

Bernd Nottelmann

Einfluß von Vielteilchen-Effekten auf die Dynamik der  
kohärenten Intersubband-Polarisation in  
GaInAs/AlInAs-Quantentopfstrukturen

2002







Theoretische Physik

Einfluß von Vielteilchen-Effekten auf die Dynamik der  
kohärenten Intersubband-Polarisation in  
GaInAs/AlInAs-Quantentopfstrukturen

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von  
Bernd Nottelmann  
aus Dorsten

Dekan: Prof. Dr. Wulfhard Lange  
Erster Gutachter: Prof. Dr. Tilmann Kuhn  
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Claus Falter  
Tag der mündlichen Prüfung: 27. 6., 4. 7. und 8. 7. 2002  
Tag der Promotion: 8. 7. 2002





# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Einführung</b>	<b>5</b>
1	Einleitung	7
2	Experimentelle Befunde	9
<b>II</b>	<b>Theorie</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>15</b>
3.1	Modellierung der Heterostruktur . . . . .	15
3.2	Hamilton-Operator . . . . .	18
3.3	Zwei-Puls-Anregung: Vierwellenmischen . . . . .	21
3.3.1	Experiment . . . . .	21
3.3.2	Formale Realisierung des Feldes . . . . .	22
3.3.3	Polarisation . . . . .	23
3.4	Bewegungsgleichungen . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Grundzustand</b>	<b>25</b>
4.1	FC-Grundzustand . . . . .	25
4.2	Hartree-Grundzustand . . . . .	26
4.3	Hartree-Fock-Grundzustand . . . . .	27
4.4	$\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ -Grundzustand . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Zwei-Niveau-Modell: Anregung mit Rechteckpulsen</b>	<b>31</b>
5.1	Optische Bloch-Gleichung . . . . .	31
5.1.1	Herleitung der Vektorgleichung . . . . .	31
5.1.2	Rabi-Lösung . . . . .	34
5.2	Zwei-Puls-Anregung und Photonenecho . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Zwei-Niveau-Modell: Absorption und Vierwellenmischen</b>	<b>39</b>
6.1	Grundzustand . . . . .	39
6.2	Bewegungsgleichung . . . . .	39
6.3	Entwicklung nach Amplituden des Lichtfeldes . . . . .	40
6.4	Lineare Absorptionsspektren . . . . .	41
6.5	Vierwellenmischen mit $\delta$ -Pulsen . . . . .	43

6.5.1	Freier Induktionszerfall . . . . .	43
6.5.2	Zeitintegrierte Polarisierung . . . . .	44
<b>7</b>	<b>Zeitabhängige Hartree-Fock-Gleichungen</b>	<b>47</b>
7.1	Bewegungsgleichung mit Coulomb-Termen . . . . .	47
7.1.1	Halbleiter-Bloch-Gleichung . . . . .	50
7.1.2	Richtungsauffösung der Bewegungsgleichungen . . . . .	50
7.2	Plasma-Screening . . . . .	53
<b>III</b>	<b>Ergebnisse der numerischen Simulationen</b>	<b>57</b>
<b>8</b>	<b>Berechnung des Grundzustands</b>	<b>59</b>
<b>9</b>	<b>Lineare Absorptionsspektren</b>	<b>65</b>
9.1	Spektren in Abhängigkeit von der Dotierung . . . . .	67
9.2	Spektren mit experimentell bestimmten Dephasierungszeiten . . . . .	75
<b>10</b>	<b>Resultate der Vierwellenmisch-Simulationen</b>	<b>77</b>
10.1	FWM-Signale bei nichtresonanter Anregung . . . . .	77
10.1.1	Signalverhalten bei Variation der Verzögerungszeiten . . . . .	79
10.1.2	Signalverhalten bei Variation der Anregungsenergie . . . . .	82
10.2	FWM-Signale bei resonanter Anregung . . . . .	87
10.3	Zeitintegrierte FWM-Signale . . . . .	95
10.4	Quantenschwebungen . . . . .	98
10.5	Photonenechos . . . . .	102
<b>11</b>	<b>Resultate für InAs/AlSb-Heterosysteme</b>	<b>105</b>
11.1	$\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ -Grundzustand . . . . .	105
11.2	Lineare Absorptionsspektren . . . . .	107
11.3	Vierwellenmischen . . . . .	109
<b>IV</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>117</b>
<b>V</b>	<b>Anhang</b>	<b>121</b>
<b>A</b>	<b>Berechnung der Coulomb-Matrix-Elemente</b>	<b>123</b>
<b>B</b>	<b>Zwei-Niveau-Modell</b>	<b>127</b>
B.1	Entwicklung nach Amplituden des Lichtfeldes . . . . .	127
B.2	Optische Bloch-Gleichung . . . . .	133
B.2.1	Rotating-Wave-Näherung . . . . .	133





**Teil I**

**Einführung**



# Kapitel 1

## Einleitung

Die Untersuchung zweidimensionaler Elektronengase in Nanostrukturen mittels Ultrakurzzeit-spektroskopie hat in den letzten Jahren als Forschungsgegenstand an Bedeutung gewonnen, da sie als Grundlage zur Herstellung neuartiger optischer Bauelemente im Infrarotbereich dient. Mögliche Anwendungen erstrecken sich über Halbleiterlaser wie den *Quanten-Kaskaden-Laser*, der bei Raumtemperatur gepulstes Laserlicht einer Wellenlänge von ca.  $5 \mu\text{m}$  abgibt [1, 2, 3, 4], bis zu schnellen optischen Schaltern oder Detektoren [5], wie sie bei der Datenübertragung in verlustarmen Glasfasernetzen Anwendung finden [6].

In Halbleitern kann die Bewegung der Ladungsträger durch epitaktische Strukturierung eingeschränkt werden. Wird der Raum in eine oder mehrere Richtungen im Bereich der de-Broglie-Wellenlänge (also im Nanometerbereich) der Ladungsträger um eine Dimension reduziert, erhält man eine zusätzliche Quantisierung der Energien ([5]; *Confinement*). Resultat des als Folge aus der Strukturierung entstandenen Quantentopfes ist eine Auffächerung der Energien in diskrete Valenz- und Leitungs-*Subbänder*. Diese Aufspaltung ermöglicht die Anregung von Übergängen zwischen aufeinanderfolgenden Subbändern im Infrarotbereich unterhalb der fundamentalen Bandlücke. Konkret handelt es sich um eine Auffächerung der Bänder von Elektronen in Schichtstrukturen aus III-V-Halbleitern. Darunter fallen z.B. GaInAs/AlInAs- oder InAs/AlSb-Vielfach-Quantentopfstrukturen (MQW = *Multi Quantum Well*).

In dieser Arbeit wird die Simulation der kohärenten Intersubband-Polarisation (abgekürzt IS-Polarisation) im Elektronenplasma von Halbleiter-Nanostrukturen durch Zweipuls-Vierwellenmisch-Experimente im Femtosekundenbereich untersucht. In Experimenten werden diese Femtosekundenpulse beispielsweise durch modengekoppelte Titan-Saphir-Laser realisiert [7]. Den thematischen Schwerpunkt bildet die optische Anregung von Elektronen vom ( $n = 1$ )- in das ( $n = 2$ )-Subband. Elektronen werden kohärent durch Laserpulse ins höhere Leitungs-Subband angeregt. Die dabei entstehende makroskopische Polarisation ist die zentrale Meßgröße. Die Dynamik der Intersubbandübergänge wird durch Intrasubband-Relaxations-Prozesse dominiert. Dabei steht die theoretischen Analyse des Einflusses von Vielteilcheneffekten aufgrund der Coulomb-Wechselwirkung auf das Verhalten der kohärenten Polarisation im Vordergrund.

Die Energiedifferenzen zwischen den Subbändern der hier untersuchten Halbleitermaterialien

liegen zwischen einigen 10 meV bis zu mehreren 100 meV, was Wellenlängen zwischen  $5 \mu\text{m}$  und  $125 \mu\text{m}$  im mittleren Infrarotbereich entspricht.

Die Coulomb-Wechselwirkung wirkt sich auf die Dispersionrelation dadurch aus, daß sie zum einen den Abstand der Subbänder unabhängig vom Wellenvektor  $\mathbf{k}$  verschiebt (*Hartree*-Anteil) und zum anderen die Dispersionrelation nichtparabolisch verzerrt (*Fock*-Anteil). Zudem haben die Fock-Terme entscheidenden Einfluß auf die Dynamik der kohärenten Polarisation.

Ein anderer Grund für nichtparabolische Subbänder sind Interbandkopplungseffekte, die insbesondere bei Quantentopfstrukturen mit InAs-Komponente ausgeprägt sind [8, 9, 10], wo die Bandlücke klein ist. Somit ergeben sich schon große Nichtparabolizitäten bei relativ kleinen Dotierungsdichten, so daß sich deren Auswirkungen auf die Ultrakurzzeitdynamik bei optischer Anregung ohne den störenden Einfluß zu starker Coulomb-Wechselwirkungseffekte untersuchen lassen.

Im folgenden Kapitel 2 werden einige Experimente vorgestellt, die sich mit der Thematik von Intersubbandübergängen befassen; bei diesen handelt es sich um die Messung von Absorptionsspektren und Experimente mit gepulsten Lasern. Dabei untersucht man den Zerfall der durch Femtosekunden-Laserpulse angeregten makroskopischen Polarisation, wobei der zeitliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Pulsen variiert wird. Die derart angeregten Intersubbandübergänge weisen in der Regel große Absorptionsquerschnitte auf [11].

# Kapitel 2

## Experimentelle Befunde

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Erfassung der Elektronensysteme der betrachteten Halbleiterschichtstrukturen sind lineare Absorptionsspektren. Da in dieser Arbeit auch verschiedene 2D-Elektronengasdichten diskutiert werden, ist es zunächst wichtig, zu beobachten, wie sich deren Änderung auf die Spektren auswirkt, da man auf diesem Wege die Signifikanz der Coulomb-Wechselwirkung in Form von Hartree- und Fock-Termen zwischen den Elektronen beurteilen kann.

Messungen an GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As-Quantentöpfen mit inelastischer Lichtstreuung [12] haben ergeben, daß die Fock-Terme einen den Hartree-Termen vergleichbaren Einfluß auf die Inter-subband-Spektren haben [13]. Dies konnte in [14] durch theoretische Berechnung beider Wechselwirkungen im Rahmen einer selbstkonsistenten Feldtheorie bestätigt werden. Die elektrostatische Wechselwirkung drückt sich im *Depolarisationshift* (oder auch *Depolarisationseffekt*), einer Blauverschiebung des Spektrums gegenüber einem idealen System mit wechselwirkungsfreien Ladungsträgern aus. Die durch den Laserpuls angeregte Polarisation wirkt dabei den elektromagnetischen Wellen dieses Pulses lokal entgegen. Das bedeutet, daß die Elektronen eine kollektive Bewegung im Bereich betragsmäßig niedriger **k**-Wellenvektoren als Reaktion auf das Lichtfeld erfahren und so für einen Abschirmeffekt sorgen. Die Fock-Terme bewirken einen Shift des Spektrums zurück zu niedrigeren Energien, da sie den Hartree-Termen entgegenwirken.

Es liegen weitere Experimente vor, die sich mit der Blauverschiebung der Absorptionsspektren von GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As-Quantentöpfen bei zunehmender Elektronendichte befassen [15, 16] (über die Temperaturabhängigkeit von Spektren berichtet u.a. [17]). Während in Berechnungen der Inter-subbanddynamik ohne Berücksichtigung der Coulomb-Austauschwechselwirkung zwischen den Ladungsträgern eine Rotverschiebung des Absorptionsspektrums bei zunehmender Ladungsträgerdichte gefunden wurden (dabei handelt es sich um ein vereinfachtes Modell auf Basis des Hartree-Grundzustands, siehe [16]), konnte in [18] die Blauverschiebung theoretisch bestätigt werden: Gründe sind der Depolarisationsshift, die Renormierung der kinetischen Elektron-Energien durch die Coulomb-Austauschwechselwirkung [19] sowie die Abschirmung der Coulomb-Wechselwirkung, die entsteht, wenn ins obere Subband angeregte Elektronen Dichtefluktuationen der Nachbarerlektronen mittels Coulomb-Wechselwirkung induzieren. All diese Einflüsse müssen bei der korrekten numerischen Behandlung der betrachteten Elektro-

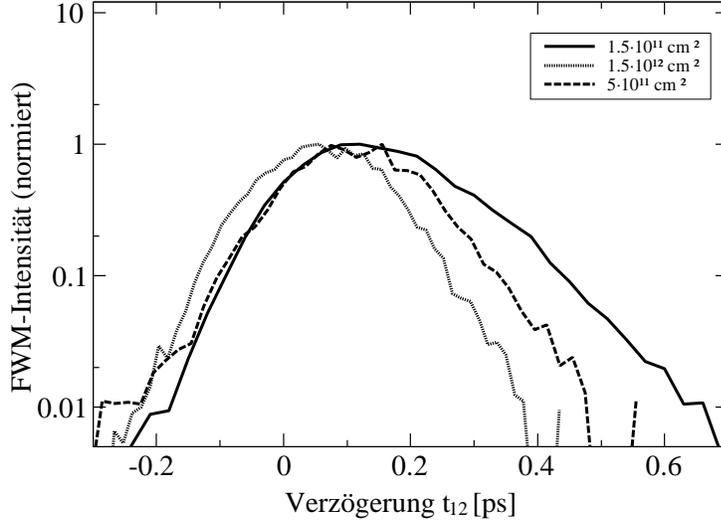
nensysteme in Halbleiterheterostrukturen berücksichtigt werden. Das Hartree-Fock-Modell der Dynamik, das die Coulomb-Wechselwirkung einschließt (siehe Abschnitt 4.3 und Kapitel 7), gibt die oben erwähnte Blauverschiebung korrekt wieder.

Am Max-Born-Institut für Nichtlineare Optik und Kurzzeitspektroskopie in Berlin wurde der Zerfall von kohärenter Intersubband-Polarisation in schmalen  $\text{Ga}_{0.47}\text{In}_{0.53}\text{As}/\text{Al}_{0.48}\text{In}_{0.52}\text{As}$ -Quantentöpfen mit Hilfe nichtlinearer Untersuchungsmethoden genauer untersucht [5]. Dabei wurde festgestellt, daß der Zerfall resonant, d.h. am Absorptionsmaximum des linearen Spektrums des Vielfach-Quantentopfs angeregt, kohärenter Polarisation zwischen aufeinanderfolgenden Leitungs-Subbändern innerhalb einer *Dephasierungszeit* von  $T_2 \approx 500$  fs (auch *Phasenrelaxationszeit* genannt) wesentlich schneller voranschreitet als die Intersubband-Relaxation von Elektronen [20].

Weitere Veröffentlichungen [5, 21] beschäftigen sich in Zwei-Farb-Anrege-Abtast-Experimenten (engl. *pump probe*) mit den Streumechanismen zwischen und in den Subbändern von GaInAs/AlInAs-Quantentopfstrukturen. Dabei wurde die Transmission im Intersubband- und Interbandbereich gemessen. Mit Unterstützung von Monte-Carlo-Simulationen wurde gezeigt, daß die Relaxation der nichtlinearen Intersubband-Absorption im wesentlichen von Elektron-Elektron-Streuung als relevantem Streumechanismus abhängt. Dies hängt mit der Bandlücke um 100 bis 200 meV zusammen. Die Energie optischer Phononen in den betrachteten Materialien beträgt ca. 30 meV, so daß die Emission optischer Phononen als Intersubband-Relaxationsmechanismus für die beobachteten Relaxationszeiten von 70 bis 300 fs nicht in Frage kommt. Theoretischen Berechnungen zufolge liegen die Elektron-Phonon-Relaxationszeiten im Bereich von 1 ps [22], was ein weiteres Indiz für die eher untergeordnete Rolle der Elektron-Phonon-Streuung darstellt. Bei der niedrigen Flächenladungsdichte von  $n_D = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  befindet sich die Fermi-Kante mit  $\varepsilon_F \approx 7$  meV so weit unterhalb der LO-Phonon-Energie, daß an Intrasubbandstreuungsprozessen ebenfalls keine LO-Phononen beteiligt sind. Bei der hohen Dichte  $n_D = 1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  liegt die Fermi-Kante zwar bei  $\varepsilon_F \approx 70$  meV, aber bei resonanter Anregung werden hauptsächlich Elektronen mit niedrigen  $\mathbf{k}$ -Werten angeregt, die Energien unterhalb des Phononbereichs besitzen. Liegt die Übergangsenergie von Elektronen unterhalb der LO-Phonon-Energie, so kommt sowohl bei Intra- als auch Intersubbandübergängen hauptsächlich die Streuung mit akustischen Phononen in Frage [23, 24].

Bonvalet et al. [25] berichten von Pump-Probe-Experimenten, mit denen die Relaxation von Elektronen des ( $n = 2$ )-Subbandes in das ( $n = 1$ )-Subband gemessen wurde. Die entsprechende Zeitkonstante  $T_1$  war um den Faktor 2.5 größer als die Dekohärenzzeit  $T_2$  der IS-Polarisation. Daher wird diese Art von Relaxation im folgenden nicht weiter betrachtet.

Mit Zweistrahl-Vierwellenmisch-Experimenten [5, 20] (FWM = *Four Wave Mixing*) mit n-dotierten GaInAs/AlInAs-Vielfach-Quantentopfstrukturen kann man die Dynamik der kohärenten Intersubband-Polarisation untergrundfrei (ohne den störenden Einfluß der anregenden Laserpulse) beobachten. Die Anregung erfolgt in der Regel resonant (d.h. mit der Energielücke zwischen ( $n=1$ )- und ( $n=2$ )-Subband) bzw. höchstens um einige 10 meV verstimmt, mit Secanshyperbolicus-förmigen Pulsen. An diesen Experimenten sind zwei mit den Wellenvek-



**Abbildung 2.1:** Experimentell gemessene FWM-Signale in  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ -Richtung für drei Dotierungsdichten  $n_D$  aus [5]

toren  $\mathbf{k}_{1,2}$  parametrisierte Laserpulse beteiligt, die aus derselben Quelle stammen. Durch eine Verzögerungsstufe läßt sich der Zeitabstand  $t_{12}$  (engl. *delay*) zwischen den beiden Pulsen variieren ( $t_{12}$  wird positiv gezählt, wenn der erste Laserpuls aus der  $\mathbf{k}_1$ -Richtung kommt). Der zweite Puls wird an dem durch den ersten Puls erzeugten transienten Gitter gestreut; bei diesen elektromagnetischen Streuwellen handelt es sich um nichtlineare Polarisationsstrahlung, die ein Maß für die kohärente Anregung von Elektronen ins obere Subband ist. Diese Strahlung wird zeitlich bzw. spektral aufgelöst oder zeitintegriert mit einem InSb-Detektor aufgenommen [5] (in weiteren Verlauf sprechen wir auch vom *FWM-Signal*).

Bei den zeitaufgelösten FWM-Signalen kann man nach dem Erreichen des Maximums exponentiellen Zerfall beobachten, wobei man bei Vielfach-Quantentopfstrukturen Probleme hat, zwischen inhomogenen und homogenen Einflüssen auf das Signalverhalten unterscheiden zu können. Die Inhomogenität in den Materialien beruht auf unterschiedlichen Dispersionsrelationen bei den Subbändern und statistische Schwankungen der Topfparameter. Sie sorgt dafür, daß das Gesamtspektrum eine Verbreiterung erfährt und eventuell auftretende Signalstrukturen verschmiert werden. Homogene Verbreiterung bedeutet phasenzerstörende Prozesse wie Ladungsträger-Ladungsträger- und Ladungsträger-Phonon-Streuungen. Beide tragen zum Abfall der Polarisationsstrahlung bei und können im Experiment nicht voneinander getrennt werden [20].

In Abb. 2.1 ist das Betragsquadrat der zeitintegrierten Polarisation für drei verschiedene Dotierungsdichten dargestellt. Mit einem einfachen Exponentialfit  $\exp(-\lambda t_{12})$  ergeben sich für die Polarisation Zerfallszeiten zwischen 55 fs und 80 fs [20]. Wie bereits erwähnt, spielt die Emission optischer Phononen eine untergeordnete Rolle; die Betrachtung der zeitintegrierten Signale liefert ein weiteres Argument dafür: die Relaxation der Elektronen vom oberen ( $n = 2$ )-Subband zurück ins ( $n = 1$ )-Subband spielt sich mit einer Zerfallszeit von 1 ps ab [21]. Dies liegt um eine Größenordnung höher als die gemessenen Phasenrelaxationszeiten bei den zeitintegrierten Signalen.



**Teil II**  
**Theorie**



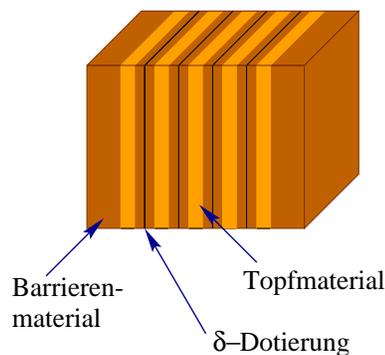
# Kapitel 3

## Grundlagen

### 3.1 Modellierung der Heterostruktur

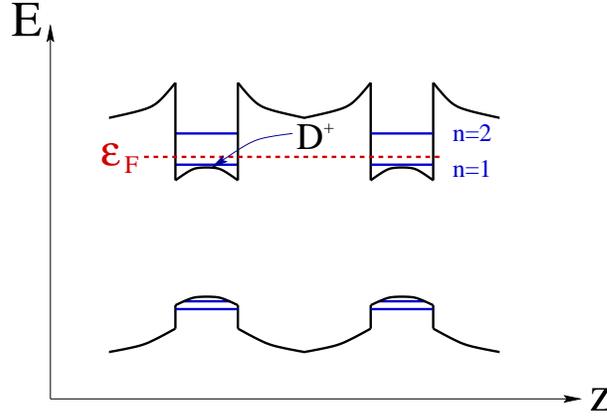
Bevor wir auf das Thema *Intersubbandübergänge in III-V-Halbleitern* näher eingehen, beschäftigen wir uns zunächst mit dem Aufbau der untersuchten Materialien. Die von uns betrachteten Systeme werden durch epitaktisches Aufeinanderlagern zweier verschiedener III-V-Halbleiter hergestellt (Schema 3.1) in unserem Fall GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As (mit den Anteilen  $x, 1 - x < 1$  der entsprechenden Elemente).

Formal werden diese Heterosysteme durch zweidimensionale Vielfach-Quantentopfmodelle (MQW = engl. *Multi Quantum Well*) mit endlichen Potentialen beschrieben, deren Tiefe durch die Differenz der Bandlückenenergien der beiden verwendeten Halbleiter bestimmt wird. Bei der numerischen Behandlung beschränken wir uns allerdings auf einen einzelnen Quantentopf, so daß über mehrere Töpfe gekoppelte Zustände unberücksichtigt bleiben. Da diese Zustände erst bei sehr dünnen Schichten wichtig werden, können sie für die folgenden Diskussionen vernachlässigt werden.



**Abbildung 3.1:** Schematische Darstellung des Halbleiter-Systems

Die Besetzungszahlen der einzelnen Subbänder hängen direkt von der Dotierung des Topfmaterials ab. Diese wurde als atomar flache Si-Dotierung in den Barrierenmitten (angedeutet durch das Symbol  $D^+$  in Abb. 3.2) realisiert. Atomar flach bedeutet, daß in der Mitte des



**Abbildung 3.2:** Potentialverlauf der Vielfach-Quantentopfstruktur in Richtung senkrecht zu den Schichten. Das  $\varepsilon_F$  zeigt die Höhe der Fermi-Kante zwischen erstem und zweitem Subband an. Aus der dotierten Schicht, die durch ein  $D^+$  markiert ist, “wandern” die Elektronen in den Topf (symbolisiert durch den Pfeil).

Barrierenmaterials noch eine einatomige n-Dotierungsschicht eingefügt ist, daher spricht man auch von  $\delta$ -Dotierung. Die Elektronen aus dieser Schicht tunneln zum ersten Subband im energetisch tiefer gelegenen Topf [5], d.h. die Dotierungsdichte sollte derart gewählt werden, daß das Niveau der Fermi-Kante unterhalb der Energiedifferenz zwischen den beiden Subbändern liegt, da Elektronen in das ( $n = 2$ )-Subband optisch angeregt und die Dynamik der dadurch entstandenen kohärenten Intersubband-Polarisation untersucht werden sollen.

In den Simulationsrechnungen wird der Vielteilchen-Grundzustand in Form der *Slater-Determinante* von Einteilchen-Wellenfunktionen selbstkonsistent in Hartree-Fock-(HF-)Näherung bestimmt [26]. In Abb. 3.2 ist angedeutet, wie die Elektronen im Topf durch gegenseitige Abstoßung dessen Potential nach oben hin ausstülpfen und damit seine Anziehung wieder abschwächen. Die HF-Gleichung beschreibt genau diese “Verzerrung” des Potentials durch die Elektronen selbst.

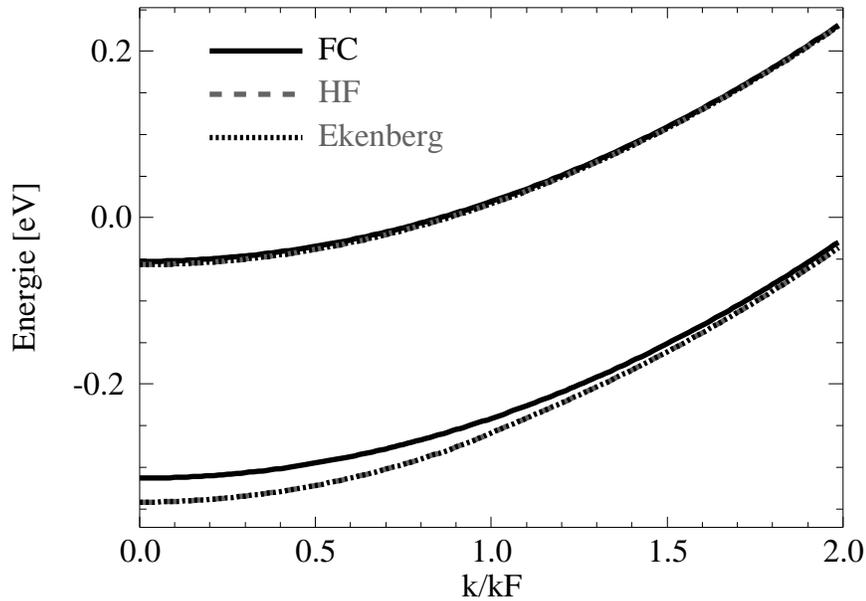
Eine einfachere Variante ist die Hartree-Näherung: hier wird ebenfalls die Coulomb-Wechselwirkung einbezogen, nicht jedoch die Antisymmetrie der Vielteilchen-Wellenfunktion. Im Hartree-Fall ist dieser Vielteilchenzustand lediglich durch ein Produkt der Einteilchenwellenfunktionen gegeben, wohingegen die Slater-Determinante die antisymmetrische Eigenschaft erfüllt. Die weitestgehende Vereinfachung ist die Entkopplung des Vielteilchen-Hamiltonians durch Vernachlässigung jedweder Wechselwirkung zwischen den Elektronen: man spricht auch vom Fall freier Ladungsträger oder abgekürzt vom *FC-Fall* (FC = engl. *Free Carriers*).

Die Dispersionsrelationen haben im HF-Fall keine parabolische Form, d.h. es liegt keine  $k^2$ -Abhängigkeit der Energien vor. Stattdessen werden die Energien der Elektronen durch die Fock-Wechselwirkung (der Anteil der Coulomb-Wechselwirkung, der durch die Einbeziehung der antisymmetrischen Eigenschaft der Vielteilchenwellenfunktion zustande kommt; im weiteren *Fock-Terme* genannt) im ersten Subband abgesenkt und nähern sich erst bei höheren

$\mathbf{k}$ -Werten den Energien aus dem Hartree-Fall (Abb. 3.3). Eine analytische Behandlung der Nichtparabolizität für GaAs findet sich in einem Artikel von Ekenberg [27]. Demzufolge gilt für Subband  $n$  die Näherung

$$\varepsilon_{n,\mathbf{k}} = \varepsilon_{n,0} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n^*} \left( 1 - \alpha_n \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n^*} \right). \quad (3.1)$$

Dabei ist  $\varepsilon_{n,0}$  die Energie eines Elektrons im  $n$ -ten Subband beim Wellenvektor  $\mathbf{k} = 0$  und  $m_n^*$  bezeichnet die effektive Elektronenmasse des entsprechenden Subbands. Die Korrekturterme  $\alpha_n$  beschreiben die Stärke der Nichtparabolizität, wobei  $\alpha_1=0.98 \text{ eV}^{-1}$  und  $\alpha_2=0.78 \text{ eV}^{-1}$  betragen [28]. Abb. 3.3 zeigt, daß die Übereinstimmung zwischen Abschätzung (3.1) und Numerik sehr gut ist.



**Abbildung 3.3:** Dispersionsrelationen der niedrigsten beiden Subbänder in  $\text{Ga}_{0.47}\text{In}_{0.53}\text{As} - / \text{AlInAs}$  bei einer Flächendotierdichte von  $n_D = 1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  und einer Temperatur von  $T = 8 \text{ K}$ . “FC” bezeichnet die Energien freier Ladungsträger, “HF” die Hartree-Fock-Einteilchen-Energien und “Ekenberg” die Energiekorrektur nach (3.1).

Die Ausprägung dieser Nichtparabolizität hängt von der Dotierung ab. Niedrige Dotierung bedeutet eine schwache Besetzung der Subbänder und damit einen schwachen Einfluß der Coulomb-Austauschwechselwirkung. Dies hat für die Polarisationsdynamik weitreichende Konsequenzen.

Bei der Simulation der dynamischen nichtlinearen Prozesse in FWM-Experimenten müssen die IS-Coulomb-Matrixelemente, die die Beziehung zwischen Elektronen verschiedener Subbänder beschreiben, ebenfalls mitberücksichtigt werden. Deswegen ist in unserem Modell keine klar

ersichtliche Trennung zwischen Verteilungsfunktionen und Polarisationen wie im Fall der Halbleiter-Bloch-Gleichungen möglich. Stattdessen werden Bewegungsgleichungen ausschließlich für die Dichtematrix aufgestellt. Deren Nichtdiagonalelemente beschreiben Kohärenzen, die Diagonalelemente stellen die Elektronendichten in den entsprechenden Subbändern dar.

Um die Effekte beispielsweise durch die Fock-Terme und inhomogene Verbreiterung (welche auf einer gewissen statistischen Streuung der Topfparameter des Multi-Quantum-Wells beruhen) aufschlüsseln zu können, wurden die Simulationen zusätzlich auch mit den bereits genannten, vereinfachten Modellen durchgeführt.

## 3.2 Hamilton-Operator

Gegeben sei ein Quantentopf, wobei sich die einzelnen Halbleiter-Lagen in  $xy$ -Richtung erstrecken und in  $z$ -Richtung aufeinander geschichtet sind. Somit machen wir für den Feldoperator in zweiter Quantisierung den Ansatz

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{n,\mathbf{k}} \varphi_{n,\mathbf{k}}(z) e^{i\mathbf{k}\cdot\rho} c_{n,\mathbf{k},s}, \quad (3.2)$$

dabei bezeichnen  $c_{n,\mathbf{k},s}$  bzw.  $c_{n,\mathbf{k},s}^\dagger$  den Elektronenvernichtungsoperator bzw. -erzeugungsoperator auf das Subband mit Index  $n$ , der die Quantisierung in  $z$ -Richtung beschreibt.  $\mathbf{k}$  ist der in der  $xy$ -Ebene liegende Wellenvektor des entsprechenden Elektrons und  $s$  sein Spin-Index.  $A$  ist die Normierungsfläche, die durch die Relation

$$\sum_{\mathbf{k}} = \frac{A}{(2\pi)^2} \int d^2k \quad (3.3)$$

zwischen diskreter, zweidimensionaler  $\mathbf{k}$ -Summe und kontinuierlichem  $\mathbf{k}$ -Integral definiert ist (d.h. sie ist abhängig von der Diskretisierung des  $\mathbf{k}$ -Raums). Die  $\varphi_{n,\mathbf{k}}$  sind die elektronischen Einteilchen-Wellenfunktionen des Quantentopfes. Diese sind innerhalb eines einzelnen Subbandes näherungsweise unabhängig vom Wellenvektor  $\mathbf{k}$ , so daß man

$$\varphi_n \approx \varphi_{n,\mathbf{k}}, \quad (3.4)$$

schreiben kann (im Hartree- und im wechselwirkungsfreien Fall gilt sogar das Gleichheitszeichen). Der Feldoperator (3.2) hängt vom Ortsvektor  $\mathbf{r} = (\rho, z)$  ab.  $\rho$  ist der 2D-Vektor entlang der Schichtenebene und  $z$  ist die eindimensionale Komponente senkrecht dazu.

Operatoren für Erzeugung und Vernichtung von Defektelektronen im Valenzband müssen nicht mitbehandelt werden, da die Gleichungen ausschließlich die Anregung von Übergängen zwischen den Leitungs-Subbändern beschreiben. Durch die  $n$ -Dotierung in den Barrieren ist die Besetzung des niedrigsten Subbandes mit Elektronen bereits gewährleistet.

Der kinetische Anteil des Hamiltonoperators in zweiter Quantisierung lautet

$$H_0 = \sum_{n,\mathbf{k},s} \varepsilon_{n,\mathbf{k}} c_{n,\mathbf{k},s}^\dagger c_{n,\mathbf{k},s} \quad (3.5)$$

mit den Energien  $\varepsilon_{n,\mathbf{k}}$  der Einteilchen-Wellenfunktionen des Quantentopfs. Das Lichtfeld in Form der beiden Anregungspulse beim Zweistrahl-Vierwellenmischen geht über die Dipolkopplung

$$H_0^{cl} = - \sum_{\substack{n_1, n_2, \\ \mathbf{k}, s}} M_{n_1 n_2, \mathbf{k}} E(t) c_{n_1, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{n_2, \mathbf{k}, s} \quad (3.6)$$

in die Betrachtung ein. Seine explizite Form folgt später in Abschnitt 3.3. Die Kopplungskonstanten  $M_{n_1 n_2, \mathbf{k}}$  sind die Dipolmatrixelemente

$$M_{n_1 n_2, \mathbf{k}} \equiv -e \int dz \varphi_{n_1, \mathbf{k}}^*(z) z \varphi_{n_2, \mathbf{k}}(z), \quad (3.7)$$

wobei  $e$  die Elektronenladung symbolisiert. Wegen (3.4) kann man auch

$$M_{n_1 n_2} \approx -e \int dz \varphi_{n_1}^*(z) z \varphi_{n_2}(z) \quad (3.8)$$

schreiben. Die Elektron-Elektron-Wechselwirkung geht gemäß

$$H_1^{cc} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3, n_4 \\ \mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q} \\ s, s'}} V_{\mathbf{q}}^{n_1 n_2 n_3 n_4} c_{n_1, \mathbf{k} + \mathbf{q}, s}^\dagger c_{n_2, \mathbf{k}' - \mathbf{q}, s'}^\dagger c_{n_3, \mathbf{k}', s'} c_{n_4, \mathbf{k}, s} \quad (3.9)$$

ein, mit den Coulomb-Wechselwirkungsmatrizen

$$V_{\mathbf{q}}^{n_1 n_2 n_3 n_4} \equiv \frac{1}{A} \frac{e^2}{2\epsilon_0 \epsilon_S} \frac{\mathcal{F}_q^{n_1 n_2 n_3 n_4}}{q}. \quad (3.10)$$

$\epsilon_0$  ist die Influenzkonstante und  $\epsilon_S$  die materialabhängige dielektrische Konstante. Bei den  $\mathcal{F}_q^{n_1 n_2 n_3 n_4}$  handelt es sich um Formfaktoren, welche die Integralausdrücke

$$\mathcal{F}_q^{n_1 n_2 n_3 n_4} \equiv \int dz \int dz' \varphi_{n_1}^*(z) \varphi_{n_2}^*(z') e^{-q|z-z'|} \varphi_{n_3}(z') \varphi_{n_4}(z). \quad (3.11)$$

symbolisieren. Sie drücken die Stärke der Coulomb-Wechselwirkung zwischen zwei Elektronen über alle Orte  $z$  in Abhängigkeit von der Differenz der Wellenvektoren  $\mathbf{q}$  aus. Mit den Wellenfunktionen

$$\varphi_1(z) = \sqrt{\frac{2}{d}} \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right), \quad (3.12)$$

$$\varphi_2(z) = \sqrt{\frac{2}{d}} \sin\left(\frac{2\pi}{d} z\right) \quad (3.13)$$

aus dem einfachen Topfproblem mit unendlich hohen Wänden im Abstand  $d$  ( $0 \leq z \leq d$ ) lauten die Formfaktoren beispielsweise

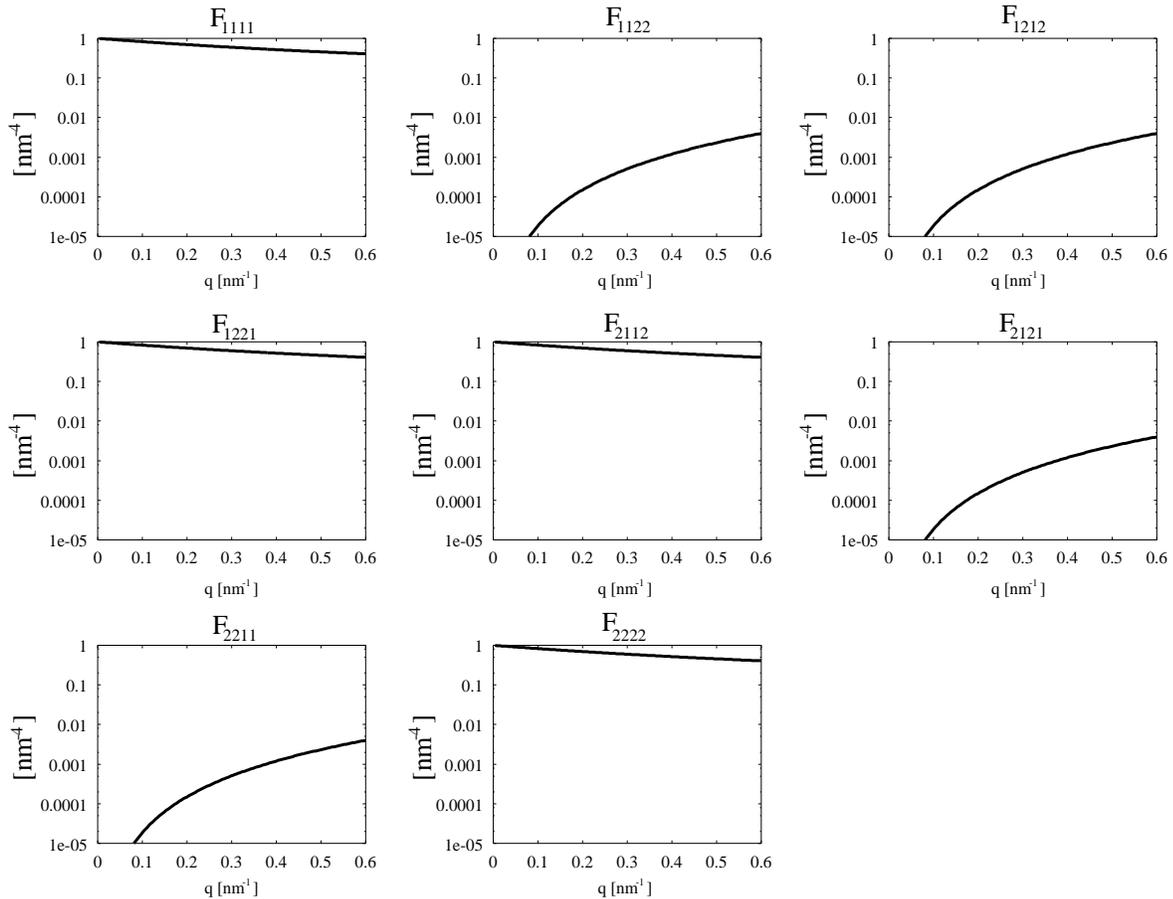
$$\mathcal{F}_{\mathbf{q}}^{n_1 n_2 n_3 n_4} = \frac{1}{d^2} \left\{ dq \left[ \frac{\delta_{n_1+n_4, n_2+n_3}}{q^2 + \frac{\pi^2}{d^2} (n_1 + n_4)^2} + \frac{\delta_{n_1-n_4, n_2-n_3} + \delta_{n_1-n_4, n_3-n_2}}{q^2 + \frac{\pi^2}{d^2} (n_1 - n_4)^2} \right] \right. \quad (3.14)$$

$$+ [(-1)^{n_1+n_4} + (-1)^{n_2+n_3}] q^2 [e^{-dq} - (-1)^{n_1+n_4}] \times$$

$$\left[ \frac{1}{q^2 + \frac{\pi^2}{d^2} (n_1 + n_4)^2} - \frac{1}{q^2 + \frac{\pi^2}{d^2} (n_1 - n_4)^2} \right] \times$$

$$\left. \left[ \frac{1}{q^2 + \frac{\pi^2}{d^2} (n_2 + n_3)^2} - \frac{1}{q^2 + \frac{\pi^2}{d^2} (n_2 - n_3)^2} \right] \right\},$$

was eine gute Näherung für die Formfaktoren, die mit den HF-Einteilchenwellenfunktionen berechnet worden sind, darstellt. Leicht kann man erkennen, daß die analytisch berechneten



**Abbildung 3.4:** Formfaktoren nach Gl. (3.14) in logarithmischer Darstellung

$\mathcal{F}_{\mathbf{q}}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$  genau dann verschwinden, wenn die Summe der Indizes  $n_j \in \{1, 2\}$  ungerade ist. Anhand von Abb. 3.4 ist zudem ersichtlich, daß die Intraband-Coulomb-Abstoßung (d.h. die

äußeren Indizes  $n_1, n_4$  sowie die inneren Indizes  $n_2, n_3$  sind jeweils gleich) wesentlich stärker als die Wechselwirkung zwischen Elektronen aus verschiedenen Subbändern ist [19].

Dynamische Variable ist die Einteilchen-Dichtematrix

$$f_{n_1, n_2, \mathbf{k}} \equiv \frac{1}{2} \sum_s \langle c_{n_1, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{n_2, \mathbf{k}, s} \rangle, \quad (3.15)$$

mit deren Hilfe die uns interessierenden Observablen des Systems berechnet werden können [29].

Der Spin spielt lediglich bei der *Aufstellung* der Bewegungsgleichungen eine Rolle (siehe Abschnitt 3.4), durch Definition (3.15) wird aber der Spin-Index  $s$  eliminiert, der beim *Lösen* der Bewegungsgleichungen nicht mehr relevant ist.

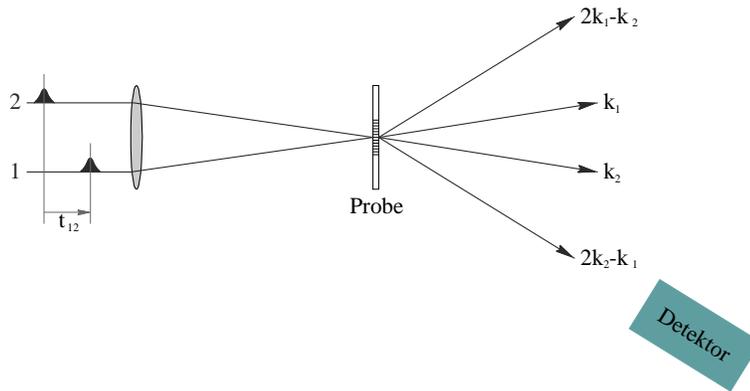
Dichtematrixelemente mit  $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$  werden hier nicht behandelt, da hier ein in  $xy$ -Richtung homogenes System betrachtet wird.

### 3.3 Zwei-Puls-Anregung: Vierwellenmischen

#### 3.3.1 Experiment

In Vierwellenmisch-Experimenten werden mehrere gepulste Laserstrahlen, die, um Kohärenz zu gewährleisten, aus ein und derselben Lichtquelle kommen, in ein nichtlinear-optisches Medium geschickt. Die Pulse stammen aus unterschiedlichen Richtungen (bezeichnet mit den Wellenvektoren  $\mathbf{k}_1$  und  $\mathbf{k}_2$ ), die sich in ihrem Einfallswinkel nur geringfügig voneinander unterscheiden.

FWM-Experimente werden in verschiedenen Varianten durchgeführt, es gibt Zweipuls- und



**Abbildung 3.5:** Schematische Darstellung des Vierwellenmisch-Experiments

Dreipuls-Anregungsexperimente [30, 31, 32, 33]. In dieser Arbeit werden wir uns auf den Zweipulsfall beschränken.

Die beim Vierwellenmischen aus der Probe austretende Strahlung breitet sich aufgrund nichtlinearer Effekte außer in die Richtungen  $\mathbf{k}_1$  und  $\mathbf{k}_2$  der beiden Eingangspulse auch in andere Richtungen aus, die Linearkombinationen beider Wellenvektoren mit ganzzahligen Vielfachen  $\lambda, \nu$  darstellen, d.h.  $\lambda\mathbf{k}_1 + \nu\mathbf{k}_2$ . (Wenn hier vom *FWM-Signal* bzw. *-Spektrum* oder vom

*Vierwellenmischsignal* gesprochen wird, ist die emittierte Polarisationsstrahlung in  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ -Richtung gemeint)

Der erste Puls induziert eine kohärente makroskopische Polarisation in Strahlrichtung, deren Abklingverhalten von der Temperatur und den Materialparametern abhängt. Zu nennen wäre beispielsweise die Dotierung mit Fremdatomen, die die Elektronenkonzentration in den Leitungs-Subbändern und damit den Einfluß von Vielteilchen-Stoßprozessen bestimmt. Diese phasenzerstörenden Prozesse werden in den Berechnungen vereinfacht durch die Phasenrelaxationszeit  $T_2$  charakterisiert. Sie beinhalten z.B. Streuungen der Elektronen untereinander oder am Kristallgitter (z.B. durch Fluktuationen der Legierung in Mischkristallen, Unebenheiten an den Schichtgrenzen oder Streuprozesse mit Phononen, siehe z.B. [34]).

Wenn der zweite einfallende Strahl auf die vom ersten Strahl erzeugte Polarisation trifft und mit dieser interferiert, wird ein transientes optisches Gitter erzeugt, d.h. Absorptionskoeffizient und Brechungsindex erfahren in diesem Bereich eine lokale, temporäre Veränderung. Dieses Gitter beugt die entstehende Polarisationsstrahlung aus nichtlineare Signalen mindestens dritter Ordnung im  $E$ -Feld ab: hierbei bezieht sich “dritte Ordnung” auf die Art der mathematischen Behandlung der resultierenden Bewegungsgleichungen, die in vereinfachter Form in Kapitel 6 dargelegt werden. Die nichtlineare Charakter kommt also erst durch die Wechselwirkung eines zweiten Strahles mit dem Polarisationsfeld zustande.

Die Vierwellenmischsignale in den abgebeugten Richtungen entstehen nur, wenn mindestens zwei Eingangssignale in unterschiedliche Richtungen vorhanden sind. Desweiteren zeichnen sie sich dadurch aus, daß sie untergrundfrei sind, d.h. das Meßsignal wird nicht durch die einfallenden Strahlen gestört.

Aus diesem Grund eignen sich Vierwellenmisch-Experimente sehr gut zur Untersuchung des Polarisationszerfalls, insbesondere dann, wenn sich die Halbwertsbreite eines Absorptionsspektrums nur schwer bestimmen läßt [35, 36, 37, 38].

### 3.3.2 Formale Realisierung des Feldes

Die zwei Lichtpulse werden mit den Wellenvektoren  $\mathbf{k}_1$  und  $\mathbf{k}_2$  parametrisiert. Somit bietet sich folgende Parametrisierung des elektromagnetischen Feldes an:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, t) &= E_1(t)e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + E_2(t)e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} + c.c \\ &= \frac{1}{A} \sum_{\lambda, \nu} e^{i(\lambda\mathbf{K} + \nu\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}} E^{(\lambda, \nu)}(t), \end{aligned} \quad (3.16)$$

wobei man den Schwerpunktswellenvektor  $\mathbf{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ , den Relativvektor  $\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$  und die Indizes  $\lambda, \nu \in \{-1, 1\}$  eingeführt hat. Die  $E_j(t)$  sind die zeitabhängigen Amplituden in die entsprechenden  $\mathbf{k}_j$ -Richtungen und  $A$  ist die Normierungsfläche. Hiermit hat man eine Fourier-Zerlegung in die Strahlrichtungen der eingehenden Pulse in Form von ebenen Wellen vorliegen, wobei die anderen Richtungen sich durch die Summen aus den ganzzahligen Vielfachen der Vektoren  $\mathbf{k}_1$  und  $\mathbf{k}_2$  ergeben.

Nun kann man alle dynamischen Variablen wie in Gl. (3.16) Fourier-zerlegen: die Dichtema-

trixelemente

$$f_{n_1 n_2, \mathbf{k}} = \frac{1}{A} \sum_{\lambda, \nu} e^{i(\lambda \mathbf{K} + \nu \mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}} f_{n_1 n_2, \mathbf{k}}^{(\lambda, \nu)} \quad (3.17)$$

mit den richtungsabhängigen Koeffizienten

$$f_{n_1 n_2, \mathbf{k}}^{(\lambda, \nu)}(t) = f_{n_1, \mathbf{k}}^{(0)} \delta_{n_1 n_2} \delta_{\lambda 0} \delta_{\nu 0} + \delta f_{n_1 n_2, \mathbf{k}}^{(\lambda, \nu)}(t) \quad (3.18)$$

aus der reellen Fermi-Verteilung  $f_{n_1, \mathbf{k}}^{(0)}$  der Elektronen zum Zeitpunkt  $t \rightarrow -\infty$  auf Subband  $n_1$  und dem komplexen, dynamischen Anteil  $\delta f_{n_1 n_2, \mathbf{k}}^{(\lambda, \nu)}$ , der die zeitabhängige Änderung der Besetzung der Subbänder und im Fall  $n_1 \neq n_2$  die Kohärenzen zwischen ihnen modelliert. Aus Definition (3.15) erhalten wir die Beziehung  $\delta f_{n_1 n_2, \mathbf{k}} = \delta f_{n_2 n_1, \mathbf{k}}^*$  und damit die Symmetrierelation

$$\delta f_{n_1 n_2, \mathbf{k}}^{(\lambda, \nu)} = \delta f_{n_2 n_1, \mathbf{k}}^{(-\lambda, -\nu)*} \quad (3.19)$$

### 3.3.3 Polarisation

Die Polarisation ist die zentrale Meßgröße in dieser Arbeit. Sie ist als der Erwartungswert

$$p(t) \equiv -e \langle z \rangle = -e \sum_{n_1, n_2, \mathbf{k}} f_{n_1 n_2, \mathbf{k}} \langle n_1, \mathbf{k} | z | n_2, \mathbf{k} \rangle \quad (3.20)$$

definiert, d.h. sie stellt eine kohärente Summe der den entsprechenden Wellenvektoren  $\mathbf{k}$  zugeordneten Einzelpolarisationen dar. Mit Definition (3.8) erhält man

$$p(t) = \sum_{n_1, n_2, \mathbf{k}} f_{n_1 n_2, \mathbf{k}} M_{n_1 n_2}. \quad (3.21)$$

Nun führt man die Fourierzerlegung durch und nutzt noch die Symmetrie (3.19) aus, was schließlich zum Resultat

$$p^{(\lambda, \nu)} = \begin{cases} \frac{4}{A} \sum_{n_1, n_2, \mathbf{k}} \operatorname{Re}(M_{n_1 n_2} \delta f_{n_1 n_2, \mathbf{k}}^{(\lambda, \nu)}) & ; \nu \text{ gerade} \\ \frac{2}{A} \sum_{n_1, n_2, \mathbf{k}} M_{n_1 n_2} (\delta f_{n_1 n_2, \mathbf{k}}^{(\lambda, \nu)} + \delta f_{n_2 n_1, \mathbf{k}}^{(\lambda, \nu)*}) & ; \nu \text{ ungerade} \end{cases} \quad (3.22)$$

führt.

Das Absorptionsspektrum mißt man in Strahlrichtung, es ist der Quotient aus den Fouriertransformierten von Polarisation und  $E$ -Feld,

$$\alpha(\omega) \propto \operatorname{Im} \frac{\tilde{p}^{(1, \pm 1)}(\omega)}{\tilde{E}^{(1, \pm 1)}(\omega)}. \quad (3.23)$$

(siehe Anhang C).

### 3.4 Bewegungsgleichungen

Mit der Heisenberg-Gleichung

$$\langle [O, H] \rangle = i\hbar \frac{d}{dt} \langle O \rangle, \quad (3.24)$$

mit  $H = H_0 + H_0^{cl} + H_1^{cc}$  gelangt man zu einer Hierarchie von Bewegungsgleichungen für  $n$ -Teilchen-Dichtematrizen, d.h. in jeder Stufe  $n$  der Hierarchie beschreiben die Bewegungsgleichungen für die entsprechende Dichtematrix die Wahrscheinlichkeit für  $n$ -Teilchen-Übergänge. Z.B. ist eine Zwei-Elektronen-Dichtematrix ein Erwartungswert von jeweils zwei Elektronenerzeugern und -vernichtern:

$$\langle c_{n_1, \mathbf{k}+\mathbf{q}, s}^\dagger c_{n_2, \mathbf{k}'-\mathbf{q}, s'}^\dagger c_{n_3, \mathbf{k}', s'} c_{n_4, \mathbf{k}, s} \rangle .$$

Der kinetische Anteil des Hamiltonian,  $H_0$ , der den wechselwirkungsfreien Anteil an der Dynamik des Systems beschreibt, liefert

$$\begin{aligned} [H_0, c_{n_1, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{n_2, \mathbf{k}, s}] &= \sum_{j, \mathbf{k}', s'} \varepsilon_{j, \mathbf{k}'} [c_{j, \mathbf{k}', s'}^\dagger c_{j, \mathbf{k}', s'} c_{n_1, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{n_2, \mathbf{k}, s}] \\ &= (\varepsilon_{n_1, \mathbf{k}} - \varepsilon_{n_2, \mathbf{k}}) c_{n_1, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{n_2, \mathbf{k}, s}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Mit dem Kopplungsterm des Lichtfeldes erhält man

$$\begin{aligned} [H_0^{cl}, c_{n_1, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{n_2, \mathbf{k}, s}] &= - \sum_{\substack{j_1, j_2 \\ \mathbf{k}' \\ s'}} E(t) M_{j_1 j_2} [c_{j_1, \mathbf{k}', s'}^\dagger c_{j_2, \mathbf{k}', s'} c_{n_1, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{n_2, \mathbf{k}, s}] \\ &= - \sum_j E(t) \left( M_{j n_1} c_{j, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{n_2, \mathbf{k}, s} - M_{n_2 j} c_{n_1, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{j, \mathbf{k}, s} \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Die Elektron-Elektron-Wechselwirkung führt auf

$$\begin{aligned} [H_1^{cc}, c_{n_1, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{n_2, \mathbf{k}, s}] &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4 \\ \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q} \\ s_1, s_2}} V_{\mathbf{q}}^{j_1 j_2 j_3 j_4} [c_{j_1, \mathbf{k}_1 + \mathbf{q}, s_1}^\dagger c_{j_2, \mathbf{k}_2 - \mathbf{q}, s_2}^\dagger c_{j_3, \mathbf{k}_2, s_2} c_{j_4, \mathbf{k}_1, s_1} c_{n_1, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{n_2, \mathbf{k}, s}] \\ &= \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3 \\ \mathbf{k}', \mathbf{q} \\ s'}} \left[ V_{\mathbf{q}}^{j_1 j_2 j_3 n_1} c_{j_1, \mathbf{k} + \mathbf{q}, s}^\dagger c_{j_2, \mathbf{k}' - \mathbf{q}, s'}^\dagger c_{j_3, \mathbf{k}', s'} c_{n_2, \mathbf{k}, s} \right. \\ &\quad \left. - V_{\mathbf{q}}^{n_2 j_1 j_2 j_3} c_{n_1, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{j_1, \mathbf{k}', s'}^\dagger c_{j_2, \mathbf{k}' + \mathbf{q}, s'} c_{j_3, \mathbf{k} - \mathbf{q}, s} \right], \end{aligned} \quad (3.27)$$

womit die Zwei-Elektronen-Wechselwirkung in die Dynamik eingeführt wird.

# Kapitel 4

## Grundzustand

Als Basis für die Lösung der Bewegungsgleichungen, auf die wir in Kapitel 7 zu sprechen kommen, dienen Einteilchenwellenfunktionen aus den Lösungen für ein Einzelquantentopfproblem, wobei wir in mehreren Ausbaustufen auch die Wechselwirkung der Elektronen untereinander in die Berechnung einfließen lassen. Wir sprechen auch vom *Grundzustand*, d.h. dem Zustand des Systems vor der Anregung. Im folgenden sind die verschiedenen Ausbaustufen des Grundzustands aufgeführt. In den Gleichungen werden die Einteilchenwellenfunktionen eines einzelnen Subbandes unabhängig vom Wellenvektor  $\mathbf{k}$  (Vereinfachung (3.4)) geschrieben.

### 4.1 FC-Grundzustand

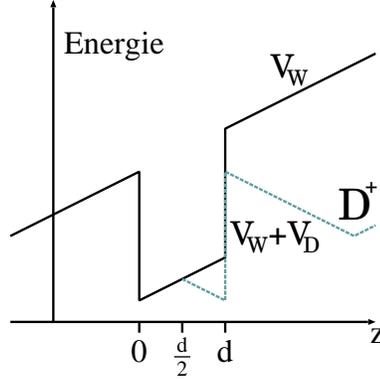
Der einfachste Ansatz für die Einteilchenwellenfunktionen besteht in der Behandlung der Elektronen als wechselwirkungsfreie Ladungsträger. Die Wellenfunktion  $\varphi_n(z)$  eines Elektrons in Subband  $n$  ist die Lösung der eindimensionalen statischen Schrödingergleichung

$$\left[ \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n^*} - \frac{\hbar^2}{2m_n^*} \frac{d^2}{dz^2} + V_W(z) + V_D(z) \right] \varphi_n(z) = \varepsilon_{n,\mathbf{k}} \varphi_n(z) \quad (4.1)$$

mit dem Topfpotential  $V_W$  und dem von der Dotierung abhängigen Potential  $V_D$ . Der Term  $\frac{\hbar^2 k^2}{2m_n^*}$  stammt aus der Einschränkung der Dimension und beschreibt die freie Elektronenbewegung in  $xy$ -Richtung entlang der Halbleiterschichten.

Die Si- $\delta$ -Dotierungsschicht drückt sich in dem Knick des Gesamtpotentials aus. Um überhaupt die 2D-Elektronendichte ohne Ladungsträger-Wechselwirkung einzubringen, wird die Deformation des Topfpotentials durch die Elektronen aus der n-Dotierung mittels eines Knicks in der Mitte des Topfbodens mithilfe einer linearen Näherung modelliert (Abb. 4.1). Das  $D^+$  symbolisiert die zurückgebliebenen positiven Ionenrümpfe der Dotierungsschicht. Sie prägen dem Topfpotential durch ihr  $E$ -Feld eine positive Steigung proportional zur Elektronenkonzentration  $n_D$  (in Einheiten Dotierung pro Flächeneinheit) auf (die durchgehende Linie in Abb. 4.1 deutet das an), d.h.

$$V_W(z) = const + \frac{e^2}{2\epsilon_0\epsilon_S} n_D z + \begin{cases} -V_0 & ; \quad 0 < z < d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.2)$$



**Abbildung 4.1:** Schema des einfachen Quantentopfes der Breite  $d$  unter Berücksichtigung der 2D-Elektronendichte

(die Konstante hängt von der Wahl des Abschnitts der  $z$ -Achse ab;  $V_0 > 0$  ist die Topftiefe). Diese Steigung wird durch die aus der Si- $\delta$ -Dotierung in den Topfboden durchgetunnelten Elektronen mit "spiegelbildlichem" Gefälle wieder ausgeglichen, was über die Beziehung

$$V_D(z) = \begin{cases} 0 & ; z < \frac{d}{2} \\ -\frac{e^2}{\epsilon_0 \epsilon_S} n_D(z - \frac{d}{2}) & ; z \geq \frac{d}{2} \end{cases} \quad (4.3)$$

für das Dotierungspotential eingeht.

## 4.2 Hartree-Grundzustand

Die Gleichung für die Einteilchenwellenfunktionen ist identisch mit (4.1), jedoch ist sie im Hartree-Fall selbstkonsistent zu lösen, wobei in jedem Iterationsschritt der durch elektrostatische Colom-Wechselwirkung verursachte Anteil  $V_D$  am Potential aus der Poisson-Gleichung

$$\frac{d^2}{dz^2} V_D(z) = -\frac{e^2}{\epsilon_0 \epsilon_S} N_D(z) \quad (4.4)$$

neu bestimmt wird. Hierbei bezeichnet

$$N_D(z) = 2\pi \sum_n \int_0^{k_F} dk k f_{n,k}^{(0)} \varphi_n^*(z) \varphi_n(z)$$

die ortsabhängige Elektronenkonzentration mit der Dichtematrix der Einteilchen-Zustände

$$f_{n,\mathbf{k}}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_s \langle c_{n,\mathbf{k},s}^\dagger c_{n,\mathbf{k},s} \rangle |_{t=-\infty} = \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_{n,\mathbf{k}} - \mu)}} \equiv f_{n,\mathbf{k}}^{(0)}. \quad (4.5)$$

Sie stellt die Fermi-Verteilung der Elektronen in den Subbändern dar, über die die Temperatur  $T$  in die Berechnung eingeht ( $\beta = (k_B T)^{-1}$  mit der Boltzmann-Konstante  $k_B$ ).  $\mu$  ist das chemische Potential, das aus der Gleichung

$$\sum_{n,\mathbf{k}} \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_{n,\mathbf{k}} - \mu)}} = n_D \quad (4.6)$$

bestimmt werden kann. Das selbstkonsistente Potential  $V_D$  nennen wir hier auch *Hartree-Term* der statischen Gleichung.

### 4.3 Hartree-Fock-Grundzustand

Die Coulomb-Austauschwechselwirkung [26] wird in die Gleichung integriert: die Lösung von

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n^*} - \frac{\hbar^2}{2m_n^*} \frac{d^2}{dz^2} + V_W(z) + V_D(z) \right] \varphi_n(z) \\ & - \frac{e^2}{2A\epsilon_0\epsilon_S} \sum_{n',\mathbf{q}} \int dz' \varphi_{n'}^*(z') \varphi_n(z') \frac{e^{-q|z-z'|}}{q} f_{n',\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{(0)} \varphi_{n'}(z) \\ & = \epsilon_{n,\mathbf{k}} \varphi_n(z) \end{aligned} \quad (4.7)$$

(statische HF-Gleichung; [39]) ist zu berechnen. Die Gleichung (4.7) wird wie im vorhergehenden Hartree-Fall selbstkonsistent gelöst. In dem *Fock-Term* in der zweiten Zeile bezeichnet  $f_{n,\mathbf{k}}^{(0)}$  die Einteilchen-Dichtematrix.

Während es sich im Hartree-Fall beim Vielteilchenzustand um ein Produkt der Einteilchenwellenfunktionen handelt, stellt er bei der Hartree-Fock-Näherung die Slater-Determinante dar, welche die Antisymmetrie der Vielteilchenwellenfunktion berücksichtigt [26].

### 4.4 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Grundzustand

Die  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Theorie wurde ursprünglich von Kane entwickelt, um die Bandstruktur von InSb zu berechnen [40]. Yang et al. haben in [8] ein Multiband- $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Modell vorgestellt, welches die Interband-Kopplungs-Effekte und die daraus resultierende Nichtparabolizität der Leitungsbänder in Quantentopfstrukturen im Gegensatz zum reinen Leitungsband-Quantentopf-Modell (4.1) berücksichtigt.

Im folgenden betrachten wir ein Gitterpotential  $V(\mathbf{r})$  mit der Translationsinvarianz

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \quad (4.8)$$

( $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ ). Bei der Gesamtwellenfunktion im 8-Band-Schema eines Quantentopfes handelt es sich um die Überlagerung

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^8 \psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^8 \varphi_{n,\mathbf{k}}(z) e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}} u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (4.9)$$

wobei die  $u_{n,\mathbf{k}}$  die gitterperiodischen Anteile der Bloch-Basisfunktionen sind, die sich auf atomarer Skala rasch ändern, wohingegen die  $\varphi_{n,\mathbf{k}}$  die räumlich langsam veränderlichen Anteile darstellen, d.h. die in Größenordnung der einzelnen Schichten der Halbleiter-Heterostruktur variierenden Wellenfunktionen.  $\mathbf{k}$  ist der zweidimensionale Wellenvektor (in der Ebene entlang der Schichten),  $\rho$  der  $xy$ -Anteil des Ortsvektors  $\mathbf{r}$ . Für die Bloch-Wellenfunktionen  $u_{n,\mathbf{k}}$  gilt das Bloch-Theorem

$$u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}), \quad (4.10)$$

d.h.  $u_{n,\mathbf{k}}$  sind invariant gegen Translationen um den Gitter-Vektor  $\mathbf{R}$ . Von der Schrödinger-Gleichung [41]

$$\left\{ \frac{p^2}{2m_0} + V(\mathbf{r}) + \frac{1}{4m_0^2c^2} [\nabla V(\mathbf{r}) \times \mathbf{p}] \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\} \psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{n,\mathbf{k}} \psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (4.11)$$

gelangt man zu einer Eigenwertgleichung für den gitterperiodischen Anteil (wobei  $\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla_r$  in Ortsdarstellung). Der Term proportional zu  $[\nabla V(\mathbf{r}) \times \mathbf{p}] \cdot \boldsymbol{\sigma}$  ist die *Spin-Bahn-Kopplung*, mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$ . Der Ortsvektor  $\mathbf{r} = (\rho, z)^T$  besteht aus der 2D-Komponente  $\rho$  entlang der Halbleiterschichten und der  $z$ -Koordinate senkrecht zu den Schichten.

In (4.11) ergibt sich für den kinetischen-Energie-Operator in Ortsdarstellung

$$\begin{aligned} & \left( \Delta_\rho + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \\ &= e^{i\mathbf{k}\cdot\rho} \left[ \varphi_{n,\mathbf{k}}(z) (\Delta_\rho + 2i\mathbf{k} \cdot \nabla_\rho - k^2) u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi_{n,\mathbf{k}}(z) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \varphi_{n,\mathbf{k}}(z) \frac{\partial}{\partial z} u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Da die  $\varphi_{n,\mathbf{k}}(z)$  sich räumlich gegenüber den  $u_{n,\mathbf{k}}$  sehr langsam verändern, kann man sie als nahezu konstant annehmen und ihre Ableitungen in (4.12) vernachlässigen.

Die zyklische Vertauschbarkeit des Spat-Produkts liefert für die Spin-Bahn-Kopplung

$$[\nabla V(\mathbf{r}) \times \mathbf{p}] \cdot \boldsymbol{\sigma} = [\boldsymbol{\sigma} \times \nabla V(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{p}. \quad (4.13)$$

Mit obiger Annahme folgt

$$\mathbf{p} \psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \approx \varphi_{n,\mathbf{k}}(z) e^{i\mathbf{k}\cdot\rho} (\hbar\mathbf{k} + \mathbf{p}) u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}). \quad (4.14)$$

Einsetzen in (4.11) führt schließlich zur  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ -Gleichung

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{p^2}{2m_0} + V(\mathbf{r}) + \frac{\hbar}{m_0} \mathbf{k} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{4m_0^2c^2} [\nabla V(\mathbf{r}) \times (\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k})] \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \\ &= \left( \varepsilon_{n,\mathbf{k}} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \right) u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \equiv \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (4.15)$$

welche störungstheoretisch behandelt wird [40, 42, 43]. Der Summand proportional zu  $\nabla V(\mathbf{r}) \times \mathbf{p}$  ist der  $\mathbf{k}$ -unabhängige Anteil der Spin-Orbit-Wechselwirkung. Der  $\mathbf{k}$ -abhängige Anteil, d.h. der Term mit  $\nabla V(\mathbf{r}) \times \hbar\mathbf{k}$  ist vernachlässigbar [40].

Die gitterperiodischen Funktionen  $u_{n,\mathbf{k}}$  werden als Eigenfunktionen der Drehimpulsoperatoren  $\mathbf{J}$  und  $J_z$  dargestellt. Zunächst betrachten wir (4.15) bei  $\mathbf{k} = 0$ . Seien  $u_n \equiv u_{n,\mathbf{k}=0}$  Lösungen der ungestörten Schrödingergleichung

$$\left\{ \frac{p^2}{2m_0} + V(\mathbf{r}) + \frac{1}{4m_0^2c^2} [\nabla V(\mathbf{r}) \times \mathbf{p}] \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\} u_n(\mathbf{r}) = \varepsilon_n u_n(\mathbf{r}), \quad (4.16)$$

die entsprechenden Energien sind  $\varepsilon_n \equiv \varepsilon_{n,\mathbf{k}=0}$ . Die  $u_n$  haben die Form

$$u_n = |j, j_z\rangle \quad (4.17)$$

und sind Linearkombinationen der zweifach Spin-entarteten Bandkanten-Blochfunktionen (in Drehimpuls-Schreibweise  $|l, m_l\rangle$ )

$$\begin{aligned} |S\rangle &= |0, 0\rangle, \\ |X\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, -1\rangle + |1, 1\rangle) \\ |Y\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}} (|1, -1\rangle - |1, 1\rangle) \\ |Z\rangle &= |1, 0\rangle. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Der Buchstabe  $S$  der  $|S\rangle$ -Wellenfunktion lehnt sich an die  $s$ -Wellenfunktion des H-Atoms an und der entsprechend zweifach Spin-entartete Zustand hat dieselben Symmetrieeigenschaften wie die korrespondierende Wasserstoff- $s$ -Funktion. Die Valenzband-Zustände  $|X\rangle$ ,  $|Y\rangle$  und  $|Z\rangle$  sind ebenfalls äquivalent zu den  $p$ -Wellenfunktionen des H-Atoms.

Die Lösungen von (4.15) sind Linearkombinationen von  $|S\rangle$  bis  $|Z\rangle$  aus (4.18) [8, 40, 44, 45]. Es ergeben sich folgende Ausdrücke für die  $u_n$ , wobei als mittlerer Term die Gesamtdrehimpuls-Darstellung  $|j, j_z\rangle$  mit Index für Leitungs- ( $C$ ) und Valenzband ( $V$ ) und rechts die Zerlegungen in die Bandkanten-Blochfunktionen aufgelistet wird:

$$\begin{aligned} u_1 &= |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_C = |S \uparrow\rangle \\ u_2 &= |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_C = |S \downarrow\rangle \\ u_3 &= |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle_V = \sqrt{\frac{2}{3}}|Z \uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|X + iY \downarrow\rangle \\ u_4 &= |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_V = \sqrt{\frac{2}{3}}|Z \downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|X - iY \uparrow\rangle \\ u_5 &= |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle_V = \frac{1}{\sqrt{2}}|X + iY \uparrow\rangle \\ u_6 &= |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle_V = \frac{1}{\sqrt{2}}|X - iY \downarrow\rangle \\ u_7 &= |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_V = \frac{1}{\sqrt{3}}|Z \uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|X + iY \downarrow\rangle \\ u_8 &= |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_V = \frac{1}{\sqrt{3}}|Z \downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|X - iY \uparrow\rangle \end{aligned} \quad (4.19)$$

$u_{1,2}$  beziehen sich auf die Leitungs-Subbänder,  $u_{3,4}$  auf das Leicht-Loch- und  $u_{5,6}$  auf das Schwer-Loch-Valenzband sowie  $u_{7,8}$  auf die Spin-Bahn-Aufspaltung des Valenzbandes. Nun faßt man

$H_1 \equiv \frac{\hbar}{m_0} \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  als Störterm auf und gelangt in entarteter Störrechnung zu dem linearen Gleichungssystem

$$\sum_{n=1}^8 \langle u_m | H_1 - (\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{n,\mathbf{k}}) \delta_{m,n} | u_n \rangle \varphi_{n,\mathbf{k}} = 0 \quad (4.20)$$

( $1 \leq m \leq 8$ ). Die zugehörige Matrix kann man im Detail in [8] finden.  $H_1$  besitzt in Bezug auf  $p_z = -i\hbar\partial/\partial z$  Operatoreigenschaft.

Aus dem  $8 \times 8$ -Gleichungssystem (4.20) resultiert eine Abhängigkeit der Wellenfunktionen untereinander:  $\varphi_3$  bis  $\varphi_8$  lassen sich als Linearkombinationen von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  darstellen. Somit kann man die Spin-up- und Spin-down-Zustände unabhängig voneinander behandeln und hat im Endeffekt nur noch Differentialgleichungen zweiter Ordnung in  $z$  für die Wellenfunktionen  $\varphi_{1,2}$ .

Zunächst definiert man eine ortsabhängige effektive Masse [9]:

$$\frac{1}{m_{n,\mathbf{k}}^*(z)} \equiv \frac{\varepsilon_p}{3m_0} \left[ \frac{2}{\varepsilon_{n,\mathbf{k}} + \delta_{VB}(z)} + \frac{1}{\varepsilon_{n,\mathbf{k}} + \Delta_{SO}(z) + \delta_{VB}(z)} \right], \quad (4.21)$$

wobei  $\varepsilon_p$  die Kane-Energie,  $\delta_{VB}$  der Valenz-Band-Offset und  $\Delta_{SO}$  die Spin-Bahn-Aufspaltungs-Energie ist. Die zu lösende  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Eigenwertgleichung lautet dann

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_{n,\mathbf{k}}^*(z)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\hbar^2}{2m_{n,\mathbf{k}}^*(z)} k^2 + \varepsilon_g(z) - \delta_{VB}(z) \right] \varphi_{n,\mathbf{k}}(z) = \varepsilon_{n,\mathbf{k}} \varphi_{n,\mathbf{k}}(z) \quad (4.22)$$

mit der Bandlücke  $\varepsilon_g$ . Gleichung (4.22) wird selbstkonsistent gelöst, da zwischen  $m_{n,\mathbf{k}}^*$  und  $\varepsilon_{n,\mathbf{k}}$  eine wechselseitige Abhängigkeit besteht.

# Kapitel 5

## Zwei-Niveau-Modell: Anregung mit Rechteckpulsen

### 5.1 Optische Bloch-Gleichung

Um die numerischen Resultate verständlicher zu machen, beschäftigen wir uns mit dem Zwei-Niveau-Modell. Insbesondere betrachten wir in diesem Kapitel die Reaktion eines Ensembles von Zwei-Niveau-Systemen auf eine Zwei-Puls-Anregung. Wie wir noch sehen werden, kann man dadurch einige Eigenschaften der Lösungen der zeitabhängigen HF-Gleichungen (siehe Kapitel 7) sehr gut nachvollziehen.

#### 5.1.1 Herleitung der Vektorgleichung

Unter Vernachlässigung der Coulomb-Wechselwirkung erhält man aus den Kommutatoren (3.25) und (3.26) den Spezialfall der Bewegungsgleichung für wechselwirkungsfreie Ladungsträger (*FC-Fall*, engl. *FC = Free Carriers*). Diese entkoppeln vollständig in bezug auf  $\mathbf{k}$ , d.h. das System besteht aus einem Ensemble aus voneinander unabhängigen *Zwei-Niveau-Systemen*. Man läßt den  $\mathbf{k}$ -Index weg und erhält die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_{n_1 n_2} &= \frac{1}{i\hbar} \sum_{n_3, n_4} (\varepsilon_{n_2 n_4} \delta_{n_1 n_3} - \varepsilon_{n_3 n_1} \delta_{n_2 n_4}) f_{n_3 n_4} \\ &\quad - \frac{1}{i\hbar} \sum_{n_3} E(t) (M_{n_2 n_3} f_{n_1 n_3} - M_{n_3 n_1} f_{n_3 n_2}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

mit den Energietermen

$$\varepsilon_{n_1 n_2} = \varepsilon_{n_1} \delta_{n_1 n_2}. \quad (5.2)$$

Gleichung (5.1) läßt sich formal umschreiben zu einer Rotation eines Vektors  $\mathbf{s}$  um eine Drehachse  $\boldsymbol{\Omega}$  und man erhält eine in der Kernspinresonanz schon lange bekannte Gleichungsstruktur, die *optische Bloch-Gleichung*,

$$\dot{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{s} \quad (5.3)$$

mit dem Rotationsvektor

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} -\kappa E(t) \\ 0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

und dem Pseudospinvektor

$$\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Die Kopplungskonstante  $\kappa$  ist proportional zum Dipolmatrixelement  $M_{12}$  gemäß

$$\kappa \equiv \frac{2M_{12}}{\hbar} \quad (5.6)$$

und

$$\omega_0 \equiv \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\hbar} \quad (5.7)$$

ist die zeitlich konstante Resonanzfrequenz proportional zur Differenz aus den Topfenergien. Die Pseudospinvariablen sind durch

$$s_1 \equiv f_{12} + f_{21} \quad (5.8a)$$

$$s_2 \equiv i(f_{12} - f_{21}) \quad (5.8b)$$

$$s_3 \equiv f_{22} - f_{11}. \quad (5.8c)$$

definiert. Die optische Bloch-Gleichung beschreibt ein einzelnes Zwei-Niveau-System. Die Bedeutung von  $s_1$  erschließt sich, wenn man die Beziehung zwischen Polarisation und Dichtematrixelementen, Gleichung (3.21),

$$p(t) = \sum_{n_1, n_2, \mathbf{k}} f_{n_1 n_2, \mathbf{k}} M_{n_1 n_2} \quad (5.9)$$

für ein einzelnes Zwei-Niveau-System betrachtet:

$$P(t) = M_{12} s_1(t). \quad (5.10)$$

Somit beschreibt  $s_1$  die Polarisation,  $s_2$  die Differenz zwischen den Kohärenzen und  $s_3$  die Inversion. Den gesamten Vektor  $\mathbf{s}$  nennt man *Bloch-Vektor*.

Ferner gelte für negative unendliche Zeiten

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f_{11} = 1, \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} f_{22} = \lim_{t \rightarrow -\infty} f_{12} = \lim_{t \rightarrow -\infty} f_{21} = 0, \quad (5.11)$$

d.h., vor der Einwirkung des Lichtfeldes ist nur der Grundzustand besetzt.

Mit (5.3) haben wir jetzt die Form der Gleichung vorliegen, die den Betrachtungen zum Photonenecho in [46] zugrundeliegt. Der darin beschriebene Weg soll im folgenden kurz skizziert werden.

Aus der Differentialgleichung (5.3) läßt sich direkt die Konstanz der Länge des Vektors  $\mathbf{s}$  herleiten. Sie beschreibt die Präzession von  $\mathbf{s}$  um den sich in der Zeit veränderlichen Vektor  $\mathbf{\Omega}$ . Das Lichtfeld liege in der Form

$$E(t) = 2E_1(t) \cos(\omega t) \quad (5.12)$$

vor. Als nächster Schritt wird die Rotating-Wave-Näherung durchgeführt, die in Abschnitt B.2.1 erläutert ist. Nach der Transformation (B.15),

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

lautet die optische Bloch-Gleichung in RWA für den normierten Vektor  $(u, v, w)^T$ :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{\Omega} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

mit dem vereinfachten Rotationsvektor

$$\mathbf{\Omega}(t) \equiv \begin{pmatrix} -\kappa E_1(t) \\ 0 \\ \omega_0 - \omega \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Wegen (5.10) (und der Transformation (B.15)) erhält man nun für die Polarisation

$$P(t; \Delta\omega) = M_{12} \operatorname{Re} \{ [u(t; \Delta\omega) + i v(t; \Delta\omega)] e^{i\omega t} \} \quad (5.15)$$

mit der *Verstimmung*  $\Delta\omega \equiv \omega_0 - \omega$ . Die makroskopische Polarisationsdichte lautet dann

$$p(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega') g(\Delta\omega') P(t; \Delta\omega'), \quad (5.16)$$

wobei  $g(\Delta\omega')$  eine Gewichtsfunktion mit der Normierung

$$\int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega') g(\Delta\omega') = 1 \quad (5.17)$$

ist. Diese kann die Inhomogenität der Bandlücken in einem Vielfach-Quantentopf oder die Verteilung der HF-Energien verkörpern. Über sie wird in dieses einfache Modell die Phasenrelaxation eingebaut.

### 5.1.2 Rabi-Lösung

Bei der Rabi-Lösung wird eine weitere Näherung eingeführt: man nimmt einen Rechteckpuls  $E_1(t) = \text{const} \equiv E_1^0$  an. Der Einfachheit halber transformiert man Bewegungsgleichung (5.13) in ein neues Koordinatensystem mit der x-Achse in Richtung des  $\Omega$ -Vektors. Der neue Vektor lautet

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \chi & 0 & -\sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \chi & 0 & \cos \chi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

wobei der Winkel zwischen der  $(-x)$ -Achse und  $\Omega$  durch

$$\tan \chi = \frac{\omega_0 - \omega}{\kappa E_1^0} \quad (5.19)$$

definiert ist. Diese Drehung hat eine einfache Form, weil der  $\Omega$ -Vektor sich in der  $xz$ -Ebene befindet. Somit gelangen wir im neuen Koordinatensystem zu der Vektorgleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_R \\ 0 & -\Omega_R & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

mit der *Rabi-Frequenz*

$$\Omega_R \equiv \sqrt{(\Delta\omega)^2 + (\kappa E_1^0)^2}, \quad (5.21)$$

die die Präzession von  $(u', v', w')^T$  um  $\Omega$  beschreibt. Sie ist abhängig von der Verstimmung (engl. *Detuning*)

$$\Delta\omega \equiv \omega_0 - \omega \quad (5.22)$$

und der Feldamplitude  $E_1^0$ .

Lösung von (5.20) ist

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Omega_R t) & \sin(\Omega_R t) \\ 0 & -\sin(\Omega_R t) & \cos(\Omega_R t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

wobei die Konstanten  $u_0$ ,  $v_0$  und  $w_0$  die entsprechenden Pseudospinvariablen zum Zeitpunkt  $t = 0$  darstellen. Geht man zurück ins Koordinatensystem von  $(u, v, w)^T$ , erhält man schließlich durch Rücktransformation die Lösung

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta\omega^2 \cos(\Omega_R t) + (\kappa E_1^0)^2}{\Omega_R^2} & -\frac{\Delta\omega}{\Omega_R} \sin(\Omega_R t) & -\frac{\Delta\omega \kappa E_1^0}{\Omega_R^2} [1 - \cos(\Omega_R t)] \\ \frac{\Delta\omega}{\Omega_R} \sin(\Omega_R t) & \cos(\Omega_R t) & \frac{\kappa E_1^0}{\Omega_R} \sin(\Omega_R t) \\ -\frac{\Delta\omega \kappa E_1^0}{\Omega_R^2} [1 - \cos(\Omega_R t)] & -\frac{\kappa E_1^0}{\Omega_R} \sin(\Omega_R t) & \frac{\Delta\omega^2 + (\kappa E_1^0)^2 \cos(\Omega_R t)}{\Omega_R^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Aus den Anfangsbedingungen (5.11) und der aus Vektorgleichung (B.16) (Anhang) resultierenden Längenkonstanz folgt

$$|u|^2 + |v|^2 + |w|^2 = 1 \quad (5.25)$$

für alle Zeiten  $t$ .

## 5.2 Zwei-Puls-Anregung und Photonenecho

Nun betrachten wir die Anregung mit zwei Rechteckpulsen zwischen den Zeiten 0 und  $t_1$  sowie  $t_2$  und  $t_3$  mit Pulsflächen von  $\pi/2$  und  $\pi$ . Die Anregungspulse haben dieselbe Richtung, jedoch zeigen die im folgenden aufgeführten einfachen Rechnungen grundlegende Eigenschaften, die auch bei den dynamischen Gleichungen unter Einbeziehung der Coulomb-Wechselwirkung auftreten – unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Laserstrahlen aus unterschiedlichen Richtungen auf die Probe treffen.

Am Anfang befinde sich das System im Grundzustand. Aus der Anfangsbedingung (5.11) und Definition (5.8) folgt  $u_0 = v_0 = 0$  und  $w_0 = -1$ . Unter Annahme einer kleinen Verstimmung sei die Amplitude  $E_1^0$  derart groß, daß

$$\kappa E_1^0 \gg \Delta\omega \quad (5.26)$$

gelte. Die  $u$ - und  $v$ -Komponenten des Blochvektors lauten nach sukzessiver Transformation (5.24)

$$\begin{aligned} u(t) &= -\sin\{\Delta\omega[(t-t_3)-t_{12}]\} + \frac{\Delta\omega}{\kappa E_1^0} \cos\{\Delta\omega[(t-t_3)-t_{12}]\}, \\ v(t) &= \cos\{\Delta\omega[(t-t_3)-t_{12}]\} + \frac{\Delta\omega}{\kappa E_1^0} \sin\{\Delta\omega[(t-t_3)-t_{12}]\}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

für Zeiten  $t > t_3$ . Die Differenz  $t_{12} \equiv t_2 - t_1$  ist die Verzögerung zwischen beiden Pulsen. Damit erhält man als Zwischenresultat die Näherung

$$u + iv \approx i e^{i\Delta\omega[(t-t_3)-t_{12}+s]} \quad (5.28)$$

mit dem zusätzlichen Zeitparameter

$$s = -\frac{1}{\kappa E_1^0}. \quad (5.29)$$

Bei der Anwendung von Gl. (5.15) für die von der Verstimmung abhängige Polarisation werden  $\Delta\omega \equiv \omega_0 - \omega$  und  $\omega$  entkoppelt, was für die Auswertung des folgenden Intergrals eine Rolle spielen wird (es ist in dieser Hinsicht sinnvoll, daß wir uns nur für ein einziges mitrotierendes Bezugssystem entscheiden, das sich mit der Frequenz  $\omega$  dreht). Wir betrachten die makroskopische Polarisationsdichte (5.16) mit der Gauß'schen Gewichtsfunktion

$$g(\Delta\omega') = \frac{T_2^*}{\pi} e^{-\frac{T_2^{*2}}{\pi}(\Delta\omega - \Delta\omega')^2}, \quad (5.30)$$

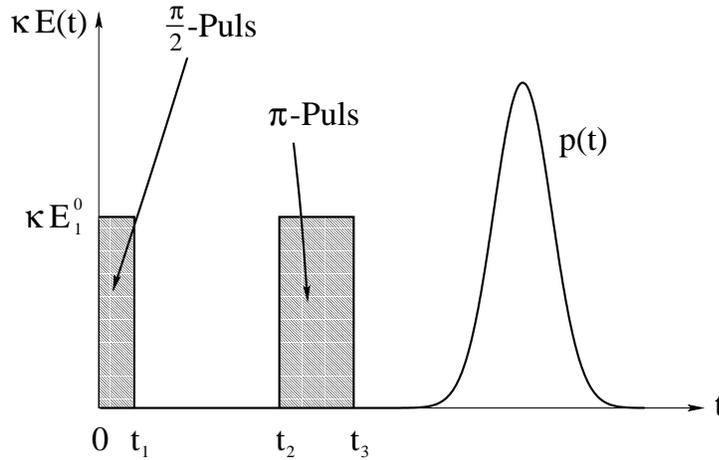
was in Festkörpersystemen bei niedrigen Temperaturen in guter Näherung gerechtfertigt ist. Diese von der Verstimmung abhängige Funktion drückt die Inhomogenität des Ensembles aus Zwei-Niveau-Systemen aus, mit der zugehörigen inhomogenen Zerfallszeit  $T_2^*$ . Dabei modelliert  $g(\Delta\omega')$  den von den entsprechenden Resonanzenergien abhängigen Zerfall der makroskopischen Polarisation durch destruktive Interferenz. Ihr Maximum liegt bei der Verstimmung  $\Delta\omega$ . Für die makroskopische Polarisationsstrahlung als Antwort vom System auf die beiden Anregungspulse erhalten wir schließlich aus (5.16) für  $t > t_3$  die Relation

$$p(t) \propto \sin\{\omega t + \Delta\omega[(t - t_3) - t_{12} + s]\} e^{-\frac{\pi}{4T_2^*}[(t-t_3)-t_{12}+s]^2}. \quad (5.31)$$

Die gaußförmige Amplitude dieses Signals wird ungefähr zur Zeit

$$t - t_3 \approx t_{12} - \frac{2}{\pi}t_1 \quad (5.32)$$

maximal (wegen  $s \approx 1/\Omega_R$  und  $\Omega_R t_1 = \pi/2$ ), d.h. die Polarisation macht sich am stärksten zu dem Zeitpunkt bemerkbar, der das Doppelte des Delays  $t_{12}$  zwischen den beiden Anregungspulsen markiert. Bei diesem Phänomen handelt es sich um das *Photonenecho*.



**Abbildung 5.1:** Skizze der Zweipuls-Anregung mit folgendem Echosignal (der freie Induktionszerfall im Anschluß an der ersten Puls wurde hier nicht berücksichtigt,  $p(t)$  ist nur für Zeiten  $t > t_3$  dargestellt)

Der erste Puls regt Übergänge in einem Ensemble von Zwei-Niveau-Systemen an. Dabei entstehen Polarisationen, die mit von den Abständen der Niveaus abhängigen Frequenzen schwingen (in Abb. 5.1 nicht eingezeichnet). Man kann sich das so vorstellen, daß die verschiedenen Polarisationen der einzelnen Zwei-Niveau-Systeme, die beim ersten Signal noch in die gleiche Richtung zeigen, mit unterschiedlichen Rotationsgeschwindigkeiten auseinanderlaufen und ihre Wirkung allmählich durch destruktive Interferenz gegenseitig eliminieren. Es liegt also ein Zerfall der makroskopischen Polarisation aufgrund der Inhomogenität des betrachteten Systems

vor. Man spricht auch von inhomogener Dephasierung bzw. Phasenrelaxation.

Der zweite Puls kehrt dieses Auseinanderlaufen nun um, er stößt eine “Rückwärtsbewegung” an: die Polarisationsvektoren laufen mit den bis aufs Vorzeichen gleichen Geschwindigkeiten in die entgegengesetzte Richtung, um sich nach der gleichen Zeitdifferenz, wie sie zwischen den beiden anregenden Pulsen lag, ein zweites Mal derart zu überlagern, daß ein makroskopisch sichtbares “Echo-Signal” entsteht.

Damit stellt das Photonenecho einen Ensemble-Effekt dar, wobei die Energieniveaus der Teilchen einer inhomogenen Verteilung genügen sollten, d.h. die Resonanzen der beteiligten Zwei-Niveau-Systeme unterscheiden sich voneinander.

Dies ist beispielsweise bei den Gleichungen ohne Wechselwirkung (FC-Fall) bzw. unter Einbeziehung der Hartree-Terme nicht der Fall, da die Berechnungen aufgrund der Massengleichheit und der parabolischen Dispersionsrelation einen konstanten Subbandabstand beinhalten. Die wesentliche Voraussetzung für die Entstehung von Photonenechos in Einfach-Quantentöpfen ist erst dann gegeben, wenn die Coulomb-Austauschwechselwirkung einbezogen wird oder wenn man etwa einen  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Grundzustand betrachtet. In beiden Fällen liegt eine  $\mathbf{k}$ -abhängige Inhomogenität in den Resonanzenergien der einzelnen Oszillatoren vor.

Das Photonenecho wurde zuerst als Spinecho-Effekt bei präzessierenden Spins in einem starken statischen Magnetfeld entdeckt, wobei die Spins zusätzlich noch intensiven elektromagnetischen Wellen im Radiofrequenzbereich ausgesetzt waren [47]. In GaAs/AlGaAs-Multiquantentopfstrukturen wurden Photonenechos zweidimensionaler Exzitonen gefunden, wobei das Exziton als Zwei-Niveau-System interpretiert wurde [48]. Becker et al. berichteten erstmals von Photonenechos bei Interband-Übergängen in Bulk-GaAs [49].

Das Photonenecho tritt zusammen mit *freiem Induktionszerfall* auf, auf den wir in Abschnitt 6.5.1 zu sprechen kommen. Er ist im Rahmen eines homogenen Modells erklärbar, d.h. die optische Bloch-Gleichung (5.3) ist um einen Term  $1/T_2 \cdot (u, v, 0)^T$  zu erweitern, was die Lösung dieser Modellgleichung aber erschwert. Zum anderen betrachten wir beim Vierwellenmischen ausgehende Signale nicht in den Richtungen der Pulse, und diese Signale kommen nur dann zustande, wenn an der Anregung sowohl der Puls aus  $\mathbf{k}_1$ -Richtung als auch derjenige aus  $\mathbf{k}_2$ -Richtung beteiligt sind. Die optische Blochgleichung weist jedoch schon bei Ein-Puls-Anregung Induktionszerfall auf.



# Kapitel 6

## Zwei-Niveau-Modell: Absorption und Vierwellenmischen

Im Unterschied zu Kapitel 5 betrachten wir in den folgenden Abschnitten den Fall, daß die Anregung mit zwei Pulsen aus unterschiedlichen Richtungen erfolgt. Insbesondere wird die zeitintegrierte Polarisation als Antwort auf eine Anregung mit  $\delta$ -Pulsen untersucht.

### 6.1 Grundzustand

Als Eigenfunktionen verwenden wir die beiden energetisch niederwertigsten Lösungen des Topfproblems der Breite  $d$  mit unendlich hohen Wänden,

$$\varphi_n(z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{d}} \sin\left(\frac{n\pi}{d}z\right) & ; \quad 0 \leq z < d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.1)$$

mit der Dispersionrelation

$$\varepsilon_n^{(0)} = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m_z} \quad , \quad k_n = \frac{n\pi}{d} \quad (n \in \{1, 2\}). \quad (6.2)$$

Der Feldoperator lautet somit

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{A}} [c_1 \varphi_1(z) + c_2 \varphi_2(z)] \quad (6.3)$$

mit den Vernichtern  $c_{1,2}$  und der Normierungsfläche  $A$ .

### 6.2 Bewegungsgleichung

Beim Zwei-Niveau-Modell hat man ein System aus gekoppelten Gleichungen gedämpfter harmonischer Oszillatoren mit äußerer Erregung (durch das  $E$ -Feld) vorliegen. Nach der Zerlegung der Dichtematrix in einen zeitunabhängigen und einen dynamischen Anteil,

$$f_{n_1 n_2, \mathbf{k}}(t) = f_{n_1, \mathbf{k}}^{(0)} \delta_{n_1 n_2} + \delta f_{n_1 n_2, \mathbf{k}}(t). \quad (6.4)$$

lautet (5.1)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\delta f_{n_1 n_2} &= i\Omega_{n_1 n_2}\delta f_{n_1 n_2} \\
&+ \frac{i}{\hbar}M_{n_2 n_1}\Delta f_{n_1 n_2}^{(0)}E(t) \\
&+ \frac{i}{\hbar}E(t)\sum_{n_3}(M_{n_2 n_3}\delta f_{n_1 n_3} - M_{n_3 n_1}\delta f_{n_3 n_2}).
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Eine Energie-Renormierung kann hier als Verschiebung der Bandlücke berücksichtigt werden. Die komplexe Frequenz

$$\Omega_{n_1 n_2} \equiv \frac{\varepsilon_{n_1}^{(0)} - \varepsilon_{n_2}^{(0)}}{\hbar} + i\frac{1 - \delta_{n_1 n_2}}{T_2}, \tag{6.6}$$

beinhaltet sowohl die Resonanz als auch die Phasenrelaxationszeit  $T_2$  und

$$\Delta f_{n_1 n_2}^{(0)} \equiv f_{n_1}^{(0)} - f_{n_2}^{(0)} \tag{6.7}$$

die Differenz zwischen den Fermi-Verteilungen zu Beginn der Dynamik, Außerdem sind die  $M_{n_1 n_2}$  die Dipolmatrixelemente und  $E(t)$  parametrisiert die eingehenden Laserpulse.

### 6.3 Entwicklung nach Amplituden des Lichtfeldes

Nun unterwirft man die Differentialgleichung (6.5) der Fouriertransformation in bezug auf die Zeit und erhält

$$\begin{aligned}
\hbar(\eta - \Omega_{n_1 n_2})\delta\tilde{f}_{n_1 n_2}(\eta) &= M_{n_2 n_1}\Delta f_{n_1 n_2}^{(0)}\tilde{E}(\eta) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\sum_{n_3}\left[M_{n_2 n_3}\delta\tilde{f}_{n_1 n_3}(\xi) - M_{n_3 n_1}\delta\tilde{f}_{n_3 n_2}(\xi)\right]\tilde{E}(\eta - \xi).
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Die Vorgehensweise zur näherungsweisen Lösung dieser Gleichung ist im Abschnitt B.1 skizziert, wobei die Richtungsabhängigkeit der  $E$ -Felder gemäß (3.16) berücksichtigt wird.

Für die ungeraden Indizes mit  $\lambda = 1$  und  $\nu = -3, -1, 1, 3$  (Richtungen  $2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ ,  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  und  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ ) gelangt man zu dem Ausdruck

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{f}_{n_1 n_2}^{(\lambda, \nu)}(\eta) &= \frac{M_{12}\Delta f_{n_1 n_2}^{(0)}}{\hbar A} \frac{1}{\eta - \Omega_{n_1 n_2}} \times \\
&\left\{ \tilde{E}^{(\lambda, \nu)}(\eta) + \frac{M_{12}^2}{\pi\hbar^2 A^2} \int_{-\infty}^{\infty}d\xi \frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^{\infty}d\zeta \left( \frac{1}{\zeta - \Omega_{n_1 n_2}} + \frac{1}{\zeta - \Omega_{n_2 n_1}} \right) \times \right. \\
&\left. \sum_{\substack{\lambda', \nu' \\ \lambda'', \nu''}} \tilde{E}^{(\lambda', \nu')}(\zeta)\tilde{E}^{(\lambda'', \nu'')}(\xi - \zeta)\tilde{E}^{(\lambda - \lambda' - \lambda'', \nu - \nu' - \nu'')}(\eta - \xi) \right\},
\end{aligned} \tag{6.9}$$

der Terme linearer und dritter Ordnung im  $E$ -Feld umfaßt.

Für die geraden Indizes mit  $\lambda = 0$  und  $\nu = -2, 0, 2$  (also die Richtungen  $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ ,  $0$  und  $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ ; siehe Zerlegung (3.17)) erhält man die Relation zweiter Ordnung im  $E$ -Feld,

$$\delta \tilde{f}_{n_1 n_1}^{(\lambda, \nu)}(\eta) = \frac{M_{12}^2 \Delta f_{n_1 n_2}^{(0)}}{\sqrt{2\pi} \hbar^2 A^2} \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left( \frac{1}{\xi - \Omega_{n_1 n_2}} + \frac{1}{\xi - \Omega_{n_2 n_1}} \right) \sum_{\lambda', \nu'} \tilde{E}^{(\lambda', \nu')}(\xi) \tilde{E}^{(\lambda - \lambda', \nu - \nu')}(\eta - \xi), \quad (6.10)$$

wobei auf der rechten Seite  $n_2 = 2 - (n_1 - 1)$  gilt.

Die Kombination von Produkten der beteiligten  $E$ -Felder, die in den Beziehungen (6.9) und (6.10) zugelassen sind, listen die Tabellen B.1 und B.2 im Anhang auf. Der Grad der Ordnung drückt somit die Zahl der an dem Faltungsintegral der Näherungslösung beteiligten  $E$ -Felder aus. Für die Betrachtungen zum Vierwellenmischen wählen wir die Amplituden der Lichtfelder hinreichend gering, so daß Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden können (der Absorptionskoeffizient ist unabhängig von der Amplitude des einen anregenden Strahls, Terme höherer Ordnung fallen weg).

Insgesamt werden also nur die Richtungen

$$(\lambda, \nu) = (1, -3), (0, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (0, 2), (1, 3)$$

berücksichtigt:  $\nu = 0$  für den homogenen Anteil der Verteilungsfunktion,  $\nu = \pm 2$  für das transiente Gitter,  $\nu = \pm 1$  für die Richtungen  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  der eingehenden Laserstrahlen sowie die Richtungen  $\nu = \pm 3$ , also  $2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$  und  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$  der zu messenden Polarisationsstrahlung. Da hiermit  $\nu$  die Richtung eindeutig kennzeichnet, lassen wir den ersten Index  $\lambda$  weg, d.h. z.B. schreiben wir statt  $P^{(\lambda, \nu)}$  lediglich  $P^{(\nu)}$ .

Die Verteilungsfunktionen in den Richtungen  $\nu = \pm 1$  verschwinden nur dann nicht, wenn die Amplitude des Eingangsstrahls in der jeweiligen Richtung ungleich Null ist. In diesen Richtungen wird die Absorption gemessen.

Die Richtungen  $\nu = \pm 3$  der FWM-Signale sind von beiden eingehenden Pulsen abhängig, aber je nach Richtung immer in quadratischer Ordnung vom jeweils räumlich nächsten und in einfacher Ordnung vom anderen Eingangspuls, d.h.  $2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$  geht mit  $E_1^2 E_2$  und  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$  mit  $E_1 E_2^2$ .

## 6.4 Lineare Absorptionsspektren

Um ein lineares Absorptionsspektrum zu bestimmen, schickt man einen möglichst kurzen, d.h. spektral breiten Lichtpuls ins System. Mit einem geeigneten Detektor bestimmt man das Wellenlängen-abhängige Absorptionsverhalten (siehe auch Abschnitt 9).

Wenn das System in  $\mathbf{k}_1$ -Richtung nur mit einem  $\delta$ -Puls angeregt wird, also

$$E_1(t) = E_0 \delta(t), \quad (6.11)$$

lautet die entsprechende Fouriertransformierte

$$\tilde{E}_1(\omega) = \tilde{E}^{(1)}(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}, \quad (6.12)$$

d.h. der Puls umfaßt den gesamten Raum des Spektrums.  
 Beziehung (6.9) vereinfacht sich in diesem Fall zu

$$\delta \tilde{f}_{n_1 n_2}^{(1)}(\eta) = \frac{M_{12} \Delta f_{n_1 n_2}^{(0)}}{\hbar A} \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\eta - \Omega_{n_1 n_2}} \quad (6.13)$$

in  $\mathbf{k}_1$ -Richtung, wobei die Integralterme wegen des fehlenden  $\mathbf{k}_2$ -Strahls wegfallen. Anwendung von Gl. (3.22) liefert die Proportionalitätsrelation

$$P^{(1)}(\omega) \propto E_0 \Delta f_{12}^{(0)} \left( \frac{1}{\omega - \Omega_{12}} - \frac{1}{\omega - \Omega_{21}} \right), \quad (6.14)$$

d.h. die Polarisation für ein einzelnes Zwei-Niveau-System.

Hat man eine Dispersionrelation mit  $\mathbf{k}$ -abhängiger Differenz zwischen den Subbändern vorliegen (d.h. ein Ensemble aus Zwei-Niveau-Systemen mit unterschiedlichen Resonanzen), genügt es, die  $\mathbf{k}$ -Abhängigkeit der  $\Omega$ 's und der Differenz der Fermi-Verteilungen der beiden Subbänder zu beachten, d.h.

$$\Omega_{n_1 n_2} \rightarrow \Omega_{n_1 n_2, \mathbf{k}} = \frac{\varepsilon_{n_1, \mathbf{k}} - \varepsilon_{n_2, \mathbf{k}}}{\hbar} + i \frac{1 - \delta_{n_1 n_2}}{T_2} \quad (6.15)$$

(die  $\varepsilon_{n, \mathbf{k}}$  stellen beispielsweise die HF-Energien dar) sowie

$$\Delta f_{n_1 n_2}^{(0)} \rightarrow \Delta f_{n_1 n_2, \mathbf{k}}^{(0)} = f_{n_1, \mathbf{k}}^{(0)} - f_{n_2, \mathbf{k}}^{(0)} \quad (6.16)$$

(mit den Fermi-Verteilungen vor der Anregung), und die Einzel-Polarisationsterme über alle  $\mathbf{k}$  zu summieren. Mit Beziehung (3.23) erhält man für den Absorptionskoeffizienten schließlich

$$\alpha(\omega) \propto \sum_{\mathbf{k}} (f_{1, \mathbf{k}}^{(0)} - f_{2, \mathbf{k}}^{(0)}) \left[ \frac{1}{\left( \omega - \frac{\varepsilon_{1, \mathbf{k}} - \varepsilon_{2, \mathbf{k}}}{\hbar} \right)^2 + \frac{1}{T_2^2}} - \frac{1}{\left( \omega + \frac{\varepsilon_{1, \mathbf{k}} - \varepsilon_{2, \mathbf{k}}}{\hbar} \right)^2 + \frac{1}{T_2^2}} \right]. \quad (6.17)$$

$\alpha(\omega)$  stellt die lineare Antwort eines wechselwirkungsfreien Systems von Elektronen mit renormierten Subbandenergien (z.B. die  $\varepsilon_{2, \mathbf{k}}^{(0)}$  aus dem HF-Spektrum von (4.7)) auf einen einzelnen  $\delta$ -Puls dar (vgl. [28, 50]).

Der Fock-Term

$$- \sum_{n', \mathbf{q}} \frac{e^2}{2A \varepsilon_0 \varepsilon_S} \int dz' \varphi_{n'}^*(z') \varphi_n(z') \frac{e^{-q|z-z'|}}{q} f_{n', \mathbf{k}+\mathbf{q}}^{(0)} \varphi_{n'}(z) \quad (6.18)$$

in der statischen HF-Gleichung (4.7) ist die Ursache für eine  $\mathbf{k}$ -abhängige Renormierung der Einteilchen-Energien  $\varepsilon_{n, \mathbf{k}}$ . Dies führt zu Deformationen auf der Seite des Spektrums hin zu niedrigeren Energien. Man kann eine Blauverschiebung der Spektren beobachten, die durch die HF-Energie-Renormierung der Subbänder verursacht wird.

## 6.5 Vierwellenmischen mit $\delta$ -Pulsen

Die folgenden Rechnungen folgen im Wesentlichen dem Artikel von Yajima und Taira [38]. Dazu betrachten wir die Anregung des Systems mit zwei  $\delta$ -Pulsen:

$$E_1(t) = E_1^0 \delta(t) \quad , \quad E_2(t) = E_2^0 \delta(t - t_{12}) e^{i\omega t_{12}} \quad (6.19)$$

mit den Amplituden  $E_1^0$ ,  $E_2^0$ , der Verzögerungszeit  $t_{12}$  zwischen den Pulsen und der Anregungsfrequenz  $\omega$ . Allerdings wirkt sich  $\omega$  im Fall des  $\delta$ -Pulses lediglich als Phasenverschiebung zwischen beiden Pulsen aus. Die Fouriertransformierte von (6.9) nach der Zeit in  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ -Richtung lautet nach (B.11)

$$\begin{aligned} \delta f_{n_1 n_2}^{(-3)}(t) = & 2i \left( \frac{M_{12}}{\hbar A} \right)^3 \Delta f_{n_1 n_2}^{(0)} \times \\ & \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \int_{-\infty}^{t''} dt''' e^{i\Omega_{n_1 n_2}(t-t'+t''-t''')} \sum_{\substack{\lambda', \nu' \\ \lambda'', \nu''}} E^{(\lambda', \nu')}(t') E^{(\lambda'', \nu'')}(t'') E^{(1-\lambda'-\lambda'', -3-\nu'-\nu'')}(t'''). \end{aligned} \quad (6.20)$$

### 6.5.1 Freier Induktionszerfall

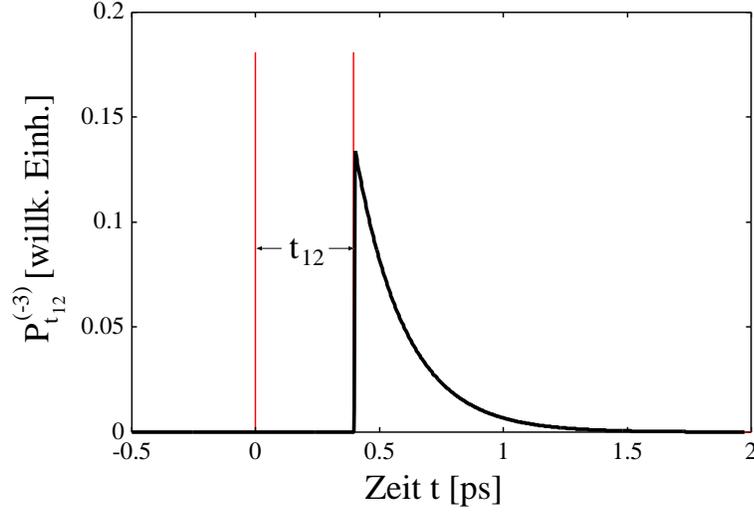
Mit Tabelle B.2 und der Beziehung (5.10) gelangen wir zu dem Ausdruck für die Polarisation in  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ -Richtung,

$$\begin{aligned} P_{t_{12}}^{(-3)}(t; \omega_0) = & 8i\hbar \left( \frac{M_{12}}{\hbar A} \right)^4 \Delta f_{12}^{(0)} E_1^0 E_2^{02} \left\{ \Theta(-t_{12})\Theta(t) e^{-\frac{t}{T_2}} \cos[\omega_0(t - 2t_{12})] \right. \\ & + \Theta(t_{12})\Theta(t - t_{12}) e^{-\frac{t}{T_2}} \cos[\omega_0(t - 2t_{12})] \\ & \left. + \Theta(-t_{12})\Theta(t_{12})\Theta(t) e^{-\frac{t}{T_2}} \cos(\omega_0 t) \right\}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

wobei  $\omega_0 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/\hbar$  die Eigenfrequenz des Zwei-Niveau-Systems ist und  $\omega = \omega_0$  gesetzt wurde.  $\Theta$  bezeichnet die Stufenfunktion.

Dabei drückt  $\Theta(-t_{12})\Theta(t) e^{-\frac{t}{T_2}} \cos[\omega_0(t - 2t_{12})]$  die kohärente Polarisation eines einzelnen Zwei-Niveau-Systems bei negativen Verzögerungszeiten und  $\Theta(t_{12})\Theta(t - t_{12}) e^{-\frac{t}{T_2}} \cos[\omega_0(t - 2t_{12})]$  die Polarisation bei positiven Verzögerungszeiten aus, wobei das Signal immer dem letzten Puls in der Zeit folgt.  $\Theta(-t_{12})\Theta(t_{12})\Theta(t) e^{-\frac{t}{T_2}} \cos(\omega_0 t)$  verstärkt das Signal bei  $t_{12} = 0$ .

Beispielhaft für positive Verzögerungszeiten  $t_{12}$  ist die Polarisation in  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ -Richtung in Abb. 6.1 skizzenhaft dargestellt. Die  $1/T_2$ -Relaxation charakterisiert man als *freien Induktionszerfall*.



**Abbildung 6.1:** Schematische Darstellung der Polarisation in  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ -Richtung nach Anregung mit zwei  $\delta$ -Pulsen im zeitlichen Abstand  $t_{12}=400$  fs bei einer Phasenrelaxationszeit von  $T_2=200$  fs.

## 6.5.2 Zeitintegrierte Polarisation

Betrachten wir im folgenden das Verhalten der *zeitintegrierten Polarisation*: diese ist definiert als Gesamtenergie des FWM-Signals in  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ -Richtung in Abhängigkeit von der Verzögerung  $t_{12}$ :

$$I^{(-3)}(t_{12}) \propto \int_{-\infty}^{\infty} dt |p_{t_{12}}^{(-3)}(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\tilde{p}_{t_{12}}^{(-3)}(\omega)|^2 \quad (6.22)$$

mit der makroskopischen Polarisationsdichte

$$p_{t_{12}}^{(-3)}(t) \equiv \int_0^{\infty} d\omega'_0 g(\omega'_0) P_{t_{12}}^{(-3)}(t; \omega'_0). \quad (6.23)$$

Dabei ist  $g(\omega'_0)$  eine Gauß'sche Verteilungsfunktion, die die verschiedenen Einzeloszillatoren um die Zentralfrequenz  $\omega_0$  gewichtet:

$$g(\omega'_0) = \frac{T_2^*}{\pi} e^{-\frac{T_2^{*2}}{\pi} (\omega'_0 - \omega_0)^2} \quad (6.24)$$

mit der inhomogenen Phasenrelaxationszeit  $T_2^*$  und der Normierung

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'_0 g(\omega'_0) = 1. \quad (6.25)$$

Die Breite der Inhomogenität wird durch den Parameter

$$\delta\omega \equiv \frac{\sqrt{\pi}}{T_2^*} \quad (6.26)$$

ausgedrückt. Nun beschäftigen wir uns mit der Entwicklung der zeitintegrierten Polarisierung in Abhängigkeit von der Verzögerung, wobei wir uns auf positive  $t_{12}$  beschränken:

$$P_{t_{12}}^{(-3)}(t; \omega_0) \propto \Theta(t - t_{12}) e^{-\frac{t}{T_2}} \cos[\omega_0(t - 2t_{12})]. \quad (6.27)$$

Mit diesem Ausdruck ergibt sich für das Betragsquadrat der makroskopischen Polarisationsdichte

$$|p_{t_{12}}^{(-3)}(t)|^2 \propto \Theta(t - t_{12}) \exp\left[-\frac{2}{T_2}t - \frac{\delta\omega^2}{4}(t - 2t_{12})^2\right] \cos^2[\omega_0(t - 2t_{12})]. \quad (6.28)$$

Die Dephasierungszeit  $T_2$  sei so groß, daß (6.28) hinreichend schnell abklingt und man den  $\cos$  durch 1 nähern kann. Die homogen verbreiterte zeitintegrierte Polarisierung erhält man einfach, indem man in (6.28)  $\delta\omega = 0$  (also  $T_2^* \rightarrow \infty$ ) setzt und in Integral (6.22) einsetzt. Damit ergibt sich für den homogenen Fall

$$I^{(-3)}(t_{12}) \propto e^{-2\frac{t_{12}}{T_2}}, \quad (6.29)$$

also ein  $2/T_2$ -Abfallverhalten.

In die Berechnung des inhomogenen Falls geht die Annahme  $\delta\omega^{-1} \ll T_2 \approx t_{12}$  mit ein, d.h.  $\delta\omega$  ist sehr breit (bzw.  $T_2^*$  ist klein) und  $T_2$  sowie  $t_{12}$  haben ungefähr dieselbe Größenordnung und sind gegen das Reziproke der Verbreiterung sehr groß. Somit erhält man bei inhomogener Verbreiterung nach [38] schließlich

$$I^{(-3)}(t_{12}) \propto e^{-4\frac{t_{12}}{T_2}} \left[ \Phi\left(\frac{\delta\omega}{\sqrt{2}} t_{12}\right) + 1 \right] \quad (6.30)$$

mit dem Fehlerintegral

$$\Phi(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2}. \quad (6.31)$$

Dies bedeutet nichts anderes, als daß sich durch die inhomogene Verbreiterung aufgrund von statistischen Schwankungen in den Quantentöpfen oder aufgrund der nichtparabolischen Bandstruktur der Zerfall der makroskopischen, kohärenten Polarisierung um den Faktor 2 beschleunigt. Grund sind die mit leicht unterschiedlichen Frequenzen schwingenden Einzelpolarisationen und die daraus entstehende destruktive Interferenz.



# Kapitel 7

## Zeitabhängige Hartree-Fock-Gleichungen

### 7.1 Bewegungsgleichung mit Coulomb-Termen

Während wir im letzten Abschnitt ein analytisch behandelbares Ensemble von Zwei-Niveau-Systemen betrachtet haben, das mit  $\delta$ -Pulsen angeregt wurde, kommen wir in diesem Kapitel zu den in den numerischen Berechnungen verwendeten Bewegungsgleichungen, welche die Coulomb-Wechselwirkung einschließen. Entsprechend den untersuchten Experimenten in [5] werden Secanshyperbolicus-förmige Pulse angenommen, d.h.

$$E_1(t) = E_0 \operatorname{sech} \frac{t}{\tau} e^{i\omega t} \quad (7.1)$$

sowie der um die Zeit  $t_{12}$  verzögerte Puls

$$E_2(t) = E_0 \operatorname{sech} \frac{t - t_{12}}{\tau} e^{i\omega t}. \quad (7.2)$$

sind in (3.16) einzusetzen. Der Parameter  $\tau$  stellt die Pulsdauer dar.

Die Heisenberg-Gleichung (3.24) mit den Kommutatoren (3.25), (3.26) und (3.27) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_{n_1 n_2, \mathbf{k}} = \frac{1}{i\hbar} & \left\{ (\varepsilon_{n_2, \mathbf{k}} - \varepsilon_{n_1, \mathbf{k}}) f_{n_1 n_2, \mathbf{k}} \right. \\ & - \sum_{n_3} E(t) (M_{n_2 n_3} f_{n_1 n_3, \mathbf{k}} - M_{n_3 n_1} f_{n_3 n_2, \mathbf{k}}) \\ & + \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3 \\ \mathbf{k}', \mathbf{q}}} \left[ V_{\mathbf{q}}^{n_2 j_1 j_2 j_3} \frac{1}{2} \sum_{s, s'} \langle c_{n_1, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{j_1, \mathbf{k}', s'}^\dagger c_{j_2, \mathbf{k}' + \mathbf{q}, s'} c_{j_3, \mathbf{k} - \mathbf{q}, s} \rangle \right. \\ & \left. \left. - V_{\mathbf{q}}^{j_1 j_2 j_3 n_1} \frac{1}{2} \sum_{s, s'} \langle c_{j_1, \mathbf{k} + \mathbf{q}, s}^\dagger c_{j_2, \mathbf{k}' - \mathbf{q}, s'}^\dagger c_{j_3, \mathbf{k}', s'} c_{n_2, \mathbf{k}, s} \rangle \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Der Zusammenhang mit dem Feldoperator (3.2) erschließt sich über den Coulomb-Anteil des Vielteilchen-Hamiltonians,

$$\begin{aligned}
& \int d^3r \int d^3r' \psi_s^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi_{s'}^\dagger(\mathbf{r}', t) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_S |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \psi_{s'}(\mathbf{r}', t) \psi_s(\mathbf{r}, t) \\
&= \frac{1}{A^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_S} \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4 \\ \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4}} c_{j_1, \mathbf{k}_1, s}^\dagger c_{j_2, \mathbf{k}_2, s'}^\dagger c_{j_3, \mathbf{k}_3, s'} c_{j_4, \mathbf{k}_4, s} \times \\
&\quad \int d^2\rho \int d^2\rho' e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4) \cdot \rho} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \cdot \rho'} \times \\
&\quad \int dz \int dz' \varphi_{j_1, \mathbf{k}_1}^*(z) \varphi_{j_2, \mathbf{k}_2}^*(z') \varphi_{j_3, \mathbf{k}_3}(z') \varphi_{j_4, \mathbf{k}_4}(z) \tag{7.4} \\
&\stackrel{(A.8)}{=} \frac{1}{A} \frac{e^2}{2\epsilon_0\epsilon_S} \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4 \\ \mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}}} c_{j_1, \mathbf{k} + \mathbf{q}, s}^\dagger c_{j_2, \mathbf{k}' - \mathbf{q}, s'}^\dagger c_{j_3, \mathbf{k}', s'} c_{j_4, \mathbf{k}, s} \times \\
&\quad \int dz \int dz' \varphi_{j_1, \mathbf{k} + \mathbf{q}}^*(z) \varphi_{j_2, \mathbf{k}' - \mathbf{q}}^*(z') \frac{e^{-q|z - z'|}}{q} \varphi_{j_3, \mathbf{k}'}(z') \varphi_{j_4, \mathbf{k}}(z) \\
&\stackrel{(3.4)}{=} \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4 \\ \mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}}} c_{j_1, \mathbf{k} + \mathbf{q}, s}^\dagger c_{j_2, \mathbf{k}' - \mathbf{q}, s'}^\dagger c_{j_3, \mathbf{k}', s'} c_{j_4, \mathbf{k}, s} V_{\mathbf{q}}^{j_1 j_2 j_3 j_4}.
\end{aligned}$$

Durch die Coulomb-Wechselwirkung werden somit Vielteilchen-Korrelationen eingeführt, die Effekte wie Bandlücken-Renormierung und *Coulomb-Enhancement* (oder auch *excitonic enhancement*; siehe Seite 49) [42, 43] sowie die Abschirmung von Ladungsträgern beschreiben. Für die in Gleichung (7.3) vorkommenden Zwei-Teilchen-Korrelationen, kann man weitere Bewegungsgleichungen aufstellen, die wiederum Sechserterme (3-Teilchen-Dichtematrizen) enthalten. Durch sukzessives Einsetzen in die Heisenberg-Gleichung hat man somit eine unendliche Hierarchie von zeitabhängigen Gleichungen für immer höhere Korrelationen vorliegen. Um diese Hierarchie abzubrechen, faktorisiert man die Terme aller höherliegenden Ordnungen in Terme niedrigerer Ordnung. Die Faktorisierung der Viererterme in der *Hartree-Fock-Näherung* berücksichtigt nur Einteilchen-Dichtematrizen und liefert

$$\begin{aligned}
\langle c_{j_1, \mathbf{k} + \mathbf{q}, s}^\dagger c_{j_2, \mathbf{k}' - \mathbf{q}, s'}^\dagger c_{j_3, \mathbf{k}', s'} c_{n_2, \mathbf{k}, s} \rangle &\approx \langle c_{j_1, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{n_2, \mathbf{k}, s} \rangle \langle c_{j_2, \mathbf{k}', s'}^\dagger c_{j_3, \mathbf{k}', s'} \rangle \delta_{\mathbf{q}, 0} \\
&\quad - \langle c_{j_1, \mathbf{k} + \mathbf{q}, s}^\dagger c_{j_3, \mathbf{k} + \mathbf{q}, s} \rangle \langle c_{j_2, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{n_2, \mathbf{k}, s} \rangle \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k} + \mathbf{q}} \delta_{s s'}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

und

$$\begin{aligned}
\langle c_{n_1, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{j_1, \mathbf{k}', s'}^\dagger c_{j_2, \mathbf{k}' + \mathbf{q}, s'} c_{j_3, \mathbf{k} - \mathbf{q}, s} \rangle &\approx \langle c_{n_1, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{j_3, \mathbf{k}, s} \rangle \langle c_{j_1, \mathbf{k}', s'}^\dagger c_{j_2, \mathbf{k}', s'} \rangle \delta_{\mathbf{q}, 0} \\
&\quad - \langle c_{n_1, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{j_2, \mathbf{k}, s} \rangle \langle c_{j_1, \mathbf{k} - \mathbf{q}, s}^\dagger c_{j_3, \mathbf{k} - \mathbf{q}, s} \rangle \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{q}} \delta_{s s'}
\end{aligned} \tag{7.6}$$

[51]. Dies ergibt für den Erwartungswert von (3.27) die folgende (vom Spin-Index unabhängige) Beziehung:

$$\frac{1}{2} \sum_s \langle [H_1^{cc}, c_{n_1, \mathbf{k}, s}^\dagger c_{n_2, \mathbf{k}, s}] \rangle = \sum_j \left[ \sum_{n_3, n_4, \mathbf{k}'} 2 (V_0^{jn_3 n_4 n_1} f_{n_3 n_4, \mathbf{k}'} f_{j n_2, \mathbf{k}} - V_0^{n_2 n_3 n_4 j} f_{n_3 n_4, \mathbf{k}'} f_{n_1 j, \mathbf{k}}) \right. \\ \left. - \sum_{n_3, n_4, \mathbf{q}} (V_{\mathbf{q}}^{jn_3 n_1 n_4} f_{n_3 n_4, \mathbf{k}+\mathbf{q}} f_{j n_2, \mathbf{k}+\mathbf{q}} - V_{\mathbf{q}}^{n_2 n_3 j n_4} f_{n_3 n_4, \mathbf{k}+\mathbf{q}} f_{n_1 j, \mathbf{k}+\mathbf{q}}) \right] \quad (7.7)$$

In dieser ‘‘Hartree-Fock-Stufe’’ werden nur Einteilchen-Dichtematrizen berücksichtigt. Sie impliziert lediglich Bandlücken-Renormierung, wohingegen andere Vielteilchen-Effekte wie die Abschirmung des Coulomb-Potentials, die durch den Einschluß von Bewegungsgleichungen für die nächsthöhere Korrelationen beschrieben werden können, statisch über die *Lindhard-Formel* realisiert werden (siehe Abschnitt 7.2).

Für das Coulomb-Matrixelement bei  $\mathbf{q} = 0$  findet man den Ausdruck

$$V_0^{n_1 n_2 n_3 n_4} = \int dz \int dz' \varphi_{n_1}^*(z) \varphi_{n_2}^*(z') |z - z'| \varphi_{n_3}(z') \varphi_{n_4}(z). \quad (7.8)$$

Somit erhalten wir für die Einteilchen-Dichtematrix die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} f_{n_1 n_2, \mathbf{k}} = \frac{1}{i\hbar} \sum_{n_3, n_4} (\varepsilon_{n_2 n_4, \mathbf{k}} \delta_{n_1 n_3} - \varepsilon_{n_3 n_1, \mathbf{k}} \delta_{n_2 n_4}) f_{n_3 n_4, \mathbf{k}} \\ - \frac{1}{i\hbar} \sum_{n_3} E(t) (M_{n_2 n_3} f_{n_1 n_3, \mathbf{k}} - M_{n_3 n_1} f_{n_3 n_2, \mathbf{k}}) \quad (7.9)$$

mit den renormierten Energien

$$\varepsilon_{n_1 n_2, \mathbf{k}} = H_{n_1 n_2, \mathbf{k}}^{(0)} + 2 \sum_{n_3, n_4, \mathbf{k}'} V_0^{n_1 n_3 n_4 n_2} f_{n_3 n_4, \mathbf{k}'} - \sum_{n_3, n_4, \mathbf{q}} V_{\mathbf{q}}^{n_1 n_3 n_2 n_4} f_{n_3 n_4, \mathbf{k}+\mathbf{q}}. \quad (7.10)$$

Der Summenterm mit  $V_0^{n_1 n_3 n_4 n_2}$  wird auch *Depolarisationsshift* genannt. Er ist verantwortlich für eine Verschiebung der Spektrums zu höheren Energien, die durch die Abschirmung des Elektronenplasmas selbst verursacht wird [39, 5]. Auch resultiert aus diesem Term eine Verengung der spektralen Linie, was durch den zweiten Summenausdruck in (7.10), dem *Fock-Term* teilweise wieder ausgeglichen wird. Dieser führt wieder zu einer Rotverschiebung. Dieser ‘‘dynamische’’ Effekt wird als Coulomb- oder Exzitonisches Enhancement bezeichnet.

Die Topfenergien gehen durch

$$H_{n_1 n_2, \mathbf{k}}^{(0)} = \int dz \varphi_{n_2}^*(z) \left[ \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2}{dz^2} + V_W(z) + V_D(z) \right] \varphi_{n_1}(z) \quad (7.11)$$

ein.  $V_W$  ist das Topfpotential und  $V_D$  modelliert die Veränderung des Potentials durch aus der  $\delta$ -Dotierung stammenden Elektronen (siehe Kapitel 4). Bei den  $\varphi_n$  handelt es sich um die Einteilchen-Wellenfunktionen aus der FC-Gleichung (4.1), der Hartree-Gleichung, d.h. (4.1) in Kombination mit (4.4), der HF-Gleichung (4.7) oder aus der  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Gleichung (4.22).

### 7.1.1 Halbleiter-Bloch-Gleichung

Vernachlässigt man in (7.9) die *Intersubband-Coulombmatrixelemente* [19] und nähert die übrigen *Intrasubband-Coulombmatrixelemente* mittels

$$V_{\mathbf{q}} \approx V_{\mathbf{q}}^{1111} \approx V_{\mathbf{q}}^{1221} \approx V_{\mathbf{q}}^{2222} \quad (7.12)$$

(aufgrund der Symmetrie identische  $V$ 's wurden weggelassen), gelangt man nach der Definition der Pseudospinvariablen

$$\mathbf{s}_{\mathbf{k}} \equiv \begin{pmatrix} f_{12,\mathbf{k}} + f_{21,\mathbf{k}} \\ i(f_{12,\mathbf{k}} - f_{21,\mathbf{k}}) \\ f_{22,\mathbf{k}} - f_{11,\mathbf{k}} \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

und unter Berücksichtigung der  $\mathbf{k}$ -unabhängigen Resonanzenergie, die den Depolarisationsshift enthält, d.h.

$$\hbar\omega_0(t) \equiv \hbar\omega_{0,\mathbf{k}}(t) \equiv \varepsilon_{2,\mathbf{k}}^{(0)} - \varepsilon_{1,\mathbf{k}}^{(0)} + 2 \sum_{n,\mathbf{k}'} (V_0^{2nn2} - V_0^{1nn1}) f_{nn,\mathbf{k}'} \quad (7.14)$$

zur nichtlinearen *Halbleiter-Bloch-Gleichung*

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{s}_{\mathbf{k}} \quad (7.15)$$

mit den Rotationsvektoren

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{k}}(t) = \begin{pmatrix} -\kappa E(t) \\ 0 \\ \omega_0(t) \end{pmatrix} - \frac{1}{\hbar} \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} \mathbf{s}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}(t) \quad (7.16)$$

und dem Hilfsparameter  $\kappa \equiv 2M_{12}/\hbar$ . Die  $\varepsilon_{n,\mathbf{k}}^{(0)}$  stellen die Energien der freien Elektronen dar,  $E(t)$  symbolisiert das Lichtfeld.

Vernachlässigt man den Coulomb-Anteil in (7.16), gelangt man zur optischen Bloch-Gleichung (5.3).

### 7.1.2 Richtungsauflösung der Bewegungsgleichungen

Die Zerlegung (6.4) in einen statischen und einen dynamischen Anteil führt (7.10) auf die renormierten Energieterme

$$\varepsilon_{n_1 n_2, \mathbf{k}} = \varepsilon_{n_1, \mathbf{k}}^{(0)} \delta_{n_1 n_2} + \sum_{n_3, n_4, \mathbf{k}'} (2V_0^{n_1 n_3 n_4 n_2} - V_{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|}^{n_1 n_3 n_2 n_4}) \delta f_{n_3 n_4, \mathbf{k}'} + \delta \varepsilon_{n_1 n_2, \mathbf{k}} \quad (7.17)$$

mit zeitlich veränderlichen Anteilen  $\delta\varepsilon_{n_1n_2,\mathbf{k}}$ , deren Ausdruck im folgenden angegeben wird. Hieraus erhält man die Bewegungsgleichung ausschließlich für den zeitabhängigen Teil:

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d}{dt} \delta f_{n_1n_2,\mathbf{k}} &= (\varepsilon_{n_1,\mathbf{k}} - \varepsilon_{n_2,\mathbf{k}}) \delta f_{n_1n_2,\mathbf{k}} \\
&+ \sum_{n_3} (\delta\varepsilon_{n_2n_3,k} \delta_{n_1n_3} - \delta\varepsilon_{n_3n_1,k} \delta_{n_2n_3}) f_{n_3,\mathbf{k}}^{(0)} \\
&+ \sum_{n_3,n_4} (\delta\varepsilon_{n_2n_4,k} \delta_{n_1n_3} - \delta\varepsilon_{n_3n_1,k} \delta_{n_2n_4}) \delta f_{n_3n_4,\mathbf{k}} \\
&- E(t) M_{n_2n_1} (f_{n_1,\mathbf{k}}^{(0)} - f_{n_2,\mathbf{k}}^{(0)}) \\
&- E(t) \sum_{n_3} (M_{n_2n_3} \delta f_{n_1n_3,\mathbf{k}} - M_{n_3n_1} \delta f_{n_3n_2,\mathbf{k}}).
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Wählt man das Koordinatensystem geeignet (man legt den Nullpunkt der  $z$ -Achse in die Topfmitte) ergibt sich aus den Paritäten der Wellenfunktionen eine geringfügige Vereinfachung von (7.18): im entsprechenden Fall ist das Produkt der Einteilchen-Zustände in (3.8) bei den Diagonalelementen immer symmetrisch.

Zudem muß noch die *Phasenrelaxation* berücksichtigt werden, d.h. in Resonanz angeregte Intersubbandübergänge erzeugen eine kohärente Intersubband-Polarisation, die durch Phasenzerstörende Streuprozesse weggedämpft wird. Dazu führt man die Phasenrelaxationszeit  $T_2$  ein, welche die phasenbrechenden Prozesse enthält, die zum Abklingen der makroskopischen Polarisation beitragen. Hierin gehen bei niedrigen Temperaturen die Streuungen der Ladungsträger untereinander bzw. an thermischen Gitterschwingungen ein, wobei die phasenzerstörenden Streuvorgänge energieerhaltend sein oder energetisch relaxierend wirken können [52].  $T_2$  ist durch die Gleichung  $T_2 = 1/\Gamma$  mit der spektralen Linienbreite  $\Gamma$  beim Übergang  $\omega_0 = (\varepsilon_{n_2,0}^{(0)} - \varepsilon_{n_1,0}^{(0)})/\hbar$  assoziiert [53].

Ergänzt um diesen Dämpfungsanteil

$$-\frac{\delta f_{n_1n_2,\mathbf{k}}}{T_2} \tag{7.19}$$

für die Kohärenzen und durch Benutzung der Fourierzerlegung (3.17) und (3.18) erhält man schließlich die *zeitabhängigen Hartree-Fock-Gleichungen*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \delta f_{n_1n_2,\mathbf{k}}^{(\lambda,\nu)} &= \left[ \frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{n_2,\mathbf{k}} - \varepsilon_{n_1,\mathbf{k}}) - \frac{1 - \delta_{n_1n_2}}{T_2} \right] \delta f_{n_1n_2,\mathbf{k}}^{(\lambda,\nu)} \\
&+ \frac{i}{\hbar} \left( f_{n_2\mathbf{k}}^{(0)} - f_{n_1\mathbf{k}}^{(0)} \right) U_{n_2n_1,\mathbf{k}}^{(\lambda,\nu)} \\
&- \frac{i}{\hbar} \sum_{\lambda',\nu'} \sum_{n_3} \left( U_{n_2n_3,\mathbf{k}}^{(\lambda-\lambda',\nu-\nu')} \delta f_{n_1n_3,\mathbf{k}}^{(\lambda',\nu')} - U_{n_3n_1,\mathbf{k}}^{(\lambda-\lambda',\nu-\nu')} \delta f_{n_3n_2,\mathbf{k}}^{(\lambda',\nu')} \right)
\end{aligned} \tag{7.20}$$

mit dem effektiven Feld

$$U_{n_1n_2,\mathbf{k}}^{(\lambda,\nu)} = M_{n_1n_2} E^{(\lambda,\nu)}(t) - \delta\varepsilon_{n_1n_2,\mathbf{k}}^{(\lambda,\nu)} \tag{7.21}$$

und den dynamischen Energieabweichungen

$$\delta\varepsilon_{n_1n_2,\mathbf{k}}^{(\lambda,\nu)} = \sum_{n_3,n_4,\mathbf{k}'} (2V_0^{n_1n_3n_4n_2} - V_{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|}^{n_1n_3n_2n_4}) \delta f_{n_3n_4,\mathbf{k}'}^{(\lambda,\nu)} \tag{7.22}$$

Aus Kapitel 6 wissen wir, daß Korrelationen höherer Ordnung vernachlässigt werden, somit werden nur die Richtungen

$$(\lambda, \nu) = (1, -3), (0, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (0, 2), (1, 3)$$

berücksichtigt. Zudem wird die Symmetrirelation (3.19) ausgenutzt.

Lassen wir den ersten Index  $\lambda$  weg, erhalten wir schließlich für die Nicht-Abstrahlrichtungen, d.h. für gerade  $\nu$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta f_{n_1 n_2, \mathbf{k}}^{(\nu)} &= \left[ \frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{n_1, \mathbf{k}} - \varepsilon_{n_2, \mathbf{k}}) - \frac{1 - \delta_{n_1 n_2}}{T_2} \right] \delta f_{n_1 n_2, \mathbf{k}}^{(\nu)} \\ &+ \frac{i}{\hbar} \left( f_{n_2 \mathbf{k}}^{(0)} - f_{n_1 \mathbf{k}}^{(0)} \right) U_{n_2 n_1, \mathbf{k}}^{(\nu)} \\ &+ \frac{i}{\hbar} \sum_{\substack{\nu' \\ \text{gerade}}} \sum_{n_3} \left( U_{n_2 n_3, \mathbf{k}}^{(\nu - \nu')} \delta f_{n_1 n_3, \mathbf{k}}^{(\nu')} - U_{n_3 n_1, \mathbf{k}}^{(\nu - \nu')} \delta f_{n_3 n_2, \mathbf{k}}^{(\nu')} \right) \\ &+ \frac{i}{\hbar} \sum_{\substack{\nu' \\ \text{ungerade}}} \sum_{n_3} \left( U_{n_2 n_3, \mathbf{k}}^{(\nu - \nu')} \delta f_{n_3 n_1, \mathbf{k}}^{(-\nu')*} - U_{n_3 n_1, \mathbf{k}}^{(\nu - \nu')} \delta f_{n_2 n_3, \mathbf{k}}^{(-\nu')*} \right. \\ &\quad \left. + U_{n_3 n_2, \mathbf{k}}^{(\nu' - \nu)*} \delta f_{n_1 n_3, \mathbf{k}}^{(\nu')} - U_{n_1 n_3, \mathbf{k}}^{(\nu' - \nu)*} \delta f_{n_3 n_2, \mathbf{k}}^{(\nu')} \right) \end{aligned} \quad (7.23)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta f_{n_1 n_2, \mathbf{k}}^{(\nu)} &= \left[ \frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{n_2, \mathbf{k}} - \varepsilon_{n_1, \mathbf{k}}) - \frac{1 - \delta_{n_1 n_2}}{T_2} \right] \delta f_{n_1 n_2, \mathbf{k}}^{(\nu)} \\ &+ \frac{i}{\hbar} \left( f_{n_2 \mathbf{k}}^{(0)} - f_{n_1 \mathbf{k}}^{(0)} \right) U_{n_2 n_1, \mathbf{k}}^{(\nu)} \\ &+ \frac{i}{\hbar} \sum_{\nu', n_3} \left( U_{n_2 n_3, \mathbf{k}}^{(\nu - \nu')} \delta f_{n_1 n_3, \mathbf{k}}^{(\nu')} - U_{n_3 n_1, \mathbf{k}}^{(\nu - \nu')} \delta f_{n_3 n_2, \mathbf{k}}^{(\nu')} \right) \end{aligned} \quad (7.24)$$

für ungerade  $\nu$ . Die ersten zwei Zeilen der rechten Seite von (7.24) liefern die lineare Antwort in  $(\lambda = 1, \nu = \pm 1)$ -Richtung.

Angemerkt sei an dieser Stelle, daß die Bedingung für die sonst übliche *Rotating Wave Approximation* nicht notwendigerweise erfüllt ist (Abschnitt B.2.1; [54, 55]), da hier schnell-oszillierende Terme nicht vernachlässigt werden können. Die Voraussetzung, daß sich das elektrische Feld des gepulsten Lasers während der gemessenen Dephasierungszeiten  $T_2$  nur wenig ändert, ist nicht gegeben.

## 7.2 Plasma-Screening

Abschirmung der Wechselwirkung zwischen den Elektronen durch Hintergrund-Ladungsträger (engl. *Screening*) bedeutet, daß die Coulomb-Wechselwirkung – abhängig vom Wellenvektor  $\mathbf{k}$  durch das umgebende Elektronengas abgeschwächt wird. Wenn man die volle dynamische Abschirmung berücksichtigt, so muß man die  $\omega$ -Abhängigkeit der Coulomb-Wechselwirkungsmatrizen mit in die Berechnungen einschließen, was jedoch bei einem Zweiband-System sehr aufwendig zu bewerkstelligen ist.

In unseren Berechnungen beschränken wir uns auf eine statische Abschirmung, die die Fermi-Verteilung der Elektronen im unteren Subband vor der Anregung als Eingangsparameter verwendet. Präziser ausgedrückt: die abgeschirmten Coulomb-Matrix-Elemente zum Start der dynamischen Simulation werden im langwelligen Grenzfall mit der temperaturabhängigen Anfangsverteilung aus der statischen HF-Gleichung berechnet.

Einen Anhaltspunkt für die Güte dieser Näherung liefert die Bestimmung von Intersubband-Streuratzen bei niedrigen Anregungsdichten (diese sind allerdings nicht Gegenstand dieser Arbeit): die Übereinstimmung zwischen statischem und dynamischem Screening ist dann gut, wenn bei der Berechnung des statischen, langwelligen Grenzfalls nicht nur ein einziges Subband, sondern die Verteilung der Elektronen auf beiden Subbändern berücksichtigt wird [56]. Bei höheren Anregungsdichten beschreibt die statische Abschirmung allerdings nicht, daß sich der Abschirmungseffekt eigentlich erst mit zunehmender Besetzung des zweiten Subbands aufbaut und damit überschätzt wird.

Laut [56] gilt folgende Relation zwischen dynamisch abgeschirmten und nicht abgeschirmten Coulomb-Matrixelementen im schwach zeitabhängigen Limes:

$$V_{s,\mathbf{q}}^{n_1 n_2 n_3 n_4}(\omega) = V_{\mathbf{q}}^{n_1 n_2 n_3 n_4} + \sum_{n_5, n_6} V_{\mathbf{q}}^{n_1 n_6 n_5 n_4} \Pi_{\mathbf{q}}^{n_5 n_6}(\omega) V_{s,\mathbf{q}}^{n_5 n_2 n_3 n_6}(\omega) \quad (7.25)$$

(siehe auch [18, 43]) mit der Polarisationsfunktion in RPA (*Random Phase Approximation*)

$$\Pi_{\mathbf{q}}^{n_1 n_2}(\omega) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_{n_1, \mathbf{k}+\mathbf{q}}^{(0)} - f_{n_2, \mathbf{k}}^{(0)}}{\varepsilon_{n_1, \mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{n_2, \mathbf{k}} - \hbar\omega - i\delta} \quad (7.26)$$

RPA heißt, daß in diesen Berechnungen eine durch ein externes Potential (beispielsweise ein Lichtfeld) induzierte Ladungsverteilung durch eine als lineare Antwort auf das Gesamtpotential induzierte Ladungsverteilung ersetzt wird [57]. Die Berechnung wird analytisch mittels Graphenentwicklung bewerkstelligt [58].

Mit dem  $\delta$  wird das adiabatische Einschalten des Potentials einer Testladung beschrieben. Die Energien sind die HF-Energien aus (7.10), also  $\varepsilon_{n,\mathbf{k}} \equiv \varepsilon_{nm,\mathbf{k}}$ . Dafür läßt sich die Näherungsformel im statischen ( $q \rightarrow 0$ ), langwelligen ( $\omega \rightarrow 0$ ) Grenzfall (der Parameter  $\omega$  wird in den folgenden

Ausdrücken weggelassen)

$$\Pi_{\mathbf{q}}^{n_1 n_2} \approx \begin{cases} -\frac{m_{n_1}^*}{\pi \hbar^2} f_{n_1,0}^{(0)} & ; \quad n_1 = n_2 \\ \frac{2}{2\pi} \frac{\int_0^\infty dk k (f_{n_1,k}^{(0)} - f_{n_2,k}^{(0)})}{\varepsilon_{n_1,0} - \varepsilon_{n_2,0}} & ; \quad n_1 \neq n_2 \end{cases} \quad (7.27)$$

angeben (vgl. mit [59], Anhang).

Somit ist das lineare Gleichungssystem

$$V_{\mathbf{q}} = A_{\mathbf{q}} V_{s,\mathbf{q}} \quad (7.28)$$

bzw. in Indexschreibweise ausgedrückt

$$V_{\mathbf{q}}^{n_1 n_2 n_3 n_4} = \sum_{n_5, n_6} A_{\mathbf{q}}^{n_1 n_5 n_6 n_4} V_{s,\mathbf{q}}^{n_5 n_2 n_3 n_6} \quad (7.29)$$

mit

$$A_{\mathbf{q}}^{n_1 n_2 n_3 n_4} = \delta_{n_1 n_2} \delta_{n_3 n_4} - V_{\mathbf{q}}^{n_1 n_3 n_2 n_4} \Pi_{\mathbf{q}}^{n_2 n_3} \quad (7.30)$$

zu lösen. Für die Intrasubband-Wechselwirkung unter Berücksichtigung nur eines Subbandes folgt daraus

$$V_{s,\mathbf{q}}^{1111} = \frac{V_{\mathbf{q}}^{1111}}{\epsilon_{\mathbf{q}}^{1111}} \quad (7.31)$$

mit der *Lindhard-Formel*

$$\epsilon_{\mathbf{q}}^{1111} = 1 - V_{\mathbf{q}}^{1111} \Pi_{\mathbf{q}}^{11}. \quad (7.32)$$

Setzt man (7.27) in (7.32) ein, erhält man im statischen, langwelligen Grenzfall

$$\epsilon_{q \rightarrow 0}^{1111} = 1 + \frac{\kappa_1(q)}{q} \quad (7.33)$$

mit der Quasi-2D-Abschirmungs-Wellenzahl

$$\kappa_1(q) = \frac{1}{A} \frac{m_1^* e^2}{2\pi \hbar^2 \epsilon_0 \epsilon_S} \mathcal{F}_q^{1111} f_{1,0}^{(0)}. \quad (7.34)$$

Aus Symmetriegründen gilt für die Intersubband-Wechselwirkung

$$V_{s,\mathbf{q}}^{1122} = V_{s,\mathbf{q}}^{2211} = V_{s,\mathbf{q}}^{1212} = V_{s,\mathbf{q}}^{2121},$$

daher folgt aus (7.29)

$$V_{s,\mathbf{q}}^{1122} = \frac{V_{\mathbf{q}}^{1122}}{\epsilon_{\mathbf{q}}^{1122}} \quad (7.35)$$

mit dem Abschirmungsterm

$$\epsilon_{\mathbf{q}}^{1122} = 1 - V_{\mathbf{q}}^{1122} (\Pi_{\mathbf{q}}^{12} + \Pi_{\mathbf{q}}^{21}). \quad (7.36)$$

Wieder benutzt man (7.27) und gelangt im statischen Grenzfall zu

$$\epsilon_{q \rightarrow 0}^{1122} = 1 + \frac{\kappa_{12}(q)}{q}, \quad (7.37)$$

wobei

$$\kappa_{12}(q) = -\frac{1}{A} \frac{e^2}{\pi \epsilon_0 \epsilon_S} \mathcal{F}_q^{1122} \frac{\int_0^\infty dk k (f_{1,k}^{(0)} - f_{2,k}^{(0)})}{\epsilon_{1,0} - \epsilon_{2,0}} \quad (7.38)$$

die Intersubband-Abschirmungs-Wellenzahl darstellt. Die Gleichungen (7.34) und (7.38) unterscheiden sich von der üblichen Definition der 2D-Abschirmkonstante  $\kappa$  (siehe z.B. [60, 43, 54]), da zwischen der Abschirmung bei Inter- und Intrasubbandelementen unterschieden wird. Allerdings ist der Abschirmungseffekt bei Intersubband-Übergängen schwächer als bei Intrasubband-Übergängen [61].

Ladungsträger-Ladungsträger-Wechselwirkung mit dynamischer Abschirmung ist für die Berechnung des Beitrags der Plasmon-Emission zur Bestimmung der Streuraten wichtig [56]. Diese Arbeit beschränkt sich der Einfachheit halber auf statische Abschirmung, da wir hier ein homogenes System bei niedrigen Anregungsdichten betrachten.



## Teil III

# Ergebnisse der numerischen Simulationen



# Kapitel 8

## Berechnung des Grundzustands

Den hier vorgestellten Resultaten liegen die Materialparameter aus Tabelle 8.1 zugrunde. Die effektiven Elektronenmassen  $m_{1,2}^*$  in den entsprechenden Subbändern sind der Einfachheit halber gleich gewählt worden. Die Dispersion beim Quantentopfmodell, dessen Wellenfunktionen als Basis für die Berechnung des Hartree- oder Hartree-Fock-Grundzustands dienen, ist parabolisch und die Bandlücke über alle  $\mathbf{k}$  dank derselben Massen gleich.

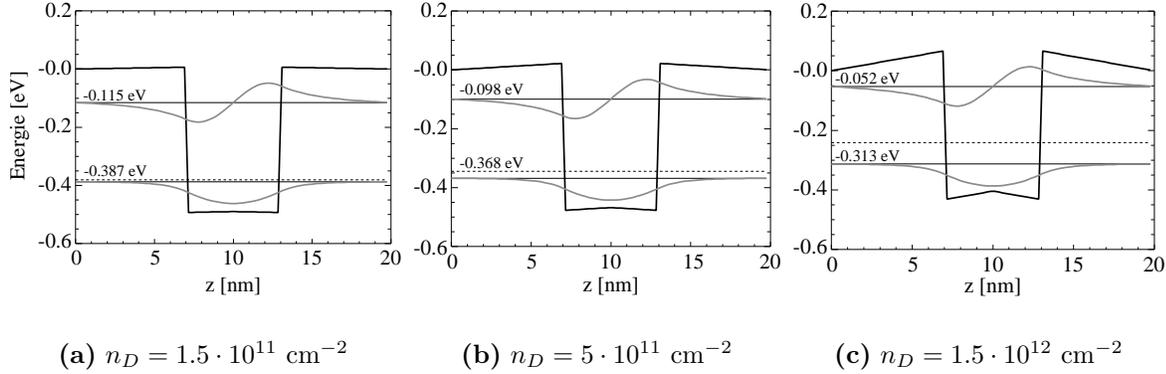
Effektive Massen	$m_1^*/m_0$	0.05
	$m_2^*/m_0$	0.05
Topftiefe	$\Delta V$	500 meV
Topfbreite	$d$	7 nm [5]
Dielektrizitätskonstante von Ga <sub>0.47</sub> In <sub>0.53</sub> As	$\epsilon_S$	14.16 [62]
Temperatur	$T$	8 K [5]

**Tabelle 8.1:** In die Rechnungen zum Ga<sub>0.47</sub>In<sub>0.53</sub>As/Al<sub>0.48</sub>In<sub>0.52</sub>As-Materialsystem eingehende gemeinsame Parameter

Die Unterschiede zu Berechnungen der Topfwellenfunktionen und -energien mit verschiedenen effektiven Massen sind beim Materialsystem GaInAs/AlInAs gering. Die durch die Massenungleichheit verursachte  $\mathbf{k}$ -Abhängigkeit der Energiedifferenz ist für unsere Diskussion nicht relevant, da wir die Auswirkungen der Coulomb-Terme untersuchen wollen.

Muß man Interband-Kopplungseffekte wie beim InAs/AlSb-Heterosystem berücksichtigen, ist dem  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Verfahren der Vorzug zu geben (siehe Abschnitt 11.1). Ein direkter Weg, die  $\mathbf{k}$ -Abhängigkeit durch die Coulomb-Austauschwechselwirkung in die Berechnungen einfließen zu lassen, wäre die analytische Behandlung nach Ekenberg [27], die nahezu dieselben Energien wie das Hartree-Fock-Verfahren liefert (Abb. 3.3). Folge dieser  $\mathbf{k}$ -Abhängigkeit ist die Nichtparabolizität der Subbänder.

Ausgangspunkt der nachfolgenden Betrachtungen sind die Einteilchenwellenfunktionen des einfachen Quantentopfes, d.h. der FC-Grundzustand (Abschnitt 4.1). In Abb. 8.1 sind die untersten beiden Wellenfunktionen aus dem Topfproblem auf den Achsen der entsprechenden Subbandenergien bei  $\mathbf{k} = 0$  gegen das Topfpotential geplottet. Die Topfbreite wurde zu 6 nm gewählt, da der zugehörige Intersubbandübergang in einem Bereich relativ geringer Absorption durch Luft liegt.

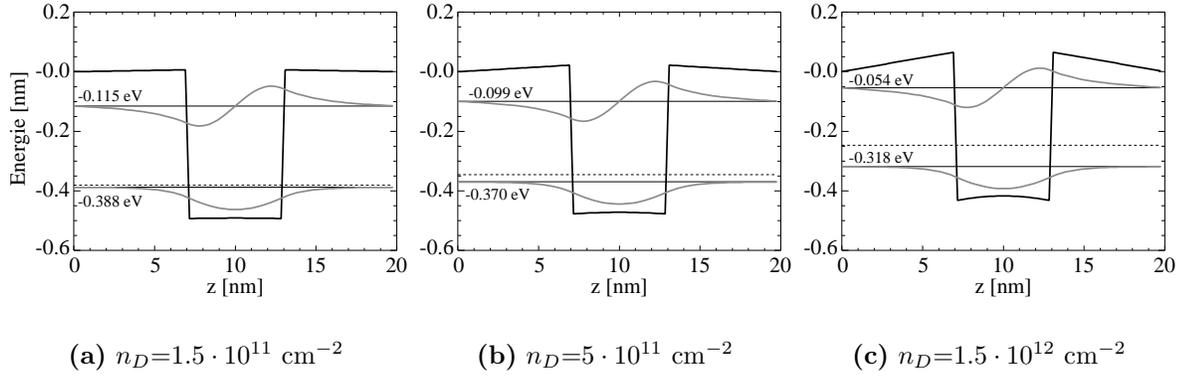


**Abbildung 8.1:** Topfwellenfunktionen und effektive Topfpotentiale zu den drei Dotierungsdichten in GaInAs/AlInAs

Die Si- $\delta$ -Dotierungsschicht drückt sich in der Krümmung des Potentials aus. Die 2D-Elektronendichte wird mittels eines Knicks in der Mitte des Quantentopfbodens modelliert (siehe Abschnitt 4.1).

Man erkennt, daß die Subbandenergien mit zunehmender Dotierung zusammenrücken. Alle Elektronen-Wellenfunktionen eines Subbands haben in der Einschlußrichtung (d.h. in  $z$ -Richtung) die gleiche Form, daher genügt es, die Wellenfunktion für  $\mathbf{k}=0$  berechnen. Die Dispersionsrelation ist im FC-Topfmodell hinsichtlich  $\mathbf{k}$  *parabolisch*. Die Parameter der GaInAs/AlInAs-Quantentöpfe wurden so gewählt, daß die Elektronen mindestens zwei Subbänder besetzen können. Außerdem ist die Dichte der Dotierung immer so groß, daß die Fermi-Verteilung bei gegebener Temperatur nur Elektronen im ersten Subband zuläßt, was durch die als gestrichelte Linie eingezeichnete Fermi-Kante angedeutet wird.

Als Systemtemperatur wurde die in [5] angegebenen  $T=8$  K verwendet, um eine gewisse Vergleichbarkeit mit den experimentellen Resultaten zu gewährleisten. Diese geht bei der selbstkonsistenten Berechnung der Hartree- und HF-Zustände als zusätzlicher Parameter ein, wo außer dem entsprechenden Grundzustand auch die Dispersion  $\varepsilon_{n,\mathbf{k}}$  und das chemische Potential  $\mu$  bestimmt werden. Beide sind wichtig für die Berechnung der Anfangs-Fermi-Verteilung der Elektronen. Im Fall der Hartree-/HF-Gleichung heißt "selbstkonsistent", daß in einem Durchgang zunächst die Einteilchenzustände bestimmt werden, damit wird das chemische Potential  $\mu$  berechnet, die resultierende Fermi-Verteilung ergibt die Elektronendichte und anschließend wird daraus mit Hilfe der Poisson-Gleichung ein neues Topfpotential berechnet (siehe Abschnitte 4.2 und 4.3). Diese Prozedur wird solange wiederholt, bis das Betragsquadrat aus den Differen-



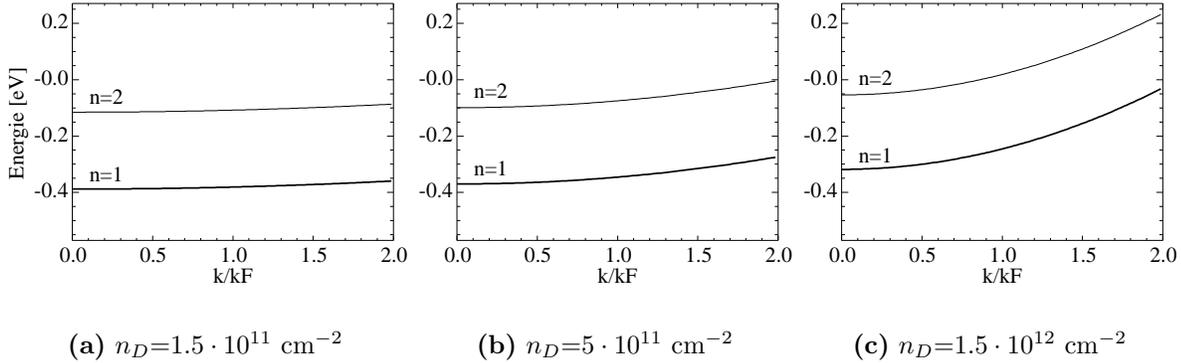
**Abbildung 8.2:** Hartree-Wellenfunktionen und effektive Topfpotentiale zu den drei Dotierungsdichten bei  $T=8$  K

zen der als Vektoren aufgefaßten Topfzustände aus zwei aufeinanderfolgenden Rechenschritten einen gewissen Maximalwert  $\varepsilon$  unterschreitet: formal lautet das Abbruchkriterium also

$$\sum_j |\varphi_j^{(n)} - \varphi_j^{(n-1)}|^2 \Delta z < \varepsilon^2,$$

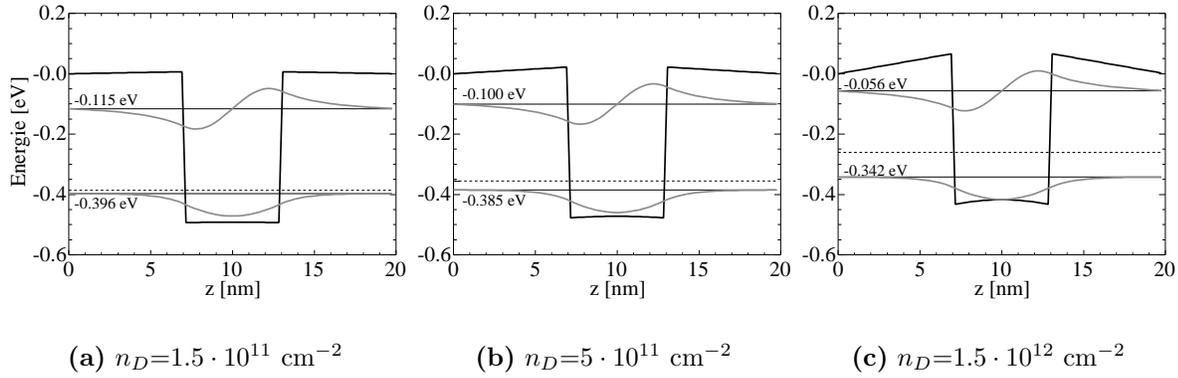
wobei  $\varphi_j^{(n)}$  die normierte Einteilchenwellenfunktion im  $n$ -ten Iterationsschritt am Ort  $z = j \Delta z$  ist; in den Berechnungen wurde  $\varepsilon = 10^{-8}$  gewählt.

Betrachtet man im Vergleich zur Lösung des einfachen wechselwirkungsfreien Quantum-Well- Problems die Wellenfunktionen aus der Hartree-Gleichung (Abb. 8.2), so sind die Unterschiede



**Abbildung 8.3:** Hartree-Dispersionrelationen für drei Dotierungsdichten bei  $T=8$  K

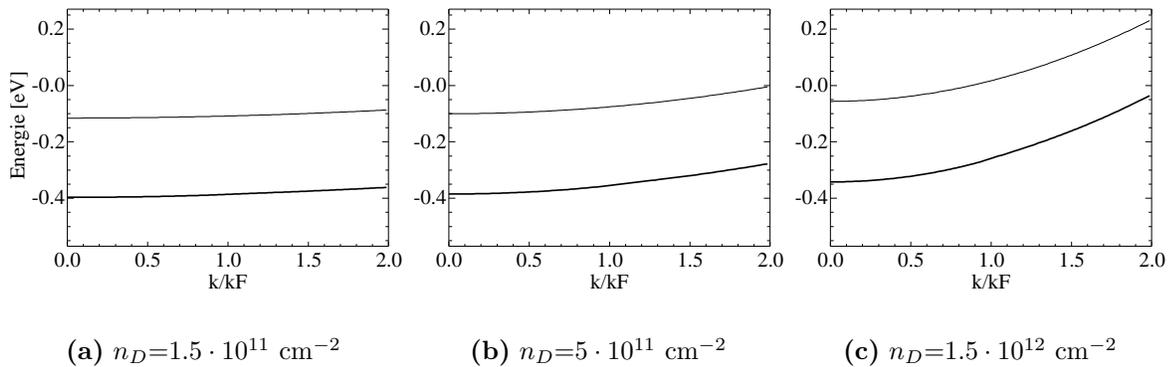
bei den untersuchten Dichten nicht sehr groß, da die einfache lineare Aufprägung der Dotierungsdichte auf das Topfpotential (erkennt man an der kantigen Form des Topfbodens in Abb. 8.1) die aus der selbstkonsistenten Berechnung hervorgegangene Form in Abb. 8.2 sehr gut wiedergibt. Die Energien sind lediglich um ein paar meV nach unten verschoben und der Band-Abstand hat sich geringfügig vergrößert, die Parabolizität der Subbänder bleibt aber erhalten (Abb. 8.3 und 8.6).



**Abbildung 8.4:** Hartree-Fock-Wellenfunktionen und effektive Topfpotentiale zu den drei Dotierungsdichten bei  $T=8\text{ K}$

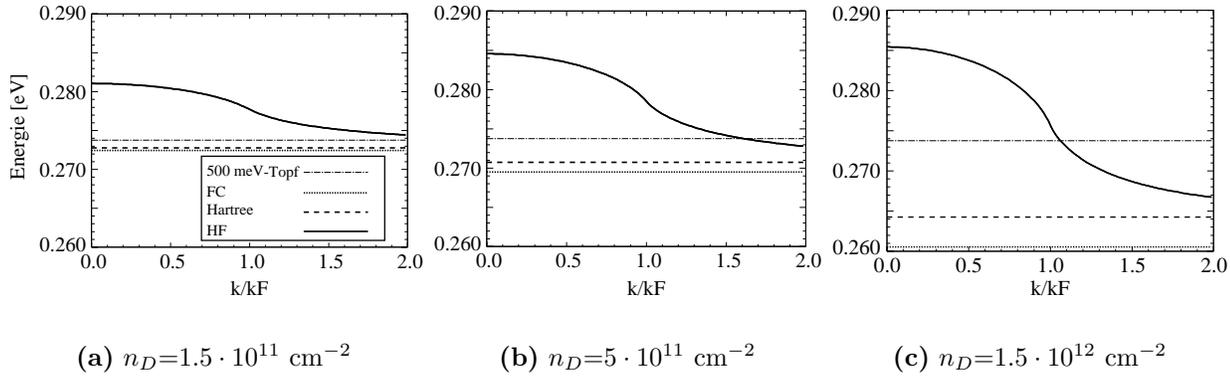
Bringt man die Fock-Terme bei der statischen Gleichung ins Spiel, so beobachtet man eine weitere, etwas stärkere Absenkung der Energien, wobei diese beim untersten Subband stärker ausgeprägt ist als beim zweiten (Abb. 8.4). Zu höheren  $\mathbf{k}$ -Werten nähert sich die Energie immer mehr der parabolischen Form (Abb. 8.5). Ursache ist die im Fock-Term von Gleichung (4.7) enthaltene Coulomb-Austauschwechselwirkung zwischen den Elektronen des ( $n = 1$ )-Subbandes: da nur dieses besetzt ist und seine Elektronen bei niedriger Temperatur lediglich Zustände bis an die Fermi-Kante einnehmen, erklärt das die starke Absenkung des unteren Subbandes bei niedrigen  $\mathbf{k}$ -Werten.

In Abb. 8.6 sind die Abstände zwischen den Subbändern explizit aufgetragen. Als zusätzliche Referenz wurde noch die Differenz zwischen den Energien der Topfwellenfunktionen in einem Rechteckpotential eingezeichnet. Die lineare  $e^2/(2\epsilon_0\epsilon_S)n_D \cdot z$ -Modellierung (Abb. 4.1) der selbstkonsistenten Verformung des Potentialtopfes verursacht eine stärkere Absenkung der Energiedifferenzen als die Berücksichtigung der Hartree-Terme, d.h. sie führt zu einer geringfügigen Überschätzung der Hartree-Wechselwirkung. Der Fock-Anteil der Coulomb-Wechsel-



**Abbildung 8.5:** Hartree-Fock-Dispersionrelationen für drei Dotierungsdichten bei  $T=8\text{ K}$

wirkung hebt diese Absenkung für niedrige  $\mathbf{k}$ -Werte auf und führt sogar zu einer Blauverschiebung der Energiedifferenz gegenüber dem Wert des einfachen Potentialtopfs. Bei hoher Dichte (Figur 8.6(c)) trifft dies allerdings nur für Elektronen mit  $\mathbf{k}$ 's unterhalb der Fermi-Kante zu.



**Abbildung 8.6:** Freie-Ladungsträger- (gepunktet), Hartree- (gestrichelt) und Hartree-Fock-Bandabstände für drei Dotierungsdichten bei  $T=8 \text{ K}$ . Zusätzlich ist die Banddifferenz der Wellenfunktionen in einem  $500 \text{ meV}$ -Rechteck-Potentialtopf dargestellt (dünn gestrichelt).

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß der HF-Grundzustand die Übergänge zwischen den beiden Subbändern zu höheren Energien schiebt und eine durch die HF-Nichtparabolizität verursachte Verbreiterung der Absorption induziert, wie wir im nachfolgenden Kapitel 9 sehen werden. Die Verzerrung der Differenz zwischen den Subbandenergien beträgt abhängig von der Dichte zwischen 3 und 8 % (Quotient aus Differenz zwischen der HF- und Hartree-Subbandlücke und der Hartree-Subbandlücke; siehe Abb. 8.6). Da bei niedrigen Temperaturen näherungsweise eine rechteckförmige Verteilung der Elektronen des ( $n = 1$ )-Subbands bis zur Fermi-Kante  $k_F$  vorhanden ist, nimmt im Bereich von  $k_F$  der Grad an Nichtparabolizität rapide ab.



# Kapitel 9

## Lineare Absorptionsspektren

In diesem Kapitel befassen wir uns zunächst mit den Eigenschaften der linearen Absorptionsspektren der GaInAs/AlInAs-Heterostruktur. In den Rechnungen wird ein sehr kurzer Anregungspuls gewählt ( $\tau=10$  fs), mit einer Energie im Bereich des Abstands zwischen den beiden Subbändern. Die kurze Dauer impliziert ein breites Pulsspektrum, so daß Elektronen über einen großen Bereich des  $\mathbf{k}$ -Raums ins obere Subband angeregt werden.

Die Absorptionskurve charakterisiert die Resonanz des Intersubband-Elektronensystems, die als wesentlicher Eingangsparameter der Vierwellenmischsimulation dient, um eine optimale Ausbeute an Ladungsträgern in den untersuchten Materialien zu erzielen.

Darüberhinaus hat die Berechnung der linearen Absorptionsspektren aus folgenden Gründen einige Vorteile gegenüber nichtlinearer optischer Anregung:

- Der Aufwand für die Berechnung der linearen Antwort ist wesentlich geringer als bei nichtlinearen Spektren, da man nur die Richtung des Anregungsstrahls berücksichtigen muß.
- Die Form eines Spektrums läßt sich wegen der Einfachheit der entsprechenden Bewegungsgleichung (9.1) leichter interpretieren. Vor allem das Aus- und Einschalten der Hartree- und der Fock-Terme haben starken Einfluß auf Form und Lage der Absorptionskurve.

Werden von Gleichung (7.20) nur die linearen Anteile berücksichtigt, erhält man für die Kohärenz

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \delta f_{21,\mathbf{k}} = & \left[ (\varepsilon_{2,\mathbf{k}}^{(0)} - \varepsilon_{1,\mathbf{k}}^{(0)}) - \frac{i\hbar}{T_2} \right] \delta f_{21,\mathbf{k}} \\ & + \sum_{\mathbf{k}'} (2V_0^{2121} - V_{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|}^{2112}) f_{1,\mathbf{k}}^{(0)} \delta f_{21,\mathbf{k}'} \\ & - M_{21} E(t) f_{1,\mathbf{k}}^{(0)}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Der Einfluß der 2D-Elektronengasdicke aus der Dotierung drückt sich sowohl in der zweiten Zeile über die Coulomb-Terme als auch in der letzten Zeile über das  $E$ -Feld aus. Bei den berechneten Spektren wurden systematisch folgende Vielteilchen-Einflüsse untersucht:

- *Hartree-Terme*, also die Wechselwirkung eines einzelnen Elektrons mit dem von den Ladungsverteilungen der Elektronen in den jeweiligen Zuständen herrührenden elektrostatischen Potentials.

- *Fock-Terme*: die Coulombsche Austauschwechselwirkung zwischen den Elektronen. Diese bezieht sich aber nur auf die Wechselwirkung der angeregten Elektronen von der Anfangskonfiguration, ausgedrückt durch die Fermi-Verteilung  $f_{1,\mathbf{k}}^{(0)}$  des unteren Subbandes.
- *Abschirmung*: das Elektronengas im Festkörper selbst schwächt die Coulomb-Austauschwechselwirkung wieder ab. Die Abschirmung wird statisch mit Hilfe der Anfangsbesetzung über die Coulomb-Matrixelemente  $V_{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|}^{2112}$  eingebaut, siehe Abschnitt 7.2.

Man muß noch zwischen den Termen in der statischen Gleichung zur Berechnung des Grundzustandes und den äquivalenten Termen in der Bewegungsgleichung (9.1) unterscheiden. Soweit als Kombination nicht explizit angegeben, werden folgende Vereinfachungen in der Begriffswahl verwendet:

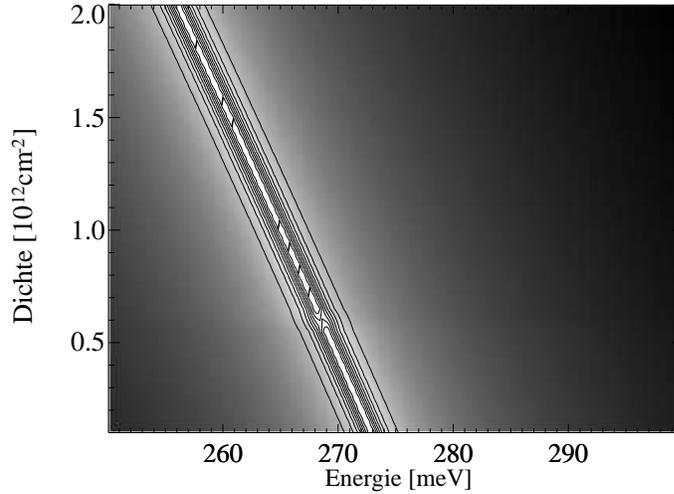
- *FC-Spektrum*, die Konfiguration *Grundzustand mit freien Ladungsträgern - Dynamik mit freien Ladungsträgern*: der FC-Grundzustand aus Abschnitt 4.1 dient als Basis für die Bewegungsgleichung (9.1) ohne den Summenterm mit den Coulomb-Matrixelementen in der mittleren Zeile; somit erhält man das Spektrum von ungekoppelten Zwei-Niveau-Systemen;
- *Hartree-Spektrum*: *Hartree-Grundzustand - Hartree-Dynamik*: der in Abschnitt 4.2 beschriebene Hartree-Grundzustand geht in die Berechnung von (9.1) ein, wobei der Fock-Term  $-\sum_{\mathbf{k}'} V_{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|}^{2112} f_{1,\mathbf{k}}^{(0)} \delta f_{21,\mathbf{k}'}$  weggelassen wird;
- *HF-Spektrum*: *HF-Grundzustand - HF-Dynamik*: der HF-Grundzustand aus Abschnitt 4.3 wird verwendet, um (9.1) zu lösen.

Außerdem wurde die Dephasierungszeit  $T_2$  variiert, um Strukturen sichtbar zu machen, die durch phasenerstörenden Prozesse eventuell unterdrückt werden. Anhand der hier vorgestellten linearen Spektren kann man Aussagen über die Stärke des Energie-Shifts unter dem Einfluß von Vielteilchen-Wechselwirkungen, ausgedrückt durch die Hartree- und Fock-Terme, machen.

## 9.1 Spektren in Abhängigkeit von der Dotierung

### Lineare Spektren mit FC-Grundzustand

Wie im Konturplot in Abb. 9.1, der den Verlauf des Maximums des normierten linearen Absorptionsspektrums zeigt, dargestellt ist, erfährt das FC-Spektrum mit zunehmender Dichte eine starke Rotverschiebung, wobei die Beziehung zwischen Dotierungsdichte  $n_D$  und Peak linearer Natur ist (die Rotverschiebung läßt sich auch anhand der gestrichelten Absorptionskurven in den Abbildungen 9.2(a) bis 9.2(c) ablesen). Dieses Verhalten war schon anhand der Energielücke der Topfwellenfunktionen aus Abb. 8.1 zu erwarten.



**Abbildung 9.1:** Lineare FC-Absorptionsspektren für Dichten  $n_D$  von  $10^{11} \text{ cm}^{-2}$  bis  $2 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  bei konstant bleibender Dephasierungszeit  $T_2=800 \text{ fs}$ .

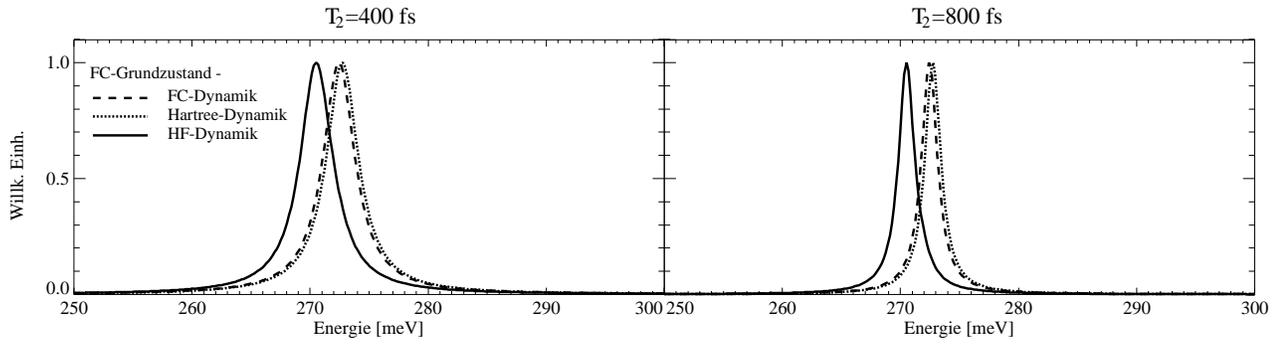
Fügt man die Hartree-Terme in der Dynamik hinzu (d.h. (9.1) ohne den Fock-Anteil), behält aber die FC-Basis bei (gepunktete Kurven in den Abb.en 9.2(a), 9.2(b) und 9.2(c)), so erfahren die berechneten Absorptionsspektren eine mit wachsender 2D-Elektronendichte  $n_D$  zunehmende Blauverschiebung. Ursache ist der Hartree-Term

$$\sum_{\mathbf{k}'} 2V_0^{2121} f_{1,\mathbf{k}}^{(0)} \delta f_{21,\mathbf{k}'}$$

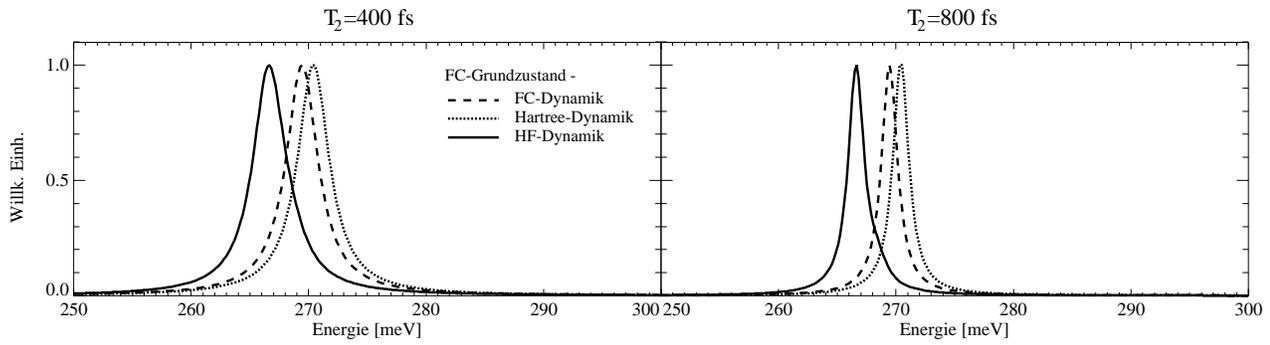
in Bewegungsgleichung (9.1), der bei niedrigen Temperaturen wegen der beinahe rechteckförmigen Fermi-Verteilung quasi  $\mathbf{k}$ -unabhängig ist und aufgrund des positiven Vorzeichens das Spektrum zu höheren Energien verschiebt, ohne dessen Form zu verändern. Die Hartree-Wechselwirkung stellt im  $\mathbf{k}$ -Raum ein zeitabhängiges, homogenes Feld dar [26] und induziert daher eine kollektive Bewegung der Elektronen bei optischer Anregung [5].

Das gilt nicht mehr, wenn (9.1) einschließlich der Coulomb-Austauschwechselwirkung auf den FC-Grundzustand angewendet wird: der Fock-Term, d.h.

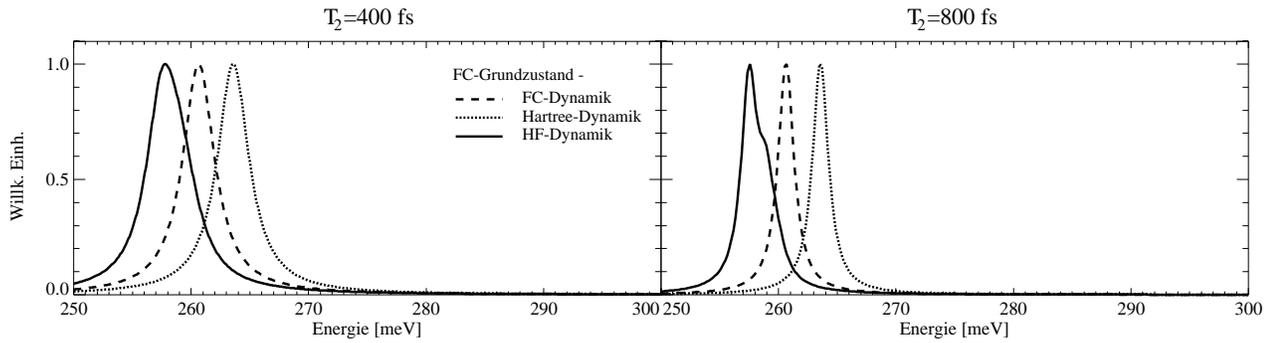
$$- \sum_{\mathbf{k}'} V_{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|}^{2112} f_{1,\mathbf{k}}^{(0)} \delta f_{21,\mathbf{k}'},$$



(a)  $n_D = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$



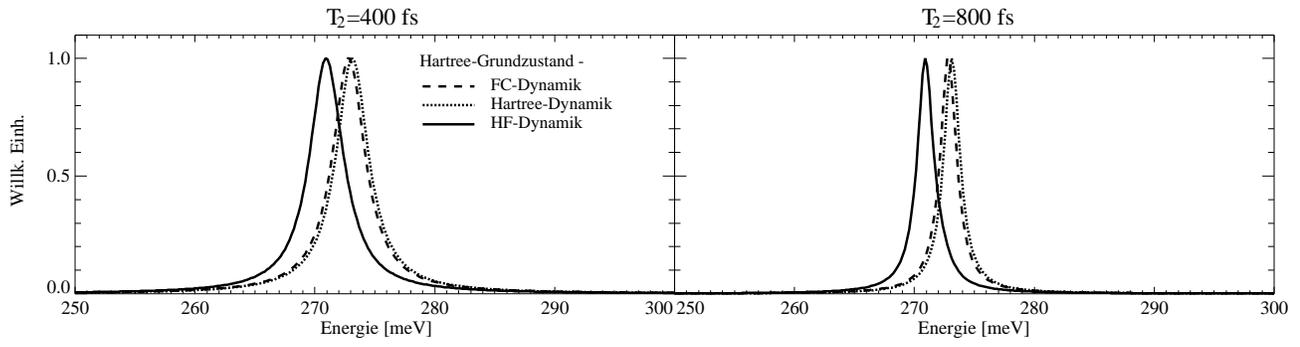
(b)  $n_D = 5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$



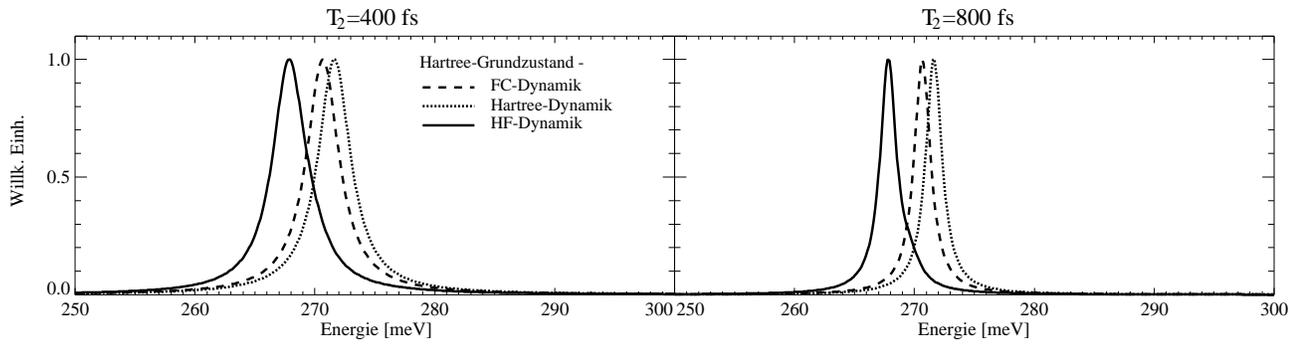
(c)  $n_D = 1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$

**Abbildung 9.2:** Lineare Absorptionsspektren mit dem FC-Grundzustand als Basis für  $T_2 = 400, 800$  fs und drei unterschiedliche Ausbaustufen der Bewegungsgleichung

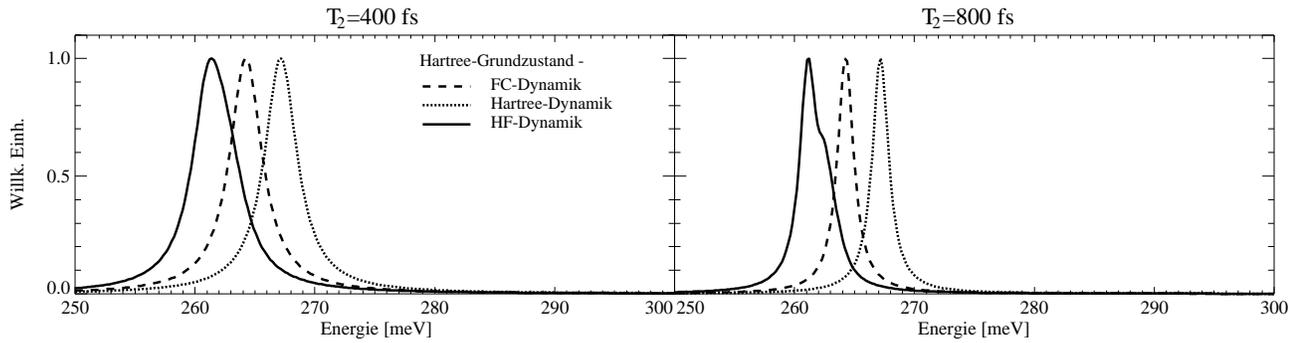
bewirkt eine Asymmetrie, die allerdings erst bei hohen  $n_D$  und niedriger Dephasierung sichtbar wird (Abb. 9.2(c), rechte Seite, Kurve mit durchgezogener Linie). Das Spektrum schiebt zudem nach links: dies kann damit erklärt werden, daß das Coulomb-Matrixelement positiv



(a)  $n_D = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$



(b)  $n_D = 5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$



(c)  $n_D = 1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$

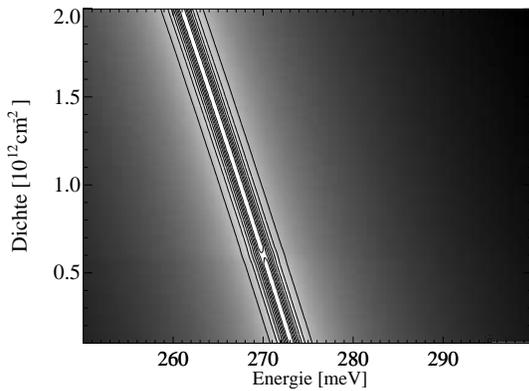
**Abbildung 9.3:** Lineare Absorptionsspektren mit dem Hartree-Grundzustand als Basis und  $T_2 = 400, 800 \text{ fs}$

und somit der Vorfaktor  $-V_{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|}^{2112} f_{1,\mathbf{k}}^{(0)}$  negativ ist. Da dieser Faktor um  $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$  betragsmäßig sein Maximum annimmt, bewirkt er eine Absenkung der Resonanzfrequenz im Vergleich zur Hartree-Dynamik (Coulomb-Enhancement). Anders ausgedrückt: die Fock-Wechselwirkung

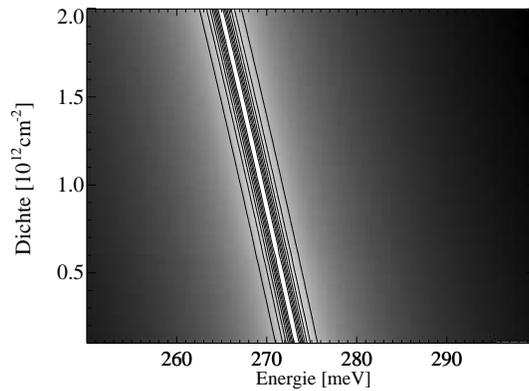
des durch die optische Anregung erzeugten Dipols mit den Elektronen im unteren Subband, vor allem denjenigen mit nahe liegenden  $\mathbf{k}$ -Wellenvektoren, verringert dessen Schwingungsfrequenz.

### Spektren mit Hartree-Grundzustand

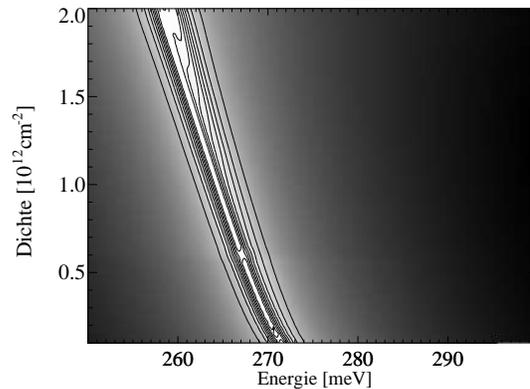
Die Rotverschiebung zu höheren Dichten fällt geringer aus, wenn man Hartree-Wellenfunktionen als Basis wählt und darauf die FC-Dynamik anwendet (Figuren 9.3(a) bis 9.3(c), gestrichelte Kurven, sowie Konturplot 9.4(a)). Auch dies ist anhand der Energien der Hartree-Einteilchen-Wellenfunktionen (Abb. 8.2; siehe auch Abb. 8.6)



(a) FC-Dynamik



(b) Hartree-Dynamik



(c) Hartree-Fock-Dynamik

**Abbildung 9.4:** Lineare Absorptionsspektren für Dichten  $n_D$  von  $10^{11} \text{ cm}^{-2}$  bis  $2 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$   $T_2=800$  fs mit dem Hartree-Grundzustand als Basis und drei unterschiedlichen Ausbaustufen der Bewegungsgleichung

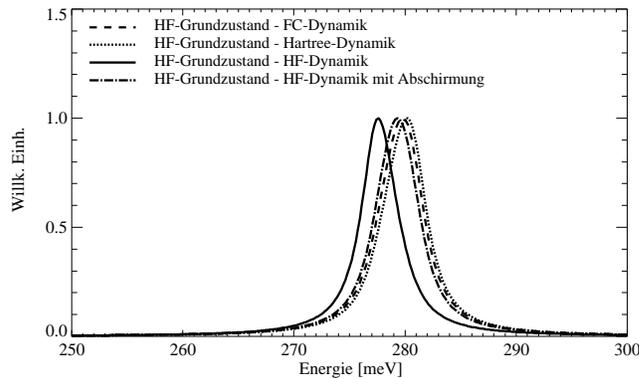
leicht einsehbar. Die Linearität der Rotverschiebung im FC- und im Hartree-Fall kann man als Konsequenz der Parabolizität der Subbänder betrachten, so daß der Bandabstand über alle  $\mathbf{k}$  hinweg konstant bleibt und linear mit der Elektronendichte  $n_D$  geht.

Ergänzt man die Dynamik um Hartree-Terme (Fig. 9.3(a) bis 9.3(c), gepunktete Linien, außerdem Konturplot 9.4(b)), liefert das eine weitere Abschwächung der Rotverschiebung im Vergleich zum entsprechenden Fall mit dem FC-Grundzustand (die Rotverschiebung wird bekanntlich durch die lineare  $e^2/(2\epsilon_0\epsilon_S) n_D \cdot z$ -Näherung der Verzerrung des Topfpotentials überschätzt, siehe vorhergehendes Kapitel 8), wohingegen die Dynamik sowohl mit Hartree- als auch Fock-Termen bei Hartree-Wellenfunktionen als Basis stärker zu niedrigen Energien schiebt (durchgehende Linien der Fig. 9.3(a), 9.3(b) und 9.3(c) sowie Konturplot Abb. 9.4(c)). Jetzt schiebt das Spektrum allerdings nicht mehr linear und zudem findet eine homogene Verbreiterung der Signale hin zu zunehmenden  $n_D$  statt. Dies deutet auf den Einfluß der Vielteilcheneffekte aufgrund der Coulomb-Austauschwechselwirkung hin.

Wie bereits beim FC-Grundzustand sorgt der Fock-Term in (9.1) dafür, daß das Absorptionsspektrum bei hohen Dotierungsdichten (siehe Abb. 9.3(c)) keine symmetrische Form mehr hat. Die Ausstülpung bei einer Energie von 262 meV ist Folge einer Verstärkung der IS-Polarisation an der Fermi-Kante, wo die Coulomb-Austauschwechselwirkung aufgrund der nahezu rechteckförmigen Fermi-Verteilung schwächer ausgeprägt ist als bei betragsmäßig kleineren  $\mathbf{k}$ -Vektoren; infolgedessen streben die Resonanzen der entsprechenden Oszillatoren wieder mehr in Hartree-Richtung.

## Spektren mit Hartree-Fock-Grundzustand

Nimmt man den HF-Grundzustand als Basis (siehe Abb. 9.6), so zeigt das Verhältnis zwischen Dotierungsdichte und dem Maximum des Absorptionsspektrums ein anderes, von der Wahl der Bewegungsgleichung fast unabhängiges Verhalten: zunächst vollziehen die Spektren mit zunehmender Dichte eine Blauverschiebung [16], da aufgrund der Fock-Terme die Nichtparabolizität der Subbänder zunimmt. Gleichzeitig aber nimmt der Bandkantenabstand wegen der wachsen-

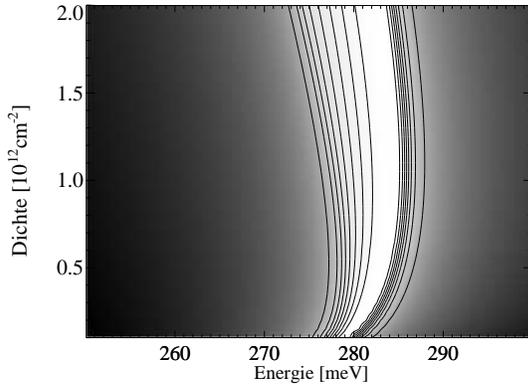


**Abbildung 9.5:** Lineares Absorptionsspektrum mit dem Hartree-Fock-Grundzustand für  $T_2=200$  fs für die Dotierung  $n_D=1.5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  und vier unterschiedliche Ausbaustufen der Bewegungsgleichung

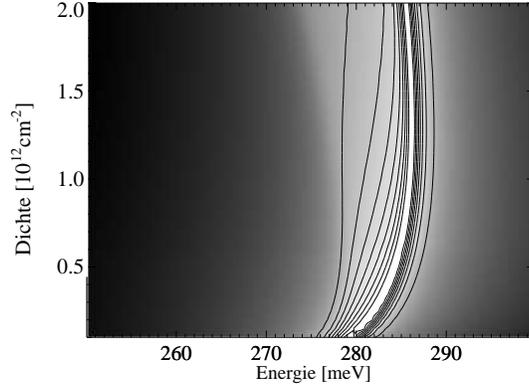
den Ausstülpung des Topfbodens ab, so daß beide Effekte sich für eine Dichte von ca.  $10^{12} \text{ cm}^{-2}$  kompensieren, bevor bei ca.  $1.2 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  der Effekt der Verkürzung des Abstands beider Subbänder stärker wird: bei diesen Elektronengasdichten ist die Anregung von Polarisation bei höheren  $\mathbf{k}$ -Werten wahrscheinlicher (Abb.en 9.6(a) bis 9.6(c)). Schaltet man zusätzlich in der

Dynamik die Abschirmung ein, so findet man bei niedrigen Dichten eine geringfügige Verbreiterung des Absorptionssignals, während das Signal in der ‘‘Mitte’’ (bei ca.  $10^{12} \text{cm}^{-2}$ ) wegen der abgeschwächten Fock-Terme schmäler als im abschirmungsfreien Fall ist. Mit wachsender Dichte wird es noch schmäler (Abb. 9.6(d)) und kommt der FC-Dynamik am nächsten (Abb. 9.6(a) sowie 9.7(c)).

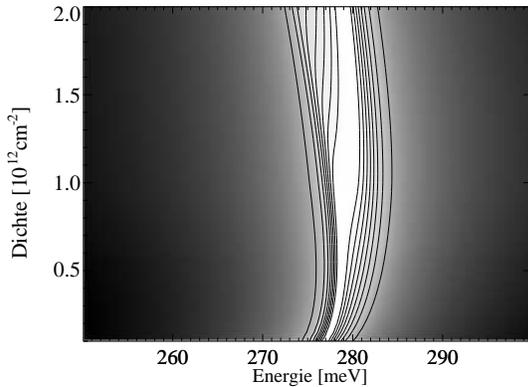
Wie auch in [63] berichtet wird, ist eine Verbreiterung der Spektren in den Konturplots von 9.6) gut zu erkennen. Betrachtet man die Form der Absorptionsspektren hin zu steigenden



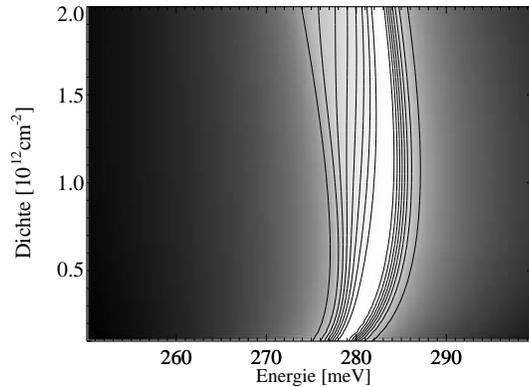
(a) FC-Dynamik



(b) Hartree-Dynamik



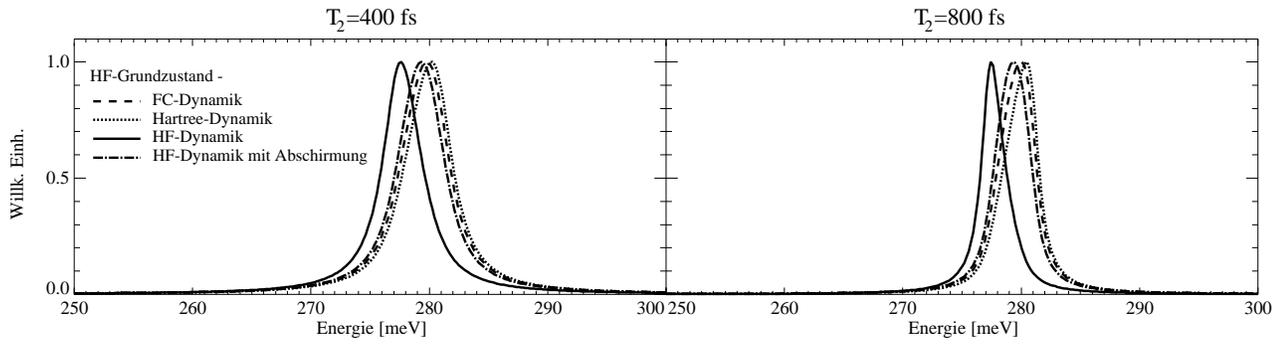
(c) Hartree-Fock-Dynamik



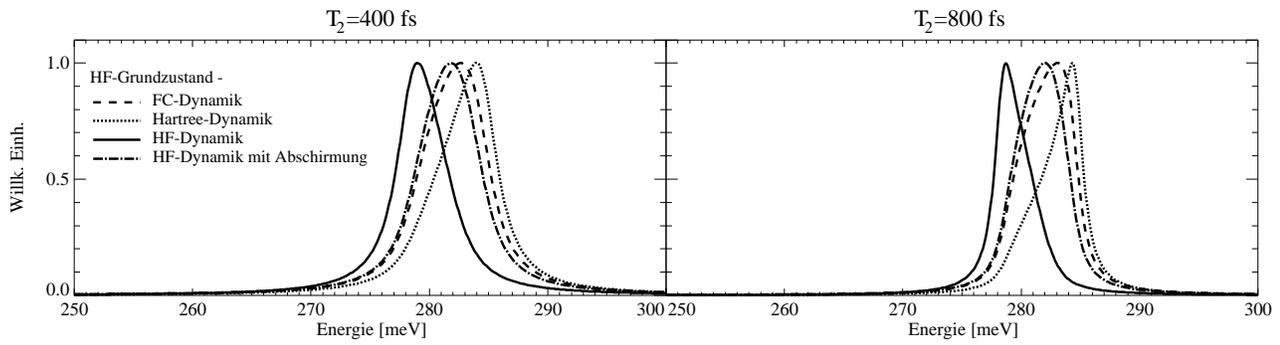
(d) Hartree-Fock-Dynamik mit statischer Abschirmung

**Abbildung 9.6:** Lineare Absorptionsspektren für Dichten  $n_D$  von  $1 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-2}$  bis  $2 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-2}$   $T_2=800 \text{fs}$  mit Hartree-Fock-Grundzustand als Basis und vier unterschiedlichen Ausbaustufen der Bewegungsgleichung

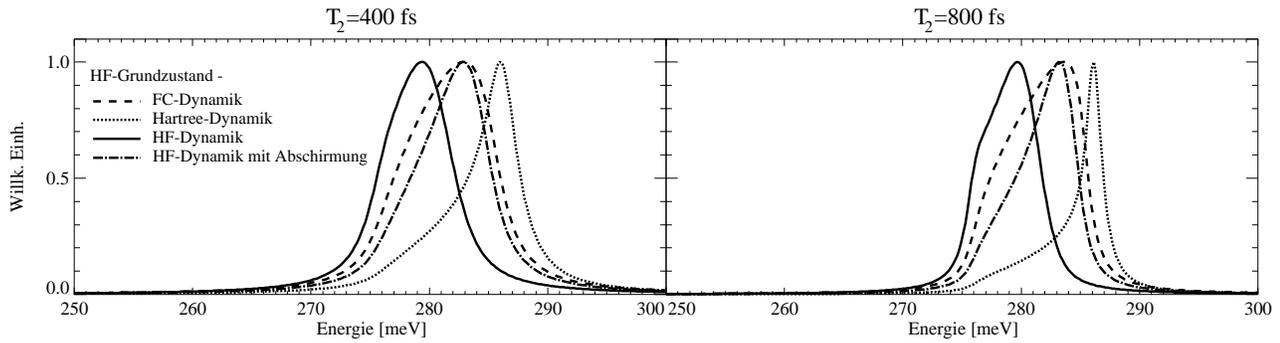
Dephasierungszeiten  $T_2$ , erkennt man, daß bei niedrigen  $T_2$  die Form der Spektren weitgehend unabhängig von den eingeschalteten Termen fast symmetrisch ist, vor allem bei der niedrigen Dotierdichte  $n_D$ . Hier fällt sofort ins Auge, daß schon die Nichtparabolizität des HF-Grundzustandes das Spektrum auch ohne Hartree- und Fock-Terme in den zeitabhängigen



(a)  $n_D = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$



(b)  $n_D = 5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$



(c)  $n_D = 1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$

**Abbildung 9.7:** Lineare Absorptionsspektren für  $T_2 = 400, 800 \text{ fs}$  mit Hartree-Fock-Grundzustand als Basis für drei verschiedene Dotierungen und vier unterschiedliche Ausbaustufen der Bewegungsgleichung

Gleichungen sehr stark nach rechts schiebt (Abb. 9.5). Die Hartree-Terme in der Dynamik sorgen für die stärkste Blauverschiebung, wohingegen die Dynamik mit Fock-Termen das Spek-

trum wieder stärker rotverschiebt, da die Subbänder bei vom Betrag her höheren  $\mathbf{k}$ -Werten aufgrund der Nichtparabolizität energetisch näher beieinander liegen und die angeregte Polarisation an der Fermi-Kante nicht so stark durch die Coulomb-Austauschwechselwirkung mit den Elektronen abgeschwächt wird wie bei niedrigen  $\mathbf{k}$ . Dieses Verhalten kann also durch das Coulomb-Enhancement erklärt werden. Wenn man die Abschirmung berücksichtigt, erhält man wiederum eine Abschwächung dieses Effektes, das resultierende Spektrum liegt zwischen dem reinen HF-Spektrum und dem aus der Kombination *HF-Grundzustand - Hartree-Dynamik*.

Die Spektren nehmen zu höheren Dephasierungszeiten und größeren Dotierungsdichten hin eine asymmetrische Gestalt an. Betrachten wir zunächst den Fall, bei dem der HF-Grundzustand in die FC-Dynamik eingeht. Besonders bei großen  $T_2$  (Abb. 9.7(c), rechte Seite) erkennt man, daß sich das Spektrum auf der linken Seite ausstülpt – eine Folge der bereits erwähnten Nichtparabolizität der Bänder. Der Bandabstand erreicht bei  $\mathbf{k}=0$  sein Maximum von 285 meV und wird hin zu höheren  $\mathbf{k}$ -Werten geringer (siehe Abb. 8.6(c); er nähert sich asymptotisch dem Abstand der Hartree-Einteilchenwellenfunktionen von ca. 264 meV).

Das Maximum des Spektrums liegt bei 283 meV, was auch der Fermi-Kante entspricht. Somit ist auch die Ausstülpung der Kurve auf der linken Seite bzw. der plötzliche Abfall auf der rechten einfach zu erklären: bei niedrigen Temperaturen gibt es jenseits der Energiedifferenz von 285 meV kaum noch Elektronen mit entsprechenden  $\mathbf{k}$ -Werten. Somit ist das Spektrum der FC-Dynamik eine genaue Abbildung der nichtparabolischen Energiedifferenz der HF-Subbänder. Die Übereinstimmung mit Gleichung (6.17), die die lineare Absorption eines Systems im Niederdichtefall mit einer Basis aus Einteilchenwellenfunktionen mit willkürlicher Dispersion als Antwort auf einen  $\delta$ -Puls beschreibt, ist bei den betrachteten Dephasierungszeiten in Abb. 9.7 sehr gut. An dieser Gleichung läßt sich ablesen, daß die Form des Spektrums wesentlich durch die Dephasierungszeit  $T_2$  mitbestimmt wird.

Der Einbau der Hartree-Terme in die Bewegungsgleichungen verstärkt vor allem Elektronenübergänge nahe  $\mathbf{k}=0$ . Bei der höchsten Dotierungsdichte und  $T_2=800$  fs ist dem Peak im Spektrum bei 286 meV ein langer Schwanz bis hinunter zu ca. 272 meV vorgelagert (Abb. 9.7(c), rechte Figur, gepunktete Absorptionslinie). Der blauverschobene Peak ist in erster Linie dem Depolarisationsshift zu verdanken, d.h. der kollektiven Bewegung aller Elektronen als Reaktion auf die einfallende Lichtwelle des Anregungspulses.

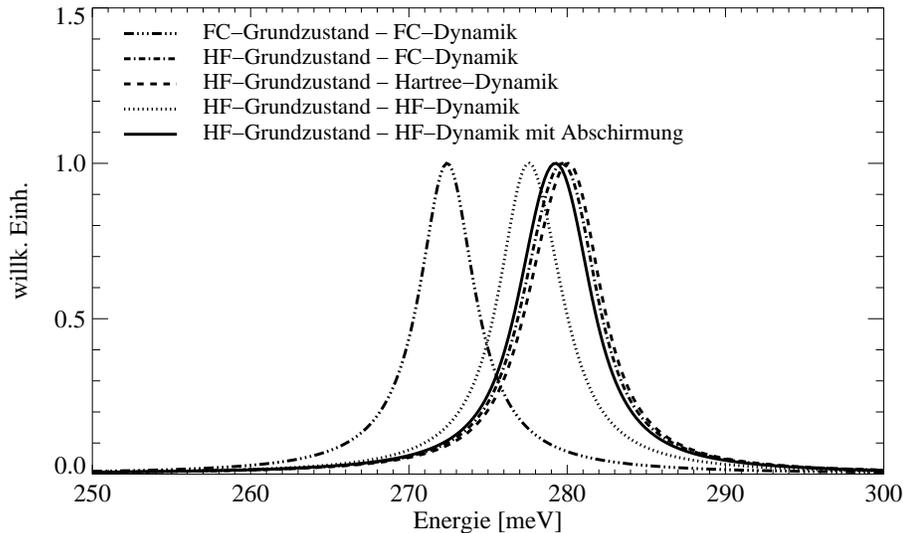
Wird die Dynamik um Hartree- und Fock-Terme ergänzt, dann findet wiederum eine starke Rotverschiebung statt (Abb. 9.7(c), rechte Figur, durchgezogene Linie). Da die Fock-Terme den Hartree-Termen entgegenwirken und deren Effekt teilweise wieder aufheben, sorgt das Coulomb-Enhancement dafür, daß sich der Schwerpunkt der angeregten Polarisation im  $\mathbf{k}$ -Raum zur Fermi-Kante bewegt (siehe auch Abb. 8.6(c) mit der Energiedifferenz zwischen den HF-Dispersionsrelationen der beiden Subbänder). Vor allem bei den niedrigeren  $\mathbf{k}$ -Werten ist die Coulomb-Austauschwechselwirkung der ( $n = 1$ )-Elektronen mit der Polarisation bei benachbarten  $\mathbf{k}$ 's sehr stark, während Polarisation an der Fermi-Kante, wo die Schwingfrequenz aufgrund der Coulomb-Renormierung der Subbänder nicht so hoch ist, wegen der steil abfallenden Elektronenverteilung nicht so sehr beeinflusst wird.

Die Berücksichtigung der statischen Abschirmung schwächt diesen Effekt wieder ab.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Wechselwirkungsterme in der Dynamik eine Verschiebung der Absorptionsspitze bewirken. Eine durch den Fock-Anteil an der Bewegungsgleichung verursachte Asymmetrie macht sich lediglich bei hohen Dotierungsdichten und geringer Dephasierung als Ausstülpung bemerkbar. Da die maximale Breite des Spektrums vor allem durch die Energiedifferenz zwischen den Subbändern und die Fermi-Kante bestimmt wird, kristallisiert sich Nichtparabolizität als wesentlicher Faktor für Asymmetrien in den Spektren heraus.

## 9.2 Spektren mit experimentell bestimmten Dephasierungszeiten

Die Abb.en 9.8(a) bis 9.8(c) zeigen lineare Spektren des FC- und des HF-Grundzustands, wobei die phänomenologische Dämpfung der Phasenkohärenz,  $T_2$  experimentell aus den zeitintegrierten FWM-Intensitäten ermittelt wurde (siehe Abb. 2.1; [5]). Der HF-Zustand dient als Basis in Kombination mit der Dynamiksimulation in vier unterschiedlichen Ausbaustufen.

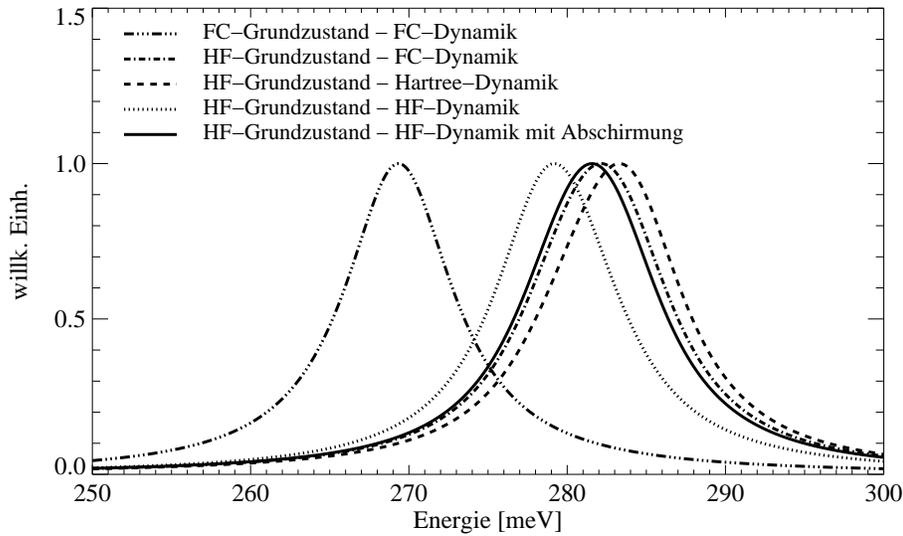


(a)  $n_D = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ ,  $T_2 = 310 \text{ fs}$

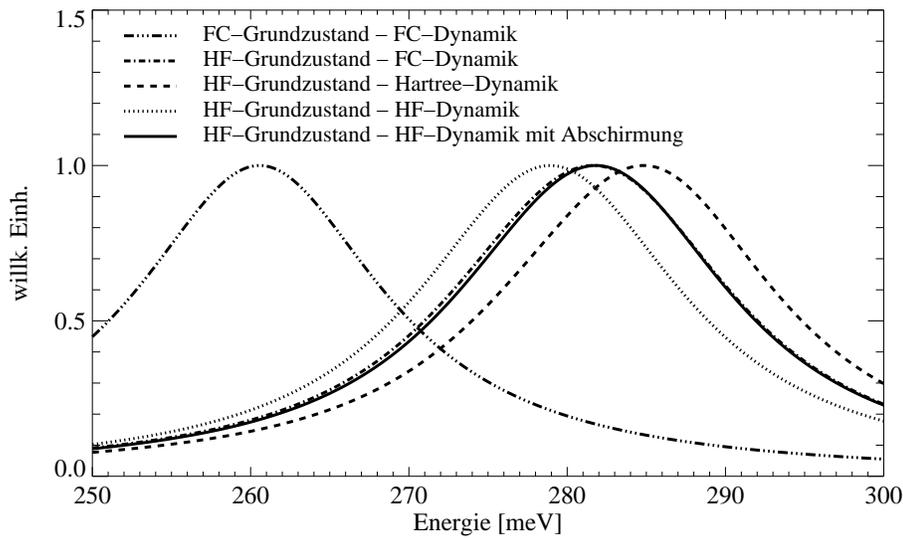
**Abbildung 9.8:** Berechnete Spektren mit den experimentell ermittelten Dephasierungszeiten

Unabhängig von der Art der Bewegungsgleichungen schiebt der HF-Grundzustand – verglichen mit dem FC-Zustand – das Spektrum mit zunehmendem  $n_D$  um ca. 10 bis 20 meV nach rechts. Nimmt man die Hartree-Terme in der Dynamik mit, findet nochmals eine Blauverschiebung –je nach Dichte– um 1 bis 3 meV statt. Diese Verschiebung ist der Depolarisationsshift (siehe Gl. (7.10) und [64]). Das Einbeziehen der Fock-Terme liefert im Gegensatz dazu wieder eine Rotverschiebung um 3 bis 6 meV. Schließlich bringt die Berücksichtigung der Abschirmung die Absorptionsspektren wegen der abgeschwächten Coulomb-Matrixelemente im Bereich kleiner  $\mathbf{k}$ -Werte zurück in die Nähe der Kombination *HF-Grundzustand - FC-Dynamik*.

Anzumerken ist lediglich noch, daß sich die Form des Absorptionsspektrums erwartungsgemäß mit wachsender Phasenrelaxationszeit  $T_2$  verschmälert. Eine Ausbildung von Strukturen ist nicht beobachtbar.



(b)  $n_D=5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ ,  $T_2=158 \text{ fs}$



(c)  $n_D=1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ ,  $T_2=69 \text{ fs}$

**Abbildung 9.8:** Berechnete Spektren mit den experimentell ermittelten Dephasierungszeiten (Fortsetzung)

# Kapitel 10

## Resultate der Vierwellenmisch-Simulationen

### 10.1 FWM-Signale bei nichtresonanter Anregung

Wie bereits früher erwähnt, sind Vierwellenmischexperimente ein wichtiges Mittel, den Zerfall kohärenter Polarisation nach Anregung mit Lichtpulsen zu untersuchen. In diesem Kapitel wird der Einfluß der Vielteilcheneffekte auf das Signalverhalten eingehender untersucht. FWM-Experimente verstärken diese aufgrund ihres nichtlinearen Charakters wesentlich besser als lineare Ein-Strahl-Absorptionsmessungen.

Die untersuchten Systemkonfigurationen unterscheiden sich darin, ob und welche Vielteilchenkorrelationsterme bei der Berechnung sowohl der Basis der Einteilchenwellenfunktionen als auch der Bewegungsgleichungen für die Dichtematrix berücksichtigt werden. In den nachfolgenden Abschnitten werden folgende Ausbaustufen betrachtet (siehe auch Abschnitt 9):

- *FC-Grundzustand - FC-Dynamik*: als Basis dient die zeitunabhängige Gleichung (4.1), bei der Hartree- und Fock-Terme vernachlässigt sind. Die Dynamik gehorcht ebenfalls nur den wechselwirkungsfreien Anteilen von Gl. (7.20):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta f_{n_1 n_2, \mathbf{k}}^{(\lambda, \nu)} &= \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \varepsilon_{n_2, \mathbf{k}}^{(0)} - \varepsilon_{n_1, \mathbf{k}}^{(0)} \right) - \frac{1 - \delta_{n_1 n_2}}{T_2} \right] \delta f_{n_1 n_2, \mathbf{k}}^{(\lambda, \nu)} \\ &+ \frac{i}{\hbar} M_{n_1 n_2} E^{(\lambda, \nu)}(t) \left( f_{n_2 \mathbf{k}}^{(0)} - f_{n_1 \mathbf{k}}^{(0)} \right) \\ &- \frac{i}{\hbar} \sum_{\lambda', \nu'} E^{(\lambda - \lambda', \nu - \nu')}(t) \sum_{n_3} \left( M_{n_2 n_3} \delta f_{n_1 n_3, \mathbf{k}}^{(\lambda', \nu')} - M_{n_3 n_1} \delta f_{n_3 n_2, \mathbf{k}}^{(\lambda', \nu')} \right). \end{aligned} \quad (10.1)$$

Diese Gleichungen entkoppeln vollständig in  $\mathbf{k}$ , folglich beschreiben sie Vierwellenmischen an einem Ensemble von Zwei-Niveau-Systemen.

- *Hartree-Grundzustand - Hartree-Dynamik*: der Grundzustand als Lösung des in Abschnitt 4.2 beschriebenen Hartree-Verfahrens wird als Basis verwendet; analog kommt zur FC-

Bewegungsgleichung (10.1) der Ausdruck

$$\begin{aligned}
& -2\frac{i}{\hbar} \left[ \left( f_{n_2\mathbf{k}}^{(0)} - f_{n_1\mathbf{k}}^{(0)} \right) \sum_{n_3, n_4, \mathbf{k}'} V_0^{n_2 n_3 n_4 n_1} \delta f_{n_3 n_4, \mathbf{k}'}^{(\lambda, \nu)} \right. \\
& \left. - \sum_{\lambda', \nu'} \sum_{n_3, n_4, n_5, \mathbf{k}'} \delta f_{n_4 n_5, \mathbf{k}'}^{(\lambda - \lambda', \nu - \nu')} \left( V_0^{n_2 n_4 n_5 n_3} \delta f_{n_1 n_3, \mathbf{k}}^{(\lambda', \nu')} - V_0^{n_3 n_4 n_5 n_1} \delta f_{n_3 n_2, \mathbf{k}}^{(\lambda', \nu')} \right) \right] \quad (10.2)
\end{aligned}$$

mit den Hartree-Termen hinzu.

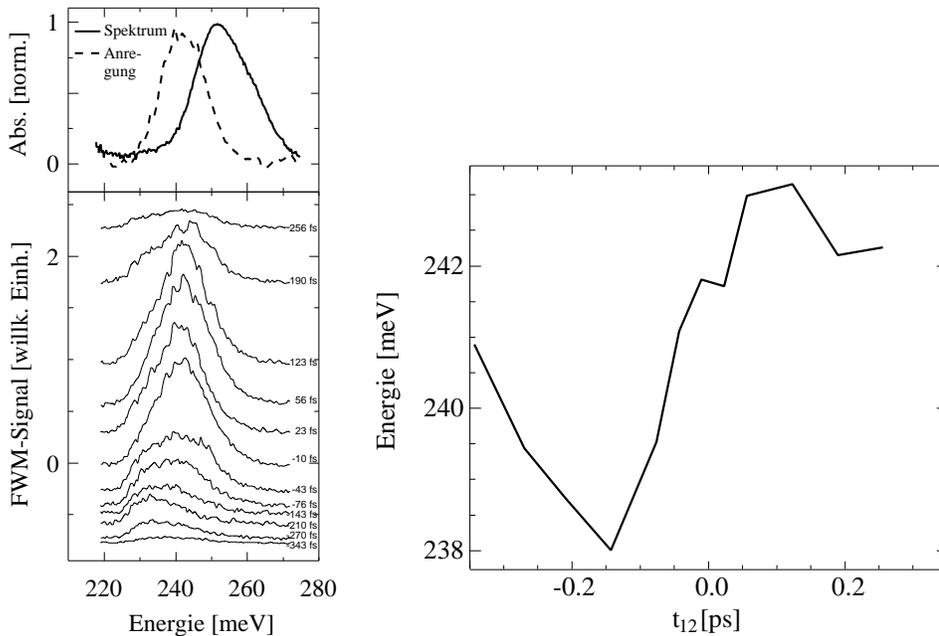
- *Hartree-Fock-Grundzustand - Hartree-Fock-Dynamik*: der HF-Grundzustand als Lösung von (4.7) wird an die zeitabhängige HF-Gleichung (7.20) übergeben.
- *Hartree-Fock-Grundzustand - abgeschirmte Hartree-Fock-Dynamik*: es gilt das gleiche wie im letzten Punkt, jedoch werden die Coulomb-Wechselwirkungs-Matrixelemente unter Einfluß von statischer Abschirmung bestimmt, d.h. mittels der abgeschirmten Coulomb-Matrixelemente als Lösungen des linearen Gleichungssystems (7.29) aus Abschnitt 7.2.
- *Inhomogene Verbreiterung*: die statistischen Schwankungen bei den Topfparametern eines Multi-Quantum-Wells werden berücksichtigt. Die Schwankungen werden durch den Energie-Offset  $\Delta\varepsilon$  der Bandlücke realisiert, d.h. in der Bewegungsgleichung (7.20) (und allen Vereinfachungen) wird die Energiedifferenz  $\varepsilon_{n_2, \mathbf{k}}^{(0)} - \varepsilon_{n_1, \mathbf{k}}^{(0)}$  durch die über alle  $\mathbf{k}$  konstante Verschiebung  $\varepsilon_{n_2, \mathbf{k}}^{(0)} - \varepsilon_{n_1, \mathbf{k}}^{(0)} + \Delta\varepsilon$  ersetzt. Die Lösungen werden dann gemäß

$$\bar{f} = 2\sqrt{\frac{\log 2}{\pi}} \sigma \sum_n e^{-4\log 2 \left(\frac{\Delta\varepsilon_n}{\sigma}\right)^2} f(\Delta\varepsilon_n) \quad (10.3)$$

mit der Halbwertsbreite  $\sigma$  der Gauß-Verteilung gewichtet. Um den Einfluß von Interferenz-Effekten beurteilen zu können, bietet sich auch eine inkohärente Summierung der Beträge an: dazu ersetzt man das komplexe  $f(\Delta\varepsilon_n)$  durch seinen Betrag. Die inhomogene Verbreiterung bewirkt wegen der verschiedenen Eigenwerte der beteiligten Quantentöpfe destruktive Interferenz, die den Zerfall kohärenter Polarisation beschleunigt und damit das Spektrum in die Breite zieht.

### 10.1.1 Signalverhalten bei Variation der Verzögerungszeiten

Untersucht man unter Beibehaltung einer Anregungsfrequenz das Verhalten der unterschiedlichen Ausbaustufen des verwendeten Modells unter Variation der Verzögerungszeit, so kann man eine schwache Bewegung des Vierwellenmischsignals in Abhängigkeit von der Verzögerung  $t_{12}$  beobachten, insbesondere wenn man nichtresonant anregt. Die Dauer der Anregungspulse wurde sowohl in den Experimenten als auch in den numerischen Berechnungen zu  $\tau=130$  fs gewählt [5], die Anregungsenergie liegt in beiden Fällen um  $\Delta\omega=10$  meV unterhalb des Absorptionsmaximums.

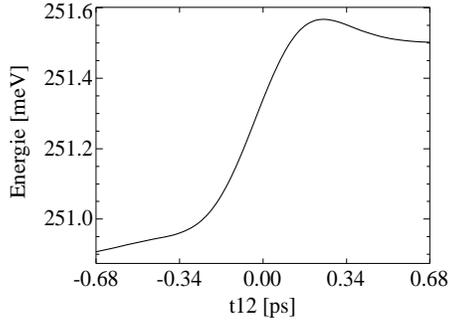


(a) FWM-Intensitäten und Absorptionsmaximum (oberer Teil, zusammen mit dem Spektrum des Anregungspulses; die Zeiten im unteren Teil sind die Verzögerungen  $t_{12}$ )

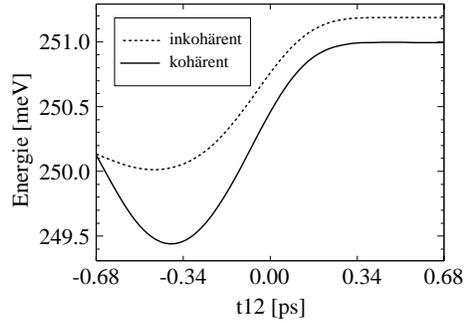
(b) Signalschwerpunkt der FWM-Signale in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit

**Abbildung 10.1:** Experimentelle FWM-Resultate bei nichtresonanter Anregung um ca. 10 meV unterhalb des Absorptionsmaximums (Dotierungsdichte  $n_D=1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ ) aus [5]

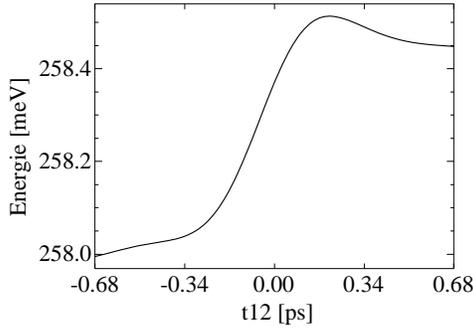
Kommen wir zunächst zum Experiment (Abb. 10.1): von der Anregungsenergie ausgehend (Abb. 10.1(a), oberer Teil, gestrichelte Kurve) bewegt sich der Schwerpunkt der spektral aufgelösten FWM-Intensität um 3 meV nach unten, um bei  $t_{12}=150$  fs um ca. 5 meV steil wieder aufzusteigen (Maximum bei  $t_{12}=100$  fs), und findet sich schließlich gegen Ende des Beobachtungszeitraum bei einer Energie von 242 meV ein (Abb. 10.1(b)).



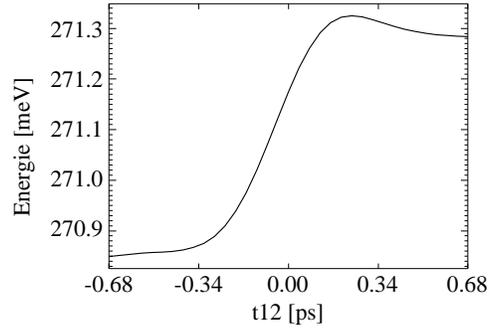
(a) Signalschwerpunkt *FC-Grundzustand - FC-Dynamik* (Resonanz bei 260 meV)



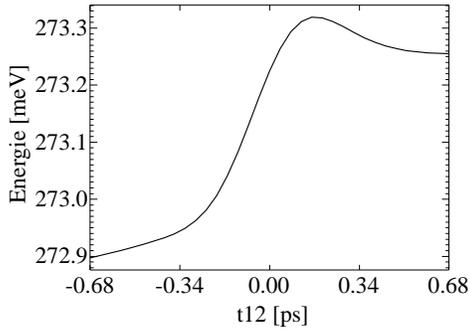
(b) Signalschwerpunkt *FC-Grundzustand - FC-Dynamik* mit inhomogener Verbreiterung von  $\sigma=10$  meV (Resonanz bei 260 meV)



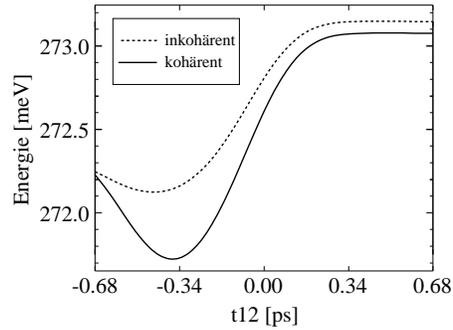
(c) Signalschwerpunkt *Hartree-Grundzustand - Hartree-Dynamik* (Resonanz bei 267 meV)



(d) Signalschwerpunkt *Hartree-Fock-Grundzustand - Hartree-Fock-Dynamik* (Resonanz bei 280 meV)



(e) Signalschwerpunkt *Hartree-Fock-Grundzustand - abgeschirmte Hartree-Fock-Dynamik* (Resonanz bei 282 meV)



(f) Signalschwerpunkt *Hartree-Fock-Grundzustand - abgeschirmte Hartree-Fock-Dynamik* mit inhomogener Verbreiterung von  $\sigma=10$  meV (Resonanz bei 282 meV)

**Abbildung 10.2:** Verhalten der FWM-Signale in  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ -Richtung bei off-resonanter Anregung ( $-10$  meV) bei der Dichte  $n_D = 1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  und einer Dephasierungszeit von  $T_2 = 69$  fs

Ein ähnliches Verhalten weisen auch die numerischen Resultate auf. Im Fall hoher Dämpfung, d.h. niedriger Dephasierungszeiten  $T_2$  liegt die Schwerpunktsenergie des FWM-Signals zunächst sehr nahe am Anregungspuls (Abb.en 10.2(a), 10.2(c), 10.2(d) sowie 10.2(e)) und bewegt sich dann um 0.5 meV nach oben, fällt bei ca.  $t_{12}=200$  fs leicht wieder ab und pendelt sich schließlich (innerhalb des Beobachtungszeitraums von  $t_{12}=-680$  fs .. 680 fs) 0.05 meV tiefer ein.

Im FC-Fall beträgt der Anstieg fast 0.7 meV und im Hartree-Fall liegt er leicht abgeschwächt bei 0.5 meV. Bei der HF-Dynamik sowohl mit als auch ohne statische Abschirmung steigt die Kurve des Signalschwerpunkts zunächst um etwa 0.4 meV an, um dann bei ca.  $t_{12}=200$  fs wieder leicht abzufallen (Abb.en 10.2(d), 10.2(e)).

Bei negativen Verzögerungszeiten wird zunächst durch den zeitlich vorangehenden  $\mathbf{k}_2$ -Strahl Polarisation in  $\mathbf{k}_2$ -Richtung generiert, die wegen der raschen Phasenrelaxation schon weitgehend abgeklungen ist, wenn der nun eintreffende, ansteigende  $\mathbf{k}_1$ -Puls sich mit dem abfallenden  $\mathbf{k}_2$ -Puls zum transienten Gitter überlagert. Beim abgebeugten  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ -Signal herrscht das Anregungsspektrum vor, da Strahlung in der benachbarten  $\mathbf{k}_2$ -Richtung einen größeren Anteil hat als diejenige in  $\mathbf{k}_1$ -Richtung (aus Tabelle B.2 kann man entnehmen, daß der  $\mathbf{k}_2$ -Anregungspuls in quadratischer und der  $\mathbf{k}_1$ -Puls nur in einfacher Ordnung in das FWM-Signal eingeht), wo während der Existenz des transienten Gitters gerade Polarisation aufgebaut wird.

Bei positiven  $t_{12}$  ist die Dominanz des Anregungsspektrums abgeschwächt, weil die durch den jetzt zeitlich folgenden  $\mathbf{k}_2$ -Puls angeregte  $\mathbf{k}_2$ -Polarisation während der Existenz des transienten Gitters noch im Ansteigen begriffen ist und damit einen stärkeren Anteil am abgebeugten FWM-Signal hat.

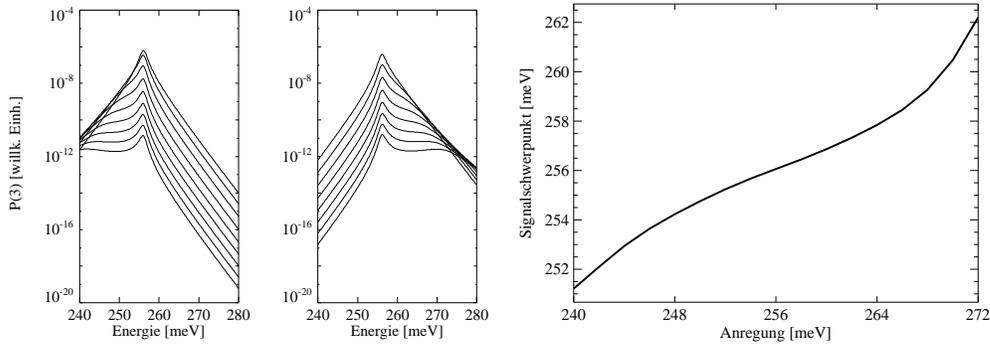
Die langsame Bewegung des Signalschwerpunkts von der Anregungsenergie in Richtung der Resonanz des Systems ordnet man dem Begriff der *adiabatischen Resonanz* zu, auf den wir im nachfolgenden Abschnitt 10.1.2 wieder zu sprechen kommen.

Schaltet man inhomogene Verbreiterung (Abb.en 10.2(b) und 10.2(f)) hinzu und summiert nach (10.3) über die inhomogene Verteilung der Töpfe des MQW's die Ein-Quantentopf-Polarisationen kohärent, so ist sogar bei hohen negativen Verzögerungszeiten  $t_{12}$ , die ein Vielfaches von  $T_2$  betragen, eine Absenkung des Energieschwerpunkts um ein halbes meV zu beobachten. Danach vollzieht sich bei positiven Delays wieder ein Einpendeln, allerdings um 1 meV höher als der ursprüngliche Schwerpunkt. Summiert man die Polarisation inkohärent auf, d.h. addiert man lediglich die Beträge, resultiert daraus eine lediglich schwache Absenkung der Schwerpunktsenergie (Abb. 10.2(b) bzw. 10.2(f), jeweils die gestrichelte Linie). Die Absenkung ist also ein reiner Interferenzeffekt, wobei sich die in Resonanz mit der Anregung befindlichen Oszillationen durchsetzen.

Somit gibt die Simulation das im Experiment beobachtete Schwanken des FWM-Signals qualitativ gut wieder, die Stärke des Ausschlags in den theoretischen Berechnungen wird aber eher unterschätzt (Ursache dafür könnte eine ungenaue Abschätzung der aus den Experimenten entnommenen Eingangsparameter sein). Die Rotverschiebung des Signalschwerpunkts bei negativen Delays kann als Effekt der Inhomogenität interpretiert werden. Der Anstieg hingegen ist ein Feature des Zwei-Niveau-Modells, zumindest sind in den einzelnen Ausbaustufen bei der niedrigen Dephasierungszeit von  $T_2=69$  fs keine wesentlichen Unterschiede auszumachen.

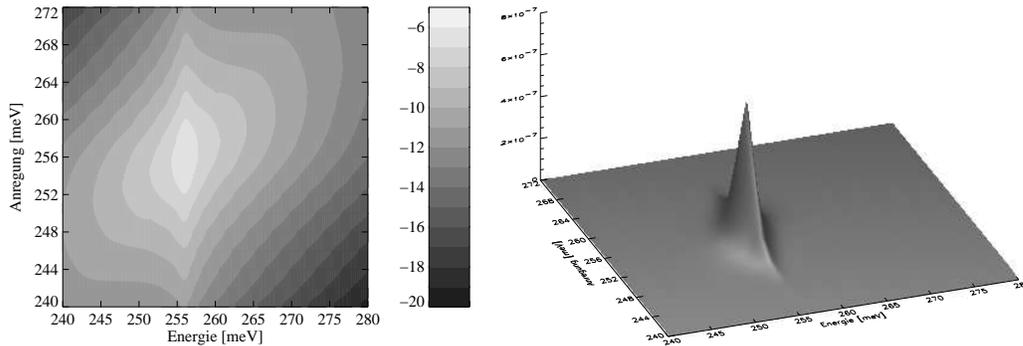
### 10.1.2 Signalverhalten bei Variation der Anregungsenergie

In Abb. 10.3 ist das Vierwellenmischsignal eines wechselwirkungsfreien Systems gegen die Energie der eingehenden Pulse bei einer Verzögerungszeit  $t_{12}=0$  fs geplottet. Die Frequenz des anregenden Laserstrahls beeinflusst die Form des FWM-Signals: neben dem resonanten Anteil sieht man Verbiegungen des spektral dargestellten Signals im Bereich des Anregungspulses (Abb. 10.3(a)). Das Signal wird seitlich angehoben: der resonante Teil der Polarisation wird mit zunehmender Entfernung des Anregungspulses von der Resonanz schwächer, während der zunächst dadurch verdeckte Anteil im Bereich des Anregungspulses stärker hervortritt.



(a) linker Plot: FWM-Signale für die Anregungsenergien von 240 (unten) bis 256 meV (oben) in 2 meV-Schritten; rechter Plot: Signale für 258 (oben) bis 272 meV (unten)

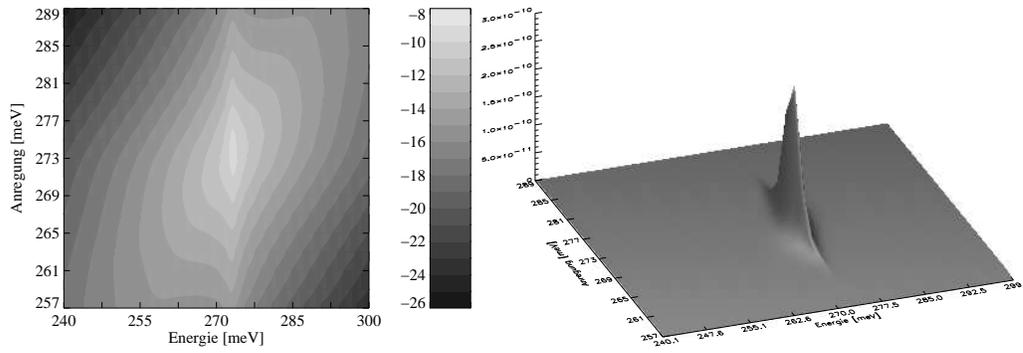
(b) Signalschwerpunkt in Abhängigkeit von der Anregungsenergie



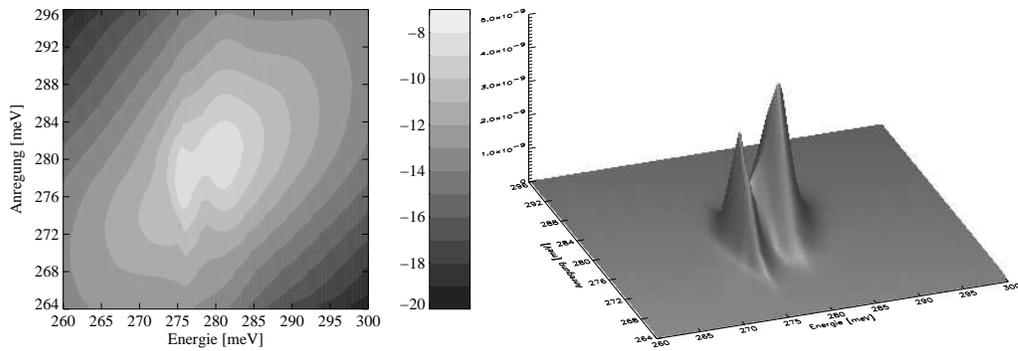
(c) Contourplot der Vierwellenmischsignale (Rechte Seite: Intensitäts-Graustufen-Skala aufgetragen gegen den Logarithmus der Intensität)

(d) Intensitäten der Vierwellenmischsignale (in willk. Einh.) aufgetragen gegen die Anregungs- und die Signalenergie

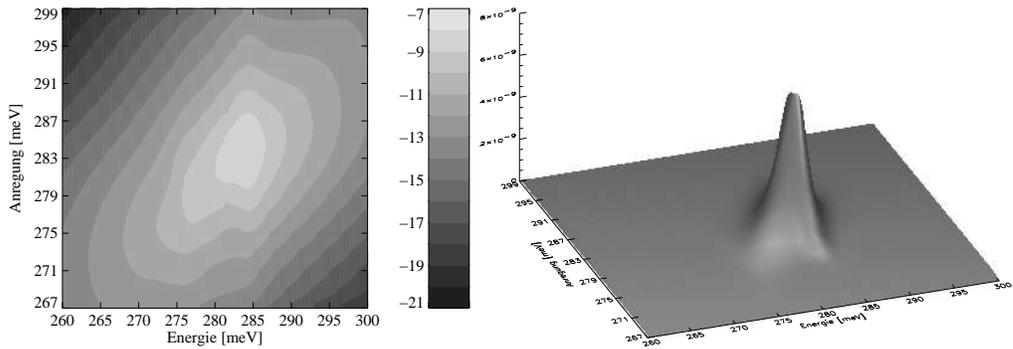
**Abbildung 10.3:** FWM-Signale in  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ -Richtung für den Fall FC-Grundzustand - FC-Dynamik in Abhängigkeit von der Energie der anregenden Laserpulse bei  $T_2=800$  fs für eine Dotierungsdichte von  $n_D=1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$



(a) Hartree-Grundzustand - Hartree-Dynamik



(b) HF-Grundzustand - HF-Dynamik



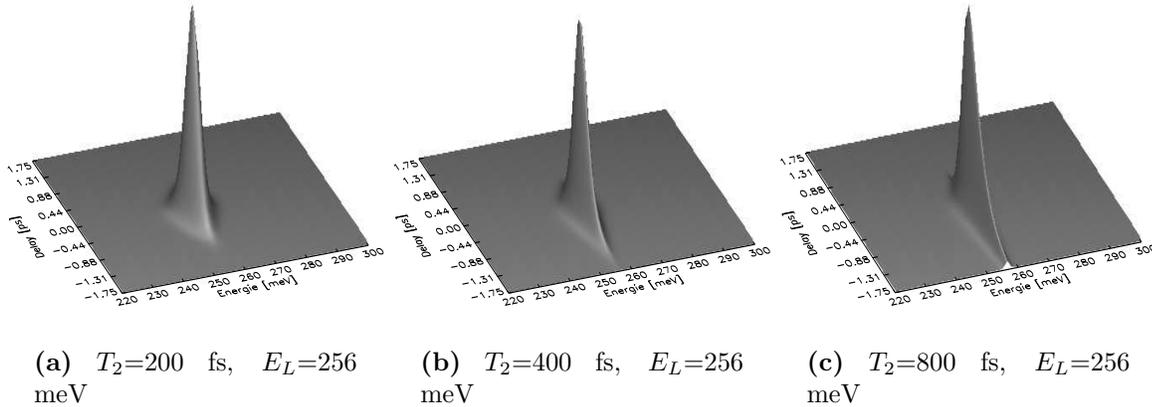
(c) HF-Grundzustand - HF-Dynamik mit Abschirmung

**Abbildung 10.4:** FWM-Signale in  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ -Richtung für den Fall in Abhängigkeit von der Energie der anregenden Laserpulse bei  $T_2=800$  fs für eine Dotierungsdichte von  $n_D=1.5 \cdot 10^{12}$  cm $^{-2}$ . Linke Seite: Contourplot mit Intensitäts-Graustufen-Skala aufgetragen gegen den Logarithmus der Intensität; rechte Seite: 3D-Plot

Allerdings zeigt der 3D-Plot 10.3(d), daß man eigentlich nur im Bereich der Zwei-Niveau-Resonanz eine hinreichend starke Intensität des Polarisationsignals der FWM-Abstrahlrichtung

erzielt; daneben ist der durch den Anregungsstrahl hervorgerufene Signalanteil am Spektrum relativ schwach.

Für verschiedene Ausbaustufen des Modells wird in den Abb.en 10.4(a), 10.4(b) und 10.4(c) dargestellt, wie das FWM-Signal reagiert, wenn man bei einem Delay von  $t_{12}=0$  ps die Pulsenergie variiert: im Hartree-Fall ergibt sich außer dem charakteristischen Depolarisationsshift keine wesentliche Änderung der Form (Abb. 10.4(a), 3D-Plot). Diese Art der Vielteilchenwechselwirkung erhält schließlich die Parabolizität.

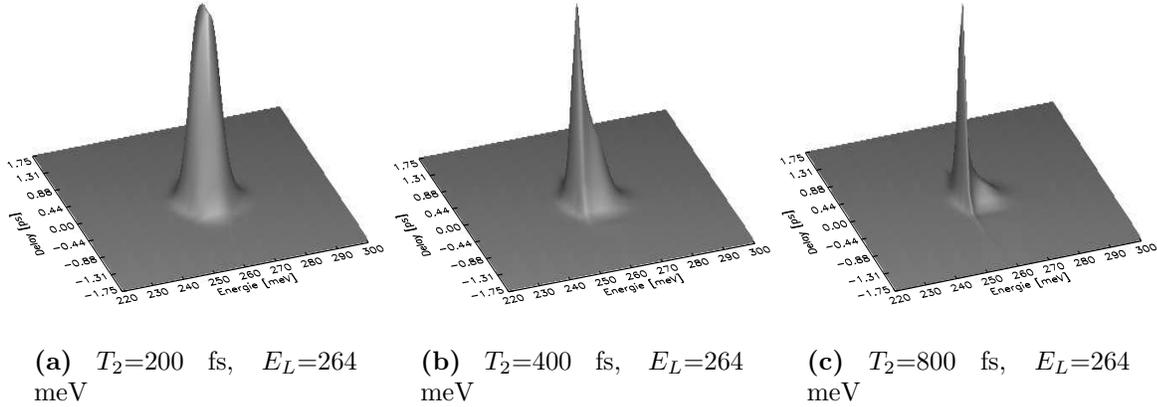


**Abbildung 10.5:** FWM-Spektren eines wechselwirkungsfreien Systems in  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ -Richtung aufgetragen gegen die Energie und die Verzögerung  $t_{12}$  bei einer Dichte von  $n_D=2 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ ; der Anregungspuls ( $\tau=130$  fs) ist in Resonanz mit dem Intersubbandübergang

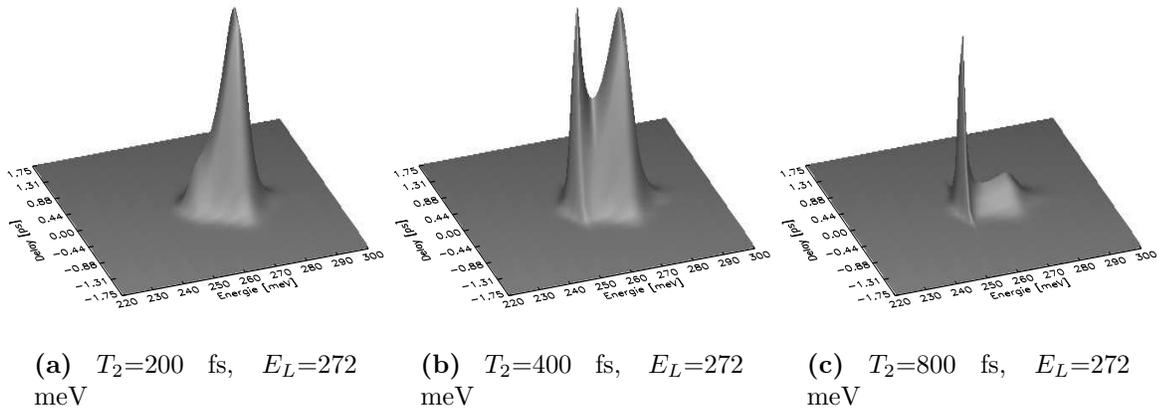
Im Hartree-Fock-Fall sieht man eine Aufspaltung des Signals in zwei Submaxima bei 277 und 282 meV (Abb. 10.4(b)), welche mit eingeschalteter Abschirmung zumindest bei  $T_2=800$  fs wieder verschwinden (Abb. 10.4(c), wobei aber eine Verbreiterung über mehrere meV bleibt). Anhand des HF-Kontourplots (Abb. 10.4(b) links) ist erkennbar, daß sich der linke Peak schon bei ca. 270 meV Anregungsenergie erhebt, während sich der zweite 4 meV darüber herausbildet. Die Coulomb-Austauschwechselwirkung der schwingenden Dipole untereinander transportiert in der Dynamik die Anregungsenergie zwischen den Dipolen aus dem Bereich der Fermi-Kante (wo die Abschwächung der Schwingungsenergie durch die Austauschwechselwirkung zwischen Elektronen und der Polarisation geringer ist) und denjenigen aus dem Resonanzbereich bei niedrigeren  $\mathbf{k}$  hin und her, so daß die Polarisation in zwei Peaks – einen im Nieder- und einen im Hochenergiebereich – kulminiert. Diese Peaks markieren also Amplituden gekoppelter Oszillatoren (siehe auch Abschnitt 10.4 über Quantenschwebungen). Diese Struktur ist äquivalent zur Ausstülpung des HF-Absorptionsspektrums auf der linken Seite (Abb. 9.7). Die Nichtlinearität des Systems in Form der Kopplung der schwingenden Dipole untereinander durch die Fock-Terme bewirkt also die Herausbildung einer Struktur.

Wenn bei einem System mit wechselwirkungsfreien Elektronen die Dephasierungszeit konstant gehalten wird, während gleichzeitig die Verstimmung der Anregung zunimmt, so tritt bei Delays

$t_{12}$  um den Zeitnullpunkt das Spektrum der Anregungspulse immer stärker in den Vordergrund (Abb.en 10.5, 10.6 und 10.7). Dabei ist die  $(2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)$ -Polarisation im Resonanzbereich als rela-



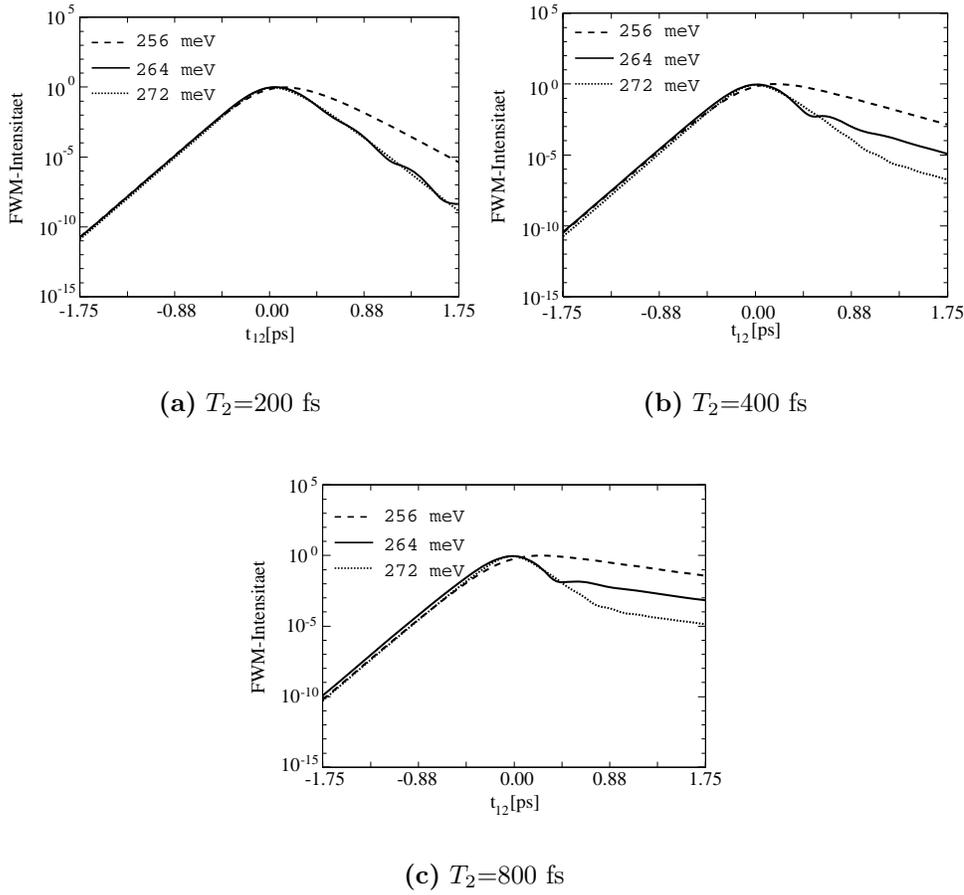
**Abbildung 10.6:** Parameter wie in Abb. 10.5, allerdings ist der Anregungspuls um +8 meV verstimmt



**Abbildung 10.7:** Parameter wie in Abb. 10.5, der Anregungspuls ist um +16 meV verstimmt

tiv schmale Erhebung zu erkennen, während mit wachsender Distanz zur Resonanz ein “Berg” im Bereich der Anregungsfrequenz deutlich hervortritt. Allerdings wächst nicht dieser Peak, nur die Erhebung im Resonanzbereich schrumpft. Umgekehrt beobachtet man bei konstant bleibender Anregungsenergie  $E_L$  und zunehmender Dephasierung  $T_2$ , daß der resonante Anteil des FWM-Signals immer stärker wird, während der Anteil des Eingangssignals konstant bleibt. Dieses Verhalten ist ebenfalls anhand der zeitintegrierten Darstellung (Abb. 10.8) ersichtlich: es ist die bereits im vorhergehenden Abschnitt 10.1.1 erwähnte adiabatische Resonanz: zunächst

nimmt der Verlauf des zeitintegrierten Signals (zur Erinnerung: bei einem sech-förmigen Anregungspuls, der für betragsmäßig große Zeiten  $t$  mit  $\exp(-|t|/\tau)$  geht) mit  $\exp(2/\tau)$  zu und fällt für eine bestimmte Zeit auch mit dem Reziproken davon wieder ab, bevor der Polarisationszerfall mit seinem  $\frac{2}{T_2}$ -Abfallverhalten in den Vordergrund tritt (der Faktor 2 rührt vom Betragsquadrat her [38]). Anders ausgedrückt heißt das, daß beim FWM-Signal mit wachsendem  $t_{12}$  die resonante Polarisationsstrahlung überwiegt. Bei der nichtresonanten Anregung unterhalb der Resonanz setzt der  $\frac{2}{T_2}$ -Zerfall bereits früher als im Resonanzfall ein, während bei der Anregung oberhalb der Anregungspuls länger überwiegt (sehr gut bei der niedrigen Dämpfung in Abb. 10.8(c) zu erkennen).

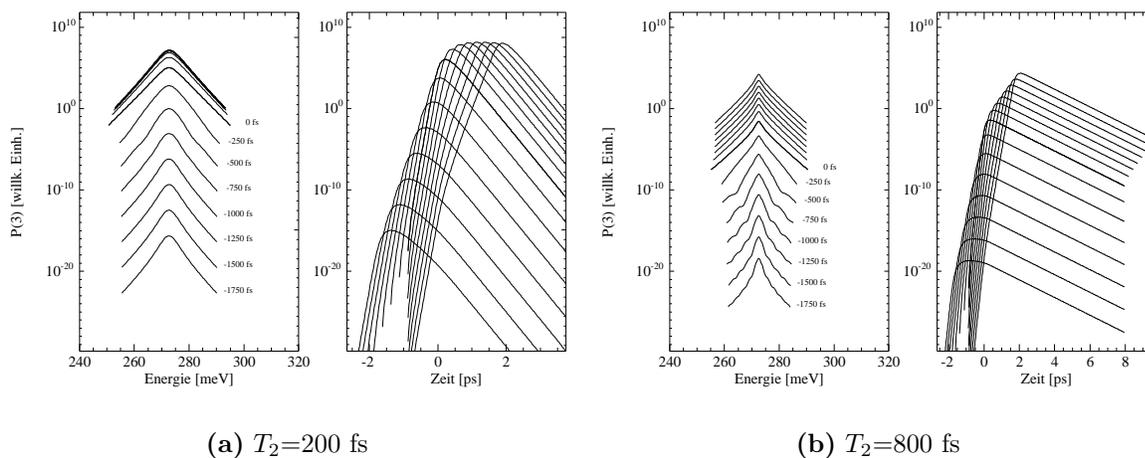


**Abbildung 10.8:** Zeitintegrierte Intensitäten der FC-Polarisation in  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ -Richtung aufgetragen gegen die Verzögerung  $t_{12}$  bei einer Dichte von  $n_D = 2 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$

Will man also den Polarisationszerfall messen, sollte sich der anregende Strahl energetisch nicht zu weit vom Intersubband-Resonanzpunkt des Halbleitermaterials entfernen, da man sonst anstelle des Polarisationszerfalls im wesentlichen den Anregepuls mißt. In den “FWM-Richtungen” (zur Erinnerung:  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$  und  $2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ ) hinterläßt das Polarisationssignal eine Spur wesentlich höherer Intensität als der Anregepuls.

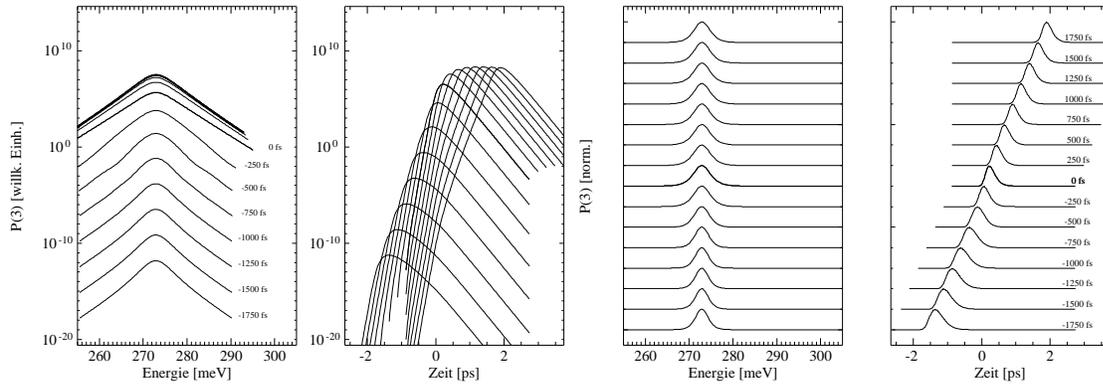
## 10.2 FWM-Signale bei resonanter Anregung

In den nachfolgenden Abschnitten wollen wir uns näher mit resonanter angeregten FWM-Signalen beschäftigen. Die Abbildungen in diesem Kapitel stellen die Polarisation in  $(2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)$ -Richtung zeit- oder spektralaufgelöst (zu erkennen an den  $x$ -Achsen-Beschriftungen "Zeit" bzw. "Energie") oder zeitintegriert (mit der Beschriftung " $t_{12}$ ") dar. Die zeit- bzw. spektralaufgelöste logarithmische Darstellung zeigt die FWM-Signale mit von unten nach oben zunehmenden Verzögerungen  $t_{12}$ . Jedes Signal wird beim  $j$ -ten  $t_{12}$ -Schritt noch mit einem Faktor  $10^j$  multipliziert, um die Kurven besser zu trennen. Da die Schwingungsperioden der zeitaufgelösten Signale im Femtosekundenbereich liegen, werden sie lediglich als gleitende Mittel über ca. 80 Zeitschritte aufgetragen, wobei ein Zeitschritt 1 fs beträgt (in einigen Fällen auch darunter). Bei der nichtlogarithmischen und der zeitintegrierten Darstellung sind die Signalverläufe maximumsnormiert geplottet.

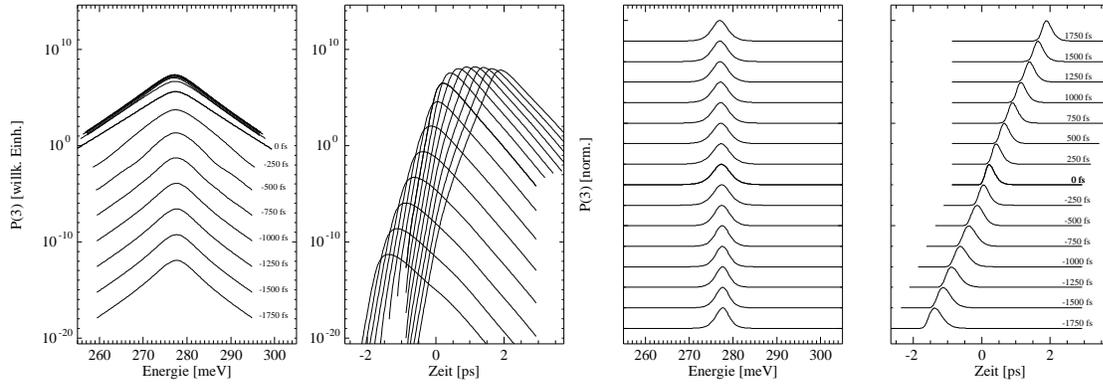


**Abbildung 10.9:** Vierwellenmischsignale der wechselwirkungsfreien Konfiguration für die Dotierungsdichte  $n_D=1.5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  in resonanter Anregung

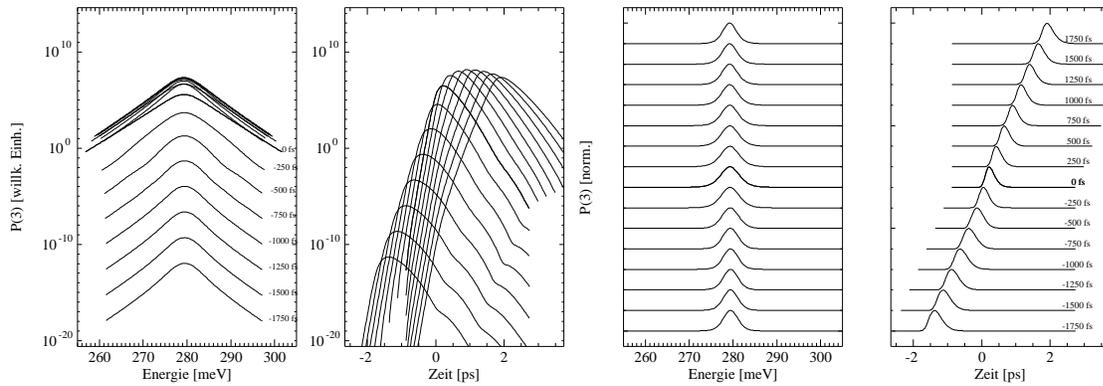
Als Zeitnullpunkt der zeitaufgelösten Plots dient das Betragsmaximum des  $\mathbf{k}_1$ -Pulses. Beide Anregungspulse sind jeweils von  $\tau=130$  fs Dauer [5], was nach der Formel für die Halbwertsbreite bei sech-Pulsen,  $\Delta\omega_{\frac{1}{2}} \equiv \text{arsech} \frac{1}{2}/(\pi\tau)$ , einer spektralen Ausdehnung von ca. 9 meV entspricht. Die Anregungsenergie wird entsprechend den Vorgaben aus den korrespondierenden linearen Spektren resonant, d.h. nach dem Maximum des linearen Absorptionsspektrums, gesetzt. Als Materialsystem dient  $\text{Ga}_{0.47}\text{In}_{0.53}\text{As}/\text{AlInAs}$ , die Topftiefe beträgt 0.5 eV, die Breite 6 nm und die Intensität der Anregungspulse wurde derart gewählt, daß ca. 2 bis 10 % der Ladungsträger ins obere Subband gepumpt werden. Außerdem wird die Gleichheit der effektiven Massen angenommen, d.h.  $m_{1,2}^*=0.05 m_0$ : beim wechselwirkungsfreien und beim Hartree-Grundzustand führt Massengleichheit dazu, daß die beiden parabolischen Subbänder sich lediglich um eine additive Konstante unterscheiden.



(a) Hartree-Basis - Hartree-Dynamik



(b) HF-Basis - HF-Dynamik

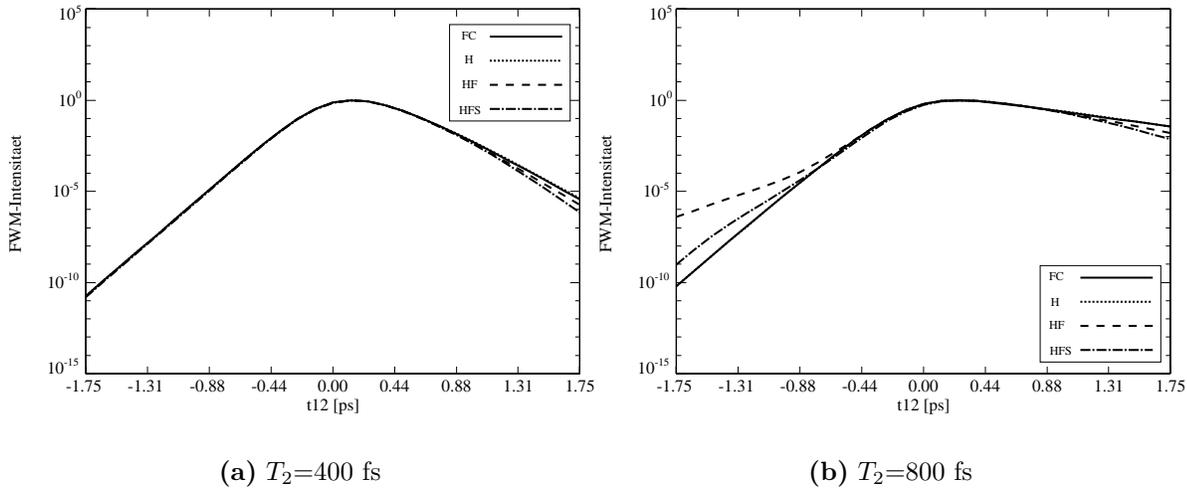


(c) HF-Basis - abgeschirmte HF-Dynamik

**Abbildung 10.10:** Vierwellenmischsignale für die Dotierungsdichte  $n_D = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  und die Dephasierungszeit  $T_2 = 200 \text{ fs}$  in resonanter Anregung

Die Abbildungen 10.9(a) und 10.9(b) dienen als Beispiele für den Fall *FC-Grundzustand - FC-Dynamik* als Modell des wechselwirkungsfreien Elektronensystems. Sie zeigen – wie die übrigen Abbildungen in diesem Kapitel – FWM-Signale für Verzögerungszeiten zwischen  $t_{12}=-1750$  fs und  $t_{12}=1750$  fs in der  $(2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)$ -Richtung. Die Dephasierungszeiten  $T_2$  liegen bei 200 und 800 fs. Man kann keine besonderen Strukturen entdecken – abgesehen von leichten Modulationen der Spektren bei  $T_2=800$  fs und negativen  $t_{12}$  in Abb. 10.9(b). Diese hängen mit dem “runden” Verlauf in den Signalmaxima zusammen: bei  $t_{12} < 0$  stellt die Polarisationsstrahlung in  $\mathbf{k}_2$ -Richtung, die als erste angeregt wird, den größeren Anteil am abgebeugten  $(2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)$ -Signal dar. Innerhalb der Lebensspanne des abbeugenden transienten Gitters kann man aufgrund der langsamen Phasenrelaxation im Wesentlichen den Zerfall der  $\mathbf{k}_2$ -Polarisation beobachten, der sich mit dem Auf- und Abbau des Gitters überlagert. Bei positiven  $t_{12}$  sieht man hingegen die Polarisation in der Anstiegsphase, daher die “spitzere” Form der zeitaufgelösten FWM-Signale (Stichwort *adiabatische Resonanz* in den Abschnitten 10.1.1 und 10.1.2). Das transiente Gitter macht quasi eine Art Schnappschuß der Polarisationsdynamik.

Ändert man bei gleichbleibendem  $T_2$  die Dotierungsichte, gibt es keine Unterschiede bei den Signalverläufen. Lediglich in der Spektraldarstellung schiebt das Signal mit wachsendem  $n_D$  zu niedrigeren Energien – analog zu den linearen Absorptionsspektren (Abschnitt 9). Seine Form wird durch die Pulsform (sech-Puls) dominiert. In der zeitaufgelösten Darstellung findet man  $1/T_2$ -Zerfall vor. Analog dazu verengen sich die entsprechenden Spektren mit  $1/T_2$ . Die FC-FWM-Signale unterscheiden sich bei der niedrigsten Dotierungsichte von denen der Hartree-Ausbaustufe (Abb. 10.10(a) sowie 10.19(a) und 10.19(b)) kaum.



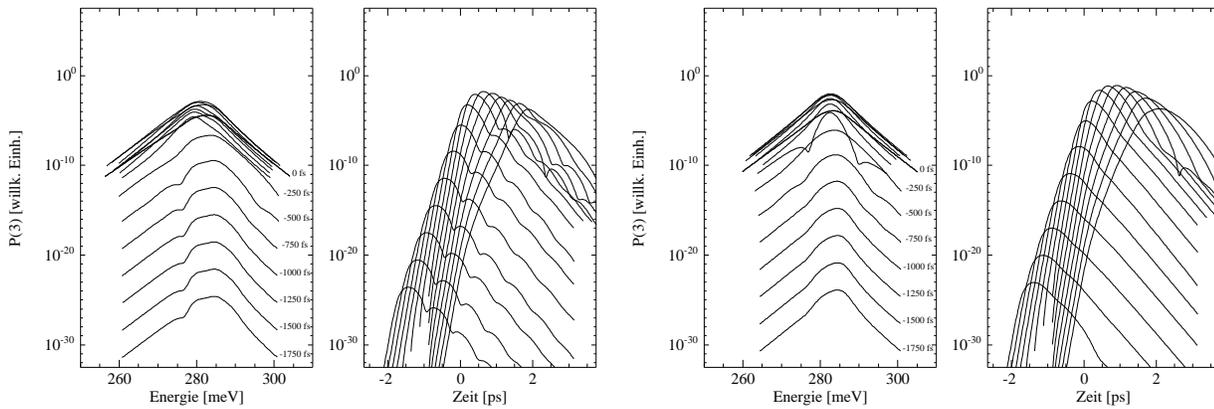
**Abbildung 10.11:** Zeitintegrierte Vierwellenmischsignale für die Dotierungsichte  $n_D=1.5 \cdot 10^{11}$   $\text{cm}^{-2}$  und zwei Dephasierungszeiten in resonanter Anregung (*HFS = HF screened*)

Auch nach dem Einschalten der Fock-Wechselwirkung zeigen die FWM-Signale bei  $n_D=1.5 \cdot 10^{11}$   $\text{cm}^{-2}$  und  $T_2=200$  fs sowohl in Spektraldarstellung als auch aufgetragen gegen die Zeit keine auffälligen Merkmale. Aufgrund der raschen Phasenrelaxation werden mögliche Effekte weit-

gehend weggedämpft (Abb. 10.10(b) sowie mit Abschirmung 10.10(c)).

Die Signale gehen in der Zeit mit dem Anregungsstrahl in  $\mathbf{k}_2$ -Richtung. Das zeitaufgelöste FWM-Signal steigt kurz hinter dem Maximum dieses Pulses ziemlich abrupt an, um dann exponentiell mit  $1/T_2$  wieder abzufallen. Die entsprechenden zeitintegrierten Signale (Abb. 10.11(a)) zeigen das erwartete  $2/T_2$ -Zerfallsverhalten, wobei leichte Unterschiede zwischen nichtabgeschirmtem und abgeschirmtem HF bei der zeitaufgelösten Polarisation sichtbar werden.

Daß die Signale dem  $\mathbf{k}_2$ -Puls folgen, läßt sich auch mit den Produktausdrücken der  $E$ -Felder aus der auf ein Zwei-Niveau-System bezogenen Tabelle B.2 bzgl. dem Eintrag  $(\lambda, \nu) = (1, -3)$  erklären: in diese geht das  $E_2$ -Feld in quadratischer und das  $E_1$ -Feld nur in erster Potenz ein. Das Verhalten der Polarisationsstrahlung in dieser Richtung wird durch Gleichung (6.21) aus den Rechnungen für das Zwei-Niveau-System in Abschnitt 6.5 charakterisiert, welche den freien Induktionszerfall bei Anregung mit  $\delta$ -Pulsen beschreibt.



(a) HF-Basis - HF-Dynamik

(b) HF-Basis - abgeschirmte HF-Dynamik

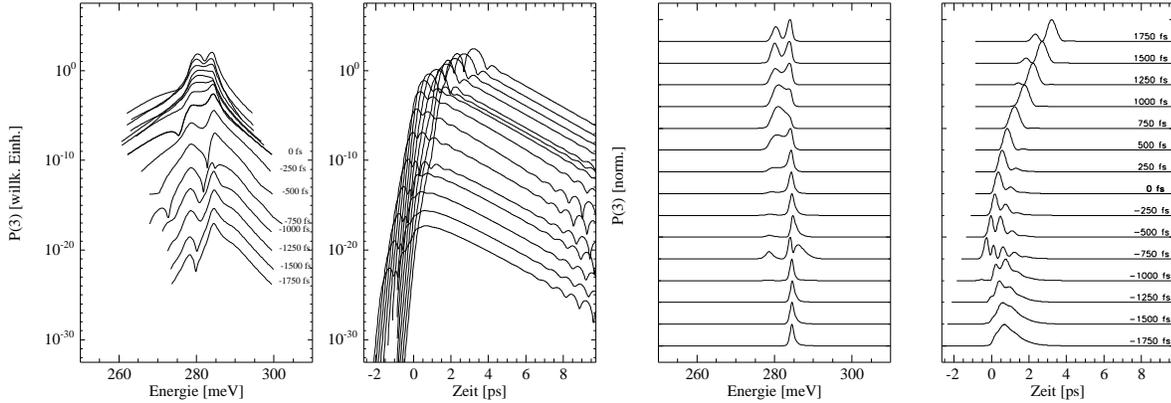
**Abbildung 10.12:** Vierwellenmischsignale für die Dotierungsdichte  $n_D = 5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  und die Dephasierungszeit  $T_2 = 200 \text{ fs}$

Wie bereits oben angedeutet, kann man bei  $T_2 = 200 \text{ fs}$  und eingeschalteter Abschirmung einen geringfügig schnelleren Zerfall der Polarisation als im nicht abgeschirmten HF-Fall registrieren (zeitintegrierte Darstellung in Abb.10.11(a)), zudem treten leichte Modulationen auf (Abb. 10.10(c), zeitaufgelöste logarithmische Darstellung), die vor allem bei negativen Delays gut sichtbar sind. Der abgeschirmte Fall entspricht weitgehend einer wechselwirkungsfreien, kohärenten Superposition von Zwei-Niveau-Polarisationen, so daß die leicht höhere Zerfallsrate durch destruktive Interferenz erklärbar ist.

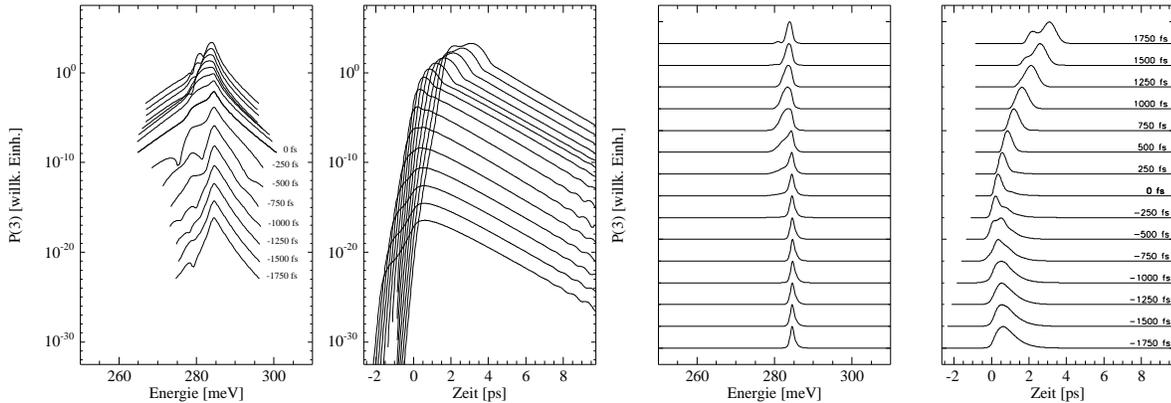
Bei mittlerer Dichte kristallisiert sich ein Unterschied zwischen Nichtabschirm- und Abschirmfall heraus (Abb.en 10.12(a), 10.12(b), jeweils rechter Plot): ohne Abschirmung erfährt das zeitaufgelöste FWM-Signal leichte Modulationen, die mit strukturellen Änderungen in den Spektren (Abb. 10.12, linksseitige Plots) einhergehen. Sie hängen mit der Inhomogenität aufgrund der Energie-Renormierung und der Coulomb-Austauschwechselwirkung in den Bewegungsgleichungen zusammen.

Erhöht man die Dephasierungszeit auf  $T_2 = 800 \text{ fs}$  (Abb. 10.13), bilden sich in der Nähe der

beiden Enden der Elektronen-Fermi-Verteilung Peaks, zwischen denen die Verteilungsfunktionen hin- und herschwingen (Abb. 10.13(a), dritte Figur von links). Die Modulation ist ein Maß für die Nichtparabolizität und damit die 2D-Elektronendichte: für die niedrige Dotierung  $n_D=1.5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  beträgt ihre Energie ca. 1.9 meV, für die mittlere Dichte  $n_D=5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  ungefähr 4 meV (siehe auch Abb. 8.6). Man spricht von *Quantenschwebungen* (engl. *quantum beats*), auf die im Abschnitt 10.4 näher eingegangen wird.



(a) HF-Basis - HF-Dynamik

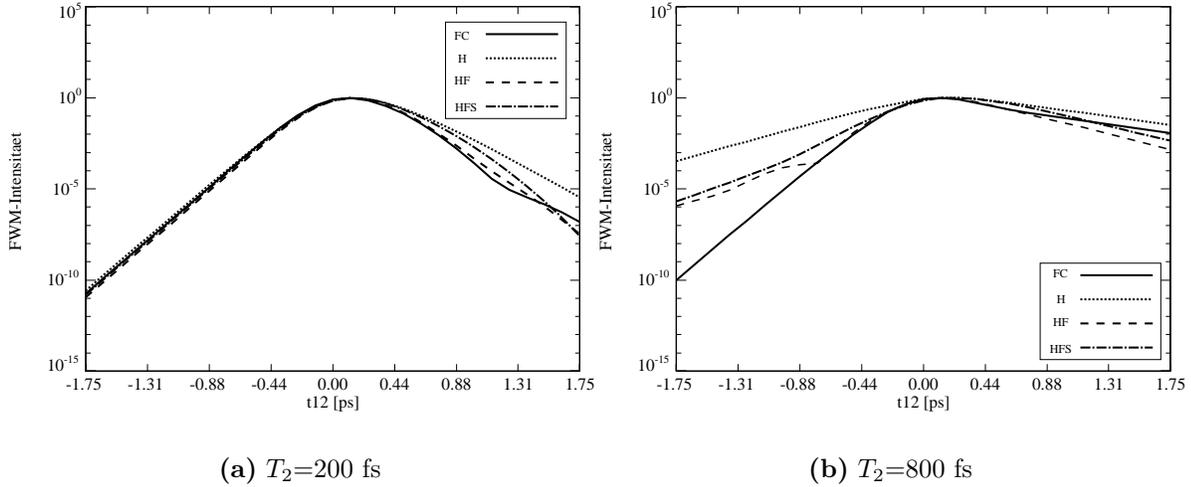


(b) HF-Basis - abgeschirmte HF-Dynamik

**Abbildung 10.13:** Vierwellenmischsignale für die Dotierungsdichte  $n_D=5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  und die Dephasierungszeit  $T_2=800 \text{ fs}$

Auch bei noch höheren Dotierungsdichten ist der Effekt im Abschirmfall wieder unterdrückt (Abb. 10.16(c)), nichtabgeschirmte Fock-Wechselwirkung erlaubt ihn hingegen (Abb. 10.16(b)). Bedauerlicherweise befinden sich die Experimente [5], mit denen wir die Resultate der Simulationen vergleichen, zum großen Teil in einem ungünstigen Parameterbereich (niedrige Dephasierungszeiten), wobei als verschärfende Einschränkung noch die inhomogene Verbreiterung durch die statistische Schwankung der Topfparameter in einem Vielfachquantentopf hinzukommt, die

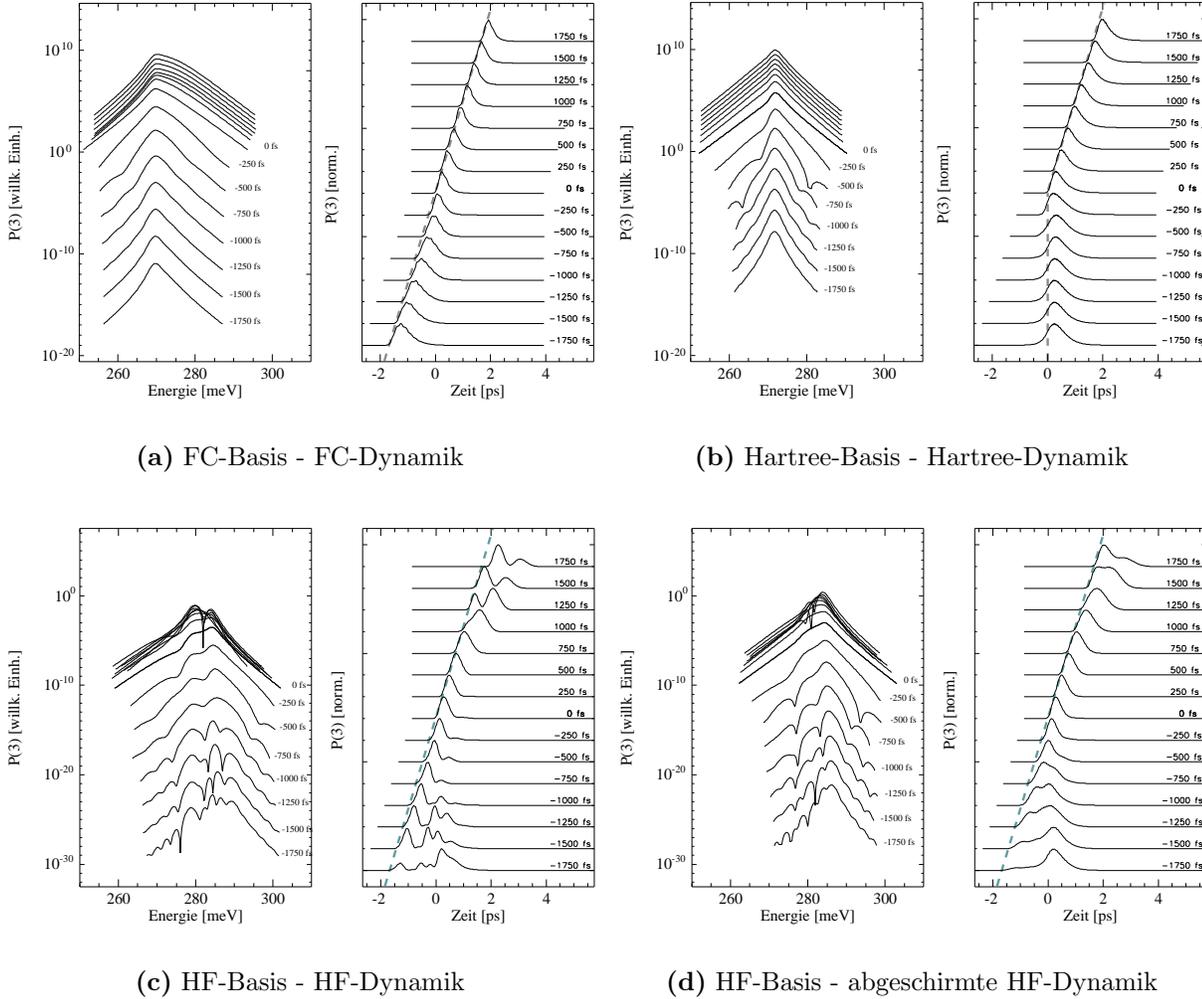
fast jegliche Strukturierung der Signale “verschmiert”. Auffällige Strukturen in den Spektren sind also bei den betrachteten Konfigurationen aus [5] nicht zu erwarten.



**Abbildung 10.14:** Zeitintegrierte Vierwellenmischsignale für die Dotierungsdichte  $n_D = 5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  und zwei Dephasierungszeiten in resonanter Anregung

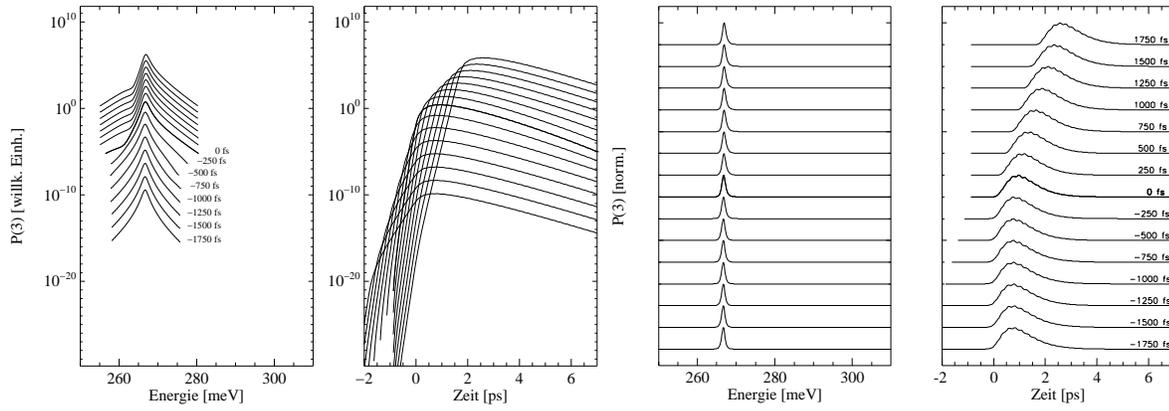
Bei einer Dephasierungszeit von  $T_2 = 400$  fs zeigen Systeme mittlerer Dotierungsdichte deutlich ein typisches Verhalten, wenn lediglich die Hartree-Wechselwirkung eingeschaltet ist. Während im Modell mit freien Ladungsträgern die FWM-Signale auf einer diagonal von links unten nach rechts oben verlaufenden Linie liegen (Abb. 10.15(a), nichtlogarithmische Darstellung rechts, als gestrichelte Linie eingezeichnet), verzögert sich bei einem System mit eingeschalteten Hartree-Termen bei negativen Delays (Abb. 10.15(b), rechts) das entsprechende Signal derart, daß es erst kurz nach dem zeitlich hinten liegenden Anregungspuls in  $\mathbf{k}_1$ -Richtung auftritt. Ab einer Verzögerung von  $t_{12} = 0$  ps kann man einen Knick nach rechts oben beobachten. Davor geht die (gestrichelte) Linie parallel zu den Signalspitzen am gewählten Zeitnullpunkt senkrecht nach oben. Im Artikel von Lindberg et al. wurde dieses Verhalten bei Interbandübergängen beschrieben [55]. Dieses verzögerte Signal sollte nicht mit einem Photonenecho verwechselt werden ([46, 38, 55]; siehe auch Abschnitt 5.2), was bei zu kleinen  $t_{12}$  leicht passieren kann. Im HF-Fall ohne Abschirmung ist dieses Muster nicht erkennbar (Abb. 10.15(c), 10.15(d)) – zumindest wird es von den auftretenden Modulationen überdeckt. Im Abschirm-Fall tendieren allerdings die entsprechenden FWM-Spektren in ihrer Struktur wieder mehr Richtung Hartree. Die Hartree-Terme verursachen – wie in Abschnitt 9.1 bereits angesprochen – bei Einfall einer Lichtwelle eine kollektive Elektronenbewegung. Aus diesem Depolarisationseffekt resultiert eine Veränderung der Resonanzeigenschaften: da in Hartree-Resonanz (d.h. am Maximum des linearen Absorptionsspektrums der Kombination *Hartree-Grundzustand - Hartree-Dynamik*) angeregt wird, erzeugt der zweite Anregungspuls (bei negativen  $t_{12}$  ist das der  $\mathbf{k}_1$ -Puls) eine stärkere Polarisation als der erste, der die kollektive Elektronenbewegung in Gang gesetzt hat, d.h. nur die durch den zeitlich zweiten Puls angeregte Polarisation ist relevant. Außerdem

verlangsamt der Depolarisationseffekt den Zerfall der zeitintegrierten Intensität (Abb. 10.14). Die Fock-Terme heben den Einfluß der Hartree-Wechselwirkung teilweise wieder auf, wobei die kurzreichweitigen Matrixelemente ( $V_{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|}^{n_1 n_3 n_2 n_4}$  mit  $|\mathbf{k}-\mathbf{k}'| \gg 0$  in den Energien (7.22)) einen nicht unwichtigen Beitrag leisten. Dies kann aus den zeitaufgelösten FWM-Signalen des abgeschirmten Modells geschlossen werden, die bis auf wenige Ausnahmen auf der in der Abbildung eingezeichneten Linie liegen (Abb. 10.15(d), rechts): hier sind die kurzreichweitigen Coulomb-Matrixelemente wesentlich kleiner als im nichtabgeschirmten Fall.

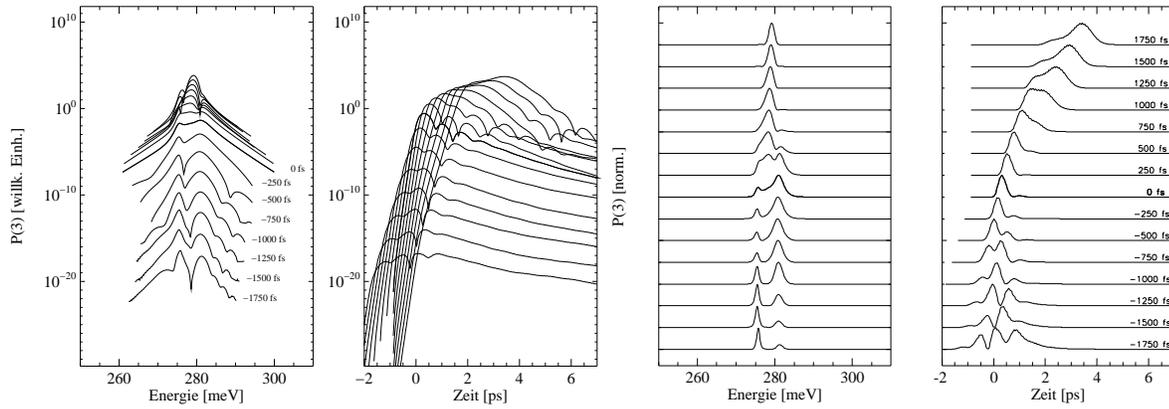


**Abbildung 10.15:** Vierwellensignale für die Dotierdichte  $n_D=5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  und die Dephasierungszeit  $T_2=400 \text{ fs}$

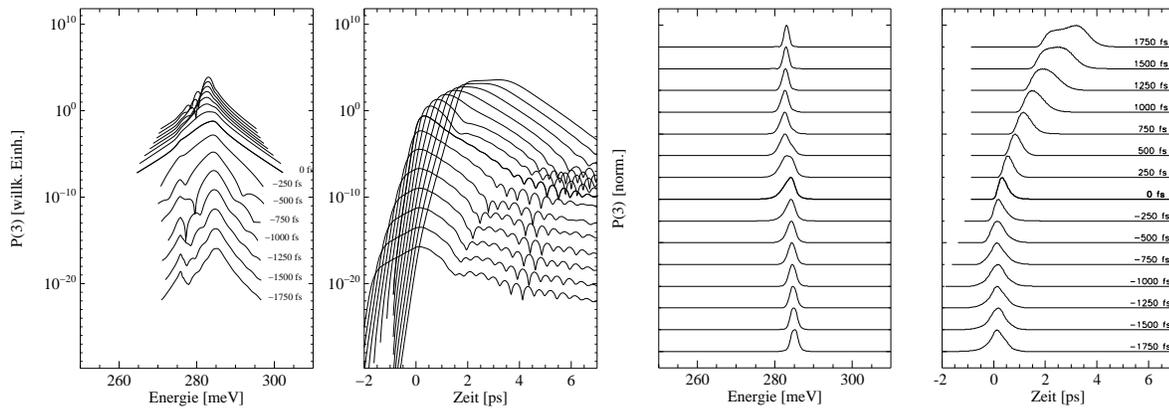
Betrachtet man eine noch höhere Dephasierungszeit ( $T_2=800 \text{ fs}$ ), ist das Verzögerungs-Verhalten der FWM-Signale bei negativen  $t_{12}$  bei der höchsten untersuchten Dotierdichte sowohl auf dem Hartree-Level (Abb. 10.16(a)) als auch in der vollen Ausbaustufe mit Hartree- und Fock-



(a) Hartree-Basis - Hartree-Dynamik



(b) HF-Basis - HF-Dynamik



(c) HF-Basis - abgeschirmte HF-Dynamik

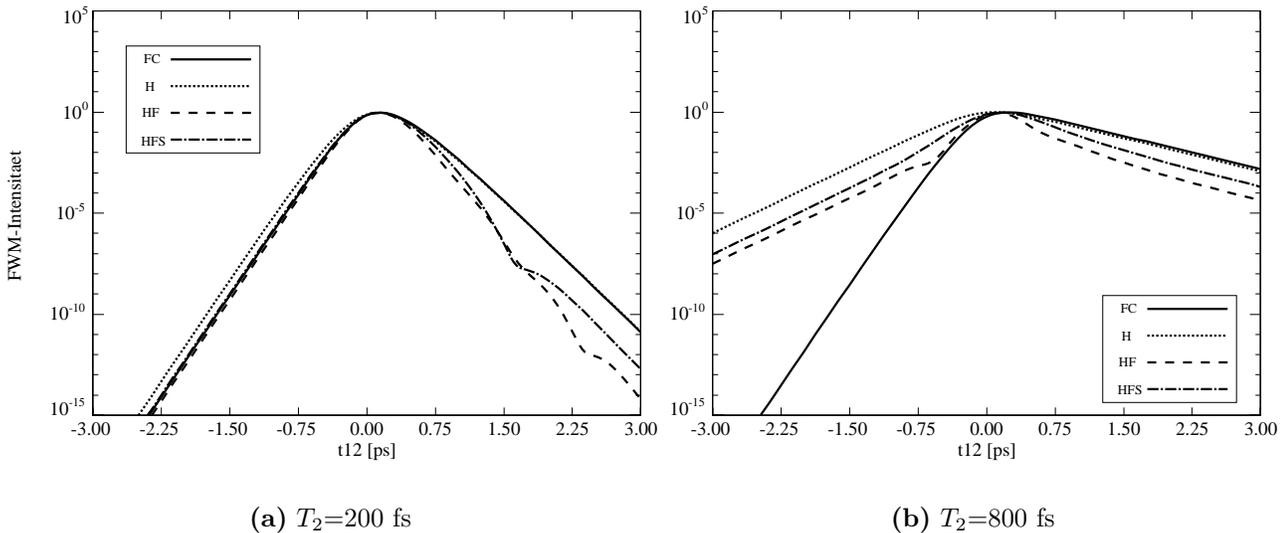
**Abbildung 10.16:** Vierwellenmischsignale für die Dotierungsdichte  $n_D = 1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  und die Dephasierungszeit  $T_2 = 800 \text{ fs}$

Termen (Abb. 10.16(b)) sowie Abschirmung (Abb. 10.16(c)) beobachtbar. Die zeitintegrierten Intensitäten bestätigen diese Eigenschaften: Hartree-, und abgeschirmte HF-Polarisation zerfallen für  $t_{12} < 0.7$  ps langsamer als die FC-Kurve (Abb. 10.14(b)). Da die Fock-Terme die Hartree-Wechselwirkung partiell aufheben, liegen die entsprechenden Intensitäten unterhalb der Hartree-Kurve. Die Unterschiede zwischen Abschirmung und Nichtabschirmung erklären sich aus der Abschwächung der Coulomb-Austauschwechselwirkung im Abschirmfall, die entsprechende Intensität liegt näher an der Hartree- als an der HF-Kurve.

### 10.3 Zeitintegrierte FWM-Signale

Nach Yajima [38] ist der Zerfall der zeitintegrierten Polarisation ein Maß für den Grad an Inhomogenität. Vielteilchenkorrelationen spielen hierbei auch noch eine Rolle, sie können den Zerfall bis zu der von [38] vorausgesagten Rate von  $4/T_2$  für den Fall inhomogener Verbreiterung beschleunigen.

Als Beispiel seien hier die Verläufe der zeitintegrierten Polarisation bei der hohen Dotierungs-dichte aufgeführt (Abb. 10.17). Bei  $T_2=200$  fs pendeln sich die Zerfallsraten durchgehend für alle Fälle bei  $2/T_2$  ein (Abb. 10.17(a)).

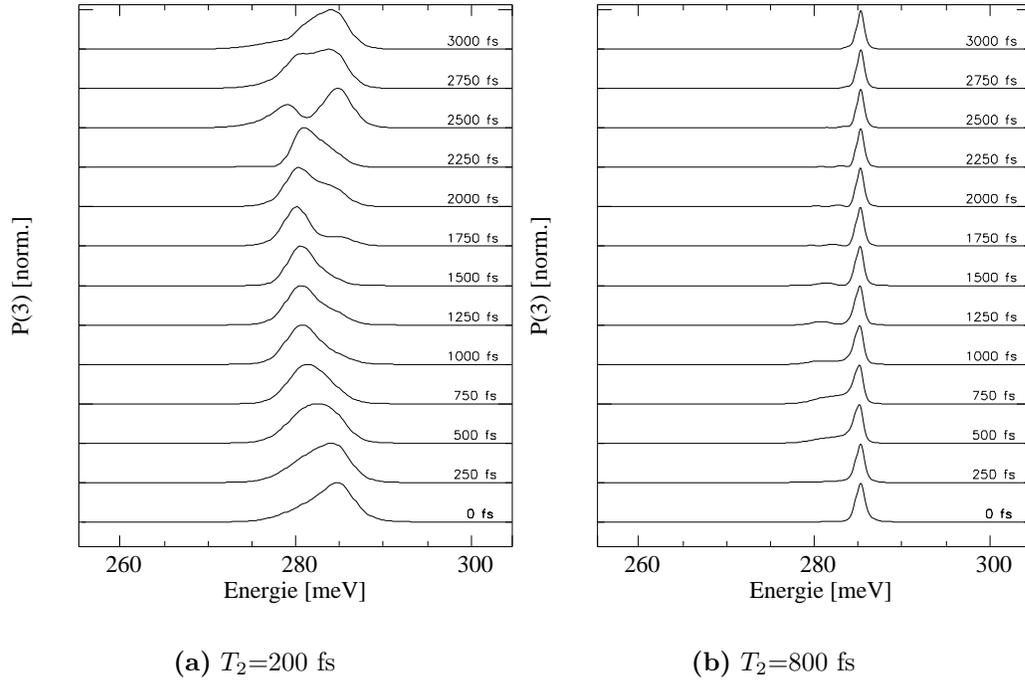


**Abbildung 10.17:** Zeitintegrierte Vierwellenmischsignale für die Dotierungsdichte  $n_D = 1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  und zwei Dephasierungszeiten in resonanter Anregung

Dennoch zeigen sich Unterschiede in den Kurven, wenn die Fock-Terme in die Bewegungsgleichungen integriert sind. Während FC- und Hartree-Polarisation für  $t_{12} > 0$  nahezu deckungsgleich mit  $\exp(-2/T_2)$  gehen, zerfällt das zeitintegrierte Signal in den HF-Fällen schneller, z.B. ohne Abschirmung zwischen  $0 \text{ fs} < t_{12} < 1.5 \text{ fs}$  mit einer  $2.4/T_2$ -Rate. Dies ist konform mit der Subbandinhomogenität, die im Fall der Gleichheit der effektiven Massen erst durch Einschalten

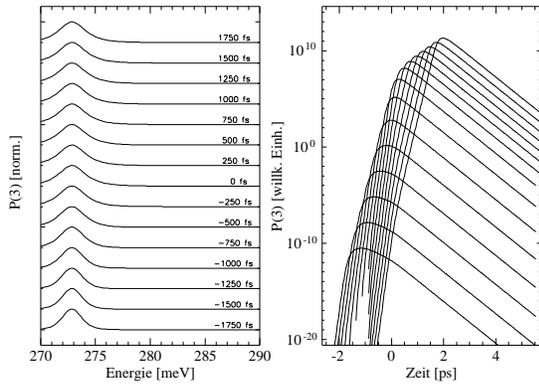
der Fock-Terme eintritt.

Interessanterweise zeigt sich im HF-Fall ohne Abschirmung nach ca. 1.5 ps andeutungsweise ein (scheinbares) Schwebungsverhalten, das ungefähr einer Energie von 6 meV entspricht. Betrachtet man die spektral aufgelösten FWM-Signale für positive Delays in Abb. 10.18(a), fällt zu wachsenden  $t_{12}$  hin ein allmählicher Übergang des Signals von einer Energie von ca. 285 zu 280 meV und wieder zurück zu 285 meV auf, was einer Bewegung der IS-Polarisation zwischen  $\mathbf{k} = 0$  und der Fermi-Kante entspricht (siehe Abb. 10.22). Die Aufspaltung des Spektrums bei  $t_{12}=1750$  fs (schwach) und bei  $t_{12}=2500$  fs korrespondiert zu den “Knicken” der HF-Kurve in Abb. 10.17(a).

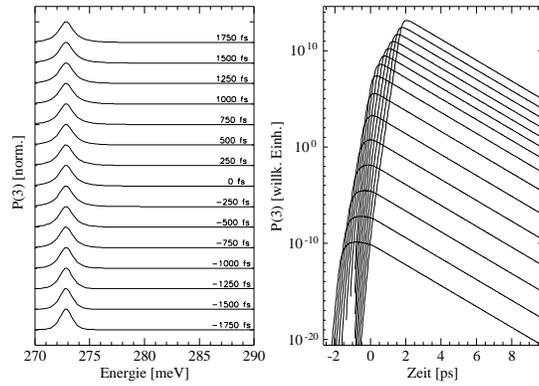


**Abbildung 10.18:** Spektral aufgelöste FWM-Signale für die Dotierungsdichte  $n_D=1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  und zwei Phasenrelaxationszeiten im HF-Fall

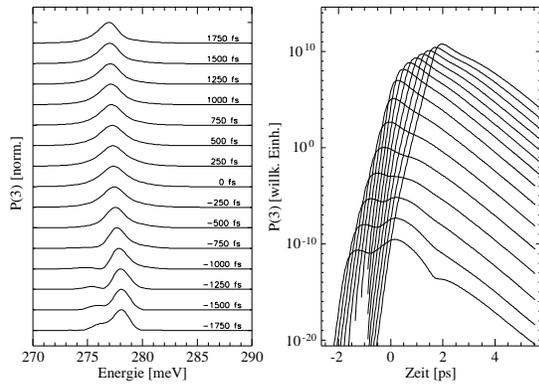
Bei der hohen Dephasierungszeit  $T_2=800$  fs liegen die Werte zwischen  $2/T_2$  im FC- und Hartree-Fall und  $2.1/T_2$  im HF-Fall mit sowie bei  $2.2/T_2$  ohne Abschirmung (Abb. 10.17(b)). Die Zerfallsraten geben wie bei  $T_2=200$  fs die Tendenz zu einer Beschleunigung des Zerfalls bei Berücksichtigung von Vielteilcheneffekten gut wieder. Die spektral aufgelösten FWM-Signale sind erwartungsgemäß sehr schmal und lassen nur ansatzweise auf der linken Flanke eine Anhebung erkennen, die sich innerhalb des betrachteten Zeitrahmens jedoch nicht zu einem zweiten Peak ausprägt. Somit verlaufen die zeitintegrierten Kurven auch relativ glatt, sieht man mal von einem leichten Knick im HF-Signal bei ca.  $t_{12}=500$  fs ab.



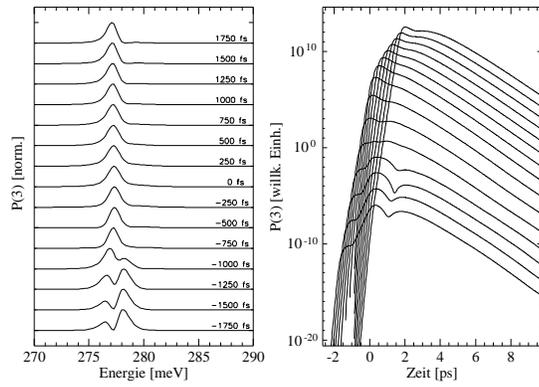
(a) Hartree-Basis - Hartree-Dynamik bei  $T_2=400$  fs



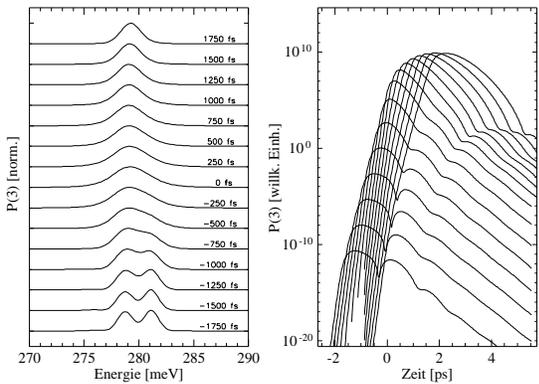
(b) Hartree-Basis - Hartree-Dynamik bei  $T_2=800$  fs



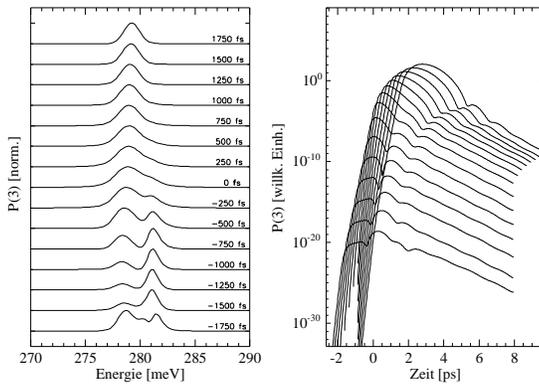
(c) HF-Basis - HF-Dynamik bei  $T_2=400$  fs



(d) HF-Basis - HF-Dynamik bei  $T_2=800$  fs



(e) HF-Basis - abgeschirmte HF-Dynamik bei  $T_2=400$  fs



(f) HF-Basis - abgeschirmte HF-Dynamik bei  $T_2=800$  fs

**Abbildung 10.19:** Vierwellenmischsignale für die Dotierungsdichte  $n_D=1.5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  und die Dephasierungszeiten  $T_2=400, 800$  fs

Während die zeitintegrierte Intensität der FWM-Signale aus den Simulationen mit Hartree-Dynamik (und Hartree-Grundzustand) ein klares  $2/T_2$ -Abfallverhalten zeigt (siehe z.B. rechte Abbildungen von Figur 10.16(a)) –genau wie im Fall der FC-Dynamik– variieren die Verläufe in der HF-Dynamik mit abnehmender Dephasierungszeit von ca.  $2.1/T_2$  bei  $T_2=800$  fs bis  $2.4/T_2$  bei  $T_2=200$  fs. Letzteres entspricht zwar nicht der Zerfallsrate von  $4/T_2$ , die für inhomogene Verbreiterung erwartet wird [38], bewegt sich aber tendenziell in diese Richtung. Die Unterschiede ergeben sich zum Teil durch die im Vergleich zu den  $\delta$ -Pulsen zeitlich recht ausgedehnten Anregungspulse (zur Erinnerung:  $\tau=130$  fs). Somit liefert der Zerfall der zeitintegrierten Polarisation einen Hinweis für die Relevanz der Fock-Wechselwirkung.

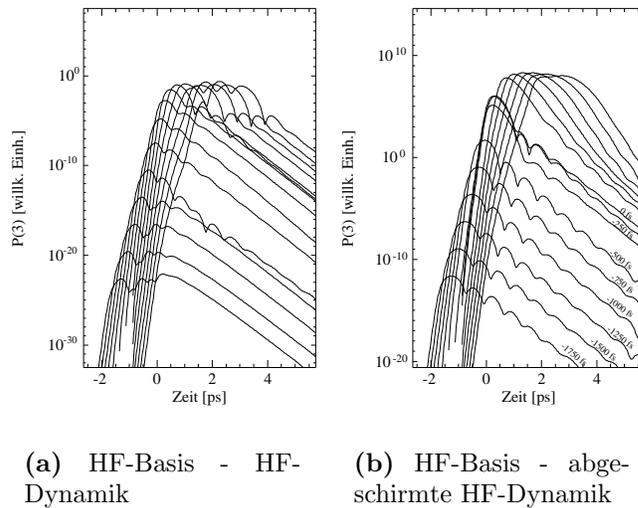
## 10.4 Quantenschwebungen

Für negative Verzögerungszeiten zwischen den beiden Eingangspulsen beim Vierwellenmischen läßt sich in der Hartree-Fock-Ausbaustufe mit zunehmender Dotierungsichte bei mittleren und hohen Delays (ab einer Dephasierungszeit von  $T_2 \geq 200$  fs) eine Schwebung im Signal beobachten. Während diese bei linearen Spektren nicht sichtbar ist, sieht man hier deutlich Quantenschwebungen (engl. *Quantum Beats*) in den zeitaufgelösten Signalen. Schon bei der niedrigsten Dotierung von  $n_D = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  deutet sich dieses Verhalten in der logarithmischen, zeitaufgelösten Darstellung der Polarisation in der Ausbaustufe mit statischer Abschirmung an (Abb. 10.19(e), rechter Plot). Die Schwebungsperiode  $T_B$  beträgt ca. 1.5 ps (bei der untersten Kurve mit  $t_{12}=-1750$  fs). Bei hohen negativen Delays beginnt das Spektrum der Polarisation sich in zwei Hügel ungefähr gleicher Höhe im Abstand von ca. 3 meV aufzuspalten (10.19(e), dritter Plot von links, nichtlogarithmische Darstellung des Spektrums), was gerade dem Abstand in der Energie zwischen Elektronen bei  $k = 0$  und solchen an der Fermi-Kante, also  $k = k_F$  bei der niedrigsten Dotierung entspricht (dazu mehr am Ende des Abschnitts). Dies geht konform mit der beobachteten Schwebungsperiode. Ähnliches läßt sich auch über den nicht abgeschirmten HF-Fall sagen (Abb. 10.19(c)), die Schwebung hat aber eine größere Periode. Das Schwebeverhalten verstärkt sich im Fall niedriger Dotierungsichte bei  $T_2 \geq 800$  fs (Abb.en 10.19(d) und Abb.en 10.19(f), ist aber nicht im Hartree-Fall zu beobachten (Abb.en 10.19(b), 10.19(b)).

Die Grundlagen von Schwebungs-Erscheinungen sind z.B. in [65, 29, 31, 34] dargelegt: werden bei einem Quantensystem – sei es ein Atom oder wie in unserem Fall eine Quantentopfstruktur – zwei nahe beieinander liegende Niveaus angeregt, kommt es zu einer Superposition der Zustände. Im Spektrum ist dieser Superpositionszustand anhand der Peaks zu erkennen. Bei einer Temperatur von  $T=0$  K ist er ein reiner Zustand. Er bezieht sich auf alle im Topf vorhandenen Elektronen, die durch die Laserpulse kohärent angeregt werden [29]. Durch die simultane Anregung der beiden Niveaus laufen auch ihre Übergänge in das gleiche untere Niveau wiederum simultan ab (die Intersubbandrelaxation ist in unseren Rechnungen allerdings nicht berücksichtigt). Angenommen, die Polarisation gibt die kohärente Überlagerung zweier spektral schmaler Resonanzen mit den Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  wieder, die hinreichend weit auseinander liegen. Dann ist der energetische Abstand der beiden Resonanzen einfach proportional zur Differenzfrequenz, d.h.  $\Delta\varepsilon = \hbar(\omega_2 - \omega_1)$ . Beispielsweise treten Quantenschwebungen in Zweipuls-Experimenten als Schwankungen der Amplitude von Photonenechos

abhängig von der Verzögerung zwischen beiden Pulsen auf [66]. In FWM-Experimenten wurden Quantenschwebungen erstmals bei organischen Farbstoffmolekülen in einer Lösung nachgewiesen [67]. In [68] wird von Quantum Beats in kohärenter Exziton-Polarisation in Halbleiter-Quantentopfstrukturen berichtet. Quantenschwebungen dienen der Detektion nahe beieinander liegender Zustände [69] und liefern direkte Informationen über den Zerfall kohärenter Polarisation [25].

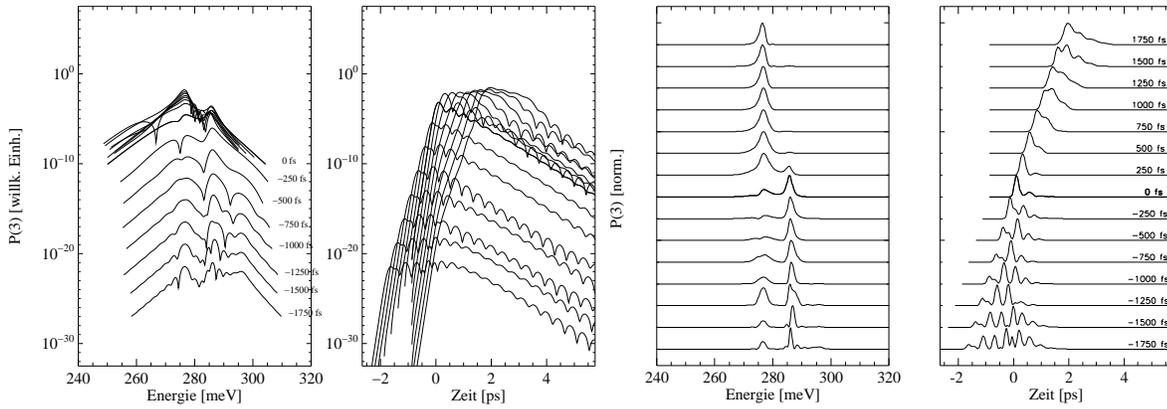
In unserem Fall sind die Niveaus die miteinander interferierenden Peaks im Spektrum der nicht-linearen kohärenten Polarisation. Die Dynamik der Schwebungen hängt mit dem Coulomb-Enhancement zusammen, das sich bei den linearen Absorptionsspektren nur in Form von Ausstülpungen der Absorptionskurve äußert [70].



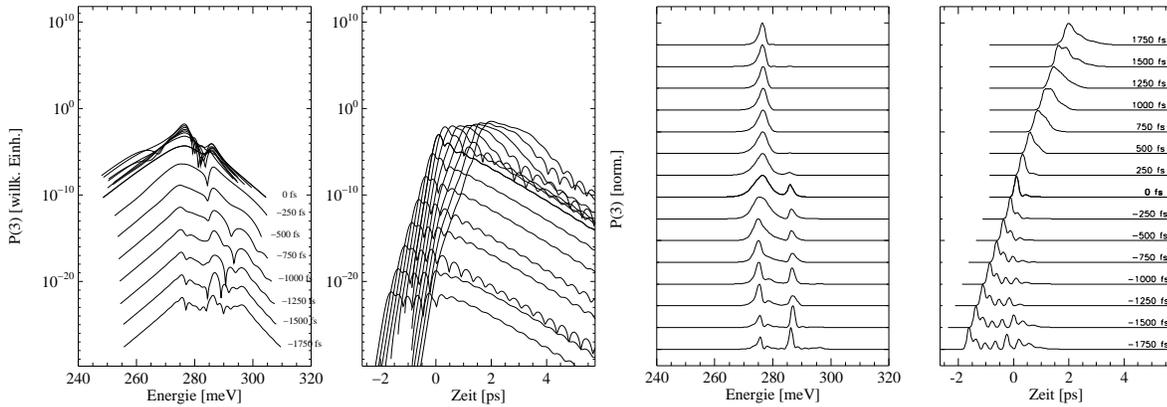
**Abbildung 10.20:** Vierwellenmischsignale für die Dotierungsdichte  $n_D=5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  und die Dephasierungszeit  $T_2=400 \text{ fs}$  logarithmisch dargestellt (siehe auch Abb. 10.15)

Bei mittlerer Dichte und einer Dephasierungszeit von  $T_2=400 \text{ fs}$  vollzieht das zeitabhängige FWM-Signal gut sichtbare Schwebungen (Abb.en 10.20(a), 10.20(b) in logarithmischer Darstellung), diese sind im Nichtabschirm-Fall ausgeprägter als im Abschirm-Fall. Auch bei der hohen Dotierungsdichte und doppelt so langer Dephasierungszeit (Abb. 10.16) zeigt nur der Nichtabschirm-Fall makroskopisch sichtbare Quantenschwebungen – bei eingeschalteter Abschirmung sind Schwebungen erst in der logarithmischen Darstellung zu erkennen (Abb. 10.16(c)). Ursache ist der starke Peak des FWM-Spektrums im Resonanzbereich, der den zweiten nahe der Fermi-Kante um ca. drei Größenordnungen übertrifft.

Die Coulomb-Austauschwechselwirkung zwischen den angeregten Dipolen ermöglicht also ein System gekoppelter Oszillatoren, bei denen die Schwingungsamplituden der angeregten Dipole im Resonanzbereich und an der Fermi-Kante genügend groß für Schwebungserscheinungen sind. Sie sind weniger ausgeprägt bei abgeschirmter Austauschwechselwirkung, da die Kopplung zwischen den einzelnen Oszillatoren schwächer ist.



(a) Hartree-Fock-Grundzustand - Hartree-Fock-Dynamik



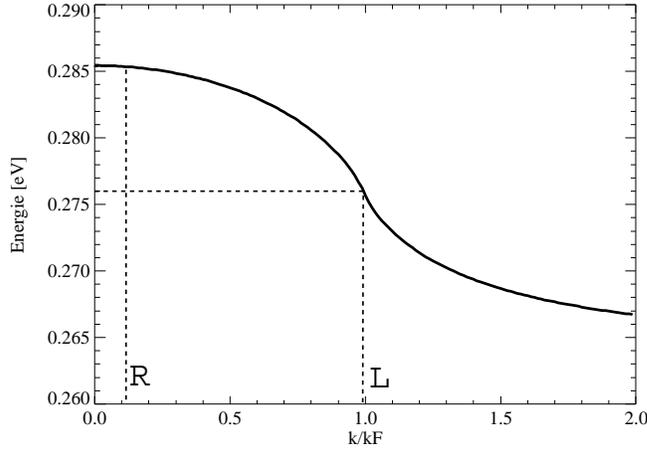
(b) Hartree-Fock-Grundzustand - abgeschirmte Hartree-Fock-Dynamik

**Abbildung 10.21:** Vierwellenmischsignale für die Dotierungsdichte  $n_D = 1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  und die Dephasierungszeit  $T_2 = 400 \text{ fs}$  bei Anregung an der Fermi-Kante

Im Fall langer Dephasierungszeiten  $T_2 \geq 800 \text{ fs}$  kann man in der nichtlogarithmischen Darstellung (Abb. 10.13(a), dritter Plot von links; nichtabgeschirmte Fock-Wechselwirkung) sogar teilweise drei, allerdings verschieden große Peaks erkennen, entscheidend für die Frequenz der Schwebung sind die beiden außenliegenden im Abstand von ca. 7 meV, was einer Schwebungsperiode von ungefähr 0.6 ps entspricht (Abb. 10.13(a), zweiter und vierter Plot, zeitaufgelöste Darstellung bei  $t_{12} = -750 \text{ fs}$ ). Die Energie ist ungefähr gleich der Fermi-Kante bei der mittleren Dotierungsdichte  $n_D = 5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ . Verwendet man in der Rechnung eine der experimentellen Situation nahekommende Dephasierungszeit ( $T_2 \approx 200 \text{ fs}$ ), wird dieses Verhalten wieder weggedämpft.

Im übrigen kann man den Schwebungseffekt noch verstärken, wenn man Elektronen an der Fermi-Kante anregt (Abb. 10.21). Mit Hilfe von Abb. 10.22 läßt sich der zweite Peak einord-

nen. Bei  $k = 0$  (rechter Peak in den nichtlogarithmischen Spektraldarstellungen 10.21(a) und 10.21(b)) und bei  $k = k_F$  (linker Peak) kann man zwei Spitzen erkennen. Die Frequenz der Quantenschwebungen ergibt ein Maß für die Fermi-Kante und damit die 2D-Elektronengasdichte. Die Schwebungsmaxima gehen mit  $t_{12} \pm n T_B$ , wobei  $n \in \mathbb{Z}$  [71].

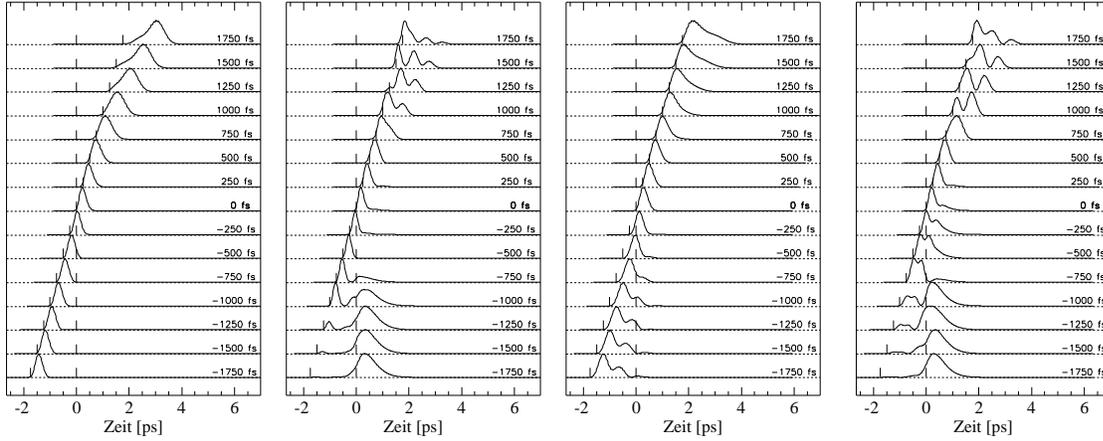


**Abbildung 10.22:** Differenz der Subbandenergien für die Dotierung  $n_D = 1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ . Die gestrichelten Linien markieren die Position des linken (“L”) und rechten Peaks (“R”).

Es bleibt anzumerken, daß der Quantenschwebeeffect in den zeitaufgelösten Signalen deutlich erst bei hohen Dephasierungszeiten und großen negativen Delays auftritt. Nichtparabolizität der Dispersionsrelation und die Fock-Wechselwirkung in den zeitabhängigen Gleichungen sind wesentlich für seine Entstehung. Außerdem kommt es auf den Energiebereich an, in dem man sich die Dynamik derartiger Prozesse anschaut [72]. Die Schwebungsfrequenz ist unabhängig von der Dephasierungszeit  $T_2$ , dem Delay  $t_{12}$  und der Anregungsenergie. Am günstigsten ist Anregung an der Fermi-Kante. In der Praxis werden derartige Messungen allerdings durch Rauschen und inhomogene Verbreiterung erschwert.

## 10.5 Photonenechos

Wie im Fall der Interband-Übergänge (vgl. [55]) kann man beim FWM-Signal eine Verschiebung der Signalanteile vom freien Induktionszerfall zum Photonen-Echo beobachten.

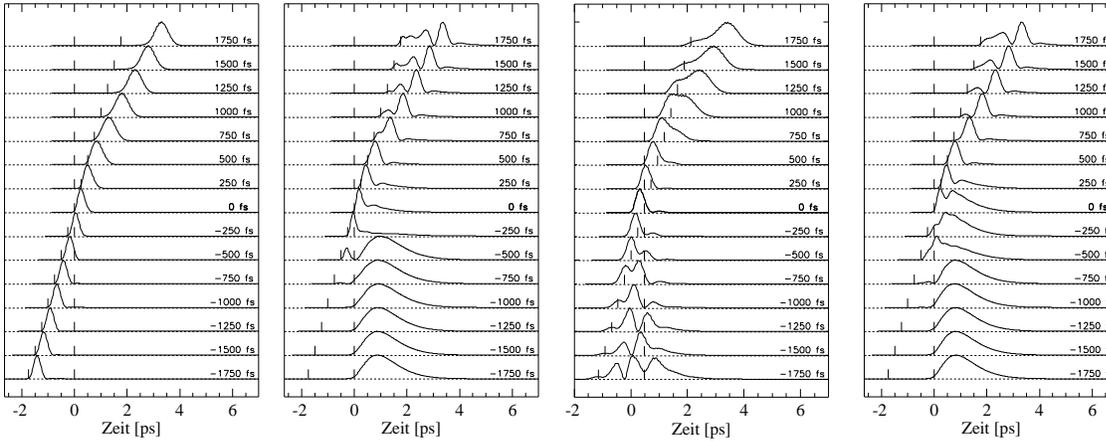


(a) FC-Dynamik,  
 $T_2=400$  fs

(b) Hartree-  
Dynamik,  
 $T_2=400$  fs

(c) HF-Dynamik,  
 $T_2=400$  fs

(d) Abgeschirm-  
te HF-Dynamik,  
 $T_2=400$  fs



(e) FC-Dynamik,  
 $T_2=800$  fs

(f) Hartree-  
Dynamik,  
 $T_2=800$  fs

(g) HF-Dynamik,  
 $T_2=800$  fs

(h) Abgeschirm-  
te HF-Dynamik,  
 $T_2=800$  fs

**Abbildung 10.23:** Photonenechos bei der Dichte  $n_D=1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  und HF-resonanter Anregung ( $E_L=280 \text{ meV}$ ). Als Basis dient der HF-Grundzustand. Die Markierungen auf den gestrichelten Linien deuten die Signalspitzen der Anregungspulse an.

Abb. 10.23 zeigt die zeitaufgelöste ( $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ )-Polarisation bei hoher Dotierdichte und

langen Dephasierungszeiten. Die Bandinhomogenität durch die Nichtparabolizität beim HF-Grundzustand der hohen Dotierungsdichte ist groß genug, um die Voraussetzung für das Photonenecho als Ensemble-Effekt zu erfüllen. In allen Fällen wurden die Elektronen *HF-resonant* angeregt, d.h. es wurde beim Maximum des linearen HF-Absorptionsspektrums (Abb. 9.7(c)) für den nicht-abgeschirmten Fall angeregt.

Um das Photonenecho zu identifizieren, wurde der HF-Grundzustand zunächst an die dynamischen Gleichungen für freie Ladungsträger übergeben. Bei  $T_2=400$  fs (Abb. 10.23(a)) liegen die Maxima der FWM-Signale bei positiven Delays  $t_{12}$  bereits knapp im Rahmen der von der Theorie des Zwei-Niveau-Modells vorhergesagten  $2t_{12}$  (Abschnitt 5.2). Bei  $T_2=800$  fs sind die Echos dann klar zu erkennen (Abb. 10.23(e)).

Berücksichtigt man die Hartree-Terme, findet man bei  $T_2=400$  fs anstatt der Echos Quantenschwebungen (Abb. 10.23(b)), die wegen der starken Nichtparabolizität und der Kopplung der Gleichungen durch die Hartree-Terme zustandekommen. Bei der hohen Dephasierungszeit folgt diesen – getrennt davon gut erkennbar – ein Echopuls (Abb. 10.23(f)). Die Hartree-Terme unterdrücken Photonenechos nicht völlig, sondern schwächen sie nur ab, da sich – wie bereits desöfteren erwähnt – der Depolarisationseffekt dem Auseinanderlaufen der Einzelpolarisationen entgegenwirkt, zudem ist die Phasenrelaxation zu rasch. Als Folge hat der freie Induktionszerfall nach dem zweiten Anregungspuls einen größeren Anteil am FWM-Signal.

Nimmt man die HF-Ausbaustufe, so verschmilzt beim niedrigen  $T_2$  das Echo mit den Schwebungen (Abb. 10.23(c)), die als solche allerdings von der Fock-Wechselwirkung derart “verschmiert” werden, daß sie als solche nicht mehr zu erkennen sind. Das Echo ist nur noch als Ausbuchtung des vorhergehenden Signals zu größeren Zeiten hin zu beobachten (vgl. [73] für den Fall von 2D-Exzitonen). Daß es sich lediglich bei hohen positiven Delays andeutet, ist neben den künstlich hohen Dephasierungszeiten in den Berechnungen ein weiterer Nachteil für die experimentelle Verifikation. Bei  $T_2=800$  fs das Echo stärker als das vorhergehende Signal (Abb. 10.23(g)). Allerdings ist es erst ab  $t_{12}=1250$  fs gut sichtbar.

Als letztes ist noch die abgeschirmte Dynamik aufgeführt: bei  $T_2=400$  fs kann man nicht eindeutig zwischen Echo und den vorhergehenden Quantenschwebungen unterscheiden (Abb. 10.23(d)), die Fock-Wechselwirkung ist durch die Abschirmung dermaßen geschwächt, daß die elektrostatische Wechselwirkung in den Vordergrund tritt. Dadurch ähnelt das Bild der FWM-Signale eher dem der Hartree-Ausbaustufe. Bei  $T_2=800$  fs ist wiederum das Echo gut getrennt von dem vorhergehenden verschwommenen Signal sichtbar (Abb. 10.23(d)). Vergleicht man das Bild der Signale mit Abb. 10.16(c) (Figur ganz rechts mit den zeitaufgelösten Signalen), erkennt man, das dort das Echo stärker mit dem übrigen Signal verschmolzen ist. Der Unterschied liegt in der Anregungsenergie, die bei der anderen Abbildung beim Resonanz-Peak der abgeschirmten HF-Dynamik lag, d.h. leicht blauverschoben bei  $E_L=283$  meV.

Bei mittlerer Dichte und hoher Dephasierungszeit tritt das Photonenecho sogar deutlich sichtbarer auf (Abb. 10.13) als im Fall hoher Dotierungsdichte, was einen guten Hinweis auf den Einfluß der Vielteilchenwechselwirkungen darstellt.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß niedrige Dephasierung, eine hohe Subbandinhomogenität durch die Nichtparabolizität und nichtresonante Anregung mit geringfügig unter

der Resonanz liegender Energie die Entstehung von Photonenechos begünstigen. Wie die HF-Dynamik ohne Abschirmung zeigt, ist das Photonenecho empfindlich gegen Einflüsse durch das Coulomb-Enhancement. Wie bei der Anregung von Elektron-Loch-Paaren im 3D-Fall [55, 74] sind Kontinuumszustände (2D-Kontinuität in  $\mathbf{k}$ -Richtung) für die Entstehung des Echos verantwortlich. Im 3D-Interband-Fall kann durch Laserpulse mit einer Energie an der Bandkante ein Kontinuum von Zuständen angeregt werden, so daß ein Photonenecho entsteht. Dagegen ist bei einer Anregungsenergie im Bereich der 1s-Exziton-Resonanz nur dann ein Echo-Effekt sichtbar, wenn die Intensität des ersten Pulses hoch genug ist, um Elektronen ins Kontinuum anzuregen. Diese freien Ladungsträger bilden dann ein inhomogen verbreitertes Ensemble von resonanten Polarisationszuständen.

Bei Intersubband-Anregung ist das Zustandekommen eines Echos unabhängig von der Intensität der Laserpulse – äquivalent zur Anregung an der Bandkante im 3D-Fall. Ob es sichtbar ist, hängt von der Relation zwischen den Größen von Induktionszerfall und Photonecho ab.

# Kapitel 11

## Resultate für InAs/AlSb-Heterosysteme

### 11.1 $k \cdot p$ -Grundzustand

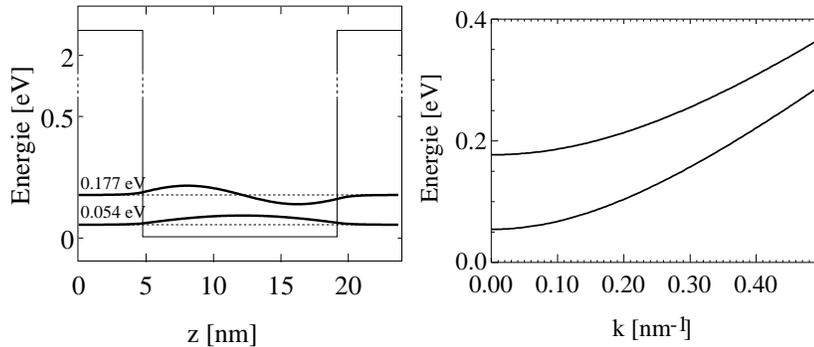
Die InAs/AlSb-Heterostruktur hat gegenüber GaAs-Systemen einige Vorteile: zum einen ist die Bandlücke vergleichsweise klein, so daß Kopplungseffekte zwischen Valenz- und Leitungsband für eine relativ große Nichtparabolizität des Leitungsbandes verantwortlich sind, ohne daß eine zu große Ladungsträgerkonzentration erforderlich ist, die sich durch die entsprechende selbstkonsistente Verformung des Quantentopfs störend auswirkt [10]. Zum anderen kann die Ladungsträgerdichte wegen der hohen Leitungsbandbarriere von ca. 2 eV sehr hoch sein, d.h. sehr viele Elektronen können das untere Leitungssubband besetzen [9].

Die Parameter der Modell-Probe in Tabelle 11.1 wurden teilweise aus dem Landolt-Börnstein [62] und teilweise von Warburton et al. [9] übernommen.

Bezeichnung	Symbol	Größe	
		InAs	AlSb
Topfbreite	$d$	15 nm [9]	4.5 nm
Topftiefe	$\Delta V$	616 meV	–
Dotierungsdichte	$n_D$	$1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$	
Materialkonstanten	$\epsilon_S$	15.15 [62]	–
	$\epsilon_\infty$	12.25 [62]	–
Bandlücke	$\epsilon_g$	418 meV [9]	2320 meV [9]
Kane-Energie	$\epsilon_p$	21.5 eV [9]	–
Spin-Orbit-Splitting	$\Delta_{SO}$	380 meV [9]	750 meV [9]
Valenzband-Offset	$\delta_{VB}$	198 meV [9]	–

**Tabelle 11.1:** In den numerischen Berechnungen benutzte Parameter einer InAs/AlSb/ $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Halbleiterstruktur

In Figur 11.1(a) sind zum Vergleich mit Kapitel 8 die Wellenfunktionen bei  $\mathbf{k} = 0$  der untersten beiden Subbänder eines InAs/AlSb-Materialsystems aufgetragen. Wegen der großen Breite des Topfes liegen die Energien der Wellenfunktionen energetisch dicht beieinander (vgl. Abb. 8.1). Da bei dieser Heterostruktur – wie bereits erwähnt – Interband-Kopplungseffekte einen großen Einfluß haben, bietet sich zur Lösung des Topfproblems das  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Verfahren an. Die Energiebänder des  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Einteilchenwellenfunktionen verlaufen nichtparabolisch im Gegensatz zu denen der einfachen Quantentopf-Lösung (Kapitel 8). In der Abbildung 11.1(b) und besonders

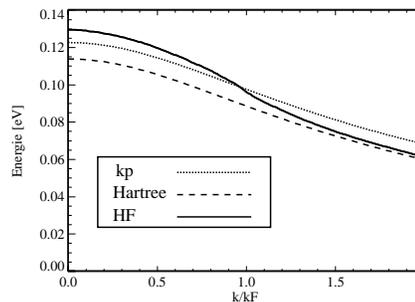


(a)  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Wellenfunktionen und  $\mathbf{k} = 0$ -Energieniveaus

(b) Dispersionrelation für die beiden Subbänder

**Abbildung 11.1:** InAs/AlSb-Materialsystem mit den Materialparametern aus Tabelle 11.1.

in Fig. 11.2 kann man die Nichtparabolizität für ein InAs/AlSb-Materialsystem gut erkennen. Während durch die Hartree-Wechselwirkung der Bandabstand lediglich abgesenkt wird, heben die Fock-Terme deren Wirkung auf und verstärken bei der betrachteten Dichte gleichzeitig die Nichtparabolizität. Somit ist allein schon durch die  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Bandinhomogenität eine starke Auswirkung auf die Dynamik der IS-Polarisation zu erwarten.



**Abbildung 11.2:** Differenz zwischen den Energien von erstem und zweitem Subband von Fig. 11.1(a)

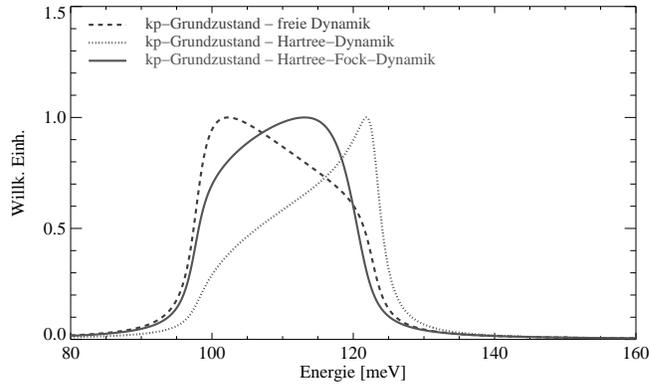
## 11.2 Lineare Absorptionsspektren

Die Absorptionsspektren mit dem  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ -Zustand als Basis (Abb. 11.3(a)) bei einer Dephasierungszeit von  $T_2=400$  fs stimmen bis auf eine Energieverschiebung sowohl in der Breite als auch in der Form exakt mit denjenigen überein, wo der Hartree-Grundzustand die Basis bildet (Abb. 11.3(b)). Dies ist aufgrund der Hartree-Energienormierung (siehe Abb. 11.2) auch zu erwarten. Die starke Asymmetrie bei FC-Dynamik rührt von der Nichtparabolizität der entsprechenden Dispersionen her, die hier bei allen drei Arten von Grundzustand gegeben ist.

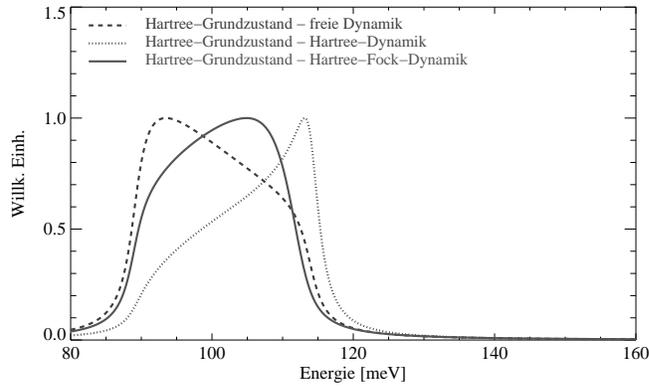
Im Fall der FC-Dynamik mit der  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ - bzw. der Hartree-Basis werden wegen der starken Nichtparabolizität aufgrund der Interband-Kopplung größtenteils Elektronen an der Fermi-Kante angeregt, wie man am entsprechenden Verlauf der gestrichelten Kurve mit einem Maximum auf der linken Flanke erkennen kann (Abb.en 11.3(a) und 11.3(b)). Die Blauverschiebung bei Anwendung der Hartree-Dynamik ist wiederum durch den Depolarisationseffekt zu erklären, auch verschmälert sich das Spektrum aufgrund der Kollektivbewegung der Elektronen. Bei HF-Dynamik wird das Spektrum wiederum breiter, der Depolarisationseffekt wird partiell wieder aufgehoben. Bei der Hartree-Einteilchenwellenfunktionen-Basis erfährt das Spektrum in allen Fällen erwartungsgemäß eine Rotverschiebung um 10 meV (Abb. 11.3(b)).

Betrachtet man schließlich die HF-Basis und die zugehörigen Spektren, zeigen sich dieselben Tendenzen (Abb. 11.3(c)), die größere Breite und die "rundere" Form der Spektren kommen durch die stärkere Bandinhomogenität aufgrund der höheren Nichtparabolizität der HF-Dispersionsrelation zustande. Vergleicht man die drei Spektren mit dem Hartree-Fall, findet man die drei Kurven um ca. 14 meV blauverschoben, d.h. die Fock-Terme im Grundzustand heben die Rotverschiebung durch den Hartree-Anteil wieder auf.

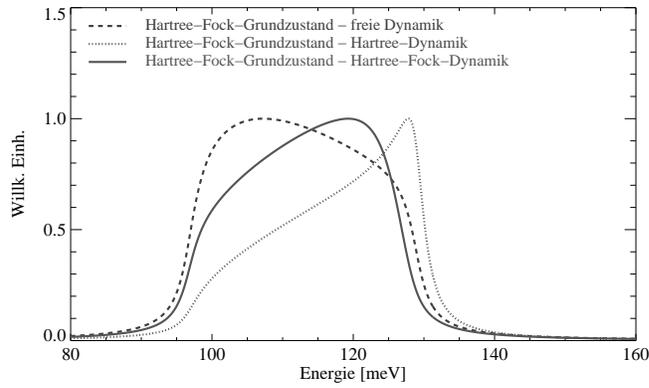
Insgesamt zeigen sich unter Berücksichtigung der Vielteilchen-Terme keine wesentlichen Unterschiede in den Effekten bei der Berechnung der linearen Absorptionsspektren der InAs/AlSb-Heterostruktur im Vergleich zu den Spektren des GaInAs/ AlInAs-Systems (Kapitel 9). Wegen der in Relation zur Energiedifferenz zwischen den Subbändern höheren Nichtparabolizität ist die Asymmetrie der Spektren ausgeprägter (siehe auch [63, 6] in Bezug auf InGaAs/InAlAs). Anzumerken bleibt, daß die Einflüsse der  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ -Energienormierung von denen der HF-Renormierung noch übertroffen werden.



(a)  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ -Grundzustand



(b)  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ -Hartree-Grundzustand

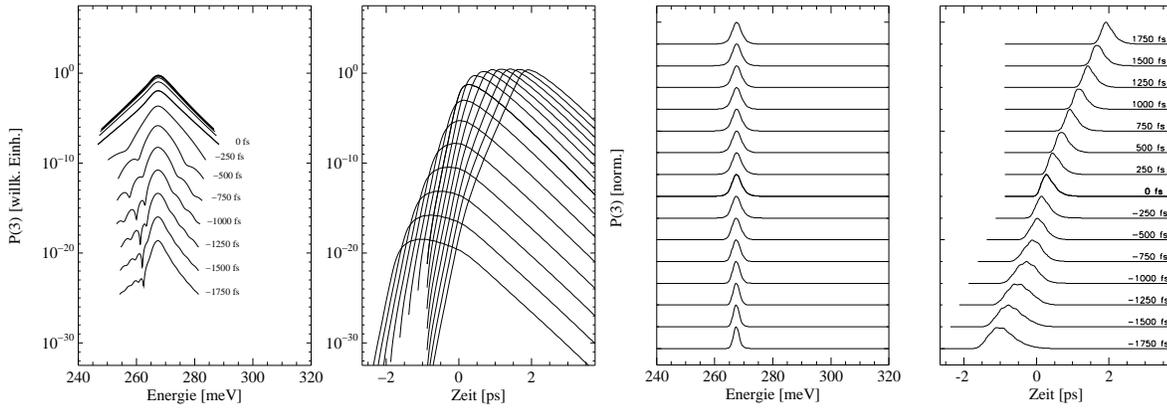


(c)  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ -HF-Grundzustand

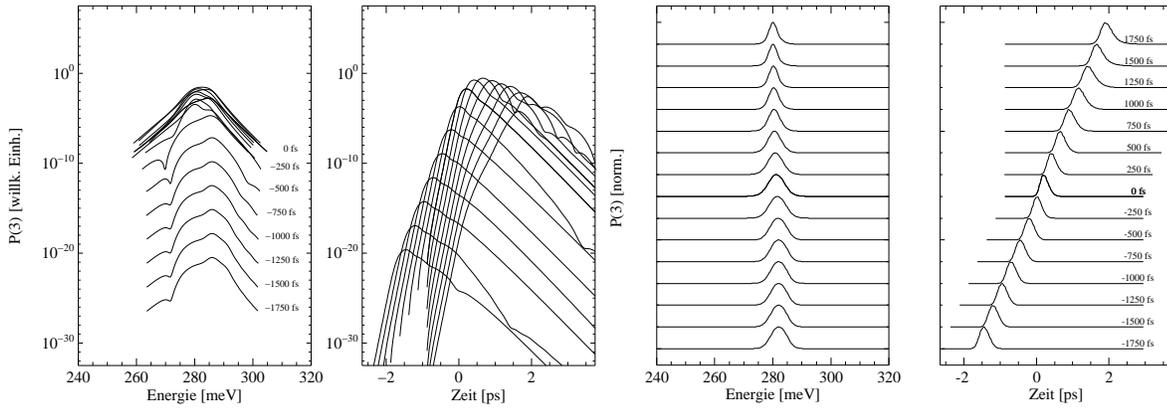
**Abbildung 11.3:** Lineare Absorptionsspektren mit dem  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ -Grundzustand als Basis für  $T_2=400$  fs und drei unterschiedliche Ausbaustufen der Bewegungsgleichung bei einer Dichte von  $n_D=1.5 \cdot 10^{12}$   $\text{cm}^{-2}$

### 11.3 Vierwellenmischen

Bei niedrigen Dephasierungszeiten ( $T_2=200$  fs) erkennt man deutlich bei den zeitaufgelösten FWM-Signalen freien Induktionszerfall (Abb. 11.5(a), rechte Seite), wenn der  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Grundzustand als Basis der FC-Dynamik dient. Das FWM-Signal bleibt über alle Verzögerungszeiten  $t_{12}$  hinweg in der spektralen Darstellung nahezu konstant in der Form. Dies ist wie beim GaInAs/AlInAs-System bei gleicher Elektronendichte und der gleichen Dephasierungszeit, wo man ebenfalls kaum Strukturen in der Signalform vorfindet (Abb. 11.4(a)), wenn man den FC- oder den Hartree-Grundzustand und die entsprechende Dynamik betrachtet.



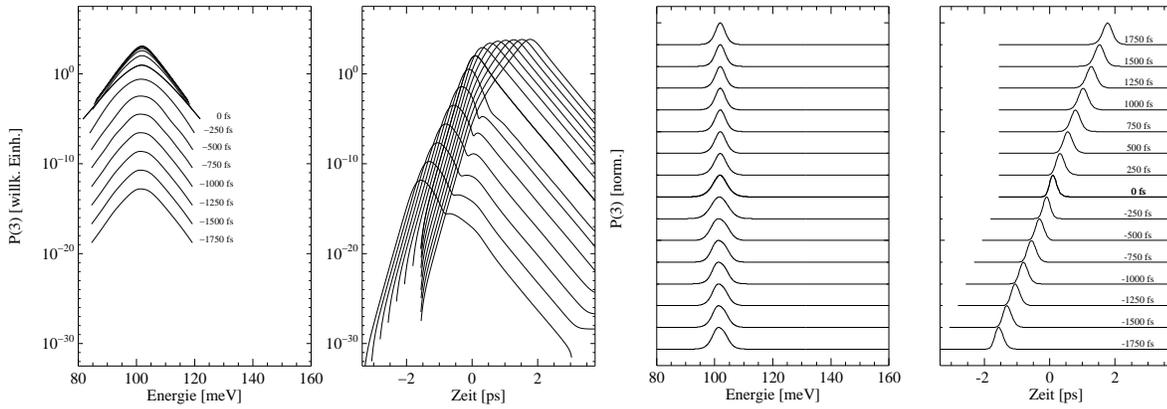
(a) Hartree-Grundzustand - Hartree-Dynamik



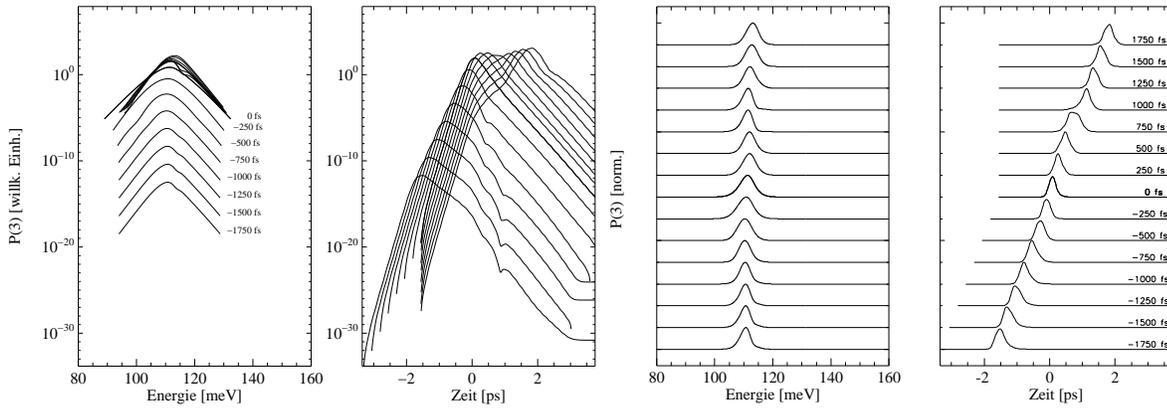
(b) Hartree-Fock-Grundzustand - Hartree-Fock-Dynamik

**Abbildung 11.4:** Vierwellenmischsignale für die Dotierdichte  $n_D=1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  und die Dephasierungszeit  $T_2=200$  fs in GaInAs/AlInAs als Vergleichsbasis

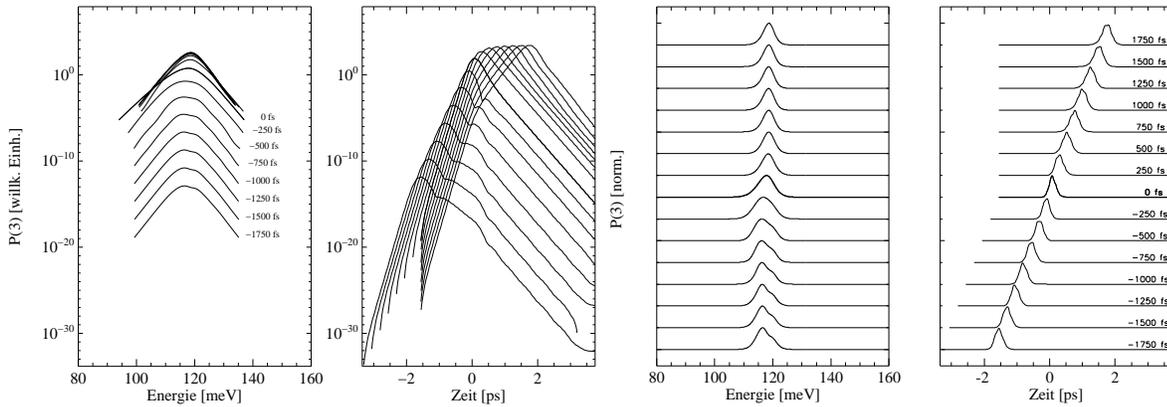
Beim InAs/AlSb-System lassen sich allerdings im Hartree-Fall (Abb. 11.5(b), Figur ganz rechts) bereits leichte Anomalien erkennen: ab ca.  $t_{12}=500$  fs verlagert sich das Signalmaximum leicht



(a)  $k \cdot p$ -Grundzustand - freie Dynamik



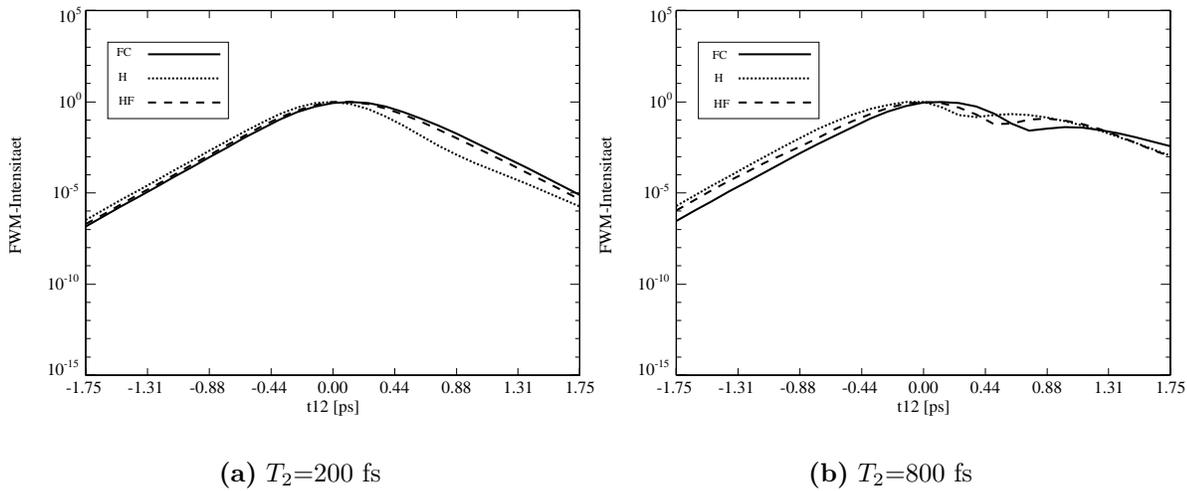
(b)  $k \cdot p$ -Hartree-Grundzustand - Hartree-Dynamik



(c)  $k \cdot p$ -HF-Grundzustand - HF-Dynamik

**Abbildung 11.5:** Vierwellenmischsignale für die Dotierungsdichte  $n_D = 1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  und die Dephasierungszeit  $T_2 = 200 \text{ fs}$  in resonanter Anregung. (Die Darstellung der HF-Dynamik mit Abschirmung wurde unterlassen, da sie weitestgehend der HF-Dynamik ohne Abschirmung entspricht, wobei die zeitabhängige, logarithmische Darstellung der Signale ein weniger ausgeprägtes Schwingverhalten zeigt.)

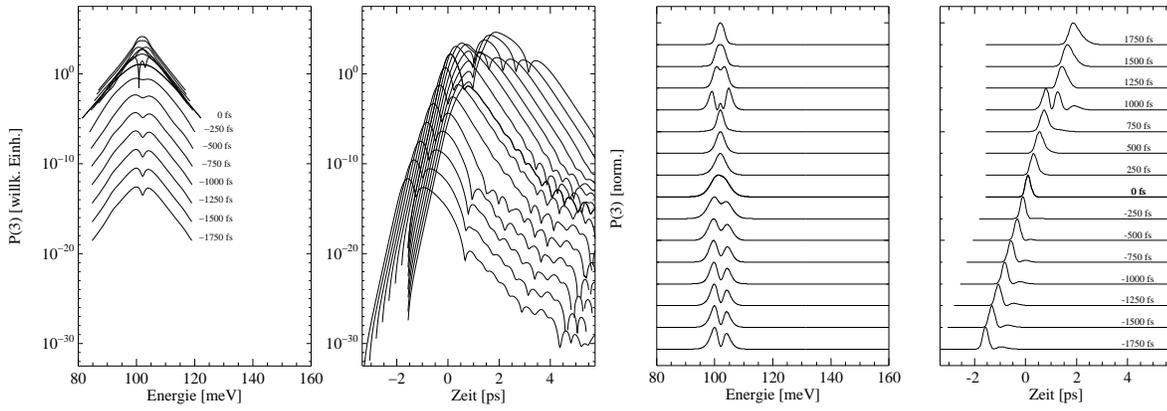
hinter den letzten Anregungspuls. Die Ursache dafür klärt sich bei längeren Phasenrelaxationszeiten auf, wie wir gleich sehen werden; zumindest sind bei  $T_2=200$  fs bereits leichte Asymmetrien in den FWM-Spektren zu erkennen, die mit den entsprechenden Anomalien der zeitaufgelösten Signale einhergehen (Abb. 11.5(b), erste und dritte Figur von links). Bei allen  $t_{12}$  ist das FWM-Signal dem  $\mathbf{k}_2$ -Puls eng benachbart (Abb. 11.5(b), rechte Figur). Die zeitintegrierte Darstellung in Abb. 11.6(a) zeigt in Analogie zu den Anomalien eine Änderung des Zerfalls: bei  $T_2=200$  fs fällt im Hartree-Fall die zeitintegrierte Polarisation bei kleinen positiven Delays  $t_{12} \leq 600$  fs zunächst schneller ab als alle anderen, danach nähert sich ihr Verlauf unter Verlangsamung des Zerfalls wieder den anderen Kurven.



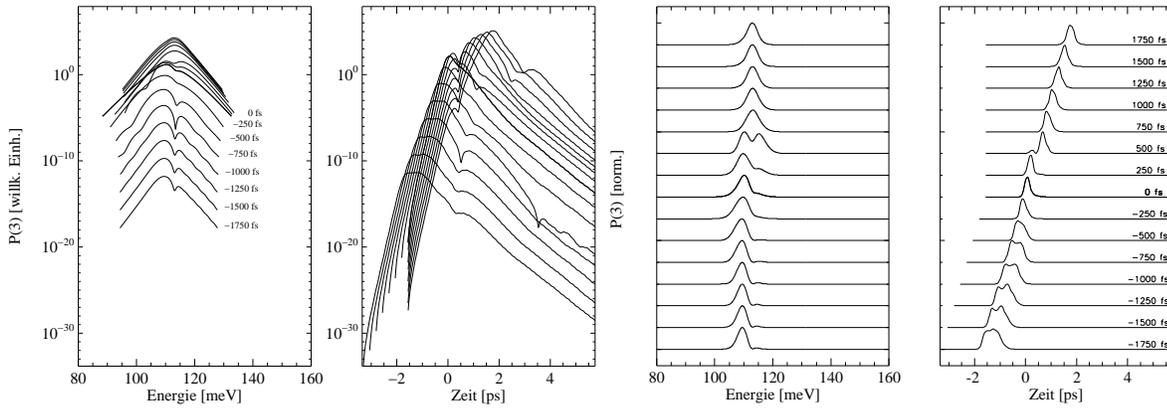
**Abbildung 11.6:** Zeitintegrierte Vierwellenmischsignale für die Dotierungsdichte  $n_D=1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  in resonanter Anregung

In Analogie zur HF-HF-Kombination bei GaInAs/AlInAs (Abb. 11.4(b), zweites Bild von links, logarithmische Darstellung) ist eine dem zeitaufgelösten Signal aufgeprägte Modulation in logarithmischer Darstellung im HF-Fall schwach zu erkennen (Abb. 11.5(c), zweiter Plot von links). Bei dieser handelt es sich um eine Schwebung mit einer Energie von ca. 8 meV. In den Spektren treten bei negativen  $t_{12}$  leichte Asymmetrien hin zu höheren Energien auf (Abb. 11.5(c), dritter Plot von links, nichtlogarithmische Darstellung).

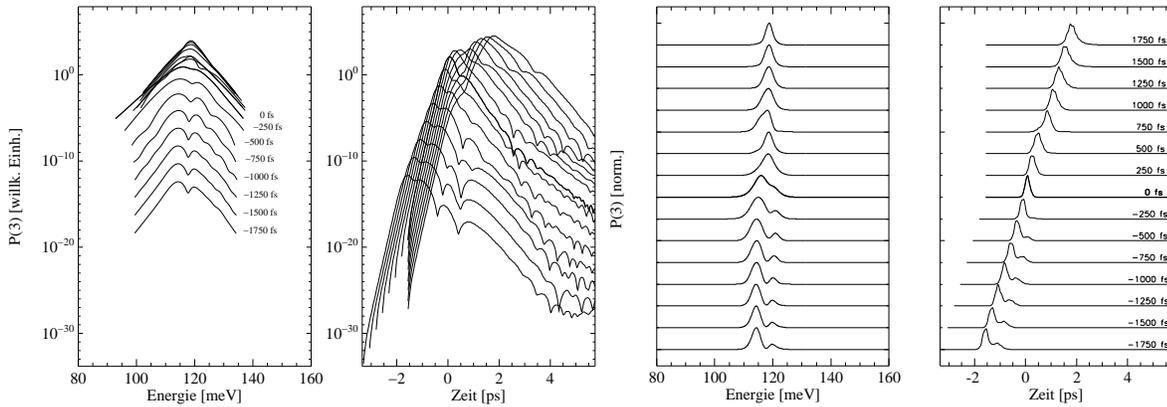
Bei  $T_2=400$  fs (Abb. 11.7(b), 11.7(c)) findet man im Hartree- (schwach) sowie im HF-Fall eine Aufspaltung der Struktur der FWM-Spektren bei negativen und kleinen positiven Verzögerungen. Während bei positiven  $t_{12}$  sich die Polarisation noch im Resonanzbereich, d.h. beim entsprechenden Absorptionsmaximum, befindet, springt sie bei negativen  $t_{12}$  um ca. 5 meV nach links, wobei ein kleiner Peak im Resonanzbereich erhalten bleibt. Dieser Niederenergiefall entspricht angeregten Elektronen an der Fermi-Kante.



(a)  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ -Grundzustand - FC-Dynamik



(b)  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ -Hartree-Grundzustand - Hartree-Dynamik



(c)  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ -HF-Grundzustand - HF-Dynamik

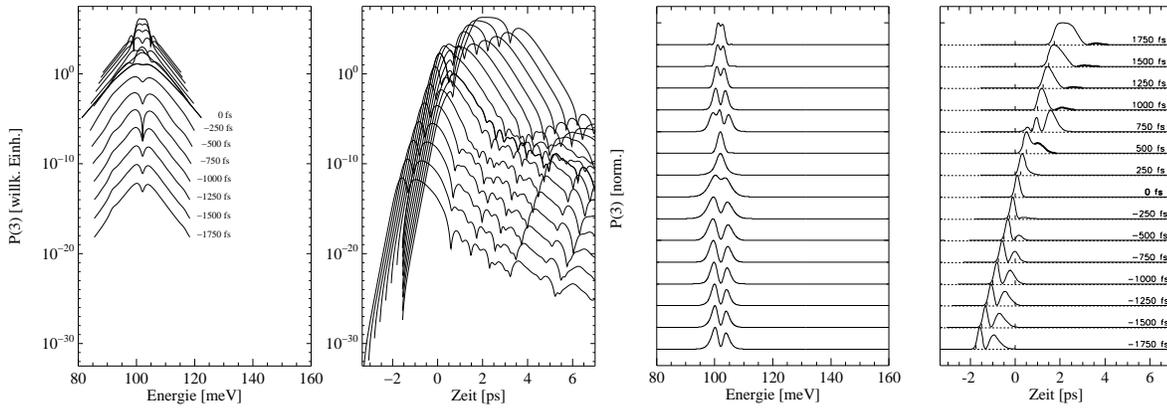
**Abbildung 11.7:** Vierwellenmischsignale für die Dotierungsdichte  $n_D=1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  und die Dephasierungszeit  $T_2=400 \text{ fs}$  in resonanter Anregung

Bei der FC-Dynamik ist diese Aufspaltung ebenfalls zu beobachten, jedoch scheinen sich die beiden Peaks zu positiven  $t_{12}$  hin zu vereinigen. Nur bei  $t_{12}=1000$  fs spaltet sich das Signal nochmals deutlich auf (bei  $t_{12}=1250$  fs lediglich schwach zu erkennen). Beträgt  $T_2=800$  fs, findet man im FC-Fall (Abb. 11.8(a)) eine Verstärkung der aus der starken Nichtparabolizität resultierenden Aufspaltung, die in der zeitaufgelösten Dynamik mit ansatzweise zu erkennenden Quantenschwebungen einhergeht. Bei Hartree- und HF-Dynamik stößt man wieder auf den Sprung des spektral aufgelösten FWM-Signals zu einer niedrigeren Energie (Abb. 11.8(b), 11.8(c)). Kurzzeitige Quantenschwebungen sind nun deutlich sichtbar, im Hartree-Fall allerdings nur um  $t_{12}=0$  fs. In allen drei Fällen findet man sowohl bei positiven als auch bei negativen Delays einen Knick in der zeitaufgelösten, logarithmischen Darstellung (Abb. 11.8, jeweils zweiter Plot von links), hinter dem das Signal schwächer abfällt.

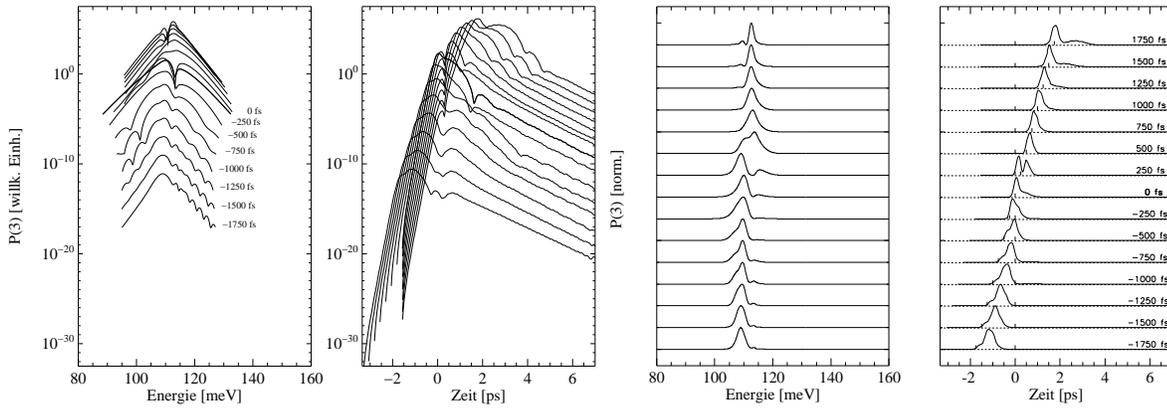
Bei FC-Dynamik mit  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Grundzustand ist bei positiven Delays schwach ein Photonenecho-Anteil zu erkennen (Abb. 11.8(a), rechter Plot, als dunkle Linie markiert). Beträgt die Verzögerung  $t_{12}=750$  fs, kann man nicht unterscheiden, ob der letzte Peak von einem Echo herrührt, oder ob es sich um eine Schwebung handelt. Die  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Bandinhomogenität macht sich also erst bei hohen Dephasierungszeiten durch Photonenechos bemerkbar. Durch die Hartree-Terme werden die Echos auch bei großen  $T_2$  aufgrund des Depolarisationseffektes unterdrückt (Abb. 11.8(b)). Bei eingeschalteter Coulomb-Austauschwechselwirkung erkennt man bei hohen positiven  $t_{12}$  klarer als in den anderen beiden Fällen einen Übergang von Induktionszerfall zu Photonenecho (Abb. 11.8(c)), da die Fock-Terme den Hartree-Termen entgegenwirken und zudem die Nichtparabolizität verstärken (siehe nochmals Abb. 11.2).

In Abb. 11.6 sind die zeitintegrierten Polarisationen in  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ -Richtung für die niedrige und hohe Dephasierungszeit dargestellt. Bei  $T_2=200$  fs (Abb. 11.6(a)) liegt die Zerfallskonstante im dargestellten Bereich zwischen  $1.5/T_2$  und  $1.7/T_2$  und man kann zumindest im Hartree-Fall den Knick im Verlauf ahnen (wie bereits vorhin erwähnt), der bei  $T_2=800$  fs deutlich sichtbar ist (Abb. 11.6(b)). Im Fall von Hartree-Dynamik findet man ihn bei  $t_{12}=380$  fs, im HF-Fall bei  $t_{12}=540$  fs, und bei FC-Dynamik beträgt die Verzögerungszeit ungefähr  $t_{12}=760$  fs. Betrachtet die entsprechenden Spektren (Abb. 11.8, Plots in der dritten Spalte von links), fällt die Bewegung des Schwerpunkts der spektral aufgelösten Polarisation in den Resonanzbereich ins Auge (adiabatische Resonanz, siehe auch Abschnitt 10.1.2). Der Übergang korrespondiert ziemlich gut mit den Knicken in den zeitintegrierten Darstellungen von Abb. 11.6(b). Das Einschwenken der  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ -Polarisation in die Resonanz und die daraus resultierende Verstärkung des Signals erklärt auch den kurzfristigen Anstieg der zeitintegrierten Kurven.

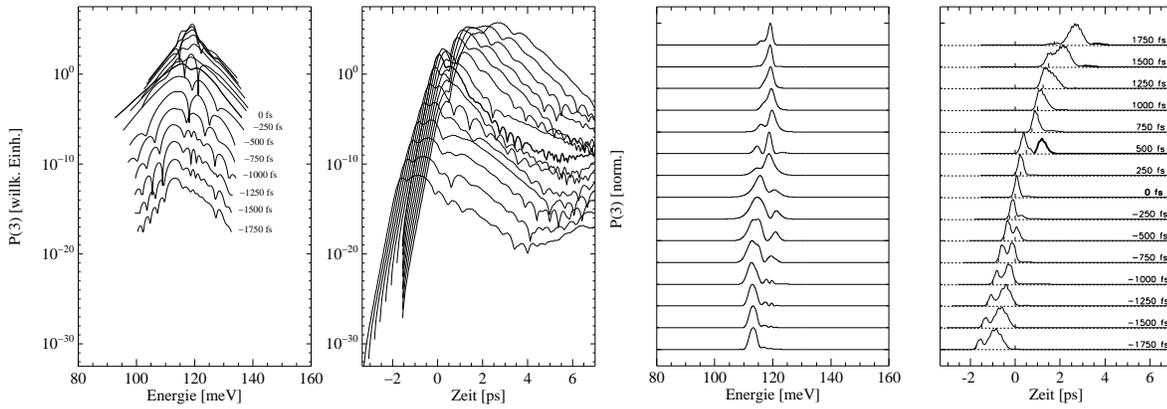
Die Untersuchungen des  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Modells wurden im Rahmen der Arbeit nicht weiter vertieft. Anhand der vorhandenen Resultate läßt sich feststellen, daß gegenüber dem GaInAs/AlInAs-System keine gravierenden Unterschiede beim Verhalten der FWM-Dynamik gefunden werden konnten. Bei der untersuchten hohen Dotierungsdichte überwiegt zwar der Einfluß der Hartree- und Fock-Terme, bei hohen Phasenrelaxationszeiten macht sich aber die  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Bandinhomogenität ebenfalls durch die Aufspaltung der FWM-Spektren in zwei oder mehr Peaks und schwach durch Photonenechos bemerkbar.



(a)  $k \cdot p$ -Grundzustand - FC-Dynamik



(b)  $k \cdot p$ -Hartree-Grundzustand - Hartree-Dynamik



(c)  $k \cdot p$ -HF-Grundzustand - HF-Dynamik

**Abbildung 11.8:** Vierwellenmischsignale für die Dotierungsdichte  $n_D = 1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  und die Dephasierungszeit  $T_2 = 800 \text{ fs}$  in resonanter Anregung

Letztendlich können InAs/AlSb-Heterostrukturen dazu dienen, den Einfluß der Nichtparabolizität der Subbänder auf die Dynamik der kohärenten IS-Polarisation getrennt von den Effekten durch das Coulomb-Enhancement zu untersuchen, da schon bei relativ niedrigen 2D-Elektronengasdichten – wie bereits mehrfach betont – die Nichtparabolizität sehr stark ausgeprägt ist.



## **Teil IV**

# **Zusammenfassung und Ausblick**



## Zusammenfassung

Zentrales Thema dieser Arbeit war die optische Anregung von Übergängen zwischen Elektronen auf Subbändern in Halbleiterheterostrukturen. Dabei entsteht kohärente Polarisationsstrahlung im Infrarotbereich, die auf ultrakurzer Zeitskala zerfällt. Von großer Wichtigkeit war dabei die Analyse linearer Absorptionsspektren und die Simulation von Vierwellenmischexperimenten, bei denen sich die Intersubbandpolarisation untergrundfrei detektieren läßt.

Zwei Materialsysteme standen hier im Mittelpunkt: GaInAs/AlInAs und InAs/AlSb, wobei der Schwerpunkt der Berechnungen auf ersterem lag, da es auch Basis der Arbeit von Kaindl [5] war. InAs/AlSb wurde als Halbleiterstruktur mit kleiner Bandlücke und starker Interbandkopplung zum Vergleich herangezogen.

In den dynamischen Gleichungen wurden phasenzerstörende Streuprozesse phänomenologisch durch eine Dephasierungszeit  $T_2$  realisiert, so daß durch Variation dieses wichtigen Parameters Vielteilcheneffekte sichtbar gemacht werden konnten, die in den in [5] aufgeführten Experimenten nicht beobachtet werden konnten.

Von besonderem Interesse war der Einfluß der Coulomb-Wechselwirkung, die in Meanfield-Näherung in die Gleichungen einging. Den wichtigsten Beitrag leistet der Fock-Anteil in der statischen Hartree-Fock-Gleichung. Er sorgt für eine Energierenormierung der Subbänder, die zu einer nichtparabolischen Dispersion führt. Betrachtet man lediglich den Hartree-Grundzustand, so schieben die entsprechenden Absorptions- und FWM-Spektren verglichen mit denen der HF-Basis zu niedrigeren Energien.

Die berechneten FWM-Spektren zeigten unter Berücksichtigung der Coulomb-Wechselwirkung – in Abhängigkeit von der Elektronengasdichte – eine Ausbildung von Strukturen. Der Depolarisationsshift äußert sich wie im Fall der linearen Absorptionsspektren durch eine Blauverschiebung, verursacht durch eine kollektive Bewegung der Elektronen als Reaktion auf die optische Anregung. Der Fock-Anteil in den Bewegungsgleichungen bewirkt dagegen eine Rotverschiebung, da die Elektronen des unteren Subbandes die Frequenz der Schwingungen der angeregten Dipole abschwächen.

In der zeitaufgelösten Darstellung traten bei längeren Phasenrelaxationszeiten Phänomene wie Photonenechos (Abschnitt 10.5) und Quantenschwebungen (Abschnitt 10.4) auf. Ursache für die Entstehung von Photonenechos ist die Inhomogenität durch die Nichtparabolizität der Subbänder. Die Energierenormierung durch die Coulomb-Austauschwechselwirkung leistet dabei einen entscheidenden Beitrag. Allerdings konnten Echos und Schwebungen in den dieser Arbeit zugrundelegenden Experimenten aufgrund der raschen Dephasierung nicht beobachtet werden.

Das Schwebungsverhalten in der zeitaufgelösten Polarisation beruhte auf den Fock-Termen in Hinsicht auf die Renormierung der Subbänder und auf der Kopplung der schwingenden Dipole durch die Coulomb-Wechselwirkung. In den FWM-Spektren äußern sich Quantenschwebungen in einer Aufspaltung in einen Hoch- und einen Niederenergie-Peak – es können auch noch mehr Peaks in Erscheinung treten, relevant sind im Wesentlichen nur diese beiden. Die Schwebungen sind Resultat der Interferenz zwischen ihnen, sie korrespondieren zu angeregten Elektronen an den beiden Enden der Fermi-Verteilung. Folglich entspricht die Schwebungsfrequenz bei nied-

rigen Temperaturen der Energie von Elektronen an der Fermi-Kante und ist damit ein Maß für die Stärke der  $\delta$ -Dotierung.

Bei den linearen Bewegungsgleichungen treten hingegen keine Quantenschwebungen auf, die Spektren weisen lediglich eine mit zunehmender Elektronengasdichte  $n_D$  wachsende “Unsymmetrie” in der Form auf, die beim InAs/InAlAs-Materialsystem stärker ausgeprägt ist, da hier aufgrund der starken Kopplung zwischen den Bändern, die durch eine Multiband- $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ -Theorie modelliert wird, schon bei relativ niedrigen 2D-Elektronengasdichten ein hoher Grad von Nichtparabolizität in den Subbändern auftritt. Im Fall der Freie-Ladungsträger- sowie der Hartree-Dynamik zeigen die zeitintegrierten Intensitäten der IS-Polarisation ein  $2/T_2$ -Zerfallsverhalten, wohingegen durch die Fock-Terme inhomogen verbreiterte Ensembles zu schnellerem Zerfall in Richtung der von Yajima theoretisch vorhergesagten  $4/T_2$ -Rate neigen.

Bei niedrigen Phasenrelaxationszeiten, wie sie aus den Experimenten ermittelt wurden, werden dagegen die Einflüsse der Coulomb-Wechselwirkung auf die Bewegungsgleichungen weitgehend unterdrückt, die Physik läßt sich hinreichend genau durch ein Ensemble von Zwei-Niveau-Systemen charakterisieren, wie beispielhaft die Schwerpunktsbewegung der FWM-Intensität (Abschnitt 10.1.1) oder die Form der Absorptionsspektren gezeigt haben (Abschnitt 9.2). Abschließend kann man sagen, daß phasenerstörende Prozesse bei den betrachteten Halbleiterstrukturen den Einfluß von Vielteilcheneffekten weitgehend unterdrücken.

## Ausblick

Wir haben gesehen, daß die Vielteilchenkorrelationen in GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As-Heterostrukturen erst bei höheren Dephasierungszeiten als den experimentell ermittelten auftreten. Optimal für genauere Untersuchungen geeignet wären Materialsysteme, die bei hoher Elektronenkonzentration lange Phasenrelaxationszeiten der kohärenten Polarisation bei optischer Anregung bieten. Um die Relaxationmechanismen besser zu verstehen, wäre eine Integration phasenerstörender Ausdrücke durch die Berücksichtigung von Elektron-Kristallgitter- und Elektron-Elektron-Streuprozessen wünschenswert. Die Abschirmung der Coulomb-Wechselwirkung durch die angeregten Elektronen selbst könnte man ebenfalls durch die Integration von Bewegungsgleichungen für Zwei-Elektronen-Korrelationsfunktionen in unser Modell dynamisch bewerkstelligen.

Um experimentell die Effekte der nichtparabolischen Subbanddispersion besser verstehen zu können, wären eingehendere Untersuchungen an InAs/AlSb- und verwandten Quantentopfstrukturen von großem Nutzen, da wegen der – trotz relativ niedriger Dotierung – vergleichsweise hohen Nichtparabolizität bei der optischen Anregung dynamische Coulomb-Effekte schwächer ausgeprägt sein müssten. Außerdem wäre eine systematische Untersuchung der Temperaturabhängigkeit der betrachteten Prozesse interessant, da eventuelle technische Anwendungen vorzugsweise im Zimmertemperaturbereich eine Rolle spielen, wo Vielteilchen-Streuungen an Relevanz gewinnen.

**Teil V**  
**Anhang**



# Anhang A

## Berechnung der Coulomb-Matrix-Elemente

In den Zeilen 3 bis 5 der Gleichung (7.4) taucht folgender, die Coulomb-Wechselwirkung beschreibender Integralausdruck auf:

$$\sum_{\substack{n_1, n_2, n_3, n_4 \\ \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4}} c_{n_1, \mathbf{k}_1, s}^\dagger c_{n_2, \mathbf{k}_2, s'}^\dagger c_{n_3, \mathbf{k}_3, s'} c_{n_4, \mathbf{k}_4, s} \times \quad (\text{A.1})$$

$$\int d^2 \rho \int d^2 \rho' e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4) \cdot \rho} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \cdot \rho'} \times$$

$$\int dz \int dz' \varphi_{n_1, \mathbf{k}_1}^*(z) \varphi_{n_2, \mathbf{k}_2}^*(z') \varphi_{n_3, \mathbf{k}_3}(z') \varphi_{n_4, \mathbf{k}_4}(z).$$

Um die zweite Zeile dieses Ausdrucks auswerten zu können, fügt man einen künstlichen Limes ein,

$$\lim_{k_0 \rightarrow 0} \int d^2 \rho e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4) \cdot \rho} \int d^2 \rho' \frac{e^{-k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \cdot \rho'}, \quad (\text{A.2})$$

und wertet zunächst das innere Integral unter Ausnutzung der Translationsinvarianz aus:

$$\int d^2 \rho' \frac{e^{-k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \cdot \rho'} = e^{-i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \cdot \rho} \int d^2 \rho' \frac{e^{-k_0 \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}}}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} e^{-i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \cdot \rho'}. \quad (\text{A.3})$$

Dieses zweidimensionale Integral schreiben wir nun in Polarkoordinaten, wobei wir die Differenz zwischen den Vektoren vereinfachend mit  $\mathbf{k}$  substituieren. Da

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \rho' &= k_x x' + k_y y' \\ &= \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2} (\cos \theta \cos \xi + \sin \theta \sin \xi) \\ &= k \rho \cos(\theta - \xi), \end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{k} = (k_x, k_y) = k (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $x' = \rho \cos \xi$  und  $y' = \rho \sin \xi$ , folgt

$$\begin{aligned}
\int d^2 \rho' \frac{e^{-k_0 \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}}}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \rho'} &= \int_0^\infty d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\Theta \frac{e^{-k_0 \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}}}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} e^{-ik\rho \cos \Theta} \\
&= -\frac{2\pi}{k_0} \int_0^\infty d\rho \left[ -k_0 \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} e^{-k_0 \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} \right] J_0(k\rho) \\
&= -\frac{2\pi}{k_0} \left[ e^{-k_0 \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} J_0(k\rho) \Big|_0^\infty + k \int_0^\infty d\rho e^{-k_0 \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} J_1(k\rho) \right], \tag{A.4}
\end{aligned}$$

wobei  $J_n$  Besselsche Funktionen erster Gattung  $n$ -ter Ordnung darstellen. Sie sind definiert gemäß

$$J_n(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}.$$

Zunächst werten wir das Integral mit Hilfe einer Integraltabelle aus [75],

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty d\rho e^{-k_0 \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} J_1(k\rho) \\
&= \frac{d}{dk_0} \int_1^\infty dx \frac{e^{-k_0 |z-z'|x}}{\sqrt{x^2 - 1}} J_1(k|z-z'|\sqrt{x^2 - 1}) \\
&= \frac{d}{dk_0} \frac{\sinh\left(\frac{1}{2} \left[ (\sqrt{k^2 + k_0^2} - k_0) |z-z'| \right]\right) e^{-\frac{1}{2} [(\sqrt{k^2 + k_0^2} + k_0) |z-z'|]}}{k|z-z'|} \\
&= \frac{1}{k} \left( \frac{k_0}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} e^{\sqrt{k^2 + k_0^2} |z-z'|} - e^{-k_0 |z-z'|} \right). \tag{A.5}
\end{aligned}$$

Die Stammfunktion auf der linken Seite der letzten Zeile von (A.4) ist trivial auswertbar, sie hebt sich mit der Exponentialfunktion in (A.5) auf, so daß man schließlich zum Resultat

$$(A.4) = 2\pi \frac{e^{-\sqrt{k^2 + k_0^2} |z-z'|}}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} \tag{A.6}$$

gelangt. Einfügen in (A.2) und die Ausführung des Limes liefert schließlich

$$2\pi \lim_{k_0 \rightarrow 0} \frac{e^{-\sqrt{|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3|^2 + k_0^2} |z-z'|}}{\sqrt{|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3|^2 + k_0^2}} \int d^2 \rho e^{-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \cdot \rho} = (2\pi)^3 \frac{e^{-|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3| |z-z'|}}{|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3|} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4). \tag{A.7}$$

Also resultiert für den Integralausdruck

$$(A.1) = (2\pi)^3 \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3, n_4 \\ \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}} c_{n_1, \mathbf{k}_1, s}^\dagger c_{n_2, \mathbf{k}_2, s'}^\dagger c_{n_3, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, s'} c_{n_4, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3, s} \times \\ \int dz \int dz' \varphi_{n_1, \mathbf{k}_1}^*(z) \varphi_{n_2, \mathbf{k}_2}^*(z') \frac{e^{-k_3|z-z'|}}{k_3} \varphi_{n_3, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3}(z') \varphi_{n_4, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3}(z). \quad (A.8)$$

Umbenennung von  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  und  $\mathbf{k}_3$  in  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  und  $\mathbf{q}$  sowie Substitution der Summenindizes liefert die rechte Seite von Gleichung (7.4).



# Anhang B

## Zwei-Niveau-Modell

### B.1 Entwicklung nach Amplituden des Lichtfeldes

In diesem Abschnitt wird die Entwicklung der Lösung der Zwei-Niveau-Bewegungsgleichung bis zur dritten Ordnung beschrieben. Zur Erinnerung sei noch mal die Fouriertransformierte der Bewegungsgleichung, Gl. (6.8) aufgeführt:

$$\begin{aligned} \hbar(\eta - \Omega_{n_1 n_2}) \delta \tilde{f}_{n_1 n_2}(\eta) &= M_{n_2 n_1} \Delta f_{n_1 n_2}^{(0)} \tilde{E}(\eta) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sum_{n_3} \left[ M_{n_2 n_3} \delta \tilde{f}_{n_1 n_3}(\xi) - M_{n_3 n_1} \delta \tilde{f}_{n_3 n_2}(\xi) \right] \tilde{E}(\eta - \xi). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Die Gleichung löst man hierarchisch, indem man sie zunächst für den Fall der Abwesenheit von Wechselwirkung unter den verschiedenen Verteilungsfunktionen betrachtet, also

$$\hbar(\eta - \Omega_{n_1 n_2}) \delta \tilde{f}_{n_1 n_2}(\eta) = M_{n_2 n_1} \Delta f_{n_1 n_2}^{(0)} \tilde{E}(\eta),$$

deren Lösung sich durch Division ergibt, nämlich

$$\delta \tilde{f}_{n_1 n_2}(\eta) = \frac{M_{n_2 n_1} \Delta f_{n_1 n_2}^{(0)}}{\hbar(\eta - \Omega_{n_1 n_2})} \tilde{E}(\eta); \quad (\text{B.2})$$

dies Ergebnis setzt man wiederum in die rechte Seite von (6.8) ein usw. usf.. Für unsere Betrachtungen brechen wir in der dritten Hierarchiestufe ab. Somit erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{f}_{n_1 n_2}(\eta) = & \frac{M_{n_2 n_1}}{\hbar(\eta - \Omega_{n_1 n_2})} \Delta f_{n_1 n_2}^{(0)} \tilde{E}(\eta) \\
& + \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sum_{n_3} \frac{M_{n_2 n_3} M_{n_3 n_1}}{\eta - \Omega_{n_1 n_2}} \left[ \frac{\Delta f_{n_1 n_3}^{(0)}}{\xi - \Omega_{n_1 n_3}} - \frac{\Delta f_{n_3 n_2}^{(0)}}{\xi - \Omega_{n_3 n_2}} \right] \tilde{E}(\xi) \tilde{E}(\eta - \xi) \\
& + \frac{1}{2\pi\hbar^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \sum_{n_3, n_4} \left\{ \frac{M_{n_2 n_3} M_{n_4 n_1} M_{n_3 n_4}}{(\eta - \Omega_{n_1 n_2})(\eta - \Omega_{n_1 n_3})} \left[ \frac{\Delta f_{n_1 n_4}^{(0)}}{\xi - \Omega_{n_1 n_4}} - \frac{\Delta f_{n_4 n_3}^{(0)}}{\xi - \Omega_{n_4 n_3}} \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{M_{n_3 n_1} M_{n_2 n_4} M_{n_4 n_3}}{(\eta - \Omega_{n_1 n_2})(\eta - \Omega_{n_3 n_2})} \left[ \frac{\Delta f_{n_3 n_4}^{(0)}}{\xi - \Omega_{n_3 n_4}} - \frac{\Delta f_{n_4 n_2}^{(0)}}{\xi - \Omega_{n_4 n_2}} \right] \right\} \tilde{E}(\zeta) \tilde{E}(\xi - \zeta) \tilde{E}(\eta - \xi)
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Die Dipolmatrixelemente können auf der Diagonalen auf 0 gesetzt werden, da (natürlich abhängig von der Wahl des Nullpunkts, d.h. bei Beziehung (3.8) muß der Nullpunkt in der Topfmitte liegen) dann die vorkommenden Wellenfunktionen gleiche bzw. entgegengesetzte Parität haben:

$$M_{11} = M_{22} = 0.$$

Die Richtungsaufösung geschieht mit Hilfe der Fourierzerlegung des elektrischen Feldes. Dabei vereinfacht sich die Rechnung, da die Zerlegung (3.16) unabhängig von der Frequenztransformation  $t \rightarrow \eta$  ist. Damit ergibt sich für  $\tilde{E}(\eta)$  exakt Gleichung (3.16) mit  $\eta$  statt  $t$  und den Fouriertransformierten der zeitabhängigen Koeffizienten  $E^{(\lambda, \nu)}$ , die ebenfalls mit dem Tildesymbol “~” gekennzeichnet sind. Bleiben noch das Zweier- und Dreierprodukt:

$$\tilde{E}(\xi) \tilde{E}(\eta - \xi) = \frac{1}{A^2} \sum_{\lambda, \nu} \left[ \sum_{\lambda', \nu'} \tilde{E}^{(\lambda', \nu')}(\xi) \tilde{E}^{(\lambda - \lambda', \nu - \nu')}(\eta - \xi) \right] e^{i(\lambda \mathbf{K} + \nu \mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}} \tag{B.4}$$

sowie

$$\tilde{E}(\zeta) \tilde{E}(\xi - \zeta) \tilde{E}(\eta - \xi) = \frac{1}{A^3} \sum_{\lambda, \nu} \left[ \sum_{\substack{\lambda', \nu' \\ \lambda'', \nu''}} \tilde{E}^{(\lambda', \nu')}(\zeta) \tilde{E}^{(\lambda'', \nu'')}(\xi - \zeta) \tilde{E}^{(\lambda - \lambda' - \lambda'', \nu - \nu' - \nu'')}(\eta - \xi) \right] e^{i(\lambda \mathbf{K} + \nu \mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}}. \tag{B.5}$$

Damit lautet (B.3) nach den Richtungen  $(\lambda, \nu)$  aufgelöst

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{f}_{n_1 n_2}^{(\lambda, \nu)}(\eta) = & \frac{1}{A \hbar (\eta - \Omega_{n_1 n_2})} \Delta f_{n_1 n_2}^{(0)} \tilde{E}^{(\lambda, \nu)}(\eta) \\
& + \frac{1}{\sqrt{2\pi \hbar^2} A^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sum_{n_3} \frac{M_{n_2 n_3} M_{n_3 n_1}}{\eta - \Omega_{n_1 n_2}} \left[ \frac{\Delta f_{n_1 n_3}^{(0)}}{\xi - \Omega_{n_1 n_3}} - \frac{\Delta f_{n_3 n_2}^{(0)}}{\xi - \Omega_{n_3 n_2}} \right] \sum_{\lambda', \nu'} \tilde{E}^{(\lambda', \nu')}(\xi) \tilde{E}^{(\lambda - \lambda', \nu - \nu')}(\eta - \xi) \\
& + \frac{1}{2\pi \hbar^3 A^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \sum_{n_3, n_4} \left\{ \frac{M_{n_2 n_3} M_{n_4 n_1} M_{n_3 n_4}}{(\eta - \Omega_{n_1 n_2})(\eta - \Omega_{n_1 n_3})} \left[ \frac{\Delta f_{n_1 n_4}^{(0)}}{\xi - \Omega_{n_1 n_4}} - \frac{\Delta f_{n_4 n_3}^{(0)}}{\xi - \Omega_{n_4 n_3}} \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{M_{n_3 n_1} M_{n_2 n_4} M_{n_4 n_3}}{(\eta - \Omega_{n_1 n_2})(\eta - \Omega_{n_3 n_2})} \left[ \frac{\Delta f_{n_3 n_4}^{(0)}}{\xi - \Omega_{n_3 n_4}} - \frac{\Delta f_{n_4 n_2}^{(0)}}{\xi - \Omega_{n_4 n_2}} \right] \right\} \times \\
& \quad \sum_{\substack{\lambda', \nu' \\ \lambda'', \nu''}} \tilde{E}^{(\lambda', \nu')}(\zeta) \tilde{E}^{(\lambda'', \nu'')}(\xi - \zeta) \tilde{E}^{(\lambda - \lambda' - \lambda'', \nu - \nu' - \nu'')}(\eta - \xi).
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Hierbei handelt es sich um eine Entwicklung der Dichtematrixelemente nach Faltungsintegralen der richtungsaufgelösten Anregungspulse im Fourierraum.

Man unterscheidet zwischen den Fällen  $n_1 = n_2$  und  $n_1 \neq n_2$ .

1. Wenn  $n_1 = n_2$  ist, gilt:

- Der erste Summand auf der rechten Seite von (B.6) leistet keinen Beitrag wegen  $M_{n_1 n_1} = 0$  und/oder  $\Delta f_{n_1 n_2}^{(0)} = 0$ .
- Der dritte Summand leistet auch keinen Beitrag zu (B.6), da sämtliche Produkte in der Summe über  $n_3$  und  $n_4$   $M_{n_2 n_3} M_{n_4 n_1} M_{n_3 n_4} = M_{n_3 n_1} M_{n_2 n_4} M_{n_4 n_3} = 0$  im Zweibandmodell Null betragen.
- Außerdem verschwindet auch  $\Omega_{n_1 n_1}$ , siehe (6.6).

Damit bleibt von (B.6) nur noch die Beziehung

$$\delta \tilde{f}_{n_1 n_1}^{(\lambda, \nu)}(\eta) = \frac{M_{12}^2 \Delta f_{n_1 n_2}^{(0)}}{\sqrt{2\pi \hbar^2} A^2} \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left( \frac{1}{\xi - \Omega_{n_1 n_2}} + \frac{1}{\xi - \Omega_{n_2 n_1}} \right) \sum_{\lambda', \nu'} \tilde{E}^{(\lambda', \nu')}(\xi) \tilde{E}^{(\lambda - \lambda', \nu - \nu')}(\eta - \xi) \tag{B.7}$$

übrig, wobei das  $n_2$  auf der rechten Seite der bzgl.  $n_1$  jeweils andere Index ist, d.h.  $n_2 = 2 - (n_1 - 1)$ . Wegen der Definition des elektrischen Feldes, (3.16), ist diese Beziehung nur für die Richtungen mit  $\lambda = 0$  und  $\nu = -2, 0, 2$ , also  $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{0}$  und  $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$  von Null verschieden.

2. Wenn wir den Fall  $n_1 \neq n_2$  bei den Indizes von  $\delta \tilde{f}_{n_1 n_2}^{(\lambda, \nu)}$  betrachten, fallen folgende Aspekte ins Auge:

- Der zweite Summand in (B.6) fällt weg, da für alle  $n_3, n_4$  das Produkt  $M_{n_2 n_3} M_{n_3 n_1}$  verschwindet.
- Den dritten Summanden kann man vereinfachen, wenn man sich anschaut, bei welchen  $n_3, n_4$  die Bedingung  $M_{n_2 n_3} M_{n_4 n_1} M_{n_3 n_4} \neq 0 \neq M_{n_3 n_1} M_{n_2 n_4} M_{n_4 n_3}$  erfüllt ist: dann findet man schnell

$$\begin{aligned} M_{n_2 n_3} M_{n_4 n_1} M_{n_3 n_4} \neq 0 &\Rightarrow n_3 = n_1, n_4 = n_2; \\ M_{n_3 n_1} M_{n_2 n_4} M_{n_4 n_3} \neq 0 &\Rightarrow n_3 = n_2, n_4 = n_1. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Somit vereinfacht sich Gleichung (B.6) zu

$$\begin{aligned} \delta \tilde{f}_{n_1 n_2}^{(\lambda, \nu)}(\eta) &= \frac{M_{12} \Delta f_{n_1 n_2}^{(0)}}{\hbar A} \frac{1}{\eta - \Omega_{n_1 n_2}} \times \\ &\left\{ \tilde{E}^{(\lambda, \nu)}(\eta) + \frac{M_{12}^2}{\pi \hbar^2 A^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \left( \frac{1}{\zeta - \Omega_{n_1 n_2}} + \frac{1}{\zeta - \Omega_{n_2 n_1}} \right) \times \right. \\ &\left. \sum_{\substack{\lambda', \nu' \\ \lambda'', \nu''}} \tilde{E}^{(\lambda', \nu')}(\zeta) \tilde{E}^{(\lambda'', \nu'')}(\xi - \zeta) \tilde{E}^{(\lambda - \lambda' - \lambda'', \nu - \nu' - \nu'')}(\eta - \xi) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Rücktransformation zur Zeit liefert unter Benutzung der Relation

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{\tilde{E}^{(\lambda, \nu)}(\eta)}{\eta - \Omega_{n_1 n_2}} e^{i\eta t} = i \int_{-\infty}^t dt' e^{i\Omega_{n_1 n_2}(t-t')} E^{(\lambda, \nu)}(t') \quad (\text{B.10})$$

für (B.9) die Beziehung

$$\begin{aligned} \delta f_{n_1 n_2}^{(\lambda, \nu)}(t) &= i \frac{M_{12} \Delta f_{n_1 n_2}^{(0)}}{\hbar A} \times \\ &\int_{-\infty}^t dt' e^{i\Omega_{n_1 n_2}(t-t')} \left[ E^{(\lambda, \nu)}(t') + \frac{2M_{12}^2}{\hbar^2 A^2} \sum_{\substack{\lambda', \nu' \\ \lambda'', \nu''}} E^{(\lambda', \nu')}(t') \times \right. \\ &\int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{i\Omega_{n_1 n_2} t''} E^{(\lambda'', \nu'')}(t'') \times \\ &\left. \int_{-\infty}^{t''} dt''' e^{-i\Omega_{n_1 n_2} t'''} E^{(\lambda - \lambda' - \lambda'', \nu - \nu' - \nu'')}(t''') \right] \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

(vgl. [38]). Für (B.7) können wir das Indexschema aus Tabelle B.1 angeben. Man kann erken-

Richtung	Richtungsindizes				Produkt der $E$ -Felder $A^{-2}\tilde{E}^{(\lambda,\nu')}(\xi)\tilde{E}^{(\lambda-\lambda',\nu-\nu')}(\eta-\xi)$
	$\lambda$	$\nu$	$\lambda'$	$\nu'$	
$\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$	0	2	1	1	$\tilde{E}_1(\xi)\tilde{E}_2^*(\eta-\xi)$ $\tilde{E}_2^*(\xi)\tilde{E}_1(\eta-\xi)$
$\mathbf{0}$	0	0	1	1	$\tilde{E}_1(\xi)\tilde{E}_1^*(\eta-\xi)$
			1	-1	$\tilde{E}_2(\xi)\tilde{E}_2^*(\eta-\xi)$
			-1	1	$\tilde{E}_2^*(\xi)\tilde{E}_2(\eta-\xi)$
			-1	-1	$\tilde{E}_1^*(\xi)\tilde{E}_1(\eta-\xi)$
$\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$	0	-2	1	-1	$\tilde{E}_2(\xi)\tilde{E}_1^*(\eta-\xi)$
			-1	-1	$\tilde{E}_1^*(\xi)\tilde{E}_2(\eta-\xi)$

**Tabelle B.1:** Tabelle für die Produkte der Fourierkoeffizienten des Lichtfeldes in Gl. (6.10)

nen, daß in  $(0, 2)$ - und  $(0, -2)$ -Richtung nur dann ein Signal auftritt, wenn beide eingehenden Strahlen eingeschaltet sind.

Die Kombinationen von Produkten der  $E$ -Felder, die bei (B.9) zugelassen sind (die “gesternteten” Amplituden sind die Fouriertransformierten der komplex konjugierten Feldkomponenten), listet Tabelle B.2 auf. Hier sieht man, daß die Verteilungsfunktionen in den Richtungen  $(1, 1)$  und  $(1, -1)$  nur dann nichtverschwindend sind, wenn auch die Amplitude des Eingangsstrahls in der jeweiligen Richtung ungleich Null ist. Wie bereits erwähnt, kann man in diesen Richtungen das lineare Spektrum messen. Die Richtungen der Vierwellenmischsignale sind von beiden eingehenden Pulsen abhängig, jedoch stärker, und zwar in quadratischer Ordnung vom entsprechend “benachbarten” Puls, d.h.  $2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$  geht im Wesentlichen mit  $E_1$  und  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$  mit  $E_2$ .

Richtung	Richtungsindizes						Produkt der $E$ -Felder $A^{-2}\tilde{E}^{(\lambda',\nu')}(\zeta)\tilde{E}^{(\lambda'',\nu'')}(\xi-\zeta)\tilde{E}^{(\lambda-\lambda'-\lambda'',\nu-\nu'-\nu'')}(\eta-\xi)$			
	$\lambda$	$\nu$	$\lambda'$	$\nu'$	$\lambda''$	$\nu''$				
$2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$	1	3	1	1	1	1	$\tilde{E}_1(\zeta)\tilde{E}_1(\xi-\zeta)\tilde{E}_2^*(\eta-\xi)$			
					-1	1	$\tilde{E}_1(\zeta)\tilde{E}_2^*(\xi-\zeta)\tilde{E}_1(\eta-\xi)$			
			-1	1	1	1	$\tilde{E}_2^*(\zeta)\tilde{E}_1(\xi-\zeta)\tilde{E}_1(\eta-\xi)$			
$\mathbf{k}_1$	1	1	1	1	1	1	$\tilde{E}_1(\zeta)\tilde{E}_1(\xi-\zeta)\tilde{E}_1^*(\eta-\xi)$			
					1	-1	$\tilde{E}_1(\zeta)\tilde{E}_2(\xi-\zeta)\tilde{E}_2^*(\eta-\xi)$			
					-1	1	$\tilde{E}_1(\zeta)\tilde{E}_2^*(\xi-\zeta)\tilde{E}_2(\eta-\xi)$			
					-1	-1	$\tilde{E}_1(\zeta)\tilde{E}_1^*(\xi-\zeta)\tilde{E}_1(\eta-\xi)$			
			1	-1	1	1	$\tilde{E}_2(\zeta)\tilde{E}_1(\xi-\zeta)\tilde{E}_2^*(\eta-\xi)$			
					-1	1	$\tilde{E}_2(\zeta)\tilde{E}_2^*(\xi-\zeta)\tilde{E}_1(\eta-\xi)$			
			-1	1	1	1	$\tilde{E}_2^*(\zeta)\tilde{E}_1(\xi-\zeta)\tilde{E}_2(\eta-\xi)$			
					1	-1	$\tilde{E}_2^*(\zeta)\tilde{E}_2(\xi-\zeta)\tilde{E}_1(\eta-\xi)$			
			-1	-1	1	1	$\tilde{E}_1^*(\zeta)\tilde{E}_1(\xi-\zeta)\tilde{E}_1(\eta-\xi)$			
			$\mathbf{k}_2$	1	-1	1	1	1	-1	$\tilde{E}_1(\zeta)\tilde{E}_2(\xi-\zeta)\tilde{E}_1^*(\eta-\xi)$
								-1	-1	$\tilde{E}_1(\zeta)\tilde{E}_1^*(\xi-\zeta)\tilde{E}_2(\eta-\xi)$
1	-1	$\tilde{E}_2(\zeta)\tilde{E}_1(\xi-\zeta)\tilde{E}_1^*(\eta-\xi)$								
1	-1	$\tilde{E}_2(\zeta)\tilde{E}_2(\xi-\zeta)\tilde{E}_2^*(\eta-\xi)$								
-1	1	-1				1	$\tilde{E}_2(\zeta)\tilde{E}_2^*(\xi-\zeta)\tilde{E}_2(\eta-\xi)$			
		-1				-1	$\tilde{E}_2(\zeta)\tilde{E}_1^*(\xi-\zeta)\tilde{E}_1(\eta-\xi)$			
-1	1	1				-1	$\tilde{E}_2^*(\zeta)\tilde{E}_2(\xi-\zeta)\tilde{E}_2(\eta-\xi)$			
		-1				-1	$\tilde{E}_1^*(\zeta)\tilde{E}_1(\xi-\zeta)\tilde{E}_2(\eta-\xi)$			
-1	-1	1				1	$\tilde{E}_1^*(\zeta)\tilde{E}_2(\xi-\zeta)\tilde{E}_1(\eta-\xi)$			
		1				-1				
$2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$	1	-3				1	-1	1	-1	$\tilde{E}_2(\zeta)\tilde{E}_2(\xi-\zeta)\tilde{E}_1^*(\eta-\xi)$
								-1	-1	$\tilde{E}_2(\zeta)\tilde{E}_1^*(\xi-\zeta)\tilde{E}_2(\eta-\xi)$
			-1	-1	1	-1	$\tilde{E}_1^*(\zeta)\tilde{E}_2(\xi-\zeta)\tilde{E}_2(\eta-\xi)$			

**Tabelle B.2:** Tabelle für die Produkte der Fourierkoeffizienten des Lichtfeldes in Gl. (6.9)

## B.2 Optische Bloch-Gleichung

### B.2.1 Rotating-Wave-Näherung

Man zerlege  $\Omega$  aus Beziehung (5.4) mit dem  $E$ -Feld (5.12) gemäß

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \Omega^+(t) + \Omega^-(t) \quad (\text{B.12})$$

mit den Vektoren  $\Omega_0 = (0, 0, \omega_0)^T$  sowie

$$\Omega^+(t) = -\kappa E_1(t) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.13a})$$

$$\Omega^-(t) = -\kappa E_1(t) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.13b})$$

$\Omega^+$  und  $\Omega^-$  rotieren mit gleicher Geschwindigkeit in zueinander entgegengesetzten Richtungen um die  $z$ -Achse bzw.  $\Omega_0$ . Jetzt betrachte man das ganze System aus der Perspektive eines sich mit dem rotierenden Vektor  $\Omega^+$  bewegenden Beobachters:  $\Omega_0$  rotiert mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und  $\Omega^-$  mit  $2\omega$ . Aus dieser Perspektive ist wegen der sich sehr rasch ändernden Richtung von  $\Omega^-$  dessen Wirkung auf das System für den Beobachter eher gering (natürlich läßt sich eine äquivalente Beschreibung auch von einem Beobachter auf  $\Omega^-$  aufstellen). Die wesentliche Vereinfachung besteht nun darin, einen der rotierenden Vektoren, in diesem Fall  $\Omega^-$ , wegen dessen hoher Variabilität aus der Perspektive des jeweils anderen zu vernachlässigen.

Damit bleibt folgender Satz von Gleichungen übrig:

$$\dot{s}_1 = -\omega_0 s_2 - \kappa E_1(t) \sin(\omega t) s_3 \quad (\text{B.14a})$$

$$\dot{s}_2 = \omega_0 s_1 + \kappa E_1(t) \cos(\omega t) s_3 \quad (\text{B.14b})$$

$$\dot{s}_3 = \kappa E_1(t) [\sin(\omega t) s_1 - \cos(\omega t) s_2] \quad (\text{B.14c})$$

Nun definieren wir den in einem mit  $\Omega^+$  mitrotierenden Koordinatensystem befindlichen Vektor

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{s}. \quad (\text{B.15})$$

Ableiten nach der Zeit liefert mittels (B.14)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa E_1(t) \\ 0 \\ \omega_0 - \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \quad (\text{B.16})$$



# Anhang C

## Lineare Absorptionsspektren

Schickt man nur einen Strahl in ( $\nu = \pm 1$ )-Richtung in die Probe, kann man die entstehende Polarisation in Potenzen des elektrischen Feldes entwickeln:

$$P^{(\nu)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(\nu)}(t) \equiv \varepsilon_0 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \chi_1(t, t_1) E^{(\nu)}(t_1) + \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \chi_2(t, t_1, t_2) E^{(\nu)}(t_1) E^{(\nu)}(t_2) + \dots \right] \quad (\text{C.1})$$

Diese Entwicklung ist unter Annahme räumlicher und zeitlicher Nichtlokalität der Polarisation sowie aufgrund der langwelligen Anregung (Anregungsfrequenz  $\omega \rightarrow 0$ ) gerechtfertigt. Die  $\chi_n(t, t_1, \dots, t_n)$  bezeichnen die elektrischen Suszeptibilitäten  $n$ -ter Ordnung. Für sie gelten das Prinzip der Kausalität, d.h.

$$\chi_n(t, t_1, \dots, t_n) = 0 \text{ falls irgendein } t_j > 0 \quad (\text{C.2})$$

und Translationsinvarianz,

$$\chi_n(t, t_1, \dots, t_n) = \chi_n(0, t_1 - t, \dots, t_n - t). \quad (\text{C.3})$$

Durch Fouriertransformation,

$$\tilde{P}_n^{(\nu)}(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} P_n^{(\nu)}(t) \quad (\text{C.4})$$

gelangt man in erster Ordnung zu

$$\tilde{P}_1^{(\nu)}(\omega) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \delta(\omega_1 - \omega) \tilde{\chi}_1(\omega_1) \tilde{E}^{(\nu)}(\omega_1) = \varepsilon_0 \tilde{\chi}_1(\omega) \tilde{E}^{(\nu)}(\omega) \quad (\text{C.5})$$

mit dem Feldterm

$$\tilde{E}_n^{(\nu)}(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} E_n^{(\nu)}(t) \quad (\text{C.6})$$

und der frequenzabhängigen elektrischen Suszeptibilität in erster Ordnung

$$\tilde{\chi}_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \chi_1(t). \quad (\text{C.7})$$

Zwischen dem Brechungsindex  $n(\omega)$ , dem Absorptions- bzw. Abschwächungskoeffizienten  $\alpha(\omega)$  und der elektrischen Suszeptibilität  $\chi \equiv \tilde{\chi}_1$  besteht folgende Beziehung:

$$1 + \chi(\omega) = [n(\omega) + i\alpha(\omega)]^2. \quad (\text{C.8})$$

Somit hat man schließlich folgende Proportionalitätsbeziehung vorliegen:

$$\alpha(\omega) \propto \text{Im}\chi(\omega) = \text{Im} \frac{\tilde{P}^{(\pm 1)}(\omega)}{\tilde{E}^{(\pm 1)}(\omega)}. \quad (\text{C.9})$$

Die Indizes  $\nu = -1, +1$  entsprechen dabei den Richtungen  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  der beiden Pulsstrahlen  $E^{(\pm 1)}$ .

# Literatur



# Literaturverzeichnis

- [1] J. Faist, F. Capasso, D.L. Sivco, C. Sirtori, A.L. Hutchinson, and A.Y. Cho. Quantum cascade laser. *Science*, 264:553, 1994.
- [2] G. Strasser, S. Gianordoli, L. Hvozdar, W. Schrenk, and E. Gornik. Intersubband and interminiband GaAs/AlGaAs quantum cascade lasers. *Physica E*, 7(1):1, 2000.
- [3] S. Tortora, F. Compagnone, A. Di Carlo, and P. Lugli. Theoretical study, modeling and simulation of SL quantum cascade lasers. *Physica E*, 7(1):20, 2000.
- [4] Rui Q. Yang. INFRARED LASER BASED ON INTERSUBBAND TRANSITIONS IN QUANTUM WELLS. *Superlattices and Microstructures*, 17(1):77, 1995.
- [5] Robert Kaindl. Femtosekundenspektroskopie von Intersubband-Anregungen in GaInAs/AlInAs Quantentopf-Strukturen. Diplomarbeit, Technische Universität, Berlin, Oktober 1996.
- [6] B.F. Levine, A.Y. Cho, J. Walker, R.J. Malik, D.A. Kleinman, and D.L. Sivco. In-GaAs/InAlAs multiquantum well intersubband absorption at a wavelength of  $\lambda=4.4 \mu\text{m}$ . *Applied Physics Letters*, 52(18):1481, 1988.
- [7] D. Spence, P. Kean, and W. Sibbett. 60-fsec pulse generation from a self-modelocked Ti-sapphire laser. *Opt. Lett.*, 16:42, 1991.
- [8] Rui Q. Yang, J. M. Xu, and Mark Sweeny. Selection rules of intersubband transitions in conduction-band quantum wells. *Physical Review B*, 50(11):7474, 1994.
- [9] R. J. Warburton, C. Gauer, A. Wixforth, J. P. Kotthaus, B. Brar, and H. Kroemer. Intersubband resonances in InAs/AlSb quantum wells: Selection rules, matrix elements, and the depolarization field. *Physical Review B*, 53(12):7903, 1996.
- [10] C. Gauer, J. Scriba, A. Wixforth, J.P. Kotthaus, C.R. Bolognesi, C. Nguyen, B. Brar, and H. Kroemer. Energy-dependent cyclotron mass in InAs/AlSb quantum wells. *Semicond. Sci. Technol.*, 9:1580, 1994.
- [11] H. Lobentanzer, W. König, W. Stolz, K. Ploog, T. Elsaesser, and R.J. Bäuerle. Intersubband absorption in a modulation-doped  $\text{Ga}_{0.47}\text{In}_{0.53}\text{As}/\text{Al}_{0.48}\text{In}_{0.52}\text{As}$ . *Applied Physics Letters*, 53(7):571, 1988.

- [12] A. Pinczuk, H.L. Störmer, R. Dingle, J.M. Worlock, W. Wiegmann, and A.C. Gossard. OBSERVATION OF INTERSUBBAND EXCITATIONS IN A MULTILAYER TWO DIMENSIONAL ELECTRON GAS. *Solid State Communications*, 32:1001, 1979.
- [13] A. Pinczuk, S. Schmitt-Rink, G. Danan, J.P. Valladares, L.N. Pfeiffer, and K.W. West. Large Exchange Interactions in the Electron Gas of GaAs Quantum Wells. *Physical Review Letters*, 63(15):1633, 1989.
- [14] D. Gammon, B.V. Shanabrook, J.C. Ryan, and D.S. Katzer. Spin-density waves in a quasi-two-dimensional electron gas. *Physical Review B*, 41(17):12311, 1990.
- [15] M. Ramsteiner, J.D. Ralston, P. Koidl, B. Dischler, H. Biebl, J. Wagner, and H. Ennen. Doping density dependence of intersubband transitions in GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As quantum-well structures. *Journal of Applied Physics*, 67(8):3900, 1990.
- [16] M.O. Manasreh, F. Szmulowicz, T. Vaughan, K.R. Evans, C.E. Stutz, and D.W. Fischer. Origin of the blueshift in the intersubband infrared absorption in GaAs/Al<sub>0.3</sub>Ga<sub>0.7</sub>As multiple quantum wells. *Physical Review B*, 43(12):9996, 1991.
- [17] F. Szmulowicz, M.O. Manasreh, C.E. Stutz, and T. Vaughan. Temperature and many-body effects on the intersubband transition in GaAs/Al<sub>0.3</sub>Ga<sub>0.7</sub>As multiple quantum well. *Physical Review B*, 50(16):11618, 1994.
- [18] Danhong Huang, Godfrey Gumbs, and M.O. Manasreh. Many-body analysis of the effects of electron density and temperature on the intersubband transition in GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As multiple quantum wells. *Physical Review B*, 52(19):14126, 1995.
- [19] K.M.S.V. Bandara, D.D. Coon, Byung-sung O, Y.F. Lin, and M.H. Francombe. Exchange interactions in quantum well subbands. *Applied Physics Letters*, 53(20):1931, 1988.
- [20] Robert A. Kaindl, Stephan Lutgen, Michael Woerner, Thomas Elsaesser, Bernd Nottelmann, Vollrath Martin Axt, Tilmann Kuhn, Andreas Hase, and Harald Künzel. Ultrafast Dephasing of Coherent Intersubband Polarizations in a Quasi-Two-Dimensional Electron Plasma. *Physical Review Letters*, 80(16):3575, 1998.
- [21] S. Lutgen, R. Kaindl, M. Woerner, T. Elsaesser, Andreas Hase, Harald Künzel, M. Gulia, D. Meglio, and P. Lugli. Nonequilibrium dynamics in a quasi-two-dimensional electron plasma after ultrafast intersubband excitation. *Physical Review Letters*, 77(17):3657, 1996.
- [22] Insook Lee, S.M. Goodnick, M. Gulia, E. Molinari, and P. Lugli. Microscopic calculation of the electron-optical-phonon interaction in ultrathin GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As alloy quantum-well systems. *Physical Review B*, 51(11):7046, 1995.
- [23] Jerome Faist, Carlo Sirtori, Federico Capasso, and Ken W. West. Phonon limited intersubband lifetimes and linewidths in a two-dimensional electron gas. *Applied Physics Letters*, 64(7):872, 1994.

- [24] D.Y. Oberli, D.R. Wake, M.V. Klein, J. Klem, T. Henderson, and H. Morkoç. Time-Resolved Raman Scattering in GaAs Quantum Wells. *Physical Review Letters*, 59(6):696, 1987.
- [25] A. Bonvalet, J. Nagle, V. Berger, A. Migus, J.-L. Martin, and M. Joffre. Femtosecond Infrared Emission Resulting from Coherent Charge Oscillations in Quantum Wells. *Physical Review Letters*, 76(23):4392, 1996.
- [26] Neil W. Ashcroft and N. David Mermin. *Solid State Physics*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.
- [27] U. Ekenberg. Enhancement of nonparabolicity effects in a quantum well. *Physical Review B*, 36(11):6152, 1987.
- [28] R.J. Bäuerle, T. Elsaesser, H. Lobentanzer, W. Stolz, and K. Ploog. Transient reshaping of intersubband absorption spectra due to hot electrons in a modulation-doped multiple-quantum-well structure. *Physical Review B*, 40(14):10002, 1989.
- [29] K. Blum. *Density Matrix and Applications*. Plenum Press, New York, 1st edition, 1981.
- [30] H.M. van Driel, J.E. Sipe, A. Haché, and R. Atanasov. Coherence Control of Photocurrents in Semiconductors. *phys. stat. sol. (b)*, 204:3, 1997.
- [31] Markus Herbst. *Elektron-Phonon-Quantenkinetik in homogenen und inhomogenen Systemen*. Dissertation, Institut für Festkörpertheorie der Universität Münster, 2000.
- [32] A.P. Heberle, J.J. Baumberg, and K. Köhler. Ultrafast Coherent Control and Destruction of Excitons in Quantum Wells. *Physical Review Letters*, 75(13):2598, 1995.
- [33] J.J. Baumberg, A.P. Heberle, K. Köhler, and A.V. Kavokin. Ultrafast Coherent Carrier Control in Quantum Wells. *phys. stat. sol. (b)*, 204:9, 1997.
- [34] C.F. Klingshirn. *Semiconductor Optics*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1995.
- [35] Tilmann Kuhn. *Ladungsträgerdynamik in Halbleitersystemen fern vom Gleichgewicht: Elektronisches Rauschen und kohärente Prozesse*. Verlag Shaker, Aachen, 1994. Habilitationsschrift.
- [36] Karl Leo, Jagdeep Shah, Ernst O. Göbel, Theo C. Damen, Klaus Köhler, and Peter Ganser. Tunneling in semiconductor heterostructures studied by subpicosecond four-wave mixing. *Applied Physics Letters*, 56(20):2031, 1990.
- [37] K. Leo, E.O. Göbel, T.C. Damen, J. Shah, S. Schmitt-Rink, W. Schäfer, J.F. Müller, K. Köhler, and P. Ganser. Subpicosecond four-wave mixing in GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As quantum wells. *Physical Review B*, 44(11):5726, 1991.
- [38] Tatsuo Yajima and Yoichi Taira. Spatial Optical Parametric Coupling of Picosecond Light Pulses and Transverse Relaxation Effect in Resonant Media. *Journal of the Physical Society of Japan*, 47(5):1620, 1979.

- [39] Narie S-C. Luo, Shun Lien Chuang, Stefan Schmitt-Rink, and Aron Pinczuk. Many-body effects on intersubband spin-density and charge-density excitations. *Physical Review B*, 48(15):11086, 1993.
- [40] Evan O. Kane. BAND STRUCTURE OF INDIUM ANTIMONIDE. *J. Phys. Chem. Solids*, 1:249, 1957.
- [41] Gerald Bastard. *Wave Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructures*. Halsted Press, New York, 1988.
- [42] Weng W. Chow, Stephan W. Koch, and Murray Sargent III. *Semiconductor-Laser Physics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.
- [43] Hartmut Haug and Stephan W. Koch. *Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors*. World Scientific, Singapore, 3rd edition, 1994.
- [44] H. Luo and J.K. Furdyna. Optical transitions in semiconductor superlattices with zinc-blende structure in the  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  approximation. *Physical Review B*, 41(8):5188, 1990.
- [45] M.H. Weiler, R.L. Aggarwal, and B. Lax. Warping- and inversion-asymmetry-induced cyclotron-harmonic transitions in InSb. *Physical Review B*, 17(8):3269, 1978.
- [46] L. Allen and J.H. Eberly. *Optical Resonance and Two-Level Atoms*. Dover Publications, Inc., Mineola, N.Y., 1987.
- [47] E.L. Hahn. Spin echoes. *Physical Review*, 80(4):580, 1950.
- [48] L. Schultheis, M.D. Sturge, and J. Hegarty. Photon echoes from two-dimensional excitons in GaAs-AlGaAs quantum wells. *Applied Physics Letters*, 47(9):995, 1985.
- [49] P.C. Becker, H.L. Fragnito, C.H. Brito Cruz, R.L. Fork, J.E. Cunningham, J.E. Henry, and C.V. Shank. Femtosecond Photon Echoes from Band-to-Band transitions in GaAs. *Physical Review Letters*, 61(14):1647, 1988.
- [50] Shun-Lien Chuang, Stefan Schmitt-Rink, David A.B. Miller, and Daniel S. Chemla. Exciton Green's-function approach to optical absorption in a quantum well with an applied electric field. *Physical Review B*, 43(2):1500, 1991.
- [51] M. Lindberg and S.W. Koch. Effective Bloch equations for semiconductors. *Physical Review B*, 38(5):3342, 1988.
- [52] Martin Koch. *Quantenschwungs-Spektroskopie an exzitonischen Übergängen in Halbleiter-Heterostrukturen*. Dissertation, Philipps-Universität Marburg, 1995.
- [53] E.O. Göbel. Ultrafast spectroscopy of semiconductors. *Advances in Solid State Physics*, 30:269, 1990. editiert von U. Rössler, Vieweg-Verlag Braunschweig.

- [54] Eberhard Binder. *Mikroskopische Modellierung des Zerfalls von Interband- und Intraband-Kohärenz in optisch angeregten Halbleitern*. Dissertation, Institut für Theoretische Physik und Synergetik der Universität Stuttgart, 1996.
- [55] M. Lindberg, R. Binder, and S.W. Koch. Theory of the semiconductor photon echo. *Physical Review A*, 45(3):1865, 1992.
- [56] S.-C. Lee and I. Galbraith. Intersubband and intrasubband electronic scattering rates in semiconductor quantum wells. *Physical Review B*, 59(24):15796, 1999.
- [57] Eric D. Siggia and P. C. Kwok. Properties of electrons in semiconductor inversion layers with many occupied electric subbands. i. screening and impurity scattering. *Physical Review B*, 2(4):1024, 1970.
- [58] Gerald D. Mahan. *Many-Particle Physics*. Plenum Press, New York, 2nd edition, 1990.
- [59] Stefan Haas, Fausto Rossi, and Tilmann Kuhn. Generalized Monte Carlo approach for the study of the coherent ultrafast carrier dynamics in photoexcited semiconductors. *Physical Review B*, 53(19):12855, 1996.
- [60] K. El Sayed and H. Haug. Monte-Carlo Simulations of the Coulomb Boltzmann Kinetics in a Quasi-Two-Dimensional Electron-Hole Plasma for Various Screening Models. *Phys. Stat. Sol. (b)*, 173:189, 1992.
- [61] Manfred Dür, Stephen M. Goodnick, and Paolo Lugli. Monte Carlo simulation of inter-subband relaxation in wide, uniformly doped GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As quantum wells. *Physical Review B*, 54(24):17794, 1996.
- [62] Landolt and Börnstein. *Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology*, volume 17 of *Group III: Crystal and Solid State Physics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982. Physics of Group IV Elements and III-V-Compounds.
- [63] M. Załuźny. Intersubband absorption line broadening in semiconductor quantum wells: Nonparabolicity contribution. *Physical Review B*, 43(5):4511, 1991.
- [64] Dimitri E. Nikonov, Ataç Imamoglu, Leonid V. Butov, and Holger Schmidt. Collective intersubband excitations in quantum wells: Coulomb interaction versus subband dispersion. *Physical Review Letters*, 79(23):4633, 1997.
- [65] H. Paul. *Photonen - Eine Einführung in die Quantenoptik*. Teubner, Stuttgart, 2 edition, 1999.
- [66] R.L. Shoemaker and Frederic A. Hopf. Observation of Quantum Beats in Photon Echoes and Optical Nutation. *Physical Review Letters*, 33(26):1527, 1974.
- [67] P.C. Becker, H.L. Fragnito, J.Y. Bigot, C.H. Brito Cruz, R.L. Fork, and C.V. Shank. Femtosecond Photon Echoes from Molecules in Solution. *Physical Review Letters*, 63(5):505, 1989.

- [68] E.O. Göbel, K. Leo, T.C. Damen, J. Shah, S. Schmitt-Rink, W. Schäfer, J.F. Müller, and K. Köhler. Quantum Beats of Excitons in Quantum Wells. *Physical Review Letters*, 64(15):1801, 1990.
- [69] Markus Joschko, Michael Woerner, Thomas Elsaesser, Eberhard Binder, Tilmann Kuhn, R. Hey, H. Kostial, and K. Ploog. Heavy-Light Hole Quantum Beats in the Band-to-Band continuum of GaAs Observed in 20 Femtosecond Pump-Probe Experiments. *Physical Review Letters*, 78(4):737, 1997.
- [70] B. Nottelmann, V.M. Axt, and T. Kuhn. Many-body effects in intersubband transitions of modulation-doped quantum wells. *Physica B*, 272:234, 1999. Proceedings of the Eleventh International Conference on Nonequilibrium Carrier Dynamics in Semiconductors.
- [71] M. Koch, J. Feldmann, G. von Plessen, E.O. Göbel, P. Thomas, and K. Köhler. Quantum Beats versus Polarization Interference: An Experimental Distinction. *Physical Review Letters*, 69(25):3631, 1992.
- [72] J.-P. Likforman, M. Joffre, G. Cheériaux, and D. Hulin. Control of the spectral-oscillation artifact in femtosecond pump-probe spectroscopy. *OPTICS LETTERS*, 20(19):2006, 1995.
- [73] B. Mieck, H. Haug, W.A. Hügel, M.F. Heinrich, and M. Wegener. Quantum-kinetic dephasing in resonantly excited semiconductor quantum wells. *Physical Review B*, 62(4):2686, 2000.
- [74] A. Lohner, K. Rick, P. Leisching, A. Leitenstorfer, T. Elsaesser, T. Kuhn, F. Rossi, and W. Stolz. Coherent Optical Polarization of Bulk GaAs Studied by Femtosecond Photon-Echo Spectroscopy. *Physical Review Letters*, 71(1):77, 1993.
- [75] I.S. Gradstein and I.M. Ryshik. *Summen-, Produkt- und Integraltafeln*. Verlag Harry Deutsch, Thun, Frankfurt/M., 1981. Band 2.



# Lebenslauf

Name: Bernd Nottelmann

Geboren: am 2. August 1967 in Dorsten

Familienstand: ledig

Eltern: Brigitte Nottelmann, geb. Kleine Buckstegge  
Hermann Nottelmann

1974 - 1978 Antonius-Grundschule Reken

1978 - 1987 Gymnasium der Marianhiller Missionare Maria-Veen

30. Mai 1987 Abitur

1987 - 1989 Zivildienst

1989 - 1995 Studium der Physik an der WWU-Münster

23. September 1991 Vordiplom im Fach Physik

25. September 1995 Diplom im Fach Physik, Thema der Diplomarbeit:  
“Perturbative Untersuchung der skalaren Propagatoren  
in einem  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -Yukawa-Modell  
auf dem Gitter”

Oktober 1996 Beginn der Dissertation am Institut für  
Festkörpertheorie, Thema: “Einfluß von  
Vielteilchen-Effekten auf die Dynamik der  
kohärenten Intersubband-Polarisation in  
GaInAs/AlInAs-Quantentopfstrukturen”



# Danksagung

Hiermit danke ich allen, die am Zustandekommen dieser Arbeit beteiligt waren, als da wären:

Prof. Dr. Tilmann Kuhn für die intensive und umfassende Betreuung. Sein physikalisches Gespür für die Unterscheidung zwischen “guten” und “schlechten” Resultaten und das umfangreiche Wissen über den aktuellen Stand der Forschung waren sehr hilfreich – ich habe viel dabei gelernt.

Torsten Wolterink für die Durchsicht und gnadenlose Korrektur vieler Fehler in den ersten Versionen sowie etliche Diskussionen und Anregungen.

Außerdem möchte ich noch (in alphabetischer Reihenfolge) meinen Bürokollegen Markus Glanemann, Markus Herbst (die Bayern-Fraktion), Birgit Krummheuer sowie Juliane Wühr für die angenehme Atmosphäre danken (abgesehen von einigen Fußballpostern, mit der gewisse Leute meinten, das Büro zu verunstalten zu müssen!).

Nicht unerwähnt bleiben sollen auch Thomas Raker (auch ein Fan einer gewissen bayerischen Vereinsmannschaft) und Kosta Siantidis. Außerdem sind noch Klaus Spanderen (“Support hotline” für Programmierprobleme aller Art) und Jens Küster zu nennen.

Zu guter Letzt möchte ich mich auch bei meinen Eltern für ihre Unterstützung bedanken.







