 2\mathbb{N}, \\ 2j G_{49}(p^2n/7) & \text{falls } n \in 7\mathbb{N}, \\ 2j G_{98}(p^2n/14) & \text{falls } n \in 14\mathbb{N}. \end{cases}$$

Aus Hilfssatz 1 folgt mit $s_n \in \{28n, \frac{4}{7}n\}$ sowie $t_n \in \{\frac{1}{2}, 1\}$ (beides je nachdem, ob n prim zu 7 ist oder nicht) also die Abschätzung

$$r_{7,3-j}(p^2n) \geq r_{7,3-j}(n) + jt_n h(-p^2s_n)$$

und daraus nach Division durch $r_{7,3-j}(n)$ mit Hilfe von Korollar 1 weiter

$$\frac{r_{7,3-j}(p^2n)}{r_{7,3-j}(n)} \geq 1 + jt_n \frac{h(-p^2s_n)}{r_{7,3-j}(n)} = 1 + \frac{1}{2} \frac{h(-p^2s_n)}{h(-s_n)}.$$

Da p^2n und n Ausnahmen von $\phi_{7,j}$ sind, ergibt sich schließlich durch Anwendung der Indexformel für die Klassenzahl aus Abschnitt 2.3

$$\frac{a_7(p^2n)}{a_7(n)} = \frac{r_{7,3-j}(p^2n)}{r_{7,3-j}(n)} \geq 1 + \frac{1}{2} \left(p - \left(\frac{-s_n}{p} \right) \right) \geq 1 + \frac{p-1}{2}.$$

Diese Ungleichung und die Abschätzung (16) ergeben zusammen

$$\frac{p-1}{2} \leq A(p) \leq 2\sqrt{p}.$$

Dies liefert den gewünschten Widerspruch, denn einerseits gilt $p-1 > 4\sqrt{p}$ für $p \geq 18$ und andererseits ist $p-1 > 2A(p)$ für $p \in \{3, 5, 11, 13, 17\}$, wie ein Blick auf die ersten Koeffizienten in der Fourierentwicklung der Spitzenform F auf Seite 29 bzw. Seite 99 zeigt. Damit ist die Existenz einer Ausnahme der Gestalt p^2n mit $p \in \mathbb{P} \setminus \{7\}$ und $n \in \mathbb{N}$ widerlegt. \square

3.4 Anwendungen des Satzes von Waldspurger

In diesem Abschnitt werden die bisherigen Ergebnisse zu einer Klassenzahlformel für die Hasse-Weilschen L-Reihen der über den imaginär-quadratischen Zahlkörpern $\mathbb{Q}(\sqrt{-28N})$ zu der elliptischen Kurve $E: y^2 + xy + y = x^3 + 4x - 6$ isomorphen Twists zusammengefaßt. Das wesentliche Hilfsmittel dazu ist das folgende bemerkenswerte Resultat von Jean-Loup Waldspurger, welches einen engen Zusammenhang zwischen den Fourierkoeffizienten einer Spitzenform halbganzen Gewichts und den kritischen Werten der L-Reihen gewisser Twists ihrer Shimura-Liftung herstellt. Es ergibt sich unmittelbar aus [Wal81, Corollaire 2 und Proposition 2].

Satz (Waldspurger): Sei $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)q^n \in S_{\lambda+1/2}(N, \chi)$ eine Eigenform aller Hecke-Operatoren $T(p^2)$ ($p \in \mathbb{P}$), so daß die Shimura-Liftung G Neuf orm in $S_{2\lambda}(M, \chi^2)$ ist. Sind dann $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ prim zu N und quadratfrei mit $\frac{n_1}{n_2} \in (\mathbb{Q}_p^*)^2$ für alle Primteiler p von N , so gilt

$$\begin{aligned} b^2(n_1) L\left(\lambda, G \otimes \left(\frac{-1}{\cdot}\right)^\lambda \chi^{-1} \chi_{n_2}\right) \chi\left(\frac{n_2}{n_1}\right) n_2^{\lambda-\frac{1}{2}} \\ = b^2(n_2) L\left(\lambda, G \otimes \left(\frac{-1}{\cdot}\right)^\lambda \chi^{-1} \chi_{n_1}\right) n_1^{\lambda-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Falls die Shimura-Liftung G dabei sogar die Voraussetzungen des Satzes von Eichler-Shimura/Carayol auf Seite 16 erfüllt, kann daraus eine entsprechende Identität zwischen den Fourierkoeffizienten $b(n)$ und den Hasse-Weilschen L-Reihen gewisser Twists der zugehörigen elliptischen Kurve abgeleitet werden. Insbesondere ergibt sich für die in Abschnitt 3.2 eingeführten Spitzenformen:

Korollar: Sei $k \in \{7, 14, 49, 98\}$. Sind dann $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ prim zu 14 und quadratfrei mit $\frac{n_1}{n_2} \in (\mathbb{Q}_2^*)^2 \cap (\mathbb{Q}_7^*)^2$, so gilt

$$a_k^2(n_1) L(1, E(-kn_2)) \sqrt{n_2} = a_k^2(n_2) L(1, E(-kn_1)) \sqrt{n_1}.$$

Beweis: Gemäß Abschnitt 3.1 sind $f_k \in S_{3/2}(28, \chi'_k)$ für $k \in \{7, 49\}$ sowie $f_k^* \in S_{3/2}(56, \chi'_k)$ für $k \in \{14, 98\}$ jeweils simultane Eigenformen aller Hecke-Operatoren, und die Shimura-Liftung zu jeder dieser Formen ist die Neuf orm $F \in S_2(14)$. Mit $\frac{n_1}{n_2}$ ist auch $\frac{n_2}{n_1}$ Element von $(\mathbb{Q}_2^*)^2 \cap (\mathbb{Q}_7^*)^2$, so daß $\chi'_k\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 1$ gilt. Schließlich hat die elliptische Kurve E nach Abschnitt 3.1 die gleiche L-Reihe wie F und nach dem dortigen Satz 15 gilt sogar

$$L(1, E(-kn_j)) = L(1, F \otimes \chi_{-kn_j}) = L\left(1, F \otimes \left(\frac{-1}{\cdot}\right) \chi'_k \chi_{n_j}\right).$$

Damit folgt das Korollar nun direkt aus dem Satz von Waldspurger. \square

Insbesondere läßt sich also für jede quadratfreie und zu 14 prime natürliche Zahl n der Wert $L(1, E(-7n))$ explizit als Vielfaches von $a_7^2(n)$ ausdrücken, wobei die Konstante noch von der Quadratklasse von n modulo 56 abhängt.

Hilfssatz 2: Die Menge $\mathcal{M} := \{1, 3, 5, 11, 15, 17, 141, 159\}^\dagger$ ist ein minimales Repräsentantensystem der Quadratklassen modulo 56, d. h. zu jedem $n \in \mathbb{N}$ mit $(n, 14) = 1$ existiert genau ein $m \in \mathcal{M}$ mit $\frac{n}{m} \in (\mathbb{Q}_2^*)^2 \cap (\mathbb{Q}_7^*)^2$.

Beweis: Nach [Ser73, Seiten 17f] gilt für $r \in \mathbb{Z}_2^* \cap \mathbb{Z}_7^*$:

$$(*) \quad r \in (\mathbb{Q}_2^*)^2 \cap (\mathbb{Q}_7^*)^2 \Leftrightarrow x^2 \equiv r \pmod{7} \text{ lösbar über } \mathbb{Z} \text{ und } r \equiv 1 \pmod{8}.$$

Zu $n \in \mathbb{N}$ mit $(n, 14) = 1$ existiert eine eindeutige Zerlegung $n = 56k + b^2m$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathcal{M}$ und $b \in \{1, 3, 5\}$, denn die Elemente der (disjunkten) Vereinigung von \mathcal{M} , $9\mathcal{M}$ und $25\mathcal{M}$ repräsentieren die Restklassen modulo 56 aller zu 14 primen Zahlen. Wegen $(mn, 14) = 1$ gilt dabei $mn \in \mathbb{Z}_2^* \cap \mathbb{Z}_7^*$, und aus der Zerlegung von n ergibt sich durch Multiplikation mit m direkt

$$(i) \quad mn = 56km + (bm)^2, \text{ also } (bm)^2 \equiv mn \pmod{7}, \text{ und}$$

$$(ii) \quad mn = 56km + (bm)^2 \text{ und } bm \text{ ungerade, also } mn \equiv 1 \pmod{8}.$$

Nach (*) ist daher mn und somit auch $\frac{n}{m}$ Element von $(\mathbb{Q}_2^*)^2 \cap (\mathbb{Q}_7^*)^2$. \square

Ist dabei nun $N \neq 7$ eine quadratfreie Ausnahme der Kaplansky-Form oder der Form $\phi_{7,2}$, so gibt $|a_7(N)|$ die halbe Anzahl der Darstellungen von N durch die jeweils andere Form an und kann daher gemäß Abschnitt 3.3 als Vielfaches der Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{-28N})$ ausgedrückt werden. Damit ist das Vorgehen zum Beweis der folgenden Klassenzahlformel vorgegeben.

Theorem 5: Sei $j \in \{1, 2\}$ und $N \neq 7$ eine quadratfreie Ausnahme von $\phi_{7,j}$.

$$\text{Dann gilt} \quad \begin{cases} h^2(-28N) = \frac{4\sqrt{N}}{j^2 \Omega(E(-7))} L(1, E(-7N)) & \text{falls } (N, 7) = 1, \\ h^2(-\frac{4}{7}N) = \frac{2\sqrt{N}}{7j^2 \Omega(E(-7))} L(1, E(-7N)) & \text{falls } (N, 7) > 1. \end{cases}$$

Beweis: Sei $j \in \{1, 2\}$ und $N > 7$ eine quadratfreie Ausnahme von $\phi_{7,j}$. Ist diese Ausnahme prim zu 14, so wird das Korollar zum Satz von Waldspurger mit $k = 7$ und $n_1 = N$ angewendet. Andernfalls wird mit Hilfe von Theorem 1 zu einer der Begleiter-Formen $\phi_{14,j}$, $\phi_{49,j}$ oder $\phi_{98,j}$ übergangen und das Korollar mit $k \in \{14, 49, 98\}$ und $n_1 \in \{N/2, N/7, N/14\}$ benutzt:

\dagger Die Wahl von 141 und 159 anstelle von 29 bzw. 47 als Elemente von \mathcal{M} wurde im Hinblick auf den Beweis von Theorem 5 getroffen, weil $a_{49}(29) = a_7(47) = 0$ gilt.

(i) *N prim zu 14*: Dann gilt nach Theorem 2 insbesondere $N \in 4\mathbb{N}_0 + 3$. Gemäß Hilfssatz 2 kann $m \in \mathcal{M}$ so gewählt werden, daß $\frac{N}{m} \in (\mathbb{Q}_2^*)^2 \cap (\mathbb{Q}_7^*)^2$ gilt. Aus (*) im Beweis dieses Hilfssatzes ergibt sich dabei $Nm \equiv 1 \pmod{8}$, so daß auch $m \in 4\mathbb{N}_0 + 3$ und somit $m \in \{3, 11, 15, 159\}$ gilt. Das Korollar zum Satz von Waldspurger liefert

$$(17) \quad a_7^2(N) L(1, E(-7m), 1) \sqrt{m} = a_7^2(m) L(1, E(-7N)) \sqrt{N}.$$

Nach [Cre92, Seiten 21f] existiert für alle $p \in \mathbb{P}$ ein $n(p, m) \in \mathbb{Z}$ mit

$$\frac{L(1, E(-7m))}{\Omega(E(-7m))} = \frac{n(p, m)}{2(1 + p - A(p))} \quad \text{falls } p \nmid 784m^2.$$

Insbesondere ist dieser Ausdruck rational, wobei (setze $p = 11 \nmid 784m^2$) der Nenner kleinergleich 24 gewählt werden kann. Genauer wird in M5 aus Anhang A.5 mit Computereinsatz gezeigt, daß

$$\frac{L(1, E(-7m))}{\Omega(E(-7m))} = 2 a_7^2(m) \quad \text{und} \quad a_7(m) \neq 0.$$

Wegen $m \in 4\mathbb{N}_0 + 3$ folgt dabei $\Omega(E(-7)) = 2\sqrt{m} \Omega(E(-7m))$ aus Satz 15 auf Seite 30, so daß sich die obige Gleichung (17) vereinfacht zu

$$a_7^2(N) = \frac{\sqrt{N}}{\Omega(E(-7))} L(1, E(-7N)).$$

Zusammen mit Korollar 1 aus Abschnitt 3.3 ergibt sich daraus wie gewünscht

$$h^2(-28N) = \frac{r_{7,3-j}^2(N)}{j^2} = \frac{4a_7^2(N)}{j^2} = \frac{4\sqrt{N}}{j^2 \Omega(E(-7))} L(1, E(-7N)).$$

(ii) *N \in 2\mathbb{N prim zu 7*: Dann ist $N/2$ prim zu 14 und nach Theorem 1 Ausnahme von $\phi_{14,j}$. Gemäß Hilfssatz 2 wird $m \in \mathcal{M}$ mit $\frac{N/2}{m} \in (\mathbb{Q}_2^*)^2 \cap (\mathbb{Q}_7^*)^2$ gewählt, und das Korollar zum Satz von Waldspurger liefert

$$a_{14}^2(N/2) L(1, E(-14m), 1) \sqrt{m} = a_{14}^2(m) L(1, E(-14N/2)) \sqrt{N/2}.$$

In M5 aus Anhang A.5 wird mit Computereinsatz gezeigt, daß

$$\frac{L(1, E(-14m))}{\Omega(E(-14m))} = 2 a_{14}^2(m) \quad \text{und} \quad a_{14}(m) \neq 0,$$

wobei der Quotient wieder nach [Cre92, Seite 21f] rational mit Nenner kleinergleich 36 ist. Weiter ergibt sich $\Omega(E(-7)) = 2\sqrt{2m} \Omega(E(-14m))$ aus Satz 15 und $a_{14}(N/2) = a_7(N)$ aus Theorem 1. Insgesamt folgt also

$$a_7^2(N) = \frac{\sqrt{N}}{\Omega(E(-7))} L(1, E(-7N))$$

und daraus kann wie unter (i) die gewünschte Gleichung abgeleitet werden.

(iii) $N \in 14\mathbb{N} + 7$: Dann ist $N/7$ prim zu 14 und nach Theorem 1 Ausnahme von $\phi_{49,j}$. Nach Theorem 2 und Satz 11 erfüllt diese $N/7 \in 28\mathbb{N}_0 + \{1, 9, 25\}$. Wird gemäß Hilfssatz 2 nun $m \in \mathcal{M}$ mit $\frac{N/7}{m} \in (\mathbb{Q}_2^*)^2 \cap (\mathbb{Q}_7^*)^2$ gewählt, so folgt aus (*) im Beweis dieses Hilfssatzes, daß auch m Element von $28\mathbb{N}_0 + \{1, 9, 25\}$ und somit von $\{1, 141\}$ ist. Das Korollar zum Satz von Waldspurger liefert

$$(18) \quad a_{49}^2(N/7) L(1, E(-49m)) \sqrt{m} = a_{49}^2(m) L(1, E(-49N/7)) \sqrt{N/7}.$$

Gemäß [Cre92, Seiten 21f] ist $L(1, E(-49m)) = L(1, E(-m))$ ein rationales Vielfaches von $\Omega(E(-m))$, wobei der Nenner des Faktors kleinergleich 36 wählbar ist. Genauer wird in M5 aus Anhang A.5 gezeigt, daß

$$\frac{L(1, E(-m))}{\Omega(E(-m))} = a_{49}^2(m) \quad \text{und} \quad a_{49}(m) \neq 0.$$

Aus Satz 15 kann leicht $\Omega(E(-7)) = 2\sqrt{m/7}\Omega(E(-m))$ abgeleitet werden und nach Theorem 1 gilt $a_{49}(N/7) = a_7(N)$, so daß sich Gleichung (18) zu

$$a_7^2(N) = \frac{2\sqrt{N}}{7\Omega(E(-7))} L(1, E(-7N)).$$

vereinfacht. Mit Korollar 1 aus Abschnitt 3.3 folgt nun wie gewünscht

$$h^2(-\frac{4}{7}N) = \frac{r_{7,3-j}^2(N)}{4j^2} = \frac{a_7^2(N)}{j^2} = \frac{2\sqrt{N}}{7j^2\Omega(E(-7))} L(1, E(-7N)).$$

(iv) $N \in 14\mathbb{N}$: Dann ist $N/14$ prim zu 14 und nach Theorem 1 Ausnahme der Form $\phi_{98,j}$. Nach Satz 11 gilt daher $N/14 \in 7\mathbb{N}_0 + \{1, 2, 4\}$. Gemäß Hilfssatz 2 kann $m \in \mathcal{M}$ mit $\frac{N/14}{m} \in (\mathbb{Q}_2^*)^2 \cap (\mathbb{Q}_7^*)^2$ gewählt werden und aus (*) in dessen Beweis folgt direkt, daß auch $m \in 7\mathbb{N}_0 + \{1, 2, 4\}$ und somit $m \in \{1, 11, 15, 141\}$ gilt. Das Korollar zum Satz von Waldspurger liefert

$$(19) \quad a_{98}^2(N/14) L(1, E(-98m)) \sqrt{m} = a_{98}^2(m) L(1, E(-98N/14)) \sqrt{N/14}.$$

In M5 aus Anhang A.5 mit Computereinsatz gezeigt, daß

$$\frac{L(1, E(-2m))}{\Omega(E(-2m))} = a_{98}^2(m) \quad \text{und} \quad a_{98}(m) \neq 0,$$

wobei der Quotient wieder nach [Cre92, Seite 21f] rational mit Nenner kleinergleich 36 ist. Aus Satz 15 folgt $\Omega(E(-7)) = 2\sqrt{2m/7}\Omega(E(-2m))$ und nach Theorem 1 ist $a_{98}(N/14) = a_7(N)$, so daß Gleichung (19) übergeht in

$$a_7^2(N) = \frac{2\sqrt{N}}{7\Omega(E(-7))} L(1, E(-7N)).$$

Wie im dritten Fall ergibt sich daraus die gewünschte Gleichung. \square

Das soeben bewiesene Theorem 5 wird ein wesentliches Hilfsmittel für den (bedingten) Beweis der am Ende von Abschnitt 3.1 formulierten Vermutung über die Ausnahmen des Kaplansky-Geschlechts sein. Abschließend wird nun als eine weitere Anwendung des Satzes von Waldspurger untersucht, welche natürlichen Zahlen exakt genauso viele Darstellungen durch die Kaplansky-Form wie durch die Form $\phi_{7,2}$ besitzen. Insbesondere können solche Zahlen nicht Ausnahmen des Geschlechts sein, da sie entweder durch keine Form darstellbar und somit unzulässig oder aber durch beide Formen (auf gleich viele Weisen) darstellbar sind. In [PRW01] wurde mit der gleichen Methode die entsprechende Frage für die Formen $\phi_{49,1}$ und $\phi_{49,2}$ analysiert – die in dem dortigen Theorem 6 formulierte Antwort ist allerdings nicht korrekt[§].

Satz 18: *Sei $n \in \mathbb{N}$ quadratfrei und prim zu 14.*

a) *Für $n \in 8\mathbb{N} + 5$ gilt $r_{7,1}(n) = r_{7,2}(n)$.*

b) *Für $n \notin 8\mathbb{N} + 5$ ist $r_{7,1}(n) = r_{7,2}(n)$ äquivalent zu $L(1, E(-7n)) = 0$.*

Beweis: Zu jeder quadratfreien und zu 14 primen Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert nach Hilfssatz 2 genau ein $m \in \mathcal{M}$, so daß $\frac{n}{m}$ und damit auch nm Element von $(\mathbb{Q}_2^*)^2 \cap (\mathbb{Q}_7^*)^2$ ist. Nach (*) im Beweis dieses Hilfssatzes liegen dabei n und m in derselben Restklasse modulo 8. Analog zu M 5 aus Anhang A.5 können mit Computereinsatz die folgenden Aussagen verifiziert werden:

(i) $L(1, E(-7m)) = 0 = a_7(m)$ für alle $m \in \mathcal{M}$ mit $m \equiv 5 \pmod{8}$,

(ii) $L(1, E(-7m)) \neq 0 \neq a_7(m)$ für alle $m \in \mathcal{M}$ mit $m \not\equiv 5 \pmod{8}$.

Aus (ii) ergibt sich für alle zu 14 primen quadratfreien $n \in 8\mathbb{N} + 5$ mit Hilfe des Korollars zum Satz von Waldspurger unmittelbar die Äquivalenz von $a_7(n) = 0$ und $L(1, E(-7n)) = 0$, also die zweite Aussage des Satzes. Teil a) kann wegen (i) nicht auf diese Weise gezeigt werden – er wurde jedoch bereits in Abschnitt 3.1 mit elementaren Methoden bewiesen. \square

Die Aussage aus a) gilt gemäß Theorem 2 sogar für alle $n \in 8\mathbb{N} + 5$ und mit den dort verwendeten elementaren Methoden sowie mit Hilfe von Theorem 1 könnte das obige Resultat zumindest noch auf Vielfache von 2 und 7 ausgeweitet werden. Darauf wird an dieser Stelle allerdings verzichtet, da das Ergebnis im weiteren Verlauf der Arbeit ohnehin nicht benötigt wird.

[§] Die in dem dortigen Beweis verwendeten Aussagen $L(1, E(-11)) \neq 0 \neq L(1, E(-29))$ sowie $a_{49}(15) = 0$ und $a_{49}(29) \neq 0$ können mit Computereinsatz leicht widerlegt werden.

3.5 Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung

Die Riemannsche Zetafunktion ist definiert als die analytische Fortsetzung der für $\Re s > 1$ absolut konvergenten Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

in die gesamte komplexe Ebene. Bekannt ist lediglich, daß die nicht-trivialen Nullstellen alle im kritischen Streifen $0 < \Re s < 1$ liegen und symmetrisch sowohl zur reellen Achse als auch zur kritischen Geraden verteilt sind. Weiter konnte gezeigt werden, daß mindestens 40% der nicht-trivialen Nullstellen auf der kritischen Geraden liegen (siehe [Con89]).

Wie bei der Riemannschen Zeta-Funktion, die sich im Spezialfall des trivialen Charakters $\chi \equiv 1$ als das wohl bekannteste Beispiel einer Dirichletschen L-Reihe ergibt, treten nicht-triviale Nullstellen auch bei L-Reihen zu beliebigen Dirichlet-Charakteren lediglich in dem kritischen Streifen $0 \leq \Re s \leq 1$ auf und sind symmetrisch sowohl zur reellen Achse als auch zu der kritischen Geraden mit Realteil $1/2$ verteilt. Weiter zeigte Bauer in seiner Dissertation [Bau97] mit den Methoden aus [Con89], daß mindestens 36,5% der jeweiligen nicht-trivialen Nullstellen auf der kritischen Geraden liegen. Daher liegt für einen beliebigen Dirichlet-Charakter χ die folgende Verallgemeinerung der Riemannschen Vermutung nahe:

VRV(χ): *Gilt $L(s, \chi) = 0$ für $0 \leq \Re s \leq 1$, so folgt $\Re s = 1/2$.*

Schließlich gelten analoge Aussagen über die Lage der Nullstellen auch für die Hasse-Weilschen L-Reihen elliptischer Kurven: Außer bei den trivialen Nullstellen $s \in -\mathbb{N}_0$ verschwinden diese L-Reihen lediglich in dem vertikalen Streifen $1/2 \leq \Re s \leq 3/2$ und die dort befindlichen nicht-trivialen Nullstellen sind symmetrisch zur reellen Achse sowie zur Geraden mit Realteil 1 verteilt. Diese Analogie zur Riemannschen Zeta-Funktion motiviert für eine beliebige elliptische Kurve E die folgende Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung:

VRV(E): *Gilt $L(s, E) = 0$ für $1/2 \leq \Re s \leq 3/2$, so folgt $\Re s = 1$.*

Nach Theorem 5 steht die Frage nach den Ausnahmen der Kaplansky-Form in engem Zusammenhang mit den Werten $L(1, E(-7N))$, wobei E die in Abschnitt 3.2 eingeführte elliptische Kurve vom Führer 14 ist. Außerdem sind dafür nach diesem Theorem aufgrund der Dirichletschen Klassenzahlformel aus Abschnitt 2.3 auch die Dirichletschen L-Reihen zu den Kronecker-Charakteren χ_{-28N} ($N \in \mathbb{N}$) von Bedeutung. Tatsächlich wird in dem verbleibenden Teil dieser Arbeit die Darstellbarkeit durch die beiden Formen des

Kaplansky-Geschlechts aufgeklärt werden können, sofern dabei die folgende Verallgemeinerung der Riemannschen Vermutung unterstellt wird:

VRV: Für jede quadratfreie natürliche Zahl $N \in 4\mathbb{N} + \{2, 3\}$ mit $N \geq 2 \cdot 10^{12}$ sind $VRV(\chi_{-28N})$ und $VRV(E(-7N))$ erfüllt. Es gelten also

$$(i) \quad L(s, \chi_{-28N}) = 0 \text{ für } 0 \leq \Re s \leq 1 \implies \Re s = 1/2,$$

d. h. die nicht-trivialen Nullstellen der Dirichletschen L -Reihe des Kronecker-Charakters zu $\mathbb{Q}(\sqrt{-28N})$ liegen alle auf der Geraden mit Realteil $1/2$,

$$\text{und (ii) } L(s, E(-7N)) = 0 \text{ für } 1/2 \leq \Re s \leq 3/2 \implies \Re s = 1,$$

d. h. die nicht-trivialen Nullstellen der Hasse-Weilschen L -Reihe zu der elliptischen Kurve $E(-7N)$ liegen alle auf der Geraden mit Realteil 1 .

3.6 Formulierung des Hauptsatzes und Beweisskizze

Mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse wird nun der Beweis der in Abschnitt 3.1 aufgestellten Vermutung in Angriff genommen, nach der die beiden Formen des Kaplansky-Geschlechts keine weiteren als die dort angegebenen 58 quadratfreien Ausnahmen haben. Unterstellt wird dabei die Richtigkeit der eben formulierten Verallgemeinerten Riemannschen Vermutung:

Theorem 6: Unter VRV stellt die Kaplansky-Form $\phi_{7,1}$ alle quadratfreien zulässigen Zahlen mit Ausnahme der 53 Zahlen 3, 6, 14, 19, 22, 31, 51, 55, 66, 94, 139, 142, 154, 159, 166, 214, 235, 283, 322, 406, 439, 534, 559, 595, 651, 670, 714, 874, 946, 1435, 1726, 2086, 2131, 2170, 2310, 2419, 2506, 3262, 3346, 3559, 4759, 4879, 6034, 6643, 8554, 9814, 10591, 13699, 13846, 20734, 24514, 50155 und 73906 dar und die quadratfreien Ausnahmen der Form $\phi_{7,2}$ sind genau die 5 Zahlen 7, 10, 79, 259 und 1771. Die Menge aller Ausnahmen ergibt sich daraus jeweils durch Multiplikation mit den geraden Potenzen von 7.

Nach Theorem 3 sind nur die Aussagen über die quadratfreien Ausnahmen zu zeigen und zum Beweis wird die zu widerlegende Annahme getroffen, daß eine der Formen $\phi_{7,j}$ mit $j \in \{1, 2\}$ neben den oben aufgeführten eine weitere quadratfreie Ausnahme N besitzt. Nach den Resultaten aus Abschnitt 3.1 gilt dann $N \in 4\mathbb{N} + \{2, 3\}$ und $N \geq 2 \cdot 10^{12}$. Definiere dazu

$$\chi := \chi_{-28N} \text{ und } q_N := \begin{cases} 28^2 N^2 & \text{falls } (N, 7) = 1, \\ 7 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2 N^2 & \text{falls } (N, 7) > 1. \end{cases}$$

Dann ist χ Kronecker-Charakter zum Führer $\sqrt{q_N}$ bzw. $\sqrt{q_N/7}$ (je nachdem, ob N prim zu 7 ist oder nicht). Unter VRV liegen alle nicht-trivialen Nullstel-

len der zugehörigen Dirichletschen L-Reihe auf der kritischen Geraden mit Realteil $1/2$. Wird diese L-Reihe mit $L(w)$ bezeichnet, so gilt insbesondere

$$L(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^w} \quad \text{für } \Re w > 1.$$

In Abschnitt 3.2 wurde der Kaplansky-Form und ihren Begleitern die Spitzenform $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A(n) q^n = \eta(z) \eta(2z) \eta(7z) \eta(14z) \in S_2(14)$ zugeordnet, deren automorphe L-Reihe mit der Hasse-Weilschen L-Reihe der elliptischen Kurve $E : y^2 + xy + y = x^3 + 4x - 6$ vom Führer 14 übereinstimmt. Gemäß Satz 4 auf Seite 10 gilt $F \otimes \chi \in S_2(q_N)$ und diese Spitzenform hat nach Satz 15 die gleiche L-Reihe wie die elliptische Kurve $E(-7N)$, die damit den Führer q_N hat. Diese L-Reihe wird mit $L_a(w)$ bezeichnet und unter VRV haben alle nicht-trivialen Nullstellen den Realteil 1. Weiter gilt

$$L_a(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n) \chi(n)}{n^w} \quad \text{für } \Re w > 3/2.$$

Aus der Dirichletschen Klassenzahlformel (siehe Seite 9) und Theorem 5 folgt

$$\frac{L_a(1)}{L(1)^2} = \begin{cases} \frac{7j^2 \sqrt{N}}{\pi^2} \Omega(E(-7)) & \text{falls } (N, 7) = 1, \\ \frac{2j^2 \sqrt{N}}{\pi^2} \Omega(E(-7)) & \text{falls } (N, 7) > 1, \end{cases}$$

und in M5 aus Anhang A.5 wird $\Omega(E(-7)) \geq 1,00197$ gezeigt, so daß sich die folgende Abschätzung ergibt:

$$\frac{L_a(1)}{L(1)^2} \geq \begin{cases} 0,7106 \sqrt{N} \geq \frac{34}{101} \left(\frac{q_N}{4\pi^2}\right)^{1/4} & \text{falls } (N, 7) = 1, \\ 0,2030 \sqrt{N} \geq \frac{41}{101} \left(\frac{q_N}{4\pi^2}\right)^{1/4} & \text{falls } (N, 7) > 1. \end{cases}$$

Durch Logarithmieren ergibt sich daraus in beiden Fällen zumindest

$$(20) \quad \log \frac{L_a(1)}{L(1)^2} \geq \log \frac{34}{101} + \frac{1}{4} \log \frac{q_N}{4\pi^2}.$$

Das Ziel ist es nun, eine obere Schranke zu finden, die im Widerspruch zu dieser unteren Schranke steht. Definiere dazu eine Funktion $H: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$H(w) := \left(\frac{q_N}{2\pi}\right)^{w-1} \frac{L_a(w) \Gamma(s)}{L(w) L(2-w)}.$$

Die Abschätzung (20) liefert insbesondere $L_a(1) \neq 0$ und mit der Funktionalgleichung (12) aus Abschnitt 2.6 ergibt sich daraus $H(w) = H(2-w)$. Im

Vertikalstreifen $1/2 < \Re w < 3/2$ ist $H(w)$ unter VRV überdies holomorph. Mit Hilfe des Phragmen-Lindelöf-Prinzips (siehe [Rud87, Seite 256]), das eine Verallgemeinerung des Maximumprinzips darstellt, wird die Suche nach einer oberen Schranke für $H(1) = L_a(1)/L(1)^2$ auf die Bestimmung des Supremums von $H(w)$ auf den Begrenzungsgeraden eines kleineren Vertikalstreifens, in dem $H(w)$ dann auch beschränkt ist, zurückgeführt:

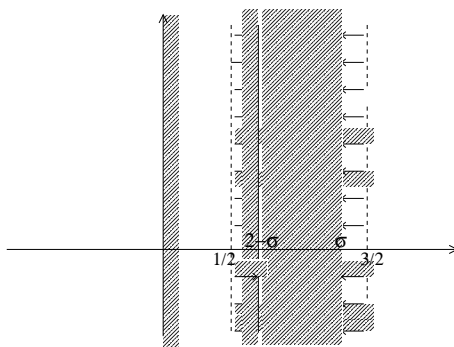


Abbildung 1: Der Vertikalstreifen

Satz (Phragmen-Lindelöf-Prinzip): Sei g holomorph und beschränkt im Vertikalstreifen $\Omega(a, b) := \{x + iy \in \mathbb{C} : a < x < b\}$ sowie stetig auf dem Abschluss $\overline{\Omega(a, b)}$. Mit $M(x) := \sup \{|g(x + iy)| : y \in \mathbb{R}\}$ gilt dann für $a \leq x \leq b$

$$M(x)^{b-a} \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a}.$$

Insbesondere gilt $|g(z)| \leq \max\{M(a), M(b)\}$ für $z \in \overline{\Omega(a, b)}$, d. h. g ist im gesamten Vertikalstreifen schon durch das Supremum auf dem Rand beschränkt.

Nach folgendem Hilfssatz ist H tatsächlich beschränkt in jedem gemäß Abbildung 1 gegenüber dem kritischen Streifen verkleinerten Vertikalstreifen:

Hilfssatz 3: Sei $1 < \sigma < 3/2$. Dann ist $H(w)$ beschränkt in $2 - \sigma \leq \Re w \leq \sigma$.

Beweis: Die Aussage folgt im wesentlichen aus dem exponentiellen Abfallen von $|\Gamma(w)|$ für $|\Im w| \rightarrow \infty$. Genauer gilt nach Hilfssatz 15 aus Anhang A.1 gleichmäßig in dem fraglichen Vertikalstreifen $2 - \sigma \leq x \leq \sigma$

$$\Gamma(x + iy) = \mathcal{O}(|y| \exp(-|y|)) \quad \text{für } |y| \rightarrow \infty.$$

Die anderen Bestandteile von $H(x + iy)$ wachsen in diesem Vertikalstreifen höchstens polynomial in $|y|$ – zunächst liefert Hilfssatz 21 aus Anhang A.2

$$L_a(x + iy) = \mathcal{O}(|y|) \quad \text{für } |y| \rightarrow \infty \quad (\text{gleichmäßig in } 2 - \sigma \leq x \leq \sigma).$$

In [Tit86, Seite 336f] wird mit Hilfe des Satzes von Borel-Carathéodory und des Hadamardschen Drei-Kreise-Satzes (siehe [Tit39, Seiten 174f und 172]) unter Annahme der Riemannschen Vermutung für alle $x > 1/2$ und $\varepsilon > 0$ gezeigt, daß $1/\zeta(x+iy) = \mathcal{O}(|y|^\varepsilon)$ für $|y| \rightarrow \infty$ gilt. Wegen $|\chi| \leq 1$ ergibt sich unter $\text{VRV}(\chi)$ völlig analog dazu die entsprechende Aussage für Dirichletsche L-Reihen und somit gleichmäßig in $2 - \sigma \leq x \leq \sigma$

$$\frac{1}{L(x+iy)L(2-x-iy)} = \mathcal{O}(|y|) \quad \text{für } |y| \rightarrow \infty.$$

Zusammen ergibt sich daraus nun gleichmäßig in $2 - \sigma \leq x \leq \sigma$

$$H(x+iy) = \mathcal{O}(|y|^3 \exp(-|y|)) = \mathcal{O}(1) \quad \text{für } |y| \rightarrow \infty. \quad \square$$

Die Funktion $H(w)$ ist also holomorph und beschränkt in $2 - \sigma \leq \Re w \leq \sigma$ und nimmt damit aufgrund des Phragmen-Lindelöf-Prinzips im Inneren dieses Vertikalstreifens keine größeren Werte an als auf den vertikalen Linien mit Realteilen $2 - \sigma$ und σ . Mit Hilfe der Funktionalgleichung $H(2-w) = H(w)$ ergibt sich somit

$$(21) \quad \frac{L_a(1)}{L(1)^2} = H(1) \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \{|H(\sigma + it)|\}.$$

Durch Abschätzen einzelner Bestandteile von H wird im folgenden eine obere Schranke für $|H(\sigma + it)|$ und somit für $L_a(1)/L(1)^2$ hergeleitet. Eine optimale Schranke wird sich jedoch nur dann realisieren lassen, wenn σ in Abhängigkeit von N gewählt wird. Da aber eine solche optimale Schranke für den geschilderten Zweck nicht erforderlich ist, wird auf diese Abhängigkeit verzichtet. Die nachfolgenden expliziten Abschätzungen und Berechnungen vereinfachen sich dadurch erheblich.

Genauer wird $\sigma := 7/6$ gewählt, so daß also $|H(7/6 + it)|$ untersucht werden muß. Im folgenden Kapitel wird das Verhalten von Dirichletschen und Hasse-Weilschen L-Reihen auf den Geraden mit Realteilen $5/6$ bzw. $7/6$ analysiert. Im wesentlichen wird sich eine untere Schranke für $|L(5/6 + it)|$ und eine obere Schranke für $|L_a(7/6 + it)|$ ergeben, womit dann die entscheidenden Bestandteile von $|H(7/6 + it)|$ behandelt sind und der gewünschte Widerspruch in Kapitel 5 auf Seite 74 realisiert werden kann.

4 Explizite Abschätzung von L-Reihen

Im vorigen Kapitel wurde gezeigt, daß im Zusammenhang mit der Frage nach den Ausnahmen der Kaplansky-Form einerseits die Kronecker-Charaktere der imaginär-quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-28N})$ ($N \in \mathbb{N}$) und andererseits die über diesen Körpern zu der elliptischen Kurve $E: y^2 + xy + y = x^3 + 4x - 6$ isomorphen Twists von Bedeutung sind. In Kapitel 5 werden darauf die in Abschnitt 4.1 formulierten Propositionen angewendet, womit dann der Beweis von Theorem 6 über die Ausnahmen der Kaplansky-Form abgeschlossen werden kann. Als wesentliche Hilfsmittel für den Nachweis dieser beiden Propositionen werden im zweiten Abschnitt verschiedene Zerlegungen für die logarithmischen Ableitungen dieser L-Reihen hergeleitet: Die Summanden aus den mit Hilfe des Residuensatzes gewonnenen Zerlegungen der dortigen Lemmata 2 und 3 werden in den Abschnitten 4.3 bzw. 4.4 einzeln untersucht und abgeschätzt, wobei für den jeweils entscheidenden Bestandteil zusätzlich die Partialbruchzerlegung aus Lemma 4 verwendet wird.

Im Gegensatz zu den Ergebnissen aus [OS97] oder [Rei99] sind die beiden Propositionen jedoch so allgemein gehalten, daß bei einer Übertragung des in dieser Arbeit vorgestellten Verfahrens zur Untersuchung ternärer Formen auf eine andere als die Kaplansky-Form nicht erneut die mühsamen Überlegungen dieses Kapitels angestellt werden müssen. Die entsprechenden Ergebnisse aus [OS97] und [Rei99] ergeben sich hieraus sogar – bis auf einen zu vernachlässigenden absoluten Term $1/20$ bei der Abschätzung für Hasse-Weilsche L-Reihen – als Spezialfall.

4.1 Formulierung der Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Propositionen zur expliziten Abschätzung von Dirichletschen und Hasse-Weilschen L-Reihen zunächst nur formuliert.

Proposition 1: *Seien $d \in \mathbb{N}$ und χ der zu $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ assoziierte Kronecker-Charakter vom Führer $D \in \mathbb{N}$ mit $\log \frac{D^2}{\pi^2} \geq 15$. Definiere für positive reelle Zahlen X*

$$\mathcal{G}(w, X) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \chi(n)}{n^w \log n} e^{-n/X} \quad (w \in \mathbb{C}).$$

Seien $s_0 := 5/6 + it$ und $s := 7/6 + it$. Für alle $X \geq \max\{500, 5 \log \frac{D^2}{\pi^2}\}$ gilt dann unter Annahme der Richtigkeit von $VRV(\chi)$ die Abschätzung

$$\log \frac{|L(\bar{s}_0, \chi)|}{|L(s, \chi)|} \geq X \frac{\Re \mathcal{G}(s_0, X) - \Re \mathcal{G}(s, X)}{X + 1 - \frac{3}{4} X^{2/3}} - \frac{5 \log \frac{D^2}{\pi^2}}{72 X^{1/3}} - \frac{\log(1 + t^2)}{40} - \frac{1}{100}.$$

Die Definition der in der Proposition eingeführten Reihe $\mathcal{G}(w, X)$ erfolgte durch Hinzufügen eines Faktors $\exp(-n/x)$ zu jedem Summanden der Reihe

$$\log L(w, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \chi(n)}{n^w \log n}.$$

Auf diese Weise wird eine deutlich schnellere Konvergenz erzielt, so daß Restgliedabschätzungen sehr effektiv durchgeführt werden können. Auch in der folgenden Proposition werden zwei solche Reihen mit starkem Konvergenzverhalten definiert. Diese ergeben sich durch analoge Modifikation aus

$$\log L(w, E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_E(n)}{n^w \log n} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{L'}{L}(w, E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_E(n)}{n^w}.$$

Proposition 2: Sei E eine elliptische Kurve vom Führer q mit $L(1, E) \neq 0$. Definiere für positive reelle Zahlen X

$$\beta(X) := -\frac{7}{20} \frac{X^{7/20}}{\Gamma(13/20) + X^{7/20}} \int_{7/6}^{11/6} X^{1-u} \Gamma(1-u) du$$

und

$$\alpha(X) := \max_{y \in \mathbb{R}} \left| \int_{1/6}^{5/6} X^{-u} \Gamma(-u + iy) du - \frac{\beta(X)}{X^{7/20}} \Gamma(-7/20 + iy) \right| \left(\frac{7}{20} + \frac{20}{7} y^2 \right).$$

Definiere für $X > 0$ und $w \in \mathbb{C}$ außerdem

$$\mathcal{F}(w, X) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_E(n)}{n^w \log n} e^{-n/X} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_1(w, X) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_E(n)}{n^w} e^{-n/X}.$$

Seien $s := 7/6 + it$ und $s_2 := 27/20 + it$. Für $X \geq \max\{500, 5 \log \frac{q}{4\pi^2}\}$ gilt dann unter Annahme der Richtigkeit von $VRV(E)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \log |L(s, E)| &\leq \frac{X \Re \mathcal{F}(s, X)}{X+1} + \frac{3}{10} + \frac{\log(1+t^2)}{75} \\ &\quad + \frac{5\alpha(X) - \beta(X)}{4} \left(\frac{63}{125} \log \frac{q}{4\pi^2} + \frac{3}{4} \log(1+t^2) - \Re \mathcal{F}_1(s_2, X) \right). \end{aligned}$$

Ist sogar $X \geq \max\{5000, 5 \log \frac{q}{4\pi^2}\}$, so gilt unter $VRV(E)$ die Abschätzung

$$\log |L(s, E)| \leq \frac{X \Re \mathcal{F}(s, X)}{X+1} + \frac{3}{10} + \frac{\log(1+t^2)}{8} + \frac{\log \frac{q}{4\pi^2}}{7X^{1/6}} - \frac{5 \Re \mathcal{F}_1(s_2, X)}{18X^{1/6}}.$$

Die bei der Definition von $\beta(X)$ zu maximierende Funktion ist wegen des exponentiellen Abfallens von $|\Gamma(x + iy)|$ für $|y| \rightarrow \infty$ (vgl. Hilfssatz 15 in Anhang A.1) tatsächlich beschränkt. Numerische Untersuchungen bestärken die Vermutung, daß das Maximum im Punkt $y = 0$ angenommen wird, wo die Funktion gerade den Wert $\beta(X)$ hat. Insbesondere gilt $\alpha(X) \geq \beta(X)$, und in der Anwendung wird sich die Differenz zumindest als sehr klein herausstellen.

4.2 Hilfsaussagen für den Beweis

Vor dem eigentlichen Beweis der beiden Propositionen werden in diesem Abschnitt zunächst drei Lemmata nachgewiesen, mit denen die logarithmischen Ableitungen der auftretenden L-Reihen in verschiedene Summanden aufgespalten werden können. Das Vorgehen zum Beweis der folgenden Zerlegung für Dirichletsche L-Reihen orientiert sich an dem einer analogen Formel für die Riemannsche Zeta-Funktion in [Lit24, Theorem 1]:

Lemma 2: *Es seien $d \in \mathbb{N}$ und χ der zu $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ assoziierte Kronecker-Charakter vom Führer $D \in \mathbb{N}$ mit Dirichletscher L-Reihe $L := L(\cdot, \chi)$. Unter $VRV(\chi)$ gilt dann für $1/2 < \Re w < 3/2$ und $X \geq 500$ die Zerlegung*

$$(22) \quad -\frac{L'}{L}(w) = \mathcal{G}_1(w, X) + E_{sig}(w) - \frac{1}{X} \frac{L'}{L}(w-1) - R(w),$$

wobei

$$E_{sig}(w) := \sum_{\rho} X^{\rho-w} \Gamma(\rho-w)$$

die Menge der nicht-trivialen Nullstellen ρ von L durchläuft, sowie

$$\mathcal{G}_1(w, X) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^w} e^{-n/X}$$

$$\text{und } R(w) := \int_{-1/2-\Re w-i\infty}^{-1/2-\Re w+i\infty} -\frac{L'}{L}(w+z) \Gamma(z) X^z dz.$$

Beweis: Zusammen mit (2) auf Seite 7 liefert Hilfssatz 22 aus Anhang A.3

$$(23) \quad \mathcal{G}_1(w, X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^w} e^{-n/X} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} -\frac{L'}{L}(w+z) \Gamma(z) X^z dz$$

und insbesondere die Existenz des Integrals auf der rechten Seite. Die Idee ist es nun, die Integrationslinie unter Berücksichtigung der Singularitäten des Integranden auf die Linie mit Realteil $-1/2 - \Re w$ zu verschieben. Genauer wird entlang der Rechtecke $S_m := \{z \in \mathbb{C} : -1/2 - \Re w < \Re z < 2 \text{ und } |\Im z| < T_m\}$ integriert und dann das Verhalten für $m \rightarrow \infty$ untersucht, wobei $(T_m)_{m \geq 2}$ zunächst eine beliebige unbeschränkte Folge sei. Die Singularitäten des In-

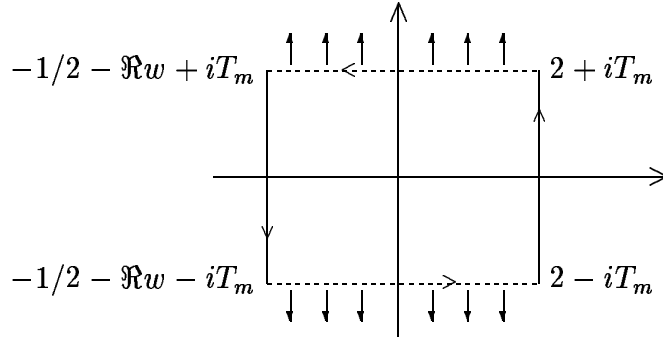


Abbildung 2: Der Integrationsweg

tegranden in diesem Bereich sind einerseits die Punkte 0 und -1 , in denen Pole ersten Grades bei $\Gamma(z)$ vorliegen. Andererseits haben alle nicht-trivialen Nullstellen ρ von L unter VRV(χ) den Realteil $1/2$, so daß also auch die Punkte $\rho - w$ mit $|\Im(\rho - w)| < T_m$, in denen $L'(w + z)/L(w + z)$ Pole ersten Grades hat, in diesem Bereich liegen. Somit liefert der Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta S_m} -\frac{L'}{L}(w+z) \Gamma(z) X^z dz = -\frac{L'}{L}(w) + \frac{1}{X} \frac{L'}{L}(w-1) - \sum_{|\Im(\rho-w)| < T_m} \Gamma(\rho-w) X^{\rho-w},$$

wobei δS_m den Rand von S_m bezeichne. Die Summe auf der rechten Seite konvergiert absolut gegen $E_{sig}(w)$, denn einerseits gilt nach [Pra57, Seite 220]

$$N(T) = \mathcal{O}(\log(D(|T| + 2))) \quad \text{für } |T| \rightarrow \infty$$

für die Anzahl $N(T)$ der Nullstellen von $L(1/2 + it)$ in $T \leq t \leq T + 1$ und andererseits liefert Hilfssatz 15 aus Anhang A.1 wegen $-2 < -1/2 - \Re w < -1$

$$(24) \quad |\Gamma(-1/2 - \Re w + it)| = \mathcal{O}(|t|^{3/2} \exp(-|t|)) \quad \text{für } |t| \rightarrow \infty.$$

Auf der linken Seite der obigen Gleichung gilt nach [Pra57, Seite 227] bzw. Hilfssatz 17 aus Anhang A.2

$$-\frac{L'}{L}(-1/2 + it) = \mathcal{O}(\log(D(|t| + 2))) \quad \text{für } |t| \rightarrow \infty$$

und somit folgt wegen (24) auch die Existenz des Integrals

$$R(w) = \int_{-1/2 - \Re w - i\infty}^{-1/2 - \Re w + i\infty} -\frac{L'}{L}(w+z) \Gamma(z) X^z dz.$$

Zu zeigen bleibt also nur noch, daß die Integrale entlang der horizontalen Linien von S_m für $m \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren. Dazu wird die bislang beliebige unbeschränkte Folge $(T_m)_{m \geq 2}$ gemäß [Pra57, Seite 226] bzw. Hilfssatz 18 aus Anhang A.2 so gewählt, daß gleichmäßig in $-1 \leq \sigma \leq 2$ gilt:

$$-\frac{L'}{L}(\sigma + i(\Im w \pm T_m)) = \mathcal{O}(\log^2(D T_m)) \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Zusammen mit (24) folgt für $\Im z = T_m$ gleichmäßig in $-1/2 - \Re w \leq \Re z \leq 2$

$$-\frac{L'}{L}(w+z) \Gamma(z) X^z dz = \mathcal{O}(|T_m|^2 \exp(-T_m)) \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

und damit tatsächlich die Konvergenz der horizontalen Integrale gegen 0. \square

Ebenfalls mit Hilfe des Residuensatzes ergibt sich die folgende Zerlegung für die logarithmische Ableitung einer Hasse-Weilschen L-Reihe:

Lemma 3: *Sei E eine elliptische Kurve vom Führer q mit zugehöriger Hasse-Weilscher L-Reihe $L_a := L(\cdot, E)$. Im Falle $L_a(1) \neq 0$ gilt dann unter $\text{VRV}(E)$ für $1 < \Re w < 2$ und $X \geq 500$ die Zerlegung*

$$(25) \quad -\frac{L'_a}{L_a}(w) = \mathcal{F}_1(w, X) + R_{sig}(w) + R_{tri}(w) + R_{ins}(w),$$

wobei

$$R_{sig}(w) := \sum_{\rho_a} X^{\rho_a - w} \Gamma(\rho_a - w)$$

die Menge der nicht-trivialen Nullstellen ρ_a von L_a durchläuft, sowie

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(w, X) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_E(n)}{n^w} e^{-n/X}, \\ R_{tri}(w) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-n-w)}{X^{n+w}} \\ \text{und } R_{ins}(w) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-X)^{-n}}{n!} \frac{L'_a}{L_a}(w-n). \end{aligned}$$

Beweis: Zunächst liefert Hilfssatz 22 aus Anhang A.3 mit (12) auf Seite 16

$$\mathcal{F}_1(w, X) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} -\frac{L'_a}{L_a}(w+z) \Gamma(z) X^z dz$$

und damit insbesondere die Existenz des Integrals auf der rechten Seite. Analog zum Beweis von Lemma 2 soll nun die Integrationslinie unter Berücksichtigung der Singularitäten des Integranden nach $-\infty$ verschoben werden.

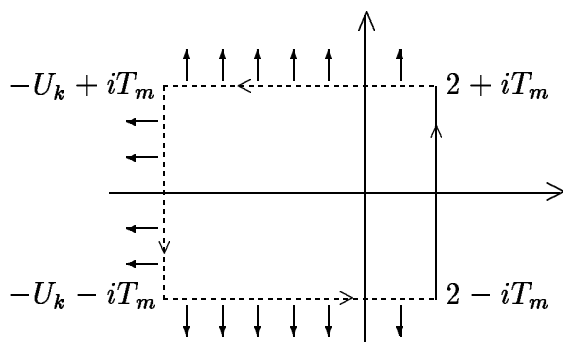


Abbildung 3: Der Integrationsweg

In [Pra57, Seite 229ff] wird dieses Vorgehen für das Integral

$$\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{L'}{L}(z) \frac{x^z}{z} dz \quad (x \geq 2)$$

gerechtfertigt, wobei L eine Dirichletsche L-Reihe ist. Nun gelten aber zu den dortigen Sätzen 4.2 und 4.3 analoge Aussagen auch für die logarithmische Ableitung von L_a (siehe Anhang A.2). Insbesondere existiert eine Folge $(T_m)_{m \geq 2}$ mit $m < T_m < m + 1$ ($m \geq 2$), für die gleichmäßig in $-1 \leq \sigma \leq 2$ gilt:

$$\frac{L'_a}{L_a}(\sigma \pm iT_m) = \mathcal{O}(\log^2(qT_m)) \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Wird dazu eine Folge $(U_k)_{k \geq 2}$ durch

$$U_k := \begin{cases} k - \Re w - 1/2 & \text{falls } \Re w \neq 3/2, \\ k - \Re w - 1/3 & \text{falls } \Re w = 3/2, \end{cases}$$

definiert, so liegt für $k \geq 2$ keine singuläre Stelle des Integranden

$$h(z) := -\frac{L'_a}{L_a}(w+z) \Gamma(z) X^z$$

auf dem Integrationsweg entlang des in Abbildung 3 skizzierten Rechtecks.

Das Verschieben der Integrationslinie nach $-\infty$ kann nun analog zum Vorgehen bei dem oben angegebenen Integral gerechtfertigt werden, denn nach der Funktionalgleichung und Hilfssatz $\Gamma 4$ aus Anhang A.1 gilt auf den beiden horizontalen Linien sowie auf der linken vertikalen Linie dieses Rechtecks

$$|\Gamma(z)| \leq \frac{C}{|z|} \quad \text{mit } C := \max \left\{ 2, \frac{|U_1|}{[U_1](1 - [U_1])} \right\}.$$

Es sind also die Residuen von $h(z)$ in der durch $\Re z \leq 2$ definierten Halbebene zu bestimmen. Die Singularitäten von $h(z)$ in dieser Halbebene sind einerseits die Punkte $-n, n \in \mathbb{N}_0$, in denen Pole ersten Grades bei $\Gamma(z)$ vorliegen. Andererseits hat $L'_a(w+z)/L_a(w+z)$ Pole ersten Grades in den um $-w$ verschobenen trivialen und nicht-trivialen Nullstellen von L_a . Genauer gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(w, X) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} -\frac{L'_a}{L_a}(w+z) \Gamma(z) X^z dz \\ &= \sum_{z_0 \in S} \text{Res}_{z_0} \left(-\frac{L'_a}{L_a}(w+z) \Gamma(z) X^z \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}_{-n}(h(z)) + \sum_{\rho_a} \text{Res}_{\rho_a-s}(h(z)) + \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}_{-n-s}(h(z)) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-X)^{-n}}{n!} \frac{L'_a}{L_a}(w-n) - \sum_{\rho_a} X^{\rho_a-w} \Gamma(\rho_a-w) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-n-w)}{X^{n+w}} \\ &= -\frac{L'_a}{L_a}(w) - R_{ins}(w) - R_{sig}(w) - R_{tri}(w). \quad \square \end{aligned}$$

Abschließend wird nun mit Hilfe des Hadamardschen Faktorisierungssatzes noch ein Lemma bewiesen, welches Partialbruchzerlegungen für die logarithmischen Ableitungen der auftretenden L-Reihen liefert:

Lemma 4: *Es seien $d \in \mathbb{N}$ und χ der zu $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ assoziierte Kronecker-Charakter vom Führer $D \in \mathbb{N}$. Dann gilt im Falle $L(w, \chi) \neq 0$*

$$\Re \frac{L'}{L}(w, \chi) = -\frac{1}{2} \log \frac{D}{\pi} - \frac{1}{2} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{w+1}{2} \right) + \sum_{\rho} \Re \frac{1}{w-\rho},$$

wobei ρ die nicht-trivialen Nullstellen von $L(\cdot, \chi)$ durchläuft. Ist E eine elliptische Kurve vom Führer q mit $L(1, E) \neq 0$, so gilt im Falle $L(w, E) \neq 0$

$$\Re \frac{L'}{L}(w, E) = -\frac{1}{2} \log \frac{q}{4\pi^2} - \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}(w) + \sum_{\rho_a} \Re \frac{1}{w-\rho_a},$$

wobei ρ_a die nicht-trivialen Nullstellen von $L(\cdot, E)$ durchläuft.

Beweis: Die erste Aussage findet sich in [Dav80, Seite 83], da χ als Kronecker-Charakter eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers ungerade ist. Analog dazu verläuft der Beweis der zweiten Aussage. Zunächst wird gezeigt, daß die gemäß Abschnitt 2.6 ganze Funktion

$$\Lambda(z) := \left(\frac{\sqrt{q}}{2\pi}\right)^z \Gamma(z) L(z, E)$$

die Ordnung 1 hat: Für $\Re z \geq 1$ gilt $L(z, E) = \mathcal{O}(|z|)$ wegen Hilfssatz 21 aus Anhang A.2 sowie $\log \Gamma(z) = \mathcal{O}(|z| \log |z|)$ aufgrund der Stirlingschen Formel, so daß

$$\log \Lambda(z) = \mathcal{O}(|z| \log |z|) \quad \text{für } \Re z \geq 1.$$

Wegen der Funktionalgleichung $\Lambda(2-z) = \Lambda(z)$ gilt ein entsprechendes Resultat auch für $\Re z \leq 1$, so daß

$$\log \Lambda(z) = \mathcal{O}(|z|^{1+\varepsilon}) \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0.$$

Damit hat $\Lambda(z)$ höchstens die Ordnung 1. Auf der reellen Achse gilt aber $\log \Gamma(z) \sim z \log z$ und $L_a(z) \rightarrow 1$ für $z \rightarrow \infty$, so daß die Abschätzung nicht verschärft werden kann zu $\log \Lambda(z) = \mathcal{O}(|z|)$. Somit ist $\Lambda(z)$ tatsächlich eine ganze Funktion der Ordnung 1, deren Nullstellen die nicht-trivialen Nullstellen von $L(\cdot, E)$ sind, und der Hadamardsche Faktorisierungssatz[†] liefert die Existenz von $C_1, C_2 > 0$ mit

$$\left(\frac{\sqrt{q}}{2\pi}\right)^z L(z, E) \Gamma(z) = C_1 e^{C_2 z} \prod_{\rho_a} \left(1 - \frac{z}{\rho_a}\right) e^{z/\rho_a}.$$

Durch logarithmisches Differenzieren folgt daraus nun im Fall $L(w, E) \neq 0$

$$(26) \quad \frac{1}{2} \log \frac{q}{4\pi^2} + \frac{L'}{L}(w, E) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(w) = C_2 + \sum_{\rho_a} \left(\frac{1}{w - \rho_a} + \frac{1}{\rho_a}\right).$$

Der Übergang von w zu $2-w$ bewirkt aufgrund der Funktionalgleichung (13) und der Voraussetzung $L(1, E) \neq 0$ bei der linken Seite obiger Gleichung einen Vorzeichenwechsel, also auch bei der rechten Seite. Dabei gilt aber

$$\sum_{\rho_a} \Re \frac{1}{w - \rho_a} = - \sum_{\rho_a} \Re \frac{1}{2 - w - \rho_a},$$

[†] In dessen Formulierung in [Mar77, Seite 289] gilt $\kappa = 1$ gemäß [Dav80, Seite 78].

denn die nicht-trivialen Nullstellen liegen symmetrisch zur reellen Achse und zur kritischen Geraden mit Realteil 1, so daß mit ρ_a immer auch $2 - \rho_a$ nicht-triviale Nullstelle von $L(w, E)$ ist. Aufgrund des Vorzeichenwechsels auf der rechten Seite der Gleichung (26) beim Übergang von w zu $2 - w$ gilt somit auch

$$\Re C_2 + \sum_{\rho_a} \Re \frac{1}{\rho_a} = -\Re C_2 - \sum_{\rho_a} \Re \frac{1}{\rho_a}.$$

Dieser Term ist jedoch unabhängig von w und verschwindet daher. \square

4.3 Beweis von Proposition 1

Es seien $d \in \mathbb{N}$ und χ der zu $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ gehörige Kronecker-Charakter vom Führer $D \in \mathbb{N}$ mit $\log \frac{D^2}{\pi^2} \geq 15$, für den im folgenden $L := L(\cdot, \chi)$ gesetzt und $\text{VRV}(\chi)$ unterstellt wird. Schließlich sei wie in der Proposition noch $X \geq \max\{500, 5 \log \frac{D^2}{\pi^2}\}$ vorausgesetzt. Dann ist Lemma 2 anwendbar und Integration beider Seiten der dortigen Gleichung (22) von $s_0 = 5/6 + it$ nach $s = 7/6 + it$ ergibt nach Übergang zum Realteil

$$(27) \quad \log \frac{|L(s_0)|}{|L(s)|} = \Re \mathcal{G}(s_0, X) - \Re \mathcal{G}(s, X) + \Re \int_{s_0}^s E_{sig}(w) dw \\ - \Re \int_{s_0}^s R(w) dw + \frac{1}{X} \log \frac{|L(s_0 - 1)|}{|L(s - 1)|},$$

denn die in der Proposition eingeführte Reihe $\mathcal{G}(w, X)$ ist als Funktion von w offenbar absolut und kompakt konvergent in \mathbb{C} , so daß gliedweises Differenzieren zulässig ist und $-\mathcal{G}_1(w, X)$ als Ableitung liefert. In obiger Gleichung sind die beiden zuletzt aufgeführten Restterme eher von geringer Bedeutung, wie sich bei den Untersuchungen in den Abschnitten 4.3.1 und 4.3.2 herausstellen wird. Dort werden die beiden folgenden Abschätzungen nachgewiesen:

$$(28) \quad -\Re \int_{s_0}^s R(w) dw \geq -\frac{1}{750} - \frac{\log(1 + t^2)}{1000},$$

$$(29) \quad \log \frac{|L(s_0 - 1)|}{|L(s - 1)|} \geq \log \frac{|L(s)|}{|L(s_0)|} - \frac{\log(1 + t^2)}{6}.$$

Den wesentlichen Beitrag leisten also die nicht-trivialen Nullstellen von L , welche sich in dem Term $\Re \int_{s_0}^s E_{sig}(w) dw$ widerspiegeln. Dieser Ausdruck wird in Abschnitt 4.3.3 behandelt, wo folgende Abschätzung bewiesen wird:

$$(30) \quad \Re \int_{s_0}^s E_{sig}(w) dw \geq -\frac{3}{4X^{1/3}} \left(\frac{1}{6} \log \frac{D}{\pi} + \frac{1}{8} \log(1+t^2) + \log \frac{|L(s)|}{|L(s_0)|} \right).$$

Eingesetzt in (27) ergeben diese drei Abschätzungen nun

$$\begin{aligned} \log \frac{|L(s_0)|}{|L(s)|} &\geq \Re \mathcal{G}(s_0, X) - \Re \mathcal{G}(s, X) - \frac{1}{750} - \frac{\log(1+t^2)}{1000} \\ &\quad - \frac{3}{4X^{1/3}} \left(\frac{1}{6} \log \frac{D}{\pi} + \frac{1}{8} \log(1+t^2) + \log \frac{|L(s)|}{|L(s_0)|} \right) \\ &\quad + \frac{1}{X} \left(\log \frac{|L(s)|}{|L(s_0)|} - \frac{\log(1+t^2)}{6} \right) \\ &= \Re \mathcal{G}(s_0, X) - \Re \mathcal{G}(s, X) - \frac{1}{16X^{1/3}} \log \frac{D^2}{\pi^2} \\ &\quad - \left(\frac{3}{32X^{1/3}} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{6X} \right) \log(1+t^2) - \frac{1}{750} \\ &\quad + \left(\frac{3}{4X^{1/3}} - \frac{1}{X} \right) \log \frac{|L(s_0)|}{|L(s)|}, \end{aligned}$$

und daher wegen $X \geq 500$ durch Zusammenfassen der Terme in $\log \frac{|L(s_0)|}{|L(s)|}$

$$c(X) \log \frac{|L(s_0)|}{|L(s)|} \geq \Re \mathcal{G}(s_0, X) - \Re \mathcal{G}(s, X) - \frac{\log \frac{D^2}{\pi^2}}{16X^{1/3}} - \frac{\log(1+t^2)}{50} - \frac{1}{750}$$

$$\text{mit } c(X) := \frac{X - \frac{3}{4}X^{2/3} + 1}{X}.$$

Wegen $9/10 \leq c(X) \leq 1$ liefert Division durch diesen Koeffizienten die Behauptung, da χ reell ist und somit $|L(\bar{s}_0)| = |\overline{L(s_0)}| = |L(s_0)|$ gilt:

$$\log \frac{|L(\bar{s}_0, \chi)|}{|L(s, \chi)|} \geq X \frac{\Re \mathcal{G}(s_0, X) - \Re \mathcal{G}(s, X)}{X + 1 - \frac{3}{4}X^{2/3}} - \frac{5 \log \frac{D^2}{\pi^2}}{72X^{1/3}} - \frac{\log(1+t^2)}{40} - \frac{1}{100}. \quad \square$$

Nachzuweisen bleiben also noch die drei Abschätzungen (28), (29) und (30). Dies wird in den folgenden Unterabschnitten im Detail durchgeführt.

4.3.1 Beitrag des ersten Restterms

In diesem Abschnitt wird die Abschätzung (28) bewiesen, also der folgende

Hilfssatz 4: *Unter den Voraussetzungen von Proposition 1 gilt*

$$-\Re \int_{s_0}^s R(w) dw \geq -\frac{1}{750} - \frac{\log(1+t^2)}{1000}.$$

Beweis: Mit $w = u + it$ und $z = -u - 1/2 + iy$ ergibt sich aufgrund der Funktionalgleichung (2) aus Abschnitt 2.2

$$\begin{aligned} (31) \quad R(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-u-1/2-i\infty}^{-u-1/2+i\infty} \Gamma(z) X^z \left(-\frac{L'}{L}(w+z) \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-u-1/2-i\infty}^{-u-1/2+i\infty} \Gamma(z) X^z \left(\frac{L'}{L}(1-z-w) + \log \frac{D}{\pi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{2-z-w}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1+z+w}{2} \right) \right) dz. \end{aligned}$$

Das Integral über $\Gamma(z) X^z \log \frac{D}{\pi}$ kann dabei unter Benutzung des Residuensatzes wie im Beweis der Mellinschen Umkehrformel (siehe [FB95, Seite 419], der Integrand ist bis auf eine Konstante identisch) durch Verschieben der Integrationslinie nach $-\infty$ ausgewertet werden. Wegen $5/6 \leq u \leq 7/6$ gilt dabei $-2 < -u - 1/2 < -1$, so daß die zu berücksichtigenden Singularitäten des Integranden genau die Punkte $-n$ ($n \geq 2$) sind, in denen Pole ersten Grades mit Residuen $(-1)^n/n!$ bei der Gammafunktion vorliegen. Anschließende Anwendung der Restgliedabschätzung der Exponentialreihe ergibt

$$(32) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-u-1/2-i\infty}^{-u-1/2+i\infty} \Gamma(z) X^z \log \frac{D}{\pi} dz \right| = \log \frac{D}{\pi} \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-X)^{-n}}{n!} \right| \leq \frac{1}{X^2} \log \frac{D}{\pi}.$$

Die restlichen Bestandteile des Integranden in (31) werden nun getrennt untersucht. Zunächst liefert die Funktionalgleichung der Gammafunktion

$$\begin{aligned} |\Gamma(z) X^z| &= |X^z| \cdot \left| \frac{\Gamma(2+z)}{z(1+z)} \right| = X^{-u-1/2} \frac{|\Gamma(3/2 - u + iy)|}{|z| \cdot |1+z|} \\ &\leq X^{-u-1/2} \frac{|\Gamma(3/2 - u)|}{|\Re(\bar{z}(1+z))|} = X^{-u-1/2} \frac{\Gamma(3/2 - u)}{u^2 + y^2 - 1/4}. \end{aligned}$$

Durch Untersuchung der Ableitung kann gezeigt werden, daß der letzte Ausdruck für alle $X \geq 500$ und $y \in \mathbb{R}$ als Funktion von u im Intervall $[5/6; 7/6]$ monoton fallend ist, so daß zusammen mit der in M6 aus Anhang A.5 gezeigten Abschätzung für $\Gamma(2/3)$ folgt:

$$(33) \quad |\Gamma(z)X^z| \leq \frac{X^{-4/3}}{y^2 + 4/9} \Gamma(2/3) \leq \frac{3}{2} \frac{X^{-4/3}}{y^2 + 4/9}.$$

Mit Hilfe der Abschätzung in M6 aus Anhang A.5 und der Reihendarstellung für die logarithmische Ableitung der Riemannschen Zetafunktion folgt

$$(34) \quad \left| \frac{L'}{L}(1 - z - w) \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{1-z-w}} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\Lambda(n)|}{n^{1+u+1/2-u}} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(3/2) \leq 2.$$

Schließlich gilt gemäß $\Gamma 5$ aus Anhang A.1

$$\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{2 - z - w}{2} \right) \right| + \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1 + z + w}{2} \right) \right| \leq 17 + \log(1 + t^2) + \log(1 + y^2).$$

Zusammen mit (33) und (34) ergibt dies die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-u-1/2-i\infty}^{-u-1/2+i\infty} |\Gamma(z)X^z| \left(\left| \frac{L'}{L}(1 - z - w) \right| \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{2 - z - w}{2} \right) \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1 + z + w}{2} \right) \right| \right) dz \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{2} \frac{X^{-4/3}}{y^2 + 4/9} \left(2 + \frac{1}{2} (17 + \log(1 + t^2) + \log(1 + y^2)) \right) dy \\ & \leq \frac{3(21 + \log(1 + t^2))}{8\pi X^{4/3}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^2 + 4/9} + \frac{3}{8\pi X^{4/3}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(1 + y^2)}{y^2 + 4/9} dy, \end{aligned}$$

wobei die Integrale im Anhang auf Seite 97 ausgewertet werden. Es folgt

$$\leq \frac{9(21 + \log(1 + t^2))}{16X^{4/3}} + \frac{9}{16X^{4/3}} \log \frac{5}{3} \leq \frac{15}{X^{4/3}} + \frac{\log(1 + t^2)}{X^{4/3}}.$$

Damit sind alle Terme in (31) abgeschätzt und obige Ungleichung liefert zusammen mit (32) nun die vom Realteil von w unabhängige Abschätzung

$$|R(w)| \leq \frac{15}{X^{4/3}} + \frac{\log(1 + t^2)}{X^{4/3}} + \frac{1}{X^2} \log \frac{D}{\pi},$$

so daß das für Hilfssatz 4 benötigte Integral abgeschätzt werden kann durch

$$\begin{aligned} -\Re \int_{s_0}^s R(w) dw &\geq -\frac{1}{3} \left(\frac{15}{X^{4/3}} + \frac{\log(1+t^2)}{X^{4/3}} + \frac{1}{X^2} \log \frac{D}{\pi} \right) \\ &= -\frac{5}{X^{4/3}} - \frac{\log(1+t^2)}{3X^{4/3}} - \frac{1}{3X^2} \log \frac{D}{\pi}. \end{aligned}$$

Die Voraussetzung $X \geq \max \left\{ 500, 5 \log \frac{D^2}{\pi^2} \right\}$ liefert nun

$$\begin{aligned} -\Re \int_{s_0}^s R(w) dw &\geq -\frac{5}{500^{4/3}} - \frac{\log(1+t^2)}{3(500)^{4/3}} - \frac{1}{3 \cdot 500 \cdot 10 \log \frac{D}{\pi}} \cdot \log \frac{D}{\pi} \\ &\geq -\frac{1}{750} - \frac{\log(1+t^2)}{1000}. \quad \square \end{aligned}$$

4.3.2 Beitrag des zweiten Restterms

Nun wird die Ungleichung (29) bewiesen, also der folgende

Hilfssatz 5: *Unter den Voraussetzungen von Proposition 1 gilt*

$$\log \frac{|L(s_0 - 1)|}{|L(s - 1)|} \geq \log \frac{|L(s)|}{|L(s_0)|} - \frac{\log(1+t^2)}{6}.$$

Beweis: Unter $\text{VRV}(\chi)$ gilt $L(w - 1) \neq 0$ für $5/6 \leq \Re w \leq 7/6$. Daher folgt aus der Funktionalgleichung (2) in Abschnitt 2.2 unmittelbar

$$-\frac{L'}{L}(w - 1) = \frac{L'}{L}(2 - w) + \log \frac{D}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{3 - w}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{w}{2} \right).$$

Integration beider Seiten von s_0 nach s und anschließender Übergang zum Realteil liefert, da χ reell und somit $|L(2 - s)| = |L(\bar{s}_0)| = |\overline{L(s_0)}| = |L(s_0)|$ sowie analog $|L(2 - s_0)| = |L(s)|$ ist:

$$\log \frac{|L(s_0 - 1)|}{|L(s - 1)|} = \log \frac{|L(s)|}{|L(s_0)|} + \frac{1}{3} \log \frac{D}{\pi} + \frac{1}{2} \Re \int_{s_0}^s \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{3 - w}{2} \right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{w}{2} \right) \right) dw.$$

Dabei gilt für $w = u + it$ nach $\Gamma 6$ aus Anhang A.1

$$\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{3 - w}{2} \right) \right| + \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{w}{2} \right) \right| \leq 15 + \log(1+t^2),$$

woraus wegen $\log \frac{D^2}{\pi^2} \geq 15$ die gewünschte Aussage folgt:

$$\begin{aligned}
\log \frac{|L(s_0 - 1)|}{|L(s - 1)|} &\geq \log \frac{|L(s)|}{|L(s_0)|} + \frac{1}{3} \log \frac{D}{\pi} - \frac{1}{2} \int_{s_0}^s \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{3-w}{2} \right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{w}{2} \right) \right| dw \\
&\geq \log \frac{|L(s)|}{|L(s_0)|} + \frac{1}{3} \log \frac{D}{\pi} - \frac{1}{2} (s - s_0) (15 + \log(1 + t^2)) \\
&\geq \log \frac{|L(s)|}{|L(s_0)|} + \frac{1}{6} (\log \frac{D^2}{\pi^2} - 15) - \frac{1}{6} \log(1 + t^2) \\
&\geq \log \frac{|L(s)|}{|L(s_0)|} - \frac{1}{6} \log(1 + t^2). \quad \square
\end{aligned}$$

4.3.3 Beitrag der nicht-trivialen Nullstellen von $L(s)$

Zur Vervollständigung des Beweises von Proposition 1 fehlt nun noch der Nachweis der Ungleichung (30) und somit des folgenden

Hilfssatz 6: *Unter den Voraussetzungen von Proposition 1 gilt*

$$\Re \int_{s_0}^s E_{sig}(w) dw \geq -\frac{3}{4X^{1/3}} \left(\frac{1}{6} \log \frac{D}{\pi} + \frac{1}{8} \log(1 + t^2) + \log \frac{|L(s)|}{|L(s_0)|} \right).$$

Beweis: Zunächst sei an die Definition von E_{sig} erinnert:

$$E_{sig}(w) = \sum_{\rho} X^{\rho-w} \Gamma(\rho - w) dw.$$

Mit $w = u + it$ gilt für jede nicht-triviale Nullstelle $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ von $L(s)$

$$\int_{s_0}^s \Re \frac{1}{w - \rho} dw = \Re \int_{s_0}^s \frac{1}{w - \rho} dw = \Re \log \frac{s - \rho}{s_0 - \rho} = \log \frac{|s - \rho|}{|s_0 - \rho|}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\Re \int_{s_0}^s X^{\rho-w} \Gamma(\rho - w) dw &\geq - \int_{s_0}^s |X^{\rho-w} \Gamma(\rho - w)| dw \\
&= - \int_{5/6}^{7/6} X^{1/2-u} \left| \Gamma \left(\frac{1}{2} - u + i(\gamma - t) \right) \right| du \cdot \frac{1}{\log \frac{|s-\rho|}{|s_0-\rho|}} \cdot \int_{s_0}^s \Re \frac{dw}{w - \rho}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{1/3}^{2/3} X^{-u} |\Gamma(-u + i(\gamma - t))| du \cdot \frac{1}{\log \frac{|2/3+i(t-\gamma)|}{|1/3+i(t-\gamma)|}} \cdot \int_{s_0}^s \Re \frac{dw}{w - \rho} \\
&\geq -\delta(X) \cdot \int_{s_0}^s \Re \frac{dw}{w - \rho},
\end{aligned}$$

wobei[‡]

$$\delta(X) := \max_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{1/3}^{2/3} X^{-u} |\Gamma(-u + iy)| du \cdot \frac{2}{\log \frac{y^2+4/9}{y^2+1/9}} \right\}.$$

In D 1 aus Anhang A.6 wird eine explizite obere Schranke für $\delta(X)$ hergeleitet; die Existenz des Maximums ist jedoch klar wegen des exponentiellen Abfallens der Gammafunktion für $y \rightarrow \pm\infty$. Aufsummieren über alle nicht-trivialen Nullstellen liefert unter Verwendung von Lemma 4 aus Abschnitt 4.2

$$\begin{aligned}
\Re \int_{s_0}^s E_{sig}(w) dw &\geq -\delta(X) \sum_{\rho} \int_{s_0}^s \Re \frac{dw}{w - \rho} \\
&= -\delta(X) \int_{s_0}^s \left(\frac{1}{2} \log \frac{D}{\pi} + \frac{1}{2} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{w+1}{2} \right) + \Re \frac{L'}{L}(w) \right) dw \\
&= -\delta(X) \left(\frac{1}{6} \log \frac{D}{\pi} + \frac{1}{2} \int_{s_0}^s \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{w+1}{2} \right) dw + \log \frac{|L(s)|}{|L(s_0)|} \right).
\end{aligned}$$

Dabei gilt nach $\Gamma 7$ aus Anhang A.1

$$\frac{1}{2} \int_{s_0}^s \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{w+1}{2} \right) dw \leq \frac{1}{8} \log(1 + t^2).$$

Eingesetzt liefert dies

$$\Re \int_{s_0}^s E_{sig}(w) dw \geq -\delta(X) \left(\frac{1}{6} \log \frac{D}{\pi} + \frac{1}{8} \log(1 + t^2) + \log \frac{|L(s)|}{|L(s_0)|} \right),$$

[‡] Entscheidend geht hier $\Re \frac{1}{w-\rho} = \Re \frac{\overline{w-\rho}}{|w-\rho|^2} = \frac{u-1/2}{(u-1/2)^2 + (\gamma-t)^2} > 0$ für $u = \Re w > 1/2$ ein.

so daß aus der in D 1 aus Anhang A.6 für $X \geq 500$ gezeigten Abschätzung

$$\delta(X) \leq \frac{3}{4X^{1/3}}$$

die Aussage des Hilfssatzes folgt. \square

4.4 Beweis von Proposition 2

Es sei E eine elliptische Kurve vom Führer $q \in \mathbb{N}$ mit $L(1, E) \neq 0$, für die VRV(E) unterstellt und zur Abkürzung $L_a := L(\cdot, E)$ gesetzt werde. Weiter sei $X \geq \max\{500, 5 \log \frac{q}{4\pi^2}\}$ vorausgesetzt. Dann ist Lemma 3 anwendbar und Integration beider Seiten der dortigen Gleichung (25) von $s = 7/6 + it$ nach $s_1 = 11/6 + it$ bei anschließendem Übergang zum Realteil ergibt

$$\log \frac{|L_a(s)|}{|L_a(s_1)|} = \Re \mathcal{F}(s, X) - \Re \mathcal{F}(s_1, X) + \Re \int_s^{s_1} (R_{sig}(w) + R_{ins}(w) + R_{tri}(w)) dw,$$

denn die in Proposition 2 eingeführte Reihe $\mathcal{F}(w, X)$ ist als Funktion von w offenbar absolut und kompakt konvergent in \mathbb{C} , so daß gliedweises Differenzieren zulässig ist und $-\mathcal{F}_1(w, X)$ als Ableitung liefert. In obiger Gleichung sind der Term $\log |L_a(s_1)| - \Re \mathcal{F}(s_1, X)$ sowie die Integrale über die beiden hinteren Summanden dabei von vergleichsweise geringer Bedeutung, wie sich bei den Untersuchungen in den Abschnitten 4.4.1 bis 4.4.3 herausstellen wird:

$$(35) \quad \log |L_a(s_1)| - \Re \mathcal{F}(s_1, X) \leq \frac{3}{19},$$

$$(36) \quad \Re \int_s^{s_1} R_{tri}(w) dw \leq \frac{1}{500},$$

$$(37) \quad \Re \int_s^{s_1} R_{ins}(w) dw \leq \frac{7}{50} + \frac{\log(1+t^2)}{75} - \frac{\log |L_a(s)|}{X}.$$

Eingesetzt ergeben diese drei Abschätzungen wegen $\frac{3}{19} + \frac{1}{500} + \frac{7}{50} \leq \frac{3}{10}$:

$$\log |L_a(s)| \leq \Re \mathcal{F}(s, X) + \frac{3}{10} + \frac{\log(1+t^2)}{75} - \frac{\log |L_a(s)|}{X} + \Re \int_s^{s_1} R_{sig}(w) dw,$$

und somit nach Zusammenfassen der Terme in $\log |L_a(s)|$ und Division durch den sich ergebenden Koeffizienten $\frac{X+1}{X}$:

$$\log |L_a(s)| \leq \frac{X}{X+1} \Re \mathcal{F}(s, X) + \frac{3}{10} + \frac{\log(1+t^2)}{75} + \Re \int_s^{s_1} R_{sig}(w) dw.$$

Erneut liefern die nicht-trivialen Nullstellen der L-Reihe den wesentlichen Beitrag für die obere Schranke: Mit der in Hilfssatz 10 aus Abschnitt 4.4.4 bewiesenen Abschätzung für $\Re \int_s^{s_1} R_{sig}(w) dw$ folgt die Behauptung. \square

Nachzuweisen bleiben die Abschätzungen (35), (36) und (37) sowie Hilfssatz 10 über den Beitrag der nicht-trivialen Nullstellen.

4.4.1 Beitrag des ersten Restterms

Zunächst wird nun die Abschätzung (35) nachgewiesen:

Hilfssatz 7: *Unter den Voraussetzungen von Proposition 2 gilt*

$$\log |L_a(s_1)| - \Re \mathcal{F}(s_1, X) \leq \frac{3}{19}.$$

Beweis: Wegen $\log |L_a(s_1)| = \Re \log L_a(s_1)$ ergibt sich mit Satz 10 aus Abschnitt 2.6 und der entsprechenden Formel für die Riemannsche Zetafunktion

$$\begin{aligned} & \log |L_a(s_1)| - \Re \mathcal{F}(s_1, X) \\ &= \Re \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_E(n)}{n^{s_1} \log n} - \Re \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_E(n)}{n^{s_1} \log n} e^{-n/X} \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\lambda_E(n)|}{n^{11/6} \log n} (1 - e^{-n/500}) \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\sqrt{n} \Lambda(n)}{n^{11/6} \log n} (1 - e^{-n/500}) \\ &= 2 \log \zeta \left(\frac{4}{3} \right) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \Lambda(n)}{n^{4/3} \log n} e^{-n/500}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird in M1 aus Anhang A.5 mit Computereinsatz wie gewünscht gegen $3/19$ abgeschätzt. \square

4.4.2 Beitrag des zweiten Restterms

Es schließt sich der Nachweis von Ungleichung (36) an:

Hilfssatz 8: *Unter den Voraussetzungen von Proposition 2 gilt*

$$\Re \int_s^{s_1} R_{tri}(w) dw \leq \frac{1}{500}.$$

Beweis: Der Integrand wurde auf Seite 53 definiert als

$$R_{tri}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-n-w)}{X^{n+w}}.$$

Dabei folgt mit Hilfe der Funktionalgleichung der Gammafunktion zunächst

$$(38) \quad |\Gamma(-w-n)| = \frac{|\Gamma(-w)|}{|w+n|\cdots|w+1|} \leq |\Gamma(-w)| \leq |\Gamma(-\Re w)| \leq |\Gamma(-7/6)|.$$

Nach M 6 aus Anhang A.5 gilt $|\Gamma(-7/6)| \leq 6$, so daß sich wegen $X \geq 500$ unmittelbar die gewünschte Abschätzung ergibt:

$$\begin{aligned} \Re \int_s^{s_1} R_{tri}(w) dw &\leq \left| \int_s^{s_1} R_{tri}(w) dw \right| \leq \int_s^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} X^{-n-\Re w} |\Gamma(-n-w)| dw \\ &\leq 6 \int_{7/6}^{11/6} 500^{-u} \sum_{n=0}^{\infty} 500^{-n} du = \frac{6}{1-1/500} \cdot \left[-\frac{500^{-u}}{\log 500} \right]_{7/6}^{11/6} \\ &= 6 \frac{500^{-1/6} - 500^{-5/6}}{499 \log 500} \leq \frac{1}{500}. \quad \square \end{aligned}$$

4.4.3 Beitrag der Polstellen der Gammafunktion

Im folgenden wird die Abschätzung (37) nachgewiesen, die den Beitrag der Polstellen der Gammafunktion darstellt (vgl. Beweis von Lemma 3).

Hilfssatz 9: *Unter den Voraussetzungen von Proposition 2 gilt*

$$\Re \int_s^{s_1} R_{ins}(w) dw \leq \frac{7}{50} + \frac{\log(1+t^2)}{75} - \frac{\log|L_a(s)|}{X}.$$

Beweis: Aus der Funktionalgleichung (13) in Abschnitt 2.6 ergibt sich

$$\begin{aligned}
(39) \quad \int_s^{s_1} R_{ins}(w) dw &= \int_s^{s_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-X)^{-n}}{n!} \frac{L'_a}{L_a}(w-n) dw \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-X)^{-n}}{n!} \int_s^{s_1} \left(-\frac{L'_a}{L_a}(2+n-w) - \log \frac{q}{4\pi^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(2+n-w) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(w-n) \right) dw \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-X)^{-n}}{n!} \left(\log \frac{L_a(2+n-s_1)}{L_a(2+n-s)} + (s-s_1) \log \frac{q}{4\pi^2} \right. \\
&\quad \left. - \int_s^{s_1} \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(2+n-w) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(w-n) \right) dw \right).
\end{aligned}$$

Hier werden nun einzelne Bestandteile getrennt untersucht. Zunächst gilt wegen $X \geq \max\{500, 5 \log \frac{q}{4\pi^2}\}$

$$\begin{aligned}
(40) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-X)^{-n}}{n!} (s-s_1) \log \frac{q}{4\pi^2} &= -\frac{2}{3} \log \frac{q}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-X)^{-n}}{n!} \\
&= \frac{2}{3} \log \frac{q}{4\pi^2} (1 - e^{-1/X}) \leq \frac{2}{15} X (1 - e^{-1/X}) \leq \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

Weiter liefert Satz 10 aus Abschnitt 2.6 bzw. die entsprechende Gleichung für die Riemannsche Zetafunktion zusammen mit M 6 aus Anhang A.5

$$\log |L_a(3-s)| \leq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|\lambda_E(m)|}{m^{11/6} \log m} \leq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2\sqrt{m} \Lambda(m)}{m^{11/6} \log m} = 2 \log \zeta \left(\frac{4}{3} \right) \underset{\text{M 6}}{\leq} \frac{13}{5}$$

und somit für $n \geq 2$ auch

$$\begin{aligned}
\log \frac{|L_a(2+n-s_1)|}{|L_a(2+n-s)|} &\leq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|\lambda_E(m)|}{\log m} \left(\frac{1}{m^{2+n-11/6}} - \frac{1}{m^{2+n-7/6}} \right) \\
&\leq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|\lambda_E(m)|}{m^{13/6} \log m} \underset{\text{s.o.}}{\leq} \frac{13}{5}.
\end{aligned}$$

Damit folgt unter Benutzung der Restgliedabschätzung der Exponentialreihe

$$\begin{aligned}
(41) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-X)^{-n}}{n!} \log \left| \frac{L_a(2+n-s_1)}{L_a(2+n-s)} \right| \\
& \leq -\frac{1}{X} \log \left| \frac{L_a(3-s_1)}{L_a(3-s)} \right| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{X^{-n}}{n!} \log \left| \frac{L_a(2+n-s_1)}{L_a(2+n-s)} \right| \\
& \leq -\frac{\log |L_a(3-s_1)|}{X} + \frac{13}{5X} + \frac{13}{5} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{X^{-n}}{n!} \\
& \leq -\frac{\log |L_a(3-s_1)|}{X} + \frac{13}{5X} + \frac{13}{5X^2} \\
& \leq -\frac{\log |L_a(3-s_1)|}{X} + \frac{1}{190}.
\end{aligned}$$

Nach Abspalten des ersten Summanden in der folgenden Reihe liefert die Anwendung von $\Gamma 8$ sowie $\Gamma 9$ aus Anhang A.1

$$\begin{aligned}
(42) \quad & -\Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-X)^{-n}}{n!} \int_s^{s_1} \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(2-w+n) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(w-n) \right) dw \\
& \leq \frac{1}{X} \Re \int_s^{s_1} \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(3-w) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(w-1) \right) dw \\
& \quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{X^{-n}}{n!} \int_s^{s_1} \left(\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(2-w+n) \right| + \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(w-n) \right| \right) dw \\
& \leq \frac{1}{2X} + \frac{2 \log(1+t^2)}{X} + \frac{16}{X^2} + \frac{\log(1+t^2)}{X^2} \\
& \leq \frac{1}{900} + \frac{\log(1+t^2)}{75}.
\end{aligned}$$

Einsetzen der Abschätzungen (40), (41) und (42) in (39) ergibt[§]:

$$\begin{aligned}
\Re \int_s^{s_1} R_{ins}(w) dw & \leq \frac{2}{15} - \frac{\log |L_a(s)|}{X} + \frac{1}{190} + \frac{1}{900} + \frac{\log(1+t^2)}{75} \\
& \leq \frac{7}{50} - \frac{\log |L_a(s)|}{X} + \frac{\log(1+t^2)}{75}.
\end{aligned}$$

□

[§] Es gilt $|L_a(3-s_1)| = |L_a(\bar{s})| = |\overline{L_a(s)}| = |L_a(s)|$, da alle Koeffizienten reell sind.

4.4.4 Beitrag der nicht-trivialen Nullstellen von $L_a(s)$

Hilfssatz 10: *In den Bezeichnungen von Proposition 2 gilt die Abschätzung*

$$\Re \int_s^{s_1} R_{sig}(w) dw \leq \frac{5\alpha(X) - \beta(X)}{4} \left(\frac{63}{125} \log \frac{q}{4\pi^2} + \frac{3}{4} \log(1+t^2) - \Re \mathcal{F}_1(s_2, X) \right),$$

falls $X \geq \max \{500, 5 \log \frac{q}{4\pi^2}\}$. Im Fall $X \geq \max \{5000, 5 \log \frac{q}{4\pi^2}\}$ gilt

$$\Re \int_s^{s_1} R_{sig}(w) dw \leq \frac{1}{10} \log(1+t^2) + \frac{1}{7X^{1/6}} \log \frac{q}{4\pi^2} - \frac{5}{18X^{1/6}} \Re \mathcal{F}_1(s_2, X).$$

Beweis: Sei zunächst nur $X \geq \max \{500, 5 \log \frac{q}{4\pi^2}\}$ vorausgesetzt. Als Beitrag einer einzelnen Nullstelle $\rho_a = 1 + i\gamma_a$ ergibt sich durch Ergänzen des Terms $\Re(\beta(X)X^{\rho_a - s_2}\Gamma(\rho_a - s_2))$ mit der Abkürzung $y := \gamma_a - \Im w = \gamma_a - t$

$$\begin{aligned} \Re \int_s^{s_1} X^{\rho_a - w} \Gamma(\rho_a - w) dw &= \Re \int_{7/6}^{11/6} X^{1-u+iy} \Gamma(1-u+iy) du \\ &= \Re \int_{1/6}^{5/6} X^{-u+iy} \Gamma(-u+iy) du = \Re(\beta(X)X^{\rho_a - s_2} \Gamma(\rho_a - s_2)) \\ &\quad + \Re \left(\int_{1/6}^{5/6} X^{-u+iy} \Gamma(-u+iy) du - \beta(X)X^{-7/20+iy} \Gamma\left(-\frac{7}{20} + iy\right) \right) \\ &\leq \Re(\beta(X)X^{\rho_a - s_2} \Gamma(\rho_a - s_2)) + \alpha(X) \left(\frac{7}{20} + \frac{20}{7}y^2 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Identität

$$(43) \quad \Re \frac{1}{s_2 - \rho_a} = \Re \frac{1}{\frac{7}{20} + i(t - \gamma_a)} = \Re \frac{\frac{7}{20} - i(t - \gamma_a)}{\left(\frac{7}{20}\right)^2 + (t - \gamma_a)^2} = \frac{1}{\frac{7}{20} + \frac{20}{7}y^2}$$

ergibt sich durch Aufsummieren über alle nicht-trivialen Nullstellen

$$(44) \quad \Re \int_s^{s_1} R_{sig}(w) dw = \sum_{\rho_a} \Re \int_s^{s_1} X^{\rho_a - w} \Gamma(w) dw \\ \leq \beta(X) \Re R_{sig}(s_2) + \alpha(X) \sum_{\rho_a} \Re \frac{1}{s_2 - \rho_a}.$$

Anwendung der Lemmata 3 und 4 aus Abschnitt 4.2 liefert dabei

$$\begin{aligned}
(45) \quad \sum_{\rho_a} \Re \frac{1}{s_2 - \rho_a} &= \frac{1}{2} \log \frac{q}{4\pi^2} + \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s_2) + \Re \frac{L'_a}{L_a}(s_2) \\
&\leq \frac{1}{2} \log \frac{q}{4\pi^2} + \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s_2) \\
&\quad - \Re R_{sig}(s_2) - \Re R_{tri}(s_2) - \Re R_{ins}(s_2) - \Re \mathcal{F}_1(s_2, X).
\end{aligned}$$

Hier werden nun die einzelnen Bestandteile getrennt untersucht. Zunächst gilt gemäß Γ 10 aus Anhang A.1

$$(46) \quad \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s_2) \leq -\frac{5}{44} + \frac{5}{7} \log(1 + t^2).$$

Dann ergibt sich mit M6 aus Anhang A.5 wie in (38) die Abschätzung

$$|\Gamma(-n - s_2)| \leq |\Gamma(-s_2)| \leq |\Gamma(-\Re s_2)| = |\Gamma(-27/20)| \leq 3,$$

so daß also für $X \geq 500$ folgt:

$$\begin{aligned}
(47) \quad |R_{tri}(s_2)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\Gamma(-n - s_2) X^{-n-s_2}| \leq 3 \sum_{n=0}^{\infty} 500^{-n-27/20} \\
&= 3 \frac{500^{-27/20}}{1 - 1/500} \leq \frac{1}{1000}.
\end{aligned}$$

Nun liefert die Funktionalgleichung (13) aus Abschnitt 2.6 wegen $L(1, E) \neq 0$

$$\begin{aligned}
|R_{ins}(s_2)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^{-n}}{n!} \left| \frac{L'_a}{L_a}(s_2 - n) \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^{-n}}{n!} \left(\left| \frac{L'_a}{L_a}(2 + n - s_2) \right| + \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s_2 - n) \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(2 + n - s_2) \right| + \log \frac{q}{4\pi^2} \right).
\end{aligned}$$

Dabei wiederum gilt nach Γ 11 aus Anhang A.1 die Abschätzung

$$\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s_2 - n) \right| + \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(2 + n - s_2) \right| \leq 13 + \log(1 + t^2) + 4 \log(n + 2)$$

und nach Satz 10 aus Abschnitt 2.6 sowie M6 aus Anhang A.5

$$\left| \frac{L'_a}{L_a}(2 + n - s_2) \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\lambda_E(m)|}{|m^{2+n-s_2}|} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{m} \Lambda(m)}{m^{33/20}} \leq 2 \frac{\zeta'}{\zeta} \left(\frac{23}{20} \right) \leq \frac{25}{2}.$$

Somit folgt unter Benutzung der Restgliedabschätzung der Exponentialreihe

$$\begin{aligned}
(48) \quad |R_{ins}(s_2)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^{-n}}{n!} \left(\frac{41}{2} + \log(1+t^2) + 4\log(n+2) + \log \frac{q}{4\pi^2} \right) \\
&\leq \frac{2}{X} \left(\frac{41}{2} + \log(1+t^2) + \log \frac{q}{4\pi^2} \right) + \frac{4}{X} e^{1/X} \\
&\leq \frac{1}{250} \left(\log(1+t^2) + \log \frac{q}{4\pi^2} \right) + \frac{1}{11}.
\end{aligned}$$

Einsetzen von (46), (47) und (48) in (45) liefert wegen $\frac{5}{44} \geq \frac{1}{1000} + \frac{1}{11}$ nun

$$(49) \quad \sum_{\rho_a} \frac{1}{s_2 - \rho_a} \leq \frac{126}{250} \log \frac{q}{4\pi^2} + \frac{3}{4} \log(1+t^2) - \Re \mathcal{F}_1(s_2, X) - \Re R_{sig}(s_2).$$

Schließlich ergibt sich unter Benutzung der Abschätzung D 2 aus Anhang A.6 mit $y := \Im \rho_a - t$ für $X \geq 500$

$$\begin{aligned}
|R_{sig}(s_2)| &\leq \sum_{\rho_a} |X^{\rho_a - s_2}| \cdot |\Gamma(\rho_a - s_2)| = \sum_{\rho_a} X^{-7/20} |\Gamma(-7/20 + iy)| \\
&\stackrel{\leq}{D2} \sum_{\rho_a} X^{-7/20} \frac{7}{4} \left(\frac{7}{20} + \frac{20}{7} y^2 \right)^{-1} \stackrel{\leq}{(43)} \frac{7}{4} 500^{-7/20} \sum_{\rho_a} \Re \frac{1}{s_2 - \rho_a} \\
&\stackrel{\leq}{(49)} \frac{1}{5} \left(\frac{63}{125} \log \frac{q}{4\pi^2} + \frac{3}{4} \log(1+t^2) - \Re \mathcal{F}_1(s_2, X) - \Re R_{sig}(s_2) \right) \\
&\leq \frac{1}{5} \left(\frac{63}{125} \log \frac{q}{4\pi^2} + \frac{3}{4} \log(1+t^2) - \Re \mathcal{F}_1(s_2, X) \right) + \frac{1}{5} |R_{sig}(s_2)|
\end{aligned}$$

und somit

$$(50) \quad |R_{sig}(s_2)| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{63}{125} \log \frac{q}{4\pi^2} + \frac{3}{4} \log(1+t^2) - \Re \mathcal{F}_1(s_2, X) \right).$$

Einsetzen von (49) und (50) in (44) ergibt den ersten Teil des Hilfssatzes:

$$\begin{aligned}
\Re \int_s^{s_1} R_{sig}(w) dw &\leq (\alpha(X) - \beta(X)) |R_{sig}(s_2)| \\
&\quad + \alpha(X) \left(\frac{63}{125} \log \frac{q}{4\pi^2} + \frac{3}{4} \log(1+t^2) - \Re \mathcal{F}_1(s_2, X) \right) \\
&\leq \frac{5\alpha(X) - \beta(X)}{4} \left(\frac{63}{125} \log \frac{q}{4\pi^2} + \frac{3}{4} \log(1+t^2) - \Re \mathcal{F}_1(s_2, X) \right).
\end{aligned}$$

Für den zweiten Teil sei nun $X \geq \max \left\{ 5000, 5 \log \frac{q}{4\pi^2} \right\}$. Dann ist der Beitrag einer einzelnen Nullstelle $\rho_a = 1 + i\gamma_a$ (mit $y := \gamma_a - t$) gegeben durch

$$\begin{aligned}
\Re \int_s^{s_1} X^{\rho_a - w} \Gamma(\rho_a - w) dw &\leq \int_s^{s_1} |X^{\rho_a - w}| \cdot |\Gamma(\rho_a - w)| dw \\
&= \int_{7/6}^{11/6} X^{1-u} |\Gamma(1-u+iy)| du = \int_{1/6}^{5/6} X^{-u} |\Gamma(-u+iy)| du \\
&\stackrel{(43)}{=} \int_{1/6}^{5/6} X^{-u} |\Gamma(-u+iy)| du \cdot \left(\frac{7}{20} + \frac{20}{7} y^2 \right) \Re \frac{1}{s_2 - \rho_a} \\
&\leq \gamma(X) \Re \frac{1}{s_2 - \rho_a},
\end{aligned}$$

wobei[¶]

$$\gamma(X) := \max_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{1/6}^{5/6} X^{-u} |\Gamma(-u+iy)| du \cdot \left(\frac{7}{20} + \frac{20}{7} y^2 \right) \right\}.$$

In D 3 aus Anhang A.6 wird eine explizite obere Schranke für $\gamma(X)$ hergeleitet. Die Existenz des Maximums ist jedoch klar wegen des exponentiellen Abfallens der Gammafunktion für $y \rightarrow \pm\infty$. Aufsummieren über alle nicht-trivialen Nullstellen liefert

$$\begin{aligned}
\Re \int_s^{s_1} R_{sig}(w) dw &= \sum_{\rho_a} \Re \int_s^{s_1} X^{\rho_a - w} \Gamma(\rho_a - w) dw \leq \gamma(X) \sum_{\rho_a} \Re \frac{1}{s_2 - \rho_a} \\
&\stackrel{(49)}{\leq} \gamma(X) \left(\frac{63}{125} \log \frac{q}{4\pi^2} + \frac{3}{4} \log(1+t^2) - \Re \mathcal{F}_1(s_2, X) - \Re R_{sig}(s_2) \right) \\
&\leq \gamma(X) \left(\frac{63}{125} \log \frac{q}{4\pi^2} + \frac{3}{4} \log(1+t^2) - \Re \mathcal{F}_1(s_2, X) + |R_{sig}(s_2)| \right) \\
&\stackrel{(50)}{\leq} \frac{5}{4} \gamma(X) \left(\frac{63}{125} \log \frac{q}{4\pi^2} + \frac{3}{4} \log(1+t^2) - \Re \mathcal{F}_1(s_2, X) \right).
\end{aligned}$$

Aus der in D 3 aus Anhang A.6 bewiesenen Abschätzung $\gamma(X) \leq \frac{2}{9X^{1/6}}$ für $X \geq 5000$ folgt der zweite Teil des Hilfssatzes. \square

[¶] entscheidend geht hier ein, daß $\Re \frac{1}{s_2 - \rho_a}$ nach (43) positiv ist.

5 Beweis des Hauptsatzes

Im Anschluß an die Formulierung des Hauptresultates über die Ausnahmen der Kaplansky-Form auf Seite 45 wurde das Vorgehen zum Beweis skizziert und mit den expliziten Abschätzungen des vorigen Kapitels stehen nun die wesentlichen Hilfsmittel bereit, um den Beweis im Detail durchzuführen. Zunächst sei jedoch das Theorem (ohne explizite Nennung der Ausnahmen) noch einmal formuliert:

Theorem 6: *Unter VRV hat $\phi_{7,1}$ genau 53 und $\phi_{7,2}$ genau 5 quadratfreie Ausnahmen. Die Menge aller Ausnahmen ergibt sich jeweils durch Multiplikation dieser quadratfreien Ausnahmen mit den geraden Potenzen von 7.*

Beweis: Nach Theorem 3 sind nur die Aussagen über die quadratfreien Ausnahmen zu zeigen, von denen gemäß Satz 13 auf Seite 26 genau 53 bzw. 5 kleiner als $2 \cdot 10^{12}$ sind. Es sei nun $N \geq 2 \cdot 10^{12}$ als eine weitere quadratfreie Ausnahme von $\phi_{7,1}$ oder $\phi_{7,2}$ angenommen – nach den Ergebnissen aus Abschnitt 3.1 gilt dann $N \in 4\mathbb{N} + \{2, 3\}$ und im Anschluß an die dortige Formulierung von Theorem 6 wurde schon gezeigt, daß dann

$$(51) \quad \frac{L_a(1)}{L(1)^2} \geq \log \frac{34}{101} + \frac{1}{4} \log \frac{q_N}{4\pi^2}$$

gilt, falls L die Dirichletsche L-Reihe des Kronecker-Charakters $\chi := \chi_{-28N}$ und L_a die Hasse-Weilsche L-Reihe der elliptischen Kurve $E(-7N)$ bezeichnet, welche den Führer

$$q_N := \begin{cases} 28^2 N^2 & \text{falls } (N, 7) = 1, \\ 7 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2 N^2 & \text{falls } (N, 7) > 1, \end{cases}$$

besitzt. Ferner erfüllt gemäß Abschnitt 3.6 die Funktion

$$H(w) = \left(\frac{\sqrt{q_N}}{2\pi}\right)^{w-1} \frac{L_a(w) \Gamma(w)}{L(w) L(2-w)}$$

die Voraussetzungen des Phragmen-Lindelöf-Prinzips sowie die Funktionalgleichung $H(2-w) = H(w)$. Die daraus abgeleitete Abschätzung (21) geht wegen des monotonen Wachstums der reellen Logarithmusfunktion über in

$$(52) \quad \log \frac{L_a(1)}{L(1)^2} \leq \log \sup_{t \in \mathbb{R}} |H(7/6 + it)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \log |H(7/6 + it)|.$$

Unter VRV sind insbesondere $\text{VRV}(\chi)$ sowie $\text{VRV}(E(-7N))$ erfüllt und unter dieser Voraussetzung wird im ersten und zweiten Abschnitt dieses Kapitels

mit Hilfe der expliziten Abschätzungen aus dem vorigen Kapitel die folgende Ungleichung bewiesen:

$$(53) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \log |H(7/6 + it)| \leq \begin{cases} \frac{73}{14} + \frac{9}{68} \log \frac{q_N}{4\pi^2} & \text{falls } \log \frac{q_N}{4\pi^2} \leq 110, \\ \frac{66}{10} + \frac{9}{50} \log \frac{q_N}{4\pi^2} & \text{falls } \log \frac{q_N}{4\pi^2} \geq 110. \end{cases}$$

Wegen $\frac{1}{4} > \frac{9}{50} > \frac{9}{68}$ existieren aber reelle Zahlen $y_0, y_1 \geq 0$ mit

$$\log \frac{34}{101} + \frac{1}{4} y > \begin{cases} \frac{73}{14} + \frac{9}{68} y & \text{für alle } y \geq y_0, \\ \frac{66}{10} + \frac{9}{50} y & \text{für alle } y \geq y_1. \end{cases}$$

Genauer kann einerseits $y_0 = 53,7$ gewählt werden, denn

$$\log \frac{34}{101} + \frac{1}{4} \cdot 53,7 \geq 12,33 > 12,322 \geq \frac{73}{14} + \frac{9}{68} \cdot 53,7,$$

und andererseits kann $y_1 = 110$ gewählt werden, denn

$$\log \frac{34}{101} + \frac{1}{4} \cdot 110 \geq 26,41 > 26,40 = \frac{66}{10} + \frac{9}{50} \cdot 110.$$

Für $\log \frac{q_N}{4\pi^2} \geq 53,7$ liefert dies einen Widerspruch zwischen Ungleichung (51) und der sich aus (52) und (53) ergebenden Abschätzung. Da aber N als eine Ausnahme von $\phi_{7,1}$ oder $\phi_{7,2}$ mit $N \geq 2 \cdot 10^{12}$ angenommen war, ergibt sich nach Definition von q_N gerade $\log \frac{q_N}{4\pi^2} \geq 53,7$. Eine solche Ausnahme kann damit unter VRV nicht existieren. \square

5.1 Beweis der Abschätzung (53) für „kleine“ $N \in \mathbb{N}$

In diesem Abschnitt wird der erste Teil der Abschätzung (53) nachgewiesen. Sei dazu $\log \frac{q_N}{4\pi^2} \leq 110$ vorausgesetzt und definiere $X := 557 \geq 5 \log \frac{q_N}{\pi^2}$. Da χ den Führer $\sqrt{q_N}$ bzw. $\sqrt{q_N/7}$ besitzt (je nachdem, ob N prim zu 7 ist oder nicht) und $E(-7N)$ den Führer q_N hat, sind damit Proposition 1 und der erste Teil von Proposition 2 anwendbar. Wie dort seien $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{G}, \alpha(X), \beta(X)$ sowie $s_0 = 5/6 + it, s = 7/6 + it$ und $s_2 = 27/20 + it$ definiert. In D 4 aus Anhang A.6 wird mit Computereinsatz gezeigt, daß

$$\beta(X) \geq \frac{33 \cdot 557^{-1/6}}{23 \log 557} \quad \text{und} \quad \alpha(X) \leq \frac{23 \cdot 557^{-1/6}}{16 \log 557},$$

und somit (nach Definition gilt $\alpha(X) \geq \beta(X)$)

$$\tau(X) := \frac{5\alpha(X) - \beta(X)}{4} \in [0,078; 0,080].$$

Gemäß Definition der Abbildung H gilt

$$\begin{aligned} \log |H(s)| &= \log \frac{|L_a(s)\Gamma(s)|}{|L(s)L(\bar{s}_0)|} + \Re \left(\frac{s-1}{2} \log \frac{q_N}{4\pi^2} \right) \\ &= \log |L_a(s)| - \log \frac{|L(\bar{s}_0)|}{|L(s)|} - 2 \log |L(s)| + \log |\Gamma(s)| + \frac{1}{12} \log \frac{q_N}{4\pi^2}. \end{aligned}$$

Dabei liefert der erste Teil von Proposition 2 unter $\text{VRV}(E(-7N))$

$$\begin{aligned} \log |L_a(s)| &\leq \frac{X \Re \mathcal{F}(s, X)}{X+1} + \frac{3}{10} + \frac{\log(1+t^2)}{75} \\ &\quad + \frac{5\alpha(X) - \beta(X)}{4} \left(\frac{63}{125} \log \frac{q_N}{4\pi^2} + \frac{3}{4} \log(1+t^2) - \Re \mathcal{F}_1(s_2, X) \right). \end{aligned}$$

Bei der Anwendung von Proposition 1 auf $\chi = \chi_{-28N}$ ist zu beachten, daß dieser Kronecker-Charakter den Führer $\sqrt{q_N}$ oder $\sqrt{q_N/7}$ hat. Dabei gilt

$$\log \frac{q_N}{7\pi^2} < \log \frac{q_N}{\pi^2} = \log \frac{q_N}{4\pi^2} + \log 4,$$

so daß sich unter $\text{VRV}(\chi)$ zumindest die folgende Abschätzung ergibt:

$$\log \frac{|L(\bar{s}_0)|}{|L(s)|} \geq X \frac{\Re \mathcal{G}(s_0, X) - \Re \mathcal{G}(s, X)}{X+1 - \frac{3}{4}X^{2/3}} - \frac{5 \log \frac{q_N}{4\pi^2}}{72X^{1/3}} - \frac{\log(1+t^2)}{40} - \frac{3}{130}.$$

Der letzte Summand resultiert dabei aus

$$\frac{5 \log 4}{72 \cdot 557^{1/3}} + \frac{1}{100} \leq \frac{3}{130}.$$

Setze für $\tau \in [0,078; 0,080]$ im folgenden

$$v(n, \tau) := e^{-n/X} \left(\frac{X}{X+1} \frac{\lambda_E(n)}{n^{7/6}} - \frac{X \left(\frac{\Lambda(n)}{n^{5/6}} - \frac{\Lambda(n)}{n^{7/6}} \right)}{X+1 - \frac{3}{4}X^{2/3}} - \tau \frac{\lambda_E(n) \log n}{n^{27/20}} \right).$$

Wegen $\lambda_{E(-7N)}(n) = \lambda_E(n)\chi(n)$ (vgl. Satz 15 auf Seite 30) gilt dann

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty} \Re \frac{\chi(n) v(n, \tau)}{n^{it} \log n} \\ &= \frac{X}{X+1} \Re \mathcal{F}(s, X) - \frac{X \Re (\mathcal{G}(s_0, X) - \mathcal{G}(s, X))}{X+1 - \frac{3}{4}X^{2/3}} - \tau \Re \mathcal{F}_1(s_2, X). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der soeben aus den Propositionen 1 und 2 abgeleiteten Abschätzungen in die obige Gleichung für $\log H(s)$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\log |H(s)| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \Re \frac{\chi(n) v(n, \tau(X))}{n^{it} \log n} + \frac{42}{130} + \left(\frac{1}{75} + \frac{3}{4} \tau(X) + \frac{1}{40} \right) \log(1+t^2) \\
&\quad + \log |\Gamma(s)| + \left(\frac{1}{12} + \frac{63}{125} \tau(X) + \frac{5}{72 X^{1/3}} \right) \log \frac{q_N}{4\pi^2} - 2 \log |L(s)| \\
&\leq \sum_{n=2}^{1000} \Re \frac{\chi(n)}{n^{it} \log n} \left(v(n, \tau(X)) - \frac{2\Lambda(n)}{n^{7/6}} \right) + \sum_{n=1000}^{\infty} \Re \frac{\chi(n) v(n, \tau(X))}{n^{it} \log n} \\
&\quad + 2 \sum_{n=2}^{1000} \Re \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n^{7/6+it} \log n} - 2 \log |L(s)| + \frac{21}{65} \\
&\quad + \log |\Gamma(s)| + \frac{1}{5} \log(1+t^2) + \frac{9}{68} \log \frac{q_N}{4\pi^2}.
\end{aligned}$$

In den Hilfssätzen 11 und 12 am Ende dieses Abschnitts werden die ersten beiden Terme nach oben gegen $87/20$ bzw. $24/89$ abgeschätzt, während der Ausdruck $\log |\Gamma(s)| + \frac{1}{5} \log(1+t^2)$ nach $\Gamma 3$ aus Anhang A.1 nicht größer als $-\frac{3}{40}$ ist. Unter Benutzung der Reihendarstellungen für $\log L$ und $\log \zeta$ sowie der computergestützten Abschätzung M2 aus Anhang A.5 ergibt sich außerdem

$$\begin{aligned}
(54) \quad \sum_{n=2}^{1000} \Re \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n^s \log n} - \log |L(s)| &= - \sum_{n=1001}^{\infty} \Re \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n^s \log n} \leq \sum_{n=1001}^{\infty} \left| \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n^s \log n} \right| \\
&\leq \sum_{n=1001}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{7/6} \log n} = \sum_{n=1}^{1000} \frac{\Lambda(n)}{n^{7/6} \log n} - \log \zeta \left(\frac{7}{6} \right) \leq \frac{9}{52}.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt damit nun wie gewünscht

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in \mathbb{R}} \log |H(7/6 + it)| &\leq \frac{87}{20} + \frac{24}{89} + \frac{18}{52} + \frac{21}{65} - \frac{3}{40} + \frac{9}{68} \log \frac{q_N}{4\pi^2} \\
&\leq \frac{73}{14} + \frac{9}{68} \log \frac{q_N}{4\pi^2}. \quad \square
\end{aligned}$$

Nachzuweisen bleiben noch die oben angesprochenen Hilfssätze:

Hilfssatz 11: *Es gilt*
$$\sum_{n=2}^{1000} \Re \frac{\chi(n)}{n^{it} \log n} \left(v(n, \tau(X)) - \frac{2\Lambda(n)}{n^{7/6}} \right) \leq \frac{87}{20}.$$

Beweis: Die Abschätzung wird in M4 aus Anhang A.5 mit Computereinsatz bewiesen – an dieser Stelle soll das dortige Vorgehen erläutert werden. Gemäß Seite 74 gilt $\tau(X) \in [0,078; 0,080]$. Anstelle des exakten Wertes wird hier jedoch eine zusätzliche Variable τ eingeführt und in diesem Intervall variiert. Zunächst ist $v(n, \tau) = \Lambda(n) = 0$, falls n keine Primpotenz ist. Wegen $\chi(2) = 0$ sind die Summanden daher nur für Primpotenzen $2 \leq p^k \leq 1000$ mit $p \neq 2$ von Null verschieden[†]. Definiere für $p \in \mathbb{P}$, $k \in \mathbb{N}$ und $\tau \in [0,078; 0,080]$

$$s_p(k, \tau) := \frac{v(p^k, \tau)}{k \log p} - \frac{2}{k p^{7k/6}}.$$

Für $3 \leq p \leq 31$ gilt damit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \Re \frac{\chi(p^k)}{p^{ikt} \log p^k} \left(v(p^k, \tau) - \frac{2 \log p}{p^{7k/6}} \right) &\leq \sum_{k=1}^2 \cos(-k t \log p) \cdot s_p(k, \tau) \\ &\leq \max_{y \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^2 \cos(ky) \cdot s_p(k, \tau), \end{aligned}$$

wobei das Maximum aufgrund der Periodizität des Cosinus angenommen wird. Wegen $\cos(2y) = 2 \cos^2(y) - 1$ ist also die Funktion

$$f_p(x, \tau) := 2s_p(2, \tau) x^2 + s_p(1, \tau) x - s_p(2, \tau)$$

unter den Bedingungen $x \in [-1; 1]$ und $\tau \in [0,078; 0,080]$ zu maximieren. Durch Untersuchen der partiellen Ableitung nach x ergeben sich als mögliche Extrempunkte von f_p gerade

$$\left(-\frac{s_p(1, \tau)}{4s_p(2, \tau)}, \tau \right), (-1, \tau), (+1, \tau) \quad \text{mit } \tau \in [0,078; 0,080].$$

In M4 aus Anhang A.5 werden die an diesen Stellen angenommenen Werte

$$-\frac{1}{8} \frac{s_p(1, \tau)^2}{s_p(2, \tau)} - s_p(2, \tau), \quad -s_p(1, \tau) + s_p(2, \tau) \quad \text{bzw.} \quad s_p(1, \tau) + s_p(2, \tau)$$

bei variierendem τ maximiert. Für die Summanden zu $31 < p \leq 1000$ sowie zu $3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 5^3, 5^4$ und 7^3 wird die naheliegende Abschätzung

$$\Re \frac{\chi(p^k)}{p^{ikt} \log p^k} \left(v(p^k, \tau) - \frac{2 \log p}{p^{7k/6}} \right) \leq \left| \frac{v(p^k, \tau)}{k \log p} - \frac{2}{k p^{7k/6}} \right| = |s_p(k, \tau)|$$

verwendet, wobei in M4 das Maximum bei variierendem τ bestimmt wird. \square

[†] Dabei gilt $p^2 \leq 1000$ für $3 \leq p \leq 31$ und $p^2 > 1000$ für $p \geq 37$. Ferner gilt $3^6 \leq 1000$ und $3^7 > 1000$, $5^4 \leq 1000$ und $5^5 > 1000$ sowie $7^3 \leq 1000$ und $7^4 > 1000$.

Hilfssatz 12: Es gilt $\sum_{n=1000}^{\infty} \Re \frac{\chi(n) v(n, \tau(X))}{n^{it} \log n} \leq \frac{24}{89}$.

Beweis: Es kann unmittelbar überprüft werden (zum Beispiel durch Untersuchung der Ableitung entsprechender Funktionen), daß

$$\tau(557) \frac{\log n}{n^{27/20}} \leq \frac{1}{6n^{7/6}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{n^{5/6}} - \frac{1}{n^{7/6}} \leq \frac{2}{7n^{2/3}} \quad \text{für } n \geq 1000.$$

Gemäß Satz 10 auf Seite 17 gilt $|\lambda_E(n)| \leq 2\sqrt{n} \Lambda(n)$ und somit (für $n \geq 1000$)

$$\begin{aligned} |v(n, \tau(X))| &= e^{-n/557} \left| \frac{557 \lambda_E(n)}{558 n^{7/6}} - \frac{557 \left(\frac{\Lambda(n)}{n^{5/6}} - \frac{\Lambda(n)}{n^{7/6}} \right)}{558 - \frac{3}{4} 557^{2/3}} - \tau(557) \frac{\lambda_E(n) \log n}{n^{27/20}} \right| \\ &\leq e^{-n/557} \left(\frac{|\lambda_E(n)|}{n^{7/6}} + \frac{7}{6} \Lambda(n) \left(\frac{1}{n^{5/6}} - \frac{1}{n^{7/6}} \right) + \frac{|\lambda_E(n)|}{6n^{7/6}} \right) \\ &\leq e^{-n/557} \left(\frac{7}{6} \frac{|\lambda_E(n)|}{n^{7/6}} + \frac{7}{6} \cdot \frac{2 \Lambda(n)}{7n^{2/3}} \right) \\ &\leq e^{-n/557} \left(\frac{7}{6} \cdot \frac{2\sqrt{n} \Lambda(n)}{n^{7/6}} + \frac{1}{3} \frac{\Lambda(n)}{n^{2/3}} \right) = \frac{8}{3} \frac{\Lambda(n)}{n^{2/3}} e^{-n/557}. \end{aligned}$$

Unter Benutzung von Lemma 6 aus Anhang A.3 folgt daraus

$$\sum_{n=1000}^{\infty} \Re \frac{\chi(n) v(n, \tau(X))}{n^{it} \log n} \leq \frac{8}{3} \sum_{n=1000}^{\infty} \frac{\Lambda(n) e^{-n/557}}{n^{2/3} \log n} \leq \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{89} = \frac{24}{89}. \quad \square$$

5.2 Beweis der Abschätzung (53) für „große“ $N \in \mathbb{N}$

Für den Nachweis des zweiten Teils der Abschätzung (53) sei $\log \frac{q_N}{4\pi^2} \geq 110$. Definiere dazu

$$X := \begin{cases} 5000 & \text{für } \log \frac{q_N}{4\pi^2} \leq 1000, \\ \frac{1}{8} \left(\log \frac{q_N}{4\pi^2} \right)^2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt offenbar $X \geq \max\{5000, 5 \log \frac{q_N}{4\pi^2}\}$, so daß Proposition 1 auf χ und der zweite Teil von Proposition 2 auf $E(-7N)$ anwendbar sind. Wie dort seien \mathcal{G} , \mathcal{F} und \mathcal{F}_1 sowie $s_0 = 5/6 + it$, $s = 7/6 + it$ und $s_2 = 27/20 + it$ definiert. Gemäß Definition der Abbildung H gilt

$$\begin{aligned} \log |H(s)| &= \log \frac{|L_a(s) \Gamma(s)|}{|L(s) L(\bar{s}_0)|} + \Re \left(\frac{s-1}{2} \log \frac{q_N}{4\pi^2} \right) \\ &= \log |L_a(s)| - \log \frac{|L(\bar{s}_0)|}{|L(s)|} - 2 \log |L(s)| + \log |\Gamma(s)| + \frac{1}{12} \log \frac{q_N}{4\pi^2}. \end{aligned}$$

Unter $\text{VRV}(E(-7N))$ liefert der zweite Teil von Proposition 2

$$\log |L_a(s)| \leq \frac{X \Re \mathcal{F}(s, X)}{X+1} + \frac{3}{10} + \frac{\log(1+t^2)}{8} + \frac{\log \frac{q_N}{4\pi^2}}{7X^{1/6}} - \frac{5 \Re \mathcal{F}_1(s_2, X)}{18X^{1/6}}.$$

Weiter ergibt sich unter $\text{VRV}(\chi)$ aus Proposition 1

$$\log \frac{|L(\bar{s}_0)|}{|L(s)|} \geq X \frac{\Re \mathcal{G}(s_0, X) - \Re \mathcal{G}(s, X)}{X+1 - \frac{3}{4}X^{2/3}} - \frac{5 \log \frac{q_N}{4\pi^2}}{72X^{1/3}} - \frac{\log(1+t^2)}{40} - \frac{1}{60},$$

denn χ ist Kronecker-Charakter vom Führer $\sqrt{q_N}$ bzw. $\sqrt{q_N/7}$ und es gilt

$$\log \frac{q_N}{7\pi^2} < \log \frac{q_N}{\pi^2} = \log \frac{q_N}{4\pi^2} + \log 4 \quad \text{sowie} \quad \frac{5 \log 4}{72 \cdot 5000^{1/3}} + \frac{1}{100} \leq \frac{1}{60}.$$

Mit der Abkürzung

$$w(n, X) := e^{-n/X} \left(\frac{X}{X+1} \frac{\lambda_E(n)}{n^{7/6}} - \frac{X \left(\frac{\Lambda(n)}{n^{5/6}} - \frac{\Lambda(n)}{n^{7/6}} \right)}{X+1 - \frac{3}{4}X^{2/3}} - \frac{5}{18X^{1/6}} \frac{\lambda_E(n) \log n}{n^{27/20}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{gilt } \sum_{n=2}^{\infty} \Re \frac{\chi(n) w(n, X)}{n^{it} \log n} \\ = \frac{X}{X+1} \Re \mathcal{F}(s, X) - \frac{X \Re (\mathcal{G}(s_0, X) - \mathcal{G}(s, X))}{X+1 - \frac{3}{4}X^{2/3}} - \frac{5}{18X^{1/6}} \Re \mathcal{F}_1(s_2, X). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der soeben aus den Propositionen 1 und 2 abgeleiteten Abschätzungen in die obige Gleichung für $\log H(s)$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \log |H(s)| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \Re \frac{\chi(n) w(n, X)}{n^{it} \log n} + \frac{19}{60} + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{7X^{1/6}} + \frac{5}{72X^{1/3}} \right) \log \frac{q_N}{4\pi^2} \\ &\quad + \log |\Gamma(s)| + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{40} \right) \log(1+t^2) - 2 \log |L(s)| \\ &\leq \sum_{n=2}^{1000} \Re \frac{\chi(n)}{n^{it} \log n} \left(w(n, X) - \frac{2\Lambda(n)}{n^{7/6}} \right) + \sum_{n=1000}^{\infty} \Re \frac{\chi(n) w(n, X)}{n^{it} \log n} \\ &\quad + 2 \sum_{n=2}^{1000} \Re \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n^{7/6+it} \log n} - 2 \log |L(s)| + \frac{19}{60} \\ &\quad + \log |\Gamma(s)| + \frac{1}{5} \log(1+t^2) + \frac{49}{400} \log \frac{q_N}{4\pi^2}. \end{aligned}$$

In den folgenden Hilfssätzen 13 und 14 werden die ersten beiden Ausdrücke gegen 6 bzw. $\frac{23}{400} \log \frac{q_N}{4\pi^2}$ abgeschätzt und nach $\Gamma 3$ aus Anhang A.1 ist der Term $\log |\Gamma(s)| + \frac{1}{5} \log(1+t^2)$ nicht größer als $-\frac{3}{40}$. Zusammen mit der Abschätzung (54) aus dem vorigen Abschnitt folgt dann wie gewünscht

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} \log |H(7/6 + it)| &\leq 6 + \frac{18}{52} + \frac{19}{60} - \frac{3}{40} + \left(\frac{23}{400} + \frac{49}{400} \right) \frac{q_N}{4\pi^2} \\ &\leq \frac{66}{10} + \frac{9}{50} \log \frac{q_N}{4\pi^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Nachzuweisen bleiben noch die oben angesprochenen Hilfssätze.

Hilfssatz 13: *Es gilt* $\sum_{n=2}^{1000} \Re \frac{\chi(n)}{n^{it} \log n} \left(w(n, X) - \frac{2\Lambda(n)}{n^{7/6}} \right) \leq 6$.

Beweis (analog zu Hilfssatz 11): Der eigentliche Nachweis der Abschätzung erfolgt wiederum in M4 aus Anhang A.5 mit Computereinsatz. Zunächst gilt $w(n, X) = \Lambda(n) = 0$, falls n keine Primpotenz ist. Wegen $\chi(2) = 0$ sind die Summanden daher nur für Primpotenzen $2 \leq p^k \leq 1000$ mit $p \neq 2$ von Null verschieden. Definiere für $p \in \mathbb{P}$, $k \in \mathbb{N}$ und $X \geq 5000$

$$t_p(k, X) := \frac{w(p^k, X)}{k \log p} - \frac{2}{k p^{7k/6}}.$$

Für $3 \leq p \leq 31$ gilt damit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \Re \frac{\chi(p^k)}{p^{ikt} \log p^k} \left(w(p^k, X) - \frac{2 \log p}{p^{7k/6}} \right) &\leq \sum_{k=1}^2 \cos(-k t \log p) \cdot t_p(k, X) \\ &\leq \max_{y \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^2 \cos(ky) \cdot t_p(k, X), \end{aligned}$$

wobei das Maximum wieder aufgrund der Periodizität des Cosinus existiert. Wegen $\cos(2y) = 2 \cos^2(y) - 1$ ist also die Funktion

$$g_p(x, X) := 2t_p(2, X) x^2 + t_p(1, X) x - t_p(2, X)$$

unter den Bedingungen $x \in [-1; 1]$ und $X \geq 5000$ zu maximieren. Durch Untersuchung der partiellen Ableitung nach x ergeben sich als mögliche Extrempunkte von g_p gerade

$$\left(-\frac{t_p(1, X)}{4t_p(2, X)}, X \right), (-1, X), (+1, X) \quad \text{mit } X \geq 5000.$$

In M 4 aus Anhang A.5 werden die an diesen Stellen angenommenen Werte

$$-\frac{1}{8} \frac{t_p(1, X)^2}{t_p(2, X)} - t_p(2, X), -t_p(1, X) + t_p(2, X) \text{ bzw. } t_p(1, X) + t_p(2, X)$$

bei variierendem X maximiert. Für die Summanden zu $31 < p \leq 1000$ sowie zu $3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 5^3, 5^4$ und 7^3 wird die grobe Abschätzung

$$\Re \frac{\chi(p^k)}{p^{ikt} \log p^k} \left(w(p^k, X) - \frac{2 \log p}{p^{7k/6}} \right) \leq \left| \frac{w(p^k, X)}{k \log p} - \frac{2}{k p^{7k/6}} \right| = |t_p(k, X)|$$

verwendet, und in M 4 wird $|t_p(k, X)|$ bei variierendem X maximiert. \square

Hilfssatz 14: Es gilt $\sum_{n=1000}^{\infty} \Re \frac{\chi(n) w(n, X)}{n^{it} \log n} \leq \frac{23}{400} \log \frac{q_N}{4\pi^2}$.

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu dem von Hilfssatz 12. Zunächst gilt

$$\frac{5}{18X^{1/6} n^{27/20}} \leq \frac{1}{6n^{7/6}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{n^{5/6}} - \frac{1}{n^{7/6}} \leq \frac{2}{7n^{2/3}} \quad \text{für } n \geq 1000.$$

Wegen $X \geq 5000$ folgt daher nach Definition von $w(n, X)$ für $n \geq 1000$

$$\begin{aligned} |w(n, X)| &= e^{-n/X} \left| \frac{X}{X+1} \frac{\lambda(n)}{n^{7/6}} - \frac{X \left(\frac{\Lambda(n)}{n^{5/6}} - \frac{\Lambda(n)}{n^{7/6}} \right)}{X+1 - \frac{3}{4} X^{2/3}} - \frac{5}{18X^{1/6}} \frac{\lambda(n) \log n}{n^{27/20}} \right| \\ &\leq e^{-n/X} \left(\frac{|\lambda(n)|}{n^{7/6}} + \frac{7}{6} \Lambda(n) \left(\frac{1}{n^{5/6}} - \frac{1}{n^{7/6}} \right) + \frac{1}{6} \frac{|\lambda(n)|}{n^{7/6}} \right) \\ &\leq e^{-n/X} \left(\frac{7}{6} \frac{|\lambda(n)|}{n^{7/6}} + \frac{7}{6} \cdot \frac{2 \Lambda(n)}{7n^{2/3}} \right) \\ &\leq e^{-n/X} \left(\frac{7}{6} \cdot \frac{2\sqrt{n} \Lambda(n)}{n^{7/6}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\Lambda(n)}{n^{2/3}} \right) = \frac{8 \Lambda(n)}{3 n^{2/3}} e^{-n/X}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 6 aus Anhang A.3 ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \sum_{n=1000}^{\infty} \Re \frac{\chi(n) w(n, X)}{n^{it} \log n} &\leq \frac{8}{3} \sum_{n=1000}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{2/3} \log n} e^{-n/X} \\ &\leq \begin{cases} \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{4} & \text{für } X = 5000, \\ \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{7} X^{1/3} + \frac{1}{9} \right) & \text{für } X = \frac{1}{8} \left(\log \frac{q_N}{4\pi^2} \right)^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Gemäß Definition gilt $X = 5000$ genau für $110 \leq \log \frac{q_N}{4\pi^2} \leq 1000$. Daher folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1000}^{\infty} \Re \frac{\chi(n) w(n, X)}{n^{it} \log n} &= \begin{cases} 6 & \text{für } \log \frac{q_N}{4\pi^2} \leq 1000, \\ \frac{8}{7} \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} \left(\log \frac{q_N}{4\pi^2}\right)^{2/3} + \frac{8}{27} & \text{für } \log \frac{q_N}{4\pi^2} > 1000, \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} \frac{6}{110} \log \frac{q_N}{4\pi^2} & \text{für } \log \frac{q_N}{4\pi^2} \leq 1000, \\ \frac{4}{70} \log \frac{q_N}{4\pi^2} + \frac{8}{27000} \log \frac{q_N}{4\pi^2} & \text{für } \log \frac{q_N}{4\pi^2} > 1000, \end{cases} \\ &\leq \frac{23}{400} \log \frac{q_N}{4\pi^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Damit ist nun also der Nachweis des auf Seite 45 formulierten Hauptsatzes über die Ausnahmen der ternären Formen $\phi_{7,1}$ und $\phi_{7,2}$ abgeschlossen.

A Anhang

Die Beweise einiger expliziter Abschätzungen aus dem Hauptteil der Arbeit, die für das Verständnis der vorgestellten Methode zur Behandlung ternärer Formen nicht entscheidend sind, finden sich zur Erhöhung der Übersicht in diesem Anhang. Es handelt sich vor allem um Resultate im Zusammenhang mit L-Reihen und der Gammafunktion sowie um Computerberechnungen.

A.1 Die Gammafunktion

Die *Gammafunktion* ist zunächst für $\Re z > 0$ definiert als das absolut gegen eine holomorphe Funktion konvergente Integral

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Mit Hilfe der durch partielle Integration gewonnenen Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

läßt sie sich analytisch in die gesamte komplexe Ebene mit Ausnahme der Punkte $-n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) fortsetzen. In diesen Ausnahmepunkten liegen Pole ersten Grades vor mit Residuen

$$\text{Res}_{-n}(\Gamma(z)) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Die logarithmische Ableitung der Gammafunktion ist gegeben durch

$$(55) \quad \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z} \right)$$

Die beiden folgenden Hilfssätze geben Aufschluß über das Wachstum in y von $|\Gamma(x+iy)|$ und finden sich in [Rem91, Seite 54] bzw. [Nie65, Seite 23].

Hilfssatz 15: *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann gilt gleichmäßig in $a \leq x \leq b$:*

$$|\Gamma(x+iy)| = \mathcal{O}(|y|^{b-1/2} \exp(-|y|)) \quad \text{für } |y| \rightarrow \infty.$$

Hilfssatz 16: *Es seien $x, y \in \mathbb{R}$, wobei $x \notin -\mathbb{N}_0$. Definiere für $n \in \mathbb{N}_0$*

$$k(x, y, n) := \prod_{k=0}^n \sqrt{1 + \frac{y^2}{(x+k)^2}}.$$

Dann gilt $|\Gamma(x+iy)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Gamma(x)|}{k(x, y, n)}$ und somit $|\Gamma(x+iy)| \leq \frac{|\Gamma(x)|}{k(x, y, n)}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Insbesondere gilt $|\Gamma(x+iy)| \leq |\Gamma(x)|$ und $|\Gamma(x+iy)|$ ist symmetrisch zu 0 in y sowie monoton fallend in $|y|$. Mit Hilfe von Hilfssatz 16 werden nun zunächst drei Aussagen bewiesen, die an anderer Stelle benötigt werden.

Γ 1: Für $\frac{1}{3} \leq u \leq \frac{2}{3}$ gilt $|\Gamma(2-u+3i)| \leq \frac{1}{3}|\Gamma(2-u)|$.

Beweis: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $(2-u+k)^2 \leq (2-\frac{1}{3}+k)^2$ und somit

$$|\Gamma(2-u+3i)| \leq \frac{|\Gamma(2-u)|}{k(2-u, 3, 1)} \leq \frac{|\Gamma(2-u)|}{k(\frac{5}{3}, 3, 1)} \leq \frac{1}{3}|\Gamma(2-u)|. \quad \square$$

Γ 2: Für $\frac{1}{6} \leq u \leq \frac{5}{6}$ gilt $|\Gamma(2-u+2i)| \leq \frac{2}{5}|\Gamma(2-u)|$.

Beweis: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $(2-u+k)^2 \leq (2-\frac{1}{6}+k)^2$ und somit

$$|\Gamma(2-u+2i)| \leq \frac{|\Gamma(2-u)|}{k(2-u, 2, 6)} \leq \frac{|\Gamma(2-u)|}{k(\frac{11}{6}, 2, 6)} \leq \frac{2}{5}|\Gamma(2-u)|. \quad \square$$

Γ 3: Es gilt $\log |\Gamma(7/6+it)| + \frac{1}{5} \log(1+t^2) \leq -\frac{3}{40}$.

Beweis: Mit Hilfssatz 16 ergibt sich[†]

$$|\Gamma(7/6+it)| \leq \frac{|\Gamma(7/6)|}{k(7/6, t, 0)} \leq \frac{|\Gamma(7/6)|}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{(7/6)^2}}} \leq \frac{|\Gamma(7/6)|}{(1+t^2)^{1/5}},$$

so daß durch Logarithmieren mit M 6 aus Anhang A.5 die Behauptung folgt:

$$\log |\Gamma(7/6+it)| + \frac{1}{5} \log(1+t^2) \leq \log |\Gamma(7/6)| \stackrel{M6}{\leq} -\frac{3}{40}. \quad \square$$

Die folgende Abschätzung wird im Beweis von Lemma 3 in Kapitel 4 benötigt.

Γ 4: Für $x \leq 2$ und $|y| \geq 2$ gilt $|\Gamma(x+iy)| \leq \frac{2}{|x+iy|}$.

Beweis: Die Funktionalgleichung liefert wegen $2 \leq x - [x] + 2 \leq 3$:

$$\begin{aligned} |\Gamma(x+iy)| \cdot |x+iy| &= |\Gamma(x+1+iy)| \leq |\Gamma(x+1+2i)| \\ &= \frac{|\Gamma(x-[x]+2+2i)|}{|x+1+2i| \cdots |x-[x]+1+2i|} \\ &\leq |\Gamma(x-[x]+2+2i)| \\ &\leq \max_{2 \leq u \leq 3} |\Gamma(u+2i)| \leq \max_{2 \leq u \leq 3} \Gamma(u) = \Gamma(3) = 2. \quad \square \end{aligned}$$

[†] Die durch $h(t) := (1+t^2)^{1/5} \cdot (1 + \frac{36}{49}t^2)^{-1/2}$ def. Funktion hat ihr Maximum in $t = 0$.

Das folgende Lemma stellt Abschätzungen über die logarithmische Ableitung der Gammafunktion bereit, mit denen anschließend einige Hilfsaussagen für das Kapitel 4 nachgewiesen werden.

Lemma 5: Sei $z = x + iy$. Für alle $x \geq 1$ gilt

$$(56) \quad \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \right| \leq \frac{11}{3} + \frac{\log(1+x^2)}{2} + \frac{\log(1+y^2)}{2}.$$

Für alle $x \notin \mathbb{Z}$ gilt mit $\langle x \rangle := \min_{n \in \mathbb{Z}} |x+n|$ die Abschätzung

$$(57) \quad \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \right| \leq \frac{9}{2} + \frac{1}{\langle x \rangle (1 - \langle x \rangle)} + 2 \log(2 + |x|) + \frac{\log(1+y^2)}{2}.$$

Schließlich gilt für alle $x > 0$

$$(58) \quad \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \leq \frac{\Gamma'}{\Gamma}(x) + \frac{y^2}{x|z|^2} + \log \frac{|z|}{x}.$$

Beweis von (56): Für $x = \Re z \geq 1$ gilt $\sqrt{n^2 + |z|^2} \leq |n+z| \leq n+|z|$, also

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+z} \right| = \frac{|z|}{n|n+z|} \leq \frac{|z|(n+|z|)}{n|n+z|^2} \leq \frac{|z|(n+|z|)}{n(n^2+|z|^2)}$$

Aus (55) folgt damit unmittelbar die Ungleichung

$$\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \right| \leq \gamma + \frac{1}{|z|} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|z|}{n^2 + |z|^2} + \frac{|z|^2}{n(n^2 + |z|^2)} \right).$$

Dabei ergibt sich mit Hilfe der Substitution $s = \frac{t}{|z|}$ die Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|}{n^2 + |z|^2} \leq \int_0^{\infty} \frac{|z|}{t^2 + |z|^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+s^2} ds = \left[\arctan s \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2},$$

und die Substitution $s = \frac{|z|}{t}$ mit Vertauschen der Integrationsgrenzen liefert

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z|^2}{n(n^2 + |z|^2)} \leq \int_1^{\infty} \frac{|z|^2}{t(t^2 + |z|^2)} dt = \int_0^{|z|} \frac{s}{1+s^2} ds = \frac{\log(1+|z|^2)}{2}.$$

Zusammen mit dem Term für $n=1$ folgt also insgesamt

$$\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \right| \leq \gamma + \frac{1}{|z|} + \frac{\pi}{2} + \frac{|z|^2}{1+|z|^2} + \frac{\log(1+|z|^2)}{2}$$

Schließlich gilt wegen $|z| \geq 1$ und $0 \leq (|z| - 1)^3 = |z|^3 - 3|z|^2 + 3|z| - 1$ noch

$$\frac{1}{|z|} + \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} = \frac{|z|^3 + |z|^2 + 1}{|z|^3 + |z|} \leq \frac{|z|^3 + \frac{3|z|^2+1}{2}}{|z|^3 + |z|} \leq \frac{|z|^3 + \frac{|z|^3+3|z|}{2}}{|z|^3 + |z|} = \frac{3}{2}$$

und somit wie gewünscht

$$\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \right| \leq \frac{11}{3} + \frac{\log(1 + x^2 + y^2)}{2} \leq \frac{11}{3} + \frac{\log(1 + x^2)}{2} + \frac{\log(1 + y^2)}{2}. \quad \square$$

Beweis von (57): Im Falle $x \geq 1$ folgt (57) direkt aus (56), denn

$$\log(1 + x^2) \leq \log(1 + 2|x| + x^2) = 2 \log(1 + |x|) \leq 4 \log(2 + |x|).$$

Sei also nun $x < 1$ und $m \in \mathbb{N}$ diejenige natürliche Zahl mit $1 < x + m < 2$. Dann folgt durch Umordnen der absolut konvergenten Reihe aus (55)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \right| &\stackrel{(55)}{=} \left| -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right) \right| \\ &= \left| -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^m \frac{1}{z+n} + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} - \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right) \right| \\ &= \left| -\gamma - \frac{1}{z+m} - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{z+n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+m+n} \right) \right| \\ &\stackrel{(55)}{=} \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z+m) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{z+n} \right| \leq \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z+m) \right| + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{|z+n|} \\ &\leq \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z+m) \right| + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{|x+n|}. \end{aligned}$$

Nach Definition von m gilt $\{|x+m-1|, |x+m-2|\} = \{<x>, 1-<x>\}$ sowie $|x+n| = -x-n > m-2-n$ für $n < m-3$, und somit folgt weiter

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \right| &\leq \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z+m) \right| + \sum_{n=0}^{m-3} \frac{1}{m-2-n} + \frac{1}{<x>} + \frac{1}{1-<x>} \\ &= \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z+m) \right| + \frac{1}{<x> (1-<x>)} + \sum_{n=1}^{m-2} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Dabei ist auf den ersten Term wegen $1 < x + m < 2$ die eben bewiesene Ungleichung (56) anwendbar, während der letzte Term mit Hilfe der Restgliedabschätzung der Exponentialreihe gegen $2 \log m$ abgeschätzt werden kann[†]:

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1 + \frac{2}{n} &\Rightarrow \frac{1}{n} \leq \log \frac{n+2}{n} = \log(n+2) - \log n \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{m-2} \frac{1}{n} \leq \log m + \log(m-1) - \log 2 \leq 2 \log m, \end{aligned}$$

so daß insgesamt wegen $1 + (x+m)^2 \leq 5$ die gewünschte Abschätzung folgt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \right| &\leq \frac{11}{3} + \frac{\log 5}{2} + \frac{\log(1+y^2)}{2} + \frac{1}{\langle x \rangle (1 - \langle x \rangle)} + 2 \log m \\ &\leq \frac{9}{2} + \frac{\log(1+y^2)}{2} + \frac{1}{\langle x \rangle (1 - \langle x \rangle)} + 2 \log m. \end{aligned}$$

Wegen $m < 2 + |x|$ ist damit der Beweis von (57) abgeschlossen. \square

Beweis von (58): Sei nun also $x > 0$. Dann liefert (55) einerseits

$$\begin{aligned} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) &= -\gamma - \Re \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \Re \frac{1}{n+z} \right) \\ &= -\gamma - \Re \frac{x(x-iy)}{x|z|^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \Re \frac{n+x-iy}{|n+z|^2} \right) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(x) &= -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \\ &= -\gamma - \frac{x^2+y^2}{x|z|^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right). \end{aligned}$$

Subtraktion dieser beiden Gleichungen liefert aufgrund der absoluten Konvergenz der auftretenden Reihen

$$\Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(x) + \frac{y^2}{x|z|^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{|n+z|^2} \right).$$

[†] Dies gilt für $m \geq 2$, aber andernfalls verschwindet sowohl die Summe als auch $2 \log m$.

Zum Beweis ist also nur noch die letzte Reihe gegen $\log \frac{|z|}{x}$ abzuschätzen:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{n+x}{|n+z|^2} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n+z|^2 - (n+x)^2}{(n+x)|n+z|^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{(n+x)((n+x)^2 + y^2)} \leq \int_0^{\infty} \frac{y^2}{(t+x)((t+x)^2 + y^2)} dt \\
&= \int_x^{\infty} \frac{y^2}{s(s^2 + y^2)} ds \stackrel{t=y/s}{=} \int_0^{y/x} \frac{t}{1+t^2} dt = \left[\frac{\log(1+t^2)}{2} \right]_0^{y/x} \\
&= \frac{\log(1+y^2/x^2)}{2} = \log \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \log \frac{|z|}{x}. \quad \square
\end{aligned}$$

Im folgenden werden mit Hilfe des soeben bewiesenen Lemmas nun einige Abschätzungen hergeleitet, die in Kapitel 4 Anwendung finden.

Γ 5: Seien $5/6 \leq u \leq 7/6$, $w = u + it$ und $z = -u - 1/2 + iy$. Dann gilt

$$\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{2-z-w}{2} \right) \right| + \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1+z+w}{2} \right) \right| \leq 17 + \log(1+t^2) + \log(1+y^2).$$

Beweis: Wegen $\Re \left(\frac{2-z-w}{2} \right) = \frac{2+u+1/2-u}{2} = \frac{5}{4}$ und $\Re \left(\frac{1+z+w}{2} \right) = \frac{1-u-1/2+u}{2} = \frac{1}{4}$ liefern (56) und (57) die gewünschte Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{2-z-w}{2} \right) \right| + \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1+z+w}{2} \right) \right| \\
&\leq \frac{11}{3} + \frac{\log(1+25/16)}{2} + 2 \frac{\log(1+(t+y)^2)}{2} + \frac{9}{2} + \frac{16}{3} + 2 \log \frac{9}{4} \\
&\leq \frac{11}{3} + \log \frac{41}{16} + \log 2 + \log(1+t^2)(1+y^2) + \frac{9}{2} + \frac{16}{3} + 2 \log \frac{9}{4} \\
&\quad \downarrow \\
&[1+(t+y)^2 = 1+t^2+2ty+y^2 \leq 1+t^2+(t^2y^2+1)+y^2 \leq 2(1+t^2)(1+y^2)] \\
&\leq 17 + \log(1+t^2) + \log(1+y^2). \quad \square
\end{aligned}$$

Γ 6: Seien $5/6 \leq u \leq 7/6$ und $w = u + it$. Dann gilt

$$\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{3-w}{2} \right) \right| + \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{w}{2} \right) \right| \leq 15 + \log(1+t^2).$$

Beweis: Nach (56) und (57) gilt wegen $\frac{11}{12} \leq \frac{3-u}{2} \leq \frac{13}{12}$ und $\frac{5}{12} \leq \frac{u}{2} \leq \frac{7}{12}$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{3-w}{2} \right) \right| + \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{w}{2} \right) \right| \\ & \leq \frac{11}{3} + \frac{\log \left(1 + \frac{169}{144} \right)}{2} + \log(1+t^2) + \frac{9}{2} + \frac{1}{\frac{u}{2}(1-\frac{u}{2})} + 2 \log \left(2 + \frac{|u|}{2} \right) \\ & \leq \frac{11}{3} + \frac{1}{2} \log 3 + \log(1+t^2) + \frac{9}{2} + 4 + 2 \log(31/12) \\ & \downarrow \\ & \left[\text{Die durch } g(x) := x(1-x) \text{ definierte Funktion nimmt in } [5/12; 7/12] \right. \\ & \quad \left. \text{das Minimum auf dem Rand an mit } g(5/12) = g(7/12) = 144/35. \right] \\ & \leq 15 + \log(1+t^2). \end{aligned}$$

□

Γ 7: Seien $s_0 = 5/6 + it$ und $s = 7/6 + it$. Dann gilt

$$\frac{1}{2} \int_{s_0}^s \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{w+1}{2} \right) dw \leq \frac{1}{8} \log(1+t^2).$$

Beweis: Nach (58) gilt mit $w = u + it$, also $\frac{5}{6} \leq u \leq \frac{7}{6}$:

$$\begin{aligned} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{w+1}{2} \right) & \leq \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{u+1}{2} \right) + \frac{\left(\frac{t}{2} \right)^2}{\frac{u+1}{2} \left(\left(\frac{u+1}{2} \right)^2 + \left(\frac{t}{2} \right)^2 \right)} + \log \frac{\sqrt{\left(\frac{u+1}{2} \right)^2 + \left(\frac{t}{2} \right)^2}}{\frac{u+1}{2}} \\ & = \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{u+1}{2} \right) + \frac{2t^2}{(u+1) \left((u+1)^2 + t^2 \right)} + \log \sqrt{1 + \frac{t^2}{(u+1)^2}} \\ & \leq \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{u+1}{2} \right) + \frac{12}{11} \frac{t^2}{t^2 + 121/36} + \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{36}{121} t^2 \right) \\ & \leq \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{u+1}{2} \right) + \frac{6}{5} \frac{t^2}{t^2 + 25/9} + \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{9}{25} t^2 \right) \\ & \leq \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{u+1}{2} \right) + \frac{3}{4} \log(1+t^2). \\ & \downarrow \\ & \left[\text{Die durch } g(t) := \frac{3}{4} \log(1+t^2) - \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{9}{25} t^2 \right) - \frac{6}{5} \frac{t^2}{t^2 + 25/9} \right. \\ & \quad \left. \text{definierte Funktion nimmt das absolute Minimum im} \right. \\ & \quad \left. \text{Punkt } t = 0 \text{ an mit } g(0) = 0. \right] \end{aligned}$$

Gemäß M 6 auf Seite 105 gilt $\Gamma(13/12) \leq 1 \leq \Gamma(11/12)$ und somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{s_0}^s \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{w+1}{2} \right) dw &\leq \frac{1}{2} \int_{5/6}^{7/6} \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{u+1}{2} \right) + \frac{3}{4} \log(1+t^2) \right) du \\ &\leq \log \frac{\Gamma(13/12)}{\Gamma(11/12)} + \frac{1}{8} \log(1+t^2) \leq \frac{1}{8} \log(1+t^2). \quad \square \end{aligned}$$

Γ 8: Seien $s = 7/6 + it$ und $s_1 = 11/6 + it$. Dann gilt

$$\Re \int_s^{s_1} \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(3-w) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(w-1) \right) dw \leq \frac{1}{2} + 2 \log(1+t^2).$$

Beweis: Nach (58) gilt wegen $u := \Re w \leq 2$ (also $3-u \geq 1$)

$$\begin{aligned} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}(3-w) &\leq \frac{\Gamma'}{\Gamma}(3-u) + \frac{t^2}{(3-u)((3-u)^2+t^2)} + \log \frac{\sqrt{(3-u)^2+t^2}}{3-u} \\ &\leq \frac{\Gamma'}{\Gamma}(3-u) + \frac{t^2}{1+t^2} + \frac{\log(1+t^2)}{2} \leq \frac{\Gamma'}{\Gamma}(3-u) + \frac{3}{2} \log(1+t^2), \end{aligned}$$

denn wegen $\frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$ folgt $\exp \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1 + \frac{1}{2} \frac{t^2}{t^2+1} \leq 1+t^2$ aus der Restgliedabschätzung der Exponentialreihe. Bei Benutzung der Funktionalgleichung der Gammafunktion folgt wegen $u \geq 1$ außerdem

$$\begin{aligned} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}(w-1) &= \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}(w) - \Re \frac{1}{w-1} = \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}(w) - \Re \frac{\bar{w}-1}{|w-1|^2} \leq \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}(w) \\ &\stackrel{(58)}{\leq} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(u) + \frac{t^2}{u(u^2+t^2)} + \log \frac{\sqrt{u^2+t^2}}{u} \\ &\leq \frac{\Gamma'}{\Gamma}(u) + \frac{t^2}{1+t^2} + \frac{\log(1+t^2)}{2} \stackrel{\text{s.o.}}{\leq} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(u) + \frac{3}{2} \log(1+t^2). \end{aligned}$$

Gemäß M 6 auf Seite 105 gilt $\Gamma(\frac{11}{6}) \leq 1$ sowie $\Gamma(\frac{7}{6}) \geq \frac{4}{5}$ und somit insgesamt

$$\begin{aligned} \Re \int_s^{s_1} \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(3-w) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(w-1) \right) dw &\leq \int_{7/6}^{11/6} \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(3-u) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(u) + 3 \log(1+t^2) \right) du \\ &\leq 2 \log \frac{\Gamma(11/6)}{\Gamma(7/6)} + 2 \log(1+t^2) \leq \frac{1}{2} + 2 \log(1+t^2). \quad \square \end{aligned}$$

Γ 9: Seien $s = 7/6 + it$ und $s_1 = 11/6 + it$. Dann gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{X^{-n}}{n!} \int_s^{s_1} \left(\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(2-w+n) \right| + \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(w-n) \right| \right) dw \leq \frac{16}{X^2} + \frac{\log(1+t^2)}{X^2}.$$

Beweis: Mit $u := \Re w$ liefern (56) und (57) wegen $\langle u-n \rangle \in \{u-1, 2-u\}$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(2-w+n) \right| + \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(w-n) \right| \\ & \leq \frac{11}{3} + \frac{\log(1+(2-u+n)^2)}{2} + \frac{\log(1+t^2)}{2} \\ & \quad + \frac{9}{2} + \frac{1}{(u-1)(2-u)} + 2 \log(2+|u-n|) + \frac{\log(1+t^2)}{2} \\ & \leq \frac{49}{6} + \log(1+t^2) + \frac{1}{(u-1)(2-u)} + 2 \log(3-u+n)(2-u+n) \\ & \quad \left[\text{Für } n \geq 2 \text{ gilt } |u-n| = n-u \text{ und } |2-u+n| = 2-u+n. \right. \\ & \quad \left. \left[\text{Ferner ist } \log(1+x^2) \leq \log(1+|x|)^2 = 2 \log(1+|x|). \right] \right] \\ & \leq \frac{49}{6} + \log(1+t^2) + \frac{36}{5} + 2 \log(3-7/6+n)(2-7/6+n) \\ & \quad \left[\text{Die durch } g(u) := (u-1)(2-u) \text{ def. Funktion nimmt in } [7/6, 11/6] \right. \\ & \quad \left. \left[\text{das Minimum auf dem Rand an mit } g(7/6) = g(11/6) = 5/36. \right] \right] \\ & \leq \frac{31}{2} + \log(1+t^2) + 4 \log(n+2). \end{aligned}$$

Damit folgt dann die Behauptung:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{X^{-n}}{n!} \int_s^{s_1} \left(\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(2-w+n) \right| + \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(w-n) \right| \right) dw \\ & \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{X^{-n}}{n!} \frac{2}{3} \left(\frac{31}{2} + \log(1+t^2) + 4 \log(n+2) \right) \\ & \leq \frac{31}{3X^2} + \frac{2}{3X^2} \log(1+t^2) + \frac{16}{3X^2} \leq \frac{16}{X^2} + \frac{\log(1+t^2)}{X^2}. \\ & \quad \left[\text{Die Restgliedabschätzung der Exponentialreihe liefert} \right. \\ & \quad \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{X^{-n}}{n!} \leq \frac{1}{X^2} \text{ und } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{X^{-n} \log(n+2)}{n!} \leq \frac{1}{X} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^{-n}}{n!} \leq \frac{2}{X^2}. \right] \quad \square \end{aligned}$$

Γ 10: Sei $s_2 = \frac{27}{20} + it$. Dann gilt

$$\Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s_2) \leq -\frac{1}{10} + \frac{5}{7} \log(1 + t^2).$$

Beweis: Die Abschätzung (58) sowie M 6 aus Anhang A.5 liefern[§]

$$\begin{aligned} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s_2) &\leq \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{27}{20}\right) + \frac{20}{27t^2 + 729/400} + \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{400}{729}t^2\right) \\ &\stackrel{M6}{\leq} -\frac{1}{10} + \frac{20}{27t^2 + 729/400} + \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{400}{729}t^2\right) \\ &\leq -\frac{1}{10} + \frac{5}{7} \log(1 + t^2). \end{aligned} \quad \square$$

Γ 11: Seien $s_2 = 27/20 + it$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s_2 - n) \right| + \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(2 + n - s_2) \right| \leq 13 + \log(1 + t^2) + 4 \log(n + 2).$$

Beweis: Nach (57) und (56) gilt

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s_2 - n) \right| + \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(2 + n - s_2) \right| \\ &\leq \frac{9}{2} + \frac{1}{\frac{7}{20} \left(1 - \frac{7}{20}\right)} + 2 \log\left(2 + \left|\frac{27}{20} - n\right|\right) + \frac{\log(1 + t^2)}{2} \\ &\quad + \frac{11}{3} + \frac{\log(1 + (2 + n - \frac{27}{20})^2)}{2} + \frac{\log(1 + t^2)}{2} \\ &\stackrel{\downarrow}{\leq} 13 + \log(1 + t^2) + 2 \log\left(n + \frac{27}{20}\right) \left(n + \frac{33}{20}\right) \\ &\quad \left[\text{Es gilt } \left|\frac{27}{20} - n\right| \leq n - \frac{13}{20} \text{ und } \log(1 + x^2) \leq 2 \log(1 + |x|). \right] \\ &\leq 13 + \log(1 + t^2) + 4 \log(n + 2). \end{aligned} \quad \square$$

In Abschnitt A.5 werden mit Computereinsatz noch einige explizite Werte im Zusammenhang mit der Gammafunktion berechnet.

[§] Die durch $g(t) := \frac{5}{7} \log(1 + t^2) - \frac{20}{27t^2 + 729/400} - \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{400}{729}t^2\right)$ definierte Funktion nimmt das absolute Minimum in $t = 0$ an mit $g(0) = 0$.

A.2 Hilfsaussagen über L-Reihen

Es seien $d \in \mathbb{N}$ und χ der zu $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ assoziierte Kronecker-Charakter vom Führer $D \in \mathbb{N}$. Die folgenden Hilfssätze über die logarithmische Ableitung der zugehörigen Dirichletschen L-Reihe werden für den Beweis von Lemma 2 ab Seite 51 benötigt und finden sich zum Beispiel in [Pra57, Seiten 226f], wobei der erste dieser Hilfssätze ein Spezialfall des dortigen Satz 4.2 ist.

Hilfssatz 17: *Es existiert eine Folge $(T_m)_{m \geq 2}$ mit $m < T_m < m+1$ ($m \geq 2$), für die gleichmäßig in $-1 \leq \sigma \leq 2$ gilt:*

$$\frac{L'}{L}(\sigma \pm iT_m, \chi) = \mathcal{O}(\log^2(D T_m)) \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Hilfssatz 18: *In der Halbebene $\Re z \leq -\frac{1}{2}$ gilt:*

$$\frac{L'}{L}(z, \chi) = \mathcal{O}(\log(D(|z| + 2))) \quad \text{für } |z| \rightarrow \infty,$$

falls von dieser Halbebene Kreisscheiben vom Radius $1/4$ um die trivialen Nullstellen $\xi \in -2\mathbb{N}_0 - 1$ ausgenommen werden.

Sei nun E eine elliptische Kurve vom Führer $q \in \mathbb{N}$, für deren Hasse-Weilsche L-Reihe zunächst die zu den obigen Hilfssätzen analogen Resultate formuliert werden. Anwendung finden diese ab Seite 54 beim Beweis von Lemma 3:

Hilfssatz 19: *Es existiert eine Folge $(T_m)_{m \geq 2}$ mit $m < T_m < m+1$ ($m \geq 2$), für die gleichmäßig in $-1 \leq \sigma \leq 2$ gilt:*

$$\frac{L'}{L}(\sigma \pm iT_m, E) = \mathcal{O}(\log^2(q T_m)) \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Dieses Resultat kann analog zu Hilfssatz 17 bewiesen werden (siehe hierzu [Pra57, Seite 226f]), indem für $m \in \mathbb{N}$ untersucht wird, wie viele nicht-triviale Nullstellen $\sigma + it$ mit $|t| \leq m$ die Funktion $L(\cdot, E)$ hat.

Hilfssatz 20: *In der Halbebene $\Re z \leq 0$ gilt:*

$$\frac{L'}{L}(z, E) = \mathcal{O}(\log(q(|z| + 2))) \quad \text{für } |z| \rightarrow \infty,$$

falls von dieser Halbebene Kreisscheiben vom Radius $1/4$ um die trivialen Nullstellen $\xi \in -\mathbb{N}_0$ ausgenommen werden.

Beweis: Der Beweis erfolgt analog zu dem von Hilfssatz 18 (siehe [Pra57, Seite 227f]). Wegen der bekannten Identität $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ geht die

Funktionalgleichung (13) (siehe Seite 16) im Fall $\varepsilon(E) = +1$ über in

$$-\frac{L'}{L}(z, E) = \frac{L'}{L}(2-z, E) + \log \frac{q_N}{4\pi^2} + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(2-z) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-z) - \cot(\pi z).$$

Im Fall $\varepsilon(E) = -1$ ergibt sich eine bis auf die Vorzeichen und den konstanten Term identische Gleichung. Nun gilt für $\Re z \leq 0$ nach Satz 10 auf Seite 17

$$\left| \frac{L'}{L}(2-z, E) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_E(n)|}{n^2} = \mathcal{O}(1).$$

Weiter ergibt sich (siehe [Pra57, Seite 228]) aufgrund der Stirlingschen Formel

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(2-z) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-z) = \mathcal{O}(\log |2-z| + \log |1-z|) = \mathcal{O}(\log(|z|+2)).$$

Schließlich folgt noch

$$\cot(\pi z) = i + \frac{2i}{e^{2\pi iz} - 1} = \mathcal{O}(1),$$

denn $e^{2\pi iz}$ hat Periode 1 und in $-1/2 < \Re z \leq 1/2$ gilt $|e^{2\pi iz} - 1| \geq c > 0$, falls die Kreisscheibe mit Radius $1/4$ um 0 ausgeschlossen ist. \square

Das folgende Ergebnis wird in den Abschnitten 3.6 und 4.2 verwendet:

Hilfssatz 21: Für $|t| \rightarrow \infty$ gilt

$$L(\sigma + it, E) = \begin{cases} \mathcal{O}(1) & \text{falls } \sigma \geq 2, \\ \mathcal{O}(|t|^{1-2\sigma}) & \text{falls } \sigma \leq 0, \\ \mathcal{O}(|t|^{1-\sigma/2}) & \text{falls } 0 \leq \sigma \leq 2. \end{cases}$$

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu [Tit86, Seite 95f]. Definiere für $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\mu(\sigma) := \inf \{a \in \mathbb{R} : L(\sigma + it, E) = \mathcal{O}(|t|^a)\}.$$

Gemäß [Tit39, Seite 299] ist $\mu(\sigma)$ konvex und nicht-negativ. Für $\sigma > 3/2$ ist $L(\sigma + it, E)$ durch eine absolut konvergente Dirichlet-Reihe gegeben, so daß $L(\sigma + it, E)$ für $\sigma \geq 2$ beschränkt ist und daher $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma \geq 2$ gilt. Mit Hilfe der Funktionalgleichung folgt daraus unter Benutzung der Stirlingschen Formel $\mu(\sigma) = 1 - 2\sigma$ für $\sigma \leq 0$. Die Konvexität von $\mu(\sigma)$ liefert dann $\mu(\sigma) \leq 1 - \sigma/2$ für $0 \leq \sigma \leq 2$. \square

A.3 Eine Restgliedabschätzung

Die folgende Restgliedabschätzung einer Reihe mit starkem Konvergenzverhalten wird für den Beweis des Hauptresultates dieser Arbeit in Kapitel 5 benötigt.

Lemma 6: *Definiere für reelle Zahlen $X > 0$*

$$\mathcal{H}(X) := \sum_{n=1000}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{2/3} \log n} e^{-n/X}.$$

Dann gilt

$$\mathcal{H}(X) \leq \frac{3}{7} X^{1/3} + \frac{1}{9}$$

sowie speziell

$$\mathcal{H}(557) \leq \frac{9}{89} \quad \text{und} \quad \mathcal{H}(5000) \leq \frac{9}{4}.$$

Beweis: Die Abschätzungen für $\mathcal{H}(557)$ sowie $\mathcal{H}(5000)$ werden in M3 aus Anhang A.5 mit Computereinsatz nachgewiesen. Für den allgemeinen Fall betrachte die beiden Funktionen

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \quad \text{und} \quad g(t) := \frac{e^{-t/X}}{t^{2/3} \log t} \quad (t > 1).$$

Mit Hilfe der Transformationsformel für das Riemann-Stieltjes-Integral (siehe [Heu80, Seite 489ff]) ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X) &= \sum_{n=1000}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{2/3} \log n} e^{-n/X} = \sum_{n=1000}^{\infty} \frac{e^{-n/X}}{n^{2/3} \log n} (\psi(n) - \psi(n-1)) \\ &= \int_{1000}^{\infty} \frac{e^{-t/X}}{t^{2/3} \log t} d\psi(t) = \left[g(t) \psi(t) \right]_{1000}^{\infty} - \int_{1000}^{\infty} \psi(t) dg(t). \end{aligned}$$

Nach [RS62, Seite 71] gilt dabei $\psi(x) \leq \frac{16}{15}x$ für $x \geq 1$. Da außerdem die Funktion g monoton fallend ist, folgt

$$\begin{aligned} \int_{1000}^{\infty} \psi(t) dg(t) &= \sum_{n=1000}^{\infty} \psi(n) (g(n) - g(n-1)) \geq \sum_{n=1000}^{\infty} \frac{16}{15} n (g(n) - g(n-1)) \\ &= \frac{16}{15} \int_{1000}^{\infty} t dg(t) = \frac{16}{15} \left[t g(t) \right]_{1000}^{\infty} - \frac{16}{15} \int_{1000}^{\infty} g(t) dt. \end{aligned}$$

Mit Maple® 6.01 kann $\psi(1000) \geq 996$ verifiziert werden:

```
> d:=0:for j from 1 to 200 do for k from 1 to 10 do
  if ithprime(j)^k < 1000 then d:=evalf(d+log(ithprime(j)))
  fi od od:evalf(d);
```

996.6809119

Wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)\psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} tg(t) = 0$ ergibt sich daraus

$$\left[g(t)\psi(t) \right]_{1000}^{\infty} - \frac{16}{15} \left[tg(t) \right]_{1000}^{\infty} = g(1000) \left(\frac{16000}{15} - \psi(1000) \right) \leq \frac{1}{9},$$

und mit M6 aus Anhang A.5 folgt nun insgesamt die Behauptung:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X) &\leq \frac{1}{9} + \frac{16}{15} \int_{1000}^{\infty} \frac{e^{-t/X}}{t^{2/3} \log(t)} dt \leq \frac{1}{9} + \frac{16}{15 \log 1000} \int_{1000}^{\infty} \frac{e^{-t/X}}{t^{2/3}} dt \\ &\leq \frac{1}{9} + \frac{16}{45 \log 10} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t/X}}{t^{2/3}} dt = \frac{1}{9} + \frac{16}{45 \log 10} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} X}{(tX)^{2/3}} dt \\ &= \frac{1}{9} + \frac{16 \Gamma(1/3)}{45 \log 10} X^{1/3} \stackrel{M6}{=} \frac{1}{9} + \frac{3}{7} X^{1/3}. \quad \square \end{aligned}$$

A.4 Uneigentliche Integrale

Neben der expliziten Auswertung zweier uneigentlicher Integrale stellt dieser Abschnitt den folgenden Hilfssatz bereit, der für die Lemmata 2 und 3 in Kapitel 4 von Bedeutung ist. Der Beweis wird mit Hilfe der Mellinschen Umkehrformel geführt und findet sich in [Pra57, Seite 382].

Hilfssatz 22: Sei $g(w)$ durch eine in der Halbebene $\Re w > \sigma_0 > -\infty$ absolut konvergente Dirichlet-Reihe

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(n)}{n^w}$$

gegeben. Dann gilt für $b > \sigma_0$, $y > 0$ und $w \in \mathbb{C}$ die Identität

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(n)}{n^w} e^{-n/y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} g(w+z) \Gamma(z) y^z dz.$$

Die Werte der folgenden Integrale werden in Kapitel 4 auf Seite 60 benötigt.

I 1: *Es gelten die beiden Identitäten*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^2 + 4/9} = \frac{3}{2}\pi \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(1+y^2)}{y^2 + 4/9} = \frac{3}{2}\pi \log \frac{5}{3}.$$

Beweis: Für das erste Integral gilt bekanntermaßen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^2 + 4/9} = \left[\frac{3}{2} \arctan \left(\frac{3}{2} y \right) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{3}{2} \pi.$$

Weiter gilt nach [GR94, Seite 590, 4.295/7]

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(a^2 + b^2 y^2)}{c^2 + g^2 y^2} dx = \frac{\pi}{cg} \log \frac{ag + bc}{g} \quad (a, b, c, g > 0),$$

woraus sich mit $c = 2/3$ und $a = b = g = 1$ unmittelbar auch die zweite Behauptung ergibt. \square

A.5 Computergestützte Abschätzungen

Die Berechnungen in diesem Kapitel wurden mit Maple[®] 6.01 durchgeführt. Das erste Resultat findet beim Beweis von Proposition 2 Anwendung:

M 1: *Es gilt* $2 \log \zeta \left(\frac{4}{3} \right) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \Lambda(n)}{n^{4/3} \log n} e^{-n/500} \leq \frac{3}{19}.$

Beweis: Die Summanden der zu subtrahierenden Reihe sind nur für Primpotenzen von Null verschieden und außerdem nicht-negativ, so daß eine Abschätzung nach oben erzielt wird, indem nur endlich viele Summanden abgezogen werden:

> r := (p, k) -> -exp(-p^k/500) * 2/k/p^(4 * k/3);

$$r := (p, k) \rightarrow -2 \frac{e^{(-\frac{1}{500} p^k)}}{p^{(\frac{4}{3} k)}}$$

> b:= 0: for j from 1 to 239 do for k from 1 to 10 do
if ithprime(j)^k < 1500 then b:= evalf(b + r(ithprime(j), k))
fi od od: evalf(b + 2 * log(Zeta(4/3))), evalf(3/19);

.156908960, .1578947368 \square

Das folgende Ergebnis wird für den Beweis des Hauptsatzes dieser Arbeit in Kapitel 5 (genauer auf den Seiten 76 und 80) verwendet:

$$\mathbf{M\ 2:} \text{ Es gilt } -\log \zeta\left(\frac{7}{6}\right) + \sum_{n=1}^{1000} \frac{\Lambda(n)}{n^{7/6} \log n} \geq -\frac{9}{52}.$$

Beweis: Die Summanden sind nur für Primpotenzen von Null verschieden, so daß folgende Berechnungen die Aussage liefern:

```
> r := (p, k) -> log(p)/p^(7 * k/6)/log(p^k);
```

$$r := (p, k) \rightarrow \frac{\log(p)}{p^{(7/6)k} \log(p^k)}$$

```
> c := 0: for j from 1 to 168 do for k from 1 to 10 do
  if ithprime(j)^k < 1000 then c := evalf(c + r(ithprime(j), k))
  fi od od: evalf(c - log(Zeta(7/6))), evalf(-9/52);
```

-.171286082, -.1730769231

□

Nun werden für Lemma 6 aus Anhang A.3 bzw. für dessen Anwendung in Kapitel 5 die Restglieder $\mathcal{H}(557)$ und $\mathcal{H}(5000)$ ausgewertet:

$$\mathbf{M\ 3:} \text{ Es gelten } \sum_{n=1000}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{2/3} \log n} e^{-n/557} \leq \frac{9}{89} \text{ und } \sum_{n=1000}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{2/3} \log n} e^{-n/5000} \leq \frac{9}{4}.$$

Beweis: Zunächst gilt $e^{-t/557} \leq t^{-4/3}$ für $t \geq 11000$ und somit

$$\begin{aligned} \sum_{n=1000}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{2/3} \log n} e^{-n/557} &\leq \sum_{n=1000}^{11000} \frac{\Lambda(n)}{n^{2/3} \log n} e^{-n/557} + \sum_{n=11000}^{\infty} \frac{n^{-4/3}}{n^{2/3}} \\ &\leq \sum_{n=1000}^{11000} \frac{\Lambda(n)}{n^{2/3} \log n} e^{-n/557} + \int_{11000}^{\infty} \frac{dt}{t^2} \\ &= \sum_{n=1000}^{11000} \frac{\Lambda(n)}{n^{2/3} \log n} e^{-n/557} + \frac{1}{11000}, \end{aligned}$$

so daß die erste Behauptung aus folgenden Maple-Berechnungen folgt:

```
> b := 0: for j from 1 to 1500 do for k from 1 to 13 do
  if (1000 < ithprime(j)^k and ithprime(j)^k < 11000) then
  b := evalf(b + exp(-ithprime(j)^k/570)/k/ithprime(j)^(2 * k/3))
  fi od od: evalf(b + 11000^(-1)), evalf(9/89);
```

.1009760694, .1011235955

Ebenso gilt $e^{-t/5000} \leq 3t^{-1}$ für $t \geq 50000$ und somit

$$\begin{aligned} \sum_{n=1000}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{2/3} \log n} e^{-n/5000} &\leq \sum_{n=1000}^{50000} \frac{\Lambda(n)}{n^{2/3} \log n} e^{-n/5000} + \sum_{n=50000}^{\infty} \frac{3n^{-1}}{n^{2/3}} \\ &\leq \sum_{n=1000}^{50000} \frac{\Lambda(n)}{n^{2/3} \log n} e^{-n/5000} + 3 \int_{50000}^{\infty} \frac{dt}{t^{5/3}} \\ &= \sum_{n=1000}^{50000} \frac{\Lambda(n)}{n^{2/3} \log n} e^{-n/5000} + \frac{9}{2} \cdot 50000^{-2/3}, \end{aligned}$$

so daß die zweite Behauptung analog folgt:

```
> c:= 0: for j from 1 to 5500 do for k from 1 to 13 do
  if (1000 < ithprime(j)^k and ithprime(j)^k < 50000) then
    c:= evalf(c + exp(-ithprime(j)^k/5000)/k/ithprime(j)^(2 * k/3))
  fi od od: evalf(c + 9/2 * 50000^(-2/3)), evalf(9/4);
```

2.170491153, 2.250000000

□

In Kapitel 5 wurde bei den Hilfssätzen 11 und 13 nur das Vorgehen zum Beweis verdeutlicht. Die folgenden, darauf basierenden Computerberechnungen vervollständigen nun diese Beweise:

M 4: *Es gelten die folgenden Abschätzungen:*

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{1000} \Re \frac{\chi(n)}{n^{it} \log n} \left(v(n, \tau(X)) - \frac{2\Lambda(n)}{n^{7/6}} \right) &\leq \frac{87}{20} \\ \text{und } \sum_{n=2}^{1000} \Re \frac{\chi(n)}{n^{it} \log n} \left(w(n, X) - \frac{2\Lambda(n)}{n^{7/6}} \right) &\leq 6. \end{aligned}$$

Beweis: Zunächst werden die ersten 1500 Koeffizienten der Spitzenform F aus Abschnitt 3.2 ermittelt:

```
> g:= (1 - q^(n)) * (1 - q^(2 * n)) * (1 - q^(7 * n)) * (1 - q^(14 * n));
  g := (1 - q^(n))(1 - q^(2n))(1 - q^(7n))(1 - q^(14n))
```

```
> F:= series(q * product(g, n = 1..1500), q = 0, 1500):
```

```
> A := n-> coeff(F, q, n):
```

```
> add(A(n) * q^n, n = 0..17);
```

$$q - q^2 - 2q^3 + q^4 + 2q^6 + q^7 - q^8 + q^9 - 2q^{12} - 4q^{13} - q^{14} + q^{16} + 6q^{17}$$

Diese Koeffizienten sind nach Abschnitt 3.2 gerade die Koeffizienten der Hasse-Weilschen L-Reihe zu der elliptischen Kurve $E: y^2 + xy + y = x^3 + 4x - 6$. Mit diesen sind gemäß Definition in Abschnitt 2.5 auch die in der logarithmischen Ableitung dieser L-Reihe auftretenden Koeffizienten $\lambda_E(n)$ festgelegt:

```
> alpha := p -> A(p)/2 + I * sqrt(p - A(p)^2/4);
      alpha := p -> 1/2 A(p) + I sqrt(p - 1/4 A(p)^2)
> lambda := (p, k) -> if p = 7 then A(7)^k * log(7)
      else (alpha(p)^k + conjugate(alpha(p))^k) * log(p) :
```

Nun werden die in Kapitel 5 auftretenden Bezeichnungen in Maple definiert: Für die erste Abschätzung (vgl. Abschnitt 5.1)

```
> X := 557: tau1 := 0.078: tau2 := 0.080:
> Xv := evalf(X/(X + 1 - 3/4 * X^(2/3))):
> v := (p, k, tau) -> exp(-p^k/X) * (lambda(p, k)/p^(7 * k/6) * X/(X + 1)
      - (log(p)/p^(5 * k/6) - log(p)/p^(7 * k/6)) * Xv
      - lambda(p, k) * log(p^k)/p^(27 * k/20) * tau);
      v := (p, k, tau) -> e^(-p^k/X) * (lambda(p, k) X / (p^(7/6 * k) (X + 1)) - (log(p) / p^(5/6 * k) - log(p) / p^(7/6 * k)) Xv - lambda(p, k) log(p^k) tau / p^(27/20 * k))
> s := (p, k, tau) -> evalf(v(p, k, tau)/k/log(p) - 2/k/p^(7 * k/6));
      s := (p, k, tau) -> evalf(v(p, k, tau) / (k log(p)) - 2 / (k p^(7/6 * k)))
```

und für die zweite Abschätzung (vgl. Abschnitt 5.2)

```
> g := X -> X/(X + 1 - 3/4 * X^(2/3)):
> h := X -> 5/18 * X^(1/6):
> w := (p, k, X) -> exp(-p^k/X) * (lambda(p, k)/p^(7 * k/6) * X/(X + 1)
      - (log(p)/p^(5 * k/6) - log(p)/p^(7 * k/6)) * g(X)
      - lambda(p, k) * log(p^k)/p^(27 * k/20) * h(X));
      w := (p, k, X) -> e^(-p^k/X) * (lambda(p, k) X / (p^(7/6 * k) (X + 1)) - (log(p) / p^(5/6 * k) - log(p) / p^(7/6 * k)) g(X) - lambda(p, k) log(p^k) h(X) / p^(27/20 * k))
> t := (p, k, X) -> evalf(w(p, k, X)/k/log(p) - 2/k/p^(7 * k/6));
      t := (p, k, X) -> evalf(w(p, k, X) / (k log(p)) - 2 / (k p^(7/6 * k)))
```

Damit folgt die erste Abschätzung aus folgenden Computerberechnungen:

```

> V:= 0: for j from 2 to 11 do p:= ithprime (j) :
max11:= maximize (s(p, 1, tau), tau, tau = tau1..tau2) :
min11:= minimize (s(p, 1, tau), tau, tau = tau1..tau2) :
max21:= maximize (s(p, 2, tau), tau, tau = tau1..tau2) :
min21:= minimize (s(p, 2, tau), tau, tau = tau1..tau2) :
max1:= max(-max11 + max21, -max11 + min21,
           -min11 + max21, -min11 + min21) :
max2:= max(max11 + max21, max11 + min21,
           min11 + max21, min11 + min21) :
if (max(-max11/max21/4, -max11/min21/4,
        -min11/max21/4, -min11/min21/4) < -1
or min(-max11/max21/4, -max11/min21/4,
        -min11/max21/4, -min11/min21/4) > 1)
then max3:= 0
else max3:= max(-max11^2/max21/8 - min21,
                -max11^2/max21/8 - max21,
                -max11^2/min21/8 - max21,
                -max11^2/min21/8 - min21,
                -min11^2/max21/8 - min21,
                -min11^2/max21/8 - max21,
                -min11^2/min21/8 - max21,
                -min11^2/min21/8 - min21) fi :
V:= V + max(max1, max2, max3) od:
V:= V + add (max(maximize (s(3, k, tau), tau, tau = tau1..tau2),
                -minimize (s(3, k, tau), tau, tau = tau1..tau2)),
            k = 3..6)
+add (max(maximize (s(5, k, tau), tau, tau = tau1..tau2),
          -minimize (s(5, k, tau), tau, tau = tau1..tau2)),
      k = 3..4)
+add (max(maximize (s(7, k, tau), tau, tau = tau1..tau2),
          -minimize (s(7, k, tau), tau, tau = tau1..tau2)),
      k = 3..3)
+add (max(maximize (s(ithprime (j), 1, tau), tau,
                tau = tau1..tau2),
          -minimize (s(ithprime (j), 1, tau), tau,
                tau = tau1..tau2)),
      j = 12..168);
V:= 4.347759198

```

Ebenso ergibt sich die zweite Abschätzung:

```

> W:= 0 : for j from 2 to 11 do p:= ithprime (j) :
  max11:= maximize (t(p, 1, X), X, X = 5000..infinity) :
  min11:= minimize (t(p, 1, X), X, X = 5000..infinity) :
  max21:= maximize (t(p, 2, X), X, X = 5000..infinity) :
  min21:= minimize (t(p, 2, X), X, X = 5000..infinity) :
  max1:= max(-max11 + max21, -max11 + min21,
             -min11 + max21, -min11 + min21) :
  max2:= max(max11 + max21, max11 + min21,
             min11 + max21, min11 + min21) :
  if (max(-max11/max21/4, -max11/min21/4,
          -min11/max21/4, -min11/min21/4) < -1
  or min(-max11/max21/4, -max11/min21/4,
          -min11/max21/4, -min11/min21/4) > 1)
  then max3:= 0
  else max3:= max(-max11^2/max21/8 - min21,
                  -max11^2/max21/8 - max21,
                  -max11^2/min21/8 - max21,
                  -max11^2/min21/8 - min21,
                  -min11^2/max21/8 - min21,
                  -min11^2/max21/8 - max21,
                  -min11^2/min21/8 - max21,
                  -min11^2/min21/8 - min21) fi :
  W:= W + max(max1, max2, max3) od :
  W:= W + add (max(maximize (t(3, k, X), X, X = 5000..infinity),
                  -minimize (t(3, k, X), X, X = 5000..infinity)),
              k = 3..6)
  +add (max(maximize (t(5, k, X), X, X = 5000..infinity),
            -minimize (t(5, k, X), X, X = 5000..infinity)),
        k = 3..4)
  +add (max(maximize (t(7, k, X), X, X = 5000..infinity),
            -minimize (t(7, k, X), X, X = 5000..infinity)),
        k = 3..3)
  +add (max(maximize (t(ithprime (j), 1, X), X,
                    X = 5000..infinity),
            -minimize (t(ithprime (j), 1, X), X,
                    X = 5000..infinity)),
        j = 12..168);

```

W:= 5.904725538

□

Das folgende Resultat wird im wesentlichen für den Beweis von Theorem 5 ab Seite 40 benötigt:

M 5: *Es gilt $\Omega(E(-7)) \geq 1,00197$. Ferner gilt*

$$\frac{L(1, E(-km))}{\Omega(E(-km))} = \begin{cases} 2 a_k^2(m) & \text{für } k = 7, m \in \{3, 11, 15, 159\}, \\ 2 a_k^2(m) & \text{für } k = 14, m \in \{1, 3, 5, 11, 15, 17, 141, 159\}, \\ a_k^2(m) & \text{für } k = 49, m \in \{1, 11, 15, 141\}, \\ a_k^2(m) & \text{für } k = 98, m \in \{1, 141\}. \end{cases}$$

Beweis: Zunächst werden die Fourierkoeffizienten $a_7(n)$ ($1 \leq n \leq 2000$) der Spitzenform f_7 aus Abschnitt 3.2 ermittelt:

```
> for x from -45 to 45 do for y from -45 to 45 do
  for z from -26 to 26 do
    k:= x^2 + y^2 + 7 * z^2 : l:= x^2 + 2 * y^2 + 4 * z^2 + 2 * y * z :
    a7[k] := a7[k] + 1/2: a7[l] := a7[l] - 1/2: od od od ;
    add(a7[w] * q^w, w = 0..12);
    q + q^2 - 2q^3 - q^4 - 2q^6 + q^7 - q^8 - q^9 + 4q^10 + 2q^11 + 2q^12
```

Die weiteren Berechnungen werden mit dem Maple-Paket `apecs`[¶] durchgeführt:

```
> read apecs: Ein(1, 0, 1, 4, -6); Tw(-7); Om(%);
      curve is C14 = .[1, 0, 1, 4, -6]
      curve is D98 = .[1, 1, 0, 220, 2192]
      the real period = 1.0019771957698767743
```

Damit ist die Aussage über die reelle Periode von $E(-7)$ gezeigt. Nun werden für die Quotienten aus $L(E(-km), 1)$ und $\Omega(E(-km))$ mit $k \in \{1, 2, 7, 14\}$ Näherungswerte bestimmt:

```
> Q:= proc (N::uneval) ein(C14): tw(-7 * N):
      roha(%): 1/om(%) * fnL(0); end:
> Q(3), Q(11); Q(15), Q(159);
      7.9999656080110718936, 8.0000730757658482616
      8.0001084424672295080, 128.00167236924355772
```

[¶] Dieses Paket steht unter <ftp://ftp.math.mcgill.ca/pub/apecs> als Download zur Verfügung. Wesentlich genauere Näherungswerte können mit dem PARI/GP-Paket der Universität Bordeaux erzielt werden (siehe <ftp://megrez.math.u-bordeaux.fr/pub/pari>).

Eine exakte Berechnung dieser Werte ist gemäß [Cre95] mit Hilfe von Modulsymbolen möglich. Auf diese aufwendige Möglichkeit wird hier jedoch verzichtet: Die Quotienten sind nach Seite 41 bzw. [Cre92, Seiten 21f] rational mit Nenner kleinergleich 24, so daß mit obigen Näherungswerten auf diese geschlossen werden kann. Durch Vergleich mit den oben berechneten Fourierkoeffizienten von f_7 folgt im Fall $k = 7$ die Behauptung:

$$\begin{aligned} > 2 * a_7[3]^2, 2 * a_7[11]^2, 2 * a_7[15]^2, 2 * a_7[159]^2; \\ & \quad 8, 8, 8, 128 \end{aligned}$$

Nachstehend finden sich die analogen Überlegungen für $k \in \{14, 49, 98\}$. Dabei ist zu beachten, daß die Fourierkoeffizienten von f_k mit Hilfe von Theorem 1 auf Seite 21 aus denen von f_7 gewonnen werden können:

$$\begin{aligned} > Q := \text{proc}(N::\text{uneval}) \text{ ein}(C14): \text{tw}(-14 * N): \\ & \quad \text{roha}(\%): 1/\text{om}(\%) * \text{fnL}(0); \text{end:} \\ > Q(1), Q(3); Q(5), Q(11); Q(15), Q(17); Q(141), Q(159); \\ & \quad 2.0000039752878455046, 7.9999631511433765068 \\ & \quad 31.999968827123726359, 32.000021364548222733 \\ & \quad 7.9999687026348236305, 7.9998429197021680852 \\ & \quad 128.00960845637816369, 31.998020463580547312 \\ > 2 * a_7[2]^2, 2 * a_7[6]^2, 2 * a_7[10]^2, 2 * a_7[22]^2, \\ & \quad 2 * a_7[30]^2, 2 * a_7[34]^2, 2 * a_7[282]^2, 2 * a_7[318]^2; \\ & \quad 2, 8, 32, 32, 8, 8, 128, 32 \end{aligned}$$

Nach Theorem 1 gilt $a_{14}(m) = a_7(2m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$, so daß der Vergleich von $2a_7(2m)^2$ mit dem entsprechenden Quotienten $Q(m)$ die Behauptung im Fall $k = 14$ liefert. Für $E(-49m) = E(-m)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} > Q := \text{proc}(N::\text{uneval}) \text{ ein}(C14): \text{tw}(-N): \\ & \quad \text{roha}(\%): 1/\text{om}(\%) * \text{fnL}(0); \text{end:} \\ > Q(1), Q(11); Q(15), Q(141); \\ & \quad 1.0000029994984424636, 3.9999895020276417668 \\ & \quad 4.0000333266893703087, 16.000307979835704250 \\ > a_7[7]^2, a_7[77]^2, a_7[105]^2, a_7[987]^2; \\ & \quad 1, 4, 4, 16 \end{aligned}$$

Wegen $a_{49}(m) = a_7(7m)$ ist damit auch der Fall $k = 49$ bewiesen.

Entsprechend ergibt sich aus $a_{98}(m) = a_7(14m)$ und $E(-98m) = E(-2m)$ auch der Fall $k = 98$:

```
> Q:= proc (N::uneval) ein(C14): tw(-2 * N):
      roha(%): 1/om(%) * fnL(0); end:
> Q(1), Q(141);
      1.0000026980037513520, 16.000251548680629739
> a7[14]^2, a7[1974]^2;
      1, 16
```

Insgesamt ist damit nun der Beweis von M5 erbracht. \square

Abschließend werden nun noch einige explizite Werte im Zusammenhang mit der Gammafunktion sowie der Riemannschen Zeta-Funktion berechnet, die an verschiedenen Stellen dieser Arbeit benötigt werden:

M 6: *Es gelten die folgenden Abschätzungen:*

$$\begin{aligned} \Gamma(1/3) &\leq 11/4, & \Gamma(11/6) &\leq 1, & \Gamma(-27/20) &\leq 3, \\ \Gamma(2/3) &\leq 3/2, & \Gamma(13/12) &\leq 1, & \log \Gamma(7/6) &\leq -3/40, \\ \Gamma(7/6) &\geq 4/5, & \Gamma(11/12) &\geq 1, & |\Gamma(33/20 + 3i)| &\leq 1/10, \\ \frac{\zeta'}{\zeta}(3/2) &\leq 2, & \frac{\zeta'}{\zeta}(23/20) &\leq 25/4, & \frac{\Gamma'}{\Gamma}(27/20) &\leq -1/10, \\ \log \zeta(4/3) &\leq 13/10, & \Gamma(-7/6) &\leq 6. \end{aligned}$$

Beweis: Die Berechnungen werden wieder mit Maple® 6.01 durchgeführt:

```
> evalf(GAMMA(1/3)), evalf(GAMMA(2/3)), evalf(GAMMA(7/6)),
  evalf(abs(Zeta(1,3/2)/Zeta(3/2))), evalf(log Zeta(4/3));
      2.678938537, 1.354117939, .9277193336, 1.505235356, 1.281194298
> evalf(GAMMA(11/6)), evalf(GAMMA(13/12)), evalf(GAMMA(11/12)),
  evalf(abs(Zeta(1,23/20)/Zeta(23/20))), evalf(GAMMA(-7/6)),
      .9406558583, .9582856816, 1.055546565, 6.116467542, 5.805190440
> evalf(GAMMA(-27/20)), evalf(log(GAMMA(7/6)));
  evalf(abs(GAMMA(33/20 + 3 * I))), evalf(Psi(27/20));
      2.930783284, -.07502603418, .081415105989, -.113928013  $\square$ 
```

A.6 Abschätzungen für $\delta(X)$ und $\gamma(X)$

In diesem Abschnitt werden für einige Funktionen mit Computereinsatz obere Schranken bestimmt, die in den Kapiteln 4 und 5 benötigt werden. Dabei wird Version 3.0 von MATHEMATICA[®] benutzt.

$$\mathbf{D\ 1:} \text{ Für } X \geq 500 \text{ gilt } \max_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{1/3}^{2/3} X^{-u} |\Gamma(-u + iy)| du \cdot \frac{2}{\log \frac{y^2 + 4/9}{y^2 + 1/9}} \right\} \leq \frac{3}{4X^{1/3}}.$$

Beweis: Zunächst gilt wegen der Restgliedabschätzung der Exponentialreihe

$$\exp\left(\frac{2}{9y^2 + 1}\right) \leq \frac{4}{9y^2 + 1} \leq \frac{y^2 + 4/9}{y^2 + 1/9}, \text{ also } \log \frac{y^2 + 4/9}{y^2 + 1/9} \geq \frac{2}{9y^2 + 1}.$$

Daher folgt für $|y| \geq 3$ mit Hilfe der Funktionalgleichung $\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z)$

$$\begin{aligned} & \int_{1/3}^{2/3} X^{-u} |\Gamma(-u + iy)| du \cdot \left(\frac{1}{2} \log \frac{y^2 + 4/9}{y^2 + 1/9}\right)^{-1} \\ & \leq (9y^2 + 1) \int_{1/3}^{2/3} X^{-u} \frac{|\Gamma(2 - u + iy)|}{|(-u + iy)(1 - u + iy)|} du \\ & \leq (9y^2 + 1) \int_{1/3}^{2/3} X^{-u} \frac{|\Gamma(2 - u + 3i)|}{|\Re(-u + iy)(1 - u + iy)|} du \\ & \stackrel{\Gamma_1}{\leq} (9y^2 + 1) \int_{1/3}^{2/3} X^{-u} \frac{\frac{1}{3} |\Gamma(2 - u)|}{u(1 - u) + y^2} du \\ & = \frac{9y^2 + 1}{3} \int_{1/3}^{2/3} X^{-u} \frac{u(1 - u) |\Gamma(-u)|}{u(1 - u) + y^2} du \\ & \leq \frac{9y^2 + 1}{3} \int_{1/3}^{2/3} X^{-u} \frac{|\Gamma(-u)|}{4y^2 + 1} du \\ & \downarrow \\ & \left[\text{Die durch } h(u) := u(1 - u) \text{ definierte Funktion hat das} \right. \\ & \quad \left. \text{absolute Maximum in } u = 1/2 \text{ mit } h(1/2) = 1/4. \right] \\ & \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} \left(\frac{X}{500}\right)^{-1/3} \int_{1/3}^{2/3} 500^{-u} |\Gamma(-u)| du, \end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck wie gewünscht abgeschätzt werden kann:

```
In[1] := N[1/3 * 9/4 * 500^(1/3)
          *Integrate [500^(-u) * Abs [Gamma [-u]], {u, 1/3, 2/3}], 10]
Out[1] = 0.3934764500
```

Für $|y| < 3$ gilt

$$\int_{1/3}^{2/3} X^{-u} |\Gamma(-u + iy)| du \cdot \left(\frac{1}{2} \log \frac{y^2 + 4/9}{y^2 + 1/9} \right)^{-1}$$

$$\leq \left(\frac{X}{500} \right)^{-1/3} \int_{1/3}^{2/3} 500^{-u} |\Gamma(-u + iy)| du \cdot \left(\frac{1}{2} \log \frac{y^2 + 4/9}{y^2 + 1/9} \right)^{-1},$$

wobei auch dieser Ausdruck gegen $\frac{3}{4X^{1/3}}$ abgeschätzt werden kann:

```
In[2] := f1[y_] := 500^(1/3) * 2/Log [(y^2 + 4/9)/(y^2 + 1/9)]
          *Integrate [500^(-u) * Abs [Gamma [-u + y * I]], {u, 1/3, 2/3}]
In[3] := FindMinimum [-f1[y], {y, -3, 3}]
Out[3] = {-0.740666; {y -> 2.37045 * 10^-6}} □
```

D 2: Es gilt $\max_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \left| \Gamma \left(-\frac{7}{20} + iy \right) \right| \cdot \left(\frac{7}{20} + \frac{20}{7} y^2 \right) \right\} \leq \frac{7}{4}$.

Beweis: Die Funktionalgleichung der Gammafunktion liefert für $|y| \geq 3$

$$\left| \Gamma \left(-\frac{7}{20} + iy \right) \right| \cdot \left(\frac{7}{20} + \frac{20}{7} y^2 \right) = \frac{\left| \Gamma \left(\frac{33}{20} + iy \right) \right|}{\left| -\frac{7}{20} + iy \right| \cdot \left| \frac{13}{20} + iy \right|} \left(\frac{7}{20} + \frac{20}{7} y^2 \right)$$

$$\leq \frac{\left| \Gamma \left(\frac{33}{20} + iy \right) \right|}{\frac{91}{400} + y^2} \left(\frac{7}{20} + \frac{20}{7} y^2 \right) \leq \frac{20}{7} \cdot \frac{\frac{49}{400} + y^2}{\frac{91}{400} + y^2} \cdot \left| \Gamma \left(\frac{33}{20} + 3i \right) \right|$$

$$\stackrel{\text{M6}}{\leq} \frac{20}{7} \cdot 1 \cdot \frac{1}{10} \leq \frac{2}{7} \leq \frac{7}{4}.$$

Für $|y| < 3$ gilt diese Abschätzung ebenfalls:

```
In[4] := f2[y_] := (7/20 + 20/7 * y^2) * Abs [Gamma [-7/20 + y * I]]
In[5] := FindMinimum [-f2[y], {y, -3, 3}]
Out[5] = {-1.7497; {y -> 0.607864}} □
```

D 3: Für $X \geq 5000$ gilt $\max_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \left(\frac{7}{20} + \frac{20}{7} y^2 \right) \int_{1/6}^{5/6} X^{-u} |\Gamma(-u + iy)| du \right\} \leq \frac{2}{9X^{1/6}}$.

Beweis: Analog zum Beweis von D 1 ergibt sich für $|y| \geq 2$ mit Hilfe der Funktionalgleichung der Gammafunktion sowie der Abschätzung $\Gamma 2$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{7}{20} + \frac{20}{7} y^2 \right) \int_{1/6}^{5/6} X^{-u} |\Gamma(-u + iy)| du \\
 &= \frac{7}{20} \left(1 + \frac{400}{49} y^2 \right) \int_{1/6}^{5/6} X^{-u} \frac{|\Gamma(2 - u + iy)|}{|-u + iy| \cdot |1 - u + iy|} du \\
 &\leq \frac{7}{20} (1 + 9y^2) \int_{1/6}^{5/6} X^{-u} \frac{|\Gamma(2 - u + iy)|}{u(1 - u) + y^2} du \\
 &\stackrel{\Gamma 2}{\leq} \frac{7}{20} (1 + 9y^2) \int_{1/6}^{5/6} X^{-u} \frac{\frac{2}{5} |\Gamma(2 - u)|}{u(1 - u) + y^2} du \\
 &= \frac{7}{50} (1 + 9y^2) \int_{1/6}^{5/6} X^{-u} \frac{u(1 - u) |\Gamma(-u)|}{u(1 - u) + y^2} du \\
 &\leq \frac{7}{50} \cdot \frac{9}{4} \left(\frac{X}{5000} \right)^{-1/6} \int_{1/6}^{5/6} 5000^{-u} |\Gamma(-u)| du,
 \end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck wie gewünscht abgeschätzt werden kann:

```
In[6] := N[7/50 * 9/4 * 5000^(1/6)
*Integrate [5000^(-u) * Abs [Gamma [-u]], {u, 1/6, 5/6}], 10]
```

```
Out[6] = 0.1840469941
```

Für $|y| \leq 2$ gilt

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{7}{20} + \frac{20}{7} y^2 \right) \int_{1/6}^{5/6} X^{-u} |\Gamma(-u + iy)| du \\
 &\leq \left(\frac{X}{5000} \right)^{-1/6} \left(\frac{7}{20} + \frac{20}{7} y^2 \right) \int_{1/6}^{5/6} 5000^{-u} |\Gamma(-u + iy)| du,
 \end{aligned}$$

wobei auch hier der letzte Ausdruck gegen $\frac{2}{9X^{1/6}}$ abgeschätzt werden kann:

```
In[7] := f3[y_] := 5000^(1/6) * (7/20 + 20/7 * y^2)
      * Integrate [5000^(-u) * Abs [Gamma [-u + y * I]], {u, 1/6, 5/6}]
```

```
In[8] := FindMinimum [-f3[y], {y, -3, 3}]
```

```
Out[8] = {-0.206495; {y -> -0.587264}}
```

□

D 4: Es gilt $\beta(557) \geq \frac{33}{23} \frac{557^{-1/6}}{\log 557}$ und $\alpha(557) \leq \frac{23}{16} \frac{557^{-1/6}}{\log 557}$.

Beweis: Der Wert von $\beta(557)$ kann elementar berechnet werden:

```
In[9] := betax = -7/20 * 557^(7/20)/(Gamma [13/20] + 557^(7/20))
      * Integrate [557^(1-u) * Gamma [1-u], {u, 7/6, 11/6}]
```

```
Out[9] = -\frac{7 \cdot 557^{7/20} \int_{7/6}^{11/6} 557^{1-u} \Gamma[1-u] du}{2 \cdot 10^{13/20} (557^{7/20} + \Gamma[\frac{13}{20}])}
```

```
In[10] := N[betax, 10]
```

```
Out[10] = 0.0791585009
```

```
In[11] := N[33/23 * 557^(-1/6)/Log[557], 10]
```

```
Out[11] = 0.0791134369
```

Die obere Schranke für $\alpha(557)$ ergibt sich aus folgenden Berechnungen:

```
In[12] := f4[y_] := Abs [Integrate [557^(-u) * Gamma [-u + y * I],
      {u, 1/6, 5/6}] - betax/557^(7/20) * Gamma [-7/20 + y * I]]
      *(7/20 + 20/7 * y^2)
```

```
In[13] := FindMinimum [-f4[y], {y, -10, 10}]
```

```
Out[13] = {-0.0791585; {y -> -7.8534 * 10^-9}}
```

```
In[14] := N[23/16 * 557^(-1/6)/Log[557], 10]
```

```
Out[14] = 0.0792632730
```

□

A.7 Ermittlung der quadratfreien Ausnahmen bis $2 \cdot 10^{12}$

Gemäß Theorem 2 aus Abschnitt 3.1 lassen – abgesehen von der Zahl 14 – alle quadratfreien Ausnahmen der Kaplansky-Form $\phi_{7,1}$ bei Division durch 12 einen Rest 3, 6, 7 oder 10. Außerdem sind nach dem dortigen Satz 11 die Restklassen 21, 35 und 42 modulo 49 unzulässig für diese Form. Somit liegen alle zu 7 primen quadratfreien Ausnahmen der Kaplansky-Form in

$$\mathcal{A} := 84\mathbb{N}_0 + \{3, 15, 19, 27, 31, 39, 43, 51, 55, 67, 75, 79\}$$

$$\text{und } \mathcal{B} := 84\mathbb{N}_0 + \{6, 10, 18, 22, 30, 34, 46, 54, 58, 66, 78, 82\},$$

während alle nicht zu 7 primen quadratfreien Ausnahmen bis auf $N = 14$ in

$$\mathcal{C} := 588\mathbb{N}_0 + \{7, 63, 175, 259, 399, 567\}$$

$$\text{und } \mathcal{D} := 588\mathbb{N}_0 + \{126, 154, 210, 322, 406, 546\}$$

enthalten sind. Für die Ausnahmen von $\phi_{7,2}$ kommen nach Theorem 2 sogar nur die Reste 3 und 6 modulo 12 in Frage, so daß für diese Form entsprechend weniger Restklassen modulo 84 bzw. 588 zu untersuchen sind.

Im ersten Schritt wurden mit Hilfe des in [Rei99, Seiten 100ff] abgedruckten und von William Galway in C geschriebenen Programms `TernaryQuadForm` zunächst alle Elemente von $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ im Bereich bis $2 \cdot 10^{12}$ ermittelt, für die keine Darstellung (x, y, z) durch $\phi_{7,1}$ mit $x^2 + y^2 \leq 10^9$ existiert und die insofern Kandidaten für Ausnahmen dieser Form sind. Um entsprechende Kandidaten auch für $\phi_{7,2}$ zu erhalten, wurde das Problem gemäß Theorem 1 zunächst auf die Diagonalform $\phi_{14,2}$ zurückgeführt – nach einer leichten Modifikation lieferte `TernaryQuadForm` alle zulässigen Zahlen im Bereich bis 10^{12} , die keine Darstellung (x, y, z) durch $\phi_{14,2}$ mit $x^2 + 2y^2 \leq 10^9$ besitzen. Insgesamt ergaben sich in diesem ersten Schritt neben den in Satz 13 genannten noch etwa 75000 weitere mögliche Ausnahmen der Formen $\phi_{7,1}$ oder $\phi_{7,2}$. Die Ausführung des Programms auf einer unter Solaris 2.6 arbeitenden Dual-Prozessor-Sun Ultra 60 mit 1,8 GB RAM und 2 UltraSparc II-Prozessoren à 450 MHz nahm eine Rechenzeit von insgesamt etwa 375 Stunden in Anspruch – aufgeteilt auf 54 Programmmläufe, bei denen jeweils eine der oben aufgeführten Restklassen modulo 84 bzw. 588 auf Darstellbarkeit durch eine der beiden Formen des Kaplansky-Geschlechts untersucht wurde.

Im zweiten Schritt wurden die so ermittelten Kandidaten für Ausnahmen von $\phi_{7,1}$ bzw. $\phi_{7,2}$ in eine Excel-Datei importiert und mit einem selbst entwickelten VBA-Makro^{||} genauer untersucht, wobei für jeden nicht in Satz 13 aufgelisteten Kandidaten eine Darstellung ermittelt wurde. \square

^{||} Es wurde Microsoft[®] Visual Basic 6.0 für Microsoft[®] Excel 2000 verwendet. Die Ausführung auf einem Windows Me-Rechner mit 128 MB RAM sowie einem Pentium III-Prozessor mit einer Taktfrequenz von 1 MHz nahm etwa 500 Stunden in Anspruch.

Literaturverzeichnis

- [Ayo63] Raymond Ayoub, *An introduction to the analytic theory of numbers*, American Mathematical Society, 1963.
- [Bau97] Peter J. Bauer, *Zur Verteilung der Nullstellen der Dirichletschen L -Reihen*, Dissertation, Frankfurt (Main), 1997.
- [BI58] Heinrich Brandt and Oskar Intrau, *Tabellen reduzierter positiver ternärer quadratischer Formen*, Abh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-naturw. Kl. **45**, No. 4 (1958).
- [Cas78] John William Scott Cassels, *Rational quadratic forms*, Academic Press, 1978.
- [Cip83] Barry A. Cipra, *On the Niwa-Shintani theta-kernel lifting of modular forms*, Nagoya Math. J. **91** (1983), 49–117.
- [CO76] Henri Cohen and Joseph Oesterlé, *Dimensions des espaces de formes modulaires*, in *Modular Functions of One Variable VI*, Lecture Notes in Mathematics **627** (1976), 69–78.
- [Con89] J. Brian Conrey, *More than two fifth of the zeros of the Riemann Zeta-function are on the critical line*, J. Reine Angew. Math. **399** (1989), 1–26.
- [Cox89] David A. Cox, *Primes of the form $x^2 + ny^2$* , Wiley, 1989.
- [Cre92] John E. Cremona, *Algorithms for modular elliptic curves*, Cambridge University Press, 1992.
- [Cre95] John E. Cremona, *Modular Symbols and the computation of Modular Elliptic Curves*, Vorlesungsskript für einen Kurs an der Universität Bordeaux, siehe www.maths.nott.ac.uk/personal/jec/papers, Mai 1995.
- [Dav80] Harold Davenport, *Multiplicative number theory*, 2. Auflage, Springer, 1980.
- [DSP90] William Duke and Rainer Schulze-Pillot, *Representation of integers by positive ternary quadratic forms and equidistribution of lattice points on ellipsoids*, Invent. math. **99** (1990), 49–57.

- [Edi00] Bas Edixhoven, *Rational elliptic curves are modular (after Breuil, Conrad, Diamond and Taylor)*, 1999-2000, Séminaire Bourbaki, 52ème année, n° 871.
- [FB95] Eberhard Freitag and Rolf Busam, *Funktionentheorie*, 2. Auflage, Springer, 1995.
- [Gol79] Dorian Goldfeld, *Conjectures on elliptic curves over quadratic fields*, in Number Theory, Carbondale, Lecture Notes in Mathematics **751** (1979), 108–118.
- [GR94] Izrail S. Gradshteyn and Josif M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, 5. Auflage, Academic Press, 1994.
- [Heu80] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, Teubner, 1980.
- [HJ97] John S. Hsia and Michael Jöchner, *Almost strong approximations for definite quadratic spaces*, Invent. math. **129** (1997), 471–487.
- [Hsi81] John S. Hsia, *Regular positive ternary quadratic forms*, Mathematika **28** (1981), 231–238.
- [Iwa97] Henryk Iwaniec, *Topics in classical automorphic forms*, American Mathematical Society, 1997.
- [Jam98] Kevin James, *L-series with nonzero central critical value*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 635–641.
- [Jon67] Burton W. Jones, *The arithmetic theory of quadratic forms*, The Carus Mathematical Monographs No. 10, Wiley, 1967.
- [Kap95] Irving Kaplansky, *The first nontrivial genus of positive definite ternary forms*, Math. Comp. **64** (1995), 341–345.
- [Kel01] James Kelley, *Kaplansky's ternary quadratic form*, Int. J. Math. Math. Sci. **25** (2001), 289–292.
- [Kna92] Anthony W. Knapp, *Elliptic curves*, Princeton University Press, 1992.
- [Kob84] Neal Koblitz, *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Springer-Verlag, 1984.
- [Lan32] Edmund Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 1. Band, 2. Teil, Chelsea Publishing Company, 1932.

- [Leh87] J. Larry Lehmann, *Rational points on elliptic curves with complex multiplication by the ring of integers in $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$* , J. Number Theory **27** (1987), 253–272.
- [Leh92] J. Larry Lehmann, *Levels of positive definite ternary quadratic forms*, Math. Comp. **58** (1992), 399–417.
- [Lit24] John E. Littlewood, *On the Riemann zeta-function*, Proc. London Math. Soc., Ser. 2, **24** (1924), 175–201.
- [Mar77] Aleksei Ivanovich Markushevich, *Theory of functions of a complex variable, Volume 2*, 2. Auflage, Chelsea Publishing Company, 1977.
- [MO97] Yves Martin and Ken Ono, *Eta-quotients and elliptic curves*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3169–3176.
- [Nie65] Niels Nielsen, *Die Gammafunktion*, Chelsea Publishing Company, 1965.
- [Niw75] S. Niwa, *Modular forms of half integral weight and the integral of certain theta functions*, Nagoya Math. J. **56** (1975), 147–162.
- [OS97] Ken Ono and Kannan Soundararajan, *Ramanujan’s ternary quadratic form*, Invent. math. **130** (1997), 415–454.
- [Pra57] Karl Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer, 1957.
- [PRW00] Dingyi Pei, Gerhard Rosenberger, and Xueli Wang, *The eligible numbers of positive definite ternary quadratic forms*, Math. Z. **235** (2000), 479–497.
- [PRW01] Dingyi Pei, Gerhard Rosenberger, and Xueli Wang, *Eisenstein series of $3/2$ weight and eligible numbers of positive definite ternary forms*, Results Math. **39** (2001), 292–319.
- [PW01] Dingyi Pei and Xueli Wang, *Eisenstein series of $3/2$ weight and one conjecture of Kaplansky*, Sci. China Ser. A **44** (2001), 1278–1283.
- [Rei99] Thomas Reinke, *Darstellung ganzer Zahlen durch positiv definite ternäre Formen*, Diplomarbeit, Münster, 1999.
- [Rem91] Reinhold Remmert, *Funktionentheorie II*, Springer, 1991.

- [RS62] John Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. **6** (1962), 64–94.
- [Rud87] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw Hill, 1987.
- [Ser73] Jean-Pierre Serre, *A course in arithmetic*, Springer, 1973.
- [Shi73] Goro Shimura, *On modular forms of half-integral weight*, Ann. Math. **97** (1973), 440–480.
- [Sie66] Carl L. Siegel, *Über die analytische Theorie der quadratischen Formen*, Gesammelte Abhandlungen, Band I, 326–405, Springer, 1966.
- [SP84] Rainer Schulze-Pillot, *Thetareihen positiv definiten quadratischer Formen*, Invent. math. **75** (1984), 283–299.
- [Sto00] Michael Stoll, *Elliptische Kurven II*, Vorlesungsskript für einen Kurs an der Universität Düsseldorf im Wintersemester 2000/2001, siehe www.math.uni-duesseldorf.de/~stoll, 2000.
- [Stu82] Jacob Sturm, *Theta series of weight 3/2*, J. Number Theory **14** (1982), 353–361.
- [Tit39] Edward C. Titchmarsh, *The theory of functions*, 2nd ed., Oxford University Press, 1939.
- [Tit86] Edward C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann Zeta-function*, 2nd ed., rev. by D. R. Heath-Brown, Oxford University Press, 1986.
- [Wal81] Jean-Loup Waldspurger, *Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier*, J. Math. Pures Appl. **60** (1981), 375–484.
- [Wat60] George L. Watson, *Integral quadratic forms*, Cambridge University Press, 1960.

THOMAS REINKE

geboren am 9. Mai 1975 in Rheine

Persönliche Angaben

Familienstand	ledig
Staatsangehörigkeit	deutsch
Konfession	römisch-katholisch
Eltern	Hermann Reinke und Hildegard Reinke, geb. Schipper

Ausbildung

08/1981 - 06/1985	Ludgeri-Grundschule Neuenkirchen
08/1985 - 06/1994	Arnold-Janssen-Gymnasium Neuenkirchen Abitur am 1. Juni 1994
09/1994 - 11/1999	Westfälische Wilhelms-Universität Münster Diplom im Fach Mathematik am 4. November 1999

Zivildienst

02/2000 - 12/2000	Turnverein Jahn Rheine 1885 e. V.
-------------------	-----------------------------------

Tätigkeiten

10/1996 - 09/1999	Studentische Hilfskraft am Mathematischen Institut der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
12/1999 - 01/2000	Praktikum bei der Westfälischen Provinzial Lebens- versicherungsanstalt
04/2000 - 07/2001	Wissenschaftliche Hilfskraft am Fachbereich Mathe- matik der FernUniversität Hagen
seit 01/2001	Mathematiker bei der Westfälischen Provinzial Le- bensversicherung AG

Beginn der Dissertation

09/2000	Betreuung durch Herrn Prof. Dr. Meinhard Peters
---------	---

