

Urs Hackstein

Prinzipalbündel auf p -adischen Kurven und
Paralleltransport

–2006–

Reine Mathematik

Prinzipalbündel auf p-adischen Kurven und Paralleltransport

Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der
Naturwissenschaften im Fachbereich Mathematik und Informatik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von

Urs Hackstein
aus Köln
–2006–

Dekan:	Prof. Dr. Joachim Cuntz
Erster Gutachter:	Prof. Dr. Christopher Deninger
Zweite Gutachterin:	Prof. Dr. Annette Werner (Universität Stuttgart)
Tag der mündlichen Prüfung:	15. Dezember 2006
Tag der Promotion:	31. Januar 2007

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
1 Präliminarien	13
1.1 Torseure	13
1.2 Verschiedene Kategorien von Überdeckungen	19
1.3 Das étale Fundamentalgruppoid und Faserfunktoren	29
2 Paralleltransport für Prinzipalbündel	33
2.1 Konstruktion des Funktors $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}(G) \rightarrow \text{Rep}_{\pi_1(U)}(G(\mathfrak{o}))$	33
2.2 Ausdehnung auf Prinzipalbündel über $X_{\mathbb{C}_p}$	46
2.3 Verkleben der Funktoren ρ_P	49
2.4 Funktorialitäten und Vergleich mit dem Vektorbündelfall	51
3 Charakterisierung der Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}(G)$	65
3.1 Reduktion auf die spezielle Faser	65
3.2 Trivialisierbarkeit étaler G -Torseure	72
3.3 Semistabilität von Prinzipalbündeln	76
3.4 Der Grad eines Torseurs	84
3.5 Zusammenhänge zwischen Semistabilität und Trivialisierbarkeit	87
3.6 Anwendung auf die Charakterisierung der Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}(G)$	88
4 Prinzipalbündel auf $X_{\mathbb{C}_p}$ und Paralleltransport	97
4.1 Potentiell streng semistabile Reduktion und Paralleltransport	97
4.2 Offene Fragen	103
Literatur	105

Einleitung

Auf einer kompakten Riemannschen Fläche induziert jede endlich-dimensionale komplexe Darstellung der Fundamentalgruppe ein flaches Vektorbündel und somit ein holomorphes Vektorbündel. Nach einem klassischen Resultat von André Weil wird genauer ein holomorphes Vektorbündel auf einer Riemannschen Fläche genau dann durch eine Darstellung der Fundamentalgruppe gegeben, wenn jede seiner unzerlegbaren Komponenten vom Grad Null ist (siehe [W]).

Später konnten Mudumbai S. Narasimham und Conjeeveram S. Seshadri in einem bekannten Theorem zeigen, dass es auf einer Riemannschen Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ eine Äquivalenz von Kategorien zwischen der Kategorie der unitären Darstellungen der Fundamentalgruppe und der Kategorie der polystabilen Vektorbündel vom Grad Null gibt (siehe [NS, Corollary 12.1]). Außerdem kommt jedes stabile Vektorbündel vom Grad Null von einer irreduziblen unitären Darstellung ([NS, Corollary 12.2]).

Diese Resultate wurden von Annamalai Ramanathan in [R] auf den Fall von G -Prinzipalbündeln auf einer Riemannschen Fläche X ausgedehnt, wobei G eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe über \mathbb{C} ist. Er zeigt in [R], wie man ausgehend von gewissen Darstellungen von $\pi_1(X - x_0)$, wobei x_0 ein Punkt von X ist, G -Prinzipalbündel auf X erhält. Zur genaueren Beschreibung dehnt Ramanathan dabei die bekannte Definition der (Semi)stabilität von Vektorbündeln nach David Mumford (siehe [Mf1]) auf den Fall von G -Prinzipalbündeln aus, indem er definiert, dass ein holomorphes G -Prinzipalbündel E auf X (semi)stabil heie, wenn für jede maximale parabolische Untergruppe P von G und jeden Schnitt $\sigma: X \rightarrow E/P$ gilt, dass $\deg(\sigma^*T_{E/P}) > 0$ (bzw. ≥ 0) ist, wobei $T_{E/P}$ das relative Tangentialbündel entlang der Fasern von $E/P \rightarrow X$ ist.

Mittels dieses Stabilitätsbegriffs beweist er, dass ein G -Prinzipalbündel genau dann stabil ist, wenn es von einer irreduziblen unitären Darstellung von $\pi_1(X - x_0)$ herkommt. Eine Darstellung ρ heißt dabei unitär, wenn ihr Bild in einer fixierten maximalen kompakten Untergruppe von G enthalten ist, und sie heißt zusätzlich irreduzibel, wenn die Teilmenge $\{Y; \text{adh}(Y) = Y \forall h \in \text{Im } \rho\}$ der Lie-Algebra von G mit deren Zentrum übereinstimmt.

In ihrer Arbeit [DW1] entwickelten Christopher Deninger und Annette Werner ein teilweises p -adisches Analogon zu den Ergebnissen von Narasimham und Seshadri. Dazu betrachten sie Vektorbündel E auf $X_{\mathbb{C}_p}$, wobei X eine glatte und projektive Kurve über $\overline{\mathbb{Q}_p}$ ist, die potentiell streng semistabile Reduktion vom Grad Null besitzen, d.h. solche, für die es einen endlichen und étalen Morphismus $\alpha: X' \rightarrow X$ glatter und projektiver Kurven über $\overline{\mathbb{Q}_p}$ gibt, so dass $\alpha_{\mathbb{C}_p}^* E$ zu einem Vektorbündel \mathcal{E} auf $\mathcal{X}'_{\mathfrak{o}} = \mathcal{X}' \otimes \mathfrak{o}$ für ein geeignetes Modell \mathcal{X}' von X' über $\overline{\mathbb{Z}_p}$ ausgedehnt werden kann (\mathfrak{o} sei dabei der Ring der ganzen Zahlen von \mathbb{C}_p), so dass das Pullback der speziellen Faser \mathcal{E}_k von \mathcal{E} zu der Normalisierung jeder irreduziblen Komponente von \mathcal{X}'_k streng semistabil vom Grad Null ist. Zu jedem solchen Vektorbündel E auf $X_{\mathbb{C}_p}$ konstruieren sie funktorielle Isomorphismen von „Paralleltransport“ entlang étaler Wege zwischen den Fasern von E auf $X_{\mathbb{C}_p}$, deren Konstruktion mit Tensorprodukten, der Bildung dualer Objekte, inneren Homomorphismen, Pullbacks und äußeren Produkten von Vektorbündeln sowie mit Galoiskonjugation verträglich ist. Insbesondere erhält man eine Darstellung $\rho_{E,x}$ von $\pi_1(X, x)$ auf $x^* E =: E_x$ für jeden Punkt x in $X(\mathbb{C}_p)$. In einer weiteren nachfolgenden Arbeit ([DW2]) konnten Deninger und Werner zeigen, dass die Ausgangskategorie der Vektorbündel E auf $X_{\mathbb{C}_p}$ mit potentiell streng semistabiler Reduktion vom Grad Null eine neutrale Tannaka-Kategorie ist. Ebenso wies Gabriel Herz nach, dass die Konstruktion von Deninger und Werner auf Mumfordkurven kompatibel mit einer älteren Konstruktion von Gerd Faltings ist (siehe [He] und [F1]). Außerdem vereinfachte Jilong Tong mit Hilfe der Theorie der TAC-Kurven in [T] den Beweis der Resultate von Deninger und Werner. Für einen Überblick über diesen Themenkomplex sei auch auf den Überblicksartikel [We] hingewiesen.

Es sei ferner in diesem Zusammenhang angemerkt, dass sich die Resultate von Narasimham und Seshadri bzw. Deninger und Werner in eine allgemeinere Theorie einbetten lassen: In [S] bewies Carlos Simpson eine Äquivalenz von Kategorien zwischen sogenannten stabilen Higgs-Bündeln auf einer Kählermannigfaltigkeit X über \mathbb{C} und irreduziblen lokalen Systemen auf X . Ein Higgs-Bündel ist dabei ein Paar (E, θ) bestehend aus einem holomorphen Vektorbündel E auf X zusammen mit einer holomorphen Abbildung $\theta: E \rightarrow E \otimes \Omega_X^1$, die $\theta \wedge \theta = 0$ erfüllt, während lokale Systeme auf X zu Darstellungen der Fundamentalgruppe von X korrespondieren. Für den Spezialfall $\theta = 0$ erhält man aus den Resultaten von Simpson die Theorie von Narasimham und Seshadri.

In [F2] konstruierte wiederum Gerd Faltings ein p -adisches Analogon zu dieser Simpson-Korrespondenz, indem er mit Hilfe seiner Theorie der „almost étale extensions“ eine Äquivalenz von Kategorien zwischen der Kategorie der Higgs-Bündel auf einer p -adischen Kurve X und der Kategorie gewisser „verallgemei-

nerter Darstellungen“ der étalen Fundamentalgruppe von X zeigen konnte.

In dieser Arbeit wird nun die Konstruktion von Deninger und Werner im Fall von Vektorbündeln auf $X_{\mathbb{C}_p}$ auf den Fall von G -Torseuren auf $X_{\mathbb{C}_p}$ ausgeweitet, wobei G ein zusammenhängendes reductives Gruppenschema von endlicher Präsentation über \mathfrak{o} ist. Es werden dabei G -Torseure E betrachtet, die potentiell streng semistabile Reduktion vom Grad Null haben. Wir verwenden dabei die oben genannte Definition der Semistabilität von Torseuren nach Ramanathan, die auch über einem beliebigen Körper beliebiger Charakteristik gültig bleibt, und sagen in Analogie zum Fall der Vektorbündel, dass ein G -Torseur E auf $X_{\mathbb{C}_p}$ streng semistabile Reduktion vom Grad Null habe, wenn E sich zu einem G -Torseur \tilde{E} auf $\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}} = \mathfrak{X} \otimes \mathfrak{o}$ für ein geeignetes Modell \mathfrak{X} von X ausdehnt, so dass das Pullback der speziellen Faser \tilde{E}_k von \tilde{E} zu der Normalisierung jeder irreduziblen Komponente von \mathfrak{X}_k streng semistabil vom Grad Null ist. Gibt es einen endlichen und étalen Morphismus $\alpha: Y \rightarrow X$ glatter und projektiver Kurven über $\overline{\mathbb{Q}_p}$, so dass $\alpha^* E$ streng semistabile Reduktion vom Grad Null hat, so besitzt E potentiell streng semistabile Reduktion vom Grad Null. Ist E ein derartiger G -Torseur auf $X_{\mathbb{C}_p}$, so gibt es funktorielle Isomorphismen von „Paralleltransport“ entlang étaler Wege der Fasern von $E_{\mathbb{C}_p}$ auf $X_{\mathbb{C}_p}$. Insbesondere gibt es für jeden solchen G -Torseur E einen stetigen Funktor ρ_E von $\Pi_1(X)$ nach $\mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p))$ mit $\rho_E(x) = E_x = x^* E$ für alle $x \in X(\mathbb{C}_p)$. Dabei ist $\mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p))$ die Kategorie der topologischen Räume mit einer einfach-transitiven und stetigen $G(\mathbb{C}_p)$ -Aktion von rechts, wobei die Morphismen gerade die stetigen $G(\mathbb{C}_p)$ -äquivarianten Abbildungen sind. Insgesamt erhält man so einen Funktor $\rho: \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^{ps} \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(X)}(G(\mathbb{C}_p))$, wobei $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^{ps}$ die Kategorie der G -Torseure mit potentiell streng semistabiler Reduktion vom Grad Null und $\text{Rep}_{\Pi_1(X)}(G(\mathbb{C}_p))$ die Kategorie der stetigen Funktoren von $\Pi_1(X)$ nach $\mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p))$ ist, der sich funktoriell bezüglich Morphismen von Kurven über $\overline{\mathbb{Q}_p}$, Morphismen von zusammenhängenden reductiven Gruppenschemata von endlicher Präsentation über \mathfrak{o} und \mathbb{Q}_p -Automorphismen von $\overline{\mathbb{Q}_p}$ verhält und verträglich mit den entsprechenden Funktoren im Vektorbündelfall ist.

Der Aufbau der Arbeit ist wie folgt:

Im ersten Kapitel werden einige wichtige Resultate und Definitionen zu Torseuren, zum étalen Fundamentalgruppoid und zu gewissen Kategorien von Überdeckungen, die in [DW1] definiert wurden, wiederholt und zusammengestellt.

Aufbauend auf ersten Skizzen von Deninger ([DW3]) wird dann im zweiten Kapitel ein étaler Paralleltransport zunächst für G -Torseure definiert, die für einen gegebenen Divisor D auf X in der Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X},D}(G)$ bzw. der Kate-

gorie $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G)$ liegen. Für diese Konstruktionen genügt es, an G lediglich zu fordern, dass es sich um ein affines, glattes Gruppenschema von endlicher Präsentation über \mathfrak{o} handelt, also nicht notwendigerweise auch um ein zusammenhängendes reduktives Gruppenschema. In der Definition von Deninger besteht dabei die Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}, D}(G)$ für ein fest gewähltes Modell von X aus allen G -Torseuren E auf $\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}}$, so dass für jedes $n \geq 1$ eine Überdeckung $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ von \mathfrak{X} existiert, die zu der in [DW1] definierten Kategorie von Überdeckungen $S_{\mathfrak{X}, D}$ gehört, so dass π^*E trivial modulo p^n ist. Die Kategorie $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G)$ wiederherum besteht aus den G -Torseuren, die isomorph zu der generischen Faser eines G -Torseurs \tilde{E} aus $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}, D}(G)$ für ein Modell \mathfrak{X} von X sind.

Die Konstruktion des Paralleltransport verläuft dann, den Skizzen von Deninger folgend, weitgehend analog zu der Konstruktion des Paralleltransport im Fall der Vektorbündel: Für einen gegebenen G -Torseur $E \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}, D}(G)$ und ein festes $n \geq 1$ sei $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ eine Überdeckung in $S_{\mathfrak{X}, D}$, so dass $\pi_n^*E_n$ ein trivialer G -Torseur auf \mathcal{Y}_n ist. Hierbei bezeichne der Index n stets die Reduktion modulo p^n . Man betrachte nun zwei Punkte x und x' in $X(\mathbb{C}_p) = \mathfrak{X}(\mathfrak{o})$ und man wähle einen Punkt y in $Y = \mathcal{Y}_{\mathbb{C}_p}$ über x . Für einen étalen Weg γ von x nach x' , d. h. einen Isomorphismus von Faserfunktoren zwischen den Faserfunktoren F_x und $F_{x'}$, sei γy der korrespondierende Punkt über x' . Liegt π in der in [DW1] definierten vollen Unterkategorie $S_{\mathfrak{X}, D}^{good}$ von $S_{\mathfrak{X}, D}$, so hat man Isomorphismen

$$E_{x_n} := (x_n^*E)(\mathfrak{o}_n) \xleftarrow{\tilde{y}_n^*} \Gamma(\mathcal{Y}_n, \pi_n^*E_n) \xrightarrow{(\gamma y)_n^*} ((x'_n)^*E)(\mathfrak{o}_n) =: E_{x'_n}.$$

Die so gegebenen Abbildungen $\rho_{E, n}(\gamma) = (\gamma y)_n^* \circ (y_n^*)^{-1}$ bilden ein projektives System und wir definieren den Paralleltransport $\rho_E(\gamma): E_x \xrightarrow{\sim} E_{x'}$ als ihren projektiven Limes. Setzt man $\rho_E(x) := E_x$ für alle $x \in (X - D)(\mathbb{C}_p)$, so ergibt dies einen stetigen Funktor von $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}, D}(G)$ in die Kategorie der stetigen Funktoren vom étalen Fundamentalgruppoid $\Pi_1(X - D)$ in die oben definierte Kategorie $\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))$. Dieser Funktor wird anschließend zu einem stetigen Funktor von $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G)$ in die Kategorie der stetigen Funktoren vom étalen Fundamentalgruppoid $\Pi_1(X - D)$ in die analog zu $\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))$ definierte Kategorie $\mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p))$ ausgedehnt.

Zum Abschluss des Kapitels wird gezeigt, dass diese Konstruktion sich funktoriell unter Morphismen glatter und projektiver Kurven über $\overline{\mathbb{Q}_p}$, Morphismen affiner, glatter Gruppenschemata von endlicher Präsentation über \mathfrak{o} und unter Galoiskonjugation verhält und kompatibel mit den im Falle der Vektorbündel konstruierten Funktoren ist.

Um den Beweis des eingangs erwähnten Theorems zu ermöglichen, wird dann im dritten Kapitel der Arbeit eine handlichere Charakterisierung der Katego-

rie $\mathcal{B}_{\mathcal{X}_o, D}(G)$ erarbeitet, indem analoge Resultate zu den Theoremen 17, 18 und 20 von [DW1] bewiesen werden. Als erstes wird gezeigt, dass es genügt zu wissen, dass $\pi_k^* E_k$ für ein geeignetes $\pi \in S_{\mathcal{X}, D}$ trivial ist, um $E \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}_o, D}(G)$ nachzuweisen. Dies gilt unter der Voraussetzung, dass G ein affines, glattes Gruppenschema über \mathfrak{o} ist. Setzt man anschließend stets voraus, dass G sogar ein zusammenhängendes reductives Gruppenschema von endlicher Präsentation über \mathfrak{o} ist, so erhält man in Analogie zu [DW1, Theorem 17], dass ein G -Torseur auf \mathcal{X}_o genau dann in $\mathcal{B}_{\mathcal{X}_o, D}(G)$ für einen gewissen Divisor D liegt, wenn er streng semistabile Reduktion vom Grad Null besitzt. Entscheidend dafür ist ähnlich wie im Fall der Vektorbündel die Charakterisierung der G -Torseure auf einem rein-eindimensionalen eigentlichen Schema über einem endlichen Körper \mathbb{F}_q , die streng semistabile Reduktion vom Grad Null haben, d. h. deren Pullback zu der Normalisierung jeder irreduziblen Komponente streng semistabil vom Grad Null ist. Es wird gezeigt, dass dies gerade die Torseure sind, deren Pullback entlang eines endlichen surjektiven Morphismus zu einem rein-eindimensionalen eigentlichen \mathbb{F}_q -Schema trivial ist. Die Rolle des im Vektorbündelfall zugrundeliegenden Resultats von Herbert Lange und Ulrich Stuhler, das die Charakterisierung für den Fall einer glatten und projektiven Kurve lieferte, übernimmt hier ein Resultat von Deligne (siehe Satz 3.2.3) in [Las], aus dem sich ein Zusammenhang zwischen Trivialisierbarkeit des gegebenen Torseurs und der Tatsache, dass er isomorph zu seinem Pullback unter Frobenius ist, ergibt. Daraus folgt wiederum wie in [LS] die gegebene Beschreibung für den Fall einer glatten und projektiven Kurve.

Das letzte Kapitel besteht schließlich aus dem Beweis der beiden Hauptresultate der Arbeit unter Verwendung der im vorherigen Kapitel erzielten Charakterisierung der Kategorie $\mathcal{B}_{\mathcal{X}_o, D}(G)$.

Zuallererst möchte ich Prof. Christopher Deninger für die gute Betreuung meiner Arbeit und die Ideen, wie man im Falle von G -Torseuren einen Paralleltransport definieren könne, sowie für die Erlaubnis, seine ersten Resultate zu einer solchen Definition des Paralleltransports und zu einigen Funktorialitätseigenschaften der Konstruktion (vgl. [DW3]), die den Ausgangspunkt dieser Arbeit darstellen, verwenden zu dürfen, herzlichst danken. Ebenso danke ich ihm für viele weiterführende Diskussionen und sein Vertrauen. Außerdem gebührt mein Dank dem Marie Curie Research Training Network „Arithmetic Algebraic Geometry“ (MRTN-CT-2003-504917) der Europäischen Union, das mir einen sechsmonatigen Aufenthalt am Laboratoire des Mathématiques der Université de Paris-Sud in Orsay ermöglichte, ohne den diese Arbeit nicht hätte entstehen können und während dessen ich vom dortigen Koordinator des Netzwerkes, Prof. Étienne Fouvry, Unterstützung bei allen denkbaren admini-

strativen Fragen erhalten habe. Für viele fruchtbare Diskussionen möchte ich ferner Pham Ngoc Duy, Philippe Gille, Sylvain Maugeais, Michel Raynaud, Jean-Marc Fontaine, Alexander Steinmetz, Gabriel Herz, Stefan Wiech, Thomas Ludsteck, Jilong Tong, Vikram Metha, Yogish Holla und Markus Reineke herzlichst danken. Yves Laszlo danke ich für den Hinweis auf das oben erwähnte Resultat von Deligne in seinem Artikel [Las], das sich als sehr wertvoll für die vorliegende Arbeit herausgestellt hat. Nicht zu vergessen sind in diesem Themenbereich auch mehrere Diskussionen mit Philippe Gille und Pham Ngoc Duy, die sehr hilfreich für ein besseres Verständnis waren.

Schließlich wäre die vorliegende Arbeit auch nicht möglich gewesen ohne alle Menschen und Institutionen wie dem Collegium musicum instrumentale der Universität Münster, dem Ensemble des violoncelles d'Orsay, dem COGE (Choeurs et orchestres des grandes écoles, Paris), dem Orchestre du campus d'Orsay und dem Unihockeyclub Münster, die mich immer wieder auf den Boden zurückgeholt und auf andere Gedanken gebracht haben und so neu motiviert und inspiriert haben, und nicht zuletzt alle, die an mich geglaubt haben, und auch die, die es nicht getan haben.

Außer durch das Netzwerk „Arithmetic Algebraic Geometry“ wurde die vorliegende Dissertation auch teilweise durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft über den SFB 478 „Geometrische Strukturen in der Mathematik“ unterstützt.

1 Präliminarien

In diesem Kapitel sollen einige für die Arbeit wichtige Begriffe zusammen gestellt werden.

1.1 Torseure

Es sei S ein Schema. Dann ist ein S -Gruppenschema G ein S -Schema G zusammen mit einem Kompositionsgesetz $\gamma: h_G \times h_G \rightarrow h_G$, das ein Gruppengesetz ist. Dabei sei h_G der Punktfunktor

$$h_G: (Sch/S) \rightarrow (Ens), h_G(T) := G(T) = \text{Hom}(T, G).$$

Das Gruppengesetz γ besteht aus einer Menge von Abbildungen

$$\gamma_T: h_G(T) \times h_G(T) \rightarrow h_G(T)$$

für $T \in (Sch/S)$, die verträglich mit Abbildungen $u: T' \rightarrow T$ sind, d. h. für die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} h_G(T) \times h_G(T) & \xrightarrow{\gamma_T} & h_G(T) \\ \downarrow h_G(u) \times h_G(u) & & \downarrow h_G(u) \\ h_G(T') \times h_G(T') & \xrightarrow{\gamma_{T'}} & h_G(T') \end{array}$$

kommutiert, und es ist $h_G(T)$ eine Gruppe unter γ_T für alle S -Schemata T .

Diese Daten sind äquivalent zu einem Tupel (G, m, ε, i) bestehend aus einem S -Schema G , einer Multiplikation $m: G \times_S G \rightarrow G$, einem Einschnitt $\varepsilon: S \rightarrow G$ und einer inversen Abbildung $i: G \rightarrow G$, die jeweils Morphismen von S -Schemata sind, so dass die folgenden Diagramme kommutieren:

a) Assoziativität:

$$\begin{array}{ccc} G \times_S G \times_S G & \xrightarrow{m \times \text{id}_G} & G \times_S G \\ \downarrow \text{id}_G \times m & & \downarrow m \\ G \times_S G & \xrightarrow{m} & G \end{array}$$

b) Existenz einer Linksidentität:

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{(p, \text{id}_G)} & S \times_S G \xrightarrow{\varepsilon \times \text{id}_G} G \times_S G \\
 & \searrow \text{id}_G & \downarrow m \\
 & & G
 \end{array}$$

c) Existenz eines Linksinversen:

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{(i, \text{id}_G)} & G \times_S G \\
 \downarrow p & & \downarrow m \\
 S & \xrightarrow{\varepsilon} & G
 \end{array}$$

Für eine beliebige gefaserte Kategorie \mathcal{C} definiert man ein Gruppenobjekt vollkommen analog, man ersetze lediglich (Sch/S) stets durch \mathcal{C} und „ S -Schema“ durch „ S -Objekt“.

Es sei nun wieder S ein Schema und G ein S -Gruppenschema, das treuflach und lokal von endlicher Präsentation über S ist. Dann definiert der Multiplikationsmorphismus $G \times_S G \rightarrow G$ von G eine Aktion von G auf sich selbst. Morphismen, Monomorphismen, Epimorphismen, Isomorphismen etc. von S -Schemata mit einer G -Aktion sind zudem in offensichtlicher Weise definiert.

Damit können wir nun den Begriff eines G -Torseurs definieren:

1.1.1 Definition.

Es sei G ein Gruppenschema, das treuflach und lokal von endlicher Präsentation über dem Basisschema S ist. Dann bezeichnet man als einen Rechts- G -Torseur P bezüglich der fppf-Topologie auf S ein S -Schema P , auf dem G durch einen Morphismus $f: P \times_S G \rightarrow P, (x, g) \mapsto xg$ operiert, so dass die folgende Bedingung erfüllt ist:

Es gibt eine Überdeckung $(U_i \rightarrow S)_{i \in I}$ für die fppf-Topologie auf S , so dass $P \times_S U_i$ mit seiner $G \times_S U_i$ -Aktion isomorph zu $G \times_S U_i$, versehen mit der durch den Multiplikationsmorphismus gegebenen Aktion von $G \times_S U_i$ auf sich selbst, für alle $i \in I$ ist.

1.1.2 Beispiel.

Beispielsweise ist G zusammen mit der durch den Multiplikationsmorphismus gegebenen Aktion auf sich selbst ein G -Torseur (für die fppf-Topologie).

Einen G -Torseur P , der als G -Torseur isomorph zu G ist, bezeichnet man als trivialen G -Torseur.

Nach [M, Proposition III.4.1] hat man die folgende äquivalente Beschreibung eines G -Torseurs für die fppf-Topologie:

1.1.3 Proposition.

Es sei G ein S -Gruppenschema, das treuflach und lokal von endlicher Präsentation über S ist. Ist P ein S -Schema, auf dem G durch einen Morphismus $f: P \times_S G \rightarrow P, (x, g) \mapsto xg$ operiert, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- a) P ist treuflach und lokal von endlicher Präsentation über S und der Morphismus $P \times_S G \xrightarrow{(id_P, f)} P \times_S P, (x, g) \mapsto (x, xg)$ ist ein Isomorphismus.
- b) Es gibt eine Überdeckung $(U_i \rightarrow S)_{i \in I}$ für die fppf-Topologie auf S , so dass $P \times_S U_i$ für jedes i mit seiner Aktion von $G \times_S U_i$ isomorph zu dem trivialen $G \times_S U_i$ -Torseur $G \times_S U_i$ ist.

Ebenso definiert man Garben-Torseure für die fppf-Topologie:

1.1.4 Definition.

Es sei G ein Gruppenobjekt in der Kategorie der Garben bezüglich der fppf-Topologie auf S . Dann bezeichnet man als einen Rechts- G -(Garben-)Torseur P bezüglich der fppf-Topologie auf S eine Garbe P von Mengen bezüglich der fppf-Topologie auf S , auf der G durch einen Morphismus

$$f: P \times_S G \rightarrow P, (x, g) \mapsto xg$$

operiert, so dass die folgende Bedingung erfüllt ist:

Es gibt eine Überdeckung $(U_i \rightarrow S)_{i \in I}$ für die fppf-Topologie auf S , so dass $P \times_S U_i$ für jedes i mit seiner Aktion von $G \times_S U_i$ isomorph zu $G \times_S U_i$ ist, wobei $G \times_S U_i$ bzw. $P \times_S U_i$ die von G bzw. P induzierten Garben auf $(U_i)_{fppf}$ bezeichnen und $G \times_S U_i$ zusammen mit der durch die Gruppenoperation induzierten Operation von $G \times_S U_i$ auf sich selbst betrachtet werde.

Als trivialen Torseur bezeichnet man einen G -Torseur P , der als G -Torseur isomorph zu G ist, wobei G die durch die Gruppenoperation gegebene Struktur eines G -Torseurs trägt.

Es ist offensichtlich, dass ein Garbentorseur P für die fppf-Topologie ein Torseur im Sinne von Definition 1.1.1 ist, falls P und G durch Schemata darstellbar sind. Aus dem Yoneda-Lemma folgt zudem, dass zwei Schemata P und P' isomorph als G -Torseure sind, falls sie es als G -Garbentorseure sind.

1.1.5 Bemerkung.

Nicht jeder Garben-Torseur P in der fppf-Topologie ist durch ein Schema P darstellbar. Nach [M, Theorem III.4.3a)] gilt jedoch: Ist G ein S -Gruppenschema, das affin über S ist, so ist jeder G -Garben-Torseur P durch ein Schema P darstellbar.

Torseure lassen sich auch allgemeiner für beliebige Topoi definieren:

1.1.6 Definition. ([G, Definition III.1.4.1, III.1.4.1.1])

Es sei T ein Topos und S ein Objekt von T . Ein (Rechts-)Torseur von T über S ist ein Tupel (P, G, m) bestehend aus einem S -Objekt P , einem Gruppenobjekt G von T und einer Familie von Abbildungen

$$m(S'): P(S') \times G(S') \rightarrow P(S')$$

für alle S -Objekte S' , so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- i) Der Morphismus $p: P \rightarrow S$ ist ein Epimorphismus, d. h. es existiert eine Familie von Epimorphismen $\{S_i \rightarrow S\}_{i \in I}$, so dass die Mengen $P(S_i) = \text{Hom}_S(S_i, P)$ nicht leer sind.*
- ii) Der Morphismus $u: P \times_S G \rightarrow P \times_S P, (p, g) \rightarrow (p, m(p, g))$ ist ein Isomorphismus.*

1.1.7 Bemerkung.

Es seien T ein Topos, S ein Objekt von T und G ein Gruppenobjekt von T . Es sei G_d das G -Objekt, das man erhält, wenn man G auf sich selbst durch Rechts-translationen operieren lässt, d. h. es sei G mit der von der Gruppenoperation $G \times_S G \rightarrow G$ induzierten Operation von G auf sich selbst versehen.

Da nach Definition eines Gruppenobjekts der Morphismus $G_d \rightarrow S$ einen Schnitt besitzt, ist der Morphismus $G_d \rightarrow S$ ein Epimorphismus. Die zweite Bedingung für einen Torseur ist trivialerweise erfüllt, so dass also G_d ein G -Torseur ist.

Man bezeichnet G_d als den trivialen Torseur.

Für den assoziierten Topos zu dem étalen Situs erhält man insbesondere:

1.1.8 Definition.

Es sei G ein Gruppenobjekt in der Kategorie der Garben bezüglich der étalen Topologie T auf einem Schema S . Dann bezeichnet man als einen Rechts- G - (Garben-)Torseur P bezüglich der étalen Topologie auf S eine étale Garbe P auf S , auf der G durch einen Morphismus $f: P \times_S G \rightarrow P$, $(x, g) \mapsto xg$ operiert, so dass die folgende Bedingung erfüllt ist:

Es gibt eine Überdeckung $(U_i \rightarrow S)_{i \in I}$ für die étale Topologie auf S , so dass $P \times_S U_i$ für jedes i mit seiner Aktion von $G \times_S U_i$ isomorph zu dem trivialen Torseur $G \times_S U_i$ ist, wobei $G \times_S U_i$ bzw. $P \times_S U_i$ die von G bzw. P induzierten Garben auf $(U_i)_{\text{ét}}$ bezeichnen.

Für beliebige Topoi gilt außerdem nach [G, III.1.4.1.3]:

1.1.9 Lemma.

Es sei $f: T \rightarrow T'$ ein Morphismus von Topoi und S ein Objekt von T sowie $S' = f(S)$ das Bild von S in T' unter f . Ferner sei G ein S -Gruppenobjekt des Topos T und G' ein S' -Gruppenobjekt des Topos T' . Ist dann P ein G -Torseur über S in T , so ist $f_*(P)$ ein $f_*(G)$ -Torseur über S' in T' . Ist umgekehrt P' ein G' -Torseur über S' in T' , so ist f^*P' ein f^*G' -Torseur über S in T .

Diese Konstruktionen sind funktoriell.

Beweis [G, III.1.4.1.3] □

Wichtig ist für uns noch der Zusammenhang zwischen Torseuren und Kohomologie:

1.1.10 Satz.

Es seien E ein Situs, T der zu E assoziierte Topos von abelschen Garben, G ein Gruppenobjekt von T und S ein Objekt von T .

Dann definiert jeder G -Torseur P von T über S ein eindeutig bestimmtes Element $c(P)$ von $H^1(E, G)$, wobei die durch die Klasse des trivialen Torseurs punktierte Menge $H^1(E, *)$ die erste Rechtsableitung des Funktors

$$H^0(E, *): T \rightarrow \text{Ens}$$

ist. Dabei ist $H^0(E, \mathcal{F})$ für eine Garbe \mathcal{F} auf E als

$$H^0(E, \mathcal{F}) := \varprojlim_{U \in \text{Cat } E^0} \mathcal{F}(U)$$

(vgl. [A, Notation II.2.2]) definiert. Diese Zuordnung ist eine Bijektion.

Beweis [G, Définition III.2.4.2, Remarque III.3.5.4] □

Aus diesem Satz folgt insbesondere:

1.1.11 Korollar. (vgl. auch [M, Proposition III.4.6., Corollary III.4.7. ff])

Ist G ein flaches Gruppenschema von endlichem Typ über einem Schema X , so kann man die Menge der Isomorphieklassen der G -Garbentorseure bezüglich der fppf-Topologie (bzw. der Zariski-Topologie bzw. der étalen Topologie) auf X mit $\check{H}^1(X_{\text{fppf}}, G)$ (bzw. $\check{H}^1(X, G)$ bzw. $\check{H}_{\text{ét}}^1(S, G)$) identifizieren.

Ist G zusätzlich affin, so kann man die Menge der Isomorphieklassen der G -Torseure bezüglich der fppf-Topologie (bzw. der Zariski-Topologie bzw. der étalen Topologie) auf X mit $\check{H}^1(X_{\text{fppf}}, G)$ (bzw. $\check{H}^1(X, G)$ bzw. $\check{H}_{\text{ét}}^1(S, G)$) identifizieren.

Abschließend sei noch erwähnt, dass man für die fppf-Topologie auf einem Schema S den Begriff eines G -Torseurs auch für beliebige abstrakte endliche Gruppen definieren kann:

1.1.12 Definition.

Es sei S ein Schema und G eine abstrakte endliche Gruppe. Dann bezeichnet man ein Schema P über S als einen G -Torseur bezüglich der fppf-Topologie auf S , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- a) *Der Strukturmorphismus $p: P \rightarrow S$ ist treuflach und lokal von endlicher Präsentation.*
- b) *Der Morphismus $P \times_S G_P \xrightarrow{(id_P, f)} P \times_S P, (x, g) \mapsto (x, xg)$ ist ein Isomorphismus. Dabei bezeichnet G_P das Schema $G_P = \coprod_{g \in G} P_g$ mit $P_g = P$ für alle $g \in G$.*

Es sei außerdem noch an den Begriff einer Galoisüberlagerung erinnert:

1.1.13 Definition. ([M, Remark I.5.4])

Es sei G eine endliche Gruppe, die auf einem Schema Y über X operiert. Dann nennt man Y eine Galoisüberlagerung von X mit Gruppe G , falls Y treuflach über X ist und der kanonische Morphismus

$$\varphi: G_Y \rightarrow Y \times_X Y,$$

der durch

$$\varphi|_{Y_\sigma} = (y \mapsto (y, y\sigma))$$

für alle $g \in G$ gegeben ist, ein Isomorphismus ist.

1.1.14 Bemerkung.

Nach [Mu, Lemma 4.4.1.8] wird jeder endliche étale Morphismus $f: Y \rightarrow X$ durch eine Galoisüberdeckung $Y' \rightarrow X$ dominiert.

Damit erhalten wir die folgende Charakterisierung von G -Torseuren:

1.1.15 Lemma.

Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, G ein Gruppenschema über k und X ein beliebiges Schema über k . Dann entsprechen die Isomorphieklassen der G -Torseure bezüglich der étalen Topologie auf X , die nach Pullback unter einer fest gewählten Galoisüberdeckung $X' \rightarrow X$ mit Gruppe \mathfrak{g} trivial werden, bijektiv den Elementen von $H^1(\mathfrak{g}, \Gamma(X', G))$.

Beweis Die Čech-Kohomologie für die étale Topologie liefert die folgende exakte Sequenz:

$$1 \longrightarrow \check{H}^1(X'/X, G) \longrightarrow H_{\text{ét}}^1(X, G) \longrightarrow H_{\text{ét}}^1(X', G) \longrightarrow 1.$$

Nach [M, Example III.2.6] ist aber $\check{H}^1(X'/X, G)$ isomorph zu $H^1(\mathfrak{g}, \Gamma(X', G))$, so dass die Behauptung folgt. \square

1.2 Verschiedene Kategorien von Überdeckungen

Für die Definition einer gewissen Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}(G)$ von G -Torseuren auf einem Schema \mathfrak{X}_o und ihre Charakterisierung im zweiten und dritten Kapitel benötigen wir verschiedene Kategorien von Überdeckungen aus [DW1].

Wie in [DW1] verstehen wir hier und in der gesamten Arbeit unter einer Varietät über einem Körper k ein geometrisch irreduzibles und geometrisch reduziertes separiertes Schema von endlichem Typ über k . Eine Kurve ist eine eindimensionale Varietät.

Es sei im folgenden R ein Bewertungsring mit Quotientenkörper Q , dessen Charakteristik 0 sei.

Zu einer glatten projektiven Kurve X über Q betrachten wir jeweils ein Modell \mathfrak{X} von X über R . Darunter sei stets ein endlich präsentiertes, flaches und eigentliches Schema \mathfrak{X} über $\text{Spec } R$ verstanden, so dass X isomorph zu $\mathfrak{X} \otimes_R Q$ ist. Außerdem schreiben wir für einen Divisor D auf X immer kurz $X - D$ anstelle von $X - \text{supp } D$.

1.2.1 Definition. ([DW1, S. 4,5])

Die Kategorie $S_{\mathfrak{X},D}$ ist wie folgt definiert:

Die Objekte der Kategorie sind endlich präsentierte, eigentliche R -Morphismen $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$, deren generische Faser $\pi_Q: \mathcal{Y}_Q \rightarrow X$ endlich ist und für welche die induzierte Abbildung $\pi_Q: \pi_Q^{-1}(X - D) \rightarrow X - D$ étale ist.

Ein Morphismus von $\pi_1: \mathcal{Y}_1 \rightarrow \mathfrak{X}$ nach $\pi_2: \mathcal{Y}_2 \rightarrow \mathfrak{X}$ ist ein Morphismus $\varphi: \mathcal{Y}_1 \rightarrow \mathcal{Y}_2$, so dass $\pi_1 = \pi_2 \circ \varphi$ ist.

Existiert solch ein Morphismus von $\pi_1: \mathcal{Y}_1 \rightarrow \mathfrak{X}$ nach $\pi_2: \mathcal{Y}_2 \rightarrow \mathfrak{X}$, so sagt man, dass π_1 den Morphismus π_2 dominiert. Induziert zusätzlich φ_Q einen Isomorphismus der lokalen Ringe in zwei generischen Punkten, so sagt man, dass π_1 den Morphismus π_2 strikt dominiert.

Ist R' ein Bewertungsring (mit Quotientenkörper Q' der Charakteristik Null), der R enthält, so hat man offensichtlich einen Basiswechselfunktor

$$S_{\mathfrak{X},D} \rightarrow S_{\mathfrak{X} \otimes_R R', D'},$$

wobei D' das Urbild von D in $\mathfrak{X} \otimes_R R'$ ist. Klar ist auch, dass endliche Produkte und endliche gefaserte Produkte in $S_{\mathfrak{X},D}$ existieren. Außerdem halten wir fest:

1.2.2 Bemerkung.

Es sei $\varphi: (\pi_1: \mathcal{Y}_1 \rightarrow \mathfrak{X}) \rightarrow (\pi_2: \mathcal{Y}_2 \rightarrow \mathfrak{X})$ ein Morphismus in $S_{\mathfrak{X},D}$. Dann gilt:

- i) $\varphi: \mathcal{Y}_1 \rightarrow \mathcal{Y}_2$ ist eigentlich nach [L1, Proposition 3.3.16], da π_1 und π_2 jeweils insbesondere eigentlich sind.*
- ii) $\varphi: \mathcal{Y}_1 \rightarrow \mathcal{Y}_2$ ist von endlicher Präsentation nach [EGA IV, Proposition 1.6.2.v)], da π_2 per Definition insbesondere quasi-separiert und von endlicher Präsentation ist.*
- iii) φ_Q ist endlich über $X - D$ nach [L1, Lemma 3.3.15], da nach Voraussetzung π_2 und damit $(\pi_2)_Q$ eigentlich ist.*

iv) φ_Q ist étale über $X - D$ nach [M, Corollary I.3.6], da nach Voraussetzung $(\pi_1)_Q$ und $(\pi_2)_Q$ étale über $X - D$ sind.

Wir benötigen außerdem folgende volle Unterkategorie $S_{\mathfrak{X},D}^{good}$ von $S_{\mathfrak{X},D}$:

1.2.3 Definition.

Die volle Unterkategorie $S_{\mathfrak{X},D}^{good}$ von $S_{\mathfrak{X},D}$ besteht aus den Elementen $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ von $S_{\mathfrak{X},D}$ mit der Eigenschaft, dass der Strukturmorphismus $\lambda: \mathcal{Y} \rightarrow \text{Spec } R$ flach ist, $\lambda_* \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{O}_{\text{Spec } R}$ universell erfüllt ist und ihre generische Faser $\lambda_Q: \mathcal{Y}_Q \rightarrow \text{Spec } Q$ glatt ist.

1.2.4 Bemerkung.

Es sei $(\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}) \in S_{\mathfrak{X},D}^{good}$. Dann ist \mathcal{Y}_Q geometrisch zusammenhängend.

Beweis Es sei $(\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}) \in S_{\mathfrak{X},D}^{good}$ und \overline{Q} ein algebraischer Abschluss von Q . Da $\mathcal{Y}_{\overline{Q}}$ glatt über \overline{Q} ist, ist $\mathcal{Y}_{\overline{Q}}$ genau dann zusammenhängend, wenn $\mathcal{Y}_{\overline{Q}}$ irreduzibel ist.

Es genügt also zu zeigen, dass $\mathcal{Y}_{\overline{Q}}$ irreduzibel ist.

Dafür genügt es zu zeigen, dass $H^0(\mathcal{Y}_{\overline{Q}}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{\overline{Q}}})$ eindimensional über \overline{Q} ist: Denn wäre $\mathcal{Y}_{\overline{Q}}$ nicht irreduzibel, also etwa $\mathcal{Y}_{\overline{Q}} = A \amalg B$ mit nichtleeren A und B , so wäre $H^0(\mathcal{Y}_{\overline{Q}}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{\overline{Q}}}) = H^0(A, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{\overline{Q}}}) \oplus H^0(B, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{\overline{Q}}})$. Da $H^0(A, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{\overline{Q}}})$ und $H^0(B, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{\overline{Q}}})$ jeweils mindestens eindimensional über \overline{Q} sind, wäre dann $H^0(\mathcal{Y}_{\overline{Q}}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{\overline{Q}}})$ mindestens zweidimensional über \overline{Q} .

Wir zeigen also, dass $H^0(\mathcal{Y}_{\overline{Q}}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{\overline{Q}}})$ eindimensional über \overline{Q} ist:

Da $\lambda_* \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{O}_{\text{Spec } R}$ nach Definition von $S_{\mathfrak{X},D}^{good}$ universell gilt, gilt $(\lambda_{\overline{Q}})_* \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{\overline{Q}}} = \mathcal{O}_{\text{Spec } \overline{Q}}$. Daraus folgt, dass

$$H^0(\mathcal{Y}_{\overline{Q}}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{\overline{Q}}}) \cong H^0(\text{Spec } \overline{Q}, (\lambda_{\overline{Q}})_* \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{\overline{Q}}}) \cong H^0(\text{Spec } \overline{Q}, \mathcal{O}_{\text{Spec } \overline{Q}}) = \overline{Q}$$

ist, also eindimensional über \overline{Q} ist. □

1.2.5 Korollar.

Es sei $(\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}) \in S_{\mathfrak{X},D}^{good}$. Dann ist \mathcal{Y}_Q eine glatte und projektive Kurve und also \mathcal{Y} irreduzibel und reduziert.

Beweis Es sei $(\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}) \in S_{\mathfrak{X},D}^{good}$. Dann ist nach Bemerkung 1.2.4 \mathcal{Y}_Q geometrisch zusammenhängend und daher, wie in deren Beweis gesehen, geometrisch irreduzibel.

Da X nach Voraussetzung eine Kurve über Q ist, ist X insbesondere separiert über Q . Außerdem ist \mathcal{Y}_Q nach Definition der Kategorie $S_{\mathfrak{X},D}$ endlich über X , also affin nach [EGA II, 6.1.2] und damit separiert nach [EGA II, Proposition 1.2.4], so dass insgesamt der Morphismus $\mathcal{Y}_Q \rightarrow Q$ als Komposition zweier separierter Morphismen separiert ist.

Die Glattheit von \mathcal{Y}_Q über Q ergibt sich direkt aus der Definition von $S_{\mathfrak{X},D}^{good}$.

Da \overline{Q} als ein Körper nach [Ma, 17.E] ein regulärer lokaler Ring ist und damit auch $\text{Spec } \overline{Q}$ regulär ist (man benutze dabei [L1, Theorem 4.2.16]) sowie $\mathcal{Y}_{\overline{Q}}$ glatt über \overline{Q} ist, ist nach [L1, Theorem 4.3.36] auch $\mathcal{Y}_{\overline{Q}}$ regulär. Also sind alle lokalen Ringe von $\mathcal{Y}_{\overline{Q}}$ regulär und damit nach [L1, Proposition 4.2.11] auch reduziert. Damit ist $\mathcal{Y}_{\overline{Q}}$ reduziert und also \mathcal{Y}_Q geometrisch reduziert.

Weil der Morphismus $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ nach Definition von $S_{\mathfrak{X},D}$ von endlicher Präsentation ist, ist auch $\pi_Q: \mathcal{Y}_Q \rightarrow \mathfrak{X}_Q$ von endlicher Präsentation. Da \mathfrak{X} ein Modell von X und damit insbesondere von endlicher Präsentation über R ist, ist außerdem \mathfrak{X}_Q von endlicher Präsentation über Q . Also ist der Morphismus $\mathcal{Y}_Q \rightarrow Q$ als Komposition zweier Morphismen von endlicher Präsentation ebenfalls von endlicher Präsentation, insbesondere damit von endlichem Typ.

Insgesamt ist damit \mathcal{Y}_Q eine glatte Varietät über Q .

Desweiteren ist \mathcal{Y}_Q nach dem bisher gezeigten geometrisch irreduzibel, nach [L1, Remark 3.2.11] also irreduzibel. Aus der Endlichkeit von π_Q folgt dann, dass der Funktionenkörper $K(\mathcal{Y}_Q)$ eine endliche algebraische Erweiterung von $K(X)$ ist, so dass $\text{trdeg}_Q K(\mathcal{Y}_Q) = 1$ und also nach [EGA II, Proposition 7.4.1] \mathcal{Y}_Q eindimensional ist.

Also ist \mathcal{Y}_Q eine glatte Kurve über Q .

Weil $\pi \in S_{\mathfrak{X},D}$ ist, ist ferner der Morphismus π_Q endlich und damit nach [EGA II, Corollaire 6.11] projektiv. Da nach Voraussetzung X projektiv über Q ist, ist also der Strukturmorphismus $\mathcal{Y}_Q \rightarrow Q$ als Komposition zweier projektiver Morphismen projektiv.

Es bleibt noch zu zeigen, dass \mathcal{Y} irreduzibel und reduziert ist:

Da nach dem bisher gezeigten \mathcal{Y}_Q geometrisch reduziert ist, ist nach [L1, Remark 3.2.11] \mathcal{Y}_Q auch reduziert; dass \mathcal{Y}_Q irreduzibel ist, wurde bereits gezeigt. Da außerdem $(\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}) \in S_{\mathfrak{X},D}^{good}$ ist, ist \mathcal{Y} flach und von endlicher Präsentation über R , so dass nach [L1, Proposition 4.3.8] \mathcal{Y} irreduzibel und reduziert ist. \square

Ein im folgenden wichtiges Resultat ist das folgende Theorem:

1.2.6 Theorem ([DW1, Theorem 1, 3)-5])

Es sei R ein diskreter Bewertungsring (mit Quotientenkörper Q der Charakteristik Null). Dann gilt:

- (i) Für jeden diskreten Bewertungsring R' , der über R liegt, setze man $\mathfrak{X}' := \mathfrak{X} \otimes_R R'$ und definiere D' als das Urbild von D in X' . Dann bildet der kanonische Basiswechselfunktor $S_{\mathfrak{X},D} \rightarrow S_{\mathfrak{X}',D'}$ die Unterkategorie $S_{\mathfrak{X},D}^{good}$ auf $S_{\mathfrak{X}',D'}^{good}$ ab.
- (ii) Für je endlich viele Objekte $\pi_i: \mathcal{Y}_i \rightarrow \mathfrak{X}$ aus $S_{\mathfrak{X},D}$ existiert eine endliche Erweiterung Q' von Q , so dass es ein Objekt $\pi' \in S_{\mathfrak{X}',D'}^{good}$ gibt, das alle Objekte $\pi_i \otimes_R R' \in S_{\mathfrak{X}',D'}$ dominiert. Dabei ist R' ein diskreter Bewertungsring in Q' , der R dominiert, $\mathfrak{X}' := \mathfrak{X} \otimes_R R'$ und D' das Urbild von D in X' .
- (iii) Zu jedem Objekt $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ aus $S_{\mathfrak{X},D}$ existiert eine Erweiterung von diskreten Bewertungsringen R'/R wie in (ii), so dass $\pi \otimes_R R'$ von einem Objekt aus $S_{\mathfrak{X}',D'}^{good}$ strikt dominiert wird.

Beweis

- (i) Dies ist klar, da Glattheit und Flachheit stabil unter Basiswechsel sind.
- (ii) Weil endliche Produkte in der Kategorie $S_{\mathfrak{X},D}$ existieren, folgt Aussage (ii) aus Aussage (iii).
- (iii) Nach [L1, Proposition 3.2.20] gibt es einen Q^{sep} -wertiger Punkt von $X - D$. Da $\pi_Q^{-1}(X - D)$ endlich und étale über $X - D$ ist, existiert somit nach [Mu, 4.2] ein Q^{sep} -rationaler Punkt von $\pi_Q^{-1}(X - D)$ über dem gegebenen Punkt von $X - D$. Mittels noetherschem Descent (vgl. [EGA IV, §8]) erhält man daraus eine endliche Erweiterung Q' von Q , so dass \mathcal{Y} einen Q' -rationalen Punkt über $X - D$ besitzt, wobei man Q' so wählen kann, dass die irreduziblen Komponenten von $\mathcal{Y}_{Q'}$ geometrisch irreduzibel sind.

Es sei R' ein diskreter Bewertungsring in Q' über R und $\mathcal{Y}_{R'} := \mathcal{Y} \otimes_R R'$. Wählt man nun eine irreduzible Komponente von $\mathcal{Y}_{Q'}$, die einen Q' -wertigen Punkt über $X - D$ besitzt, und definiert \mathcal{Y}^* als deren Abschluss in $\mathcal{Y}_{R'}$, der mit der Struktur eines reduzierten Schemas versehen sei, so ist \mathcal{Y}^* reduziert und irreduzibel sowie nach [EGA IV, §7.8] auch exzellent, so dass seine Normalisierung $\tilde{\mathcal{Y}}$ nach [EGA IV, Proposition 7.8.6 (ii)] endlich über \mathcal{Y}^* ist. Außerdem ist $\tilde{\mathcal{Y}}$ ein eigentliches und flaches R' -Schema,

da $\mathcal{Y}_{R'}$ dies ist. Da die Bildung der Normalisierung mit der des Faserprodukts vertauscht, ist $\tilde{\mathcal{Y}} \otimes_{R'} Q'$ die Normalisierung von \mathcal{Y}_Q^* . Also besitzt $\tilde{\mathcal{Y}} \otimes_{R'} Q'$ einen Q' -rationalen Punkt. Man beachte, dass nach Konstruktion $\tilde{\mathcal{Y}}$ von Dimension 2 ist. Nach Lipmans Auflösung von Singularitäten (siehe [L1, S. 362]) existiert dann ein irreduzibles und reguläres R' -Schema \mathcal{Y}^V zusammen mit einem eigentlichen R' -Morphismus $\mathcal{Y}^V \rightarrow \tilde{\mathcal{Y}}$, der ein Isomorphismus auf der generischen Faser ist. Das Schema \mathcal{Y}^V erhält man dabei durch wiederholte Aufblasung des singulären Orts gefolgt von der Bildung der Normalisierung. Dieser Prozess wird nach endlich vielen Schritten stationär, so dass man ein reguläres irreduzibles Schema \mathcal{Y}^V erhält, das eigentlich und flach über R' ist, zusammen mit einem eigentlichen Morphismus $\mathcal{Y}^V \rightarrow \mathfrak{X}'$, der nach Konstruktion den Morphismus $\pi \otimes_R \text{id}_{R'}$ strikt dominiert.

Dies alles impliziert, dass der Morphismus $\psi: \mathcal{Y}^V \rightarrow \mathfrak{X}'$ in der Kategorie $S_{\mathfrak{X}', D'}$ liegt und auch der Strukturmorphismus $\lambda^V: \mathcal{Y}^V \rightarrow \text{Spec } R'$ flach sowie dessen generische Faser glatt ist.

Um zu sehen, dass ψ sogar in $S_{\mathfrak{X}', D'}^{\text{good}}$ liegt, bleibt also nur noch zu zeigen, dass $\lambda_*^V \mathcal{O}_{\mathcal{Y}^V} = \mathcal{O}_{\text{Spec } R'}$ universell gilt.

Aufgrund der Eigentlichkeit von \mathcal{Y}^V induziert aber der Q' -rationale Punkt der generischen Faser von \mathcal{Y}^V einen Schnitt des Strukturmorphismus $\lambda^V: \mathcal{Y}^V \rightarrow \text{Spec } R'$. Damit folgt nun aus einem Theorem von Raynaud (siehe [Ray, Théorème 8.2.1, (ii) \Rightarrow (iv)] oder [L1, Corollary 9.1.24., Corollary 9.1.32.]), dass \mathcal{Y}^V kohomologisch flach in Dimension 0 ist, also insbesondere $\lambda_*^V \mathcal{O}_{\mathcal{Y}^V} = \mathcal{O}_{\text{Spec } R'}$ universell gilt. \square

Für den konkreten Fall $R = \overline{\mathbb{Z}}_p$ und $Q = \overline{\mathbb{Q}}_p$ gilt:

1.2.7 Korollar. ([DW1, Corollary 3,1])

Es sei X eine glatte und projektive Kurve über $\overline{\mathbb{Q}}_p$, D ein Divisor auf X sowie \mathfrak{X} ein Modell von X über $\text{Spec } \overline{\mathbb{Z}}_p$. Außerdem sei eine endliche Anzahl von Objekten $\pi_i: \mathcal{Y}_i \rightarrow \mathfrak{X}$ aus $S_{\mathfrak{X}, D}$ gegeben.

Dann existieren eine endliche Erweiterung K von \mathbb{Q}_p und eine glatte und projektive Kurve X_K über K mit Modell $\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_K}$ über \mathfrak{o}_K sowie ein Divisor D_K von X_K , so dass folgendes gilt: Es ist $X = X_K \otimes_K \overline{K}$ und $D = D_K \otimes_K \overline{K}$ sowie $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_K} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \overline{\mathbb{Z}}_p$. Außerdem existiert ein Element $\pi_{\mathfrak{o}_K}: \mathcal{Y}_{\mathfrak{o}_K} \rightarrow \mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_K}$ von $S_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_K}, D_K}^{\text{good}}$, so dass der Morphismus $\pi = \pi_{\mathfrak{o}_K} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \overline{\mathbb{Z}}_p$ alle Morphismen π_i dominiert.

Beweis Da \mathfrak{X} als Modell von X insbesondere von endlicher Präsentation über $\overline{\mathbb{Z}}_p$ ist sowie nach [EGA IV, 8.1.2 b)] $\varinjlim_{\mathbb{Q}_p \subset K \text{ endlich}} K = \overline{\mathbb{Q}}_p$ und damit

auch $\varinjlim_{\mathbb{Q}_p \subset K \text{ endlich}} \mathfrak{o}_K = \overline{\mathbb{Z}}_p$ gilt, existieren nach [EGA IV, Proposition 8.9.1 (i)]

eine endliche Erweiterung K_0 von \mathbb{Q}_p sowie ein Schema \mathfrak{X}'_0 von endlichem Typ über \mathfrak{o}_{K_0} , so dass es einen $\overline{\mathbb{Z}}_p$ -Isomorphismus $\mathfrak{X}'_0 \otimes_{\mathfrak{o}_{K_0}} \overline{\mathbb{Z}}_p \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}$ gibt. Da \mathfrak{o}_{K_0} noethersch ist, ist nach [EGA IV, Définition 1.6.1] \mathfrak{X}'_0 auch von endlicher Präsentation über K_0 . Nach [EGA IV, Théorème 8.10.5 (xii)] und [EGA IV, Théorème 11.2.6 (ii)] existiert dann eine endliche Erweiterung K_1 von \mathbb{Q}_p , die K_0 enthält, so dass $\mathfrak{X}_1 := \mathfrak{X}'_0 \otimes_{\mathfrak{o}_{K_0}} \mathfrak{o}_{K_1}$ von endlicher Präsentation, flach und eigentlich über \mathfrak{o}_{K_1} ist. Setzt man nun $X_1 := \mathfrak{X}_1 \otimes_{\mathfrak{o}_{K_1}} K_1$, so folgt aus [EGA IV, Scholie 8.8.3], dass X zu X_1 absteigt. Nach [EGA IV, Proposition 8.9.1], [EGA IV, Théorème 8.10.5 (v),(xiii)] und [EGA IV, Proposition 17.7.8] sowie [L1, Proposition 3.2.7 (a)] gibt es also eine endliche Erweiterung K_2 von \mathbb{Q}_p mit $K_1 \subset K_2$, so dass $X_2 := X_1 \otimes_{K_1} K_2$ eine glatte und projektive Kurve über K_2 ist. Da die Eigenschaften von \mathfrak{X}_1 stabil unter Basiswechsel sind, ist dann $\mathfrak{X}_2 := \mathfrak{X}_1 \otimes_{\mathfrak{o}_{K_1}} \mathfrak{o}_{K_2}$ ein Modell von X_2 .

Nach [EGA IV, Proposition 8.5.5] gibt es außerdem eine endliche Erweiterung K_3 von K_2 , so dass der Divisor D zu einem Divisor D_3 von X_3 über $\text{Spec } K_3$ absteigt, wobei man dazu den zu D assoziierten \mathcal{O}_X -Modul $\mathcal{O}_X(D)$ betrachte.

Da es endlich viele Morphismen π_i sind, die gegeben sind, gibt es nach [EGA IV, Proposition 8.9.1, Théorème 8.10.5 (xii)] eine endliche Erweiterung K_4 von K_3 , so dass alle Morphismen $\pi_i: \mathcal{Y}_i \rightarrow \mathfrak{X}$ zu endlich-präsentierten, eigentlichen Morphismen $\pi_{i4}: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}_4$ absteigen. Da noetherscher Descent verträglich mit der Bildung der generischen Faser ist, existiert dann nach [EGA IV, Théorème 8.10.5 (x)] und [EGA IV, Proposition 17.7.8] eine endliche Erweiterung K_5 von K_4 , so dass alle $(\pi_{i5})_Q$ endlich sind und zudem étale über $X_5 - D_5$ sind. Damit liegen alle Morphismen π_{i5} in der Kategorie $S_{\mathfrak{X}_5, D_5}$.

Nach Theorem 1.2.6 existiert also eine Erweiterung K'_5 von K_5 , so dass die Objekte $\pi_{i5} \otimes_{\mathfrak{o}_{K_5}} R'_5$ alle von einem einzigen Objekt $\pi_5 \in S_{\mathfrak{X}_5 \otimes_{\mathfrak{o}_{K_5}} R'_5, D_5 \otimes_{\mathfrak{o}_{K_5}} R'_5}^{good}$ dominiert werden, wobei R'_5 ein Bewertungsring in Q'_5 ist, der \mathfrak{o}_{K_5} dominiert. Setzt man nun $K := K'_5$, so besitzen $X_K, \mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_K} := \mathfrak{X}_5 \otimes_{\mathfrak{o}_K} R'_5, D_K$ und $\pi_{\mathfrak{o}_K} := \pi_5$ alle gewünschten Eigenschaften. \square

Daraus folgt:

1.2.8 Korollar. ([DW1, Corollary 3, 3])

Es sei X eine glatte und projektive Kurve über $\overline{\mathbb{Q}_p}$ und D ein Divisor auf X sowie \mathfrak{X} ein Modell von X über $\text{Spec } \overline{\mathbb{Z}_p}$. Dann gilt:

Jede endliche Anzahl von Objekten $\pi_i: \mathcal{Y}_i \rightarrow \mathfrak{X}$ in $S_{\mathfrak{X},D}$ wird von einem gemeinsamen Objekt $(\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}) \in S_{\mathfrak{X},D}^{\text{good}}$ dominiert.

Beweis Nach Korollar 1.2.7 existieren eine endliche Erweiterung K von \mathbb{Q}_p , eine glatte und projektive Kurve X_K über K mit einem Modell $\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_K}$ über \mathfrak{o}_K und ein Divisor D_K von X_K , so dass $X = X_K \otimes \overline{K}$, $D = D_K \otimes \overline{K}$ und $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_K} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \overline{\mathbb{Z}_p}$ gilt, sowie zusätzlich ein Element $\pi_{\mathfrak{o}_K} \in S_{X_{\mathfrak{o}_K}, D_K}^{\text{good}}$, so dass der Morphismus $\pi := \pi_{\mathfrak{o}_K} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \overline{\mathbb{Z}_p}$ alle Morphismen π_i dominiert. Dieser Morphismus π liegt in der Kategorie $S_{\mathfrak{X},D}^{\text{good}}$, da die Definition der vollen Unterkategorie $S_{\mathfrak{X},D}^{\text{good}}$ nach Theorem 1.2.6(i) stabil unter der Erweiterung des zugrundeliegenden Bewertungsrings ist. \square

Außer der vollen Unterkategorie $S_{\mathfrak{X},D}^{\text{good}}$ betrachten wir noch die folgende volle Unterkategorie von $S_{\mathfrak{X},D}$:

1.2.9 Definition. (vgl. [DW1, S. 5])

Die volle Unterkategorie $S_{\mathfrak{X},D}^{\text{ss}}$ von $S_{\mathfrak{X},D}$ besteht aus den Elementen $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ von $S_{\mathfrak{X},D}$, für die $\lambda: \mathcal{Y} \rightarrow \text{Spec } R$ eine semistabile Kurve ist, deren generische Faser \mathcal{Y}_Q eine glatte und projektive Kurve über Q ist.

Eine Kurve $\lambda: \mathcal{Y} \rightarrow \text{Spec } R$ heißt dabei nach [L1, § 10.3] genau dann semistabil, wenn λ flach ist und für alle $s \in \text{Spec } R$ die geometrische Faser $\mathcal{Y}_{\overline{s}}$ reduziert ist und lediglich gewöhnliche Doppelpunkte als Singularitäten besitzt.

Analog zu dem Fall der Unterkategorie $S_{\mathfrak{X},D}^{\text{good}}$ gilt auch für den Fall der Unterkategorie $S_{\mathfrak{X},D}^{\text{ss}}$:

1.2.10 Theorem ([DW1, Theorem 1, 3)-5])

Es sei R ein diskreter Bewertungsring. Dann gilt:

- (i) Für jeden diskreten Bewertungsring R' , der über R liegt, setze man $\mathfrak{X}' := \mathfrak{X} \otimes_R R'$ und definiere D' als das Urbild von D in X' . Dann bildet der kanonische Basiswechselfunktor $S_{\mathfrak{X},D} \rightarrow S_{\mathfrak{X}',D'}$ die Unterkategorie $S_{\mathfrak{X},D}^{\text{ss}}$ auf $S_{\mathfrak{X}',D'}^{\text{ss}}$ ab.
- (ii) Für je endlich viele Objekte $\pi_i: \mathcal{Y}_i \rightarrow \mathfrak{X}$ aus $S_{\mathfrak{X},D}$ existiert eine endliche Erweiterung Q' von Q , so dass es ein Objekt $\pi' \in S_{\mathfrak{X}',D'}^{\text{ss}}$ gibt, das alle

Objekte $\pi_i \otimes_R R' \in S_{\mathfrak{X}, D'}$ dominiert. Dabei ist R' ein diskreter Bewertungsring in Q' , der R dominiert, $\mathfrak{X}' := \mathfrak{X} \otimes_R R'$ und D' das Urbild von D in X' .

(iii) Zu jedem Objekt $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ aus $S_{\mathfrak{X}, D}$ existiert eine Erweiterung von diskreten Bewertungsringen R'/R wie in (ii), so dass $\pi \otimes_R R'$ von einem Objekt aus $S_{\mathfrak{X}', D'}$ strikt dominiert wird.

Beweis

- (i) Dies ist klar, da Glattheit und Flachheit sowie Semistabilität (siehe [L1, Proposition 10.3.15(a)]) stabil unter Basiswechsel sind.
- (ii) Weil endliche Produkte in der Kategorie $S_{\mathfrak{X}, D}$ existieren, folgt Aussage (ii) aus Aussage (iii).
- (iii) Es sei $\mathcal{Y}^V \rightarrow \mathfrak{X}'$ wie im Beweis von Theorem 1.2.6(iii) konstruiert. Weil \mathcal{Y}^V , wie oben gesehen, irreduzibel und regulär, eigentlich und flach über R' ist, ist nach einem Resultat von Lichtenbaum ([Li, Theorem 2.8]) \mathcal{Y}^V projektiv über R' . Nach [L2, Theorem 0.2] existieren also eine endliche Erweiterung Q^\dagger von Q' , ein diskreter Bewertungsring R^\dagger in Q^\dagger über R' und ein semistabiles Modell \mathcal{Y}^\dagger von $\mathcal{Y}^V \otimes_{R'} Q^\dagger$ zusammen mit einem Morphismus $\varphi: \mathcal{Y}^\dagger \rightarrow \mathcal{Y}^V \otimes_{R'} R^\dagger$ über $\text{Spec } R^\dagger$. Nach Konstruktion ist dann die Komposition

$$\mathcal{Y}^\dagger \xrightarrow{\varphi} \mathcal{Y}^V \otimes_{R'} R^\dagger \rightarrow \mathfrak{X}^\dagger = \mathfrak{X} \otimes_R R^\dagger$$

ein Element der Kategorie $S_{\mathfrak{X}^\dagger, D^\dagger}^{ss}$, das den Morphismus $\pi^\dagger = \pi \otimes_R R^\dagger$ strikt dominiert. \square

Für den konkreten Fall $R = \overline{\mathbb{Z}}_p$ und $Q = \overline{\mathbb{Q}}_p$ gilt wie im Falle von $S_{\mathfrak{X}, D}^{good}$:

1.2.11 Korollar. ([DW1, Corollary 3,1])

Es sei X eine glatte und projektive Kurve über $\overline{\mathbb{Q}}_p$ und D ein Divisor auf X sowie \mathfrak{X} ein Modell von X über $\text{Spec } \overline{\mathbb{Z}}_p$. Außerdem sei eine endliche Anzahl von Objekten $\pi_i: \mathcal{Y}_i \rightarrow \mathfrak{X}$ aus $S_{\mathfrak{X}, D}$ gegeben.

Dann existieren eine endliche Erweiterung K von \mathbb{Q}_p und eine glatte und projektive Kurve X_K über K mit Modell $\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_K}$ über \mathfrak{o}_K sowie ein Divisor D_K von X_K , so dass folgendes gilt: Es ist $X = X_K \otimes_K \overline{K}$ und $D = D_K \otimes_K \overline{K}$ sowie $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_K} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \overline{\mathbb{Z}}_p$. Außerdem existiert ein Element $\pi_{\mathfrak{o}_K}: \mathcal{Y}_{\mathfrak{o}_K} \rightarrow \mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_K}$ von $S_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_K}, D_K}^{ss}$, so dass der Morphismus $\pi = \pi_{\mathfrak{o}_K} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \overline{\mathbb{Z}}_p$ alle Morphismen π_i dominiert.

Beweis Der Beweis ist wortwörtlich derselbe wie der für Korollar 1.2.7. Man ersetzt lediglich den Verweis auf Theorem 1.2.6 durch den auf Theorem 1.2.10 und stets „good“ durch „ss“. \square

Daraus folgt:

1.2.12 Korollar. ([DW1, Corollary 3, 3])

Es sei X eine glatte und projektive Kurve über $\overline{\mathbb{Q}}_p$ und D ein Divisor auf X sowie \mathfrak{X} ein Modell von X über $\text{Spec } \overline{\mathbb{Z}}_p$. Dann gilt:

Jede endliche Anzahl von Objekten $\pi_i: \mathcal{Y}_i \rightarrow \mathfrak{X}$ in $S_{\mathfrak{X},D}$ wird von einem gemeinsamen Objekt $(\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}) \in S_{\mathfrak{X},D}^{ss}$ dominiert.

Beweis Dies folgt direkt aus Korollar 1.2.11 zusammen mit der Tatsache, dass die Definition der Kategorie $S_{\mathfrak{X},D}^{ss}$ nach Theorem 1.2.10(i) verträglich mit Erweiterungen des zugrundeliegenden Bewertungsrings ist. \square

Neben den Kategorien $S_{\mathfrak{X},D}$, $S_{\mathfrak{X},D}^{ss}$ und $S_{\mathfrak{X},D}^{good}$ benötigen wir noch die folgenden Kategorien:

1.2.13 Definition. (vgl. [DW1, S.10f])

*i) Die Objekte der Kategorie $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X},D}$ sind endlich präsentierte eigentliche G -äquivalente $\overline{\mathbb{Z}}_p$ -Morphismen $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$, wobei G eine endliche abstrakte Gruppe ist, die $\overline{\mathbb{Z}}_p$ -linear von links auf \mathcal{Y} und trivial auf \mathfrak{X} operiert. Außerdem sei verlangt, dass die generischen Fasern endlich sind und die Einschränkung $(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbb{Q}}_p} - \pi^*D) \rightarrow (X - D)$ ein étaler G -Torseur ist.*

Ein Morphismus von dem G_1 -äquivalenten Morphismus $\pi_1: \mathcal{Y}_1 \rightarrow \mathfrak{X}$ zu dem G_2 -äquivalenten Morphismus $\pi_2: \mathcal{Y}_2 \rightarrow \mathfrak{X}$ besteht aus einem Morphismus $\varphi: \mathcal{Y}_1 \rightarrow \mathcal{Y}_2$, so dass $\pi_1 = \pi_2 \circ \varphi$ gilt, zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\gamma: G_1 \rightarrow G_2$, so dass φ ein G_1 -äquivalenter Morphismus ist, wenn G_1 vermöge γ auf \mathcal{Y}_2 operiert.

ii) Offensichtlicherweise existiert ein Vergissfunktorkomplex $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X},D} \rightarrow S_{\mathfrak{X},D}$. Die volle Unterkategorie $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X},D}^{good}$ von $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X},D}$ besteht aus den Elementen von $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X},D}$, die auf Objekte in $S_{\mathfrak{X},D}^{good}$ abgebildet werden.

Ein wichtiges Resultat aus [DW1] ist, dass jedes Objekt von $S_{\mathfrak{X},D}$ durch das Bild eines Objektes von $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X},D}^{good}$ dominiert wird:

1.2.14 Theorem ([DW1, Theorem 4])

Für jedes Objekt $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ aus $S_{\mathfrak{X},D}$ existieren eine endliche Gruppe G und ein G -äquivarianter Morphismus $\pi': \mathcal{Y}' \rightarrow \mathfrak{X}$, die ein Objekt von $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X},D}^{\text{good}}$ definieren, für das ein Morphismus $\varphi: \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$ existiert, so dass $\pi \circ \varphi = \pi'$ ist.

Beweis Für den genauen, etwas längeren Beweis siehe [DW1, Theorem 4]. Er benutzt wieder noetherschen Descent, die Konstruktionen der Beweise der Theoreme 1.2.6 und 1.2.10 sowie verschiedene Aussagen über die G -Äquivarianz eines Morphismus aus [L2] und [EGA II]. \square

1.3 Das étale Fundamentalgruppoid und Faserfunktoren

Im weiteren Verlauf benötigen wir den Begriff des étalen Fundamentalgruppoids und den von Faserfunktoren. Als Literatur sei hierzu auf [SGA 1] oder auch [DW1, S.577 ff] verwiesen.

Es sei Z eine Varietät über $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Dann definiert man das étale Fundamentalgruppoid $\Pi_1(Z)$ von Z wie folgt:

1.3.1 Definition.

Es sei Z eine Varietät über $\overline{\mathbb{Q}_p}$ und $z \in Z(\mathbb{C}_p)$ ein geometrischer Punkt.

Dann ist der zugehörige Faserfunktoren F_z definiert als der Funktor

$$F_z = \text{Mor}_Z(z, _)$$

von der Kategorie der endlichen étalen Überlagerungen Z' von Z in die Kategorie der endlichen Mengen, der jedem solchen Z' die Menge der über z liegenden \mathbb{C}_p -wertigen Punkte von Z' zuordnet.

Außerdem sei die topologische Kategorie $\Pi_1(Z)$ wie folgt definiert:

Die Objekte der Kategorie sind die geometrischen Punkte von Z , d.h. die Menge der Objekte ist $Z(\mathbb{C}_p)$. Ein Morphismus in $\Pi_1(Z)$ zwischen zwei \mathbb{C}_p -wertigen Punkten z und z^* ist ein Isomorphismus der assoziierten Faserfunktoren. Solch ein Isomorphismus der Faserfunktoren wird als étaler Weg von z nach z^* bezeichnet.

Da nach [SGA 1, Exposé V, 4. bzw. 7.] jeder Faserfunktoren pro-repräsentierbar ist, ist $\text{Mor}_{\Pi_1(Z)}(z, z^*)$ eine proendliche Menge und damit ein kompakter total unzusammenhängender Hausdorffraum (vgl. [DW1, S. 577]). Ferner induziert die Komposition von Morphismen eine stetige Abbildung

$$\text{Mor}_{\Pi_1(Z)}(z, z^*) \times \text{Mor}_{\Pi_1(Z)}(z^*, z^{**}) \rightarrow \text{Mor}_{\Pi_1(Z)}(z, z^{**}).$$

1 Präliminarien

Die so definierte topologische Kategorie $\Pi_1(Z)$ wird als *étales Fundamentalgruppoid* von Z bezeichnet.

Desweiteren sei an einige Funktorialitätseigenschaften von Π_1 erinnert (vgl. dazu [DW1, S. 578f], die wir hier weitestgehend übernehmen):

Ist $\alpha: Z_1 \rightarrow Z_2$ ein Morphismus von Varietäten über $\overline{\mathbb{Q}_p}$, so wird wie folgt ein stetiger Funktor $\alpha_*: \Pi_1(Z_1) \rightarrow \Pi_1(Z_2)$ induziert:

Auf Ebene der Objekte ist α_* die Abbildung $\alpha: Z_1(\mathbb{C}_p) \rightarrow Z_2(\mathbb{C}_p)$. Für zwei Punkte $z, z' \in Z_1(\mathbb{C}_p)$ definiert man außerdem eine stetige Abbildung $\alpha_*: \text{Iso}(F_z, F_{z'}) \rightarrow \text{Iso}(F_{\alpha(z)}, F_{\alpha(z')})$ folgendermaßen:

Für einen endlichen étales Morphismus $Y_2 \rightarrow Z_2$ betrachte man den Basiswechsel $Y_1 = Y_2 \times_{Z_2} Z_1 \rightarrow Z_1$. Dann hat man kanonische Bijektionen $F_z(Y_1) \cong F_{\alpha(z)}(Y_2)$ und $F_{z'}(Y_1) \cong F_{\alpha(z')}(Y_2)$. Dies erlaubt es, für einen étales Weg $\gamma \in \text{Iso}(F_z, F_{z'})$ den Morphismus $\alpha_*(\gamma)(Y_2)$ als die Verkettung

$$\alpha_*(\gamma)(Y_2): F_{\alpha(z)}(Y_2) \cong F_z(Y_1) \xrightarrow{\gamma(Y_1)} F_{z'}(Y_1) \cong F_{\alpha(z')}(Y_2)$$

zu definieren. Dies definiert einen Isomorphismus $\alpha_*(\gamma): F_{\alpha(z)} \xrightarrow{\sim} F_{\alpha(z')}$ von Faserfunktoren. Nach Konstruktion ist es klar, dass die Abbildung $\gamma \mapsto \alpha_*(\gamma)$ stetig ist und insgesamt α_* mit dieser Definition ein Funktor ist.

Ist $\beta: Z_2 \rightarrow Z_3$ ein weiterer Morphismus von Varietäten über $\overline{\mathbb{Q}_p}$, so erhält man $(\beta \circ \alpha)_* = \beta_* \circ \alpha_*: \Pi_1(Z_1) \rightarrow \Pi_1(Z_3)$ und es ist offensichtlich $\text{id}_* = \text{id}$.

Als nächstes werde das Verhalten von étales Fundamentalgruppoiden unter Galoiskonjugation untersucht:

Für ein Schema Y über $\overline{\mathbb{Q}_p}$ und einen \mathbb{Q}_p -Automorphismus σ von $\overline{\mathbb{Q}_p}$ setze man ${}^\sigma Y = Y \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_p}, \sigma} \overline{\mathbb{Q}_p}$ und schreibe $\sigma: Y \rightarrow {}^\sigma Y$ für das Inverse der Projektionsabbildung. Dann lässt sich wie folgt ein stetiger Funktor

$$\sigma_*: \Pi_1(Z) \rightarrow \Pi_1({}^\sigma Z)$$

definieren:

Auf Ebene der Objekte sei σ_* als die Abbildung von $z \in Z(\mathbb{C}_p)$ auf ${}^\sigma z = \sigma \circ z \circ \sigma^{-1}$ in ${}^\sigma Z(\mathbb{C}_p)$ definiert. Außerdem definiert man die stetige Abbildung

$$\sigma_*: \text{Iso}(F_z, F_{z'}) \xrightarrow{\sim} \text{Iso}(F_{{}^\sigma z}, F_{{}^\sigma z'})$$

zwischen den Räumen von Morphismen wie folgt:

Es ist klar, dass jede endliche étale Überlagerung von ${}^\sigma Z$ von der Gestalt ${}^\sigma Y$ für eine endliche étale Überlagerung Y von Z ist und dass in kanonischer Weise $F_{\sigma_z}({}^\sigma Y) \cong F_z(Y)$ für jeden Punkt $z \in Z(\mathbb{C}_p)$ gilt. Damit kann man $\sigma_*(\gamma)({}^\sigma Y)$ als die Komposition

$$\sigma_*(\gamma)({}^\sigma Y): F_{\sigma_z}({}^\sigma Y) \cong F_z(Y) \xrightarrow{\gamma} F_{z'}(Y) \cong F_{\sigma_{z'}}({}^\sigma Y)$$

definieren, wodurch ein Isomorphismus von Faserfunktoren $\sigma_*(\gamma)$ definiert wird. Die Abbildung $\gamma \mapsto \sigma_*(\gamma)$ ist wieder stetig und man erhält durch diese Definitionen einen wohldefinierten Funktor σ_* . Es ist zudem offensichtlich, dass $(\sigma\tau)_* = \sigma_* \circ \tau_*$ als Funktoren von $\Pi_1(Z)$ nach $\Pi_1({}^{\sigma\tau} Z) = \Pi_1({}^\sigma({}^\tau Z))$ gilt.

Ist ferner Z bereits über einer endlichen Erweiterung $\mathbb{Q}_p \subset K \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ von \mathbb{Q}_p definiert, d. h. ist also $Z = Z_K \otimes_K \overline{\mathbb{Q}_p}$ für eine Varietät Z_K über K , so liefert für jedes Element σ der Galoisgruppe $G_K = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/K)$ die Abbildung $\text{id} \times_{\text{Spec } K} \text{Spec}(\sigma^{-1})$ einen $\overline{\mathbb{Q}_p}$ -linearen Isomorphismus ${}^\sigma Z \xrightarrow{\sim} Z$, mittels dessen man ${}^\sigma Z$ mit Z identifizieren kann. Es folgt, dass für ein derartiges Z die Gruppe G_K von links durch stetige Automorphismen auf der Kategorie $\Pi_1(Z)$ operiert.

2 Paralleltransport für Prinzipalbündel

2.1 Konstruktion des Funktors

$$\mathcal{B}_{x_0, D}(G) \rightarrow \text{Rep}_{\pi_1(U)}(G(\mathfrak{o}))$$

Es sei \mathfrak{o} der Ring der ganzen Zahlen in \mathbb{C}_p und $S := \text{Spec } \mathfrak{o}$. Außerdem sei $G := \text{Spec } A$ ein glattes und affines Gruppenschema über \mathfrak{o} von endlicher Präsentation. Es folgt sofort, dass G auch treuflach über \mathfrak{o} ist, da die Glattheit von G impliziert, dass G flach über \mathfrak{o} ist, und jedes flache Gruppenschema von endlicher Präsentation wiederum nach [SGA 3, Exposé VI_B, Proposition 9.2. (xi), (xii)] treuflach ist.

Unter einem G -Torseur (oder auch G -Prinzipalbündel) P auf einem \mathfrak{o} -Schema ξ werde im folgenden stets ein darstellbarer Rechts- $G_\xi = G \times_{\text{Spec } \mathfrak{o}} \xi$ -Torseur für die fppf-Topologie auf ξ verstanden.

Ein solcher G -Torseur P auf einem \mathfrak{o} -Schema ξ ist stets glatt über ξ :

2.1.1 Lemma.

Es sei P ein G -Torseur auf einem \mathfrak{o} -Schema ξ . Dann ist P glatt über ξ .

Beweis Da nach Voraussetzung G glatt über \mathfrak{o} ist, ist G_ξ glatt über ξ und damit auch $P \times_\xi G_\xi$ glatt über P . Da nach Definition eines Torseurs $P \times_\xi G_\xi$ isomorph zu $P \times_\xi P$ ist, ist dann auch $P \times_\xi P$ glatt über P . Weil P über ξ nach Definition treuflach und quasi-kompakt ist, folgt mittels Descenttheorie aus dem kartesischen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P \times_\xi P & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \longrightarrow & \xi, \end{array}$$

dass P glatt über ξ ist. □

Ferner halten wir fest:

2.1.2 Satz.

Es seien G , P , ξ wie bisher. Dann ist P sogar ein G -Torseur für die étale Topologie auf ξ .

Beweis Nach Satz 1.1.10 können wir P mit einer Klasse $c(P) \in H_{fppf}^1(\xi, G)$ identifizieren. Nach [Gr, Théorème 11.7.] ist unter den gegebenen Voraussetzungen der kanonische Morphismus $H_{\acute{e}t}^1(\xi, G_{\acute{e}t}) \rightarrow H_{fppf}^1(\xi, G)$, der durch den kanonischen Morphismus von Siten $j: \xi_{fppf} \rightarrow \xi_{\acute{e}t}$ induziert wird, ein Isomorphismus, wobei $G_{\acute{e}t}$ die durch G induzierte étale Garbe ist. Also können wir $c(P)$ in eindeutiger Weise mit einer Klasse $c' \in H_{\acute{e}t}^1(\xi, G)$ identifizieren. Weil $H_{\acute{e}t}^1(X, G) = \check{H}_{\acute{e}t}^1(X, G)$ gilt, ist diese Klasse c' nach Satz 1.1.10 durch einen Garben- G -Torseur P' für die étale Topologie auf ξ gegeben, d. h. es ist $P = j^*P'$. Aufgrund der Isomorphismen und der Darstellbarkeit von P folgt also, dass P' durch P darstellbar ist und P einen G -Torseur für die étale Topologie definiert. \square

Für einen G -Torseur P auf ξ definiert man $\Gamma(\xi, P)$ als die Menge der Schnitte von P . Fasst man P als Garbe auf, so liefert dies gerade die gewöhnliche Definition von $\Gamma(\xi, P)$. Da jedes Element $(\alpha: \mathfrak{o} \rightarrow G) \in G(\mathfrak{o})$ ein Element $(\alpha_\xi: \xi \rightarrow G_\xi) \in G_\xi(\xi)$ induziert und G_ξ als Garbe auf P als Garbe operiert, operiert $G_\xi(\xi)$ auf $\Gamma(\xi, P)$, so dass $\Gamma(\xi, P)$ ein Rechts- $G(\mathfrak{o})$ -Modul ist.

In Analogie zu dem in [DW1] dargestellten Fall von Vektorbündeln soll im folgenden ein étaler Paralleltransport für Prinzipalbündel definiert werden. Dazu wird zunächst wie in [DW1] ein Funktor ρ von einer gewissen Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{x}_0, D}(G)$ von Prinzipalbündeln in die Kategorie $Rep_{\Pi_1(X-D)}(G(\mathfrak{o}))$ der stetigen Funktoren vom étalen Fundamentalgruppoid $\pi_1(X-D)$ in die Kategorie $\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))$ definiert. Diese Kategorie $\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))$ ist wiederum die Kategorie der topologischen Räume mit einer einfach-transitiven und stetigen Rechts- $G(\mathfrak{o})$ -Operation, wobei die Morphismen in dieser Kategorie gerade deren stetige $G(\mathfrak{o})$ -äquivariante Abbildungen sind. Die Definition dieses Funktors $\rho: \mathcal{B}_{\mathfrak{x}_0, D}(G) \rightarrow Rep_{\Pi_1(X-D)}(G(\mathfrak{o}))$ wurde bereits in [DW3] skizziert.

Für einen Morphismus $f: \xi_1 \rightarrow \xi_2$ von \mathfrak{o} -Schemata und einen G -Torseur P auf ξ_2 ist nach Bemerkung 1.1.5 und Lemma 1.1.9 $f^*P = \xi_1 \times_{\xi_2} P$ ein G_{ξ_1} -Torseur auf ξ_1 . Ebenso folgt, wenn man die Torseure jeweils als Garben betrachtet, aus Lemma 1.1.9 und dem Adjunktionsmorphismus $P \rightarrow f_*f^*P$ sowie der Definition von f_* , dass es eine natürliche Rechts- $G(\mathfrak{o})$ -äquivariante

Abbildung $f^*: \Gamma(\xi_2, P) \rightarrow \Gamma(\xi_1, f^*P)$ gibt.

Als nächstes führen wir einige Bezeichnungen ein:

Für $n \geq 1$ sei $\mathfrak{o}_n := \mathfrak{o}/p^n\mathfrak{o} = \overline{\mathbb{Z}}_p/p^n\overline{\mathbb{Z}}_p$. Dann ist $\mathfrak{o} = \varprojlim_n \mathfrak{o}_n$. Ebenso setze man $A_n := A \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_n$. Dann ist $G_n := \text{Spec } A_n$ die Reduktion von G modulo p^n . Für jedes \mathfrak{o} -Schema ξ setze man ferner $\xi_n := \xi \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_n$. Für einen G -Torseur P auf ξ schließlich sei P_n die Reduktion von P zu einem G - bzw. G_n -Torseur auf ξ_n , d. h. es sei $P_n = i_n^*P$, wobei $i_n: \xi_n \rightarrow \xi$ der kanonische Morphismus ist.

Wir versehen nun $G(\mathfrak{o})$ mit einer prodiskreten Topologie, so dass $G(\mathfrak{o})$ zu einer topologischen Gruppe wird:

Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$G(\mathfrak{o}) \cong \text{Hom}_{\mathfrak{o}\text{-Alg.}}(A, \mathfrak{o}) \cong \varprojlim_n \text{Hom}_{\mathfrak{o}_n\text{-Alg.}}(A, \mathfrak{o}_n) \cong \varprojlim_n G(\mathfrak{o}_n).$$

Versieht man $G(\mathfrak{o}_n)$ mit der diskreten Topologie, so erhält man auf $\prod_{n \geq 1} G(\mathfrak{o}_n)$ die induzierte Produkttopologie und auf $\varprojlim_n G(\mathfrak{o}_n)$ die induzierte Teilraumtopologie. Mittels des obigen Isomorphismus liefert das eine Topologie auf $G(\mathfrak{o})$.

Da G nach Voraussetzung glatt und damit insbesondere formell glatt über \mathfrak{o} ist, ist ferner die Abbildung

$$\text{Hom}_{\text{Spec } \mathfrak{o}}(\text{Spec } \mathfrak{o}_{n+1}, G) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Spec } \mathfrak{o}}(\text{Spec } \mathfrak{o}_n, G)$$

surjektiv, so dass alle Übergangsabbildungen $G(\mathfrak{o}_{n+1}) \rightarrow G(\mathfrak{o}_n)$ surjektiv sind. Nach Konstruktion des projektiven Limes sind damit alle Morphismen $G(\mathfrak{o}) \rightarrow G(\mathfrak{o}_n)$ ebenfalls surjektiv.

Mit diesen Vorbereitungen können wir nun eine Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_0, D}(G)$ definieren:

2.1.3 Definition.

Für ein Modell \mathfrak{X} über $\overline{\mathbb{Z}}_p$ einer glatten und projektiven Kurve X über $\overline{\mathbb{Q}}_p$ und einen Divisor D auf X definiere man $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_0, D}(G)$ als die Kategorie der G -Torseure P auf $\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \mathfrak{o}$ mit der folgenden Eigenschaft:

Für alle $n \geq 1$ existiert ein Objekt $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ von $S_{\mathfrak{X}, D}$, so dass $\pi_n^*P_n$ trivial ist, d. h. als G_n -Torseur isomorph zu dem trivialen Torseur $\mathcal{Y}_n \otimes_{\mathfrak{o}_n} G_n$ ist.

Dabei sei $\pi_n: \mathcal{Y}_n \rightarrow \mathfrak{X}_n$ der von π induzierte Morphismus.

Im folgenden seien nun stets X eine glatte projektive Kurve über $\overline{\mathbb{Q}_p}$, \mathfrak{X} ein Modell von X über $\overline{\mathbb{Z}_p}$ und D ein Divisor auf X .

2.1.4 Bemerkung.

Für einen Morphismus $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ von Modellen über $\overline{\mathbb{Z}_p}$ der glatten und projektiven Kurven X und X' über $\overline{\mathbb{Q}_p}$ und einen Divisor D' auf X' induziert der Pullback-Funktor f^* für G -Torseure einen Funktor

$$f^*: \mathcal{B}_{\mathfrak{X}'_{\mathfrak{o}}, D'}(G) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}}, f^*D'}(G).$$

Beweis Es sei $P' \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}'_{\mathfrak{o}}, D'}(G)$ und $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ beliebig. Dann existiert nach Definition von $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}'_{\mathfrak{o}}, D'}(G)$ ein Objekt $\pi': \mathcal{Y}' \rightarrow \mathfrak{X}'$ von $S_{\mathfrak{X}', D'}$, so dass $\pi_n'^* P'_n$ trivial ist.

Setzt man $\mathcal{Y} := \mathcal{Y}' \times_{\mathfrak{X}'} \mathfrak{X}$ und bezeichnet π den von π' induzierten Morphismus $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$, so gilt für den G -Torseur $P := f^* P'$ auf X , dass $\pi_n^* P_n$ trivial ist. Da die Definition der Kategorie $S_{\mathfrak{X}, D}$ nach dem ersten Kapitel der Arbeit verträglich mit Basiswechsel ist, ist $\pi \in S_{\mathfrak{X}, D}$, wobei D das Urbild von D' auf X ist, so dass $P \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}}, f^*D'}(G)$ gilt. \square

Es sei nun $x: \text{Spec } \mathbb{C}_p \rightarrow X$ ein \mathbb{C}_p -wertiger Punkt von X und P ein G -Torseur über $\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}}$. Dann induziert x einen Morphismus $\tilde{x}: \text{Spec } \mathbb{C}_p \rightarrow X \rightarrow \mathfrak{X}$. Da \mathfrak{X} eigentlich über $\overline{\mathbb{Z}_p}$ ist, existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus

$$x' =: \text{Spec } \mathfrak{o} \rightarrow \mathfrak{X},$$

so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \mathbb{C}_p & \xrightarrow{\tilde{x}} & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow x' & \downarrow \\ \text{Spec } \mathfrak{o} & \longrightarrow & \text{Spec } \overline{\mathbb{Z}_p} \end{array}$$

kommutiert. Dieser \mathfrak{o} -wertige Punkt x' von \mathfrak{X} induziert wiederum einen eindeutig bestimmten Morphismus

$$x_{\mathfrak{o}}: \text{Spec } \mathfrak{o} \rightarrow \mathfrak{X}_{\mathfrak{o}}.$$

Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ setze man ferner $x_n := x_{\mathfrak{o}} \circ (\text{Spec } \mathfrak{o}_n \rightarrow \text{Spec } \mathfrak{o})$, so dass sich Gruppen $P_{x_{\mathfrak{o}}}$ und P_{x_n} durch $P_{x_{\mathfrak{o}}} := (x_{\mathfrak{o}}^* P)(\mathfrak{o})$ und $P_{x_n} := (x_n^* P)(\mathfrak{o}_n)$ definieren lassen.

Um auf $P_{x_{\mathfrak{o}}}$ bzw. P_{x_n} Topologien zu definieren, benötigen wir das folgende Lemma:

2.1.5 Lemma.

Der G -Torseur x_\circ^*P über der affinen Basis $\text{Spec } \mathfrak{o}$ ist affin.

Beweis Da nach Voraussetzung G affin über \mathfrak{o} ist, ist auch $G_{\mathfrak{X}_\circ}$ affin über \mathfrak{X}_\circ . Also ist auch der Morphismus $P \times_{\mathfrak{X}_\circ} G_{\mathfrak{X}_\circ} \rightarrow P$ affin. Da nach Definition eines Torseurs $P \times_{\mathfrak{X}_\circ} G_{\mathfrak{X}_\circ}$ isomorph zu $P \times_{\mathfrak{X}_\circ} P$ ist, ist dann auch $P \times_{\mathfrak{X}_\circ} P$ affin über P . Weil P nach Definition treuflach und quasi-kompakt über \mathfrak{X}_\circ ist, folgt mittels Descenttheorie aus dem kartesischen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P \times_{\mathfrak{X}_\circ} P & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \longrightarrow & \mathfrak{X}_\circ, \end{array}$$

dass P affin über \mathfrak{X}_\circ ist. □

Nach Definition von x_\circ und x_n gilt ferner $(x_\circ^*P)_n = x_n^*P$. Daraus folgt:

2.1.6 Lemma.

Es gilt $P_{x_\circ} = \varprojlim_n P_{x_n}$.

Beweis Nach Definition ist $P_{x_\circ} = (x_\circ^*P)(\mathfrak{o})$. Da nach Lemma 2.1.5 x_\circ^*P affin über \mathfrak{o} ist, etwa $x_\circ^*P = \text{Spec } B$, ist dies isomorph zu

$$\text{Hom}_{\mathfrak{o}\text{-Alg}}(B, \mathfrak{o}) = \varprojlim_n \text{Hom}_{\mathfrak{o}\text{-Alg}}(B, \mathfrak{o}_n).$$

Da $f(p^n B) = 0$ für jeden Morphismus von \mathfrak{o} -Algebren $f: B \rightarrow \mathfrak{o}_n$ gilt, faktorisiert jeder solcher Morphismus f über $B/p^n B = B \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_n$. Also ist

$$\text{Hom}_{\mathfrak{o}\text{-Alg}}(B, \mathfrak{o}_n) \cong \text{Hom}_{\mathfrak{o}_n\text{-Alg}}(B \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_n, \mathfrak{o}_n).$$

Damit gilt unter Verwendung von $(x_\circ^*P)_n = x_n^*P$:

$$\begin{aligned} P_{x_\circ} &\cong \varprojlim_n \text{Hom}_{\mathfrak{o}_n\text{-Alg}}(B \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_n, \mathfrak{o}_n) \\ &\cong \varprojlim_n (i_n^*(x_\circ^*P))(\mathfrak{o}_n) \cong \varprojlim_n (x_n^*P)(\mathfrak{o}_n) = \varprojlim_n P_{x_n} \end{aligned}$$

□

Versieht man nun P_{x_n} für alle n jeweils mit der diskreten Topologie, so erhält man auf P_{x_o} eine prodiskrete Topologie. Dadurch wird P_{x_o} zu einem topologischen Raum mit stetiger $G(\mathfrak{o})$ -Aktion. Dies liegt daran, dass, wie bereits gesehen, in gleicher Weise $G(\mathfrak{o}) = \varprojlim_n G(\mathfrak{o}_n)$ gilt, wobei $G(\mathfrak{o}_n)$ bzw. $G(\mathfrak{o})$ mit der diskreten bzw. der induzierten prodiskreten Topologie versehen wurden, sowie an der Tatsache, dass die Operationen von $G(\mathfrak{o}_n)$ auf P_{x_n} für die einzelnen n miteinander verträglich und jeweils auch mit der Operation von $G(\mathfrak{o})$ auf P_{x_o} verträglich sind.

Die Operation von $G(\mathfrak{o}_n)$ bzw. $G(\mathfrak{o})$ auf P_{x_n} bzw. P_{x_o} lässt sich mit Hilfe des folgenden Lemmas genauer beschreiben:

2.1.7 Lemma.

x_o^*P ist ein trivialer Torseur für die étale Topologie und damit auch für die fppf-Topologie.

Beweis Da \mathfrak{o} ein vollständiger lokaler Ring ist, ist nach [M, Propostion I.4.5] \mathfrak{o} und damit $\text{Spec } \mathfrak{o}$ strikt henselsch.

Außerdem folgt für die Wahl $\xi = \mathfrak{X}_o$ aus Satz 2.1.2, dass P auch ein Torseur für die étale Topologie ist. Nach Lemma 1.1.9 ist dann auch x_o^*P ein Torseur für die étale Topologie und definiert also in eindeutiger Weise nach Satz 1.1.10 ein Element $c(x_o^*P) \in H_{\text{ét}}^1(\text{Spec } \mathfrak{o}, G)$. Nach [FK, Corollary I.1.19] ist aber $H_{\text{ét}}^1(\text{Spec } \mathfrak{o}, G) = 0$, also $c(x_o^*P) = 0$ und damit x_o^*P trivial als étaler Torseur, also auch trivial als Torseur für die fppf-Topologie. \square

Damit operieren also $G(\mathfrak{o})$ bzw. $G(\mathfrak{o}_n)$ jeweils einfach-transitiv auf P_{x_o} bzw. P_{x_n} .

Es gilt nun:

2.1.8 Lemma.

Der G -Torseur x_o^*P ist glatt über $\text{Spec } \mathfrak{o}$.

Beweis Da nach Voraussetzung G glatt über \mathfrak{o} ist, ist auch der Morphismus $x_o^*P \times_{\text{Spec } \mathfrak{o}} G \rightarrow x_o^*P$ glatt. Da nach Definition eines Torseurs $x_o^*P \times_{\text{Spec } \mathfrak{o}} G$ isomorph zu $x_o^*P \times_{\text{Spec } \mathfrak{o}} x_o^*P$ ist, ist dann auch $x_o^*P \times_{\text{Spec } \mathfrak{o}} x_o^*P$ glatt über x_o^*P . Weil x_o^*P über $\text{Spec } \mathfrak{o}$ nach Definition treufach und quasi-kompakt ist, folgt mittels Descenttheorie aus dem kartesischen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} x_o^*P \times_{\mathfrak{o}} x_o^*P & \longrightarrow & x_o^*P \\ \downarrow & & \downarrow \\ x_o^*P & \longrightarrow & \text{Spec } \mathfrak{o}, \end{array}$$

dass $x_\circ P$ glatt über \mathfrak{o} ist. □

Da $x_\circ^* P$ also glatt und damit insbesondere formell glatt über \mathfrak{o} ist, ist die Abbildung

$$\text{Hom}_{\text{Spec } \mathfrak{o}}(\text{Spec } \mathfrak{o}_{n+1}, x_\circ^* P) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Spec } \mathfrak{o}}(\text{Spec } \mathfrak{o}_n, x_\circ^* P)$$

surjektiv, so dass alle Übergangsabbildungen $x_\circ^* P(\mathfrak{o}_{n+1}) \rightarrow x_\circ^* P(\mathfrak{o}_n)$ surjektiv sind. Nach Konstruktion des projektiven Limes sind damit alle Morphismen $x_\circ^* P(\mathfrak{o}) \rightarrow x_\circ^* P(\mathfrak{o}_n)$ ebenfalls surjektiv.

Desweiteren seien die folgenden Kategorien definiert:

2.1.9 Definition.

Die Kategorie $\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}_n))$ sei für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ wie folgt definiert:

Die Objekte sind Mengen mit einer einfach-transitiven Rechts- $G(\mathfrak{o}_n)$ -Aktion; die Morphismen sind $G(\mathfrak{o}_n)$ -äquivariante Abbildungen.

Außerdem definiert man die Kategorie $\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))$, indem man als Objekte topologische Räume mit einer einfach-transitiven und stetigen Rechts- $G(\mathfrak{o})$ -Aktion und als Morphismen deren stetige $G(\mathfrak{o})$ -äquivariante Abbildungen wählt.

2.1.10 Lemma.

Es seien $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))$. Dann bestimmt die Wahl zweier Elemente $p_1 \in P_1$ und $p_2 \in P_2$ eine Bijektion

$$\begin{aligned} \Phi: G(\mathfrak{o}) &\xrightarrow{\sim} \text{Mor}_{\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))}(P_1, P_2) \\ g &\longmapsto (\varphi_g: P_1 \rightarrow P_2, p_1 h \mapsto p_2 g h). \end{aligned}$$

Beweis Für alle $g \in G(\mathfrak{o})$ ist φ_g ein wohldefiniertes Element von $\text{Mor}_{\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))}(P_1, P_2)$, da $G(\mathfrak{o})$ einfach-transitiv auf P_1 und P_2 operiert.

Ist $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))}(P_1, P_2)$, so folgt aus der Tatsache, dass $G(\mathfrak{o})$ einfach-transitiv auf P_1 und P_2 operiert, dass $\alpha = \varphi_{\alpha(p_1)}$ ist. Damit ist die Abbildung Φ surjektiv.

Ist ferner $\varphi_g = \varphi_{g'}$ für zwei Elemente $g \in G(\mathfrak{o})$, so ist $p_2 g h = p_2 g' h$ für alle $h \in G(\mathfrak{o})$ und damit $g = g'$, so dass Φ injektiv und also insgesamt bijektiv ist. □

2.1.11 Bemerkung.

Die Topologie auf $\text{Mor}_{\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))}(P_1, P_2)$, die diesen Morphismus zu einem Homöomorphismus macht, ist unabhängig von der Wahl von p_1 und p_2 . Ersetzt man

beispielsweise p_2 durch p'_2 , so existiert ein Element $g' \in G$, so dass $p_2 = p'_2 g'$ ist. Ist dann $M \subset \text{Mor}_{\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))}(P_1, P_2)$ offen bezüglich der Topologie für den Fall der Wahl von p_1 und p_2 , so ist $\Phi'^{-1}(M) = \Phi^{-1}(M)g'$, wenn Φ' die durch p_1 und p'_2 induzierte Bijektion $\Phi': G(\mathfrak{o}) \xrightarrow{\sim} \text{Mor}_{\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))}(P_1, P_2)$ ist, und damit auch $\Phi'^{-1}(M)$ eine offene Teilmenge von $G(\mathfrak{o})$, so dass M auch für den Fall der Wahl von p_1 und p'_2 eine offene Teilmenge von $\text{Mor}_{\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))}(P_1, P_2)$ ist.

Auf analoge Weise sieht man, dass die auf $\text{Mor}_{\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))}(P_1, P_2)$ induzierte Topologie unabhängig von der Wahl von p_1 ist.

Damit wird $\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))$ zu einer topologischen Kategorie, d. h. für alle P_1 und P_2 aus $\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))$ ist $\text{Mor}_{\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))}(P_1, P_2)$ ein topologischer Raum und die Komposition von Morphismen ist stetig.

Es sei nun P ein G -Torseur in $\mathcal{B}_{\mathfrak{x}, D}(G)$. Für alle $n \geq 1$ wähle man dann ein Objekt $(\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}) \in S_{\mathfrak{x}, D}^{\text{good}}$, so dass $\pi_n^* P_n$ trivial auf \mathcal{Y}_n ist. Dies geht nach folgendem Satz:

2.1.12 Satz.

Ist P ein G -Torseur in $\mathcal{B}_{\mathfrak{x}, D}(G)$, so existiert für alle $n \geq 1$ ein Objekt $(\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}) \in S_{\mathfrak{x}, D}^{\text{good}}$, so dass $\pi_n^* P_n$ trivial auf \mathcal{Y}_n ist.

Beweis Es sei P ein G -Torseur in $\mathcal{B}_{\mathfrak{x}, D}(G)$. Nach Definition von $\mathcal{B}_{\mathfrak{x}, D}(G)$ existiert dann für alle $n \geq 1$ ein Objekt $(\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}) \in S_{\mathfrak{x}, D}$, so dass $\pi_n^* P_n$ trivial auf \mathcal{Y}_n ist. Nach Korollar 1.2.8 existiert ein Objekt $(\pi': \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathfrak{X}) \in S_{\mathfrak{x}, D}^{\text{good}}$, welches π dominiert, d. h. es gibt einen Morphismus $\varphi: \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}$, so dass $\pi \circ \varphi = \pi'$ ist. Da $\pi_n^* P_n$ trivial auf \mathcal{Y}_n ist, ist dann auch $\varphi^* \pi_n^* P_n$ trivial auf $\tilde{\mathcal{Y}}_n$, so dass wegen $\pi' = \pi \circ \varphi$ damit $(\pi')^*_n P_n$ trivial auf $\tilde{\mathcal{Y}}_n$ ist. \square

Man setze nun $U = X - D$ und $V = \mathcal{Y} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \overline{\mathbb{Q}}_p - \pi^* D$. Dann ist V eine endliche étale Überlagerung von U . Nach [Mu, 4.2] existiert somit ein Punkt $y \in V(\mathbb{C}_p)$ über $x \in U(\mathbb{C}_p)$ und es gilt:

2.1.13 Lemma.

Die Pullback-Abbildung

$$y_n^*: \Gamma(\mathcal{Y}_n, \pi_n^* P_n) \rightarrow \Gamma(\text{Spec } \mathfrak{o}_n, y_n^* \pi_n^* P_n) = P_{x_n}$$

ist ein Isomorphismus von Rechts- $G(\mathfrak{o})$ -Mengen.

Beweis Es genügt zu zeigen, dass die Abbildung

$$y_n^*: \Gamma(\mathcal{Y}_n, \mathcal{Y}_n \times_{\text{Spec } \mathfrak{o}_n} G_n) \rightarrow \Gamma(\text{Spec } \mathfrak{o}_n, y_n^*(\mathcal{Y}_n \times_{\text{Spec } \mathfrak{o}_n} G_n)) = \Gamma(\text{Spec } \mathfrak{o}_n, G_n) = G_n(\mathfrak{o}_n)$$

bijektiv ist.

Aufgrund der universellen Eigenschaft des Faserprodukts hat man die folgenden kanonischen Bijektionen:

$$\Gamma(\mathcal{Y}_n, \mathcal{Y}_n \times_{\text{Spec } \mathfrak{o}_n} G_n) \cong \text{Mor}_{\text{Spec } \mathfrak{o}_n}(\mathcal{Y}_n, G_n) \cong \text{Hom}_{\mathfrak{o}_n\text{-Alg}}(A_n, \Gamma(\mathcal{Y}_n, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_n}))$$

Da $\pi \in S_{\mathfrak{X}, D}^{\text{good}}$ ist und damit

$$\Gamma(\mathcal{Y}_n, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_n}) = (\lambda_n)_* \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_n}(\text{Spec } \mathfrak{o}_n) = \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathfrak{o}_n}(\text{Spec } \mathfrak{o}_n) = \mathfrak{o}_n$$

gilt, ist dies kanonisch isomorph zu $\text{Hom}_{\mathfrak{o}_n\text{-Alg}}(A_n, \mathfrak{o}_n) = G_n(\mathfrak{o}_n)$. Identifiziert man $\Gamma(\mathcal{Y}_n, \mathcal{Y}_n \times_{\text{Spec } \mathfrak{o}_n} G_n)$ mit $G_n(\mathfrak{o}_n)$, so wird die Abbildung y_n^* zur Identität. \square

Damit kann nun für alle $P \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}, D}(G)$ und für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ ein Funktor

$$\rho_{P,n}: \Pi_1(U) \rightarrow \mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))$$

konstruiert werden, wobei wie oben $U = X - D$ sei:

Für jeden \mathbb{C}_p -wertigen Punkt von U setze man $\rho_{P,n}(x) := P_{x_n}$. Einem étalen Weg γ von $x \in U(\mathbb{C}_p)$ nach $x' \in U(\mathbb{C}_p)$ ordnet man ferner wie folgt einen Morphismus $\rho_{P,n}(\gamma)$ in $\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))$ zu:

Man wählt zunächst ein Objekt $(\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}) \in S_{\mathfrak{X}, D}^{\text{good}}$, so dass $\pi_n^* P_n$ trivial auf \mathcal{Y}_n ist. Dies ist möglich nach Satz 2.1.12. Außerdem wähle man einen Punkt $y \in V(\mathbb{C}_p)$ über $x \in U(\mathbb{C}_p)$, wobei wie oben $V = \mathcal{Y} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p} - \pi_{\overline{\mathbb{Q}_p}}^* D$ sei. Ein solcher Punkt existiert nach [Mu, 4.2], da V eine endliche étale Überlagerung von X ist. Dann ist γy ein \mathbb{C}_p -wertiger Punkt von V über x' , wobei γy das Bild von y unter der Abbildung $\gamma_V: F_x(V) \rightarrow F_{x'}(V)$ ist. Mit Hilfe dieser Wahlen lässt sich dann $\rho_{P,n}(\gamma)$ als die Komposition

$$\rho_{P,n}(\gamma): P_{x_n} \xrightarrow{(y_n^*)^{-1}} \Gamma(\mathcal{Y}_n, \pi_n^* G_n) \xrightarrow{(\gamma y)_n^*} P_{x'_n}$$

definieren.

Ähnlich wie in [DW1, §3] zeigt man:

2.1.14 Lemma.

Der Morphismus $\rho_{P,n}(\gamma)$ ist unabhängig von allen getroffenen Wahlen und definiert einen Morphismus in $\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}_n))$.

Insgesamt erhält man also einen wohldefinierten stetigen Funktor $\rho_{P,n}$ von $\Pi_1(X - D)$ in die Kategorie $\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}_n))$.

Beweis

- (i) Als erstes soll gezeigt werden, dass $\rho_{P,n}(\gamma)$ unabhängig von der Wahl des Punktes y über x ist:

Dazu sei $z \in V(\mathbb{C}_p)$ ein weiterer Punkt über x .

Nach Theorem 1.2.14 existieren nun eine endliche Gruppe G und ein G -äquivarianter Morphismus $\tilde{\pi}: \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$, die ein Objekt in $\mathfrak{T}_{\tilde{\mathcal{X}},D}^{good}$ definieren, zusammen mit einem Morphismus $\varphi: \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}$, so dass $\tilde{\pi} = \pi \circ \varphi$ ist und also $\tilde{\pi}$ das in der Konstruktion von $\rho_{P,n}(\gamma)$ gewählte Element $\pi \in S_{\tilde{\mathcal{X}},D}^{good}$ dominiert. Insbesondere ist $\tilde{V} := \tilde{Y} - \tilde{\pi}^*D$ ein G -Torseur auf U und damit eine Galoisüberlagerung von U mit Gruppe G , wobei \tilde{Y} die generische Faser von $\tilde{\mathcal{Y}}$ bezeichnet. Wählt man nun zwei \mathbb{C}_p -wertige Punkte \tilde{y} und \tilde{z} von V über y bzw. z (die Punkte \tilde{y} und \tilde{z} existieren nach [Mu, 4.2]), so liegen die Punkte $\gamma\tilde{y}$ und $\gamma\tilde{z}$ über γy bzw. γz . Weil sowohl \tilde{y} als auch \tilde{z} über x liegen, existiert ein eindeutig bestimmtes Element $\sigma \in G$, so dass $\sigma\tilde{y} = \tilde{z}$ ist und damit auch $\sigma\tilde{y}_o = \tilde{z}_o$ und $\sigma\tilde{y}_n = \tilde{z}_n$ für alle $n \geq 1$ gilt.

Nach Konstruktion ist außerdem das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc}
 P_{x_n} & \xleftarrow[\sim]{y_n^*} \Gamma(\mathcal{Y}_n, \pi_n^* P_n) \xrightarrow[\sim]{(\gamma y)_n^*} & P_{x'_n} \\
 \parallel & \downarrow \varphi_n^* \sim & \parallel \\
 P_{x_n} & \xleftarrow[\sim]{\tilde{y}_n^*} \Gamma(\tilde{\mathcal{Y}}_n, \tilde{\pi}_n^* P_n) \xrightarrow[\sim]{(\gamma \tilde{y})_n^*} & P_{x'_n}
 \end{array}$$

Also gilt:

$$(\gamma y)_n^* \circ (y_n^*)^{-1} = (\gamma \tilde{y})_n^* \circ (\tilde{y}_n^*)^{-1}$$

Analog sieht man:

$$(\gamma z)_n^* \circ (z_n^*)^{-1} = (\gamma \tilde{z})_n^* \circ (\tilde{z}_n^*)^{-1}$$

Wegen $\tilde{z} = \sigma\tilde{y}$ ist nun \tilde{z}_n^* gleich der Komposition

$$\Gamma(\tilde{\mathcal{Y}}_n, \tilde{\pi}_n^* P_n) \xrightarrow{\sigma^*} \Gamma(\tilde{\mathcal{Y}}_n, \tilde{\pi}_n^* P_n) \xrightarrow{\tilde{y}_n^*} P_{x_n}.$$

Dabei ist σ^* der von σ induzierte Morphismus.

Aufgrund der Natürlichkeit von γ ist desweiteren $\gamma\tilde{z} = \sigma\gamma\tilde{y}$ und also

$$(\gamma\tilde{z})_n^* = (\gamma\tilde{y})_n^* \circ \sigma^*.$$

Also folgt:

$$(\gamma z)_n^* \circ (z_n^*)^{-1} = (\gamma\tilde{z})_n^* \circ (\tilde{z}_n^*)^{-1} = (\gamma\tilde{y})_n^* \circ \sigma^* \circ (\sigma^*)^{-1} \circ (\tilde{y}_n^*)^{-1} = (\gamma y)_n^* \circ (y_n^*)^{-1}.$$

Dies zeigt, dass $\rho_{P,n}$ unabhängig von der Wahl des Punktes y über x ist.

- (ii) Als nächstes soll gezeigt werden, dass $\rho_{P,n}$ nicht von der Wahl der Überdeckung $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ abhängt:

Es sei daher $\tilde{\pi}: \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathfrak{X}$ ein weiteres Objekt aus $S_{\mathfrak{X}, D}$, so dass $\tilde{\pi}_n^* P_n$ ein trivialer G -Torseur ist. Nach Korollar 1.2.8 existiert dann ein Element $\pi' \in S_{\mathfrak{X}, D}^{\text{good}}$, das sowohl π als auch $\tilde{\pi}$ dominiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man somit annehmen, dass $\tilde{\pi}$ den Morphismus π dominiert. Mit den Notationen von oben wähle man einen Punkt $\tilde{y} \in \tilde{V}(\mathbb{C}_p)$ über x und man setze $y = \varphi_{\overline{\mathbb{Q}_p}}(\tilde{y})$, wobei $\varphi_{\overline{\mathbb{Q}_p}}: \tilde{Y} \rightarrow Y$ die induzierte Abbildung auf den generischen Fasern ist. Es folgt $\varphi_{\overline{\mathbb{Q}_p}}(\gamma\tilde{y}) = \gamma y$ und aufgrund der Eigentlichkeit von \mathcal{Y} und $\tilde{\mathcal{Y}}$ über $\text{Spec } \overline{\mathbb{Z}_p}$ gilt $y_\circ = \varphi(\tilde{y}_\circ)$ und $(\gamma y)_\circ = \varphi((\gamma\tilde{y})_\circ)$.

Damit erhält man dasselbe Diagramm wie oben. Also folgt:

$$(\gamma y)_n^* \circ (y_n^*)^{-1} = (\gamma\tilde{y})_n^* \circ (\tilde{y}_n^*)^{-1}$$

Dies zeigt, dass $\rho_{P,n}$ unabhängig von der Wahl der trivialisierenden Überdeckung $\pi \in S_{\mathfrak{X}, D}^{\text{good}}$ ist.

- (iii) Es ist klar, dass $\rho_{P,n}(\text{id}) = \text{id}$ für den trivialen Weg $\text{id} \in \text{Iso}(F_x, F_x)$ gilt. Für Wege $\gamma \in \text{Iso}(F_x, F_{x'})$ und $\gamma' \in \text{Iso}(F_{x'}, F_{x''})$ sowie einen gewählten Punkt $y \in V(\mathbb{C}_p)$ über x liegt der Punkt γy über x' und es gilt daher $\rho_{P,n}(\gamma) = (\gamma y)_n^* \circ (y_n^*)^{-1}$ und $\rho_{P,n}(\gamma') = (\gamma'(\gamma y))_n^* \circ ((\gamma y)_n^*)^{-1}$. Daraus folgt: $\rho_{P,n}(\gamma') \circ \rho_{P,n}(\gamma) = ((\gamma' \circ \gamma)(y))_n^* \circ (y_n^*)^{-1} = \rho_{P,n}(\gamma' \circ \gamma)$. \square

Mit Hilfe dieser Funktoren $\rho_{P,n}$ können wir nun einen Funktor

$$\rho_P: \Pi_1(U) \rightarrow \mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))$$

definieren:

Für jeden \mathbb{C}_p -wertigen Punkt von U setzt man $\rho_P(x) = P_{x_\circ}$; für einen étalen Weg γ definiert man $\rho_P(\gamma)$ als $\rho_P(\gamma) = \varprojlim_n \rho_{P,n}(\gamma): P_{x_\circ} \rightarrow P_{x'_\circ}$.

Dies ergibt einen wohldefinierten Funktor ρ_P , da man ähnlich wie im Beweis von [DW1, Theorem 22] zeigt:

2.1.15 Lemma.

Die Familie von Abbildungen $(\rho_{P,n}(\gamma))_{n \geq 1}$ definiert einen Morphismus zwischen den projektiven Systemen $(P_{x_n})_{n \geq 1}$ und $(P_{x'_n})_{n \geq 1}$.

Beweis Es genügt zu zeigen, dass die Abbildungen

$$\rho_{P,n}: \text{Iso}(F_x, F_{x'}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{o}_n}(P_{x_n}, P_{x'_n})$$

ein projektives System bezüglich der kanonischen Projektionen

$$\lambda_{n+1}: \text{Hom}_{\mathfrak{o}_{n+1}}(P_{x_{n+1}}, P_{x'_{n+1}}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{o}_{n+1}}(P_{x_{n+1}}, P_{x'_{n+1}}) \otimes_{\mathfrak{o}_{n+1}} \mathfrak{o}_n = \text{Hom}_{\mathfrak{o}_n}(P_{x_n}, P_{x'_n})$$

bilden, so dass $\lambda_{n+1} \circ \rho_{P,n+1} = \rho_{P,n}$ ist.

Dazu wählt man für ein gegebenes $n \geq 1$ ein Element $(\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}) \in S_{\mathfrak{X},D}^{\text{good}}$, so dass $\pi_{n+1}^* P_{n+1}$ ein trivialer G -Torseur ist. Dann ist auch $\pi_n^* P_n$ trivial. Für einen Punkt $y \in V(\mathbb{C}_p)$ über x und einen étalen Weg $\gamma \in \text{Iso}(F_x, F_{x'})$ betrachte man das folgende kommutierende Diagramm, wobei a und b die kanonischen Abbildungen sind:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec } \mathfrak{o}_n & \xrightarrow{y_n} & \mathcal{Y}_n & \xleftarrow{(\gamma y)_n} & \text{Spec } \mathfrak{o}_n \\ \downarrow b & & \downarrow a & & \downarrow b \\ \text{Spec } \mathfrak{o}_{n+1} & \xrightarrow{y_{n+1}} & \mathcal{Y}_{n+1} & \xleftarrow{(\gamma y)_{n+1}} & \text{Spec } \mathfrak{o}_{n+1}. \end{array}$$

Dieses Diagramm induziert wiederum folgendes kommutierendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} P_{x_{n+1}} & \xleftarrow{y_{n+1}^*} & \Gamma(\mathcal{Y}_{n+1}, \pi_{n+1}^* P_{n+1}) & \xrightarrow{(\gamma y_{n+1})^*} & P_{x'_{n+1}} \\ \downarrow b^* & & \downarrow a^* & & \downarrow b^* \\ P_{x_n} & \xleftarrow{y_n^*} & \Gamma(\mathcal{Y}_n, \pi_n^* P_n) & \xrightarrow{(\gamma y_n)^*} & P_{x'_n}. \end{array}$$

Die Abbildungen b^* sind gerade die kanonischen Reduktionsabbildungen von den topologischen Räumen mit stetiger $G(\mathfrak{o}_{n+1})$ -Aktion $P_{x_{n+1}}$ bzw. $P_{x'_{n+1}}$ zu den topologischen Räumen mit stetiger $G(\mathfrak{o}_n)$ -Aktion P_{x_n} bzw. $P_{x'_n}$. Damit ist

2.1 Konstruktion des Funktors $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}(G) \rightarrow \text{Rep}_{\pi_1(U)}(G(\mathfrak{o}))$

die Abbildung $\rho_{P,n}(\gamma) = (\gamma y)_n^* \circ (y_n^*)^{-1}$ die Reduktion modulo p^n der Abbildung $\rho_{P,n+1}(\gamma) = (\gamma y)_{n+1}^* \circ (y_{n+1}^*)^{-1}$. \square

Man bemerke, dass man für einen fest gewählten Punkt $x \in U(\mathbb{C}_p)$ einen stetigen Homomorphismus $\rho_P: \pi_1(U, x) \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))}(P_{x_o})$ erhält.

Bezeichnet man mit $\text{Rep}_{\pi_1(U)}(G(\mathfrak{o}))$ die Kategorie der stetigen Funktoren von $\pi_1(U)$ nach $\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))$, so erhält man insgesamt einen Funktor

$$\rho: \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}(G) \rightarrow \text{Rep}_{\pi_1(U)}(G(\mathfrak{o})),$$

indem man ein Objekt P aus $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}(G)$ auf ρ_P und einen Morphismus $f: P \rightarrow P'$ auf die Familie $(f_{x_o})_{x \in U(\mathbb{C}_p)}$ abbildet. Dabei sei $f_{x_o}: P_{x_o} \rightarrow P'_{x_o}$ die Abbildung $f_{x_o} = (x_o^* f)(\mathfrak{o})$.

Dies ergibt einen wohldefinierten Funktor, da die Familie von Morphismen topologischer Räume mit stetiger $G(\mathfrak{o})$ -Aktion

$$f_{x_o} = x_o^* f: P_{x_o} \rightarrow P'_{x_o}, x \in U(\mathbb{C}_p) = \text{Obj } \Pi_1(U)$$

eine natürliche Transformation von ρ_P nach $\rho_{P'}$ definiert, die mit ρ_f bezeichnet werde:

Sei nämlich $\gamma \in \text{Mor}_{\Pi_1(U)}(x, x')$ ein étaler Weg. Dann existiert nach Korollar 1.2.8 für alle $n \geq 1$ ein Element $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ in $S_{\mathfrak{X}, D}^{\text{good}}$, so dass sowohl $\pi_n^* P_n$ als auch $\pi_n^* P'_n$ triviale Torseure sind.

Es bezeichne nun f_n die Reduktion von f modulo p^n und man setze $f_{x_n} := x_n^*(f)$. Außerdem wähle man einen Punkt y über x und definiere $y' := \gamma y$. Dann zeigt das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P_{x_n} & \xrightarrow{f_{x_n}} & P'_{x_n} \\ \uparrow y_n^* \sim & & \sim y_n^* \uparrow \\ \Gamma(\mathcal{Y}_n, \pi_n^* P_n) & \xrightarrow{\Gamma(\mathcal{Y}_n, \pi_n^* f_n)} & \Gamma(\mathcal{Y}_n, \pi_n^* P'_n) \\ \downarrow (y'_n)^* \sim & & \sim (y'_n)^* \downarrow \\ P_{x'_n} & \xrightarrow{f_{x'_n}} & P'_{x'_n} \end{array}$$

dass $f_{x'_n} \circ \rho_{P,n}(\gamma) = \rho_{P',n}(\gamma) \circ f_{x_n}$ gilt. Mittels Übergang zum projektiven Limes erhält man $f_{x'_o} \circ \rho_P(\gamma) = \rho_{P'}(\gamma) \circ f_{x_o}$. Also ist $\rho_f = (f_{x_o})$ ein Morphismus von ρ_P zu $\rho_{P'}$.

2.2 Ausdehnung auf Prinzipalbündel über $X_{\mathbb{C}_p}$

Für die Definition des Paralleltransports interessiert man sich eigentlich eher für Torseure auf $X_{\mathbb{C}_p}$ als auf \mathfrak{X}_o für ein bestimmtes Modell \mathfrak{X} , wie wir das bislang getan haben. Deshalb definieren wir wie in [DW3]:

2.2.1 Definition.

Für ein glattes und affines Gruppenschema G von endlicher Präsentation über \mathfrak{o} definiert man die Kategorie $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G)$ als die volle Unterkategorie aller G -Rechtstorseure (d. h. $G_{X_{\mathbb{C}_p}}$ -Torseure) P auf $X_{\mathbb{C}_p}$ mit der folgenden Eigenschaft:

Es gibt ein Modell \mathfrak{X} von X über $\overline{\mathbb{Z}_p}$ und einen G -Torseur \tilde{P} auf \mathfrak{X}_o , der zu der Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}(G)$ gehört, so dass die G -Torseure P und $j^\tilde{P}$ über $X_{\mathbb{C}_p}$ isomorph sind, wobei $j: X_{\mathbb{C}_p} \rightarrow \mathfrak{X}_o$ die kanonische Immersion sei.*

Insgesamt erhält man damit aus der obigen Konstruktion zusammen mit den gleichen Argumenten wie im Vektorbündelfall einen Funktor

$$\rho: \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G) \rightarrow \text{Rep}_{\pi_1(U)}(G(\mathbb{C}_p))$$

in die Kategorie der stetigen Funktoren von $\pi_1(U)$ in die Kategorie $\mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p))$ der topologischen Räume mit einer einfach-transitiven und stetigen $G(\mathbb{C}_p)$ -Aktion von rechts:

Für ein Objekt P von $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G)$ definiere man den stetigen Funktor

$$\rho(P) = \rho_P: \Pi_1(U) \rightarrow \mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p))$$

wie folgt:

Für $x \in U(\mathbb{C}_p) = \text{Obj } \Pi_1(U)$ setze man $\rho_P(x) = P_x = x^*P$. Zum anderen definiert man für zwei Punkte $x, x' \in U(\mathbb{C}_p)$ die stetige Abbildung

$$\rho_P = \rho_{P, x, x'}: \text{Mor}_{\Pi_1(U)}(x, x') \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}_p}(P_x, P_{x'})$$

durch $\rho_P(\gamma) = \psi_{x'}^{-1} \circ (\rho_{\tilde{P}}(\gamma) \otimes_{\mathfrak{o}} \mathbb{C}_p) \circ \psi_x$.

Dabei sei \mathfrak{X} ein gewähltes Modell von X über $\overline{\mathbb{Z}_p}$ und \tilde{P} ein G -Torseur in der Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}(G)$ zusammen mit einem Isomorphismus $\psi: P \rightarrow j^*\tilde{P}$ von G -Torseuren über $X_{\mathbb{C}_p}$, wobei $j: X_{\mathbb{C}_p} \rightarrow \mathfrak{X}_o$ die kanonische Immersion sei. Außerdem ist ψ_x die Faserabbildung

$$\psi_x = x^*(\psi): P_x \xrightarrow{\sim} (j^*\tilde{P})_x = \tilde{P}_{x_o} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathbb{C}_p = \tilde{P}_{x_o} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Für einen Morphismus $f: P \rightarrow P'$ in $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G)$ ist der Morphismus

$$\rho(f) = \rho_f: \rho_P \rightarrow \rho_{P'}$$

gegeben durch die Familie von Abbildungen $f_x = x^*(f): P_x \rightarrow P_{x'}$ für alle $x \in U(\mathbb{C}_p)$.

Dass die Definition des Funktors unabhängig von den getroffenen Wahlen, d. h. von der Wahl des Modells \mathfrak{X} und des G -Torseurs $\tilde{P} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}, D}(G)$, ist, folgt dabei aus den analogen Resultaten zu [DW1, Proposition 26] und [DW1, Proposition 27]:

Es sei $\alpha: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ ein Morphismus von Modellen über $\overline{\mathbb{Z}_p}$ der glatten und projektiven Kurven X bzw. X' über $\overline{\mathbb{Q}_p}$ und D' ein Divisor auf X' . Man setze außerdem $U' = X' - D'$ und $U = X - \alpha^*D'$. Dann definiert die generische Faser von α einen Funktor

$$A(\alpha): \text{Rep}_{\Pi_1(U')}(\mathcal{G}(\mathfrak{o})) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(\mathcal{G}(\mathfrak{o}))$$

wie folgt:

Für ein Objekt $\Gamma \in \text{Rep}_{\Pi_1(U')}(\mathcal{G}(\mathfrak{o}))$ definiert man $A(\alpha)(\Gamma)$ als die Komposition von Funktoren

$$A(\alpha)(\Gamma): \Pi_1(U) \xrightarrow{\alpha^*} \Pi_1(U') \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{P}(\mathcal{G}(\mathfrak{o})).$$

Für einen Morphismus $f: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ in der Kategorie $\text{Rep}_{\Pi_1(U')}(\mathcal{G}(\mathfrak{o}))$, der durch die Familie von Abbildungen $f_{x'}: \Gamma_{1x'} \rightarrow \Gamma_{2x'}$ für $x' \in U'(\mathbb{C}_p)$ gegeben ist, definieren wir $A(\alpha)(f)$ als die Familie von Abbildungen

$$A(\alpha)(\Gamma_1)_x = \Gamma_{1, \alpha(x)} \xrightarrow{f_{\alpha(x)}} \Gamma_{2, \alpha(x)} = A(\alpha)(\Gamma_2)_x.$$

Dies definiert den gewünschten Funktor $A(\alpha)$. Ist $\alpha': \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}''$ ein weiterer Morphismus von Modellen über $\overline{\mathbb{Z}_p}$ der glatten und projektiven Kurven X' bzw. X'' über $\overline{\mathbb{Q}_p}$, so gilt $A(\alpha' \circ \alpha) = A(\alpha) \circ A(\alpha')$.

Als analoges Resultat zu [DW1, Proposition 26] erhält man in der so gegebenen Situation:

2.2.2 Satz. (vgl. [DW3, Proposition 3])

Es seien die obigen Notationen gegeben. Dann induziert das Pullback entlang α einen Funktor $\alpha^*: \mathcal{B}_{\mathfrak{X}', D'}(G) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathfrak{X}, \alpha^*D'}(G)$ und das folgende Diagramm von Kategorien und Funktoren kommutiert (bis auf kanonische Isomorphismen):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{\mathfrak{X}', D'}(G) & \xrightarrow{\rho} & \text{Rep}_{\Pi_1(U')}(\mathcal{G}(\mathfrak{o})) \\ \downarrow \alpha^* & & \downarrow A(\alpha) \\ \mathcal{B}_{\mathfrak{X}, \alpha^*D'}(G) & \xrightarrow{\rho} & \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(\mathcal{G}(\mathfrak{o})). \end{array}$$

2 Paralleltransport für Prinzipalbündel

Insbesondere gilt für alle $\tilde{P} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}'_o, D'}$, dass $\rho_{\alpha_* \tilde{P}} = \rho_{\tilde{P}} \circ \alpha_*$ als Funktoren von $\Pi_1(U)$ nach $\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))$ gilt.

Beweis Der Beweis ist wortwörtlich derselbe wie der von [DW1, Proposition 26], wenn man \mathcal{E} durch \tilde{P} , „Vektorbündel“ durch „ G -Torseur“, die Kategorien $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}'_o, D'}$ und $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, \alpha^* D'}$ durch die Kategorien $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}'_o, D'}(G)$ bzw. $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, \alpha^* D'}(G)$ und den Verweis auf [DW1, Proposition 9] durch den auf Bemerkung 2.1.4 ersetzt. \square

Insbesondere erhält man also für jeden Morphismus $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ von Modellen von X über $\overline{\mathbb{Z}_p}$, der auf der generischen Faser die Identität ist, ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{\mathfrak{X}'_o, D}(G) & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}(G) \\ & \searrow \rho & \swarrow \rho \\ & \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o})) & \end{array} .$$

Zusammen mit dem kanonischen Funktor

$$\text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o})) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathbb{C}_p))$$

ergibt dieses das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{\mathfrak{X}'_o, D}(G) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}(G) \otimes \mathbb{Q} \\ & \searrow \rho & \swarrow \rho \\ & \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathbb{C}_p)) & \end{array} .$$

Zusammen mit dem folgenden Resultat in Analogie zu [DW1, Proposition 27] erhält man daraus, dass der obige Funktor

$$\rho: \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_{\mathbb{C}_p}, D}(G) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathbb{C}_p))$$

wohldefiniert ist:

2.2.3 Satz.

Es sei X eine glatte und projektive Kurve über $\overline{\mathbb{Q}_p}$ mit Modellen \mathfrak{X}_1 und \mathfrak{X}_2 über $\overline{\mathbb{Z}_p}$. Dann existiert ein drittes Modell \mathfrak{X}_3 von X zusammen mit Morphismen

$$\mathfrak{X}_1 \xleftarrow{p_1} \mathfrak{X}_3 \xrightarrow{p_2} \mathfrak{X}_2,$$

die auf den generischen Fasern nach ihrer Identifikation mit X jeweils die Identität ergeben. Für jeden Divisor D auf X hat man das folgende kommutative Diagramm von volltreuen Funktoren

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_{1o},D}(G) \otimes \mathbb{Q} & & & & \\ & \searrow^{p_1^*} & & & \\ & & \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_{3o},D}(G) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{j_{\mathfrak{X}_{3o}}^*} & \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}(G), \\ & & \nearrow^{j_{\mathfrak{X}_{1o}}^*} & & \\ & & & & \\ & \nearrow_{p_2^*} & & & \\ \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_{2o},D}(G) \otimes \mathbb{Q} & & & & \\ & & \searrow_{j_{\mathfrak{X}_{2o}}^*} & & \end{array}$$

wobei $j_{\mathfrak{X}_{io}}^* : X_{\mathbb{C}_p} \rightarrow \mathfrak{X}_{io}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ jeweils die kanonische Immersion bezeichne.

Beweis Der Beweis ist wortwörtlich derselbe wie der von [DW1, Proposition 27], wenn man wie oben \mathcal{E} durch \tilde{P} und die Kategorien $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o,D}$ und $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}$ durch die Kategorien $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o,D}(G)$ bzw. $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}(G)$ ersetzt. \square

2.3 Verkleben der Funktoren ρ_P

Im folgenden soll nun erläutert werden, wie die Funktoren

$$\rho_P : \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}(G) \rightarrow \mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p))$$

verklebt werden können, wenn P ein G -Torseur auf $X_{\mathbb{C}_p}$ ist, der zu den Kategorien $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}(G)$ für verschiedene Divisoren D gehört.

Als erstes benötigen wir dazu das folgende Seifert-van Kampen-Theorem, das wir aus [DW1] zitieren:

2.3.1 Satz. ([DW1, Proposition 34])

Es seien U_1 und U_2 zwei offene Unterschemata einer Kurve X sowie

$$i_1 : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_1, \quad i_2 : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_2,$$

und

$$j_1: U_1 \hookrightarrow U_1 \cup U_2, \quad j_2: U_2 \hookrightarrow U_1 \cup U_2$$

die zugehörigen offenen Immersionen, die das kommutierende Diagramm étaler Fundamentalgruppoid

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(U_1 \cap U_2) & \xrightarrow{i_{1*}} & \Pi_1(U_1) \\ \downarrow i_{2*} & & \downarrow j_{1*} \\ \Pi_1(U_2) & \xrightarrow{j_{2*}} & \Pi_1(U_1 \cup U_2) \end{array}$$

liefern.

Dann existiert für jede Hausdorffsch-topologische Kategorie \mathcal{C} und alle stetigen Funktoren $\rho_1: \Pi_1(U_1) \rightarrow \mathcal{C}$ und $\rho_2: \Pi_1(U_2) \rightarrow \mathcal{C}$, für die $\rho_1 \circ i_{1*} = \rho_2 \circ i_{2*}$ gilt, ein eindeutig bestimmter stetiger Funktor

$$\rho: \Pi_1(U_1 \cup U_2) \rightarrow \mathcal{C},$$

so dass die Relationen $\rho \circ j_{1*} = \rho_1$ und $\rho \circ j_{2*} = \rho_2$ gelten.

Damit können wir zeigen:

2.3.2 Korollar.

Es seien D_1 und D_2 zwei Divisoren auf X und man setze $U_1 = X - D_1$ und $U_2 = X - D_2$. Ferner sei P ein G -Torseur auf X , der sowohl zu $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D_1}(G)$ als auch $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D_2}(G)$ gehöre, und es seien ρ_P^1 bzw. ρ_P^2 die dazu konstruierten stetigen Funktoren $\Pi_1(U_i) \rightarrow \mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p))$ ($i = 1, 2$).

Dann existiert ein eindeutig bestimmter stetiger Funktor

$$\rho_P: \Pi(U_1 \cup U_2) \rightarrow \mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p)),$$

der auf $\Pi_1(U_i)$ für $i = 1, 2$ die Funktoren ρ_P^i induziert.

Beweis Da $G(\mathfrak{o})$ versehen mit der prodiskreten Topologie ein Hausdorff-Raum ist, ist für zwei Objekte P_1 und P_2 aus $\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))$ nach Definition der Topologie auf $\text{Mor}_{\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))}(P_1, P_2)$ diese Menge mit ihrer Topologie ein Hausdorff-Raum, so dass die Aussage aus Satz 2.3.1 folgt. \square

2.4 Funktorialitäten und Vergleich mit dem Vektorbündelfall

In diesem Abschnitt stellen wir einige Resultate zusammen, die in [DW3] ohne Beweis genannt werden und die zeigen, dass die konstruierten Funktoren $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}(G) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o}))$ und $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_{\mathbb{C}_p}, D}(G) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathbb{C}_p))$ jeweils mit vielen natürlichen Operationen verträglich sind und in kanonischer Weise die im Falle der Vektorbündel konstruierten Funktoren aussehen.

Als erstes zeigen wir die Verträglichkeit mit GaloisKonjugation:

Für einen \mathbb{Q}_p -Automorphismus σ von $\overline{\mathbb{Q}_p}$ definiert die GaloisKonjugation einen Funktor σ_* von der Kategorie der G -Torseure auf \mathfrak{X}_o in die der ${}^\sigma G$ -Torseure auf ${}^\sigma \mathfrak{X}_o$, der jedem G -Torseur E auf \mathfrak{X}_o den ${}^\sigma G$ -Torseur ${}^\sigma E$ auf ${}^\sigma \mathfrak{X}_o$ zuordnet. Dabei ist ${}^\sigma \mathfrak{X} = \mathfrak{X} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}, \sigma} \overline{\mathbb{Z}_p}$ und damit $({}^\sigma \mathfrak{X})_o = \mathfrak{X}_o \otimes_{\mathfrak{o}, \sigma} \mathfrak{o}$. Man beachte ferner, dass ${}^\sigma E_n$ durch das Element ${}^\sigma \pi \in S_{{}^\sigma \mathfrak{X}_o, {}^\sigma D}$ trivialisiert wird, wenn E_n durch das Element $\pi \in S_{\mathfrak{X}_o, D}$ trivialisiert wird, so dass die GaloisKonjugation insgesamt einen Funktor

$$\sigma_*: \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}(G) \rightarrow \mathcal{B}_{{}^\sigma \mathfrak{X}_o, {}^\sigma D}({}^\sigma G)$$

liefert. Es ist klar, dass $(\sigma\tau)_* = \sigma_*\tau_*$ und $\text{id}_* = \text{id}$ gilt.

Andererseits lässt sich ein Funktor

$$\sigma_*: \mathcal{P}(G(\mathfrak{o})) \rightarrow \mathcal{P}({}^\sigma G(\mathfrak{o}))$$

mit denselben Eigenschaften wie folgt definieren:

Indem man einen Schnitt $s \in G(\mathfrak{o})$ auf den Schnitt

$$\sigma \circ s \circ \sigma^{-1} = \sigma \circ s \circ \text{spec } \sigma \in {}^\sigma G(\mathfrak{o})$$

abbildet, erhält man einen Isomorphismus topologischer Räume

$$\sigma: G(\mathfrak{o}) \xrightarrow{\sim} {}^\sigma G(\mathfrak{o}).$$

Für einen $G(\mathfrak{o})$ -Raum Z in der Kategorie $\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))$ definiert man nun $\sigma_*(Z)$ in der Kategorie $\mathcal{P}({}^\sigma G(\mathfrak{o}))$ als den topologischen Raum Z zusammen mit der induzierten Aktion von ${}^\sigma G$, die durch $z \cdot g := z({}^{\sigma^{-1}}g)$ für alle $z \in Z$ und alle $g \in {}^\sigma G(\mathfrak{o})$ gegeben ist. Mit $\sigma: Z \rightarrow {}^\sigma Z$ sei die Identitätsabbildung auf den unterliegenden topologischen Räumen bezeichnet. Setzen wir noch $\sigma_*(\varphi) = \varphi$ auf der Ebene der Morphismen, so erhält man insgesamt den gewünschten wohldefinierten Funktor

$$\sigma_*: \mathcal{P}(G(\mathfrak{o})) \rightarrow \mathcal{P}({}^\sigma G(\mathfrak{o})).$$

Außerdem betrachten wir die Wirkung der Galoiskonjugation auf die stetigen Funktoren von $\Pi_1(U)$ in die Kategorie $\mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))$, die in der Kategorie $Rep_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o}))$ liegen, wobei wir wie folgt einen Funktor

$$C_\sigma : Rep_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o})) \rightarrow Rep_{\Pi_1(\sigma U)}(\sigma G(\mathfrak{o}))$$

erhalten:

Für Objekte $\mathcal{Z} : \Pi_1(U) \rightarrow \mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))$ setzt man $C_\sigma(\mathcal{Z}) := \sigma_* \circ \mathcal{Z} \circ \sigma_*^{-1}$, für Morphismen $f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}'$ in $Rep_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o}))$ definiert man $C_\sigma(f)$ als $C_\sigma(f) := (\sigma \circ f_x \circ \sigma^{-1})_{x \in U(\mathbb{C}_p)}$. Wie oben hat man kanonische Isomorphismen $C_{\tau\sigma} = C_\tau \circ C_\sigma$ und $C_{id} = id$.

Mit diesen Definitionen gilt nun das folgende Resultat in Analogie zu [DW1, Proposition 25]:

2.4.1 Satz.

In der gegebenen Situation ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{\mathfrak{x}_0, D}(G) & \xrightarrow{\rho^{\mathfrak{x}}} & Rep_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o})) \\ \sigma_* \downarrow & & \downarrow C_\sigma \\ \mathcal{B}_{\sigma \mathfrak{x}_0, D}(\sigma G) & \xrightarrow{\rho^{\sigma \mathfrak{x}}} & Rep_{\Pi_1(\sigma U)}(\sigma G(\mathfrak{o})) \end{array}$$

von Kategorien und Funktoren bis auf kanonische Isomorphismen von Funktoren kommutativ.

Insbesondere gilt $\rho_{\sigma P} = \sigma_* \circ \rho_P \circ \sigma_*^{-1}$ als Funktoren von $\Pi_1(\sigma U)$ nach $\mathcal{P}(\sigma G(\mathfrak{o}))$ für jeden G -Torseur $P \in \mathcal{B}_{\mathfrak{x}_0, D}(G)$.

Beweis Es werde zunächst die Kommutativität des Diagramms auf Ebene der Objekte nachgeprüft:

Sei also $P \in \mathcal{B}_{\mathfrak{x}_0, D}(G)$. Dann ist zu zeigen, dass

$$\rho_{\sigma P} = C_\sigma(\rho_P) = \sigma_* \circ \rho_P \circ \sigma_*^{-1}$$

als Funktoren von $\Pi_1(\sigma U)$ nach $\mathcal{P}(\sigma G(\mathfrak{o}))$ gilt.

Für ein Objekt $x \in \sigma U(\mathbb{C}_p)$ folgt aus den obigen Definitionen und denen in §1.3, insbesondere aus der Tatsache, dass Galoiskonjugation mit Pullback vertauscht und also $(\sigma P)_{x_\circ} = \sigma_*(P_{(\sigma^{-1}(x))_\circ})$ gilt, dass

$$(\sigma P)_{x_\circ} = (\sigma_* \circ \rho_P \circ \sigma_*^{-1})(x)$$

ist und also

$$\rho_{\sigma P}(x) = (\sigma_* \circ \rho_P \circ \sigma_*^{-1})(x)$$

gilt.

Ist γ ein étaler Weg in $\Pi_1({}^\sigma U)$ von x nach x' , so folgt ebenfalls aus den genannten Definitionen, dass

$$\rho_{\sigma P}(\gamma) = (\sigma_* \circ \rho_P \circ \sigma_*^{-1})(\gamma)$$

und also insgesamt

$$\rho_{\sigma P} = C_\sigma(\rho_P) = \sigma_* \circ \rho_P \circ \sigma_*^{-1}$$

gilt.

Es bleibt noch zu zeigen, dass

$$(\rho^{\sigma \mathfrak{X}} \circ \sigma_*)(\varphi) = C_\sigma(\rho^{\mathfrak{X}}(\varphi)) = (\sigma \circ \varphi_x \circ \sigma^{-1})_{x \in U(\mathbb{C}_p)}$$

für jeden Morphismus $\varphi: P \rightarrow P'$ in $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}, D}(G)$ gilt, was ebenfalls mit etwas Schreibaufwand direkt aus den obigen Definitionen der Funktoren und §1.3. folgt. \square

2.4.2 Bemerkung.

Ist K eine algebraische Erweiterung von \mathbb{Q}_p in $\overline{\mathbb{Q}_p}$ und sind \mathfrak{X}, X, D und G bereits über \mathfrak{o}_K bzw. K definiert, so können ${}^\sigma \mathfrak{X}, {}^\sigma X, {}^\sigma D$ und ${}^\sigma G$ über $\overline{\mathbb{Z}_p}$ bzw. $\overline{\mathbb{Q}_p}$ bzw. \mathfrak{o} für alle $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/K)$ mit \mathfrak{X}, X, D bzw. G identifiziert werden. In diesem Fall kommutiert dann der Funktor

$$\rho: \mathcal{B}_{\mathfrak{X}, D}(G) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o}))$$

mit den Aktionen von $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/K)$ auf \mathfrak{X}, X, D und G mittels σ_* und C_σ .

Als nächstes sei daran erinnert, dass nach Satz 2.2.2 die Konstruktion des Funktors

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{X}, D}(G) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o}))$$

mit dem Wechsel der Kurve X und ihres Modells \mathfrak{X} verträglich ist, d.h. mit Morphismen $\alpha: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ über $\overline{\mathbb{Z}_p}$ von Modellen der glatten und projektiven Kurven X bzw. X' über $\overline{\mathbb{Q}_p}$ vertauscht.

Gleiches gilt für den Wechsel des Gruppenschemas G :

Es sei $\varphi: G \rightarrow G'$ ein Morphismus glatter, affiner Gruppenschemata von endlicher Präsentation über \mathfrak{o} . Dann ist für jeden G -Torseur P auf einem \mathfrak{o} -Schema ξ die fppf-Garbe $\varphi_* P = P \times^G G'$ auf ξ ein Garbentorseur unter G' und damit nach [M, Theorem III.4.3a)] ein G' -Torseur, da G' als affin gegeben ist. Setzt man für jeden Morphismus $\alpha: P \rightarrow P'$ von G -Torseuren auf ξ den induzierten Morphismus $\varphi_* P \rightarrow \varphi_* P'$ von G' -Torseuren als $\varphi_*(\alpha)$, so erhält man einen wohldefinierten Funktor φ_* von der Kategorie der G -Torseure auf ξ in die Kategorie der G' -Torseure auf ξ .

Nach Konstruktion gilt

$$f^* \varphi_*(P) = \varphi_*(f^*(P))$$

für jeden Morphismus $f: \tilde{\xi} \rightarrow \xi$ von \mathfrak{o} -Schemata. Daraus folgt, dass sich φ_* zu einem Funktor

$$\varphi_*: \mathcal{B}_{\mathfrak{x}_\mathfrak{o}, D}(G) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathfrak{x}_\mathfrak{o}, D}(G')$$

einschränkt.

Außerdem erhält man einen Funktor

$$\varphi_*: \mathcal{P}(G(\mathfrak{o})) \rightarrow \mathcal{P}(G'(\mathfrak{o})),$$

indem man einen $G(\mathfrak{o})$ -Raum \mathcal{Z} auf den $G'(\mathfrak{o})$ -Raum $\varphi_*(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} \times^{G(\mathfrak{o})} G'(\mathfrak{o})$ und jeden Morphismus $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}'$ auf den induzierten Morphismus $\varphi_* \mathcal{Z} \rightarrow \varphi_* \mathcal{Z}'$ abbildet.

Schließlich definiert man noch einen Funktor

$$\varphi_*: \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o})) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G'(\mathfrak{o})),$$

indem man ein Objekt \mathcal{Z} auf $\varphi_* \circ \mathcal{Z}$ und jeden Morphismus $f = (f_x)$ auf $(\varphi_*(f_x))$ abbildet.

Mit diesen Definitionen findet man das folgende Resultat:

2.4.3 Satz.

In der gegebenen Situation ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{\mathfrak{x}_\mathfrak{o}, D}(G) & \xrightarrow{\rho^x} & \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o})) \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow \varphi_* \\ \mathcal{B}_{\mathfrak{x}_\mathfrak{o}, D}(G') & \xrightarrow{\rho^x} & \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G'(\mathfrak{o})) \end{array}$$

von Kategorien und Funktoren bis auf kanonische Isomorphismen von Funktoren kommutativ.

Insbesondere gilt $\rho_{\varphi_* P} = \varphi_* \circ \rho_P$ als Funktoren von $\Pi_1(U)$ nach $\mathcal{P}(G'(\mathfrak{o}))$ für jeden G -Torseur $P \in \mathcal{B}_{\mathfrak{x}_\mathfrak{o}, D}(G)$.

Beweis Es sei $P \in \mathcal{B}_{\mathfrak{x}_\mathfrak{o}, D}(G)$. Dann gilt

$$(\varphi_* \circ \rho)(P)(x) = (\varphi_* \circ \rho_P)(x) = P_{x_\mathfrak{o}} \times^{G(\mathfrak{o})} G'(\mathfrak{o}) = (x_\mathfrak{o}^* P(\mathfrak{o})) \times^{G(\mathfrak{o})} G'(\mathfrak{o})$$

und

$$(\rho \circ \varphi_*)(P)(x) = \rho_{P \times^G G'}(x) = (P \times^G G')_{x_\mathfrak{o}} = (x_\mathfrak{o}^* P)(\mathfrak{o})$$

für alle $x \in \Pi_1(U)$ jeweils als topologische Räume mit einer einfach-transitiven und stetigen Aktion von $G'(\mathfrak{o})$ von rechts. Weil Pullback unter $x_\mathfrak{o}$ mit der Bildung des eingeschränkten Produktes vertauscht und für ein \mathfrak{o} -Schema A gilt, dass $(A \times^G G')(\mathfrak{o})$ und $A(\mathfrak{o}) \times^{G(\mathfrak{o})} G'(\mathfrak{o})$ als topologische Räume mit einer einfach-transitiven und stetigen Aktion von $G'(\mathfrak{o})$ von rechts kanonisch isomorph sind, folgt damit

$$(\varphi_* \circ \rho)(P)(x) = (\rho \circ \varphi_*)(P)(x)$$

für alle $x \in \Pi_1(U)$.

Aus demselben Argument folgt für jeden étalen Weg γ von x nach x' in $\Pi_1(U)$, dass

$$(\varphi_* \circ \rho)(P)(\gamma) = \varphi_*(\rho_P(\gamma)) = \rho_{P \times^G G'}(\gamma) = (\rho \circ \varphi_*)(P)(\gamma)$$

gilt.

Also gilt auf Ebene der Objekte

$$(\rho \circ \varphi)(P) = (\varphi_* \circ \rho)(P)$$

für alle $P \in \mathcal{B}_{\mathfrak{x}_\mathfrak{o}, D}(G)$.

Es sei nun $\alpha: P \rightarrow P'$ ein Morphismus in $\mathcal{B}_{\mathfrak{x}_\mathfrak{o}, D}(G)$. Dann ergibt sich wiederum aus der Tatsache, dass die Bildung des eingeschränkten Produktes $_ \times^G G'$ mit Pullback vertauscht, dass

$$(\rho \circ \varphi_*)(\alpha) = ((\alpha \times^G G')_{x_\mathfrak{o}})_{x \in U(\mathbb{C}_p)} = (\varphi_*(\alpha_{x_\mathfrak{o}}))_{x \in U(\mathbb{C}_p)} = (\varphi_* \circ \rho)(\alpha)$$

gilt, so dass insgesamt die Kommutativität des Diagramms folgt. \square

Mittels einer ähnlichen Konstruktion kann man zudem von G -Torseuren zu Vektorbündeln wechseln:

Dazu sei Γ ein freier \mathfrak{o} -Modul von endlichem Rang und $\mathbf{\Gamma}$ der assoziierte affine Raum über $\text{Spec } \mathfrak{o}$. Dann versteht man unter einer algebraischen Darstellung von G auf Γ einen Homomorphismus von \mathfrak{o} -Gruppenschemata

$$G \rightarrow \text{Gl}(\mathbf{\Gamma}).$$

Im folgenden schreiben wir kurz $\mathbf{\Gamma}$ für diese Darstellung und definieren $\text{Rep}_G(\mathfrak{o})$ und $\text{Rep}_{G(\mathfrak{o})}(\mathfrak{o})$ als die Kategorie der algebraischen bzw. stetigen Darstellungen von G bzw. $G(\mathfrak{o})$ auf freien \mathfrak{o} -Moduln von endlichem Rang.

Für jeden G -Torseur P auf einem \mathfrak{o} -Schema ξ ist dann die fppf-Garbe $E = P \times^G \mathbf{\Gamma}$ ein Vektorbündel auf ξ . Diese Konstruktion ist funktoriell in P und der Darstellung $\mathbf{\Gamma}$; für einen Morphismus $f: \tilde{\xi} \rightarrow \xi$ gilt

$$f^*(P \times^G \mathbf{\Gamma}) = f^*P \times^G \mathbf{\Gamma}.$$

Unter Verwendung der Notation aus [DW1] folgt daraus, dass sich $_ \times^G \mathbf{\Gamma}$ zu einem Funktor

$$_ \times^G \mathbf{\Gamma}: \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_\mathfrak{o}, D}(G) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_\mathfrak{o}, D}$$

einschränkt, so dass man einen Bifunktor

$$_ \times^G _: \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_\mathfrak{o}, D}(G) \times \text{Rep}_G(\mathfrak{o}) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_\mathfrak{o}, D}$$

erhält. (Wie in [DW1] ist dabei $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_\mathfrak{o}, D}$ die Kategorie aller Vektorbündel E auf $\mathfrak{X}_\mathfrak{o}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Element $\pi \in S_{\mathfrak{X}_\mathfrak{o}, D}$ existiert, so dass $\pi_n^* E$ trivial ist.)

Andererseits gibt es einen Bifunktor

$$_ \times^{G(\mathfrak{o})} _: \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o})) \times \text{Rep}_{G(\mathfrak{o})}(\mathfrak{o}) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(\mathfrak{o}),$$

der wie folgt definiert ist:

Ein Paar (\mathcal{Z}, Γ) aus einem stetigen Funktor $\mathcal{Z}: \Pi_1(U) \rightarrow \mathcal{P}(G(\mathfrak{o}))$ und einer stetigen Darstellung von Γ auf $G(\mathfrak{o})$ wird unter $_ \times^G _$ auf den wie folgt definierten Funktor

$$\mathcal{Z} \times^{G(\mathfrak{o})} \Gamma: \Pi_1(U) \rightarrow \text{Mod}_\mathfrak{o}$$

abgebildet:

Für $x \in U(\mathbb{C}_p) = \Pi_1(U)$ setzt man $(\mathcal{Z} \times^{G(\mathfrak{o})} \Gamma)(x) = \mathcal{Z}(x) \times^{G(\mathfrak{o})} \Gamma$. Für einen étalen Weg γ von x nach x' definiert man $(\mathcal{Z} \times^{G(\mathfrak{o})} \Gamma)(\gamma)$ als die \mathfrak{o} -lineare Abbildung von $\mathcal{Z}(x) \times^{G(\mathfrak{o})} \Gamma$ nach $\mathcal{Z}(x') \times^{G(\mathfrak{o})} \Gamma$, die durch die stetige $G(\mathfrak{o})$ -lineare Abbildung $\mathcal{Z}(\gamma): \mathcal{Z}(x) \rightarrow \mathcal{Z}(x')$ induziert wird.

Morphismen in $\text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o}))$ bzw. $\text{Rep}_{G(\mathfrak{o})}(\mathfrak{o})$ werden in offensichtlicher Weise abgebildet.

Wie in [DW1] ist dabei $Rep_{\Pi_1(U)}(\mathfrak{o})$ die \mathfrak{o} -lineare Kategorie von stetigen Funktoren von $\Pi_1(U)$ in die Kategorie der freien \mathfrak{o} -Modulen von endlichem Rang.

2.4.4 Satz.

In der obigen Situation kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B}_{\mathfrak{x}_o, D}(G) \times Rep_G(\mathfrak{o}) & \xrightarrow{\quad _ \times^G _ \quad} & \mathcal{B}_{\mathfrak{x}_o, D} \\
 \downarrow \rho \times nat & & \downarrow \rho \\
 Rep_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o})) \times Rep_{G(\mathfrak{o})}(\mathfrak{o}) & \xrightarrow{\quad _ \times^{G(\mathfrak{o})} _ \quad} & Rep_{\Pi_1(U)}(\mathfrak{o}).
 \end{array}$$

Insbesondere gilt

$$\rho_{P \times^G \Gamma} = \rho_P \times^{G(\mathfrak{o})} \Gamma$$

als Funktoren von $\Pi_1(U)$ nach $Mod_{\mathfrak{o}}$ für alle $P \in \mathcal{B}_{\mathfrak{x}_o, D}(G)$ und $\Gamma \in Rep_G(\mathfrak{o})$.

Beweis Auf Ebene der Objekte ist zu zeigen, dass

$$\rho_{P \times^G \Gamma} = \rho_P \times^{G(\mathfrak{o})} \Gamma$$

als Funktoren von $\Pi_1(U)$ nach $Mod_{\mathfrak{o}}$ für alle $P \in \mathcal{B}_{\mathfrak{x}_o, D}(G)$ und $\Gamma \in Rep_G(\mathfrak{o})$ gilt.

Ist also $x \in U(\mathbb{C}_p)$, so folgt aus der Relation $(P \times^G \Gamma)_{x_o} = P_{x_o} \times^{G(\mathfrak{o})} \Gamma$, dass $(\rho_P \times^{G(\mathfrak{o})} \Gamma)(x) = \rho_{P \times^G \Gamma}(x)$ gilt.

Ist ferner γ ein étaler Weg von x nach x' in $\Pi_1(U)$, so folgt aus der genannten Relation, dass die Abbildung $(P \times^G \Gamma)_{x_o} \rightarrow (P \times^G \Gamma)_{x'_o}$ gleich der von $P_{x_o} \rightarrow P_{x'_o}$ induzierten \mathfrak{o} -linearen Abbildung von $P_{x_o} \times^{G(\mathfrak{o})} \Gamma$ nach $P_{x'_o} \times^{G(\mathfrak{o})} \Gamma$ ist, woraus $(\rho_P \times^{G(\mathfrak{o})} \Gamma)(\gamma) = \rho_{P \times^G \Gamma}(\gamma)$ folgt.

Mit den gleichen Überlegungen sieht man, dass die Funktoren $\rho \circ _ \times^G _$ und $_ \times^{G(\mathfrak{o})} _ \circ (\rho \times nat)$ auch auf Morphismen in $\mathcal{B}_{\mathfrak{x}_o, D}(G)$ bzw. in $Rep_G(\mathfrak{o})$ übereinstimmen. \square

2.4.5 Bemerkung.

Zu jedem gegebenen G -Torseur P in $\mathcal{B}_{\mathfrak{x}_o, D}(G)$ erhält man mittels des Bifunktors $_ \times^G _$ ein Vektorbündel in $\mathcal{B}_{\mathfrak{x}_o, D}$ für jede algebraische Darstellung Γ von G . Der vorangehende Satz zeigt somit, wie man den Paralleltransport entlang étaler Wege zwischen den Fasern des Vektorbündels über den Paralleltransport des Torseurs berechnen kann.

Im folgenden erklären wir kurz, wie wir ein Gl_n -Prinzipalbündel in $\mathcal{B}_{\mathcal{X}_o, D}(\mathrm{Gl}_n)$ aus einem Vektorbündel vom Rang n in $\mathcal{B}_{\mathcal{X}_o, D}$ erhalten. Ist E ein Vektorbündel vom Rang n auf einem Schema ξ , so ist die fppf-Garbe $\mathrm{Iso}_\xi(E, \mathbb{A}_\xi^n)$ der lokalen Isomorphismen von E zu dem trivialen Vektorbündel \mathbb{A}_ξ^n auf ξ ein Rechts-Garbentorseur unter $\mathrm{Gl}_{n, \xi}$. Da $\mathrm{Gl}_{n, \xi}$ affin über ξ ist, ist dieser Garbentorseur durch einen Gl_n -Torseur $\mathbf{P}(E)$ darstellbar, das sogenannte Rahmenbündel von E . Ordnet man jedem Morphismus $E \rightarrow E'$ den induzierten Morphismus $\mathrm{Iso}_\xi(E, \mathbb{A}_\xi^n) \rightarrow \mathrm{Iso}_\xi(E', \mathbb{A}_\xi^n)$ zu, so erhält man einen wohldefinierten Funktor \mathbf{P} von der Kategorie der Vektorbündel vom Rang n auf ξ in die Kategorie der Gl_n -Torseure auf ξ . Aufgrund der Konstruktion des Funktors gilt $f^*\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}(f^*E)$ für jeden Morphismus $f: \tilde{\xi} \rightarrow \xi$ in funktorieller Weise. Daraus folgt, dass sich \mathbf{P} zu einem Funktor von der vollen Unterkategorie $\mathcal{B}_{\mathcal{X}_o, D}^{(n)}$ der Vektorbündel vom Rang n in $\mathcal{B}_{\mathcal{X}_o, D}$ in die Kategorie $\mathcal{B}_{\mathcal{X}_o, D}(\mathrm{Gl}_n)$ einschränkt.

Auf der anderen Seite definieren wir einen Funktor \mathbf{P} von der vollen Unterkategorie $\mathrm{Rep}_{\Pi_1(U)}^n(\mathfrak{o})$ von $\mathrm{Rep}_{\Pi_1(U)}(\mathfrak{o})$, die aus den Darstellungen vom Rang n besteht, nach $\mathrm{Rep}_{\Pi_1(U)}(\mathrm{Gl}_n(\mathfrak{o}))$ wie folgt:

Für ein Objekt Γ aus $\mathrm{Rep}_{\Pi_1(U)}^n(\mathfrak{o})$, d. h. einen stetigen Funktor

$$\Gamma: \Pi_1(U) \rightarrow \mathrm{Mod}_{\mathfrak{o}}^{(n)},$$

definiert man den stetigen Funktor

$$\mathbf{P}(\Gamma): \Pi_1(U) \rightarrow \mathcal{P}(G(\mathfrak{o})),$$

indem man $\mathbf{P}(\Gamma)(x) = \mathrm{Iso}_{\mathfrak{o}}(\Gamma(x), \mathfrak{o}^n)$ für jeden Punkt $x \in U(\mathbb{C}_p)$ setzt, wobei $\mathrm{Iso}_{\mathfrak{o}}(\Gamma(x), \mathfrak{o}^n)$ mit der in natürlicher Weise induzierten Topologie und der Aktion von $\mathrm{Gl}_n(\mathfrak{o})$ von rechts versehen sei. Für einen étalen Weg γ von x nach x' setzt man

$$\mathbf{P}(\Gamma)(\gamma) = (\Gamma(\gamma)^{-1})^*: \mathrm{Iso}_{\mathfrak{o}}(\Gamma(x), \mathfrak{o}^n) \rightarrow \mathrm{Iso}_{\mathfrak{o}}(\Gamma(x'), \mathfrak{o}^n), \varphi \mapsto \varphi \circ \Gamma(\gamma)^{-1},$$

so dass man insgesamt einen wohldefinierten Funktor $\mathbf{P}(\Gamma)$ erhält.

Diese Definition des Funktors \mathbf{P} auf der Ebene der Objekte setzt sich in natürlicher Weise auf Morphismen $\alpha: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ in $\mathrm{Rep}_{\Pi_1(U)}^{(n)}(\mathfrak{o})$ fort, indem man die von α induzierte Abbildung von $\mathrm{Iso}_{\mathfrak{o}}(\Gamma(x), \mathfrak{o}^n)$ nach $\mathrm{Iso}_{\mathfrak{o}}(\Gamma'(x), \mathfrak{o}^n)$ für alle $x \in U(\mathbb{C}_p)$ als $\mathbf{P}(\alpha)(x)$ definiert, was eine natürliche Transformation $\mathbf{P}(\alpha): \mathbf{P}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{P}(\Gamma')$ liefert.

2.4.6 Satz.

In der gegebenen Situation ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B}_{\mathfrak{x}_o, D}^{(n)} & \xrightarrow{\rho^x} & \text{Rep}_{\Pi_1(U)}^{(n)}(\mathfrak{o}) \\
 \mathbf{P} \downarrow & & \downarrow \mathbf{P} \\
 \mathcal{B}_{\mathfrak{x}_o, D}(\text{Gl}_n) & \xrightarrow{\rho^x} & \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(\text{Gl}_n(\mathfrak{o}))
 \end{array}$$

von Kategorien und Funktoren bis auf kanonische Isomorphismen von Funktoren kommutativ.

Insbesondere gilt $\rho_{\mathbf{P}(E)} = \mathbf{P}(\rho_E)$ für jedes Vektorbündel E vom Rang n in $\mathcal{B}_{\mathfrak{x}_o, D}$. Damit sind für alle $x \in U(\mathbb{C}_p)$ die Darstellungen von $\Pi_1(U)$ auf $\mathbf{P}(E)_x = \text{Iso}_{\mathfrak{o}}(E_{x_o}, \mathfrak{o}^n)$ vermittelt $\rho_{\mathbf{P}(E)}$ und vermittelt $\gamma \mapsto (\rho_E(\gamma)^{-1})^*$ gleich.

Beweis Es sei $E \in \mathcal{B}_{\mathfrak{x}_o, D}^{(n)}$. Dann gilt

$$(\mathbf{P} \circ \rho)(E)(x) = \mathbf{P}(\rho_E)(x) = \text{Iso}_{\mathfrak{o}}(\rho_E(x), \mathfrak{o}^n) = \text{Iso}_{\mathfrak{o}}(E_{x_o}, \mathfrak{o}^n)$$

sowie

$$(\rho \circ \mathbf{P})(E)(x) = \rho_{\mathbf{P}(E)}(x) = (\mathbf{P}(E))_{x_o} = (\text{Iso}_{\mathfrak{x}_o}(E, \mathbb{A}_{\mathfrak{x}_o}^n))_{x_o}$$

jeweils für alle $x \in U(\mathbb{C}_p)$. Da per Definition die Bildung von $\text{Iso}(_, _)$ mit der Bildung der globalen Schnitte vertauscht und wie oben gesehen der Funktor \mathbf{P} verträglich mit Pullback ist, stimmen damit $(\mathbf{P} \circ \rho)(E)(x)$ und $(\rho \circ \mathbf{P})(E)(x)$ für alle $x \in U(\mathbb{C}_p)$ miteinander überein.

Ist nun γ ein étaler Weg von x nach x' und $\varphi \in \text{Iso}_{\mathfrak{o}}(E_{x_o}, \mathfrak{o}^n)$, so gilt einerseits

$$\mathbf{P}(\rho_E)(\gamma)(\varphi) = \varphi \circ (\rho_E(\gamma)^{-1}) = \varphi \circ \varprojlim_m \rho_{E,m}(\gamma)^{-1} = \varprojlim_m (\varphi \circ (\rho_{E,m}(\gamma))^{-1})$$

als Elemente von $\text{Iso}_{\mathfrak{o}}(E_{x'_o}, \mathfrak{o}^n)$ und andererseits

$$\rho_{\mathbf{P}(E)}(\gamma)(\varphi) = (\varprojlim_m \rho_{\mathbf{P}(E),m}(\gamma))(\varphi) = \varprojlim_m (\rho_{\mathbf{P}(E),m}(\gamma))(\varphi),$$

als Elemente von $(\text{Iso}_{\mathfrak{x}_o}(E, \mathbb{A}_{\mathfrak{x}_o}^n))_{x'_o}$.

Identifiziert man daher wie oben $\text{Iso}_{\mathfrak{o}}(E_{x_o}, \mathfrak{o}^n)$ mit $x_o^* \text{Iso}_{\mathfrak{o}}(E, \mathfrak{o}^n)$ sowie $\text{Iso}_{\mathfrak{o}_m}(E_{x_m}, \mathfrak{o}_m^n)$ mit $x_m^* \text{Iso}_{\mathfrak{o}}(E, \mathfrak{o}^n)$, so genügt es daher,

$$(\rho_{\mathbf{P}(E),m}(\gamma))(\varphi) = \varphi \circ \rho_{E,m}(\gamma)$$

zu zeigen. Dies folgt aber aus der konkreten Definition von $\rho_{E,m}(\gamma)$ als

$$\rho_{E,m}(\gamma) = (\gamma y)_m^* \circ (y_m^*)^{-1}: E_{x_m} \rightarrow E_{x'_m}$$

2 Paralleltransport für Prinzipalbündel

und der von $\rho_{\mathbf{P}(E),m}(\gamma)$ als

$$\rho_{\mathbf{P}(E),m}(\gamma) = (\gamma y)_m^* \circ (y_m^*)^{-1}: (\text{Iso}_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_m}}(E, \mathbb{A}_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_m}}))_{x_m} \rightarrow (\text{Iso}_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_m}}(E, \mathbb{A}_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_m}}))_{x'_m},$$

wobei aus letzterer mit der obigen Identifikation von $\text{Iso}_{\mathfrak{o}_m}(E_{x_m}, \mathfrak{o}_m^n)$ mit $x_m^* \text{Iso}_{\mathfrak{o}}(E, \mathfrak{o}^n)$ folgt, dass $\rho_{\mathbf{P}(E),m}(\gamma)(\varphi) = \varphi \circ (\gamma y)_n^* \circ (y_n^*)^{-1}$ als Abbildung von $\text{Iso}_{\mathfrak{o}_m}(E_{x_m}, \mathfrak{o}_m^n)$ nach $\text{Iso}_{\mathfrak{o}_m}(E_{x'_m}, \mathfrak{o}_m^n)$ gilt, woraus die Behauptung folgt.

Ist $\alpha: E \rightarrow E'$ ein Morphismus in $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}},D}^{(n)}$, so zeigt die obige Rechnung, dass $\rho_{\mathbf{P}(E)}(\alpha) = \mathbf{P}(\rho_{E'}(\alpha))$ gilt. \square

Aufgrund der Definition der Kategorie $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}(G)$ über die Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}},D}(G)$ und aufgrund dessen, dass der Funktor

$$\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}(G) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathbb{C}_p))$$

in gleicher Weise auf Basis des Funktors

$$\mathcal{B}_{X_{\mathfrak{o}},D}(G) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o}))$$

in §2.2 konstruiert wurde, übertragen sich alle Eigenschaften der Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}},D}(G)$ und der betrachteten Funktoren in der Situation über \mathfrak{o} auf die Situation über \mathbb{C}_p :

Insbesondere induziert der für jeden \mathbb{Q}_p -Automorphismus σ von $\overline{\mathbb{Q}_p}$ durch die Galoiskonjugation gegebene Funktor

$$\sigma_*: \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}},D}(G) \rightarrow \mathcal{B}_{\sigma \mathfrak{X}_{\mathfrak{o}},D}({}^\sigma G)$$

einen wohldefinierten Funktor

$$\sigma_*: \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}(G) \rightarrow \mathcal{B}_{\sigma X_{\mathbb{C}_p},D}({}^\sigma G).$$

Ebenso induziert der Funktor

$$C_\sigma: \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o})) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1({}^\sigma U)}({}^\sigma G(\mathfrak{o}))$$

einen Funktor

$$C_\sigma: \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathbb{C}_p)) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1({}^\sigma U)}({}^\sigma G(\mathbb{C}_p)).$$

Für die so induzierten Funktoren σ_* und C_σ folgt direkt aus Satz 2.4.1 und Bemerkung 2.4.2:

2.4.7 Satz.

In der gegebenen Situation ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G) & \xrightarrow{\rho} & \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathbb{C}_p)) \\
 \sigma_* \downarrow & & \downarrow C_\sigma \\
 \mathcal{B}_{\sigma X_{\mathbb{C}_p}, \sigma D}(\sigma G) & \xrightarrow{\rho} & \text{Rep}_{\Pi_1(\sigma U)}(\sigma G(\mathbb{C}_p))
 \end{array}$$

von Kategorien und Funktoren bis auf kanonische Isomorphismen von Funktoren kommutativ.

Insbesondere gilt $\rho_{\sigma P} = \sigma_* \circ \rho_P \circ \sigma_*^{-1}$ als Funktoren von $\Pi_1(\sigma U)$ nach $\mathcal{P}(\sigma G(\mathbb{C}_p))$ für jeden G -Torseur $P \in \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G)$.

Ist zusätzlich $X = X_K \otimes_K \overline{\mathbb{Q}_p}$ und $D = D_K \otimes_K \overline{\mathbb{Q}_p}$ sowie $G = G_K \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}$ für einen gewissen Körper $\mathbb{Q}_p \subset K \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$, so lassen sich ${}^\sigma X$, ${}^\sigma D$ und ${}^\sigma G$ für jedes $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}, K)$ kanonisch mit X, D und G über $\overline{\mathbb{Q}_p}$ bzw. \mathfrak{o} identifizieren und der Funktor

$$\rho: \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathbb{C}_p))$$

kommutiert mit den Aktionen von $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/K)$ auf diesen Kategorien via σ_* bzw. C_σ für $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}, K)$.

Aus Satz 2.2.2 und [DW1, Lemma 8] folgt zudem, dass die Konstruktion des Funktors

$$\rho: \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathbb{C}_p))$$

mit Pullback entlang von Morphismen $f: X \rightarrow X'$ glatter und projektiver Kurven über $\overline{\mathbb{Q}_p}$ vertauscht:

2.4.8 Satz.

Es seien X und X' zwei glatte und projektive Kurven über $\overline{\mathbb{Q}_p}$ und $f: X \rightarrow X'$ ein Morphismus zwischen ihnen. Außerdem sei D' ein Divisor auf X' und G ein glattes und affines Gruppenschema von endlicher Präsentation über \mathfrak{o} . Dann induziert das Pullback von G -Torseuren entlang f einen Funktor $f^*: \mathcal{B}_{X'_{\mathbb{C}_p}, D'}(G) \rightarrow \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, f^* D'}(G)$ und das folgende Diagramm von Kategorien und Funktoren kommutiert (bis auf kanonische Isomorphismen):

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D'}(G) & \xrightarrow{\rho} & \text{Rep}_{\Pi_1(U')}(G(\mathbb{C}_p)) \\
 \downarrow f^* & & \downarrow A(f) \\
 \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, f^*D}(G) & \xrightarrow{\rho} & \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathbb{C}_p)).
 \end{array}$$

Dabei sei $A(f): \text{Rep}_{\Pi_1(U')}(G(\mathbb{C}_p)) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathbb{C}_p))$ der durch den Funktor $A(f): \text{Rep}_{\Pi_1(U')}(G(\mathfrak{o})) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o}))$ induzierte Funktor.

Insbesondere gilt für alle $\tilde{P} \in \mathcal{B}_{X'_{\mathbb{C}_p}, D'}(G)$, dass $\rho_{f^*\tilde{P}} = \rho_{\tilde{P}} \circ f_*$ als Funktoren von $\Pi_1(U)$ nach $\mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p))$ gilt.

Für einen Morphismus $\varphi: G \rightarrow G'$ affiner, glatter Gruppenschemata von endlicher Präsentation über \mathfrak{o} induzieren ferner die oben definierten Funktoren

$$\varphi_*: \mathcal{B}_{X_{\mathfrak{o}}, D}(G) \rightarrow \mathcal{B}_{X_{\mathfrak{o}}, D}(G')$$

und

$$\varphi_*: \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o})) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G'(\mathfrak{o}))$$

Funktoren

$$\varphi_*: \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G) \rightarrow \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G')$$

und

$$\varphi_*: \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathbb{C}_p)) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G'(\mathbb{C}_p)).$$

Für die so definierten Funktoren φ_* folgt dann direkt aus Satz 2.4.3:

2.4.9 Satz.

In der gegebenen Situation ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G) & \xrightarrow{\rho} & \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathbb{C}_p)) \\
 \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* \\
 \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G') & \xrightarrow{\rho} & \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G'(\mathbb{C}_p))
 \end{array}$$

von Kategorien und Funktoren bis auf kanonische Isomorphismen von Funktoren kommutativ.

Insbesondere gilt $\rho_{\varphi_* P} = \varphi_* \circ \rho_P$ als Funktoren von $\Pi_1(U)$ nach $\mathcal{P}(G'(\mathbb{C}_p))$ für jeden G -Torseur $P \in \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G)$.

Als nächstes halten wir fest, dass für jede algebraische Darstellung Γ des Gruppenschemas G der oben definierte Funktor

$$_ \times^G \Gamma: \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_0, D}(G) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_0, D}$$

einen Funktor

$$_ \times^G \Gamma: \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G) \rightarrow \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}$$

induziert. Ebenso erhält man aus den Bifunktoren

$$_ \times^G _ : \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_0, D}(G) \times \text{Rep}_G(\mathfrak{o}) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_0, D}$$

und

$$_ \times^{G(\mathfrak{o})} _ : \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathfrak{o})) \times \text{Rep}_{G(\mathfrak{o})}(\mathfrak{o}) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(\mathfrak{o})$$

Bifunktoren

$$_ \times^G _ : \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G) \times \text{Rep}_G(\mathfrak{o}) \rightarrow \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}$$

und

$$_ \times^{G(\mathbb{C}_p)} _ : \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathbb{C}_p)) \times \text{Rep}_{G(\mathbb{C}_p)}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(\mathbb{C}_p),$$

wobei $\text{Rep}_{G(\mathbb{C}_p)}(\mathbb{C}_p)$ die Kategorie der stetigen Darstellungen von $G(\mathbb{C}_p)$ auf endlichdimensionalen \mathbb{C}_p -Vektorräumen sei. Mit diesen Funktoren ergibt sich dann aus Satz 2.4.4:

2.4.10 Satz.

In der obigen Situation kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G) \times \text{Rep}_G(\mathfrak{o}) & \xrightarrow{_ \times^G _} & \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D} \\ \rho \times \text{nat} \downarrow & & \downarrow \rho \\ \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(G(\mathbb{C}_p)) \times \text{Rep}_{G(\mathbb{C}_p)}(\mathbb{C}_p) & \xrightarrow{_ \times^{G(\mathbb{C}_p)} _} & \text{Rep}_{\Pi_1(U)}(\mathbb{C}_p). \end{array}$$

Insbesondere gilt

$$\rho_{P \times^G \Gamma} = \rho_P \times^{G(\mathbb{C}_p)} (\Gamma \otimes \mathbb{C}_p)$$

für alle $P \in \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G)$ und $\Gamma \in \text{Rep}_G(\mathfrak{o})$ als Funktoren von $\Pi_1(U)$ nach $\mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p))$.

Schließlich induziert auch der Funktor

$$\mathbf{P}: \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}^{(n)} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}(\mathrm{Gl}_n)$$

einen Funktor

$$\mathbf{P}: \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}^{(n)} \rightarrow \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(\mathrm{Gl}_n).$$

Ebenso induziert der Funktor

$$\mathbf{P}: \mathrm{Rep}_{\Pi_1(U)}^{(n)}(\mathfrak{o}) \rightarrow \mathrm{Rep}_{\Pi_1(U)}(\mathrm{Gl}_n(\mathfrak{o}))$$

einen Funktor

$$\mathbf{P}: \mathrm{Rep}_{\Pi_1(U)}^{(n)}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \mathrm{Rep}_{\Pi_1(U)}(\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}_p)).$$

Mit den so definierten Funktoren \mathbf{P} folgt nun aus Satz 2.4.6:

2.4.11 Satz.

In der gegebenen Situation ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}^{(n)} & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{Rep}_{\Pi_1(U)}^{(n)}(\mathbb{C}_p) \\ \mathbf{P} \downarrow & & \downarrow \mathbf{P} \\ \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(\mathrm{Gl}_n) & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{Rep}_{\Pi_1(U)}(\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}_p)) \end{array}$$

von Kategorien und Funktoren bis auf kanonische Isomorphismen von Funktoren kommutativ.

Insbesondere gilt $\rho_{\mathbf{P}(E)} = \mathbf{P}(\rho_E)$ für jedes Vektorbündel E vom Rang n in $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}$. Damit sind für alle $x \in U(\mathbb{C}_p)$ die Darstellungen von $\Pi_1(U)$ auf $(\mathbf{P}(E))_x = \mathrm{Iso}_{\mathbb{C}_p}(E_x, \mathbb{C}_p^n)$ vermittels $\rho_{\mathbf{P}(E)}$ und vermittels $\gamma \mapsto (\rho_E(\gamma)^{-1})^$ gleich.*

3 Charakterisierung der Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}(G)$

Anhand der im vorherigen Kapitel gegebenen Definition der Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}(G)$ lässt sich nur sehr schwer nachprüfen, ob ein gegebener G -Torseur P auf \mathfrak{X}_o zu dieser Kategorie gehört. Im folgenden soll daher eine leichter nachprüfbare Charakterisierung der Objekte von $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}(G)$ entwickelt werden, die analoge Resultate zu den Theoremen 16, 17 und 18 in [DW1] liefert.

3.1 Reduktion auf die spezielle Faser

Als erstes zeigen wir:

3.1.1 Theorem

Es sei \mathfrak{X} ein Modell über $\overline{\mathbb{Z}}_p$ der glatten und projektiven Kurve X über $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Es sei $k = \overline{\mathbb{F}}_p$ der Restklassenkörper von $\overline{\mathbb{Z}}_p$.

Dann liegt ein G -Torseur P auf \mathfrak{X}_o genau dann in $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_o, D}(G)$, wenn es ein Objekt $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ aus der Kategorie $S_{\mathfrak{X}, D}$ gibt, so dass $\pi_k^ P_k$ trivial auf $\mathcal{Y}_k = \mathcal{Y} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} k$ ist.*

Beweis

(i) Dass die Bedingung notwendig ist, ist klar.

Es sei also P ein G -Torseur auf \mathfrak{X}_o , für den es ein Objekt $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ aus der Kategorie $S_{\mathfrak{X}, D}$ gibt, so dass $\pi_k^* P_k$ trivial auf $\mathcal{Y}_k = \mathcal{Y} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} k$ ist. Nach Korollar 1.2.12 darf angenommen werden, dass $\pi \in S_{\mathfrak{X}, D}^{ss}$ ist.

(ii) Als nächster Beweisschritt soll nun gezeigt werden, dass die Familie

$$(\mathfrak{X}, D, G, P_1, \pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X})$$

zu einer Familie

$$(\mathfrak{X}^0, D^0, G^0, \overline{P}, \pi_0: \mathcal{Y}^0 \rightarrow \mathfrak{X}^0)$$

über dem Ganzheitsring \mathfrak{o}_K einer endlichen Erweiterung K von \mathbb{Q}_p absteigt.

Dabei ist \mathfrak{X}^0 ein Modell über \mathfrak{o}_K der glatten und projektiven Kurve $X^0 = \mathfrak{X}^0 \otimes_{\mathfrak{o}_K} K$ über K , G^0 ein Gruppenschema, das affin, glatt und von endlicher Präsentation über einer normalen, endlich erzeugten \mathfrak{o}_K -Algebra A ist, und \overline{P} ein $G^0_{\mathfrak{X}^0_A \otimes_A \mathfrak{o}_K / p\mathfrak{o}_K}$ -Torseur auf $\mathfrak{X}^0_A \otimes_A \mathfrak{o}_K / p\mathfrak{o}_K$, dessen Einschränkung auf die spezielle Faser $\mathfrak{X}^0 \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_K / \mathfrak{p}$ nach Pullback entlang $\pi_0 \otimes \mathfrak{o}_K / \mathfrak{p}$ trivial ist. Außerdem ist π_0 ein Element von $S_{\mathfrak{X}^0, D^0}^{ss}$.

Dies sieht man wie folgt:

Unter den gegebenen Voraussetzungen existieren nach Korollar 1.2.11 eine endliche Erweiterung K^1 von \mathbb{Q}_p und eine glatte und projektive Kurve X^1 über K^1 mit Modell \mathfrak{X}^1 über \mathfrak{o}_{K^1} sowie ein Divisor D^1 von X^1 , so dass zum einen $X = X^1 \otimes_{K^1} \overline{K^1}$, $D = D^1 \otimes_{K^1} \overline{K^1}$ und $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^1 \otimes_{\mathfrak{o}_{K^1}} \overline{\mathbb{Z}_p}$ sind, zum anderen ein Element $\pi^1: \mathcal{Y}^1 \rightarrow \mathfrak{X}^1$ aus $S_{\mathfrak{X}^1, D^1}^{ss}$ mit der Eigenschaft existiert, dass $\tilde{\pi}^1 = \pi^1 \otimes_{\mathfrak{o}_{K^1}} \overline{\mathbb{Z}_p}$ den gegebenen Morphismus π dominiert.

Da nach Voraussetzung G von endlicher Präsentation über \mathfrak{o} ist, existiert nach [EGA IV, Proposition 8.9.1] eine endliche Erweiterung K^2 von \mathbb{Q}_p , so dass G zu einem Schema G^2 von endlichem Typ über einer normalen endlich erzeugten \mathfrak{o}_{K^2} -Algebra A^2 absteigt. Da \mathfrak{o}_{K^2} und damit auch A^2 noethersch ist, ist nach [EGA IV, Définition 1.6.1] G^2 von endlicher Präsentation über A^2 . Nach [EGA IV, Scholie 8.8.3] ist G^2 zudem ein Gruppenschema.

Nach [EGA IV, Théorème 8.10.5 (viii)] und [EGA IV, Proposition 17.7.8] existiert dann eine endliche Erweiterung K^3 von \mathbb{Q}_p mit $K^2 \subset K^3$, so dass das Gruppenschema $G^3 := G^2 \otimes_{A^2} A^3$ affin, glatt und von endlicher Präsentation über A^3 ist, wobei $A^3 := A^2 \otimes_{\mathfrak{o}_{K^2}} \mathfrak{o}_{K^3}$ ist.

Weil die endlichen Körpererweiterungen von \mathbb{Q}_p ein induktives System bilden, gibt es nun eine endliche Erweiterung K^4 von \mathbb{Q}_p , die K^1 und K^3 als Zwischenerweiterungen enthält. Dann ist $X^4 := X^1 \otimes_{K^1} K^4$ eine glatte und projektive Kurve über K^4 , $\mathfrak{X}^4 := \mathfrak{X}^1 \otimes_{\mathfrak{o}_{K^1}} \mathfrak{o}_{K^4}$ ein Modell von X^4 über \mathfrak{o}_{K^4} , $D^4 := D^1 \otimes_{K^1} K^4$ ein Divisor von X^4 , $G^4 := G^3 \otimes_{A^3} A^4$ ein affines, glattes Gruppenschema von endlicher Präsentation über der normalen endlich erzeugten \mathfrak{o}_{K^4} -Algebra $A^4 := A^3 \otimes_{\mathfrak{o}_{K^3}} \mathfrak{o}_{K^4}$ und der Morphismus $\tilde{\pi}^4$ dominiert den Morphismus π .

Da P_1 insbesondere von endlicher Präsentation über $\mathfrak{X}_0 \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}/p\mathfrak{o}$ ist, existiert nach [EGA IV, Proposition 8.9.1] eine endliche Körpererweiterung

K^5 von \mathbb{Q}_p , die K^4 enthält, so dass P_1 zu einem Schema P^5 von endlichem Typ über $\mathfrak{X}_{A^5}^5 \otimes_{A^5} \mathfrak{o}_{K^5}/p\mathfrak{o}_{K^5}$ absteigt. Da $\mathfrak{X}_{A^5}^5 \otimes_{A^5} \mathfrak{o}_{K^5}/p\mathfrak{o}_{K^5}$ lokal noethersch ist, ist nach [EGA IV, Définition 1.6.1] P^5 auch von endlicher Präsentation über $\mathfrak{X}_{A^5}^5 \otimes_{A^5} \mathfrak{o}_{K^5}/p\mathfrak{o}_{K^5}$.

Nach [EGA IV, Théorème 8.10.5 (vi)] und [EGA IV, Proposition 11.2.6] existiert dann eine endliche Erweiterung K^6 von \mathbb{Q}_p , die K^5 enthält, so dass $P^6 := P^5 \times_{\mathfrak{X}_{A^5}^5 \otimes_{A^5} \mathfrak{o}_{K^5}/p\mathfrak{o}_{K^5}} \text{Spec}(\mathfrak{o}_{K^6}/p\mathfrak{o}_{K^6})$ treuflach und von endlicher Präsentation über $\mathfrak{X}_{A^6}^6 \otimes_{A^6} \mathfrak{o}_{K^6}/p\mathfrak{o}_{K^6}$ ist. Es seien wieder X^6, D^6, \mathfrak{X}^6 etc. die entsprechenden Basiswechsel. Nach [EGA IV, Proposition 8.9.1] steigt der Morphismus

$$f: P_1 \times_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o} \otimes \mathfrak{o}}/p\mathfrak{o}} G_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o} \otimes \mathfrak{o}}/p\mathfrak{o}} \rightarrow P_1,$$

mittels dessen $G_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o} \otimes \mathfrak{o}}/p\mathfrak{o}}$ auf P_1 operiert, zu einem Morphismus

$$f^6: P^6 \times_{\mathfrak{X}_{A^6}^6 \otimes_{A^6} \mathfrak{o}_{K^6}/p\mathfrak{o}_{K^6}} G_{\mathfrak{X}_{A^6}^6 \otimes_{A^6} \mathfrak{o}_{K^6}/p\mathfrak{o}_{K^6}} \rightarrow P^6$$

ab. Man beachte dabei, dass noetherscher Descent, wie bereits oben benutzt, mit der Bildung von Faserprodukten vertauscht.

Ebenso existiert nach [EGA IV, Théorème 8.10.5 (i)] eine endliche Erweiterung K^7 von \mathbb{Q}_p mit K^6 als Zwischenkörper, so dass der Isomorphismus

$$(\text{id}_{P_1}, f): P_1 \times_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o} \otimes \mathfrak{o}}/p\mathfrak{o}} G_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o} \otimes \mathfrak{o}}/p\mathfrak{o}} \longrightarrow P_1 \times_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o} \otimes \mathfrak{o}}/p\mathfrak{o}} P_1$$

zu

$$(\text{id}_{P^7}, f^7): P^7 \times_{\mathfrak{X}_{A^7}^7 \otimes_{A^7} \mathfrak{o}_{K^7}/p\mathfrak{o}_{K^7}} G_{\mathfrak{X}_{A^7}^7 \otimes_{A^7} \mathfrak{o}_{K^7}/p\mathfrak{o}_{K^7}} \longrightarrow P^7 \times_{\mathfrak{X}_{A^7}^7 \otimes_{A^7} \mathfrak{o}_{K^7}/p\mathfrak{o}_{K^7}} P^7$$

absteigt und dies ein Isomorphismus ist.

Somit ist P^7 ein $G_{\mathfrak{X}_{A^7}^7 \otimes_{A^7} \mathfrak{o}_{K^7}/p\mathfrak{o}_{K^7}}$ -Torseur auf $\mathfrak{X}_{A^7}^7 \otimes_{A^7} \mathfrak{o}_{K^7}/p\mathfrak{o}_{K^7}$.

Nach [EGA IV, Théorème 8.10.5 (i)] existiert schließlich eine endliche Erweiterung K^8 von \mathbb{Q}_p mit $K^7 \subset K^8$, so dass die Einschränkung von P^8 auf die spezielle Faser $\mathfrak{X}_{A^8}^8 \otimes_{A^8} \mathfrak{o}_{K^8}/\mathfrak{p}$ nach Pullback entlang $\pi^8 \otimes \mathfrak{o}_{K^8}/\mathfrak{p}$ trivial ist:

Denn dass nach Voraussetzung die Einschränkung von P_1 auf die spezielle Faser $\mathfrak{X}_{\mathfrak{o} \otimes \mathfrak{o}}/\mathfrak{p}$ nach Pullback entlang $(\pi \otimes \text{id}_{\mathfrak{o}}) \otimes \text{id}_{\mathfrak{o}/\mathfrak{p}}$ trivial wird, bedeutet gerade, dass es einen Isomorphismus

$$\psi: ((\pi \otimes \text{id}_{\mathfrak{o}}) \otimes \text{id}_{\mathfrak{o}/\mathfrak{p}})^* P_1|_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o} \otimes \mathfrak{o}}/\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} G_{\mathfrak{Y}_{\mathfrak{o} \otimes \mathfrak{o}}/\mathfrak{p}}$$

von $G_{\mathcal{Y}_0 \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}/\mathfrak{p}}$ -Torseuren gibt. Nach [EGA IV, Proposition 8.9.1] und [EGA IV, Théorème 8.10.5 (i)] existiert daher eine endliche Erweiterung K^8 von $\overline{\mathbb{Q}}_p$, so dass ψ zu einem Isomorphismus

$$\psi^8: (\pi^8 \otimes \text{id}_{\mathfrak{o}_{K^8}/\mathfrak{p}})^* P^8 |_{\mathfrak{X}_{A^8}^8 \otimes_{A^8} \mathfrak{o}_{K^8}/\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} G_{\mathcal{Y}_{A^8}^8 \otimes_{A^8} \mathfrak{o}_{K^8}/\mathfrak{p}}$$

von $\mathcal{Y}_{A^8}^8 \otimes_{A^8} \mathfrak{o}_{K^8}/\mathfrak{p}$ -Schemata absteigt. Dieser ist auch ein Isomorphismus von $G_{\mathcal{Y}_{A^8}^8 \otimes_{A^8} \mathfrak{o}_{K^8}/\mathfrak{p}}$ -Torseuren, da die Relation

$$m_{G_{\mathcal{Y}_0 \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}/\mathfrak{p}}} \circ (\psi \otimes \text{id}_{G_{\mathcal{Y}_0 \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}/\mathfrak{p}}}) = \psi \circ f'$$

unter noetherschem Descent erhalten bleibt, wobei $m_{G_{\mathcal{Y}_0 \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}/\mathfrak{p}}}$ die Gruppenmultiplikation von $G_{\mathcal{Y}_0 \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}/\mathfrak{p}}$ und f' die Aktion von $G_{\mathcal{Y}_0 \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}/\mathfrak{p}}$ auf $((\pi \otimes \text{id}_{\mathfrak{o}}) \otimes \text{id}_{\mathfrak{o}/\mathfrak{p}})^* P_1 |_{\mathfrak{X}_0 \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}/\mathfrak{p}}$ bezeichnet. Man benutzt dabei wieder, dass noetherscher Descent verträglich mit Faserprodukten ist.

Setzt man also $K := K^8$ und $\overline{P} := P^8$, $\mathfrak{X}^0 := \mathfrak{X}^8$, $D^0 := D^8$, $G^0 := G^8$ und $\pi^0 := \pi_0$, so erfüllt die Familie

$$(\mathfrak{X}^0, D^0, G^0, \overline{P}, \pi_0: \mathcal{Y}^0 \rightarrow \mathfrak{X}^0)$$

alle geforderten Eigenschaften.

(iii) Es sei e der Verzweigungsgrad von K über \mathbb{Q}_p und man setze

$$\mathfrak{o}_{\nu/e} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\nu \mathfrak{o} = \overline{\mathbb{Z}}_p/\mathfrak{p}^\nu \overline{\mathbb{Z}}_p.$$

Man bemerke, dass diese Notation mit der bisherigen Notation $\mathfrak{o}_n = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^n \mathfrak{o}$ verträglich ist.

Es sei $\pi_{\nu/e}, \tilde{P}_{\nu/e}$ etc. jeweils der Basiswechsel mit $\mathfrak{o}_{\nu/e}$, wobei \tilde{P} die generische Faser von P sei. Weil $\pi_{1/e}$ auch der Basiswechsel von $\pi_0 \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_K/\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{o}_{1/e}$ ist, folgt, dass $\pi_{1/e}^* P_{1/e} = (\pi_0 \otimes \mathfrak{o}_K/\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{o}_{1/e})^* (\overline{P} \otimes \mathfrak{o}/\mathfrak{p})$ trivial auf $\mathcal{Y}_{1/e}$ ist.

Mittels Induktion genügt es daher, die folgende Behauptung (*) zu zeigen:

Ist $\nu \geq 2$ und $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ ein Element von $S_{\mathfrak{X}, D}^{ss}$, so dass $\pi_{(\nu-1)/e}^* P_{(\nu-1)/e}$ trivial ist, so existiert ein Objekt $\mu: \mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$ in $S_{\mathfrak{X}, D}^{ss}$, so dass $\mu_{\nu/e}^* P_{\nu/e}$ ein trivialer G -Torseur auf $\mathcal{Z}_{\nu/e}$ ist.

iv) Wir beweisen daher die Behauptung (*):

Es sei also $\nu \geq 2$ und $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ ein Element von $S_{\mathfrak{X}, D}^{ss}$, so dass $\pi_{(\nu-1)/e}^* P_{(\nu-1)/e}$ trivial ist.

Man betrachte die abgeschlossene Immersion $i: \mathcal{Y}_{(\nu-1)/e} \hookrightarrow \mathcal{Y}_{\nu/e}$.

Ist $\mathcal{Y}_{\nu/e}$ affin, so ist nach [G, Corollaire VII.1.3.2] die kanonische Abbildung $H^1(\mathcal{Y}_{\nu/e}, G_{\mathcal{Y}_{\nu/e}}) \rightarrow H^1(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, G_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}})$ sowohl für die fppf-Topologie als auch für die étale Topologie eine Bijektion und damit auch $\pi_{\nu/e}^* P_{\nu/e}$ trivial. Also kann man in diesem Fall $\mu = \pi$ wählen.

Im folgenden sei daher angenommen, dass $\mathcal{Y}_{\nu/e}$ nicht affin ist. Es sei \mathcal{I} die Idealgarbe, die die abgeschlossene Immersion i definiert und für die $\mathcal{I}^2 = 0$ gilt. Dann hat man nach [G, Lemme VII.1.3.5] folgende exakte Sequenz von Garben auf $(\mathcal{Y}_{\nu/e})_{\text{ét}}$:

$$1 \rightarrow i_*(\mathcal{L}_{(\nu-1)/e} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}} \mathcal{I}) \xrightarrow{h} G \xrightarrow{\text{adj}} i_* G_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}} \rightarrow 1,$$

wobei $\mathcal{L}_{(\nu-1)/e} := \text{Lie}(G_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}/\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e})$ sei. Man beachte dabei, dass i ein universeller Homöomorphismus ist, so dass nach [M, Remark II.3.17] $(\widetilde{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}})_{\text{ét}} \cong (\widetilde{\mathcal{Y}_{\nu/e}})_{\text{ét}}$ gilt und man \mathcal{I} kanonisch mit einem $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}$ -Modul identifizieren kann. Desweiteren bezeichnet adj die Komposition des Adjunktionsmorphisms $G_{\mathcal{Y}_{\nu/e}} \rightarrow i_* i^* G_{\mathcal{Y}_{\nu/e}}$ mit dem Morphismus $i_* i^* G_{\mathcal{Y}_{\nu/e}} \rightarrow i_* G_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}$, der von dem kanonischen Morphismus $i^* G_{\mathcal{Y}_{\nu/e}} \rightarrow G_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}$ induziert wird. Der Morphismus h schließlich wird durch die Bijektion

$$i_*(\mathcal{L}_{(\nu-1)/e} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}} \mathcal{I})(S) \rightarrow \ker(G_{\mathcal{Y}_{\nu/e}} \rightarrow i_* G_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}})(S), \alpha \rightarrow e\alpha$$

induziert, wobei e der Einsschnitt von $G_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}$ ist und $S \rightarrow \mathcal{Y}_{\nu/e}$ étale ist.

Aus dieser exakten Sequenz erhält man die exakte Kohomologiesequenz

$$H_{\text{ét}}^1(\mathcal{Y}_{\nu/e}, i_*(\mathcal{L}_{(\nu-1)/e} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}} \mathcal{I})) \xrightarrow{h} H_{\text{ét}}^1(\mathcal{Y}_{\nu/e}, G_{\mathcal{Y}_{\nu/e}}) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(\mathcal{Y}_{\nu/e}, i_* G_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}).$$

Nach [SGA 4, Corollaire VIII.5.6] ist nun $R^1 i_* G_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}} = 0$, da i als abgeschlossene Immersion insbesondere ganz ist.

Nach [G, Proposition V.3.1.3] ist damit $H_{\text{ét}}^1(\mathcal{Y}_{\nu/e}, i_* G_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}})$ isomorph zu $H_{\text{ét}}^1(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, G_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}})$, so dass also die Sequenz

$$H_{\text{ét}}^1(\mathcal{Y}_{\nu/e}, i_*(\mathcal{L}_{(\nu-1)/e} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}} \mathcal{I})) \xrightarrow{h} H_{\text{ét}}^1(\mathcal{Y}_{\nu/e}, G_{\mathcal{Y}_{\nu/e}}) \xrightarrow{i^*} H_{\text{ét}}^1(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, G_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}})$$

exakt ist.

Wie oben gilt nun nach [SGA 4, Corollaire VIII.5.6]

$$R^1 i_* (\mathcal{L}_{(\nu-1)/e} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}} \mathcal{I}) = 0.$$

Nach [G, Proposition V.3.1.3] hat man somit einen Isomorphismus

$$H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, \mathcal{L}_{(\nu-1)/e} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}} \mathcal{I}) \xrightarrow{\sim} H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Y}_{\nu/e}, i_* (\mathcal{L}_{(\nu-1)/e} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}} \mathcal{I})),$$

so dass also die Sequenz

$$H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, \mathcal{L}_{(\nu-1)/e} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}} \mathcal{I}) \xrightarrow{h \circ j} H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Y}_{\nu/e}, G_{\mathcal{Y}_{\nu/e}}) \xrightarrow{i^*} H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, G_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}})$$

exakt ist.

Ist nun Ω die Klasse von $\pi_{\nu/e}^* P_{\nu/e}$ in $H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Y}_{\nu/e}, G_{\mathcal{Y}_{\nu/e}})$, so bildet i^* die Klasse Ω auf die Klasse von $i^* \pi_{\nu/e}^* P_{\nu/e} = \pi_{(\nu-1)/e}^* P_{(\nu-1)/e}$, d. h. auf die triviale Klasse in $H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, G_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}})$, ab.

Aufgrund der Exaktheit der Sequenz existiert also eine Klasse A in $H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, \mathcal{L}_{(\nu-1)/e} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}} \mathcal{I})$, so dass $(h \circ j)(A) = \Omega$ ist.

Die kanonische $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}$ -Modulstruktur von $\mathcal{L}_{(\nu-1)/e}$ und \mathcal{I} induziert ferner die folgende exakte Sequenz von Garben auf $(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e})_{\acute{e}t}$:

$$0 \rightarrow \ker(\alpha) \rightarrow \mathcal{I} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{L}_{(\nu-1)/e} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}} \mathcal{I} \rightarrow 0.$$

Dabei ist α der kanonische Morphismus. Dies liefert eine Surjektion

$$H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, \mathcal{I}) \xrightarrow{\alpha} H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, \mathcal{L}_{(\nu-1)/e} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}} \mathcal{I}),$$

da $\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}$ eindimensional ist und nach [M, Proposition III.3.3]

$$H_{\acute{e}t}^2(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, \mathcal{F}) \cong H^2(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, \mathcal{F}_{Zar})$$

für jede étale Garbe \mathcal{F} auf $\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}$ gilt, wobei \mathcal{F}_{Zar} die Einschränkung auf die Zariski-Topologie ist.

Die $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}$ -Modulstruktur von \mathcal{I} liefert außerdem eine kanonische exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \ker g \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}} \xrightarrow{g} \mathcal{I} \rightarrow 0$$

von Garben auf $(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e})_{\acute{e}t}$. Diese liefert mit derselben Begründung wie oben eine Surjektion

$$H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}) \xrightarrow{g} H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, \mathcal{I}).$$

Ist nun das Geschlecht von Y_K , womit die generische Faser des Modells \mathcal{Y}^0 bezeichnet werde, gleich Null, so folgt wie in [DW1], dass

$$H_{Zar}^1(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}) = 0$$

ist:

Da man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen darf, dass Y_K einen rationalen Punkt besitzt (andernfalls gehe zu einer geeigneten endlichen Erweiterung K' von K über), ist nämlich in diesem Fall nach [L1, Proposition 7.4.1] $Y_K = \mathbb{P}_K^1$. Nach [L1, Example 5.3.27] ist dann $\chi(Y_K, \mathcal{O}_{Y_K}) = 1$. Da \mathfrak{o}_K ein diskreter Bewertungsring ist, folgt damit aus [L1, Proposition 5.3.28], dass auch $\chi(\mathcal{Y}_\kappa, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\kappa}) = 1$ ist, wobei \mathcal{Y}_κ die spezielle Faser von \mathcal{Y}^0 bezeichne.

Da $(\lambda_0)_*\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_0} = \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathfrak{o}_K}$ gilt, wobei λ_0 den Strukturmorphismus von \mathcal{Y}_0 bezeichne, ist nun $H^0(\mathcal{Y}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_0}) = \mathfrak{o}_K$, also nach [L1, Corollary 5.3.22] $H^0(\mathcal{Y}_\kappa, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\kappa}) = \kappa$, so dass $H^1(\mathcal{Y}_\kappa, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\kappa}) = 0$ aus $\chi(\mathcal{Y}_\kappa, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\kappa}) = 1$ folgt. Nach [Mf2, p. 53, Corollary 3] ist also $H^1(\mathcal{Y}_{\nu'/e}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{\nu'/e}}) = 0$ für alle $\nu' \in \mathbb{N}$.

Da also

$$H_{Zar}^1(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}) = 0$$

ist, ist nach [FK, Proposition I.2.5.] auch

$$H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}) = 0.$$

Nach dem bisher gezeigten ist dann aber $A = 0$ und damit auch $\Omega = 0$, so dass also $\pi_{\nu'/e}^* P_{\nu'/e}$ trivial ist. Im Fall, dass das Geschlecht von Y_K gleich Null ist, kann man daher $\mu = \pi$ wählen.

Sei also das Geschlecht von Y_K von Null verschieden. Dann gibt es nach dem Beweis von [DW1, Theorem 11] einen Morphismus

$$\rho: (\mu: \mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}) \rightarrow (\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X})$$

in $S_{\mathfrak{X}, D}$, so dass die induzierte Abbildung

$$\rho^*: H^1(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) \rightarrow H^1(\mathcal{Z}, \mathcal{O}_{\mathcal{Z}})$$

die Relation

$$\rho^*(H^1(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}})) \subset p^{\nu'/e} H^1(\mathcal{Z}, \mathcal{O}_{\mathcal{Z}})$$

erfüllt. Nach [FK, Proposition I.2.5] hat man dann dieselbe Aussage für den Fall, dass man die obigen Kohomologiegruppen für die Zariski-Topologie durch die entsprechenden Kohomologiegruppen für die étale

Topologie ersetzt. Der Morphismus sei in diesem Fall mit $\rho_{\acute{e}t}^*$ bezeichnet. Wie im Beweis von [DW1, Theorem 16] folgt, dass die induzierte Abbildung

$$(\rho_{\acute{e}t})_{(\nu-1)/e}^* : H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}) \rightarrow H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Z}_{(\nu-1)/e}, \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_{(\nu-1)/e}})$$

trivial ist. Aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}}) & \xrightarrow{h \circ j \circ \alpha \circ g} & H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Y}_{\nu/e}, G_{\mathcal{Y}_{\nu/e}}) \\ \downarrow (\rho_{\acute{e}t})_{(\nu-1)/e}^* = 0 & & \downarrow (\rho_{\acute{e}t})_{\nu/e}^* \\ H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Z}_{(\nu-1)/e}, \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_{(\nu-1)/e}}) & \xrightarrow{h \circ j \circ \alpha \circ g} & H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Z}_{\nu/e}, G_{\mathcal{Y}_{\nu/e}}) \end{array}$$

folgt dann, dass $(\rho_{\acute{e}t})_{\nu/e}^* \Omega$ trivial ist, da nach dem gezeigten Ω ein Urbild in $H_{\acute{e}t}^1(\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(\nu-1)/e}})$ unter $h \circ j \circ \alpha \circ g$ besitzt.

Also ist auch $\mu_{\nu/e}^* P_{\nu/e} = (\rho_{\acute{e}t})_{\nu/e}^* (\pi_{\nu/e}^* P_{\nu/e})$ ein trivialer Torseur auf $\mathcal{Z}_{\nu/e}$ für die étale Topologie und damit auch für die fppf-Topologie, was zu zeigen war. \square

3.2 Trivialisierbarkeit étaler G -Torseure

Für eine Charakterisierung der Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X},D}(G)$ ohne Zuhilfenahme der Überdeckungskategorien $S_{\mathfrak{X},D}$, $S_{\mathfrak{X},D}^{good}$ bzw. $S_{\mathfrak{X},D}^{ss}$ benötigen wir die folgende Definition:

3.2.1 Definition.

*Es sei G eine zusammenhängende algebraische Gruppe über einem endlichen Körper \mathbb{F}_q und X ein beliebiges \mathbb{F}_q -Schema. Dann heißt ein étaler Torseur P trivialisierbar, wenn es einen endlichen und surjektiven Morphismus $f : Y \rightarrow X$ gibt, so dass f^*P ein trivialer G -Torseur auf Y ist.*

Im folgenden sei nun stets zusätzlich vorausgesetzt, dass G eine zusammenhängende reductive Gruppe ist. Dazu sei an die Definition einer reductiven Gruppe erinnert:

3.2.2 Definition. ([SGA 3, Exposé XIX, 1.2, 1.6, Définition 2.7])

(i) *Es sei G ein glattes, affines und zusammenhängendes Gruppenschema über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k . Dann bezeichnet man*

die reduzierte Untergruppe $\text{rad}(G)$, die zu der neutralen Komponente des Schnitts der Boreluntergruppen von G assoziiert ist, als das Radikal von G . Der unipotente Teil $\text{rad}^u(G)$ von $\text{rad}(G)$ wird als das unipotente Radikal von G bezeichnet. Dabei ist eine Boreluntergruppe B von G eine maximale auflösbare Untergruppe und der unipotente Teil einer Gruppe H besteht aus den Elementen h , für die der Morphismus $h - 1$ nilpotent ist (vgl. jeweils [B]).

- (ii) Ein Gruppenschema G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k heißt reduktiv, falls es affin, glatt und zusammenhängend ist und desweiteren $\text{rad}^u G = e$ gilt.
- (iii) Ein Gruppenschema G über einer beliebigen Basis S heißt reduktiv, falls es affin und glatt über S ist und seine geometrischen Fasern zusammenhängend und reduktiv sind.

Dann liefert uns das folgende Resultat von Deligne einen Zusammenhang zwischen trivialisierbaren étalen G -Torseuren und solchen, die isomorph zu ihrem Pullback unter dem absoluten Frobenius sind:

3.2.3 Satz. (vgl. [Las, Beweis von Lemma 3.3.])

Es sei G eine glatte zusammenhängende algebraische Gruppe über \mathbb{F}_q , wobei $q = p^r$ sei, X ein Schema über \mathbb{F}_q und F der absolute Frobenius, wobei wir in der Notation zur Vereinfachung derer nicht zwischen dem absoluten Frobenius von X und dem von G unterscheiden. Dann induziert die Einbettung $G(\mathbb{F}_q) = G^F \hookrightarrow G$ einen Funktor von der Kategorie der $G(\mathbb{F}_q)$ -Torseure auf X für die étale Topologie in die Kategorie der étalen G -Torseure P auf X , die als G -Torseure isomorph zu F^*P sind. Dieser Funktor ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis Ist Q ein $G(\mathbb{F}_q)$ -Torseur auf X , so ist $P(Q) = Q \wedge^{G^F} G$ ein G -Torseur auf X . Nach Konstruktion ist dieser G -Torseur $P(Q)$ als G -Torseur isomorph zu seinem Pullback unter dem Frobenius F . Man bemerke dazu, dass G^F glatt über \mathbb{F}_q ist, so dass Q darstellbar ist, die Bildung von eingeschränkten Produkten mit Basiswechsel vertauscht und Q per Definition isomorph zu F^*Q als G^F -Torseur ist.

Es sei nun P ein étaler G -Torseur auf X , für den es einen Isomorphismus $\alpha: P \xrightarrow{\sim} F^*P$ von G -Torseuren gibt. Dann lässt sich wie folgt ein kontravarianter Funktor $\mathcal{F}_{P,\alpha}$ von der Kategorie der étalen Schemata über X in die Kategorie der abelschen Gruppen definieren:

Für jedes étale X -Schema U setzt man

$$\mathcal{F}_{P, \alpha}(U) := \{\sigma \in P(U); F^* \sigma = \alpha \circ \sigma \circ \iota_U\},$$

wobei $\iota_U: F^*U \rightarrow U$ den kanonischen Morphismus bezeichne und man beachte, dass F^* aufgrund seiner Funktorialität zu jedem Morphismus $\sigma: U \rightarrow P$ einen Morphismus $F^*\sigma: F^*U \rightarrow F^*P$ induziert. Dies ergibt einen Funktor $\mathcal{F}_{P, \alpha}$ von dem étalen Situs auf X in die Kategorie der Mengen, der auch eine étale Garbe von Mengen auf X ist, da die in der Definition von $\mathcal{F}_{P, \alpha}$ geforderte Bedingung an die lokalen Schnitte von P verträglich mit den Garbenbedingungen ist. $\mathcal{F}_{P, \alpha}$ ist auch eine Garbe von abelschen Gruppen, da die Gruppenstruktur auf $P(U)$ mit Pullback unter dem Frobenius verträglich ist.

Wir behaupten nun, dass $\mathcal{F}_{P, \alpha}$ ein $G(\mathbb{F}_q)$ -Torseur ist:

Als erstes zeigen wir dazu, dass $\mathcal{F}_{P, \alpha}$ ein formell-prinzipalhomogener Raum unter $G_X(\mathbb{F}_q)$ ist, d.h. dass G^F auf $\mathcal{F}_{P, \alpha}$ operiert und dann der kanonische Morphismus

$$\mathcal{F}_{P, \alpha}(U) \otimes_{X(U)} G_X(\mathbb{F}_q)(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{P, \alpha}(U) \otimes_{X(U)} \mathcal{F}_{P, \alpha}(U), (x, g) \mapsto (x, xg)$$

für alle Schemata U , die étale über X sind, ein Isomorphismus ist.

Zunächst zeigen wir dazu, dass sich die durch die Aktion von $G_X(U)$ auf $P(U)$ gegebene Aktion von $G_X(\mathbb{F}_q)(U)$ auf $P(U)$ zu einer Aktion von $G_X(\mathbb{F}_q)(U)$ auf $\mathcal{F}_{P, \alpha}(U)$ einschränkt, also $\sigma \cdot g \in \mathcal{F}_{P, \alpha}(U)$ für alle $\sigma \in \mathcal{F}_{P, \alpha}(U)$ und $g \in G_X(\mathbb{F}_q)$ gilt.

Da Pullback unter dem Frobenius verträglich mit der Bildung von Faserprodukten ist, ist $F^*(\sigma \cdot g) = F^*(\sigma) \cdot g$. Nach Definition von $\mathcal{F}_{P, \alpha}$ ist ferner $F^*(\sigma) = \alpha \circ \sigma \circ \iota_U$. Weil außerdem α nach Voraussetzung ein Isomorphismus von G -Torseuren ist und also $\alpha(yg) = \alpha(y)g$ für alle $y \in P$ und $g \in G_X$ gilt, folgt

$$F^*(\sigma \cdot g) = F^\sigma \cdot g = (\alpha \circ \sigma \iota_U) \cdot g = \alpha \circ (\sigma \cdot g) \circ \iota_U,$$

so dass $\sigma \cdot g \in \mathcal{F}_{P, \alpha}(U)$ ist.

Also schränkt sich der kanonische Morphismus

$$\beta_P: P(U) \otimes_{X(U)} G_X(U) \rightarrow P(U) \otimes_{X(U)} P(U), (\sigma, g) \mapsto (\sigma, \sigma \cdot g)$$

zu einem Morphismus

$$\beta_{\mathcal{F}_{P, \alpha}}: \mathcal{F}_{P, \alpha}(U) \otimes_{X(U)} G_X(\mathbb{F}_q)(U) \rightarrow \mathcal{F}_{P, \alpha}(U) \otimes_{X(U)} \mathcal{F}_{P, \alpha}(U), (\sigma, g) \mapsto (\sigma, \sigma \cdot g)$$

ein. Da ersterer ein Isomorphismus ist, ist damit auch $\beta_{\mathcal{F}_{P, \alpha}}$ ein Isomorphismus und also $\mathcal{F}_{P, \alpha}$ ein formell-prinzipalhomogener Raum unter $G_X(\mathbb{F}_q)$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathcal{F}_{P,\alpha}(U) \neq \emptyset$ für ein gewisses étales Schema U über X ist, so dass insgesamt $\mathcal{F}_{P,\alpha}$ ein étaler $G(\mathbb{F}_q)$ -Torseur auf X ist.

Dazu benutzen wir die Lang-Isogenie (siehe [La], [Gi, 3.4.]

$$\lambda: G \rightarrow G, \lambda(\sigma) = \sigma^{-1}F(\sigma),$$

die étale und surjektiv und eine Galoisüberlagerung von G mit Gruppe $G(\mathbb{F}_q) = G^F$ ist (vgl. [Gi, Théorème 3.5.], man beachte, dass dort G zusätzlich als reduktiv vorausgesetzt wird, aber dies nicht für die hier zitierten Aussagen benötigt wird), aber im allgemeinen kein Gruppenhomomorphismus. Es sei nun U ein étales Schema über X , bezüglich dessen der Torseur P trivialisiert, d. h. es sei $P \times_X U$ isomorph zu dem trivialen $G_X \times_X U$ -Torseur $G_X \times_X U$. Dann ist $\alpha \otimes \text{id}_U \in (F^*(G_X \times_X U))(G_X \times_X U) = G_U(G_U)$ und die Surjektivität der Lang-Isogenie liefert, dass es ein $\sigma \in G_U(G_U)$ gibt, so dass $\alpha \otimes \text{id}_U = \sigma^{-1}F(\sigma)$ gilt.

Dass die beiden Abbildungen $Q \mapsto (P(Q), P(Q) \xrightarrow{\sim} F^*(P(Q)))$ und $(P, \alpha) \mapsto \mathcal{F}(P)$ jeweils funktoriell sind, ist offensichtlich, so dass sie also Funktoren von der Kategorie der G^F -Torseure auf X in die Kategorie der Paare (P, α) aus einem G -Torseur P auf X und einem Isomorphismus $\alpha: P \xrightarrow{\sim} F^*P$ von G -Torseuren bzw. in umgekehrter Richtung von ebendieser Kategorie in die Kategorie der G^F -Torseure auf X definieren.

Dass die beiden Abbildungen $Q \mapsto (P(Q), P(Q) \xrightarrow{\sim} F^*(P(Q)))$ und $(P, \alpha) \mapsto \mathcal{F}(P)$ invers zu einander sind, ergibt sich schließlich direkt aus ihrer oben dargestellten Konstruktion. \square

3.2.4 Bemerkung.

Das originale Resultat von Deligne setzt nur voraus, dass G eine zusammenhängende algebraische Gruppe ist, d. h. G ist dort nicht notwendigerweise glatt. Der Beweis wird allerdings in [Las] lediglich skizziert.

3.2.5 Korollar.

Es sei G ein zusammenhängendes und reduktives Gruppenschema von endlicher Präsentation über \mathbb{F}_q , $q = p^r$, und X ein Schema über \mathbb{F}_q .

*Dann ist jeder étale G -Torseur P auf X , der als étaler G -Torseur P isomorph zu seinem Pullback F^*P unter dem absoluten Frobenius von X ist, durch einen endlichen étalen Morphismus $f: Y \rightarrow X$ trivialisierbar.*

Beweis Es sei P ein étaler G -Torseur auf X , der als étaler G -Torseur isomorph zu seinem Pullback F^*P unter dem Frobenius ist. Dann existiert nach Satz 3.2.3 ein G^F -Torseur Q , so dass $P = Q \wedge^{G^F} G$ ist. Weil $G^F = G(\mathbb{F}_q)$ glatt

und endlich ist, ist Q nach [M, Proposition III.4.2] endlich über X , so dass $f: Q \rightarrow X$ eine endliche étale Überlagerung von X ist. Man beachte dabei, dass unter den gegebenen Voraussetzungen gilt, dass jeder G -Torseur für die fppf-Topologie auch ein Torseur für die étale Topologie ist und umgekehrt.

Es ist nun $f^*Q = Q \times_X Q$ trivial als étaler $G^F \times_X Q$ -Torseur auf Q , so dass auch $f^*P = P \times_X Q = (Q \times_X Q) \wedge^{G^F} G$ trivial als étaler G -Torseur ist. \square

3.2.6 Korollar.

*Es sei G ein zusammenhängendes und reduktives Gruppenschema von endlicher Präsentation über \mathbb{F}_q , $q = p^r$, und X ein Schema über \mathbb{F}_q . Es sei ferner P ein étaler G -Torseur auf X mit der Eigenschaft, dass es ein $s \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $(F^t)^*P \cong (F^s)^*P$ für alle $t \geq s$ als étale G -Torseure gilt, wobei F den absoluten Frobenius von X bezeichne. Dann ist P trivialisierbar.*

Beweis Es ist nach Voraussetzung $(F^s)^*P \cong (F^{s+1})^*P = F^*((F^s)^*P)$ als étale G -Torseure auf X . Also ist nach Korollar 3.2.5 $(F^s)^*P$ durch einen endlichen étalen Morphismus $f: Y \rightarrow X$ trivialisierbar. Damit wird aber auch P durch den endlichen Morphismus $F^s \circ f$ trivialisiert. \square

3.3 Semistabilität von Prinzipalbündeln

Ähnlich wie im Fall der Vektorbündel werden uns diese Resultate eine Beschreibung der Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{x}_o, D}(G)$ mittels des Begriffs der *Semistabilität* ermöglichen. Dazu benötigen wir aber noch die folgende Konstruktion:

Ist G eine zusammenhängende reduktive Gruppe über einem Körper k beliebiger Charakteristik, X eine glatte und projektive Kurve über k , E ein G -Torseur auf X und F ein quasi-projektives Schema über k , auf dem G von links operiert, so wird durch $g(e, f) := (e(g \otimes 1), g^{-1}f)$ für alle $g \in G$, $e \in E$ und $f \in F$ eine Aktion von G auf $E \times_{\text{Spec } k} F$ definiert. Der Quotient von $E \times_{\text{Spec } k} F$ modulo dieser Aktion von G ist durch ein eindeutig bestimmtes Schema $E(F)$ darstellbar, so dass der Morphismus $E \times_{\text{Spec } k} F \rightarrow E(F)$ dem Faserprodukt $E \times_{\text{Spec } k} F$ die Struktur eines étalen G -Torseurs über $E(F)$ gibt. Dies sieht man wie folgt (vgl. [Se, Proposition 4]):

Da G reduktiv, also insbesondere glatt und affin, ist und folglich E nach der Argumentation aus Satz 2.1.2 auch ein G -Torseur auf X für die étale Topologie ist, darf man aufgrund der Tatsache, dass die Existenz von $E(F)$ ein lokales Problem ist, annehmen, dass es eine étale Überlagerung $f: Y \rightarrow X$

gibt, so dass f^*E trivial als étaler G -Torseur ist. Nach Bemerkung 1.1.14 darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass f galoissch mit Galoisgruppe H ist. Also ist $E \cong Y \times_{\text{Spec } k} G/H$.

Mittels der Identifikation von Čech-Kohomologie mit Galois-Kohomologie aus [M, Example III.2.6] sieht man daraus, dass $E(F) = Y \times_{\text{Spec } k} F/H$ gilt. Nach [L1, Exercise 3.3.23] ist aber $Y \times_{\text{Spec } k} F/H$ durch ein Schema darstellbar.

Aus der Konstruktion ist offensichtlich, dass man für einen Morphismus $\alpha: F_1 \rightarrow F_2$ von quasi-projektiven k -Schemata mit einer Aktion von G von links, der verträglich mit der Aktion von G auf F_1 bzw. F_2 ist, stets einen Morphismus $\alpha_E: E(F_1) \rightarrow E(F_2)$ erhält.

Außerdem halten wir fest, dass, wenn $\sigma: G \rightarrow H$ ein Morphismus zusammenhängender reductiver algebraischer Gruppen über k ist und man vermittels dieses H als quasi-projektive Varietät mit einer Aktion von G von links auffasst, das wie oben definierte Schema $E_\rho(H)$ ein H -Torseur ist.

Ist weiterhin H eine normale abgeschlossene Untergruppe von G , so folgt aus dem Theorem von Chevalley, dass G/H eine quasi-projektive Varietät ist (vgl. z.B. [C, Corollary 1.2]). Versieht man nun G/H mit der kanonischen Aktion von G von links, so existiert also das oben definierte Schema $E(G/H)$.

Mittels dieser Konstruktion von Serre können wir nun Erweiterungen und Reduktionen der Strukturgruppe definieren:

3.3.1 Definition.

Ist $\rho: G \rightarrow H$ ein Morphismus von zusammenhängenden reductiven Gruppenschemata von endlicher Präsentation über einem Körper k und X eine glatte und projektive Kurve über k , so induziert ρ eine Abbildung

$$H^1(X, G) \rightarrow H^1(X, H),$$

in dem man jedem G -Torseur E den H -Torseur $E_\rho(H)$ zuordnet. Man sagt, dass man $E_\rho(H)$ mittels Erweiterung der Strukturgruppe von E zu H erhält.

Gibt es umgekehrt zu einem gegebenen H -Torseur E' einen G -Torseur E und einen Isomorphismus von H -Torseuren $\Phi: E_\rho(H) \rightarrow E'$, so bezeichnet man (E, Φ) als eine Reduktion der Strukturgruppe von E' zu G .

Für die weitere Beschreibung der Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{x}, D}(G)$ benötigen wir den Begriff der *Semistabilität* von Prinzipalbündeln. Dazu sei zunächst an die Definition von *Semistabilität* für Vektorbündel erinnert:

3.3.2 Definition. (Mumford,[Mf1])

Es sei \mathcal{F} ein Vektorbündel auf einer glatten und projektiven Kurve über einem Körper k . Dann bezeichnet man den Quotienten $\mu(\mathcal{F}) := \deg \mathcal{F} / \text{rk} \mathcal{F}$ als den slope von \mathcal{F} und es heißt \mathcal{F} semistabil, falls für jedes nichttriviale echte Unterbündel \mathcal{G} von \mathcal{F} die Ungleichung $\mu(\mathcal{G}) \leq \mu(\mathcal{F})$ erfüllt ist.

Man bemerke, dass jedes nichttriviale echte Unterbündel \mathcal{G} von \mathcal{F} Anlass gibt zu der Reduktion der Strukturgruppe des assoziierten $Gl_{rk \mathcal{F}}$ -Prinzipalbündels zu der Untergruppe, die den Unterraum $k^{rk \mathcal{G}}$ von $k^{rk \mathcal{F}}$ festhält (vgl. den späteren Beweis von Lemma 3.3.5).

Die allgemeine Strukturtheorie algebraischer Gruppen zeigt, dass diese Untergruppe ein Spezialfall des allgemeinen Begriffs einer maximalen parabolischen Untergruppe einer gegebenen reductiven algebraischen Gruppe ist (vgl. ebenfalls den Beweis von Lemma 3.3.5).

Dabei heißt nach [SGA 3, Exposé XXVI, Définition 1.1] eine Untergruppe P einer reductiven algebraischen Gruppe G über einem Basisschema S *parabolisch*, wenn zum einen P glatt über S ist, zum anderen $P_{\bar{s}}$ für alle $s \in S$ eine Boreluntergruppe von $G_{\bar{s}}$ enthält.

Es seien nun X eine glatte und projektive Kurve über einem Körper k , G eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe über k sowie E ein G -Torseur auf X . Man beachte dabei, dass E unter den gegebenen Voraussetzungen ein Torseur sowohl für die fppf-Topologie als auch für die étale Topologie ist. Es sei ferner P eine parabolische Untergruppe von G . Dann ist G/P nach [SGA 3, Exposé XXVI, Proposition 1.2] durch ein glattes und projektives k -Schema darstellbar. Mittels

$$G \times_{\text{Spec } k} G/P \rightarrow G/P, (g, \bar{h}) \mapsto \overline{gh}$$

lässt sich eine Aktion von G von links auf G/P definieren. Also existiert das oben definierte Schema $E(G/P)$. Zur Vereinfachung der Notation sei im folgenden $E/P := E(G/P)$.

Es sei ferner $T_{E/P}$ das relative Tangentialbündel bezüglich der Projektion $E/P \rightarrow X$. Dieses ist nach [SGA 3, Exposé II, §3] als der kovariante Funktor

$$M \mapsto \mathcal{H}om_X(\text{Spec}(\mathcal{O}_X \oplus M), E/P)$$

von der Kategorie der freien \mathcal{O}_X -Moduln von endlichem Typ in die Kategorie der Funktoren über E/P definiert, welcher nach [SGA 3, Exposé II, Proposition 3.3] durch ein Vektorbündel auf E/P darstellbar ist.

Ist $\sigma: X \rightarrow E/P$ ein Schnitt der kanonischen Projektion $E/P \rightarrow X$, so findet man (siehe z.B. [HN, S.2]), dass $\sigma^* T_{E/P} = E(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ gilt, wobei $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$

und $\mathfrak{p} = \text{Lie } P$ sei, E als étaler P -Torseur über E/P aufgefasst werde und die Aktion von P auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ durch die Adjunktionsoperation gegeben ist.

Für jeden Schnitt $\sigma: X \rightarrow E/P$ ist damit $\sigma^*T_{E/P}$ ein Vektorbündel auf X vom Grad $\text{deg}(\sigma^*T_{E/P})$.

Desweiteren gilt:

3.3.3 Lemma.

Die Schnitte $\sigma: X \rightarrow E/P$ stehen in bijektiver Korrespondenz zu den étalen P -Torseuren auf X , die man mittels Reduktionen der Strukturgruppe von E zu P erhält.

Beweis Man fasse $E \rightarrow E/P$ als étalen P -Torseur auf und betrachte für $\sigma: X \rightarrow E/P$ das Pullback-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \sigma^*E & \longrightarrow & E \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ X & \xrightarrow{\sigma} & E/P. \end{array}$$

Dieses definiert die gewünschte Reduktion der Strukturgruppe von E zu P . \square

Daher ist es legitim, im folgenden Reduktionen der Strukturgruppe von E zu P mit (P, σ) zu bezeichnen.

Dies motiviert die folgende Definition der Semistabilität für den Fall von Prinzipalbündeln:

3.3.4 Definition. ([R, Definition 1.1])

*Es sei G eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe über einem Körper k und X eine glatte und projektive Kurve über k . Dann heißt ein G -Torseur E auf X semistabil, wenn für jede Reduktion (P, σ) der Strukturgruppe zu einer maximalen parabolischen Untergruppe P , wobei σ einen Schnitt $\sigma: X \rightarrow E/P$ bezeichnet, gilt, dass $\text{deg}(\sigma^*T_{E/P}) \geq 0$ ist.*

Diese Definition der Semistabilität von Prinzipalbündeln nach Ramanathan ist verträglich mit der Definition von Semistabilität für Vektorbündeln von Mumford im folgenden Sinne:

3.3.5 Lemma.

Ein $Gl(n)$ -Torseur E auf einer glatten und projektiven Kurve X über einem Körper k ist genau dann semistabil, wenn für jedes Unterbündel \mathcal{F} des assoziierten Vektorbündels \mathcal{E} vom Rang n gilt, dass $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E})$ ist, d. h. wenn \mathcal{E} ein semistabiles Vektorbündel im Sinne von Definition 3.3.2 ist.

Beweis

- (i) Wir imitieren den Beweis der Tatsache für den Fall $\text{char } k = 0$ aus [HM]:

Es sei $P(n, k)$ die Untergruppe von $Gl(n, k)$ der Matrizen der Form $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ mit $A \in Gl(r, k)$ und $C \in Gl(n - r, k)$ bezüglich einer gewählten Basis von k^n . Dies ist eine parabolische Untergruppe, da $P(n, k)$ die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen enthält und diese wiederum eine Boreluntergruppe von $Gl(n, k)$ ist. Andererseits ist jede parabolische Untergruppe von $Gl(n, k)$ von dieser Gestalt.

Es sei (P, σ) eine Reduktion der Strukturgruppe von E zu P . Wie in Lemma 3.3.3 liefert diese einen P -Torseur σ^*E auf X . Es sei $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Überdeckung von X , bezüglich derer σ^*E trivialisiert. Dann definiert der P -Torseur σ^*E eine Klasse in $\check{H}_{\text{ét}}^1(X, P)$ und der Kozykel zu der Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ besitzt die Form $\begin{pmatrix} h_{\alpha\beta} & b_{\alpha\beta} \\ 0 & q_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$.

Es sei \mathcal{F} das Unterbündel vom Rang r von \mathcal{E} , das zu $(h_{\alpha\beta})$ korrespondiert. Dann korrespondiert das Quotientenbündel \mathcal{E}/\mathcal{F} zu $(q_{\alpha\beta})$ und wir behaupten, dass es einen natürlichen Isomorphismus

$$\sigma^*T_{E/P} \cong \mathcal{F}^v \otimes (\mathcal{E}/\mathcal{F})$$

gibt. Dies sieht man wie folgt:

Die Adjunktionsoperation von P auf der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(n, k)$ ist durch die Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} h & b \\ 0 & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h^{-1} & b' \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ q \cdot C \cdot h^{-1} & * \end{pmatrix}$$

gegeben. Dabei ist $\begin{pmatrix} h^{-1} & b' \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$ die inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} h & b \\ 0 & q \end{pmatrix}$. Die Einträge $*$ gehören zu \mathfrak{p} , so dass der einzige Anteil, der für $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ relevant ist, der Eintrag links unten ist. Also ist die Adjunktionsoperation von P auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ durch

$$\left(\begin{pmatrix} h & b \\ 0 & q \end{pmatrix}, C \right) \mapsto q \cdot C \cdot h^{-1}$$

gegeben. Daher ist der Kozykel zu $\sigma^*E(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}) = \sigma^*T_{E/P}$ in $\check{H}_{\text{ét}}^1(X, Gl(n, k))$ durch $((h_{\alpha\beta}^{-1})^t \otimes q_{\alpha\beta})$ bestimmt, der aber wiederum zu dem Vektorbündel $F^v \otimes (E/F)$ korrespondiert. (vgl. z. B. [GH, §0.5], wobei man dort \mathbb{C} stets durch einen beliebigen Körper beliebiger Charakteristik ersetzen darf.)

(ii) Mit dieser Vorarbeit können wir nun die Aussage des Lemmas beweisen:

Es sei zunächst das zu E assoziierte Vektorbündel \mathcal{E} vom Rang n semistabil im Sinne von Mumford und (P, σ) eine Reduktion der Strukturgruppe von E zu einer maximalen parabolischen Untergruppe P von $Gl(n, k)$. Dann korrespondiert P zu einer zweischrittigen Flagge

$$0 = V_0 \subset V_1 = (k^n)^P \subset V_2 = k^n.$$

Man setze nun $\mathcal{F} := \sigma^*E(V_1)$. Nach Konstruktion ist dies ein nicht-triviales echtes Unterbündel von \mathcal{E} , so dass aufgrund der Semistabilität von \mathcal{E} folgt, dass $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E})$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E}/\mathcal{F})$ ist. Da aber nach den Rechenregeln für \deg (siehe z.B. [Lp, Exercise 2.4])

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{F}^* \otimes (\mathcal{E}/\mathcal{F})) &= -\deg \mathcal{F} \cdot \text{rg}(\mathcal{E}/\mathcal{F}) + \text{rg} \mathcal{F} \cdot \deg(\mathcal{E}/\mathcal{F}) \\ &\quad - \deg \mathcal{F} \cdot (\text{rg} \mathcal{E} - \text{rg} \mathcal{F}) + \text{rg} \mathcal{F} \cdot (\deg \mathcal{E} - \deg \mathcal{F}) \\ &= (\mu(\mathcal{E}/\mathcal{F}) - \mu(\mathcal{F})) \cdot \text{rg} \mathcal{F} \cdot \text{rg}(\mathcal{E}/\mathcal{F}) \end{aligned}$$

gilt, ist damit $\deg(\mathcal{F} \otimes (\mathcal{E}/\mathcal{F})) \geq 0$. Nach (i) ist damit $\deg(\sigma^*T_{E/P}) \geq 0$, also E semistabil als $Gl(n, k)$ -Torseur nach Definition 3.3.4.

Es sei umgekehrt E ein semistabiler $Gl(n, k)$ -Torseur. Dann ist jedes Untervektorbündel \mathcal{F} von \mathcal{E} von der Form $\mathcal{F} = \sigma^*(E(V_1))$ für eine Reduktion der Strukturgruppe (P, σ) zu der parabolischen Untergruppe P , die zu der Flagge $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 = k^n$ korrespondiert, wobei \mathcal{F} den Unterraum V_1 festhält. Nach (i) ist $\sigma^*T_{E/P} = \mathcal{F}^v \otimes (\mathcal{E}/\mathcal{F})$. Weil nach Voraussetzung E semistabil ist, ist also

$$\deg(\mathcal{F}^v \otimes (\mathcal{E}/\mathcal{F})) = \deg \sigma^*T_{E/P} \geq 0.$$

Wie oben gilt aber

$$\deg(\mathcal{F}^* \otimes (\mathcal{E}/\mathcal{F})) = (\mu(\mathcal{E}) - \mu(\mathcal{F})) \cdot \text{rg} \mathcal{F} \cdot \text{rg}(\mathcal{E}/\mathcal{F}),$$

so dass $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E}/\mathcal{F})$ folgt und damit \mathcal{E} ein semistabiles Vektorbündel im Sinne von Mumford ist. \square

Wegen $\sigma^*T_{E/P} = E(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ gilt außerdem:

3.3.6 Lemma. (vgl. [R, Remark 2.2], [BH, Lemma 2.5])

Es sei G eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe über einem Körper k beliebiger Charakteristik und X eine glatte und projektive Kurve über k . Dann ist ein G -Torseur E auf X semistabil, falls das assoziierte Vektorbündel $E(\mathfrak{g})$ semistabil ist.

Beweis Es sei (P, σ) eine Reduktion der Strukturgruppe von E zu einer maximalen parabolischen Untergruppe P von G . Dann liefert die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \rightarrow 0$$

wegen der Funktorialität der Konstruktion des assoziierten Faserbündels (siehe auch [Se, 3.2, Exemple b),c)]) eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow E(\mathfrak{p}) \rightarrow E(\mathfrak{g}) \rightarrow E(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}) \rightarrow 0$$

von Vektorbündeln auf X . Da $E(\mathfrak{g})$ semistabil als Vektorbündel ist, ist also $\mu(E(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})) \geq \mu(E(\mathfrak{g}))$, d. h. $\mu(\sigma^*T_{E/P}) \geq \mu(E(\mathfrak{g}))$. Weil nach [Be, Note 4.2] $\deg(E(\mathfrak{g})) = 0$ gilt, so dass $\mu(E(\mathfrak{g})) = 0$ ist, folgt daraus $\deg(\sigma^*T_{E/P}) \geq 0$ und damit die Semistabilität von E . \square

3.3.7 Korollar.

Es sei G eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe über einem Körper k und X eine glatte und projektive Kurve über k . Dann ist der triviale G -Torseur G_X auf X semistabil.

Beweis In der gegebenen Situation gilt

$$G_X(\mathfrak{g}) = (G \times_{\text{Spec } k} X) \times_{\text{Spec } k} \mathfrak{g}/(x, eg, g^{-1}f) \cong X \times_{\text{Spec } k} (G \times_{\text{Spec } k} \mathfrak{g}/(eg, g^{-1}f))$$

mit $x \in X$, $e \in G$ und $f \in \mathfrak{g}$, so dass $G_X(\mathfrak{g})$ ein triviales Vektorbündel ist. Nach Lemma 3.3.6 ist also G_X semistabil. \square

3.3.8 Bemerkung.

Es seien G , X und k wie bisher. Dann zeigt der Beweis von Lemma 3.3.6 auch, dass ein G -Torseur E auf X genau dann semistabil ist, wenn

$$\deg(\sigma^*E(\mathfrak{p})) \leq 0$$

für jede Reduktion (P, σ) der Strukturgruppe zu einer maximalen parabolischen Untergruppe P von G gilt.

Wie im Fall der Vektorbündel lässt sich außerdem auch bei G -Torseuren deren Semistabilität nach Pullback entlang einer endlichen Überlagerung nachprüfen:

3.3.9 Lemma. (vgl. [BH, Lemma 6.8])

*Es sei X eine glatte und projektive Kurve über einem Körper k , G eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe über k , E ein G -Torseur auf X und $f: Y \rightarrow X$ eine endliche Überlagerung. Dann ist E semistabil, falls f^*E es ist.*

Beweis Es sei also f^*E semistabil. Angenommen, E sei nicht semistabil. Nach Definition 3.3.4 existieren somit eine maximale parabolische Untergruppe P von G und ein Schnitt $\sigma: X \rightarrow E/P$, so dass $\deg(\sigma^*T_{E/P}) < 0$ ist.

Dann ist aber auch P_Y eine maximale parabolische Untergruppe von G_Y , da alle in der Definition der Eigenschaft „maximal parabolisch“ auftretenden Bedingungen stabil unter Basiswechsel sind, und $\sigma \otimes \text{id}_Y: Y \rightarrow E \times_X Y/P_Y$ ein Schnitt des Strukturmorphismus $E \times_X Y/P_Y \rightarrow Y$. Da die Bildung von E/P nach [Se, Remarque 3.2] und die des Tangentialbündels (siehe [SGA 3, Proposition II.3.4]) jeweils mit Basiswechsel vertauschen, gilt nach den Rechenregeln für den Grad eines Vektorbündels (vgl. [L1, Proposition 7.3.8])

$$\deg((\sigma \otimes \text{id}_Y)^*T_{f^*E/P_Y}) = \deg(f^*(\sigma^*T_{E/P})) = [K(Y) : K(X)] \deg(\sigma^*T_{E/P}).$$

Also ist auch

$$\deg((\sigma \otimes \text{id}_Y)^*T_{E \times_X Y/P_Y}) < 0$$

und damit $E \times_X Y$ ebenfalls nicht semistabil, was einen Widerspruch zu der Voraussetzung, dass $E \times_X Y$ semistabil ist, darstellt. Also ist E semistabil. \square

Ferner gilt:

3.3.10 Lemma.

*Es seien X_0 eine glatte und projektive Kurve über einem Körper k , \bar{k} der algebraische Abschluss von k , $X := X_0 \otimes_k \bar{k}$ und $f: X \rightarrow X_0$ die kanonische Projektion. Ferner sei G eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe über k und E ein G -Torseur auf X_0 . Dann ist E semistabil, falls f^*E es ist.*

Beweis Es sei f^*E semistabil. Angenommen, E sei nicht semistabil. Dann existieren nach Definition 3.3.4 eine maximale parabolische Untergruppe P von G_{X_0} und ein Schnitt $\sigma: X \rightarrow E/P$, so dass $\deg(\sigma^*T_{E/P}) < 0$ ist.

Weil $f^*E = E \otimes_k \bar{k}$ ist und, wie schon im Beweis des vorherigen Resultats verwendet, alle Konstruktionen mit Basiswechsel verträglich sind, folgt mit [L1, Proposition 7.3.7] für die maximale parabolische Untergruppe $P_X = P \otimes_k \bar{k}$ und den Schnitt $\sigma \otimes_k \bar{k}: X_0 \rightarrow E \otimes_k \bar{k}/P_X$:

$$\deg((\sigma \otimes_k \bar{k})^* T_{f^*E/P_X}) = \deg((\sigma^* T_{E/P}) \otimes_k \bar{k}) = \deg(\sigma^* T_{E/P}) < 0.$$

Damit ist auch f^*E nicht semistabil, was einen Widerspruch zu der Voraussetzung darstellt, dass f^*E semistabil ist. Also ist E semistabil. \square

3.3.11 Bemerkung.

*Es sei angemerkt, dass die Umkehrung in den beiden vorangegangenen Resultaten im allgemeinen nicht richtig ist: Ist E semistabil, so ist im allgemeinen f^*E nicht notwendigerweise ebenfalls semistabil.*

Für Vektorbündel weiß man nach einem Resultat von Gieseker (siehe [Gie, Lemma 1.1]), dass die Umkehrung gilt, wenn der Morphismus f endlich und separabel ist.

Für den Fall eines G -Torseurs unter einer zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe G von endlicher Präsentation über k gilt nach [BH, Lemma 6.8] die Umkehrung, wenn ebenfalls f endlich und separabel ist, aber dies nur für den Fall, dass G eine Darstellung „of low height“ besitzt.

3.4 Der Grad eines Torseurs

Wir benötigen nun noch den Begriff des Grades eines Torseurs:

3.4.1 Definition. (vgl. [HN, Definition 3.2])

Es sei X eine glatte und projektive Kurve vom Geschlecht g über einem Körper k , G eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe über k und E ein G -Torseur auf X . Dann heißt der Homomorphismus

$$d_E: \text{Hom}(G, k^*) \rightarrow \mathbb{Z}, \chi \mapsto \deg(E_\chi)$$

der Grad von E .

Dabei ist $E_\chi = E \times_{\text{Spec } k} \mathbb{G}_m / G$ das durch den Charakter χ zu E assoziierte Geradenbündel, wobei die Aktion von G auf $E \times_{\text{Spec } k} \mathbb{G}_m$ durch

$$(e, f)g = (eg, \chi(g^{-1})f)$$

für alle $e \in E$, $f \in \mathbb{G}_m$ und $g \in G$ gegeben ist.

3.4.2 Bemerkung.

Es sei weiterhin X eine glatte und projektive Kurve vom Geschlecht g über einem Körper k und G eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe über k . Dann gilt:

- (i) Der Grad d_{G_X} des trivialen Torseurs G_X auf X ist der Nullhomomorphismus.
- (ii) Ist E ein G -Torseur auf X und $f : Y \rightarrow X$ ein endlicher Morphismus glatter und projektiver Kurven über k , so gilt $d_{f^*E} = [K(Y) : K(X)]d_E$.
- (iii) Ist E ein G -Torseur auf X und \bar{k} ein algebraischer Abschluss von k , so gilt $d_{E \otimes_k \bar{k}} = d_E$.

Beweis

- (i) Es sei χ ein beliebiger Charakter der Gruppe G . Dann erhält man als das zu χ assoziierte Geradenbündel $(G_X)_\chi$ das folgende Geradenbündel:

$$\begin{aligned} (G_X)_\chi &= (G \times_{\text{Spec } k} X \times_{\text{Spec } k} \mathbb{G}_m) / \langle (e, x, f)g = (eg, x, \chi(g^{-1})f) \rangle \\ &= X \times_{\text{Spec } k} (G \times_{\text{Spec } k} \mathbb{G}_m / \langle (e, f)g = (eg, \chi(g^{-1})f) \rangle), \end{aligned}$$

wobei $e, g \in G$, $x \in X$ und $f \in \mathbb{G}_m$ sind.

Also ist $(G_X)_\chi$ ein triviales Geradenbündel auf X und damit

$$d_{G_X}(\chi) = \deg((G_X)_\chi) = 0.$$

Da der Charakter χ beliebig gewählt war, ist damit der Grad d_{G_X} des trivialen Torseurs G_X auf X der Nullhomomorphismus.

- (ii) Dies folgt sofort aus der Tatsache, dass die Konstruktion des zu einem Charakter χ von G assoziierten Geradenbündels mit Basiswechsel vertauscht, und den Rechenregeln für das Verhalten des Grades eines Geradenbündels unter endlichem Pullback.
- (iii) Es gilt $\deg_k D = \deg_{\bar{k}}(D \otimes_k \bar{k})$ für jeden Divisor D auf X nach [L1, Proposition 7.3.7]. Aufgrund der Definition des Grades eines Geradenbündels und der Tatsache, dass alle zu betrachtenden Konstruktionen mit Basiswechsel vertauschen, folgt daraus die Behauptung. \square

Für uns wichtig ist der Begriff des Grades eines Torseurs vor allem wegen des folgenden Resultats von Holla und Narasimham:

3.4.3 Satz. ([HN, Theorem 1.2])

Es seien G eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe und X eine glatte und projektive Kurve jeweils über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k beliebiger Charakteristik. Dann ist die Menge der Isomorphieklassen der semistabilen G -Torseure auf X mit fixiertem Grad beschränkt.

Dabei heiÙe eine Menge \mathcal{S} von G -Torseuren beschränkt, falls es ein Schema S von endlichem Typ über k und eine Familie von G -Torseuren gibt, die durch S parametrisiert wird, so dass jedes Element von \mathcal{S} auf X isomorph zu dem G -Torseur auf X ist, den man durch Einschränken der gegebenen Familie auf einen geeigneten abgeschlossenen Punkt von S erhält.

Weil nach einem Theorem von Lang (vgl. [La, Theorem 1.3] bzw. [Sp]) $H^1(k, G_{\bar{k}}) = 0$ für eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe G über einem endlichen Körper k gilt, wobei \bar{k} ein algebraischer Abschluss von k ist, und es damit keine nichttrivialen Formen gibt, folgt daraus mittels noetherischem Descent:

3.4.4 Korollar.

Es seien G eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe und X eine glatte und projektive Kurve jeweils über einem endlichen Körper k . Dann ist die Menge der Isomorphieklassen der semistabilen G -Torseure auf X mit fixiertem Grad beschränkt ist.

3.4.5 Korollar.

Es seien G eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe und X eine glatte und projektive Kurve jeweils über einem endlichen Körper k . Dann gibt es nur endlich viele Isomorphieklassen semistabiler G -Torseuren auf X mit fixiertem Grad.

Beweis Nach Korollar 3.4.4 ist die Menge \mathcal{S} der Isomorphieklassen der semistabilen G -Torseure auf X mit fixiertem Grad beschränkt. Per Definition gibt es also ein Schema S von endlichem Typ über k und eine Familie von G -Torseuren auf X , die durch S parametrisiert wird, so dass jedes Element der Menge der Isomorphieklassen der semistabilen G -Torseure auf X isomorph zu dem G -Torseur auf X ist, den man durch Einschränken der gegebenen Familie auf einen geeigneten abgeschlossenen Punkt von S erhält. Ist S affin, so ist S ein Unterschema der affinen Geraden über k und besitzt daher nur endlich viele abgeschlossene Punkte, so dass die Behauptung folgt. Ist S nicht affin, so wähle man eine endliche affine Überdeckung von S (eine solche existiert, da S quasikompakt ist) und folgere dann wie im affinen Fall. \square

3.5 Zusammenhänge zwischen Semistabilität und Trivialisierbarkeit

Ähnlich wie im von Lange und Stuhler in [LS] behandelten Fall der Vektorbündel ergeben sich auch im Fall von G -Torseuren Zusammenhänge zwischen Semistabilität und Trivialisierbarkeit der Torseure. Dazu definieren wir:

3.5.1 Definition.

*Es sei G eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe von endlicher Präsentation über einem vollkommenen Körper k der Charakteristik $p > 0$ und X eine glatte und projektive Kurve über k . Dann heißt ein G -Torseur E auf X streng semistabil, falls E semistabil ist und zudem für alle $r \in \mathbb{N}$ das Pullback $(F^r)^*E$ unter dem r -fachen Produkt des absoluten Frobenius F auf X ebenfalls semistabil ist.*

Diese Definition erlaubt es nun, das folgende Resultat zu zeigen, das ein Analogon zu dem bekannten Resultat von Lange und Stuhler im Falle von Vektorbündeln anstelle von Prinzipalbündeln darstellt (siehe [LS, Satz 1.9]):

3.5.2 Satz.

Es seien X eine glatte und projektive Kurve vom Geschlecht g über einem endlichen Körper k und G eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe von endlicher Präsentation über k . Dann ist E , aufgefasst als G -Torseur für die étale Topologie, genau dann trivialisierbar, wenn E streng semistabil vom Grad Null ist.

Beweis Ist E durch eine endliche Überlagerung $f: Y \rightarrow X$ trivialisierbar, so ist auch für jedes $r \in \mathbb{N}$ das Pullback $(F^r)^*E$ unter der r -ten Potenz des absoluten Frobenius auf X durch f trivialisierbar. Nach Lemma 3.3.9 ist damit $(F^r)^*E$ semistabil, da nach Korollar 3.3.7 der triviale Torseur G_Y auf Y semistabil ist. Also ist E streng semistabil. Aus Bemerkung 3.4.2 ergibt sich ferner, dass $d_E \equiv 0$ ist.

Ist umgekehrt E streng semistabil vom Grad Null, so ist $(F^r)^*(E)$ semistabil vom Grad Null für alle $r \in \mathbb{N}$. Da nach Korollar 3.4.5 die Anzahl der Isomorphieklassen semistabiler G -Torseure \tilde{E} auf X mit fest gewähltem Grad $d_{\tilde{E}}$ endlich ist, gibt es dann ein $s \in \mathbb{N}$, so dass man Isomorphismen von G -Torseuren $(F^r)^*(E) \cong (F^s)^*(E)$ für alle $r \geq s$ hat. Nach Korollar 3.2.6 ist also E trivialisierbar. \square

3.6 Anwendung auf die Charakterisierung der Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_0, D}(G)$

Es sei nun im folgenden wieder G stets ein zusammenhängendes reduktives Gruppenschema von endlicher Präsentation über \mathfrak{o} und $k = \overline{\mathbb{F}_p}$ der Restklassenkörper von $\overline{\mathbb{Z}_p}$.

Dann können wir nun das erste Hauptresultat dieser Arbeit zeigen:

3.6.1 Theorem

Es sei \mathfrak{X} ein glattes Modell über $\overline{\mathbb{Z}_p}$ einer glatten und projektiven Kurve X über $\overline{\mathbb{Q}_p}$ von von Null verschiedenem Geschlecht. Dann liegt ein G -Torseur P auf \mathfrak{X} genau dann in der Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_0}(G)$, wenn P_k streng semistabil vom Grad Null auf der glatten und projektiven Kurve \mathfrak{X}_k über k ist. (Für die Tatsache, dass \mathfrak{X}_k eine glatte und projektive Kurve ist, siehe u. a. Korollar 1.2.5, [L1, Lemma 4.3.7], [L1, Corollary 4.3.14].)

Beweis

- (i) Liegt P in $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_0}(G)$, so existiert nach Theorem 3.1.1 eine Überdeckung $(\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}) \in S_{\mathfrak{X}}^{\text{ss}}$, so dass $\pi_k^* P_k$ trivial ist. Da π_k endlich ist, ist nach Korollar 3.3.7 und Lemma 3.3.9 also P_k ein semistabiler G -Torseur auf \mathfrak{X}_k . Wegen $\pi \circ F_{\mathfrak{X}_k} = F_{\mathcal{Y}_k} \circ \pi$ folgt genauso, dass für alle $r \in \mathbb{N}$ auch $(F_{\mathfrak{X}_k}^r)^* P_k$ semistabil ist, so dass also P_k streng semistabil ist. Da der Grad des trivialen Torseurs der Nullmorphismus ist und nach Bemerkung 3.4.2(ii) $d_{\pi_k^* P_k} = [K(\mathcal{Y}_k) : K(\mathfrak{X}_k)] d_{P_k}$ gilt, ist zudem der Grad von P_k ebenfalls der Nullmorphismus.
- (ii) Sei nun umgekehrt P_k streng semistabil vom Grad Null. Da unter den gegebenen Voraussetzungen jeder G -Torseur auch ein Torseur bezüglich der étalen Topologie ist, können wir im folgenden P und P_k stets als Torsore für die étale Topologie auffassen.

Mittels noetherschen Descents sieht man, dass die Familie $(X, \mathfrak{X}, G, P_k)$ zu einer Familie $(X_K, \mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_K}, G_0, P_0)$ über einer endlichen Erweiterung K von $\overline{\mathbb{Q}_p}$ mit Restklassenkörper $\kappa \cong \mathbb{F}_q, q = p^r$, absteigt. Dabei ist X_K eine glatte und projektive Kurve über K , $\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_K}$ ein glattes Modell von X_K über \mathfrak{o}_K , G_0 eine zusammenhängende reduktive Gruppe von endlicher Präsentation über einer normalen, endlich erzeugten \mathfrak{o}_K -Algebra A und P_0 ein étaler G -Torseur auf der speziellen Faser \mathfrak{X}_0 von $\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_K}$. Dies zeigt man genauso wie im Beweis von Theorem 3.1.1, bis auf die Änderung, dass hier P_k als étaler G -Torseur aufgefasst wird, und man beachte,

dass die Eigenschaft eines Morphismus, „étale“ zu sein, nach [EGA IV, Proposition 17.7.8] stabil (d. h. nach Übergang zu einer geeigneten Erweiterung) unter noetherschem Descent ist, ebenso wie nach [EGA IV, Corollaire 8.4.5] und [SGA 3, Exposé XIV, Remarque 2.9] die Eigenschaften „zusammenhängend“ und „reduktiv“ des gegebenen Gruppenschemas G .

Man überlegt nun leicht, dass der abgestiegene G_0 -Torseur streng semistabil vom Grad Null ist: Nach Lemma 3.3.10 ist P_k semistabil und wegen $(F_{\mathfrak{X}_k}^r)^*P_k = ((F_{\mathfrak{X}_0}^r)^*P_0) \otimes_k \bar{k}$ folgt aus demselben Resultat, dass auch $(F_{\mathfrak{X}_0}^r)^*P_0$ für alle $r \in \mathbb{N}$ semistabil ist, so dass damit P_0 streng semistabil ist. Dass der Grad von P_0 Null ist, folgt ferner aus 3.4.2(iii).

Also existiert nach Satz 3.5.2 ein endlicher surjektiver Morphismus $\varphi: \mathcal{Y}_0 \rightarrow \mathfrak{X}_0$, so dass φ^*P_0 trivial ist. Nach der Konstruktion des Morphismus φ im Beweis von Satz 3.5.2 kann man dabei φ als die Komposition eines endlichen étalen Morphismus $\phi_0: \mathcal{Y}_0 \rightarrow \mathfrak{X}_0$, wobei \mathcal{Y}_0 eine glatte und projektive Kurve über κ ist, und der Frobenius-Potenz F^s für ein geeignetes $s \geq 0$ wählen.

Ab dieser Stelle verläuft der weitere Beweis wortwörtlich wie der von [DW1, Theorem 20], man ersetze lediglich \mathcal{E}_k durch P_k und den Verweis auf [DW1, Theorem 16] durch den auf Theorem 3.1.1. \square

Für den allgemeinen Fall definieren wir ähnlich wie in [DW1]:

3.6.2 Definition.

Es sei R ein Bewertungsring mit Quotientenkörper Q und Restklassenkörper k . Man betrachte ein Modell \mathfrak{X} über R einer glatten und projektiven Kurve X über Q und einen G -Torseur E auf \mathfrak{X} , wobei G ein zusammenhängendes reduktives Gruppenschema von endlicher Präsentation über R ist.

Dann sagt man, dass E streng semistabile Reduktion vom Grad Null habe, falls das Pullback von E_k zu der Normalisierung \tilde{C} jeder irreduziblen Komponente C (versehen mit der reduzierten Struktur) von \mathfrak{X}_k streng semistabil vom Grad Null ist. Man beachte dabei, dass jedes \tilde{C} eine glatte und projektive Kurve über k ist.

Außerdem benötigen wir die folgende Verallgemeinerung von [DW1, Theorem 18]:

3.6.3 Satz.

Es sei G ein zusammenhängendes reduktives Gruppenschema von endlicher Präsentation über \mathbb{F}_q , X ein rein eindimensionales eigentliches Schema über \mathbb{F}_q und E ein G -Torseur auf X .

Dann sind äquivalent:

- (i) Das Pullback von E zu der Normalisierung jeder irreduziblen Komponente von X ist streng semistabil vom Grad Null.
- (ii) Es gibt einen endlichen surjektiven Morphismus $\varphi: Y \rightarrow X$, wobei Y ein rein eindimensionales eigentliches Schema über \mathbb{F}_q ist, so dass φ^*E ein trivialer G -Torseur ist.
- (iii) Genauso wie in (ii), aber mit φ als Komposition $\varphi: Y \xrightarrow{F^s} Y \xrightarrow{\pi} X$ für ein $s \geq 0$, wobei π endlich, étale und surjektiv ist und $F = Fr_q = Fr_p^r$ der $q = p^r$ -lineare Frobenius auf Y ist.

Beweis

(iii) \Rightarrow (ii) Dies ist trivial.

(ii) \Rightarrow (i) Sei (ii) gegeben. Dann wird jede irreduzible Komponente C von X endlich dominiert durch eine irreduzible Komponente D von Y . Es folgt, dass das Pullback von E zu \tilde{C} durch den endlichen Morphismus $\tilde{D} \rightarrow \tilde{C}$ trivialisiert wird. Da man nach Lemma 3.3.9 Semistabilität nach Pullback entlang einer endlichen Überdeckung prüfen kann und da der absolute Frobenius funktoriell ist, folgt (i).

(i) \Rightarrow (iii) Nach Korollar 3.4.5 gibt es nur endlich viele Isomorphieklassen semistabiler G -Torseure mit fixiertem Grad jeweils auf den endlich vielen einzelnen irreduziblen Komponenten von X . Als ersten Schritt folgern wir daraus, dass es nur endlich viele Isomorphieklassen étaler G -Torseure auf X gibt, deren Pullbacks zu den Normalisierungen der irreduziblen Komponenten von X jeweils semistabil vom Grad Null sind.

Dazu nehmen wir zunächst an, dass X reduziert sei. Dann ist der Normalisierungsmorphismus $\pi: \tilde{X} = \coprod \tilde{C}_v \rightarrow X$ ein endlicher Morphismus, wobei $X = \cup_v C_v$ die Zerlegung von X in seine irreduziblen Komponenten sei.

Ferner ist der natürliche Morphismus $\alpha: G_X \rightarrow \pi_* G_{\tilde{X}}$ injektiv: Der Normalisierungsmorphismus π ist endlich und surjektiv und daher eine Überdeckung für die h -Topologie auf X (vgl. [V, Definition 3.1.2]), insbesondere also ein universeller topologischer Epimorphismus. Da jedes Schema

3.6 Anwendung auf die Charakterisierung der Kategorie $\mathcal{B}_{x_0, D}(G)$

U , das étale über X ist, reduziert ist, ist also nach [V, Lemma 3.2.1] der Morphismus $\pi_U: U \times_X \tilde{X} \rightarrow U$ ein kategorieller Epimorphismus in der Kategorie der Schemata, so dass die Abbildung

$$\alpha(U): \Gamma(U, G_U) \rightarrow \Gamma(U \times_X \tilde{X}, G_{U \times_X \tilde{X}})$$

injektiv ist.

Da der Träger des Kokerns von $\alpha: G_X \rightarrow \pi_* G_{\tilde{X}}$ höchstens aus den singulären Punkten von X besteht, ist dieser Kokern eine Wolkenkratzergarbe von Mengen, also nach [L1, Exercise 2.2.9] von der Gestalt $\prod_{x \in X^{sing}} i_{x*} S_x$. Wir behaupten nun, dass jede der Mengen S_x endlich ist:

Dazu zeigen wir, dass wir die folgende exakte Sequenz von étalen Garben auf X haben:

$$0 \rightarrow G_X \rightarrow \pi_* G_{\tilde{X}} \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{sing}} i_{x*} \left(\bigoplus_{y|x} G(\kappa(y))/G(\kappa(x)) \right).$$

Es sei $i: x \rightarrow X$ ein abgeschlossener Punkt. Dann hat man das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} x \times_X \tilde{X} & \xrightarrow{i_x} & \tilde{X} \\ \downarrow \pi_x & & \downarrow \pi \\ x & \xrightarrow{i_x} & X \end{array}$$

und nach [Ta, Satz II.6.4.2] existiert ein kanonischer Basiswechselformorphismus

$$i_x^* \pi_* G_{\tilde{X}} \xrightarrow{\sim} \pi_{x*} \tilde{i}_x^* G_{\tilde{X}},$$

der ein Isomorphismus ist.

Daraus folgt

$$(\pi_* G_{\tilde{X}})_x = (\pi_{x*} \tilde{i}_x^* G_{\tilde{X}})_x$$

und nach [M, Corollary II.3.5]

$$(\pi_* G_{\tilde{X}})_x = \bigoplus_{y|x} G_{\tilde{X}, y}.$$

Nach [M, Remark II.2.9(d)] ist ferner $G_{X, x} = G(\kappa(x))$ und $G_{\tilde{X}, y} = G(\kappa(y))$. Da sich der Halm von $\bigoplus_{x \in X^{sing}} i_{x*} \left(\bigoplus_{y|x} G(\kappa(y))/G(\kappa(x)) \right)$ im Punkt x

zu $\prod_{\tilde{x}|x} (G(\kappa(\tilde{x}))/G(\kappa(x)))$ berechnet, ist also die Sequenz

$$0 \rightarrow G_X \rightarrow \pi_* G_{\tilde{X}} \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{sing}} i_{x*} \left(\bigoplus_{y|x} G(\kappa(y))/G(\kappa(x)) \right)$$

auf jedem Halm exakt und damit auch selbst exakt. Insbesondere folgt damit $S_x \subset \prod_{\tilde{x}|x} (G(\kappa(\tilde{x}))/G(\kappa(x)))$ für alle $x \in X^{sing}$. Aus der Endlichkeit von $\kappa(\tilde{x})$ und der Endlichkeit des Produkts folgt also, dass S_x für alle $x \in X^{sing}$ endlich ist.

Wie im Fall der Vektorbündel folgt also aus [G, Corollaire III.3.2.4], dass es nur endlich viele Isomorphieklassen von G -Torseuren auf X gibt, die bestimmte vorgegebene Isomorphieklassen von G -Torseuren auf den Kurven \tilde{C}_v induzieren. Insbesondere gibt es also nur endlich viele Isomorphieklassen von G -Torseuren auf X , deren Pullback zu den Normalisierungen der irreduziblen Komponenten von X semistabil vom Grad Null ist.

Für den allgemeinen Fall, dass X nicht notwendigerweise reduziert ist, genügt es daher zu zeigen, dass die kanonische Abbildung

$$\varphi: H_{\acute{e}t}^1(X, G) \longrightarrow H_{\acute{e}t}^1(X_{red}, G)$$

endliche Fasern besitzt. Mittels Devissage sieht man, dass es zu zeigen genügt, dass für jedes Ideal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ mit $\mathcal{J}^2 = 0$ die Abbildung

$$i^*: H_{\acute{e}t}^1(X, G) \longrightarrow H_{\acute{e}t}^1(X', G)$$

endliche Fasern besitzt, wobei $i: X' \hookrightarrow X$ das durch \mathcal{J} definierte abgeschlossene Unterschema von X ist.

Ähnlich wie im Beweis von 3.1.1 hat man nach [G, Lemme VII.1.3.5] die folgende exakte Sequenz von Garben auf $X_{\acute{e}t}$:

$$1 \rightarrow i_*(Lie(G_{X'}/X') \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{J}) \xrightarrow{h} G \xrightarrow{adj} i_* G_{X'} \rightarrow 1.$$

Man beachte dabei, dass i ein universeller Homöomorphismus ist, so dass nach [M, Remark II.3.17] $\widetilde{X}'_{\acute{e}t} \cong \widetilde{X}_{\acute{e}t}$ gilt und man \mathcal{J} kanonisch mit einem $\mathcal{O}_{X'}$ -Modul identifizieren kann. Desweiteren bezeichnet adj die Komposition des Adjunktionsmorphisms $G_X \rightarrow i_* i^* G_X$ mit dem Morphismus $i_* i^* G_X \rightarrow i_* G_{X'}$, der von dem kanonischen Morphismus $i^* G_X \rightarrow G_{X'}$ induziert wird. Der Morphismus h schließlich wird durch die Bijektion

$$i_*(Lie(G_{X'}/X') \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{J})(S) \xrightarrow{\sim} \ker(G_X \rightarrow i_* G_{X'})(S), \alpha \rightarrow e\alpha$$

induziert, wobei e der Einsschnitt von $G_{X'}$ ist und S étale über X ist.

Aus dieser exakten Sequenz erhält man die exakte Kohomologiesequenz

$$H_{\acute{e}t}^1(X, i_*(Lie(G_{X'}/X') \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{J})) \xrightarrow{h} H_{\acute{e}t}^1(X, G_X) \rightarrow H_{\acute{e}t}^1(X, i_*G_{X'}).$$

Nach [SGA 4, Corollaire VIII.5.6] ist nun $R^1i_*G_{X'} = 0$, da i als abgeschlossene Immersion insbesondere ganz ist.

Nach [G, Proposition V.3.1.3] ist damit $H_{\acute{e}t}^1(X, i_*G_{X'})$ isomorph zu $H_{\acute{e}t}^1(X', G_{X'})$, so dass also die Sequenz

$$H_{\acute{e}t}^1(X, i_*(Lie(G_{X'}/X') \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{J})) \xrightarrow{h} H_{\acute{e}t}^1(X, G_X) \xrightarrow{i^*} H_{\acute{e}t}^1(X', G_{X'})$$

exakt ist.

Wie oben gilt nun nach [SGA 4, Corollaire VIII.5.6]

$$R^1i_*(Lie(G_{X'}/X') \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{J}) = 0.$$

Nach [G, Proposition V.3.1.3] hat man somit einen Isomorphismus

$$H_{\acute{e}t}^1(X', Lie(G_{X'}/X') \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{J}) \xrightarrow{\sim} H_{\acute{e}t}^1(X, i_*(Lie(G_{X'}/X') \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{J})),$$

so dass also die Sequenz

$$H_{\acute{e}t}^1(X', Lie(G_{X'}/X') \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{J}) \xrightarrow{h \circ j} H_{\acute{e}t}^1(X, G_X) \xrightarrow{i^*} H_{\acute{e}t}^1(X', G_{X'})$$

exakt ist.

Die kanonische $\mathcal{O}_{X'}$ -Modulstruktur von $Lie(G_{X'}/X')$ induziert ferner die folgende kanonische exakte Sequenz von Garben auf $X'_{\acute{e}t}$:

$$0 \longrightarrow \ker(\alpha) \longrightarrow \mathcal{J} \xrightarrow{\alpha} Lie(G_{X'}/X') \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{J} \longrightarrow 0,$$

wobei α der kanonische Morphismus ist. Dies liefert eine Surjektion

$$H_{\acute{e}t}^1(X', \mathcal{J}) \xrightarrow{\alpha} H_{\acute{e}t}^1(X', Lie(G_{X'}/X') \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{J}),$$

da X' höchstens eindimensional ist und nach [M, Proposition III.3.3]

$$H_{\acute{e}t}^2(X', \mathcal{F}) \cong H^2(X', \mathcal{F}_{Zar})$$

für jede étale Garbe \mathcal{F} auf X' gilt, wobei \mathcal{F}_{Zar} die Einschränkung auf die Zariski-Topologie ist. Damit erhält man die folgende nicht-abelsche Kohomologiesequenz:

$$H_{\acute{e}t}^1(X', \mathcal{J}) \xrightarrow{h \circ j \circ \alpha} H_{\acute{e}t}^1(X, G_X) \xrightarrow{i^*} H_{\acute{e}t}^1(X', G_{X'}).$$

Da $H_{\text{ét}}^1(X', \mathcal{J})$ ein endlich-dimensionaler \mathbb{F}_q -Vektorraum und damit endlich ist, folgt daraus, dass φ endliche Fasern besitzt.

Damit haben wir gesehen, dass es nur endlich viele Isomorphieklassen von G -Torseuren auf X gibt, deren Pullbacks zu den Normalisierungen der irreduziblen Komponenten von X semistabil vom Grad Null sind.

Es sei nun ein G -Torseur E wie in (i) gegeben. Dann sind die Pullbacks zu \tilde{C}_v aller G -Torseure $(F_X^n)^*E$ auf X jeweils semistabil vom Grad Null. Da es nur endlich viele Isomorphieklassen derartiger G -Torseure auf X gibt, existiert ein $s \geq 0$, so dass $(F_X^t)^*E \cong (F_X^s)^*E$ für alle $t \geq s$ gilt. Für den G -Torseur $E' := (F_X^s)^*E$ gilt damit $(F_X^r)^*E' = E'$ für alle $r = t - s \geq 1$. Fassen wir nun E und E' als Torseure für die étale Topologie auf, so existiert folglich nach Korollar 3.2.5 ein endlicher, étaler und surjektiver Morphismus $\pi: Y \rightarrow X$, so dass

$$\pi^*E' = \pi^*(F_X^s)^*E$$

ein trivialer G -Torseur auf Y ist. Es folgt daraus, dass

$$(\pi \circ F_Y^s)^*E = (F_X^s \circ \pi)^*E = \pi^*(F_X^s)^*E$$

ein trivialer étaler G -Torseur auf Y ist.

Weil ferner X ein rein eindimensionales eigentliches \mathbb{F}_q -Schema ist, so dass damit auch Y ein rein eindimensionales eigentliches \mathbb{F}_q -Schema ist, ist damit (iii) gezeigt. \square

Als Verallgemeinerung von [DW1, Theorem 17] können wir damit zeigen:

3.6.4 Theorem

Es sei \mathfrak{X} ein Modell über $\overline{\mathbb{Z}}_p$ einer glatten und projektiven Kurve X über $\overline{\mathbb{Q}}_p$ sowie G ein zusammenhängendes reduktives Gruppenschema von endlicher Präsentation über \mathfrak{o} .

Dann liegt ein G -Torseur P auf \mathfrak{X}_0 genau dann in der Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_0, D}(G)$ für einen gewissen Divisor D , wenn P streng semistabile Reduktion vom Grad Null hat. Ist dies der Fall, so gibt es zwei Divisoren D und \tilde{D} auf X mit disjunktem Träger, so dass P sowohl in der Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_0, D}(G)$ als auch in der Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_0, \tilde{D}}(G)$ liegt.

Beweis Liegt der G -Torseur P auf \mathfrak{X}_0 in der Kategorie $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}_0, D}(G)$ für einen gewissen Divisor D auf X , so gibt es nach Theorem 3.1.1 eine Überdeckung $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ aus $S_{\mathfrak{X}, D}^{\text{good}}$, so dass $\pi_k^*P_k$ ein trivialer G -Torseur ist.

Es sei $\mathfrak{X}_k = \cup_v C_v$ die Zerlegung von \mathfrak{X}_k in seine irreduziblen Komponenten. Da \mathfrak{X} irreduzibel ist (vgl. die Argumentation in §1.2), $\pi(\mathcal{Y})$ nach [EGA II, Proposition 6.1.10] abgeschlossen ist und den generischen Punkt von \mathfrak{X} erhält, ist π surjektiv. Also wird jedes C_v durch eine irreduzible Komponente \tilde{C}_v von \mathcal{Y}_k endlich dominiert. Daraus folgt mit Korollar 3.3.7 und Lemma 3.3.9, dass die Pullbacks von P_k zu allen \tilde{C}_v jeweils streng semistabil vom Grad Null sind.

Es habe nun umgekehrt der G -Torseur P auf \mathfrak{X}_0 streng semistabile Reduktion vom Grad Null und er werde im folgenden stets als étaler G -Torseur aufgefasst. Dann sieht man ähnlich wie z.B. in den Beweisen der Theoreme 3.1.1 und 3.6.1 mittels noetherschen Descents, dass es eine endliche Erweiterung K von \mathbb{Q}_p mit Ganzheitsring \mathfrak{o}_K und Restklassenkörper $\kappa \cong \mathbb{F}_q$ gibt, so dass die Familie $(X, \mathfrak{X}, C_v, G, P_k)$ zu einer Familie $(X_K, \mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_K}, C_{v0}, G_0, P_0)$ mit den entsprechenden Eigenschaften absteigt. Insbesondere ist P_0 ein étaler G_0 -Torseur auf der speziellen Faser $\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_K} \otimes \kappa$, dessen Pullbacks zu den Normalisierungen \tilde{C}_{v0} der irreduziblen Komponenten C_{v0} von \mathfrak{X}_0 streng semistabil vom Grad Null sind. Nach Satz 3.6.3 erhält man dann einen endlichen étalen Morphismus $\tilde{\pi}_0: \tilde{\mathcal{Y}}_0 \rightarrow \mathfrak{X}_0$, so dass für die Komposition $\tilde{\varphi}_0: \tilde{\mathcal{Y}}_0 \xrightarrow{F^s} \tilde{\mathcal{Y}}_0 \xrightarrow{\tilde{\pi}_0} \mathfrak{X}_0$ das Pullback $\tilde{\varphi}_0^* P_0$ trivial ist. Man beachte dabei, dass man bei dieser Aussage s durch jede beliebige größere ganze Zahl s' und dann F durch jede beliebige Potenz von F ersetzen darf. Wie in [DW1] erlaubt [SGA 1, Exposé IX, Théorème 1.10] es, den Morphismus $\tilde{\pi}_0$ zu einem endlichen étalen Morphismus $\widetilde{\pi_{\mathfrak{o}_K}}: \widetilde{\mathcal{Y}_{\mathfrak{o}_K}} \rightarrow \mathfrak{X}_0$ mit $\tilde{\pi}_0$ als spezieller Faser zu liften. Ersetzt man nun K wie in [DW1] durch eine geeignete endliche Erweiterung K_1 von K , so kann man $\widetilde{\pi_{\mathfrak{o}_K}}$ durch ein Objekt $\pi_{\mathfrak{o}_{K_1}}: \mathcal{Y}_{\mathfrak{o}_{K_1}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_{K_1}}$ aus der Kategorie $S_{\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}_{K_1}}, \emptyset}$ dominieren, wobei man wie in [DW1] annehmen darf, dass $\mathcal{Y}_{\mathfrak{o}_{K_1}}$ nicht nur semistabil, sondern auch regulär ist. Schreibt man zur Vereinfachung der Notation wieder K statt K_1 , P_0 statt P_1 , \mathfrak{o}_K statt \mathfrak{o}_{K_1} , κ statt κ_1 etc., so folgt, dass das Pullback von P_0 unter der Komposition $\varphi: \mathcal{Y}_0 \xrightarrow{F^s} \mathcal{Y}_0 \xrightarrow{\pi_0} \mathfrak{X}_0$ ein trivialer G_0 -Torseur ist.

Ab hier überträgt sich der weitere Beweis in [DW1, Theorem 17] nun wortwörtlich, wobei man lediglich \mathcal{E}_κ durch P_k , \mathcal{E} durch P und \mathcal{E}_0 durch P_0 sowie den Verweis auf [DW1, Theorem 16] durch den auf Theorem 3.1.1 ersetze. \square

4 Prinzipalbündel auf $X_{\mathbb{C}_p}$ und Paralleltransport

4.1 Potentiell streng semistabile Reduktion und Paralleltransport

Es sei weiterhin X eine glatte und projektive Kurve über $\overline{\mathbb{Q}_p}$, \mathfrak{X} ein Modell von X über $\overline{\mathbb{Z}_p}$ und G ein zusammenhängendes reduktives Gruppenschema von endlicher Präsentation über \mathfrak{o} .

Um die Resultate der vorherigen Kapitel auf den Fall von Prinzipalbündeln über $X_{\mathbb{C}_p}$ auszudehnen, benötigen wir die folgende Definition in Anlehnung an die entsprechende Definition im Falle von Vektorbündeln (siehe [DW1, §0]):

4.1.1 Definition.

Man sagt, dass ein G -Torseur E auf $X_{\mathbb{C}_p}$ streng semistabile Reduktion vom Grad Null habe, wenn er die folgende Eigenschaft besitzt:

E lässt sich zu einem G -Torseur \tilde{E} auf $\mathfrak{X}_{\mathfrak{o}}$ für ein geeignetes Modell \mathfrak{X} der Kurve X ausdehnen und das Pullback der speziellen Faser \tilde{E}_k dieses G -Torseurs \tilde{E} zu der Normalisierung jeder irreduziblen Komponente von \mathfrak{X}_k ist streng semistabil vom Grad Null.

Ferner sagt man, dass E potentiell streng semistabile Reduktion vom Grad Null besitze, wenn es einen endlichen étalen Morphismus $\alpha: Y \rightarrow X$ von glatten und projektiven Kurven über $\overline{\mathbb{Q}_p}$ gibt, so dass $\alpha_{\mathbb{C}_p}^ E$ streng semistabile Reduktion vom Grad Null hat.*

Es sei nun $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^s(G)$ die Kategorie der G -Torseure auf $X_{\mathbb{C}_p}$ mit streng semistabiler Reduktion vom Grad Null und $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^{ps}(G)$ die Kategorie der G -Torseure auf $X_{\mathbb{C}_p}$ mit potentiell streng semistabiler Reduktion vom Grad Null.

Dann können wir nun die beiden Hauptresultate dieser Arbeit zeigen:

4.1.2 Theorem

Es gilt $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^s(G) = \bigcup_D \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}(G)$.

Jeder G -Torseur in $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^s(G)$ liegt sowohl in $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}(G)$ als auch in $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},\tilde{D}}(G)$ für geeignete Divisoren D und \tilde{D} mit disjunkten Träger.

Ferner gibt es für jeden Torseur $E \in \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}^s(G)$ einen eindeutig bestimmten stetigen Funktor ρ_E von $\Pi_1(X)$ nach $\mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p))$ mit $\rho_E(x) = E_x$ für alle $x \in X(\mathbb{C}_p)$, so dass ρ_E verträglich mit den Funktoren ρ_E von $\Pi_1(X - D)$ nach $\mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p))$ ist, die für die Divisoren D mit $E \in \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}^s(G)$ im zweiten Kapitel konstruiert wurden.

Insgesamt erhält man so einen Funktor $\rho: \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^s(G) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(X)}(G(\mathbb{C}_p))$, der sich funktoriell bezüglich Morphismen von Kurven über $\overline{\mathbb{Q}_p}$, Morphismen von zusammenhängenden reduktiven Gruppenschemata von endlicher Präsentation über \mathfrak{o} und \mathbb{Q}_p -Automorphismen von $\overline{\mathbb{Q}_p}$ verhält und mittels der in §2.4. dargestellten Funktoren verträglich mit den entsprechenden Funktoren im Vektorbündelfall ist.

Für jeden Punkt $x_0 \in X(\mathbb{C}_p)$ ist der „Faserfunktor in x_0 “

$$\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^s(G) \rightarrow \mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p)), E \mapsto E_{x_0}, f \mapsto f_{x_0}$$

ein treuer Funktor.

Beweis Ist $E \in \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}(G)$ für einen Divisor D , so dehnt sich nach Definition der Kategorie $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}(G)$ und nach Theorem 3.6.4 E zu einem G -Torseur \tilde{E} auf \mathfrak{X}_0 für ein geeignetes Modell \mathfrak{X} von X aus, der streng semistabile Reduktion vom Grad Null hat. Nach Definition ist daher $E \in \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^s(G)$.

Ist umgekehrt $E' \in \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^s(G)$, so folgt ebenfalls aus Theorem 3.6.4, dass $E' \in \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}(G)$ für einen geeigneten Divisor D ist und es genauer Divisoren D und \tilde{D} mit disjunktem Träger gibt, für die E sowohl in $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}(G)$ als auch in $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},\tilde{D}}(G)$ liegt. Insgesamt folgt also $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^s(G) = \bigcup_D \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}(G)$.

Ist E ein Torseur in $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^s(G)$, so existiert für alle Divisoren D mit $E \in \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}(G)$, wie in §2.2 gezeigt, ein stetiger Funktor

$$\rho_{E,D}: \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p},D}(G) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(X-D)}(G(\mathbb{C}_p))$$

mit $\rho_E(x) = E_x$ für alle $x \in (X - D)(\mathbb{C}_p)$. Nach Korollar 2.3.2 folgt dann, dass es genau einen Funktor

$$\rho_E: \Pi_1(X) \rightarrow \mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p))$$

gibt, der auf $\Pi_1(X - D)$ jeweils die Funktoren $\rho_{E,D}$ induziert.

Es ist klar, dass durch die Zuordnung $E \mapsto \rho_E$ ein Funktor

$$\rho: \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^s(G) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(X)}(G(\mathbb{C}_p))$$

definiert wird.

Die Funktorialitätseigenschaften folgen direkt aus den Sätzen 2.4.7, 2.4.8, 2.4.9, 2.4.10 und 2.4.11.

Es sei nun x_0 ein fest gewählter \mathbb{C}_p -wertiger Punkt von X . Dann ist zu zeigen, dass die Abbildung

$$\text{Hom}_{\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^s(G)}(E, E') \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p))}(E_{x_0}, E'_{x_0})$$

für alle G -Torseure E und E' in $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^s(G)$ injektiv ist.

Es seien also E und E' zwei beliebig gewählte G -Torseure in $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^s(G)$ und $f, g: E \rightarrow E'$ zwei Morphismen von G -Torseuren auf $X_{\mathbb{C}_p}$, so dass $f_{x_0} = g_{x_0}$ gilt.

Ist nun $x \in X(\mathbb{C}_p)$ ein beliebiger \mathbb{C}_p -wertiger Punkt von X , so wähle man einen Weg γ von x_0 nach x . (Ein solcher existiert nach der Definition von $\Pi_1(X)$ (vgl. [SGA 1]).) Dann existiert jeweils ein Paralleltransport $\rho_E(\gamma): E_{x_0} \rightarrow E_x$ bzw. $\rho_{E'}(\gamma): E'_{x_0} \rightarrow E'_x$, so dass man aufgrund der Funktorialität der Konstruktion des Paralleltransports ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_{x_0} & \xrightarrow{\rho_E(\gamma)} & E_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ E'_{x_0} & \xrightarrow{\rho_{E'}(\gamma)} & E'_x \end{array}$$

sowohl dann erhält, wenn man als die senkrechten Pfeile f_{x_0} und f_x wählt, als auch, wenn man g_{x_0} und g_x wählt. Aufgrund der Kommutativität des Diagramms und der Tatsache, dass alle horizontalen Abbildungen Isomorphismen sind, folgt dann, dass $f_x = g_x$ gilt. Da $x \in X(\mathbb{C}_p)$ beliebig gewählt war, ist also $f_x = g_x$ für alle \mathbb{C}_p -wertigen Punkte x von X und also insbesondere für alle \mathbb{C}_p -wertigen Punkte von E . Damit stimmen auch die von f bzw. g induzierten Abbildungen $\tilde{f}, \tilde{g}: E(\mathbb{C}_p) \rightarrow E'(\mathbb{C}_p)$ überein. Weil $G_{X_{\mathbb{C}_p}}$ eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe von endlicher Präsentation über $X_{\mathbb{C}_p}$ ist, sind E und E' affin, glatt, reduktiv und von endlicher Präsentation über $X_{\mathbb{C}_p}$ (dies folgt jeweils mit fpqc-Descend wie in Lemma 2.1.1) und damit auch nach [EGA II, Proposition 5.3.4] projektiv über \mathbb{C}_p . Daher kommen E und E' nach [EH, S. 50] von Varietäten \mathcal{E} bzw. \mathcal{E}' über \mathbb{C}_p im Sinne der klassischen algebraischen Geometrie à la Weil. Da ein Morphismus $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ eindeutig durch

den Morphismus $\mathcal{E}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{C}_p)$ bestimmt ist, stimmen daher f und g auf der Menge der abgeschlossenen Punkte von E überein, die nach [Ha, Exercise II.3.14] eine offene dichte Teilmenge von E ist. Nach [EGA I, Lemma 7.2.2.1] stimmen also f und g auf ganz E überein, so dass damit insgesamt der Faserfunktorkomplex in x_0 ein treuer Funktor ist. \square

Damit können wir nun das in der Einleitung genannte Theorem beweisen, wofür wir zunächst noch an [DW1, Proposition 31] erinnern, die im Beweis verwendet wird:

4.1.3 Satz. ([DW1, Proposition 31])

Es sei $\alpha: Y \rightarrow X$ eine Galoisüberlagerung von Varietäten über $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Dann faktorisiert ein stetiger Funktor $W: \Pi_1(Y) \rightarrow \mathcal{C}$ in eine topologische Kategorie \mathcal{C} genau dann in $W = V \circ \alpha_$ für einen stetigen Funktor $V: \Pi_1(X) \rightarrow \mathcal{C}$, wenn $W \circ \sigma_* = W$ für jedes $\sigma \in \text{Gal}(Y/X)$ gilt. Ist α nur endlich und étale und nicht notwendigerweise galoissch, so bestimmt die Relation $W = V \circ \alpha_*$ bereits V in eindeutiger Weise.*

4.1.4 Theorem

Es sei E ein G -Torseur in $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^{ps}(G)$, also ein G -Torseur auf $X_{\mathbb{C}_p}$ mit potentiell streng semistabiler Reduktion vom Grad Null.

*Dann gibt es funktorielle Isomorphismen von „Paralleltransport“ entlang étaler Wege der Fasern von $E_{\mathbb{C}_p}$ auf $X_{\mathbb{C}_p}$. Insbesondere gibt es für jeden Torseur $E \in \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}^s(G)$ einen eindeutig bestimmten stetigen Funktor ρ_E von $\Pi_1(X)$ nach $\mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p))$ mit $\rho_E(x) = E_x$ für alle $x \in X(\mathbb{C}_p)$, so dass ρ_E verträglich mit den oben definierten Funktoren ρ_{α^*E} von $\Pi_1(Y)$ nach $\mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p))$ ist, falls $\alpha^*E \in \mathcal{B}_{Y_{\mathbb{C}_p}}^s$ für einen endlichen étalen Morphismus $\alpha: Y \rightarrow X$ von glatten und projektiven Kurven über $\overline{\mathbb{Q}_p}$ gilt.*

Insgesamt erhält man so einen Funktor $\rho: \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^{ps}(G) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(X)}(G(\mathbb{C}_p))$, der sich funktoriell bezüglich Morphismen von glatten und projektiven Kurven über $\overline{\mathbb{Q}_p}$, Morphismen von zusammenhängenden reductiven Gruppenschemata von endlicher Präsentation über \mathfrak{o} und \mathbb{Q}_p -Automorphismen von $\overline{\mathbb{Q}_p}$ verhält und mittels der in §2.4. dargestellten Funktoren verträglich mit den entsprechenden Funktoren im Vektorbündelfall ist.

Für jeden Punkt $x_0 \in X(\mathbb{C}_p)$ ist der „Faserfunktorkomplex in x_0 “

$$\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^{ps} \rightarrow \mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p)), E \mapsto E_{x_0}, f \mapsto f_{x_0}$$

ein treuer Funktor.

Beweis Es sei E ein G -Torseur auf $X_{\mathbb{C}_p}$ mit potentiell streng semistabiler Reduktion vom Grad Null. Dann existiert ein endlicher étaler Morphismus $\alpha: Y \rightarrow X$ von glatten, projektiven Kurven über $\overline{\mathbb{Q}_p}$, so dass $E \in \mathcal{B}_{Y_{\mathbb{C}_p}}^s$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, dass α galoissch ist. Nach Theorem 4.1.2 gilt somit

$$\rho_{\alpha^*E} \circ \sigma_* = \rho_{\sigma^*(\alpha^*E)} = \rho_{\alpha^*E}$$

für alle $\sigma \in \text{Gal}(Y/X)$. Nach Satz 4.1.3 existiert daher ein eindeutig bestimmter stetiger Funktor

$$\rho(E) = \rho_E: \Pi_1(X) \longrightarrow \mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p)),$$

so dass $\rho_{\alpha^*E} = \rho_E \circ \alpha_*$ gilt. Insbesondere gilt $\rho_E(x) = E_x$ für alle $x \in X(\mathbb{C}_p)$. Für einen étalen Weg γ von x_1 nach x_2 in X hat man ferner den Morphismus

$$\rho_E(\gamma) = \rho_{\alpha^*E}(\gamma'): E_{x_1} = (\alpha^*E)_{y_1} \longrightarrow (\alpha^*E)_{y_2} = E_{x_2}.$$

Dabei liegt $y_1 \in Y(\mathbb{C}_p)$ über x_1 und γ' ist der eindeutig bestimmte Weg in Y von y_1 zu dem Punkt y_2 über x_2 , für den $\alpha_*\gamma' = \gamma$ gilt. Für einen Morphismus $f: E \rightarrow E'$ von G -Torseuren in $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^{ps}(G)$ ist der Morphismus $\rho(f) = \rho_f: \rho_E \rightarrow \rho_{E'}$ durch die Familie der Abbildungen $f_x: E_x \rightarrow E'_x$ für alle $x \in X(\mathbb{C}_p)$ definiert.

Wir behaupten nun, dass diese Konstruktion einen wohldefinierten Funktor

$$\rho: \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^{ps}(G) \longrightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(X)}(G(\mathbb{C}_p))$$

definiert, der die vorher definierten Funktoren ρ auf $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^s(G)$ ausdehnt. Dazu zeigen wir als erstes, dass die Definition von ρ_E unabhängig von der Wahl von α ist.

Sind also $\alpha_1: Y_1 \rightarrow X$ und $\alpha_2: Y_2 \rightarrow X$ zwei endliche étale Galoisüberlagerungen von glatten und projektiven Kurven über $\overline{\mathbb{Q}_p}$, so existiert eine dritte $\alpha_3: Y_3 \rightarrow X$, die α_1 und α_2 dominiert, d. h. es gibt Morphismen $\pi_i: Y_3 \rightarrow Y_i$ für $i = 1, 2$, so dass jeweils $\alpha_3 = \alpha_i \circ \pi_i$ gilt. Angenommen, es sei $\alpha_i^*E \in \mathcal{B}_{Y_{\mathbb{C}_p}}^s(G)$ für $i = 1, 2$. Nach der obigen Konstruktion gibt es dann für $i = 1, 2$ Funktoren $\rho_i: \Pi_1(X) \rightarrow \mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p))$, so dass jeweils $\rho_{\alpha_i^*E} = \rho_i \circ \alpha_{i*}$ gilt. Es ist nun zu zeigen, dass $\rho_1 = \rho_2$ gilt. Nach Theorem 4.1.2 gilt

$$\rho_{\alpha_3^*E} = \rho_{\pi_i^*(\alpha_i^*E)} = \rho_{\alpha_i^*E} \circ \pi_{i*} = \rho_i \circ \alpha_{i*} \circ \pi_{i*} = \rho_i \circ \alpha_{3*}$$

für $i = 1, 2$. Die Eindeutigkeitsaussage in Satz 4.1.3 impliziert dann $\rho_1 = \rho_2$.

Als nächstes wird gezeigt, dass für jeden Morphismus $f: E \rightarrow E'$ in $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^{ps}(G)$ die Familie von Abbildungen $f_x: E_x \rightarrow E'_x$ einen Morphismus in $Rep_{\Pi_1(X)}(G(\mathbb{C}_p))$ definiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei angenommen, dass sowohl α^*E als auch α^*E' in $\mathcal{B}_{Y_{\mathbb{C}_p}}^s(G)$ liegen. Dann definiert ρ_{α^*f} , d. h. die Familie der Abbildungen $(\alpha^*f)_y: (\alpha^*E)_y \rightarrow (\alpha^*E')_y$, einen Morphismus in $Rep_{\Pi_1(Y)}(G(\mathbb{C}_p))$. Nach Definition von $\rho_E(\gamma)$ für einen étalen Weg in X kommutiert dann das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_{x_1} & \xrightarrow{f_{x_1}} & E'_{x_1} \\ \downarrow \rho_E(\gamma) & & \downarrow \rho_{E'}(\gamma) \\ E_{x_2} & \xrightarrow{f_{x_2}} & E'_{x_2} \end{array}$$

für jeden étalen Weg γ in X , so dass also die Familie $(f_x)_{x \in X(\mathbb{C}_p)}$ einen Morphismus in $Rep_{\Pi_1(X)}(G(\mathbb{C}_p))$ definiert.

Also ist ρ wohldefiniert und nach Konstruktion ist klar, dass ρ ein Funktor ist und den auf $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^s(G)$ gegebenen Funktor fortsetzt.

Für den Beweis der behaupteten Funktorialitäten betrachte man stellvertretend für den der übrigen den der Tatsache, dass ρ verträglich mit Morphismen $X \rightarrow X'$ von glatten und projektiven Kurven über $\overline{\mathbb{Q}_p}$ ist:

Es sei also $f: X \rightarrow X'$ ein Morphismus glatter und projektiver Kurven über $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Dann ist auf Ebene der Objekte zu zeigen, dass $\rho_{f^*E} = \rho_E \circ f_*$ für alle $E \in \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^{ps}(G)$ gilt.

Ist also $E \in \mathcal{B}_{X'_{\mathbb{C}_p}}^{ps}(G)$, so existiert per Definition eine endliche étale Galoisüberlagerung $\alpha': Y' \rightarrow X'$, so dass $\alpha'^*E \in \mathcal{B}_{Y'_{\mathbb{C}_p}}^s(G)$ gilt. Ist Y die Normalisierung einer irreduziblen Komponente von $f^{-1}(Y')$, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{\quad} & f^{-1}(Y') = X \times_{X'} Y' & \xrightarrow{\quad} & Y' \\ \downarrow \alpha & & & & \downarrow \alpha' \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & & & X' \end{array}$$

wobei $\alpha: Y \rightarrow X$ der kanonische Morphismus ist, den man aus der Wahl von Y erhält.

Bezeichnet $g: Y \rightarrow Y'$ die obere horizontale Abbildung des Diagramms, so liegt dann $\alpha^*f^*E = g^*\alpha'^*E$ in $\mathcal{B}_{Y_{\mathbb{C}_p}}^s(G)$. Nach Theorem 4.1.2 und der Definition von ρ_E gilt ferner

$$\rho_{\alpha^*f^*E} = \rho_{g^*\alpha'^*E} = \rho_{\alpha'^*E} \circ g_* = \rho_E \circ \alpha'_* \circ g_* = \rho_E \circ f_* \circ \alpha_*.$$

Andererseits ist $\alpha: Y \rightarrow X$ eine endliche étale Galoisüberlagerung, so dass f^*E in $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^{ps}(G)$ liegt. Also ist per Definition ρ_{f^*E} der eindeutig bestimmte Funktor mit $\rho_{\alpha^*f^*E} = \rho_{f^*E} \circ \alpha_*$. Damit folgt $\rho_E \circ f_* = \rho_{f^*E}$. Es ist außerdem klar, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^{ps}(G) & \xrightarrow{\rho} & \text{Rep}_{\Pi_1(X')}(G(\mathbb{C}_p)) \\ \downarrow f^* & & \downarrow A(f) \\ \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^{ps}(G) & \xrightarrow{\rho} & \text{Rep}_{\Pi_1(X)}(G(\mathbb{C}_p)) \end{array}$$

auf dem Niveau der Morphismen kommutiert.

Dass die Konstruktion des Funktors ρ_E mit Morphismen $G \rightarrow G'$ zusammenhängender reduktiver Gruppenschemata von endlicher Präsentation über \mathfrak{o} sowie mit GaloisKonjugation durch \mathbb{Q}_p -Automorphismen von $\overline{\mathbb{Q}_p}$ verträglich ist sowie ähnlich wie im Fall der Kategorien $\mathcal{B}_{\mathfrak{x}_o, D}(G)$ bzw. $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}, D}(G)$ oder $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^s(G)$ mit den entsprechenden Funktoren für den Fall der Vektorbündel (siehe [DW1]) kompatibel ist, folgt in analoger Weise ebenfalls aus den bekannten Funktorialitäts- und Verträglichkeitsaussagen für ρ_{α^*E} und der Eindeutigkeitsaussage in Satz 4.1.3.

Dass der Faserfunktor

$$\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^{ps}(G) \rightarrow \mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p))$$

ein treuer Funktor ist, zeigt man genauso wie in Theorem 4.1.2. □

4.2 Offene Fragen

- Wie groß ist die Kategorie $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^{ps}(G)$? Liegt insbesondere jeder semistabile G -Torseur vom Grad Null auf $X_{\mathbb{C}_p}$ in dieser Kategorie? Die analoge Frage im Fall der Vektorbündel, d. h. ob jedes semistabile Vektorbündel vom Grad Null auf $X_{\mathbb{C}_p}$ in $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^{ps}$ liegt, ist bislang nur für Kurven X vom Geschlecht $g = 0$ oder $g = 1$ positiv beantwortet worden, für Kurven X von Geschlecht $g \geq 2$ aber auch dort weiterhin unbeantwortet.
- Was ist das essentielle Bild des Funktors $\rho: \mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^{ps}(G) \rightarrow \text{Rep}_{\Pi_1(X)}(G(\mathbb{C}_p))$? Auch dies ist ebenfalls eine offene Frage im Fall der Vektorbündel.

4 Prinzipalbündel auf $X_{\mathbb{C}_p}$ und Paralleltransport

- Ist der Faserfunktork in einem fest gewählten Punkt $x_0 \in X(\mathbb{C}_p)$,

$$\mathcal{B}_{X_{\mathbb{C}_p}}^{ps}(G) \rightarrow \mathcal{P}(G(\mathbb{C}_p)),$$

nicht nur treu, sondern sogar auch volltreu?

Literaturverzeichnis

- [A] Artin, M. *Grothendieck-Topologies*. Harvard University (1962)
- [B] Borel, A. *Linear algebraic groups. Second enlarged edition*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1991)
- [Be] Behrend, K. A. *Semi-stability of reductive group schemes over curves*. Math. Ann. 301, no. 2, p. 281-305 (1995)
- [BH] Biswas, I. und Holla, Y. *Harder-Narasimham reduction of a principal bundle*. Nagoya Math. J. 174, p. 201-223 (2004)
- [C] Conrad, B. *A modern proof of Chevalley's theorem on algebraic groups*. J. Ramanujan Math. Soc. 17, no. 1, p. 1-18 (2002)
- [DW1] Deninger, C. und Werner, A. *Vector bundles on p -adic curves and parallel transport*. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 38, p. 535-597 (2005)
- [DW2] Deninger, C. und Werner, A. *On Tannaka duality for vector bundles on p -adic curves*. arXiv:math.AG/0506263 bzw. im Druck (2005)
- [DW3] Deninger, C. und Werner, A. *Principal bundles on p -adic curves and parallel transport*. Private Notes (2005)
- [EGA I] Grothendieck, A. und Dieudonné, J. *Éléments de Géométrie Algébrique, EGA I: Le langage des schémas*. Publ. Math. IHES (4) (1960)
- [EGA II] Grothendieck, A. und Dieudonné, J. *Éléments de Géométrie Algébrique, EGA II: Étude globale élémentaire de quelques classes des morphismes*. Publ. Math. IHES 8 (1961)

- [EGA IV] Grothendieck, A. und Dieudonné, J. *Éléments de Géométrie Algébrique, EGA IV: Étude locale des schémas et des morphismes des schémas*. Publ. Math. IHES 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967)
- [EH] Eisenbud, D. und Harris, J. *The Geometry of schemes*. Graduate Texts in Mathematics 197, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (2000)
- [F1] Faltings, G. *Semistable vector bundles on Mumford curves*. Invent. Math. 74, p. 199-212 (1983)
- [F2] Faltings, G. *A p -adic Simpson correspondence*. Adv. Math. 198, no. 2, p. 847-862 (2005)
- [FK] Freitag, E. und Kiehl, R. *Étale cohomology and the Weil conjecture*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 13, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1988)
- [G] Giraud, J. *Cohomologie non abélienne*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1971)
- [GH] Griffiths, P. und Harris, J. *Principles of algebraic geometry*. John Wiley&Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto (1978)
- [Gi] Gille, P. *Le groupe fondamental sauvage d'une courbe affine*. In: Bost, J.-B., Loeser, F. und Raynaud, M. (Hrg.): *Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique*. Progress in Mathematics, Vol. 187, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin (2000)
- [Gie] Gieseker, D. *On a theorem of Bogomolov on Chern classes of stable bundles*. Am. J. Math. 101, p. 79-85 (1979)
- [Gr] Grothendieck, A. *Le groupe de Brauer III: Exemples et compléments*. in: Giraud, J., Grothendieck, A., Kleiman, S.L., Raynaud, M. und Tate, J. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Masson&Cie, Paris, p. 88-188 (1968)

- [Ha] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1977)
- [He] Herz, G. *On representations attached to semistable vector bundles on Mumford curves*. Dissertation Universität Münster (2005)
- [HM] Hyeon, D. und Murphy, D. *Note on the stability of principal bundles*. Proc. Amer. Math. Soc. 132, p. 2205-2213 (2004)
- [HN] Holla, Y. und Narasimhan, M. *A generalisation of Nagata's theorem on ruled surfaces*. Compositio Mathematica 127, p. 321-332 (2001)
- [L1] Liu, Q. *Algebraic geometry and arithmetic curves*. Oxford University Press (2002)
- [L2] Liu, Q. *Stable reduction of finite covers of curves*. Compositio Mathematica 142, p. 101-118 (2006)
- [La] Lang, S. *Algebraic groups over finite fields*. Am. J. Math. 78, p. 555-563 (1956)
- [Las] Laszlo, Y. *A non-trivial family of bundles fixed by the square of Frobenius*. C. R. Acad. Sci. Paris, t.333, Série I, p.651-656 (2001)
- [Li] Lichtenbaum, S. *Curves over discrete valuation rings*. Am. J. Math. 90, p. 380-405 (1968)
- [Lp] Le Portier, J. *Lectures on vector bundles*. Cambridge University Press (1997)
- [LS] Lange, H. und Stuhler, S. *Vektorbündel auf Kurven und Darstellungen der algebraischen Fundamentalgruppe*. Math. Zeitschrift 156, p. 73-83 (1977)
- [M] Milne, J. *Étale cohomology*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1980)
- [Ma] Matsumura, H. *Commutative algebra (second edition)*. The Benjamin/Cummings Publishing company, Inc., Advanced Book Program, Reading, Massachusetts, London, Amsterdam, Don Mills, Sydney, Tokyo (1980)

- [Mf1] Mumford, D. *Projective invariants of projective structures and applications*. In: Proc. Int. Cong. Math. Stockholm, p. 526-530 (1962)
- [Mf2] Mumford, D. *Abelian varieties*. Oxford University Press (1970)
- [Mu] Murre, J.P. *Lectures on an introduction to Grothendieck's theory of the fundamental group*. Tata institute of fundamental research, Bombay (1967)
- [NS] Narasimham, M.S. und Seshadri, C.S. *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*. Ann. of Math. 82, p. 540-567 (1965)
- [R] Ramanathan, A. *Stable principal bundles on a compact Riemann surface*. Math. Ann. 213, p. 129-152 (1975)
- [Ray] Raynaud, M. *Spécialisation du foncteur de Picard*. Publ. Math. IHES 38, p. 27-76 (1970)
- [S] Simpson, C. *Higgs bundles and local systems*. Publ. Math. IHES 75, p. 5-95 (1992)
- [Se] Serre, J.-P. *Espaces fibrés algébriques*. In: Séminaire C. Chevalley ENS, 2e année 1958: Anneaux de Chow et applications, p. 1-37 (1958)
- [SGA 1] Grothendieck, A. und Raynaud, M. *Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie 1960-1961: Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. LNM 224, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1971)
- [SGA 3] Demazure, M. und Grothendieck, A. (Hrg.) *Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie 1962-1964: Schémas en groupes (SGA 3)*. LNM 151-153, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1970)
- [SGA 4] Artin, M., Grothendieck, A. und Verdier, J.L. (Hrg.) *Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie 1963-1964: Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*. LNM 269, 270, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1972)

- [Sp] Springer, T. *Armand Borel*. Asian J. Math. Vol. 8, No. 4, p. 1xix-1xxvii (2004)
- [T] Tong, J. *Application d'Albanese pour les courbes et contractions*. Prépublication, Orsay (2006)
- [Ta] Tamme, G. *Einführung in die étale Kohomologie*. Der Regensburger Trichter 17, Universität Regensburg (1979)
- [V] Voevodsky, V. *Homology of schemes*. Selecta Mathematica, New Series, Vol. 2, No.1, p. 111-153 (1996)
- [W] Weil, A. *Généralisation des fonctions abéliennes*. J. Math. Pures Appl. IX.Sér. 17, p. 47-87 (1938)
- [We] Werner, A. *Vector bundles on curves over \mathbb{C}_p* . in: Weng, L. und Nakamura, I. (Hrsg.) *Arithmetic geometry and number theory*. Series in number theory and its applications, Vol. 1, World Scientific, p. 47-62 (2006)

