Marcus Wrede

Bewertung von Derivaten in zeitdiskreten Finanzmarktmodellen

2003

Angewandte Mathematik

Bewertung von Derivaten in zeitdiskreten Finanzmarktmodellen

Inauguraldissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften durch den
Fachbereich Mathematik und Informatik der
Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Marcus Wrede
aus Goch

-2003-

Dekan:	Prof. Dr. K. Hinrichs
Erster Gutachter:	Prof. Dr. N. Schmitz
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. M. Löwe
Tage der mündlichen Prüfungen:	Angewandte Mathematik: 19.01.2004 Nebenfach Reine Mathematik: 26.01.2004 Nebenfach Physik: 30.01.2004
Tag der Promotion:	04.02.2004

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Norbert Schmitz für die engagierte wissenschaftliche Betreuung, die konstruktiven Ratschläge und fruchtbaren Diskussionen, mit denen er zum Gelingen dieser Arbeit wesentlich beigetragen hat. Er hat mein Studium seit einem frühen Zeitpunkt geprägt und meine Ausbildung maßgeblich gefördert.

Bedanken möchte ich mich bei ihm auch für die sehr angenehme Zusammenarbeit am Institut für Mathematische Statistik, bei der ich menschlich und fachlich viel gelernt habe.

Ein herzlicher Dank gebührt Herrn Prof. Dr. Matthias Löwe für die Übernahme und Erstellung des zweiten Gutachtens.

Weiterhin gilt mein Dank der Studienstiftung des deutschen Volkes, welche mein Grund- und Hauptstudium in vielfältiger Hinsicht gefördert hat.

Mein persönlicher Dank gilt meinen Eltern, Geschwistern und meinen zukünftigen Schwiegereltern, die mich stets als kompetente Ratgeber und liebevoller Rückhalt begleitet haben.

In besonderer Weise bedanke ich mich bei meiner Verlobten Dipl.-Math. Irmhild Kühn für ihre stetige persönliche Unterstützung meines Promotionsvorhabens und für ihre Korrekturlesungen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Grundlagen **1**

1.1 Einleitung 1

1.2 Grundbegriffe 5

1.3 Ausgangsmodell und Ausgangsproblem 8

1.4 Arbitragefreiheit und Vollständigkeit 10

1.4.1 Der erste Fundamentalsatz der Preistheorie 10

1.4.2 Arbitragefreie Preise und Hedgebarkeit von Finanzderivaten 16

1.4.3 Der zweite Fundamentalsatz der Preistheorie 20

2 Untersuchung der Hedgebarkeit von Call- und Put-Optionen **25**

2.1 Der beschränkte Fall 28

2.2 Der allgemeine Fall 52

2.3 Anwendungsbeispiele 62

2.3.1 Modelle mit diskreten Faktoren 62

2.3.2 Zeitdiskretisierung des Black-Scholes Modells 63

2.3.3 Gaußsche Modelle und bedingte Gaußsche Modelle 82

3 Modelle mit stochastisch unabhängigen Faktoren **89**

3.1 Die Balayage-Technik 89

3.2 Extremaleigenschaften von Modellen mit dichotomen Faktoren 93

3.3 Extremaleigenschaften von Modellen mit deterministischen und dichotomen Faktoren 104

4 Obere und untere Preise in Aktie/Bond Modellen **111**

4.1 Definition des oberen Preises 112

4.2 Schranken für die oberen Preise von Finanzderivaten mit komponentenweise konvexen Auszahlungsfunktionen 130

4.2.1 Universelle obere Arbitragegrenzen 130

4.2.2 Der beschränkte Fall 141

4.2.3 Die schwache Konvergenzbedingung $A^\star$ 159

4.3 Definition des unteren Preises 167

4.4 Schranken für die unteren Preise von Finanzderivaten mit komponentenweise konvexen Auszahlungsfunktionen 174
4.4.1 Universelle untere Arbitragegrenzen 174
4.4.2 Das deterministisch/dichotome Modell 178
4.4.3 Die schwache Konvergenzbedingung $A_\star$ 193

5 Eigenschaften oberer und unterer Preise 201
5.1 Untersuchung auf Arbitragefreiheit 202
5.2 Konsistente Preissysteme 204
5.3 Untersuchung auf Konvergenzeigenschaften 214

6 Schlußbemerkungen 221

Literaturverzeichnis 225

Kapitel 1

Einleitung und Grundlagen

1.1 Einleitung

Mit der Gründung der Chicago Board Option Exchange am 26. April 1973 wurde ein Meilenstein in der Geschichte des Börsenhandels gelegt. Zusätzlich zum Handel mit den Basisgütern Aktien (stocks, shares, equities), festverzinsliche Wertpapiere (bonds), Währungen (currencies) und Waren (commodities) ist seitdem auch der Handel mit in die Zukunft weisenden Kontrakten über diese Basisgüter möglich. Zu den wichtigsten dieser *derivativen Finanzgüter* zählen amerikanische und europäische Call- und Put- Optionen, bei denen der Käufer das Recht erwirbt, eine Aktie innerhalb eines Zeitraumes bzw. zu einem fest vorgegebenen zukünftigen Zeitpunkt zu einem a priori festgelegten Kaufpreis zu kaufen bzw. zu verkaufen: „In practice, some derivatives such as put or call options are traded so frequently that their prices are quoted just like those of the primary assets. The prices of such *liquid options* can be regarded as an additional source of information on the expectations of the market as to the future evolution of asset prices.“ (aus [25], Seite 298).

Eine fundamentale Aufgabe der Finanzmathematik besteht in der Bereitstellung geeigneter Instrumente, um Finanzderivate „sinnvoll“ bewerten zu können; das naheliegendste Konzept besteht bei Finanzderivaten mit regelmäßigen Auszahlungen in der Bildung eines Portfolioäquivalentes, welches als *Hedge* bezeichnet wird. Dabei wird eine Kombination aus Aktien und Bonds zusammengestellt, die zu jedem Handelszeitpunkt so umgeschichtet wird, daß die Entnahmen genau den zu leistenden Auszahlungen entsprechen. Existieren in diesem Markt keine risikolosen Profitmöglichkeiten, so entspricht der Anfangswert dieses absichernden Portfolios der fairen Bewertung des Finanzderivates.

In der Realität ergeben sich bei Verwendung von zeitstetigen Modellen zwangsläufig Probleme: Zum einen ist ein kontinuierliches Anpassen eines absichernden Portfolios allein schon aus „technischen“ Gründen nicht möglich, zum anderen würden sich bei echt positiven Transaktionskosten innerhalb einer beliebig kurzen Zeitspanne unendlich hohe Kosten ergeben.
Folglich werden Agenten auf dem Markt nur *zeitdiskret* agieren, insbesondere also ihre Portfolioanpassungen nur in endlich vielen Handelszeitpunkten vornehmen.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich daher mit der Bewertung von Derivaten in der zeitdiskreten Finanzmathematik.

In Kapitel 1 werden dabei die benötigten Grundbegriffe vorgestellt, um die Problemstellung formalisieren zu können. Desweiteren wird mit dem n-Perioden Aktie/Bond Modell ein Standardmodell der zeitdiskreten Finanzmathematik vorgestellt, wie es zum Beispiel in [63] und [25] verwendet wird.

Die erste wichtige Modelleigenschaft stellt die *Arbitragefreiheit* dar, welche besagt, daß keine risikolosen Profitmöglichkeiten existieren sollen. Gemäß dem ersten Fundamentalsatz der Preistheorie ist diese Eigenschaft gleichbedeutend mit der Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes. Mit Satz 1.10 wird ein hinreichendes und notwendiges Kriterium angegeben, mit dessen Hilfe sich das Modell anhand der dem Aktienpreisprozeß zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Arbitragefreiheit untersuchen läßt. Als weiterer wichtiger Grundbegriff werden arbitragefreie Preise von Finanzderivaten mit regelmäßigen Auszahlungen und von amerikanischen Optionen definiert und mit der Menge der äquivalenten Martingalmaße in Verbindung gebracht.

Die zweite wichtige Eigenschaft eines Finanzmarktmodells stellt die *Vollständigkeit* dar, welche besagt, daß in diesem Modell *jedes* Finanzderivat hedgebar ist. Diese Eigenschaft ist in arbitragefreien Aktie/Bond Modellen gemäß dem zweiten Fundamentalsatz der Preistheorie gleichbedeutend mit der Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes. Die Definition der Vollständigkeit variiert in der Fachliteratur, so daß in Satz 1.28 zunächst die Konsistenz der verschiedenen Festlegungen nachgewiesen wird.

In der zeitdiskreten Finanzmathematik bildet die Eigenschaft der Vollständigkeit jedoch „the exception rather than the rule“ (aus [25], Seite 3), so daß faire Preise i.a. nicht mit Hilfe von absichernden Portfolios berechnet werden können.

Ein Ergebnis von A. Irle zeigt, daß bereits unter sehr schwachen Voraussetzungen nicht sämtliche von den fundamentalen Finanzderivaten europäische Calls und Puts sowie amerikanische Calls absicherbar sind (vgl. [34]).

Der entsprechende Beweis in [34] beruht dabei hauptsächlich auf maßtheoretischen Überlegungen. Im zweiten Kapitel der vorliegenden Arbeit wird zunächst ein alternativer Beweis dieses Resultates mit Methoden der Finanzmathematik vorgestellt, wobei es vom i.i.d.-Fall auf den stochastisch unabhängigen Fall verallgemeinert wird. Darüberhinaus wird gezeigt, daß bereits unter schwachen Voraussetzungen genau dann *mindestens eine* absicherbare europäische Call- oder Put-Option oder amerikanische Call-Option existiert, wenn ein Binomialmodell vorliegt, d.h. wenn alle Faktoren des Aktienpreisprozesses dichotom sind. In vielen praxisrelevanten Modellen, wie zum Beispiel bei Zeitdiskretisierungen des Black-Scholes Modells und bei Gaußschen und bedingten Gaußschen Modellen, ist folglich keines der oben genannten fundamentalen Finanzderivate absicherbar, so daß eine faire Bewertung mit Hilfe eines Portfolioäquivalentes nicht möglich ist. Hieraus ergibt sich die Notwendigkeit, alternative Preiskonzepte bereitzustellen.

Mit Hilfe der sowohl in der Potentialtheorie (vgl. z.B. [18]) als auch in der Prophetentheorie (vgl. z.B. [28]) verwendeten *Balayage-Technik* werden im dritten Kapitel die zu erwartenden Risiken von Finanzderivaten mit (komponentenweise) konvexen Auszahlungsfunktionen abgeschätzt. Hierfür werden einige Definitionen bereitgestellt, wann eine Zufallsgröße X riskanter als eine Zufallsgröße Y ist, und durch ein Resultat von Rothschild und Stiglitz (vgl. [54]) miteinander in Verbindung gebracht.
Hierbei ergeben sich für Binomialmodelle und Modelle mit deterministischen und dichotomen Faktoren extremale Eigenschaften. Legt man bei der Bewertung von Finanzderivaten das zu erwartende Risiko zugrunde, so erhält man folglich durch Vergleiche mit den oben genannten Modellen obere und untere Schranken für die Ausgabepreise.

Mit der Theorie der *oberen und unteren Preise und Hedges* werden in Kapitel 4 die notwendigen Instrumente bereitgestellt, um die ökonomischen Folgerungen aus dem dritten Kapitel zu präzisieren und auf Modelle mit nicht notwendigerweise stochastisch unabhängigen Faktoren zu verallgemeinern. Ein oberer Hedge eines Finanzderivates ist dabei eine Handelsstrategie, mit deren Hilfe der Herausgeber dieses Finanzderivates alle entstehenden Ansprüche ohne weitere eigene Zuzahlungen erfüllen kann; der obere Preis ist definiert als Infimum über alle Ausgabepreise von oberen Hedges. Die allgemeine Festlegung des oberen Preises aus [63] erweist sich dabei als ungeeignet für das Aktie/Bond Modell, und es wird gezeigt, daß *Selbstfinanzierung* die naheliegendste Zusatzvoraussetzung bildet. Der Beweis der Existenz eines oberen Hedges zum oberen Preis ist wesentlicher Bestandteil der *upper hedging duality*, die den oberen Preis mit der oberen Grenze aller arbitragefreien Preise in Verbindung bringt. Der allgemeine Beweis besitzt jedoch den Nachteil, daß er nicht konstruktiv ist. Darüberhinaus wird zur

Berechnung des oberen Preises mit Hilfe des oberen Dualitätssatzes die vollständige Kenntnis des Wahrscheinlichkeitsmaßes benötigt, welches dem Aktienpreisprozeß zugrundeliegt. Dieses ist jedoch in der Praxis i.a. unbekannt.

Als erstes zentrales Resultat des vierten Kapitels werden daher mittels expliziter Konstruktion von oberen Hedges einfach zu berechnende Schranken für die oberen Preise von Finanzderivaten mit komponentenweise konvexen Auszahlungsfunktionen angegeben. Die einzigen benötigten Informationen stellen dabei Schranken für die Träger der Faktoren des Aktienpreisprozesses dar.

Als zweites zentrales Ergebnis wird in Form einer schwachen Konvergenzbedingung ein hinreichendes Kriterium dafür angegeben, daß die oberen Preise die oberen Schranken annehmen und sich folglich leicht berechnen lassen. Darüberhinaus ist in diesem Fall eine explizite Konstruktion von oberen Hedges mit minimalen Anfangskosten möglich, so daß sich ein alternativer Beweis der upper hedging duality ergibt.

Im zweiten Teil des vierten Kapitels werden die analogen Aussagen für die *unteren Preise und Hedges* hergeleitet.

In Kapitel 5 dieser Arbeit werden die Konzepte der oberen und unteren Preise bewertet. Als erstes wichtiges Ergebnis wird gezeigt, daß i.a. (im Widerspruch zur Aussage „The intervals $[0, C_\star)$ and $(C^\star, \infty)$ are the (maximal) sets of prices that give a buyer or a seller, respectively, *opportunities for arbitrage.*“ aus [63], Seite 396) der obere Preis eines Finanzderivates dem Käufer und der untere Preis dem Verkäufer eine Arbitragemöglichkeit eröffnet.

Im zweiten Teil dieses Kapitels werden mit der Definition von *konsistenten* Preissystemen grundlegende Eigenschaften genannt, die ein Bewertungskonzept besitzen sollte. Durch Verallgemeinerung eines Resultates von Harrison und Pliska (vgl. [27]) wird dabei eine Verbindung zwischen konsistenten Preissystemen, arbitragefreien Preisen und der Menge der äquivalenten Martingalmaße hergestellt, mit deren Hilfe sich das Konzept der oberen und unteren Preise auf Konsistenz untersuchen läßt.

Da sich das zeitstetige Black-Scholes Modell als Limes von geeignet gewählten zeitdiskreten Modellen auffassen läßt, wird abschließend die Verträglichkeit von oberen und unteren Preisen mit der Konvergenz von Aktienpreisprozessen untersucht.

1.2 Grundbegriffe

Betrachtet werde ein Finanzmarkt mit d Basisfinanzgütern, auf dem zusätzlich ein derivatives Finanzgut gehandelt werden soll. Da die Laufzeit von Finanzderivaten endlich ist, beobachtet man diesen Markt während eines begrenzten Zeitraumes; die Handelszeitpunkte seien dabei $\{0, ..., n\}$ ($n \in \mathbb{N}$). Der Preisverlauf von mindestens einem Basisfinanzgut sei zufallsabhängig, so daß zur Modellbildung zunächst ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P_w)$ benötigt wird.

Definition 1.1 ([33], Abschnitt 3.1)

a) Ein n-Perioden Modell ist ein Paar $(\underset{\sim}{S}, \underset{\sim}{\mathcal{F}})$, bestehend aus

i) einer Filtration $\underset{\sim}{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_i)_{0 \leq i \leq n}$ in $\mathcal{F}$, dem Informationsverlauf;

ii) einem zu $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ adaptierten $\mathbb{R}^d$-wertigen Prozeß $\underset{\sim}{S} = (S_i)_{0 \leq i \leq n}$ auf Ω, dem Preisprozeß. Für $S_i = (S_{i,1}, ..., S_{i,d})^t$ gibt $S_{i,j}$ dabei den Preis von Finanzgut j zum Zeitpunkt i an, $1 \leq j \leq d$.

Weiterhin existiere zu jedem $i \in \{0, ..., n-1\}$ ein d-dimensionales $\mathcal{F}_i$-meßbares $\widehat{X}_i$ mit

$$P_w(\widehat{X}_i^t S_i > 0) = 1, \quad P_w(\widehat{X}_i^t S_{i+1} = 1) = 1;$$

$\underset{\sim}{\widehat{X}} = (\widehat{X}_i)_{i \in \{0,...,n-1\}}$ heißt risikofreie Anlagestrategie.

b) Der durch

$$\alpha_0 := 1, \ \alpha_i := \prod_{k=0}^{i-1} \widehat{X}_k^t S_k, \quad 1 \leq i \leq n,$$

definierte Prozeß wird als Diskontierungsprozeß [1], $(\alpha_i S_i)_{0 \leq i \leq n}$ als abdiskontierter Preisprozeß bezeichnet.

Ein auf diesem Finanzmarkt handelnder *Agent* stellt zum Zeitpunkt $i = 0$ ein *Portfolio* H_0 zusammen und schichtet es zu den einzelnen Handelszeitpunkten gemäß seinen Marktbeobachtungen, d.h. aufgrund seiner bis zu diesem Zeitpunkt gesammelten Informationen, um. Zu jedem Zeitpunkt $i \in \{1, ..., n-1\}$ verkauft er also das Portfolio H_{i-1}, welches er im Zeitpunkt $i-1$ gebildet hat, zum Preis $H_{i-1}^t S_i$; anschließend stellt er ein neues Portfolio H_i zum Preis $H_i^t S_i$ zusammen und hält dieses bis $i+1$. Dieses Vorgehen ist zu jedem Zeitpunkt i mit einer Entnahme $H_{i-1}^t S_i - H_i^t S_i$ verbunden, wobei eine negative Entnahme das zusätzliche Einbringen von Kapital in das Portfolio bedeutet.

[1] Als Folgerung von Satz 1.13 ist der Diskontierungsprozeß zumindest in *arbitragefreien* Modellen eindeutig bestimmt und somit wohldefiniert.

Definition 1.2 ([33], Abschnitt 3.2 und [63], Seite 386)

a) *Eine Handelsstrategie ist ein zu* $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ *adaptierter* $\mathbb{R}^d$*-wertiger stochastischer Prozeß* $\underset{\sim}{H} = (H_i)_{0 \le i \le n}$. *Für* $H_i = (H_{i,1}, ..., H_{i,d})^t$ *gibt* $H_{i,k}$ *dabei den Anteil des* k*-ten Finanzgutes im Portfolio* H_i *an, welches im Zeitpunkt* i *gebildet und bis zum Zeitpunkt* $i+1$ *gehalten wird,* $1 \le k \le d$.

b) *Der Werteprozeß* $\underset{\sim}{V}$ *einer Handelsstrategie* $\underset{\sim}{H}$ *ist gegeben durch* $V_i = H_i^t S_i$, $i = 0, ..., n$.

c) *Der Entnahmeprozeß* $\underset{\sim}{\delta}(\underset{\sim}{H})$ *einer Handelsstrategie wird definiert durch* $\delta_0(\underset{\sim}{H}) = -H_0^t S_0$ *und* $\delta_i(\underset{\sim}{H}) = H_{i-1}^t S_i - H_i^t S_i$, $1 \le i \le n$.

d) *Eine Handelsstrategie heißt selbstfinanzierend, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

i) $H_n = 0$ *und* $\delta_i(\underset{\sim}{H}) = 0$ P_w*-f.s.,* $1 \le i \le n-1$;

ii) $\delta_i(\underset{\sim}{H}) = 0$ P_w*-f.s.,* $1 \le i \le n$.

Auf diesem Finanzmarkt soll nun ein von den Basisgütern abgeleitetes Finanzgut gehandelt werden. Eine Vielzahl dieser *Finanzderivate* liefert dem Käufer zu jedem Zeitpunkt $i \in \{1, ..., n\}$ eine zufallsabhängige Auszahlung C_i. Will der Verkäufer des *Finanzderivates* diese Auszahlungen ohne das Risiko eigener Zuzahlungen leisten, so wird er bestrebt sein, die Forderungen mit Hilfe der Entnahmen aus einer geeigneten Handelsstrategie zu erfüllen.

Definition 1.3 ([33], Abschnitt 3.10)

a) *Ein Finanzderivat (Claim) mit regelmäßigen Auszahlungen ist ein zu* $(\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n)$ *adaptierter reellwertiger Prozeß* $\underset{\sim}{C} = (C_i)_{i \in \{1,...,n\}}$; *es liefert seinem Besitzer zum Zeitpunkt* i *die Auszahlung* C_i, $1 \le i \le n$.
Gilt dabei $C_1 = ... = C_{n-1} = 0$, *so wird der Claim als Finanzderivat mit terminaler Auszahlung bezeichnet.*

b) *Ein Finanzderivat mit regelmäßigen Auszahlungen heißt absicherbar (replizierbar, hedgebar), falls eine Handelsstrategie* $\underset{\sim}{H}$ *existiert mit* $H_n = 0$ *und* $\delta_i(\underset{\sim}{H}) = C_i$ P_w*-f.s.,* $1 \le i \le n$. $\underset{\sim}{H}$ *wird dann als Hedge des Finanzderivates bezeichnet.*

Die wohl bedeutendsten Beispiele solcher Finanzderivate sind europäische Call- und Put-Optionen (vgl. z.B. [25], Seite 298), die dem Käufer (*Halter*) das Recht verleihen, eine Aktie zu einem vorgegebenen zukünftigen Zeitpunkt zu einem a priori festgelegten Ausübungspreis $K > 0$ zu kaufen bzw. zu verkaufen:

Beispiel 1.4 ([33], Beispiel 3.11)
Ein europäischer Call auf das j-te Finanzgut mit Ausübungspreis $K > 0$ ist gegeben durch den Claim $\underset{\sim}{C}$ mit $C_i = 0$, $1 \leq i \leq n-1$, und

$$C_n = (S_{n,j} - K)^+,$$

der entsprechende europäische Put durch $C_i = 0$, $1 \leq i \leq n-1$, sowie

$$C_n = (K - S_{n,j})^+.$$

Eine weitere wichtige Klasse von Finanzderivaten bilden die amerikanischen Optionen. Diese verleihen dem Käufer ein Recht auf Ausübung innerhalb des Zeitraumes $\{0, ..., n\}$; seine Entscheidung wird der Halter dabei aufgrund der bis zum jeweiligen Zeitpunkt vorliegenden Informationen treffen müssen.

Definition 1.5 ([33], Abschnitt 4.1)

a) Ein amerikanischer Claim (eine amerikanische Option) ist ein zu $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ adaptierter reellwertiger stochastischer Prozeß $\underset{\sim}{C}$. Für $i \in \{0, ..., n\}$ gibt dabei C_i die Auszahlung an, die der Inhaber bei Ausübung zum Zeitpunkt i erhält.

b) Eine Ausübungsstrategie ist eine Stoppregel $\tau : \Omega \to \{0, ..., n\}$ bezüglich der Filtration $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$. Die Menge der Ausübungsstrategien werde mit $\mathcal{T}$ bezeichnet.

c) Zu jeder Ausübungsstrategie τ gehört der realisierbare Claim

$$(C_0 1_{\{\tau=0\}}, ..., C_n 1_{\{\tau=n\}})$$

mit Gesamtauszahlung $C_\tau = \sum_{i=0}^{n} C_i 1_{\{\tau=i\}}$.

Der Herausgeber der Option, welcher als *Stillhalter* bezeichnet wird, kennt die Stoppregel des Käufers nicht. Um sich dennoch gegen alle möglichen Ansprüche abzusichern, wird er vom Verkaufserlös der Option eine Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ zu erwerben versuchen, deren Wert $H_i^t S_i$ zu jedem Zeitpunkt i mindestens so groß ist wie der Anspruch C_i, der sich bei Ausübung in i ergäbe. Strategien $\underset{\sim}{H}$ mit $H_\tau^t S_\tau > C_\tau$ (P_w-f.s.) für *alle* Stoppregeln τ weisen dabei jedoch (wie sich im Verlauf dieser Arbeit noch zeigen wird) einen zu hohen Anfangspreis auf, der über allen „akzeptablen“ Verkaufspreisen der Option liegt. Damit gelangt man zur folgenden Definition eines Hedges für amerikanische Optionen:

Definition 1.6 ([25], Definition 6.35)
Ein amerikanischer Claim $\underset{\sim}{C}$ heißt absicherbar (hedgebar, replizierbar), falls eine Stoppregel τ und eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ existieren mit

i) $H_k^t S_k \geq C_k$ P_w*-f.s. für alle* $0 \leq k \leq n$,

ii) $H_\tau^t S_\tau = C_\tau$ P_w*-f.s..*

Beispiel 1.7 ([33], Beispiel 4.2)
Ein amerikanischer Call auf das j-te Finanzgut mit Ausübungspreis $K > 0$ ist gegeben durch den Prozeß $\underset{\sim}{C}$ mit

$$C_i = (S_{i,j} - K)^+, \; 0 \leq i \leq n,$$

der entsprechende amerikanische Put durch den Prozeß $\underset{\sim}{C}$ mit

$$C_i = (K - S_{i,j})^+, \; 0 \leq i \leq n.$$

1.3 Ausgangsmodell und Ausgangsproblem

Im folgenden wird ein spezielles n-Perioden Modell genauer untersucht. In ihm werden $d = 2$ Finanzgüter gehandelt, nämlich ein Bond mit zum Zeitpunkt 0 bekannten Verzinsungen $r_1, ..., r_n$ und eine Aktie mit positivem Preisprozeß $A_0, ..., A_n$; dieser kann stets in multiplikativer Form

$$A_i = A_0 \prod_{k=1}^{i} Y_k$$

mit Faktoren $Y_i = A_i/A_{i-1}$, $1 \leq i \leq n$, dargestellt werden. Der Anfangsaktienkurs $A_0 > 0$ sei dabei im Anfangszeitpunkt 0 bekannt, die Entwicklung des Aktienkurses $A_1, ..., A_n$ jedoch zufallsabhängig.
Der Finanzmarkt besitze die folgenden Eigenschaften:

- Der Investor besitzt die Möglichkeit, in den Bond zu investieren oder einen Kredit aufzunehmen, die Aktie zu kaufen oder ein short-selling der Aktie durchzuführen. Unter *short-selling* versteht man dabei das Eingehen einer short-position in einem Gut durch Ausleihen, Übernahme von Verpflichtungen und anschließendem Ausgleichen der Position.

- Es werden keine Dividenden gezahlt.

- Es entstehen keine Transaktionskosten.

- Die Aktie ist unendlich oft teilbar, d.h. es können beliebige Anteile erworben werden.
- Der Markt ist hinreichend liquide, d.h. es können beliebig hohe Kredite aufgenommen werden und beliebig viele Einheiten Bonds erworben werden.

Zur Modellierung des Finanzmarktes wählt man dabei

- $(\Omega, \mathcal{F}) = \big((0,\infty)^n, \mathbb{B}^n_{|(0,\infty)^n}\big)$,
- $Y_1, ..., Y_n$ als Koordinatenprojektionen,
- $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ mit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_i = \mathbb{B}^i_{|(0,\infty)^i}$, $i = 1, ..., n$, als Informationsverlauf,
- $\underset{\sim}{A} = (A_0, A_0Y_1, ..., A_0 \prod_{i=1}^n Y_i)$ mit $A_0 > 0$ als Aktienpreisprozeß,
- $\underset{\sim}{B} = \big(1, 1 + r_1, ..., \prod_{i=1}^n (1 + r_i)\big)$ als Bondpreisprozeß mit $r_1, ..., r_n \geq 0$,
- $\underset{\sim}{\alpha}$ mit $\alpha_0 = 0$ und $\alpha_k = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1+r_i}$, $k = 1, ..., n$, als Diskontierungsprozeß,
- $\underset{\sim}{S}$ mit $S_i = (A_i, B_i)^t$, $i = 0, ..., n$, als Preisprozeß,
- P_w als zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{F})$.

Weiterhin bezeichne

$$\mathcal{P} = \{Q : Q \sim P_w,\ E_Q|\alpha_i S_i| < \infty,\ E_Q(\alpha_i S_i|\mathcal{F}_{i-1}) = \alpha_{i-1}S_{i-1}\ Q\text{-f.s. } \forall\, 1 \leq i \leq n\}$$

die Menge der äquivalenten Martingalmaße.

Dieses spezielle n-Perioden Modell wird im folgenden stets als *Aktie/Bond Modell* bezeichnet.

Im Rahmen dieser Arbeit soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen in diesem Modell die fundamentalen Finanzderivate europäische Call- und Put-Optionen sowie amerikanische Call-Optionen absicherbar sind und demnach eindeutig bestimmte faire Preise besitzen.

Weiterhin soll im Falle der *Unvollständigkeit* des Modells untersucht werden, ob die Theorie der unteren und oberen Preise einen geeigneten Ansatz zur Bewertung von nicht-absicherbaren Optionen mit konvexen Auszahlungsfunktionen liefert, zu denen die o.g. Finanzderivate gehören. In diesem Zusammenhang sollen insbesondere leicht zu berechnende Schranken für obere und untere Preise sowie super- und subreplizierende Handelsstrategien bestimmt werden.

1.4 Arbitragefreiheit und Vollständigkeit

Fundamentale Voraussetzung sowohl für die Existenz fairer Preise von absicherbaren Claims als auch für die Anwendbarkeit der Theorie unterer und oberer Preise für nicht-absicherbare Finanzderivate ist die Gültigkeit des *No-Arbitrage-Prinzips*: Im Ausgangsmodell und im um den Handel mit dem Finanzderivat erweiterten Modell soll kein risikoloser Profit möglich sein.

Basierend auf diesem simplen Prinzip errechneten Fisher Black und Myron Scholes 1973 die berühmte Bewertungsformel für europäische Call-Optionen im (zeitstetigen) Black-Scholes Modell (vgl. [8]), welche von Robert Merton im selben Jahr in vielfacher Hinsicht verallgemeinert wurde (vgl. [43], [42]). 1997 wurden Scholes und Merton für ihre bahnbrechende Arbeit mit dem Nobelpreis ausgezeichnet.

1.4.1 Der erste Fundamentalsatz der Preistheorie

Als erster Schritt soll untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen allgemein in n-Perioden Modellen und speziell im Aktie/Bond Modell keine risikolose Profitmöglichkeit existiert.

Definition 1.8 (vgl. [63], Definition 1 und 2 in Kapitel V)
In einem n-Perioden Modell sei SF_{arb} die Menge aller Handelsstrategien $\underset{\sim}{H}$ mit $H_0^t S_0 = 0$, $\delta_i(\underset{\sim}{H}) = 0$ P_w-f.s. für $1 \leq i \leq n$ und $P_w(H_n^t S_n \geq 0) = 1$ sowie $P_w(H_n^t S_n > 0) > 0$. Das Modell heißt arbitragefrei, falls $SF_{arb} = \emptyset$.

Der erste Fundamentalsatz der Preistheorie liefert ein leicht zu überprüfendes hinreichendes und notwendiges Kriterium für die Arbitragefreiheit von n-Perioden Modellen:

Satz 1.9 (vgl. [33], Satz 5.1)
„First fundamental asset pricing theorem":
Ein n-Perioden Modell ist genau dann arbitragefrei, wenn $\mathcal{P} \neq \emptyset$ gilt.

Ein auf funktionalanalytischen Hilfsmitteln basierender Beweis befindet sich z.B. in [33] und [63]; ein alternativer, auf *utility-maximisation* basierender Beweis wird in [17] und [53] geführt.

Speziell im Aktie/Bond Modell läßt sich die Untersuchung auf Arbitragefreiheit direkt mit Hilfe des Maßes P_w durchführen:

Satz 1.10
Betrachtet werde ein Aktie/Bond Modell mit $E_{P_w}(Y_i) < \infty$ *für alle* $i \in \{1, ..., n\}$*. Definiert man für jedes* $i \in \{1, ..., n\}$

$$D_i := (0, 1 + r_i), \quad E_i := [1 + r_i], \quad U_i := (1 + r_i, \infty),$$

$$p_{1,D} := P_w^{Y_1}(D_1), \quad p_{1,E} := P_w^{Y_1}(E_1), \quad p_{1,U} := P_w^{Y_1}(U_1)$$

sowie für $i \in \{2, ..., n\}$ *und* $\vec{y}_{i-1} := (y_1, ..., y_{i-1}) \in (0, \infty)^{i-1}$

$$\begin{aligned} p_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) &:= P_w^{Y_i|(Y_1,...,Y_{i-1})=\vec{y}_{i-1}}(D_i), \\ p_{i,E}(\vec{y}_{i-1}) &:= P_w^{Y_i|(Y_1,...,Y_{i-1})=\vec{y}_{i-1}}(E_i), \\ p_{i,U}(\vec{y}_{i-1}) &:= P_w^{Y_i|(Y_1,...,Y_{i-1})=\vec{y}_{i-1}}(U_i), \end{aligned}$$

so ist das Modell genau dann arbitragefrei, wenn die Bedingungen

$$\begin{aligned} A_1^\star &: \ p_{1,E} = 1 \text{ oder } (p_{1,U} > 0 \wedge p_{1,D} > 0), \\ A_i^\star &: \ \left[p_{i,E}(\vec{y}_{i-1}) = 1 \text{ oder } \big(p_{i,U}(\vec{y}_{i-1}) > 0 \ \wedge \ p_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) > 0\big)\right] \ P_w^{(Y_1,...,Y_{i-1})}\text{-f.s.} \end{aligned}$$

für alle $i \in \{2, ..., n\}$ *erfüllt sind.*

Beweis: Seien zunächst die Bedingungen $A_i^\star$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$ erfüllt. Wegen $E_{P_w}(Y_i) < \infty$ kann o.B.d.A. $E_{P_w}(Y_i|(Y_1, ..., Y_{i-1}) = (y_1, ..., y_{i-1})) < \infty$ für alle $(y_1, ..., y_{i-1}) \in (0, \infty)^{i-1}$ und $i \in \{2, ..., n\}$ angenommen werden.
Falls $p_{1,E} < 1$, so definiert man $\overline{p}_{1,D} := p_{1,D} + p_{1,E}$ und

$$c_{1,D} := \int\limits_{D_1+E_1} id \ dP_w^{Y_1}, \quad c_{1,U} := \int\limits_{U_1} id \ dP_w^{Y_1};$$

weiter seien $a_{1,D}$, $a_{1,U} \in (0, \infty)$ die eindeutig bestimmten Lösungen von

$$a_{1,D} \cdot \overline{p}_{1,D} + a_{1,U} \cdot p_{1,U} = 1 \ \wedge \ a_{1,D} \cdot c_{1,D} + a_{1,U} \cdot c_{1,U} = 1 + r_1,$$

d.h.

$$a_{1,D} = \frac{c_{1,U} - p_{1,U} \cdot (1 + r_1)}{c_{1,U} \cdot \overline{p}_{1,D} - c_{1,D} \cdot p_{1,U}}, \quad a_{1,U} = \frac{\overline{p}_{1,D} \cdot (1 + r_1) - c_{1,D}}{c_{1,U} \cdot \overline{p}_{1,D} - c_{1,D} \cdot p_{1,U}}.$$

Dann wird das Wahrscheinlichkeitsmaß Q_1 festgelegt durch

$$Q_1(\cdot) = 1_{[1]}(p_{1,E}) P_w^{Y_1}(\cdot) + 1_{[0,1)}(p_{1,E}) \left[a_{1,D} P_w^{Y_1}(\cdot \cap (D_1 + E_1)) + a_{1,U} P_w^{Y_1}(\cdot \cap U_1)\right].$$

Für $i \in \{2, ..., n\}$ und $\vec{y}_{i-1} \in (0, \infty)^{i-1}$ mit $0 < \min\{p_{i,U}(\vec{y}_{i-1}), \ p_{i,D}(\vec{y}_{i-1})\}$ und $p_{i,E}(\vec{y}_{i-1}) < 1$ definiert man

$$\overline{p}_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) := p_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) + p_{i,E}(\vec{y}_{i-1}),$$

$$c_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) := \int\limits_{D_i+E_i} id \ dP_w^{Y_i|(Y_1,...,Y_{i-1})=\vec{y}_{i-1}}, \ c_{i,U}(\vec{y}_{i-1}) := \int\limits_{U_i} id \ dP_w^{Y_i|(Y_1,...,Y_{i-1})=\vec{y}_{i-1}}.$$

Dann sind $a_{i,D}(\vec{y}_{i-1}), a_{i,U}(\vec{y}_{i-1}) \in (0,\infty)$ mit

$$a_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) = \frac{c_{i,U}(\vec{y}_{i-1}) - p_{i,U}(\vec{y}_{i-1}) \cdot (1+r_i)}{c_{i,U}(\vec{y}_{i-1}) \cdot \overline{p}_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) - c_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) \cdot p_{i,U}(\vec{y}_{i-1})},$$

$$a_{i,U}(\vec{y}_{i-1}) = \frac{\overline{p}_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) \cdot (1+r_i) - c_{i,D}(\vec{y}_{i-1})}{c_{i,U}(\vec{y}_{i-1}) \cdot \overline{p}_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) - c_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) \cdot p_{i,U}(\vec{y}_{i-1})}$$

die eindeutig bestimmten Lösungen von

$$\begin{aligned} a_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) \cdot \overline{p}_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) + a_{i,U}(\vec{y}_{i-1}) \cdot p_{i,U}(\vec{y}_{i-1}) &= 1, \\ a_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) \cdot c_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) + a_{i,U}(\vec{y}_{i-1}) \cdot c_{i,U}(\vec{y}_{i-1}) &= 1 + r_i. \end{aligned}$$

Für $\vec{y}_{i-1} \in (0,\infty)^{i-1}$ mit $\min\{p_{i,U}(\vec{y}_{i-1}), p_{i,D}(\vec{y}_{i-1})\} = 0$ seien $a_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) := 1$ und $a_{i,U}(\vec{y}_{i-1}) := 1$. Damit sind $a_{i,D}(\cdot), a_{i,U}(\cdot)$ meßbare Abbildungen, so daß durch $Q_i : (0,\infty)^i \times \mathbb{B}_{|(0,\infty)} \to [0,1]$ mit

$$\begin{aligned} Q_i(\vec{y}_{i-1}, A_i) \;:=\;& 1_{[1]}(p_{i,E}(\vec{y}_{i-1})) P_w^{Y_i|(Y_1,\ldots,Y_{i-1})=\vec{y}_{i-1}}(A_i) \\ &+ 1_{[0,1)}(p_{i,E}(\vec{y}_{i-1})) \big[a_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) P_w^{Y_i|(Y_1,\ldots,Y_{i-1})=\vec{y}_{i-1}}(A_i \cap (D_i + E_i)) \\ &\qquad + a_{i,U}(\vec{y}_{i-1}) P_w^{Y_i|(Y_1,\ldots,Y_{i-1})=\vec{y}_{i-1}}(A_i \cap U_i) \big] \end{aligned}$$

ein Übergangskern definiert wird. Schließlich bildet Q mit

$$Q(A) := \int\!\!\int \ldots \int\!\!\int 1_A(\vec{y}_n)\, Q_n(\vec{y}_{n-1}, dy_n)\, Q_{n-1}(\vec{y}_{n-2}, dy_{n-1}) \ldots Q_2(\vec{y}_1, dy_2) Q_1(dy_1)$$

ein äquivalentes Martingalmaß auf $\mathbb{B}^n_{|\Omega}$.

Sei nun Q ein zu P_w äquivalentes Maß. Falls Bedingung $A_1^\star$ nicht erfüllt ist, d.h. falls $p_{1,D} > 0$ und $p_{1,U} = 0$ oder $p_{1,D} = 0$ und $p_{1,U} > 0$ gilt, so folgt $E_{Q^{Y_1}}(id) < 1 + r_1$ bzw. $E_{Q^{Y_1}}(id) > 1 + r_1$, also ein Widerspruch zu $E_Q(Y_1) = 1 + r_1$. Falls für ein $i \in \{2, \ldots, n\}$ Bedingung $A_i^\star$ nicht erfüllt ist, so erhält man für

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{\vec{y}_{i-1} : p_{i,U}(\vec{y}_{i-1}) > 0 \wedge p_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) = 0\}, \\ B_2 &:= \{\vec{y}_{i-1} : p_{i,U}(\vec{y}_{i-1}) = 0 \wedge p_{i,D}(\vec{y}_{i-1}) > 0\}, \end{aligned}$$

daß $P_w^{(Y_1,\ldots,Y_{i-1})}(B_1 + B_2) > 0$ und folglich $\max_{j=1,2}\{Q^{(Y_1,\ldots,Y_{i-1})}(B_j)\} > 0$ gilt.

Somit kann die Bedingung

$$E_Q\big(Y_i \,|\, (Y_1, ..., Y_{i-1}) = (y_1, ..., y_{i-1})\big) = 1 + r_i \quad Q^{(Y_1,...,Y_{i-1})}\text{-f.s.}$$

nicht erfüllt sein.

□

Ein leichter zu überprüfendes Kriterium liefert das folgende Lemma:

Lemma 1.11

a) Im Aktie/Bond Modell gelte $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^n P_w^{Y_i}$. Falls für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ $d_i := \min supp(P_w^{Y_i})$ und $u_i := \sup supp(P_w^{Y_i})$ die Bedingung

$$d_i < 1 + r_i < u_i \quad \textit{oder} \quad d_i = 1 + r_i = u_i$$

erfüllen[2]*, so existiert ein äquivalentes Martingalmaß Q, unter dem $Y_1, ..., Y_n$ stochastisch unabhängig sind; insbesondere ist das Modell arbitragefrei.*

b) Die Bedingung $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^n P_w^{Y_i}$ ist insbesondere erfüllt, falls abzählbare Teilmengen $\Omega_1, ..., \Omega_n \subset [0, \infty)$ existieren mit $supp(P_w) = \bigtimes_{i=1}^n \Omega_i$.

Beweis: O.B.d.A. kann $E_{P_w}(Y_i) < \infty$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$ angenommen werden; andernfalls ersetze man P_w im folgenden durch das Maß $P = \bigotimes_{i=1}^n P_i$, wobei P_i festgelegt sei durch

$$\frac{dP_i}{dP_w^{Y_i}}(x) = \frac{\exp(-x)}{E_{P_w}\big(\exp(-Y_i)\big)}\,.$$

Dann gilt $P \sim P_w$ und $E_P(Y_i) \leq \frac{1}{eE_{P_w}(\exp(-Y_i))} < \infty$.

Mit derselben Konstruktion wie beim Maß Q_1 im Beweis von Satz 1.10 folgt dann die Existenz von Maßen $Q_1, ..., Q_n$ mit $Q_i \sim P_w^{Y_i}$ und $E_{Q_i}(id) = 1 + r_i$, $1 \leq i \leq n$. Dann liefert $Q := \bigotimes_{i=1}^n Q_i$ das gewünschte Martingalmaß.

□

Lemma 1.11 b) zeigt insbesondere, daß bei Aktie/Bond Modellen mit diskreten Verteilungen eine *genaue* Kenntnis von P_w für die Untersuchung auf Arbitragefreiheit nicht notwendig ist; lediglich die Gestalt des Trägers von P_w ist hierfür relevant.

[2] Für ein W-Maß P bezeichne $supp\,(P)$ den Träger, d.h. die kleinste abgeschlossene Menge A mit $P(A) = 1$, vgl. [22], S. 339.

Eine Anwendung liefert das folgende Beispiel:

Beispiel 1.12
In jedem der Fälle

a) *supp* $(P_w) = \bigtimes_{i=1}^{n}\{d_i, u_i\}$, $0 < d_i < u_i < \infty$ *(Binomialmodell),*

b) *supp* $(P_w) = \{d, u\}^n$, $0 < d < u < \infty$, $r_1 = ... = r_n = r$ *(Cox-Ross-Rubinstein Modell),*

c) *supp* $(P_w) = \bigtimes_{i \in I}\{d_i, u_i\} \dot{\times} \bigtimes_{i \notin I}\{1 + r_i\}$, $I \subset \{1, ..., n\}$, $0 < d_i < u_i < \infty$ *für alle* $i \in I$ *(wobei mit* $\dot{\times}$ *die „richtige" Reihenfolge der Faktorenmenge gemeint ist)* *(deterministisch/dichotomes Modell)*

ist das zugehörige Aktie/Bond Modell genau dann arbitragefrei, wenn jeweils die entsprechende Bedingung

a) $d_i < 1 + r_i < u_i$ *für* $i = 1, ..., n$,

b) $d < 1 + r < u$,

c) $d_i < 1 + r_i < u_i$ *für alle* $i \in I$

erfüllt ist (für a) und b) vgl. z.B. [16],[33], [50]).

In arbitragefreien n-Perioden Modellen gilt ein wichtiges Grundprinizip:

Satz 1.13 (vgl. [33], Seite 11)
Stimmen für zwei Kombinationen F_1 *und* F_2 *von Finanzgütern in einem arbitragefreien n-Perioden Modell die Werte zu einem Zeitpunkt* $k \in \{1, ..., n\}$ P_w*-f.s. überein, dann sind auch ihre Anfangswerte identisch.*

Beweis: (vgl. [33], Seite 11) Sei $V_{0,i}$ der Wert der Kombination F_i zum Zeitpunkt 0, $i = 1, 2$. Im Fall $V_{0,1} > V_{0,2}$ würde ein short-selling in F_1 und der Erwerb von F_2 zum Anfangszeitpunkt, gefolgt vom Verkauf von F_2 und Rückkauf sowie Zurückgeben von F_1 im Zeitpunkt k eine Arbitragemöglichkeit ergeben. Ist in diesem Markt short-selling nicht erlaubt, so ergäbe sich dennoch eine Arbitragemöglichkeit für den Besitzer der Kombination F_1. Analog ergibt auch der Fall $V_{0,1} < V_{0,2}$ eine risikolose Profitmöglichkeit.

$\square$

Betrachtet wird nun ein arbitragefreies n-Perioden Modell (gemäß Definition 1.1). Mit Hilfe von Satz 1.13 ergibt sich für ein absicherbares Finanzderivat mit terminaler Auszahlung C_n, daß alle Hedges denselben Anfangswert besitzen, da ihr Wert im Zeitpunkt n vor Auflösung des Portfolios P_w-f.s. gleich C_n ist.
Sei weiter $\underset{\sim}{H}$ ein Hedge für ein absicherbares Finanzderivat mit regelmäßigen Auszahlungen $C_1, ..., C_n$. Dann besitzt die Handelsstrategie $\underset{\sim}{\widehat{H}}$ mit

$$\widehat{H}_k = \big(H_{k,1}, H_{k,2} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_i(\underset{\sim}{H})\big)^t, \quad 0 \leq k \leq n,$$

den Anfangswert $H_0^t S_0$ und P_w-f.s. den Endwert $\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i B_n$; gemäß Satz 1.13 stimmen also wieder die Anfangswerte aller Hedges überein.

Auch bei amerikanischen Optionen greift dieses Prinzip, jedoch in leicht modifizierter Form. Seien nämlich $\underset{\sim}{H}$ und $\underset{\sim}{G}$ Hedges für eine amerikanische Option mit Auszahlungsprozeß $\underset{\sim}{C}$. Dann gilt P_w-f.s. $H_k^t S_k \geq C_k$ und $G_k^t S_k \geq C_k$ sowie $H_\tau^t S_\tau = C_\tau$ und $G_\sigma^t S_\sigma = C_\sigma$ für zwei Stoppregeln τ, σ. Falls etwa $H_0^t S_0 < G_0^t S_0$ gilt, so führe man im Anfangszeitpunkt ein short-selling in der Handelsstrategie $\underset{\sim}{G}$ durch und erwerbe $\underset{\sim}{H}$. Für $\omega \in \Omega$ verkaufe man im Zeitpunkt $\sigma(\omega)$ das Portfolio $H_{\sigma(\omega)}$ wieder und gleiche die short position aus. Wegen

$$H_\sigma^t S_\sigma = \sum_{k=0}^{n} H_k^t S_k 1_{\{\sigma=k\}} \geq \sum_{k=0}^{n} C_k 1_{\{\sigma=k\}} = C_\sigma = G_\sigma^t S_\sigma \quad P_w\text{-f.s.}$$

erhält man insgesamt (z.B. durch Anlegen von $G_0^t S_0 - H_0^t S_0$ in die risikofreie Anlagestrategie) eine Arbitragemöglichkeit.
Ist short-selling nicht erlaubt, so ergäbe sich dennoch für den Besitzer von $\underset{\sim}{G}$ eine risikolose Profitmöglichkeit.

Insgesamt ergibt sich:

Satz 1.14 (vgl. [33], Abschnitt 3.12 und [25], Theorem 6.36)
Betrachtet werde ein arbitragefreies n-Perioden Modell.

a) Der eindeutig bestimmte arbitragefreie Preis eines mit einer Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ absicherbaren Claims $\underset{\sim}{C}$ zum Zeitpunkt $k \in \{0, ..., n\}$ ist gegeben durch

$$a_k(\underset{\sim}{C}) = H_k^t S_k.$$

b) Der eindeutig bestimmte arbitragefreie Ausgabepreis einer absicherbaren amerikanischen Option beträgt

$$a_0(\underset{\sim}{C}) = H_0^t S_0,$$

wobei $\underset{\sim}{H}$ ein beliebiger Hedge sei.

1.4.2 Arbitragefreie Preise und Hedgebarkeit von Finanzderivaten

Im folgenden werde stets ein **Aktie/Bond Modell** zugrundegelegt; darüberhinaus sei dieses stets als arbitragefrei angenommen. Die Idee bei der Bewertung eines Finanzderivates besteht nun darin, daß weder Käufer noch Verkäufer im *um den Handel mit dem Derivat erweiterten Modell* einen risikolosen Profit erzielen können. Es wird sich zeigen, daß genau dann ein eindeutig bestimmter arbitragefreier Preis für ein Finanzderivat mit nicht-negativen Auszahlungen existiert, wenn die Bewertung unter allen äquivalenten Martingalmaßen gleich und nach oben beschränkt ist, was wiederum äquivalent zur Existenz eines Hedges ist.

Definition 1.15 (vgl. [25], Definition 5.29)
Eine reelle Zahl $a(C_n) \geq 0$ wird als arbitragefreier Preis eines Finanzderivates mit nicht-negativer terminaler Auszahlung C_n bezeichnet, wenn ein zu $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ adaptierter reellwertiger stochastischer Prozeß $\underset{\sim}{V}$ existiert, so daß

i) $V_0 = a(C_n)$,

ii) $V_k \geq 0$ P_w-*f.s.*, $1 \leq k \leq n-1$,

iii) $V_n = \alpha_n C_n$ P_w-*f.s.*,

und so daß das erweiterte Modell mit Preisprozeß $(S_i, V_i)_{0 \leq i \leq n}$ arbitragefrei ist.

Die Menge der arbitragefreien Preise von C_n wird mit $\Pi(C_n)$ bezeichnet, ihre größte untere bzw. kleinste obere Schranke mit

$$\underline{a}(C_n) := \inf \Pi(C_n), \quad \overline{a}(C_n) := \sup \Pi(C_n).$$

Satz 1.16 ([25], Theorem 5.30)
Die Menge der arbitragefreien Preise eines Finanzderivates mit nicht-negativer terminaler Auszahlung C_n ist gegeben durch

$$\Pi(C_n) = \{E_Q(\alpha_n C_n) | Q \in \mathcal{P}, E_Q(C_n) < \infty\}.$$

Falls $\Pi(C_n) \neq \emptyset$, so sind die größte untere und die kleinste obere Schranke gegeben durch

$$\underline{a}(C_n) = \inf_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\alpha_n C_n), \quad \overline{a}(C_n) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\alpha_n C_n).$$

Satz 1.17 ([25], Theorem 5.33)
Gegeben sei ein Finanzderivat mit nicht-negativer terminaler Auszahlung C_n.

a) *Wenn C_n hedgebar ist, dann besteht die Menge $\Pi(C_n)$ aus einem einzigen Element V_0, wobei V_0 der Anfangswert einer beliebigen replizierenden Handelsstrategie ist.*

b) Wenn C_n nicht hedgebar ist, dann gilt entweder $\Pi(C_n) = \emptyset$ oder

i) $\underline{a}(C_n) < \overline{a}(C_n)$ und

ii) $\Pi(C_n) = \big(\underline{a}(C_n), \overline{a}(C_n)\big)$.

Korollar 1.18
Ein Finanzderivat mit nicht-negativer terminaler Auszahlung C_n ist genau dann hedgebar, wenn $\underline{a}(C_n) = \overline{a}(C_n) < \infty$ gilt.

Die Ergebnisse von Satz 1.16, Satz 1.17 und Korollar 1.18 lassen sich mit Hilfe des folgenden Lemmas auf Claims mit nicht-negativen Auszahlungen $C_1, ..., C_n$ übertragen:

Lemma 1.19
Ein Finanzderivat $\underset{\sim}{C}$ mit Auszahlungen $C_1, ..., C_n$ ist genau dann hedgebar, wenn der Claim $\underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{C})$ mit terminaler Auszahlung

$$D_n(\underset{\sim}{C}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_k B_n$$

hedgebar ist.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß für $k \in \{1, ..., n-1\}$ der Claim $\widehat{\underset{\sim}{C}}$ mit $\widehat{C}_i = 0$, $i \neq k$, und $\widehat{C}_k = C_k$ genau dann hedgebar ist, wenn $\widehat{\underset{\sim}{D}}$ mit $\widehat{D}_j = 0$ für $j < n$ und $\widehat{D}_n = C_k \alpha_k B_n$ hedgebar ist. Dies folgt sofort aus der Überlegung, daß eine Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ genau dann einen Hedge für $\widehat{\underset{\sim}{C}}$ bildet, wenn $\widehat{\underset{\sim}{H}}$ mit $\widehat{H}_j = H_j$ für $j < k$ und $\widehat{H}_j = H_j + (0, \alpha_k C_k)^t$ für $j = k, ..., n-1$ ein Hedge für $\widehat{\underset{\sim}{D}}$ ist.

□

Definition/Korollar 1.20
Sei $\underset{\sim}{C}$ ein Finanzderivat mit regelmäßigen nicht-negativen Auszahlungen.

a) Eine reelle Zahl $a(\underset{\sim}{C})$ wird genau dann als arbitragefreier Preis für $\underset{\sim}{C}$ bezeichnet, wenn sie ein arbitragefreier Preis von $\underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{C})$ im Sinne von Definition 1.15 ist.

b) Die Menge der arbitragefreien Preise für $\underset{\sim}{C}$ ist gegeben durch

$$\Pi(\underset{\sim}{C}) = \{E_Q(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_k) | Q \in \mathcal{P}, E_Q(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_k) < \infty\}.$$

Gilt $\Pi(\underset{\sim}{C}) \neq \emptyset$, so sind die untere und obere Schranke gegeben durch

$$\underline{a}(\underset{\sim}{C}) = \inf_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_k), \quad \overline{a}(\underset{\sim}{C}) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_k).$$

c) $\underset{\sim}{C}$ ist genau dann hedgebar, wenn $\underline{a}(\underset{\sim}{C}) = \overline{a}(\underset{\sim}{C}) < \infty$ gilt.

Um zu einer geeigneten Festlegung eines arbitragefreien Preises einer amerikanischen Option mit nicht-negativem Auszahlungsprozeß $\underset{\sim}{C}$ zu gelangen, macht man sich zunächst klar, daß ein realisierter Claim C_τ als Finanzderivat mit Auszahlungen $C_k 1_{\{\tau=k\}}$, $0 \leq k \leq n$, aufgefaßt werden kann.
Die Menge der arbitragefreien Preise von C_τ ist nach Korollar 1.20 (erweitert um eine mögliche Auszahlung in $k = 0$) gegeben durch

$$\Pi(C_\tau) = \{E_Q(\alpha_\tau C_\tau) : Q \in \mathcal{P}, E_Q(\alpha_\tau C_\tau) < \infty\}.$$

Aus Sicht des Verkäufers sollte nun keine Ausübungsstrategie τ existieren, so daß der zugehörige realisierte Claim C_τ unterhalb eines jeden seiner arbitragefreien Preise erworben werden kann.
Aus Sicht des Käufers sollte andererseits mindestens eine Ausübungsstrategie τ_0 existieren, deren zugehöriger realisierter Claim C_{τ_0} zu einem arbitragefreien Preis erworben werden kann (vgl. [25], Seite 273).

Definition 1.21 ([25], Definition 6.31)
Eine reelle Zahl $a(\underset{\sim}{C}) \geq 0$ wird als arbitragefreier Preis einer amerikanischen Option mit nicht-negativem Auszahlungsprozeß $\underset{\sim}{C}$ bezeichnet, falls gilt

i) Es existieren $\tau_0 \in \mathcal{T}$ und $Q_0 \in \mathcal{P}$ mit $a(\underset{\sim}{C}) = E_{Q_0}(\alpha_{\tau_0} C_{\tau_0}) < \infty$.

ii) Es existiert kein $\tau \in \mathcal{T}$ mit $a(\underset{\sim}{C}) < \pi$ für alle $\pi \in \Pi(C_\tau)$.

Satz 1.22 ([25], Theorem 6.33)
Sei $\underset{\sim}{C}$ der Auszahlungsprozeß einer amerikanischen Option mit $C_k \geq 0$ und $C_k \in \mathcal{L}_1(Q)$ für alle $Q \in \mathcal{P}$, $0 \leq k \leq n$. Dann ist die Menge $\Pi(\underset{\sim}{C})$ der arbitragefreien Preise für $\underset{\sim}{C}$ ein reelles Intervall mit Endpunkten

$$\underline{a}(\underset{\sim}{C}) := \inf_{Q \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \inf_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau)$$

und

$$\overline{a}(\underset{\sim}{C}) := \sup_{Q \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau).$$

Darüberhinaus besteht die Menge $\Pi(\underset{\sim}{C})$ entweder aus einem einzigen Punkt, oder sie enthält nicht ihren oberen Endpunkt $\overline{a}(\underset{\sim}{C})$.

Satz 1.23 ([25], Theorem 6.36)
Sei $\underset{\sim}{C}$ der Auszahlungsprozeß einer amerikanischen Option mit $C_k \geq 0$ und $C_k \in \mathcal{L}_1(Q)$ für alle $Q \in \mathcal{P}$, $0 \leq k \leq n$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) Die Option ist hedgebar.

ii) $|\Pi(\underset{\sim}{C})| = 1$, d.h. $\underset{\sim}{C}$ besitzt einen eindeutig bestimmten arbitragefreien Preis.

iii) $\overline{a}(\underset{\sim}{C}) \in \Pi(\underset{\sim}{C})$.

Definition 1.24
Besitzt ein Finanzderivat einen eindeutig bestimmten endlichen arbitragefreien Preis, so wird dieser als fairer Preis des Finanzderivates bezeichnet.

Die fairen Preise absicherbarer Finanzderivate in einem arbitragefreien Markt lassen sich mit Hilfe eines beliebigen äquivalenten Martingalmaßes *ohne* explizite Konstruktion eines Hedges berechnen; dieses Prinzip greift nicht nur für den Anfangszeitpunkt, sondern für alle Handelszeitpunkte $k \in \{0, ..., n-1\}$:

Satz 1.25 ([33], Abschnitt 3.25 und Abschnitt 4.3)
Sei Q ein beliebiges äquivalentes Martingalmaß.

a) Ist ein Finanzderivat mit regelmäßigen Auszahlungen $\underset{\sim}{C}$ mit einem bzgl. Q integrierbarem Hedge $\underset{\sim}{H}$ absicherbar, dann ist sein fairer Preis zu einem Zeitpunkt $k \in \{0, ..., n-1\}$ gegeben durch

$$a_k(\underset{\sim}{C}) = \frac{1}{\alpha_k} E_Q(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i C_i | \mathcal{F}_k).$$

b) Sei $\underset{\sim}{C}$ der Auszahlungsprozeß einer amerikanischen Option. Sind sämtliche realisierbare Claims C_τ (aufgefaßt als Finanzderivate mit regelmäßigen Auszahlungen) mit bezüglich Q integrierbaren Hedges absicherbar, dann ist der faire Preis der Option zum Zeitpunkt $k \in \{0, ..., n-1\}$ gegeben durch

$$a_k(\underset{\sim}{C}) = \sup_{\tau \geq k} \frac{1}{\alpha_k} E_Q(\alpha_\tau C_\tau | \mathcal{F}_k).$$

1.4.3 Der zweite Fundamentalsatz der Preistheorie

Die Aussage von Korollar 1.18 überträgt sich direkt auf Optionen, bei denen C_n P_w-f.s. nach unten beschränkt ist. Gilt nämlich $P_w(C_n \geq c) = 1$ für ein $c < 0$, so ist $D_n = (C_n - c)1_{\{C_n \geq c\}}$ genau dann hedgebar, wenn $\inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_n D_n) = \sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_n D_n) < \infty$, also wenn $\inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_n C_n) = \sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_n C_n) < \infty$. Fordert man zusätzlich, daß C_n auch P_w-f.s. nach oben beschränkt ist, so ist die Bedingung $\sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_n C_n) < \infty$ trivialerweise erfüllt; eine Option mit P_w-f.s. beschränkter terminaler Auszahlung C_n ist daher genau dann hedgebar, wenn die Bewertung $E_Q(\alpha_n C_n)$ unter jedem äquivalenten Martingalmaß Q dieselbe ist.

Existiert im Aktie/Bond Modell genau ein äquivalentes Martingalmaß, so ist folglich jedes Finanzderivat mit P_w-f.s. beschränkter terminaler Auszahlung hedgebar. Ist umgekehrt jedes Finanzderivat mit P_w-f.s. beschränkter terminaler Auszahlung hedgebar, so gilt dies insbesondere für $C_n = 1_A$ mit beliebigem $A \in \mathcal{F}_n$, woraus dann schon $|\mathcal{P}| = 1$ folgt. Diese Äquivalenz wird als zweiter Fundamentalsatz der Preistheorie bezeichnet.

Definition 1.26 (vgl. [63], Seite 481)
Das Aktie/Bond Modell heißt vollständig, wenn jedes Finanzderivat mit P_w-f.s. beschränkter terminaler Auszahlung hedgebar ist.

Ist das Aktie/Bond Modell arbitragefrei, so liefert der zweite Fundamentalsatz der Preistheorie ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für die Vollständigkeit:

Satz 1.27 (vgl. [63], Theorem B auf Seite 481)
„Second fundamental asset pricing theorem":
Ein arbitragefreies Aktie/Bond Modell ist genau dann vollständig, wenn $|\mathcal{P}| = 1$ gilt.

Überraschenderweise variiert die Definition der „Vollständigkeit" eines Modells in der Fachliteratur. In [63] heißt ein Markt z.B. vollständig, falls jedes Finanzderivat mit (P_w-f.s.) beschränkter terminaler Auszahlung absicherbar ist (vgl. Definition 1.26); in [25] hingegen wird die Hedgebarkeit von Finanzderivaten mit nicht-negativer, in [38] mit P_w-f.s. nach unten beschränkter terminaler Auszahlung, in [51] die von *allen* Finanzderivaten mit terminaler Auszahlung gefordert (wofür in [63] der Begriff des *perfekten* Marktes verwendet wird), und in [33] bedeutet Vollständigkeit sogar Absicherbarkeit aller Finanzderivate mit *regelmäßigen* Auszahlungen.

Zunächst soll daher die Konsistenz dieser Definitionen nachgewiesen werden, wofür Satz 1.27 erweitert wird.

Satz 1.28
Unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit sind im Aktie/Bond Modell die folgenden Aussagen äquivalent:

a) Das Modell ist vollständig.

b) Jedes Finanzderivat mit terminaler Auszahlung ist hedgebar.

c) Jedes Finanzderivat mit P_w-f.s. nach unten beschränkter terminaler Auszahlung ist hedgebar.

d) Jedes Finanzderivat mit nicht-negativer terminaler Auszahlung ist hedgebar.

e) Jedes Finanzderivat mit regelmäßigen Auszahlungen ist hedgebar.

f) Jede amerikanische Option ist hedgebar.

g) $|\mathcal{P}| = 1$.

Falls eine dieser Bedingungen erfüllt ist, folgt

h) $|supp(P_w)| \leq 2^n$.

Beweis: Der Beweis von $a) \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow g)$ befindet sich z.B. in Kapitel V von [63]. Die Implikation $g) \Rightarrow h)$ wird z.B. in [35], S. 268 ff. gezeigt; im zweiten Kapitel dieser Arbeit wird zusätzlich nachgewiesen, daß unter der Voraussetzung $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^n P_w^{Y_i}$ die Ungleichung $|supp(P_w^{Y_i})| \leq 2$ gilt, $1 \leq i \leq n$.
Aus $h)$ erhält man insbesondere, daß in einem vollständigen Aktie/Bond Modell *jede* Auszahlungsfunktion P_w-f.s. beschränkt ist.

Die Äquivalenz $b) \Leftrightarrow e)$ folgt aus Lemma 1.19.

$b) \Rightarrow c) \Rightarrow d)$ ist trivial.

$d) \Rightarrow a)$: Sei C_n P_w-f.s. beschränkt, d.h. es existiere $K > 0$ mit $P_w(|C_n| \leq K) = 1$. Dann existiert nach Voraussetzung ein Hedge $\underset{\sim}{\widehat{H}}$ für $\widehat{C}_n = (C_n + K)1_{\{C_n \geq -K\}}$, und $\underset{\sim}{H}$ mit $H_i = \widehat{H}_i - (0, \alpha_n K)^t$, $i = 0, ..., n-1$, sowie $H_n = \widehat{H}_n = 0$ repliziert C_n.

$f) \Rightarrow a)$: Sei $C_n \geq 0$ P_w-f.s. beschränkt. Dann erfüllt die amerikanische Option mit Auszahlungsprozeß $\underset{\sim}{C} = (0, ..., 0, C_n)$ die Bedingung $C_k \in \mathcal{L}_1(Q)$ für alle $Q \in \mathcal{P}$ und für alle $k \in \{0, ..., n\}$. Da sie nach Voraussetzung hedgebar ist, folgt aus Satz 1.22 und Satz 1.23

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau) = \inf_{Q \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau).$$

Da weiterhin $\sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau)$ für $\tau \equiv n$ angenommen wird, ergibt sich

$$\inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_n C_n) = \sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_n C_n) < \infty,$$

und aus Korollar 1.18 folgt die Hedgebarkeit von C_n. Für P_w-f.s. beschränktes C_n folgt die Absicherbarkeit nun aus der Hedgebarkeit von C_n^+ und C_n^-.

$b) \Rightarrow f)$: Dies ist die Aussage von Korollar 6.24 in [25].

□

Im folgenden wird das Modell nun als *vollständig* bezeichnet, wenn eine der äquivalenten Bedingungen aus Satz 1.28 erfüllt ist.

Beispiel 1.29
Das Binomialmodell, das Cox-Ross-Rubinstein Modell und das deterministisch/dichotome Modell aus Beispiel 1.12 sind jeweils genau dann arbitragefrei und vollständig, wenn die entsprechende Bedingung

a) $0 < d_i < 1 + r_i < u_i < \infty$ *für* $i = 1, ..., n$,

b) $0 < d < 1 + r < u < \infty$,

c) $0 < d_i < 1 + r_i < u_i < \infty$ *für alle* $i \in I$

erfüllt ist.

Die Vollständigkeit des Cox-Ross-Rubinstein Modells wird z.B. in [27] gezeigt, die naheliegende Verallgemeinerung des Beweises für das Binomialmodell befindet sich z.B in [35]; der Nachweis für das deterministisch/dichotome Modell erfolgt analog.

Das Binomialmodell, welches 1979 von John C. Cox, Stephen A. Ross und Mark Rubinstein eingeführt wurde (vgl. [15]), ist von beachtlicher praktischer und theoretischer Bedeutung: Es ist eines der wenigen zeitdiskreten Finanzmarktmodelle, die vollständig sind, und in dem folglich Hedges und faire Preise für beliebige Finanzderivate existieren. Die Cox-Ross-Rubinstein Bewertungsformel wird von Banken zur Optionspreisberechnung verwendet (vgl. z.B. [10], Seite 349: „Binomial option-pricing models are widely used in practice“), darüberhinaus kann das Binomialmodell zur zeitdiskreten Approximation des Black-Scholes Modells und somit zur näherungsweisen Berechnung und Herleitung der Black-Scholes Bewertungsformel verwendet werden (vgl. z.B. [44], Seite 343 ff., [50], Seite 40 ff.).

Nicht nur die Vollständigkeit ist in zeitdiskreten Finanzmarktmodellen „the exception rather than the rule“(vgl. [25], Zeile 16 auf Seite 3); selbst die Hedgebarkeit einer einzigen Sorte von Finanzderivaten, nämlich von europäischen Call-Optionen (bzw. Put-Optionen), geht bei einer Abweichung von der Dichotomie der Faktoren i.a. verloren.

Das folgende Resultat von A. Irle belegt dies für den i.i.d.-Fall:

Satz 1.30 ([34])
Sind im Aktie/Bond Modell die Faktoren nicht-deterministisch, und sind die Annahmen

$$\begin{aligned} a1 &: \; P_w \sim (P_w^{Y_1})^n. \\ a2 &: \; \textit{Das Modell ist arbitragefrei.} \\ a3 &: \; \left\{ \begin{array}{l} E_{Q_1}(A_n - K)^+ = E_{Q_2}(A_n - K)^+ \textit{ für alle } K > 0 \textit{ und alle} \\ \textit{äquivalenten Martingalmaße } Q_1, Q_2. \end{array} \right. \end{aligned}$$

erfüllt, dann ist es ein Cox-Ross-Rubinstein Modell.

Kapitel 2

Untersuchung der Hedgebarkeit von Call- und Put-Optionen

Satz 1.30 hat gezeigt, daß im i.i.d.-Fall i.a. nicht jede europäische Call- bzw. Put-Option hedgebar ist. Hieraus ergibt sich zunächst die Frage nach einer *finanzmathematischen* Begründung (welche in [34] nicht geliefert wird); viel interessanter ist außerdem die Frage, ob lediglich einzelne, überabzählbar viele oder sogar fast alle europäischen Call- und Put-Optionen sowie amerikanischen Call-Optionen nicht absicherbar sind, und ob die Ergebnisse vom i.i.d.-Fall auf den stochastisch unabhängigen Fall (d.h. $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^n P_w^{Y_i}$) übertragbar sind.

Es werden dabei allerdings nur „nicht-triviale" Optionen betrachtet, d.h. nur Calls und Puts, deren Ausübungspreis K die Bedingungen $P_w(A_n > K) > 0$ und $P_w(A_n < K) > 0$ erfüllt.

Mit den Methoden aus [34] lassen sich diese Fragen nicht beantworten, weshalb ein alternativer Ansatz notwendig ist.

Ein intuitiver Erklärungsversuch für arbitragefreie Aktie/Bond Modelle könnte wie folgt aussehen:

1) Die Auszahlungsfunktion $f(A_0 \prod_{i=1}^n Y_i) = (A_0 \prod_{i=1}^n Y_i - K)^+$ einer europäischen Call-Option mit Ausübungspreis K ist konvex und nicht-linear auf $(0, \infty)$.

2) Da jeder Hedge $\underset{\sim}{H}$ die Bedingungen $\alpha_k H_{k-1}^t S_k = E_Q(\alpha_n f(Y_1, ..., Y_n)|\mathcal{F}_k)$ P_w-f.s. für alle $k \in \{1, ..., n\}$ und für alle äquivalenten Martingalmaße Q erfüllen muß, sind die resultierenden Gleichungssysteme überbestimmt und daher nicht lösbar, falls $P_w^{Y_k}$ nicht für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ dichotom ist.

oder

$\widehat{2)}$ Sind die Faktoren nicht P_w-f.s. dichotom, so existieren aufgrund der Konvexität von $\mathcal{P}$ überabzählbar viele äquivalente Martingalmaße. Da f konvex und nicht-linear ist, kann die Bewertung $E_Q(f)$ nicht unter jedem $Q \in \mathcal{P}$ übereinstimmen, was jedoch aus der Existenz eines Hedges folgen würde.

Das folgende Beispiel zeigt jedoch, daß diese Argumentation i.a. nicht hinreichend ist. Es ist nämlich möglich, daß die resultierenden Gleichungssysteme nicht überbestimmt sind, und daß die Bewertung $E_Q(f)$ unter jedem $Q \in \mathcal{P}$ dieselbe ist, obwohl $|\mathcal{P}| = \infty$ gilt:

Beispiel 2.1
Im Aktie/Bond Modell gelte $r_1 = ... = r_n =: r$ *sowie*

$$P_w = R(d,u) \otimes (p_u\delta_u + p_d\delta_d)^{n-1}, \quad 0 < p_u = 1 - p_d < 1.$$

Dann sind für jedes $K \in \{A_0 d^k u^{n-k} : 1 \leq k \leq n-1\}$ *die europäische Call- und Put-Option mit Ausübungspreis* K *absicherbar.*

In diesem Modell erhält man $|\mathcal{P}| = \infty$ aus

$$\mathcal{P} \supset \{W_1 \otimes (q_u\delta_u + q_d\delta_d)^{n-1} : \; W_1 \sim R(d,u), \; E_{Q_1}(id) = 1 + r\}$$

mit $q_u = \frac{1+r-d}{u-d} = 1 - q_d$. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß jede europäische Call-Option mit Ausübungspreis $K \in \{A_0 d^k u^{n-k} : 1 \leq k \leq n-1\}$ absicherbar ist; aus der Zerlegung $(A_n - K)^+ = (A_n - K) + (K - A_n)^+$ und der stets gegebenen Hedgebarkeit von $(A_n - K)$ folgt hieraus sofort die Absicherbarkeit der entsprechenden europäischen Put-Option.
Die Hedgebarkeit eines europäischen Calls mit Auszahlung $C_n = (A_n - K)^+$ ist gemäß Korollar 1.18 äquivalent zu $\underline{a}(C_n) = \overline{a}_n(C_n) < \infty$.
Aus $(A_n - K)^+ \leq A_n$ und $E_Q(A_n) = A_0 B_n < \infty$ für alle $Q \in \mathcal{P}$ erhält man zunächst $\overline{a}_n(C_n) < \infty$.
Satz 4.30 bzw. Theorem 4.33 in Kapitel 4 liefern

$$\overline{a}(C_n) \leq E_{Q_1}(\alpha_n (A_0 \prod_{i=1}^{n} Y_i - K)^+),$$

wobei $Q_1 = (q_u\delta_u + q_d\delta_d)^n$, $q_u = \frac{1+r-d}{u-d} = 1 - q_d$. Mit

$$a_k \;:=\; \binom{n-1}{k} q_u^k q_d^{n-1-k}\left[(A_0 u^k d^{n-1-k} u - K)^+ q_u + (A_0 u^k d^{n-1-k} d - K)^+ q_d\right]$$

läßt sich dieses schreiben als $\overline{a}(C_n) \le \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} a_k$.
Aus Theorem 4.54 in Kapitel 4 ergibt sich weiterhin

$$\underline{a}(C_n) \ge E_{Q_2}(\alpha_n (A_0 \prod_{i=1}^{n} Y_i - K)^+),$$

wobei $Q_2 = \delta_{1+r} \otimes (q_u \delta_u + q_d \delta_d)^{n-1}$ gilt. Dies kann mit der Festlegung

$$b_k \;:=\; \binom{n-1}{k} q_u^k q_d^{n-1-k}(A_0 u^k d^{n-1-k}(1+r) - K)^+$$

ebenfalls in der Form $\underline{a}(C_n) \ge \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} b_k$ geschrieben werden.
Schließlich sei $k_0 \in \{1, ..., n-1\}$ so gewählt, daß $K = A_0 u^{k_0} d^{n-k_0}$ gilt. Dann erhält man $a_k = b_k = 0$ für alle $0 \le k \le k_0 - 1$ und

$$\begin{aligned} a_k &= \binom{n-1}{k} q_u^k q_d^{n-1-k}\left[(A_0 u^k d^{n-1-k} u - K) q_u + (A_0 u^k d^{n-1-k} d - K) q_d\right] \\ &= \binom{n-1}{k} q_u^k q_d^{n-1-k}(A_0 u^k d^{n-1-k}(1+r) - K) \\ &= b_k \end{aligned}$$

für alle $k_0 \le k \le n-1$.

□

Die Annahme $a1: \;\; P_w \sim (P_w^{Y_1})^n$ aus Satz 1.30 wird in [34] interpretiert als maßtheoretische Formulierung der Voraussetzung, daß Aktienkursbewegungen, die in einer Handelsperiode möglich sind, auch in den anderen Handelsperioden möglich sein sollen. Diese Annahme wird im folgenden abgeschwächt zu

$$A_1: \; P_w \sim \bigotimes_{i=1}^{n} P_w^{Y_i}.$$

Auch hier soll eine Interpretation geliefert werden. Da das Maß P_w i.a. *nicht* bekannt ist, wird jeder Agent ein eigenes, *subjektives* Wahrscheinlichkeitsmaß P für seine Entscheidungen zugrundelegen. Da $A1$ äquivalent ist zu

$$\widehat{A1}: \text{ Es existiert } P \sim P_w \text{ mit } P = \bigotimes_{i=1}^{n} P_w^{Y_i},$$

bedeutet $A1$ nun, daß mindestens ein Agent existiert, dessen subjektives Maß zum Maß P_w äquivalent ist, und der von der stochastischen Unabhängigkeit der Aktienkursbewegungen ausgeht.

2.1 Der beschränkte Fall

Zur Beantwortung der eingangs gestellten Fragen wird zunächst der Fall betrachtet, daß die Träger der Faktoren beschränkt sind und jeweils dieselben oberen und unteren Schranken besitzen. Anschließend werden die Aussagen schrittweise verallgemeinert.

Eine deutliche Verschärfung von Satz 1.30 liefert das folgende Theorem: Bereits die Forderung der Hedgebarkeit *einer einzigen* europäischen Call- oder Put-Option oder einer amerikanischen Call-Option kann die Dichotomie der Faktoren implizieren.

Theorem 2.2
Im Aktie/Bond Modell gelte für $i = 1, ..., n$

$$0 < d := \min supp(P_w^{Y_i}) < 1 + r_i < u := \max supp(P_w^{Y_i}) < \infty.$$

Weiterhin seien die folgenden Annahmen erfüllt:

$$A1: \quad P_w \sim \bigotimes_{i=1}^{n} P_w^{Y_i}.$$

$$A2: \quad \begin{cases} \textit{Es existiert eine absicherbare europäische Call- oder Put-Option} \\ \textit{oder eine absicherbare amerikanische Call-Option mit Ausübungs-} \\ \textit{preis } K \in (A_0 d^n, A_0 u^n) \backslash \{A_0 d^k u^{n-k} : 1 \le k \le n-1\}. \end{cases}$$

Dann folgt $supp(P_w) = \{d, u\}^n$*, d.h. es liegt ein Binomialmodell mit Parametern* d, u *und* $r_1, ..., r_n$ *vor.*

Schon bei Abweichung *eines einzigen* Faktors von der Dichotomie existieren demnach unter den Voraussetzungen von Theorem 2.2 *höchstens* $n-1$ „nicht-triviale" absicherbare europäische Put- und Call- sowie amerikanische Call-Optionen.

Korollar 2.3
Im Aktie/Bond Modell seien $Y_1, ..., Y_n$ *stochastisch unabhängig unter* P_w *(oder unter einem zu* P_w *äquivalenten Maß), und es gelte für* $i = 1, ..., n$

$$0 < d = \min supp(P_w^{Y_i})\} < 1 + r_i < u = \max supp(P_w^{Y_i})\} < \infty.$$

a) *In diesem Modell ist eine europäische Call- oder Put-Option oder eine amerikanische Call-Option mit Ausübungspreis* $K \in (A_0d^n, A_0u^n) \setminus \{A_0d^ku^{n-k} : 1 \leq k \leq n-1\}$ *genau dann absicherbar, wenn es ein Binomialmodell mit Parametern* d, u *und* $r_1, ..., r_n$ *ist.*

b) *In diesem Modell existieren genau dann mindestens* n *absicherbare europäische Call- oder Put-Optionen oder amerikanische Call-Optionen mit verschiedenen Ausübungspreisen* $K_1, ..., K_n \in (A_0d^n, A_0u^n)$*, wenn es ein Binomialmodell mit Parametern* d, u *und* $r_1, ..., r_n$ *ist.*

Zum Beweis von Theorem 2.2 werden zunächst einige Hilfslemmata benötigt:

Lemma 2.4
Im Aktie/Bond Modell sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) *Die europäische Call-Option mit Ausübungspreis* K *ist hedgebar.*

b) *Die europäische Put-Option mit Ausübungspreis* K *ist hedgebar.*

c) *Die amerikanische Call-Option mit Ausübungspreis* K *ist hedgebar.*

Beweis: *a*) $\Leftrightarrow$ *b*) folgt sofort aus der Zerlegung $(A_n - K)^+ = (A_n - K) + (K - A_n)^+$ und der Absicherbarkeit von $(A_n - K)$ durch das Portfolio $\underset{\sim}{H}$ mit $H_i = (1, -K\alpha_n)^t$, $0 \leq i \leq n-1$, und $H_n = 0$.
a) $\Leftrightarrow$ *c*) Zunächst wird die folgende Aussage gezeigt:

Hilfsbehauptung:
Ist f *eine konvexe Funktion mit* $f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$ *für alle* $0 < \lambda < 1$*, so ist* $(\alpha_k f(A_k))_{0 \leq k \leq n}$ *ein Submartingal bezüglich* $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$*. Hinreichend für* $f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$ *für alle* $0 < \lambda < 1$ *ist* $f(0) \leq 0$*.*

Beweis der Hilfsbehauptung: Die Jensensche Ungleichung für bedingte Erwartungswerte (vgl. Korollar 56.7 in [4]) liefert für $Q \in \mathcal{P}$ und $k \in \{1, ..., n\}$

$$\begin{aligned} E_Q(\alpha_k f(A_k)|\mathcal{F}_{k-1}) &\geq \alpha_k f(E_Q(A_k|\mathcal{F}_{k-1})) \\ &= \alpha_k f((1+r_k)A_{k-1}) \\ &= \frac{\alpha_{k-1}}{1+r_k} f((1+r_k)A_{k-1}) \\ &\geq \alpha_{k-1} f(A_{k-1}) \quad Q\text{-f.s.}. \end{aligned}$$

□

Für den amerikanischen Call, dessen konvexe Auszahlungsfunktion $f(x) = (x - K)^+$ die Bedingung $f(0) = 0$ erfüllt, folgt nun aus der Hilfsbehauptung und dem

Optional Sampling Theorem (vgl. Satz 11.17 in [57])

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau) = E_Q(\alpha_n C_n)$$

für alle $Q \in \mathcal{P}$. Da weiterhin $\sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(C_n) \leq \sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(A_n) = B_n < \infty$ gilt, ergibt sich aus Korollar 1.18, Satz 1.22 und 1.23 die Äquivalenz von a) und c).

$\square$

Lemma 2.5
Für $x, y, 1+r$ und K mit $0 < x < 1+r < y < \infty$ bezeichne $a(x, y, K)$ den Ausübungspreis einer europäischen Call-Option mit Ausübungspreis K in einem Ein-Perioden Binomialmodell mit Parametern x, y, r. Weiterhin sei $a(1+r, K)$ der faire Preis der Option in einem deterministischen Ein-Perioden Modell mit Parameter $1+r$. Schließlich sei $A_0 > 0$ der Anfangsaktienkurs.

a) Für alle $0 < d < e < 1+r < u < \infty$ und alle K mit $dA_0 < K < uA_0$ gilt $a(e, u, K) < a(d, u, K)$.

b) Für alle $0 < d < 1+r < e < u < \infty$ und alle K mit $dA_0 < K < uA_0$ gilt $a(d, e, K) < a(d, u, K)$.

c) Für alle $0 < d < 1+r < u < \infty$ und alle K mit $dA_0 < K < uA_0$ gilt $a(1+r, K) < a(d, u, K)$.

Beweis: Ohne Einschränkung gelte $A_0 = 1$. Es sei $f(x) = (x-K)^+$ die Auszahlungsfunktion des Calls.

a) Die Ungleichung $a(d, u, K) > a(e, u, K)$ ist äquivalent zu $E_Q(f) > E_{\widehat{Q}}(f)$, mit $Q = q_u\delta_u + q_d\delta_d$, $\widehat{Q} = \widehat{q}_u\delta_u + q_e\delta_e$, $q_u = 1 - q_d = \frac{1+r-d}{u-d}$, $\widehat{q}_u = 1 - q_e = \frac{1+r-e}{u-e}$. Anschaulich entspricht dies der Aussage, daß der Punkt $P_1 = (uq_u + dq_d, f(u)q_u + f(d)q_d) = (1+r, f(u)q_u + f(d)q_d)$ in Abbildung 1 echt oberhalb des Punktes $P_2 = (1+r, f(u)\widehat{q}_u + f(e)q_e)$ liegt:

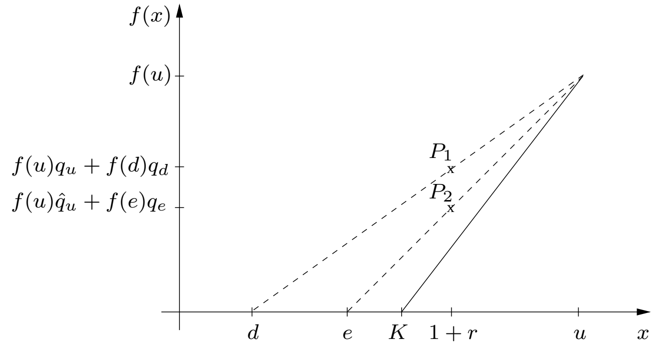

Abb. 1

Die Ungleichung $E_Q(f) > E_{\widehat{Q}}(f)$ wiederum ist äquivalent zu

$$(u-K)\frac{1+r-d}{u-d} > (u-K)\frac{1+r-e}{u-e} + (e-K)^+\frac{u-(1+r)}{u-e}. \qquad (\star)$$

Im Falle $e \leq K$ ist $(\star)$ äquivalent zu $e > d$, und für $e > K$ ist $(\star)$ äquivalent zu $K > d$. Diese Bedingungen sind aber trivialerweise erfüllt.

b) Die Ungleichung $a(d,u,K) > a(d,e,K)$ ist äquivalent zu $E_Q(f) > E_{\overline{Q}}(f)$, wobei Q wie in *i*) definiert und $\overline{Q} := \overline{q}_d\delta_d + \overline{q}_e\delta_e$, $\overline{q}_e = \frac{1+r-d}{e-d} = 1 - \overline{q}_d$ ist. Anschaulich ist zu zeigen, daß P_1 in Abbildung 2 echt oberhalb von P_2 liegt:

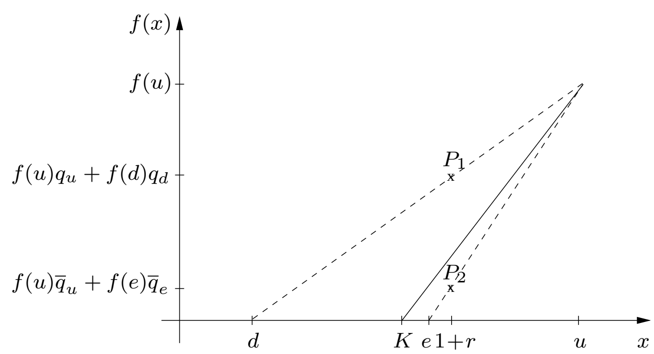

Abb. 2

Der Fall $e \leq K$ ist trivial. Falls $e > K$ gilt, so ist $E_Q(f) > E_{\overline{Q}}(f)$ äquivalent zu $K > d$.

c) Der faire Preis $a(1+r,K)$ beträgt $f(1+r)$; demnach ist zu zeigen, daß $f(u)q_u + f(d)q_d > f(1+r)$ gilt, d.h. P_1 in Abbildung 3 liegt echt oberhalb von P_2:

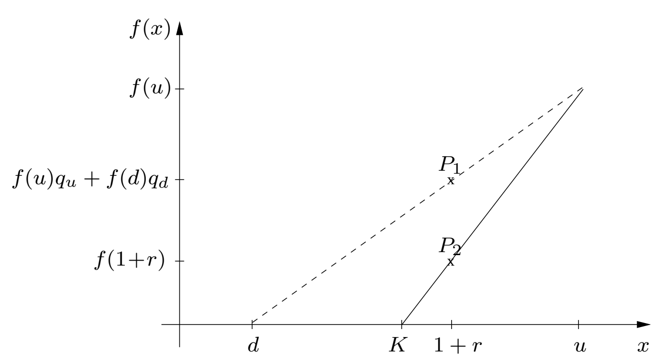

Abb. 3

Der Fall $K \geq 1+r$ ist trivial. Für $K < 1+r$ ist $f(u)q_u + f(d)q_d > f(1+r)$ äquivalent zu $K > d$.

$\square$

Lemma 2.6
Sei P ein nicht-deterministisches Wahrscheinlichkeitsmaß auf $((0,\infty),\mathbb{B}_{|(0,\infty)})$. Dann gilt:

a) Für alle $0<d,u\in supp(P)$ mit $d<u<\infty$ und für alle $\rho\in(d,u)$ existiert eine Folge $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $((0,\infty),\mathbb{B}_{|(0,\infty)})$ mit

i) $P_k\sim P$ für alle $k\in\mathbb{N}$,

ii) $E_{P_k}(id)=\rho$ für alle $k\in\mathbb{N}$,

iii) $P_k\xrightarrow{w}P_0=q_u\delta_u+q_d\delta_d$, mit $q_u=\frac{\rho-d}{u-d}=1-q_d$.

b) Für alle $\rho\in supp(P)\cap(0,\infty)$ existiert eine Folge $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $((0,\infty),\mathbb{B}_{|(0,\infty)})$, die a i), a ii) und

iii) $P_k\xrightarrow{w}P_0=\delta_\rho$.

erfüllt.

Beweis: Im Falle $E_P(id)=\infty$ wird das W-Maß P_1 betrachtet, definiert durch $dP_1=f\,dP$ mit
$$f(x)=\frac{e^{-x}}{E_P(e^{-id})}.$$
Wegen $P_1\sim P$ und
$$E_{P_1}(id)=\frac{1}{E_P(e^{-id})}\cdot\int_{(0,\infty)}xe^{-x}\,P(dx)\le\frac{1}{eE_P(e^{-id})}<\infty$$
kann o.B.d.A. $E_P(id)<\infty$ angenommen werden.

Gilt weiterhin $E_P(id)\neq\rho$, so betrachte man das W-Maß
$$P_2(\cdot)=\gamma_1P(\,\cdot\cap(0,\rho])+\gamma_2P(\,\cdot\cap(\rho,\infty)),$$
wobei $\gamma_1,\gamma_2\in(0,\infty)$ die eindeutig bestimmten Lösungen von
$$\gamma_1P((0,\rho])+\gamma_2P((\rho,\infty))=1\quad\wedge\quad\gamma_1\int_{(0,\rho]}id\,dP+\gamma_2\int_{(\rho,\infty)}id\,dP=\rho$$
sind. Wegen $P_2\sim P$ und $E_{P_2}(id)=\rho$ kann man nun ohne Einschränkung $E_P(id)=\rho$ annehmen.

$a)$: Für $k\in\mathbb{N}$ seien
$$D_k:=\big(d-\frac{d}{3k},d+\frac{\rho-d}{3k}\big),\;\;U_k:=\big(u-\frac{u-\rho}{3k},u+\frac{1}{3k}\big),\;\;R_k:=(0,\infty)\backslash(D_k\cup U_k),$$
$$\begin{array}{lll}p_{d,k}:=P(D_k), & p_{u,k}:=P(U_k), & p_{r,k}:=P(R_k),\\ c_{d,k}:=\int_{D_k}id\;dP, & c_{u,k}:=\int_{U_k}id\;dP, & c_{r,k}:=\int_{R_k}id\;dP.\end{array}$$

Weiterhin seien $\gamma_{d,k}$ und $\gamma_{u,k}$ die (eindeutig bestimmten) Lösungen von

$$\gamma_{d,k}\, p_{d,k} + \gamma_{u,k}\, p_{u,k} + \frac{1}{k}\, p_{r,k} = 1 \quad \wedge \quad \gamma_{d,k}\, c_{d,k} + \gamma_{u,k}\, c_{u,k} + \frac{1}{k}\, c_{r,k} = \rho,$$

d.h.

$$\begin{aligned}
\gamma_{d,k} &= \frac{(1 - \frac{1}{k}\, p_{r,k})\, c_{u,k} - (\rho - \frac{1}{k}\, c_{r,k})\, p_{u,k}}{c_{u,k}\, p_{d,k} - c_{d,k}\, p_{u,k}}, \\
\gamma_{u,k} &= \frac{(\rho - \frac{1}{k}\, c_{r,k}) p_{d,k} - (1 - \frac{1}{k}\, p_{r,k}) c_{d,k}}{c_{u,k}\, p_{d,k} - c_{d,k}\, p_{u,k}}.
\end{aligned}$$

Zum Beweis der Ungleichung $0 < \gamma_1, \gamma_2 < \infty$ wird zunächst

i) $c_{u,k}\, p_{d,k} - c_{d,k}\, p_{u,k} > 0$,

ii) $(1 - \frac{1}{k}\, p_{r,k})\, c_{u,k} - (\rho - \frac{1}{k}\, c_{r,k})\, p_{u,k} > 0$,

iii) $(\rho - \frac{1}{k}\, c_{r,k}) p_{d,k} - (1 - \frac{1}{k}\, p_{r,k}) c_{d,k} > 0$

gezeigt.

i) Wegen $c_{u,k} \geq (u - \frac{u-\rho}{3k}) p_{u,k}$ und $c_{d,k} \leq (d + \frac{\rho-d}{3k}) p_{d,k}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
c_{u,k}\, p_{d,k} - c_{d,k}\, p_{u,k} &\geq (u - \frac{u-\rho}{3k}) p_{u,k} p_{d,k} - (d + \frac{\rho - d}{3k}) p_{d,k}\, p_{u,k} \\
&= p_{u,k} p_{d,k} (u - d) \frac{3k-1}{3k} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

ii) Mit $c_{r,k} = \rho - c_{d,k} - c_{u,k}$ und $p_{r,k} = 1 - p_{d,k} - p_{u,k}$ sieht man leicht, daß

$$\begin{aligned}
(1 - \frac{1}{k}\, p_{r,k})\, c_{u,k} - (\rho - \frac{1}{k}\, c_{r,k})\, p_{u,k} &= c_{u,k} - \rho p_{u,k} + \frac{1}{k}(c_{r,k} p_{u,k} - c_{u,k} p_{r,k}) \\
&= c_{u,k} - \rho p_{u,k} + \frac{1}{k}(\rho p_{u,k} - c_{u,k}) \\
&\qquad + \frac{1}{k}(c_{u,k} p_{d,k} - c_{d,k} p_{u,k}) \\
&\overset{i)}{>} c_{u,k} - \rho p_{u,k} + \frac{1}{k}(\rho p_{u,k} - c_{u,k}) \\
&= (c_{u,k} - \rho p_{u,k})(\frac{k-1}{k}) \\
&\geq [(u - \frac{u-\rho}{3k}) p_{u,k} - \rho p_{u,k}] \frac{k-1}{k} \\
&\geq [\rho p_{u,k} - \rho p_{u,k}] \frac{k-1}{k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

gilt.

iii) Folgt analog zu ii).

Für $k \in \mathbb{N}$ definiert man nun das W-Maß P_k durch

$$P_k(\cdot) = \gamma_{d,k} P(\cdot \cap D_k) + \gamma_{u,k} P(\cdot \cap U_k) + \frac{1}{k} P(\cdot \cap R_k).$$

Dann erfüllt $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ offensichtlich *i)* und *ii)*, und es bleibt $P_k \xrightarrow{w} P_0$ zu zeigen. Dabei werde die Verteilungsfunktion von P_k mit F_k bezeichnet. Zum Nachweis von $\lim\limits_{k \to \infty} F_k(x) = F_0(x)$ für alle $x \in \mathcal{C}(F_0) = \mathbb{R} \backslash \{d, u\}$ werden drei Fälle unterschieden:

$\underline{x > u:}$ Es existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \in [u + \frac{1}{3k_0}, \infty)$, und für $k \geq k_0$ erhält man

$$1 \geq F_k(x) \geq P_k(D_k \cup U_k) = 1 - P_k(R_k) = 1 - \frac{1}{k},$$

woraus $\lim\limits_{k \to \infty} F_k(x) = 1 = F_0(x)$ folgt.

$\underline{x < d:}$ Es existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \in (-\infty, d - \frac{d}{3k_0}]$. Dann gilt für $k \geq k_0$

$$0 \leq F_k(x) \leq P_k(R_k) = \frac{1}{k},$$

was $\lim\limits_{k \to \infty} F_k(x) = 0 = F_0(x)$ impliziert.

$\underline{d < x < u}$: Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, daß $x \in (d + \frac{\rho - d}{3k_0}, u - \frac{u - \rho}{3k_0})$ gilt. Dann folgt für $k \geq k_0$

$$\begin{aligned}
F_k(x) &\leq P_k(D_k) + P_k(R_k) \\
&= \gamma_{d,k} p_{d,k} + \frac{1}{k} \\
&\leq \frac{\big(u + \frac{u-\rho}{3k}\big) p_{u,k} - \big(\rho - \frac{1}{k}(\rho - c_{u,k} - c_{d,k})\big) p_{u,k}}{(u - \frac{u-\rho}{3k}) p_{u,k} p_{d,k} - (d + \frac{\rho - d}{3k}) p_{d,k} p_{u,k}} \cdot p_{d,k} + \frac{1}{k} \\
&= \frac{(u + \frac{u-\rho}{3k}) - \rho(1 - \frac{1}{k}) - \frac{c_{u,k}}{k} - \frac{c_{d,k}}{k}}{(u - \frac{u-\rho}{3k}) - (d + \frac{\rho-d}{3k})} + \frac{1}{k} =: b_k
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
F_k(x) &\geq P_k(D_k) \\
&= \gamma_{d,k} p_{d,k} \\
&\geq \frac{(1 - \frac{1}{k}) c_{u,k} - \rho p_{u,k}}{(u + \frac{u-\rho}{3k}) p_{u,k} p_{d,k} - (d - \frac{\rho-d}{3k}) p_{d,k} p_{u,k}} \cdot p_{d,k} \\
&\geq \frac{(1 - \frac{1}{k})(u - \frac{u-\rho}{3k}) - \rho}{(u + \frac{u-\rho}{3k}) - (d - \frac{\rho-d}{3k})} =: a_k.
\end{aligned}$$

Schließlich liefert $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \frac{u-\rho}{u-d}$ das Ergebnis $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(x) = F_0(x)$.

$b)$: Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{array}{lll} L_k := (\rho - \frac{\rho}{2k}, \rho), & R_k := [\rho, \rho + \frac{\rho}{2k}), & A_k := (0,\infty)\backslash(R_k \cup L_k), \\ p_{l,k} := P(L_k), & p_{r,k} := P(R_k), & p_{a,k} := P(A_k), \\ c_{l,k} := \int_{L_k} id\; dP, & c_{r,k} := \int_{R_k} id\; dP, & c_{a,k} := \int_{A_k} id\; dP. \end{array}$$

Weiterhin seien $w_{l,k},\ w_{r,k} \in (0,\infty)$ die (eindeutig bestimmten) Lösungen von

$$\begin{array}{rcl} w_{l,k}\, p_{l,k} + w_{r,k}\, p_{r,k} + \dfrac{1}{k}\, p_{a,k} & = & 1, \\ w_{l,k}\, c_{l,k} + w_{r,k}\, c_{r,k} + \dfrac{1}{k} c_{a,k} & = & \rho, \end{array}$$

d.h.

$$\begin{array}{rcl} w_{l,k} & = & \dfrac{(1 - \frac{1}{k}\, p_{a,k})\, c_{r,k} - (\rho - \frac{1}{k}\, c_{a,k})\, p_{r,k}}{c_{r,k}\, p_{l,k} - c_{l,k}\, p_{r,k}}, \\ w_{r,k} & = & \dfrac{(\rho - \frac{1}{k}\, c_{a,k})\, p_{l,k} - (1 - \frac{1}{k}\, p_{a,k})\, c_{l,k}}{c_{r,k}\, p_{l,k} - c_{l,k}\, p_{r,k}}. \end{array}$$

Analog zu $a)$ definiert man P_k durch $P_k(\cdot) = w_{l,k}\, P(\cdot \cap L_k) + w_{r,k}\, P(\cdot \cap R_k) + \frac{1}{k}\, P(\cdot \cap A_k)$. Die Forderungen $P_k \sim P$ und $E_{P_k}(id) = \rho$ sind dann offensichtlich erfüllt, und es bleibt zu zeigen, daß $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(x) = 1_{[\rho,\infty)}(x)$ für alle $x \neq \rho$ erfüllt ist.

$\underline{x < \rho}$: Sei k_0 so groß gewählt, daß $x < \rho - \frac{\rho}{2k_0}$ gilt. Dann erhält man für $k \geq k_0$

$$0 \leq F_k(x) \leq P_k(A_k) = \frac{1}{k}\, p_{a,k} \leq \frac{1}{k},$$

woraus $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(x) = 0 = 1_{[\rho,\infty)}(x)$ folgt.

$\underline{x > \rho}$: Man wähle k_0 so groß, daß $\rho + \frac{\rho}{2k_0} < x$ gilt. Dann ergibt sich

$$1 \geq F_k(x) \geq P_k(L_k \cup R_k) = 1 - P_k(A_k) = 1 - \frac{1}{k}\, p_{a,k} \geq 1 - \frac{1}{k},$$

was $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(x) = 1 = 1_{[\rho,\infty)}(x)$ impliziert.

$\square$

Beweis von Theorem 2.2: Als erstes wird die Existenz einer Folge $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von äquivalenten Martingalmaßen mit

$$W_k \xrightarrow{w} Q_0 = \bigotimes_{i=1}^{n} (q_{u,i}\delta_u + q_{d,i}\delta_d)$$

gezeigt, wobei $q_{u,i} = \frac{1+r_i-d}{u-d} = 1 - q_{d,i}$ gilt.

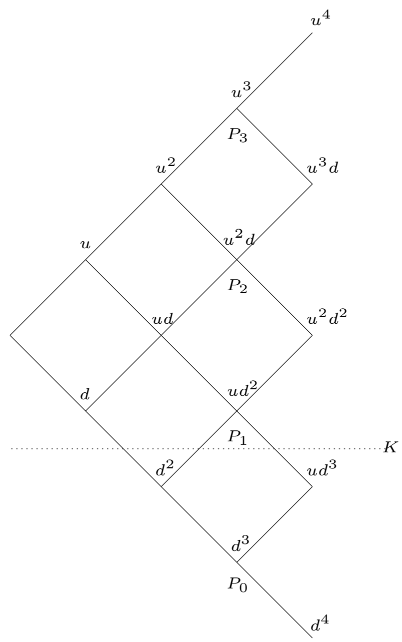

Abb. 4:
Massetragende Pfade des Aktienpreisprozesses unter Q_0 im Fall $n = 4$

Gemäß Lemma 2.6 existiert für alle $1 \leq i \leq n$ eine Folge $(W_{i,k})_{k\in\mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen mit

i) $W_{i,k} \sim P_w^{Y_i}$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

ii) $E_{W_{i,k}}(id) = 1 + r_i$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

iii) $W_{i,k} \xrightarrow{w} (q_{u,i}\delta_u + q_{d,i}\delta_d)$.

Dann bildet $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $W_k := \bigotimes_{i=1}^{n} W_{i,k}$ die gesuchte Folge von äquivalenten Martingalmaßen.

Aus Annahme $A2$ folgt gemäß Lemma 2.4 die Existenz einer absicherbaren europäischen Call-Option mit Ausübungspreis $K \in (A_0d^n, A_0u^n)\backslash\{A_0d^ku^{n-k} : 1 \leq k \leq n-1\}$. Ihre Auszahlungsfunktion $f(y_1, ..., y_n) = (A_0 \prod_{i=1}^{n} y_i - K)^+$ ist stetig und P_w-f.s. beschränkt, daher folgt aus $W_k \xrightarrow{w} Q_0$

$$\lim_{k\to\infty} E_{W_k}(f) = E_{Q_0}(f).$$

Aus der Hedgebarkeit der Call-Option erhält man zusammen mit Korollar 1.18 $E_{W_k}(f) = E_{W_1}(f)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und damit schließlich

$$E_Q(f) = E_{W_1}(f) = \lim_{k\to\infty} E_{W_k}(f) = E_{Q_0}(f) \qquad (\star)$$

für alle $Q \in \mathcal{P}$.

Zum Beweis von Theorem 2.2 wird die folgende Annahme zum Widerspruch geführt:

<u>Annahme:</u> Es existiert ein $i_0 \in \{1, ..., n\}$ mit $|supp(P_w^{Y_{i_0}})| \geq 3$, d.h. es existiert ein $i_0 \in \{1, ..., n\}$ und $e \in (d, u)$ mit $supp(P_w^{Y_{i_0}}) \supset \{d, e, u\}$.

Hierbei sind drei Fälle zu betrachten:

$\underline{d < e < 1 + r_{i_0}:}$ Lemma 2.6 liefert für $1 \leq i \leq n$ die Existenz einer Folge von W-Maßen $(\widehat{W}_{i,k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

i) $\widehat{W}_{i,k} \sim P_w^{Y_i}$ für alle i, k,

ii) $E_{\widehat{W}_{i,k}}(id) = 1 + r_i$ für alle i, k,

iii) $\widehat{W}_{i,k} \xrightarrow{w} \left\{ \begin{array}{ll} (q_{u,i}\delta_u + q_{d,i}\delta_d), & i \neq i_0 \\ (\widehat{q}_{u,i_0}\delta_u + \widehat{q}_{e,i_0}\delta_e), & i = i_0 \end{array} \right\}$ mit $\widehat{q}_{u,i_0} = \frac{1+r_{i_0}-e}{u-e} = 1 - \widehat{q}_{e,i_0}$.

Dann ist $(\widehat{W}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\widehat{W}_k = \bigotimes_{i=1}^n \widehat{W}_{i,k}$ eine Folge von äquivalenten Martingalmaßen, die

$$\widehat{W}_k \xrightarrow{w} Q_1 = \bigotimes_{i=1}^{i_0-1}(q_{u,i}\delta_u + q_{d,i}\delta_d) \otimes (\widehat{q}_{u,i_0}\delta_u + \widehat{q}_{e,i_0}\delta_e) \otimes \bigotimes_{i=i_0+1}^{n}(q_{u,i}\delta_u + q_{d,i}\delta_d)$$

erfüllt. Mit derselben Argumentation wie oben folgt $E_Q(f) = E_{Q_1}(f)$ für alle $Q \in \mathcal{P}$, und zusammen mit $(\star)$ ergibt sich

$$E_{Q_1}(f) = E_{Q_0}(f). \qquad (\star\star)$$

Da f invariant unter Koordinatenpermutationen ist (d.h. es gilt $f(y_1, ..., y_n) = f(y_{\pi(1)}, ..., y_{\pi(n)})$ für alle Permutationen π), erhält man $E_{\widehat{Q}_1}(f) = E_{Q_1}(f) = E_{Q_0}(f) = E_{\widehat{Q}_0}(f)$ mit

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_0 &= \bigotimes_{i\neq i_0}(q_{u,i}\delta_{u,i} + q_{d,i}\delta_d) \otimes (q_{u,i_0}\delta_u + q_{d,i_0}\delta_d) \\ \widehat{Q}_1 &= \bigotimes_{i\neq i_0}(q_{u,i}\delta_{u,i} + q_{d,i}\delta_d) \otimes (\widehat{q}_{u,i_0}\delta_u + \widehat{q}_{e,i_0}\delta_e). \end{aligned}$$

Es kann also o.B.d.A. $i_0 = n$ angenommen werden; andernfalls betrachte man $\widehat{Q}_0$ bzw. $\widehat{Q}_1$ anstelle von Q_0 bzw. Q_1 und vertausche r_{i_0} und r_n.

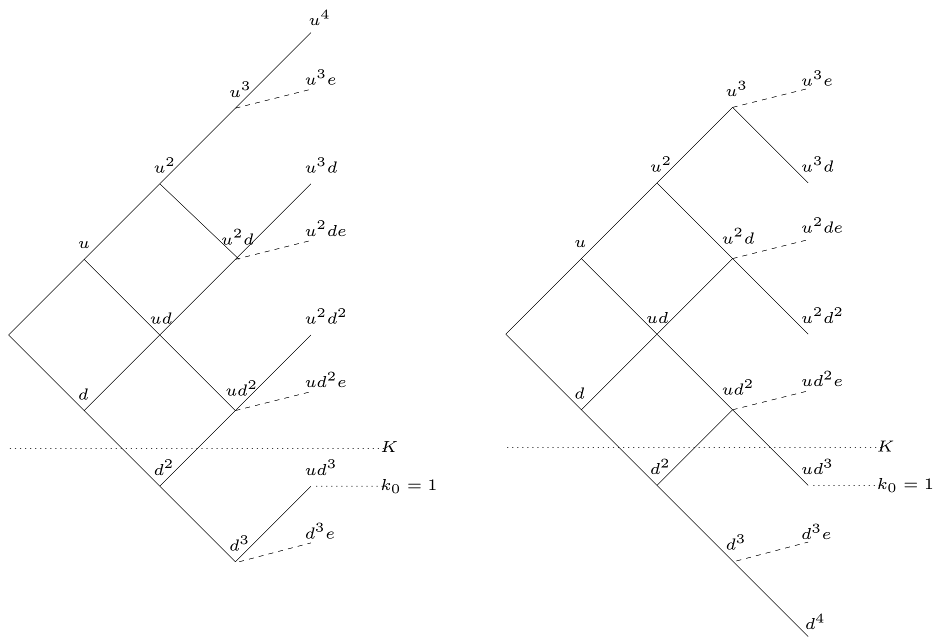

Abb. 5: Massetragende Pfade des Aktienpreisprozesses unter Q_1 bzw. Q_2 im Fall $i_0 = n = 4$

Die Erwartungswerte $E_{Q_1}(f)$ und $E_{Q_0}(f)$ lassen sich nun schreiben als

$$E_{Q_0}(f) = \sum_{(x_1,...,x_{n-1})\in\{d,u\}^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i,i} \cdot a_0(x_1,...,x_{n-1})$$

und

$$E_{Q_1}(f) = \sum_{(x_1,...,x_{n-1})\in\{d,u\}^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i,i} \cdot a_1(x_1,...,x_{n-1})$$

mit

$$\begin{aligned} a_0(x_1,...,x_{n-1}) &= \big(A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot u - K\big)^+ \cdot q_{u,n} + \big(A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot d - K\big)^+ \cdot q_{d,n}, \\ a_1(x_1,...,x_{n-1}) &= \big(A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot u - K\big)^+ \cdot \widehat{q}_{u,n} + \big(A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot e - K\big)^+ \cdot \widehat{q}_{e,n}. \end{aligned}$$

Sei nun $k_0 \in \{1,...,n-1\}$ so gewählt, daß $A_0 u^{k_0} d^{n-k_0} < K < A_0 u^{k_0+1} d^{n-k_0-1}$ gilt. Für $(x_1,...,x_{n-1}) \in \{d,u\}^{n-1}$ mit $\prod_{i=1}^{n-1} x_i \le u^{k_0-1} d^{n-k_0}$ folgt dann

$$a_0(x_1,...,x_{n-1}) = 0 = a_1(x_1,...,x_{n-1}).$$

Weiter ergibt sich für $(x_1, ..., x_{n-1}) \in \{d, u\}^{n-1}$ mit $\prod_{i=1}^{n-1} x_i \geq u^{k_0+1} d^{n-k_0-2}$

$$\begin{aligned}
a_0(x_1, ..., x_{n-1}) &= (A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot u - K) \cdot q_{u,n} + (A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot d - K) \cdot q_{d,n} \\
&= A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot (u q_{u,n} + d q_{d,n}) - K \\
&= A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot (1 + r_n) - K \\
&= A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot (u \widehat{q}_{u,n} + e \widehat{q}_{e,n}) - K \\
&= (A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot u - K) \cdot \widehat{q}_{u,n} + (A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot e - K) \cdot \widehat{q}_{e,n} \\
&= a_1(x_1, ..., x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Für $(x_1, ..., x_{n-1}) \in \{d, u\}^{n-1}$ mit $\prod_{i=1}^{n-1} x_i = u^{k_0} d^{n-k_0-1}$ gilt die Ungleichung $A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot d < K < A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot u$. Mit $L := K/(u^{k_0} d^{n-k_0-1}) \in (A_0 d, A_0 u)$ ergibt sich für diese $(x_1, ..., x_{n-1})$ schließlich unter Verwendung von Lemma 2.5 a)

$$\begin{aligned}
a_0(x_1, ..., x_{n-1}) &= (A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot u - K) \cdot q_{u,n} \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot (A_0 u - L) \cdot q_{u,n} \\
&\overset{2.5\,a)}{>} \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot [(A_0 u - L) \cdot \widehat{q}_{u,n} + (A_0 e - L)^+ \cdot \widehat{q}_{e,n}] \\
&= (A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot u - K) \cdot \widehat{q}_{u,n} + (A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot e - K)^+ \cdot \widehat{q}_{e,n} \\
&= a_1(x_1, ..., x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt hieraus $E_{Q_0}(f) > E_{Q_1}(f)$, also ein Widerspruch zu $(\star\star)$.

$\underline{1 + r_{i_0} < e < u}$: Mit derselben Argumentation wie im Fall $d < e < 1 + r_{i_0}$ erhält man $E_{Q_0}(f) = E_{Q_2}(f)$, wobei

$$Q_2 = \bigotimes_{i=1}^{i_0-1} (q_{u,i}\delta_u + q_{d,i}\delta_d) \otimes (\widehat{q}_{e,i_0}\delta_e + \widehat{q}_{d,i_0}\delta_d) \otimes \bigotimes_{i=i_0+1}^{n} (q_{u,i}\delta_u + q_{d,i}\delta_d)$$

mit $\widehat{q}_{e,i_0} = \frac{1+r_{i_0}-d}{e-d} = 1 - \widehat{q}_{d,i_0}$ gilt. Auch in diesem Fall kann wieder o.B.d.A. $i_0 = n$ gesetzt werden, d.h.

$$Q_2 = \bigotimes_{i=1}^{n-1} (q_{u,i}\delta_u + q_{d,i}\delta_d) \otimes (\widehat{q}_{e,n}\delta_e + \widehat{q}_{d,n}\delta_d)$$

(vgl. Abb. 5). Weiter gilt

$$E_{Q_2}(f) = \sum_{(x_1,...,x_{n-1}) \in \ \{d,u\}^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i,i} \cdot a_2(x_1, ..., x_{n-1})$$

mit

$$a_2(x_1, ..., x_{n-1}) = \big(A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot e - K\big)^+ \cdot \widehat{q}_{e,n} + \big(A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot d - K\big)^+ \cdot \widehat{q}_{d,n}.$$

Ersetzt man in obiger Rechnung $a_1(x_1, ..., x_{n-1})$ durch $a_2(x_1, ..., x_{n-1})$, so ergibt sich analog die Gleichung $a_0(x_1, ..., x_{n-1}) = a_2(x_1, ..., x_{n-1})$ für alle $(x_1, ..., x_{n-1}) \in \{d, u\}^{n-1}$ mit $\prod_{i=1}^{n-1} x_i \neq u^{k_0} d^{n-k_0-1}$, und für alle $(x_1, ..., x_{n-1}) \in \{d, u\}^{n-1}$ mit $\prod_{i=1}^{n} x_i = u^{k_0} d^{n-k_0-1}$ folgt aus Lemma 2.5 b) die Ungleichung $a_0(x_1, ..., x_{n-1}) > a_2(x_1, ..., x_{n-1})$. Hieraus erhält man $E_{Q_0}(f) > E_{Q_2}(f)$, also einen Widerspruch zu $E_{Q_0}(f) = E_{Q_2}(f)$.

$\underline{e = 1 + r_{i_0}\ :}$ Analog zum ersten Fall ergibt sich $E_{Q_0}(f) = E_{Q_3}(f)$ mit

$$Q_3 = \bigotimes_{i=1}^{i_0-1} (q_{u,i}\delta_u + q_{d,i}\delta_d) \otimes \delta_{1+r_{i_0}} \otimes \bigotimes_{i=i_0+1}^{n} (q_{u,i}\delta_u + q_{d,i}\delta_d).$$

Auch hier kann wieder o.B.d.A. $i_0 = n$ gewählt werden, so daß

$$E_{Q_3}(f) = \sum_{(x_1,...,x_{n-1}) \in \ \{d,u\}^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i,i} \cdot a_3(x_1, ..., x_{n-1})$$

mit $a_3(x_1, ..., x_{n-1}) = \big(A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot (1+r_n) - K\big)^+$ gilt. Analog zu obiger Rechnung ergibt sich unter Verwendung von Lemma 2.5 c) der Widerspruch $E_{Q_0}(f) > E_{Q_3}(f)$.

Insgesamt führt die Annahme in jedem Fall zu einem Widerspruch, so daß die Aussage von Theorem 2.2 bewiesen ist.

$\square$

Eine naheliegende Frage besteht nun darin, ob die Aussage von Theorem 2.2 gültig bleibt, wenn man die Annahme $A1$ durch die (gemäß Lemma 1.11 aus ihr resultierende) schwächere Annahme

$$B1: \text{ Das Modell ist arbitragefrei}$$

ersetzt. Die negative Antwort liefert das folgende Beispiel: Es ist unter den Voraussetzungen von Theorem 2.2 möglich, daß die Annahmen $B1$ und $A2$ erfüllt sind, obwohl kein Binomialmodell vorliegt.

Beispiel 2.7
Sei $k_0 \in \{0, ..., n-1\}$, $0 < d < 1 + r_i < u < \infty$ für alle $1 \leq i \leq n$, und es sei $0 < p_u = 1 - p_d < 1$. Weiter gelte $P_w^{(Y_1,...,Y_{n-1})} = (p_u\delta_u + p_d\delta_d)^{n-1}$ sowie für alle $(y_1, ..., y_{n-1}) \in (0, \infty)^{n-1}$

$$P_w^{Y_n|(Y_1,...,Y_{n-1})=(y_1,...,y_{n-1})} = \begin{cases} R(d,u), & \textit{falls } \prod_{i=1}^{n} y_i \neq u^{k_0} d^{n-1-k_0}, \\ p_u\delta_u + p_d\delta_d, & \textit{falls } \prod_{i=1}^{n} y_i = u^{k_0} d^{n-1-k_0}. \end{cases}$$

Dann sind die Bedingungen $B1$ und $A2$ erfüllt.

Die Arbitragefreiheit des Modells ergibt sich sofort aus Satz 1.10.

Nun wird nachgewiesen, daß jede europäische Call-Option mit Ausübungspreis $K \in (A_0 u^{k_0} d^{n-k_0}, A_0 u^{k_0+1} d^{n-k_0-1})$ absicherbar ist. Für eine solche Option bezeichne $\underset{\sim}{\widehat{H}}$ den zugehörigen Hedge in einem Binomialmodell mit Parametern d, u und $r_1, ..., r_n$ (welches gemäß Beispiel 1.29 vollständig ist), d.h. $\underset{\sim}{\widehat{H}}$ erfülle die Gleichungen

$$\widehat{H}_{n-1}^t \cdot \left(A_0 u^k d^{n-k}, B_n\right)^t = (A_0 u^k d^{n-k} - K)^+ \quad \forall\, 0 \leq k \leq n. \qquad (\star)$$

Die Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ sei festgelegt durch

$$\begin{aligned} H_0 &= \widehat{H}_0, \\ H_i &= \begin{cases} \widehat{H}_i & \text{auf } (Y_1, ..., Y_i) \in \{d,u\}^i, \\ 0 & \text{auf } (Y_1, ..., Y_i) \in (0,\infty)^i \backslash \{d,u\}^i. \end{cases} \end{aligned}$$

Als nächstes wird gezeigt, daß $\underset{\sim}{H}$ einen Hedge für die europäische Call-Option im Modell von Beispiel 2.7 bildet. Dafür definiert man zunächst die Mengen

$$\begin{aligned} A &= \Big\{(y_1,...,y_{n-1}) \in \{d,u\}^{n-1} : \prod_{i=1}^{n-1} y_i < u^{k_0} d^{n-1-k_0}\Big\}, \\ B &= \Big\{(y_1,...,y_{n-1}) \in \{d,u\}^{n-1} : \prod_{i=1}^{n-1} y_i > u^{k_0} d^{n-1-k_0}\Big\}, \\ C &= \Big\{(y_1,...,y_{n-1}) \in \{d,u\}^{n-1} : \prod_{i=1}^{n-1} y_i = u^{k_0} d^{n-1-k_0}\Big\}. \end{aligned}$$

Auf der Menge $A \times [d,u]$ erhält man für $V_n := H_{n-1}^t \cdot \big(A_0 \prod_{i=1}^n Y_i, B_n\big)^t$

$$\begin{aligned} V_n &= H_{n-1}^t \cdot \Big[\frac{Y_n - d}{u-d}\Big(A_0 \prod_{i=1}^{n-1} Y_i \cdot u, B_n\Big)^t + \frac{u - Y_n}{u-d}\Big(A_0 \prod_{i=1}^{n-1} Y_i \cdot d, B_n\Big)^t\Big] \\ &\overset{(\star)}{=} \frac{Y_n - d}{u-d}\Big(A_0 \prod_{i=1}^{n-1} Y_i \cdot u - K\Big)^+ + \frac{u - Y_n}{u-d}\Big(A_0 \prod_{i=1}^{n-1} Y_i \cdot d - K\Big)^+ \\ &= \frac{Y_n - d}{u-d} \cdot 0 + \frac{u - Y_n}{u-d} \cdot 0 \\ &= 0 \\ &= \Big(A_0 \prod_{i=1}^{n} Y_i - K\Big)^+. \end{aligned}$$

Auf der Menge $B \times [d,u]$ gilt

$$\begin{aligned} V_n &= H_{n-1}^t \cdot \Big[\frac{Y_n - d}{u-d}\Big(A_0 \prod_{i=1}^{n-1} Y_i \cdot u, B_n\Big)^t + \frac{u - Y_n}{u-d}\Big(A_0 \prod_{i=1}^{n-1} Y_i \cdot d, B_n\Big)^t\Big] \\ &\overset{(\star)}{=} \frac{Y_n - d}{u-d}\Big(A_0 \prod_{i=1}^{n-1} Y_i \cdot u - K\Big)^+ + \frac{u - Y_n}{u-d}\Big(A_0 \prod_{i=1}^{n-1} Y_i \cdot d - K\Big)^+ \\ &= \frac{Y_n - d}{u-d}\Big(A_0 \prod_{i=1}^{n-1} Y_i \cdot u - K\Big) + \frac{u - Y_n}{u-d}\Big(A_0 \prod_{i=1}^{n-1} Y_i \cdot d - K\Big) \\ &= \Big(A_0 \prod_{i=1}^{n} Y_i - K\Big) \\ &= \Big(A_0 \prod_{i=1}^{n} Y_i - K\Big)^+. \end{aligned}$$

Schließlich liefert $(\star)$ auf der Menge $C \times \{d,u\}$

$$H_{n-1}^t \cdot \big(A_0 \prod_{i=1}^n Y_i, B_n\big)^t = \big(A_0 \prod_{i=1}^n Y_i - K\big)^+.$$

Insgesamt erhält man hieraus

$$\begin{aligned}
&P_w\big(H_{n-1}^t S_n = (A_0 \prod_{i=1}^n Y_i - K)^+\big)\\
&\geq P_w(A\times[d,u] + B\times[d,u] + C\times\{d,u\})\\
&= \sum_{(y_1,\ldots,y_{n-1})\in A+B} P_w^{Y_n|(Y_1,\ldots,Y_{n-1})=(y_1,\ldots,y_{n-1})}([d,u])P_w^{(Y_1,\ldots,Y_{n-1})}(\{(y_1,\ldots,y_{n-1})\})\\
&\quad + \sum_{(y_1,\ldots,y_{n-1})\in C} P_w^{Y_n|(Y_1,\ldots,Y_{n-1})=(y_1,\ldots,y_{n-1})}(\{d,u\})P_w^{(Y_1,\ldots,Y_{n-1})}(\{(y_1,\ldots,y_{n-1})\})\\
&= \sum_{(y_1,\ldots,y_{n-1})\in A+B+C} P_w^{(Y_1,\ldots,Y_{n-1})}(\{(y_1,\ldots,y_{n-1})\}) = 1,
\end{aligned}$$

d.h. $\underset{\sim}{H}$ ist ein Hedge für die europäische Call-Option im Modell aus Beispiel 2.7.

□

Theorem 2.2 macht keine Aussage über Optionen, deren Ausübungspreis K in der Menge $(A_0 d^n, A_0 u^n)\backslash\{A_0 d^k u^{n-k} : 1 \leq k \leq n-1\}$ liegt. Beispiel 2.1 hat bereits gezeigt, daß aus der Hedgebarkeit dieser Optionen i.a. *nicht* die Dichotomie *aller* Faktoren folgt. Bei der Modellierung wurden dabei immerhin noch $n-1$ Faktoren als zweiwertig gewählt. Das folgende Theorem zeigt, daß dies nicht „zufällig“ geschah: Aus der Absicherbarkeit europäischer Call- oder Put-Optionen oder amerikanischer Call-Optionen mit Ausübungspreis $K \in (A_0 d^n, A_0 u^n)\backslash\{A_0 d^k u^{n-k} : 1 \leq k \leq n-1\}$ folgt, daß mindestens $n-1$ Faktoren dichotom sind.

Theorem 2.8

Im Aktie/Bond Modell gelte für $i = 1, \ldots, n$

$$0 < d := \min supp(P_w^{Y_i}) < 1 + r_i < u := \max supp(P_w^{Y_i}) < \infty.$$

Weiterhin seien die folgenden Annahmen erfüllt:

$A1: \quad P_w \sim \bigotimes_{i=1}^n P_w^{Y_i}.$

$A2:$ *Es existiert eine absicherbare europäische Call- oder Put-Option oder eine absicherbare amerikanische Call-Option mit Ausübungspreis $K \in \{A_0 d^k u^{n-k} : 1 \leq k \leq n-1\}$.*

Dann gilt $\big|\{j : supp(P_w^{Y_j}) = \{d,u\}\}\big| \geq n-1$, d.h. es existiert ein i_0 mit

$$supp(P_w) \subset \{d,u\}^{i_0-1} \times [d,u] \times \{d,u\}^{n-i_0}.$$

Beweis: Im folgenden sei $k_0 \in \{1, ..., n-1\}$ so gewählt, daß $K = A_0 u^{k_0} d^{n-k_0}$ gilt.

Annahme: Es existieren $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i < j$, mit $|supp(P_w^{Y_i})| \geq 3$ und $|supp(P_w^{Y_j})| \geq 3$, d.h. es existieren $e, f \in (d, u)$ mit $supp(P_w^{Y_i}) \supset \{d, e, u\}$ und $supp(P_w^{Y_j}) \supset \{d, f, u\}$.

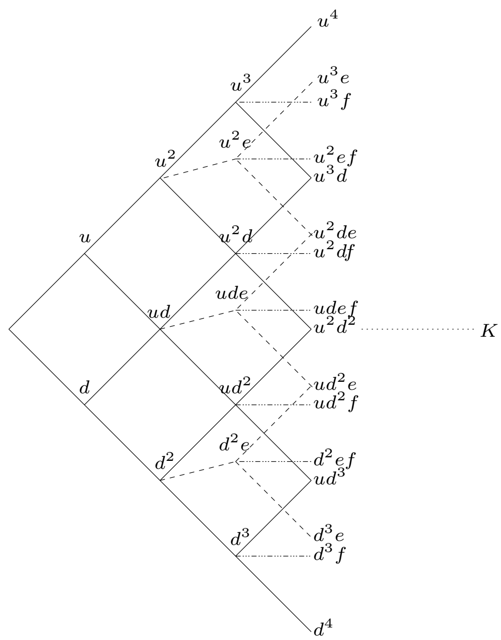

Abb. 6:
Ausgezeichnete Pfade des Aktienpreisprozesses im Fall $n = 4,\ i = 3,\ j = 4$

Diese Annahme wird durch Fallunterscheidungen zum Widerspruch geführt:

$d < e < 1 + r_i,\ d < f < 1 + r_j$: Aus Lemma 2.6 folgt die Existenz von Folgen äquivalenter Martingalmaße $(Q_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(Q_{2,k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$Q_{1,k} \xrightarrow{w} Q_1 \quad \text{und} \quad Q_{2,k} \xrightarrow{w} Q_2,$$

wobei

$$Q_1 = \bigotimes_{k=1}^{i-1} (q_{u,k}\delta_u + q_{d,k}\delta_d) \otimes (\widehat{q}_{u,i}\delta_u + \widehat{q}_{e,i}\delta_e) \otimes \bigotimes_{k=i+1}^{n} (q_{u,k}\delta_u + q_{d,k}\delta_d)$$

und

$$Q_2 = \bigotimes_{k=1}^{i-1} (q_{u,k}\delta_u + q_{d,k}\delta_d) \otimes (\widehat{q}_{u,i}\delta_u + \widehat{q}_{e,i}\delta_e) \otimes \bigotimes_{k=i+1}^{j-1} (q_{u,k}\delta_u + q_{d,k}\delta_d) \otimes$$
$$(\widehat{q}_{u,j}\delta_u + \widehat{q}_{f,j}\delta_f) \otimes \bigotimes_{k=j+1}^{n} (q_{u,k}\delta_u + q_{d,k}\delta_d)$$

gilt mit $q_{u,k} = \frac{1+r_k-d}{u-d} = 1 - q_{d,k}$ für $k \in \{1,...,n\}\backslash\{i\}$ und $\widehat{q}_{u,i} = \frac{1+r_i-e}{u-e} = 1 - \widehat{q}_{e,i}$, $\widehat{q}_{u,j} = \frac{1+r_j-f}{u-f} = 1 - \widehat{q}_{f,j}$.

Analog zum Beweis von Theorem 2.2 erhält man für die Auszahlungsfunktion $f(y_1,...,y_n) = (A_0 \prod_{i=1}^n y_i - K)^+$ der europäischen Call-Option die Gleichung

$$E_{Q_1}(f) = E_{Q_2}(f).$$

Aus der Invarianz von f gegenüber Koordinatenpermutationen folgt

$$E_{\widehat{Q}_1}(f) = E_{\widehat{Q}_2}(f)$$

mit

$$\begin{aligned}
\widehat{Q}_1 &= \bigotimes_{k\neq i,j} (q_{u,k}\delta_u + q_{d,k}\delta_d) \otimes (\widehat{q}_{u,i}\delta_u + \widehat{q}_{e,i}\delta_e) \otimes (q_{u,j}\delta_u + q_{d,j}\delta_d), \\
\widehat{Q}_2 &= \bigotimes_{k\neq i,j} (q_{u,k}\delta_u + q_{d,k}\delta_d) \otimes (\widehat{q}_{u,i}\delta_u + \widehat{q}_{e,i}\delta_e) \otimes (\widehat{q}_{u,j}\delta_u + \widehat{q}_{f,j}\delta_f).
\end{aligned}$$

O.B.d.A. kann daher $i = n-1$ und $j = n$ angenommen werden; andernfalls vertausche man $r_i \leftrightarrow r_{n-1}$, $r_j \leftrightarrow r_n$ und betrachte $\widehat{Q}_1$ bzw. $\widehat{Q}_2$ anstelle von Q_1 bzw. Q_2.

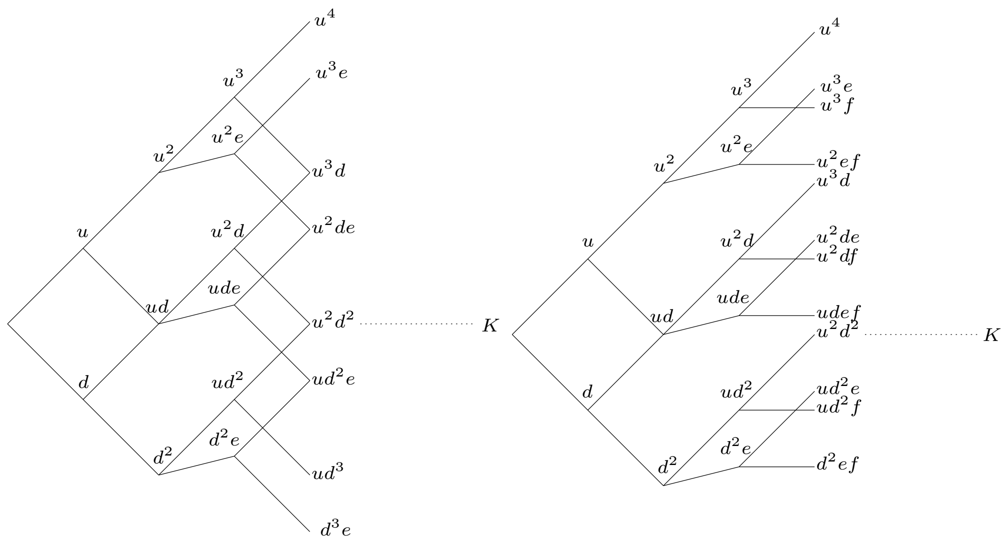

Abb. 7: Massetragende Pfade des Aktienpreisprozesses unter Q_1 bzw. Q_2

Die Erwartungswerte $E_{Q_1}(f)$ und $E_{Q_2}(f)$ lassen sich nun schreiben als

$$E_{Q_1}(f) = \sum_{(x_1,...,x_{n-2})\in\{d,u\}^{n-2}} \prod_{k=1}^{n-2} q_{x_k,k} \cdot \big(a_1(x_1,...,x_{n-2}) + a_2(x_1,...,x_{n-2})\big)$$

und

$$E_{Q_2}(f) = \sum_{(x_1,...,x_{n-2})\in\{d,u\}^{n-2}} \prod_{k=1}^{n-2} q_{x_k,k} \cdot \big(b_1(x_1,...,x_{n-2}) + b_2(x_1,...,x_{n-2})\big)$$

mit

$$\begin{aligned}
a_1(x_1,...,x_{n-2}) &= (A_0\prod_{k=1}^{n-2} x_k\cdot u^2 - K)^+\cdot \widehat{q}_{u,n-1}\cdot q_{u,n} + (A_0\prod_{k=1}^{n-2} x_k\cdot ud - K)^+\cdot \widehat{q}_{u,n-1}\cdot q_{d,n},\\
a_2(x_1,...,x_{n-2}) &= (A_0\prod_{k=1}^{n-2} x_k\cdot eu - K)^+\cdot \widehat{q}_{e,n-1}\cdot q_{u,n} + (A_0\prod_{k=1}^{n-2} x_k\cdot ed - K)^+\cdot \widehat{q}_{e,n-1}\cdot q_{d,n},\\
b_1(x_1,...,x_{n-2}) &= (A_0\prod_{k=1}^{n-2} x_k\cdot u^2 - K)^+\cdot \widehat{q}_{u,n-1}\cdot \widehat{q}_{u,n} + (A_0\prod_{k=1}^{n-2} x_k\cdot uf - K)^+\cdot \widehat{q}_{u,n-1}\cdot \widehat{q}_{f,n},\\
b_2(x_1,...,x_{n-2}) &= (A_0\prod_{k=1}^{n-2} x_k\cdot eu - K)^+\cdot \widehat{q}_{e,n-1}\cdot \widehat{q}_{u,n} + (A_0\prod_{k=1}^{n-2} x_k\cdot ef - K)^+\cdot \widehat{q}_{e,n-1}\cdot \widehat{q}_{f,n}.
\end{aligned}$$

Aus

$$K = A_0 u^{k_0} d^{n-k_0} = A_0 u^{k_0-2} d^{n-k_0}\cdot u^2 \geq A_0 u^{k_0-2} d^{n-k_0}\cdot \max\{ud, eu, ed, uf, ef\}$$

erhält man für alle $(x_1,...,x_{n-2}) \in \{d,u\}^{n-2}$ mit $\prod_{k=1}^{n-2} x_k \leq u^{k_0-2}d^{n-k_0}$

$$a_1(x_1,...,x_{n-2}) = a_2(x_1,...,x_{n-2}) = 0 = b_1(x_1,...,x_{n-2}) = b_2(x_1,...,x_{n-2}).$$

Weiter gilt für alle $(x_1,...,x_{n-2}) \in \{d,u\}^{n-2}$ mit $\prod_{k=1}^{n-2} x_k \geq u^{k_0}d^{n-2-k_0}$ wegen

$$K = A_0 u^{k_0} d^{n-k_0} = A_0 u^{k_0} d^{n-2-k_0}\cdot d^2 \leq A_0 u^{k_0} d^{n-2-k_0}\cdot \min\{u^2, ud, eu, ed, uf, ef\}$$

die Gleichung

$$\begin{aligned}
a_1(x_1,...,x_{n-2}) &= (A_0\prod_{k=1}^{n-2} x_k\cdot u^2 - K)\cdot \widehat{q}_{u,n-1}\cdot q_{u,n} + (A_0\prod_{k=1}^{n-2} x_k\cdot ud - K)\cdot \widehat{q}_{u,n-1}\cdot q_{d,n}\\
&= A_0\prod_{k=1}^{n-2} x_k\cdot u\cdot \widehat{q}_{u,n-1}\cdot (uq_{u,n} + dq_{d,n}) - K\widehat{q}_{u,n-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \; A_0 \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot u \cdot \widehat{q}_{u,n-1} \cdot (u\widehat{q}_{u,n} + f\widehat{q}_{f,n}) - K\widehat{q}_{u,n-1} \\
&= (A_0 \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot u^2 - K) \cdot \widehat{q}_{u,n-1} \cdot \widehat{q}_{u,n} + (A_0 \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot uf - K) \cdot \widehat{q}_{u,n-1} \cdot \widehat{q}_{f,n}, \\
&= \; b_1(x_1, ..., x_{n-2}).
\end{aligned}
$$

Analog ergibt sich für $(x_1, ..., x_{n-2})$ mit $\prod_{k=1}^{n-2} x_k \leq u^{k_0-2} d^{n-k_0}$ die Gleichung

$$
a_2(x_1, ..., x_{n-2}) = A_0 \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot e \cdot \widehat{q}_{e,n-1} \cdot (1 + r_n) - K \cdot \widehat{q}_{e,n-1} = b_2(x_1, ..., x_{n-2}).
$$

Sei schließlich $(x_1, ..., x_{n-2}) \in \{d, u\}^{n-2}$ mit $\prod_{k=1}^{n-2} x_k = u^{k_0-1} d^{n-k_0-1}$. Dann gilt $K \leq A_0 \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot \min\{ud, uf\}$, woraus

$$
a_1(x_1, ..., x_{n-2}) = A_0 \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot u \cdot \widehat{q}_{u,n-1} \cdot (1 + r_n) - K \cdot \widehat{q}_{u,n-1} = b_1(x_1, ..., x_{n-2})
$$

folgt. Weiterhin ergibt sich aus $A_0 \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot eu > K > A_0 \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot ed$ mit $L := K/(u^{k_0-1} d^{n-k_0-1} e) \in (A_0 d, A_0 u)$ die Ungleichung

$$
\begin{aligned}
a_2(x_1, ..., x_{n-2}) \quad &= \quad \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot e \cdot \widehat{q}_{e,n-1} \cdot \big((A_0 u - L)^+ q_{u,n} + (A_0 d - L)^+ q_{d,n}\big) \\
&\overset{2.5\,a)}{>} \quad \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot e \cdot \widehat{q}_{e,n-1} \cdot \big((A_0 u - L)^+ \widehat{q}_{u,n} + (A_0 f - L)^+ \widehat{q}_{f,n}\big) \\
&= \quad b_2(x_1, ..., x_{n-2}).
\end{aligned}
$$

Insgesamt folgt hieraus die Ungleichung

$$
E_{Q_1}(f) > E_{Q_2}(f),
$$

also ein Widerspruch zu $E_{Q_1}(f) = E_{Q_2}(f)$.

$d < e < 1 + r_i,\ 1 + r_j < f < u$: Es kann wieder o.B.d.A. $i = n - 1$ und $j = n$ angenommen werden. Analog zum ersten Fall ergibt sich

$$E_{Q_1}(f) = E_{Q_3}(f)$$

mit

$$Q_3 = \bigotimes_{k \neq i,j} (q_{u,k}\delta_u + q_{d,k}\delta_d) \otimes (\widehat{q}_{u,n-1}\delta_u + \widehat{q}_{e,n-1}\delta_e) \otimes (\widehat{q}_{f,n}\delta_f + \widehat{q}_{d,n}\delta_d).$$

Dabei seien $q_{u,1}, q_{d,1}, ..., q_{u,n-2}, q_{d,n-2},\ \widehat{q}_{u,n-1}, \widehat{q}_{e,n-1}$ wie im ersten Fall definiert, und es gelte $\widehat{q}_{f,n} := \frac{1+r_n-d}{f-d} =: 1 - \widehat{q}_{d,n}$. Dann läßt sich $E_{Q_3}(f)$ schreiben als

$$E_{Q_3}(f) = \sum_{(x_1,...,x_{n-2}) \in \{d,u\}^{n-2}} \prod_{k=1}^{n-2} q_{x_k,k} \cdot \big(c_1(x_1, ..., x_{n-2}) + c_2(x_1, ..., x_{n-2})\big)$$

mit

$$c_1(x_1, ..., x_{n-2}) = (A_0 \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot uf - K)^+ \cdot \widehat{q}_{u,n-1} \cdot \widehat{q}_{f,n} + (A_0 \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot ud - K)^+ \cdot \widehat{q}_{u,n-1} \cdot \widehat{q}_{d,n},$$
$$c_2(x_1, ..., x_{n-2}) = (A_0 \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot ef - K)^+ \cdot \widehat{q}_{e,n-1} \cdot \widehat{q}_{f,n} + (A_0 \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot ed - K)^+ \cdot \widehat{q}_{e,n-1} \cdot \widehat{q}_{d,n}.$$

Analog zum ersten Fall erhält man nun für alle $(x_1, ..., x_{n-2}) \in \{d, u\}^{n-2}$ mit $\prod_{k=1}^{n-2} x_k \leq u^{k_0-2} d^{n-k_0}$

$$a_1(x_1, ..., x_{n-2}) = a_2(x_1, ..., x_{n-2}) = 0 = c_1(x_1, ..., x_{n-2}) = c_2(x_1, ..., x_{n-2}),$$

und für $(x_1, ..., x_{n-2}) \in \{d, u\}^{n-2}$ mit $\prod_{k=1}^{n-2} x_k \geq u^{k_0} d^{n-2-k_0}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} a_1(x_1, ..., x_{n-2}) &= A_0 \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot u \cdot \widehat{q}_{u,n-1} \cdot (1 + r_n) - K \cdot \widehat{q}_{u,n-1} = c_1(x_1, ..., x_{n-2}), \\ a_2(x_1, ..., x_{n-2}) &= A_0 \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot e \cdot \widehat{q}_{e,n-1} \cdot (1 + r_n) - K \cdot \widehat{q}_{e,n-1} = c_2(x_1, ..., x_{n-2}). \end{aligned}$$

Schließlich folgt für alle $(x_1, ..., x_{n-2}) \in \{d, u\}^{n-2}$ mit $\prod_{k=1}^{n-2} x_k = u^{k_0-1} d^{n-k_0-1}$

$$a_1(x_1, ..., x_{n-2}) = A_0 \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot u \cdot \widehat{q}_{u,n-1} \cdot (1 + r_n) - K \cdot \widehat{q}_{u,n-1} = c_1(x_1, ..., x_{n-2})$$

sowie

$$\begin{aligned} a_2(x_1,...,x_{n-2}) &= \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot e \cdot \widehat{q}_{e,n-1} \cdot \big((A_0 u - L)^+ q_{u,n} + (A_0 d - L)^+ q_{d,n}\big) \\ &\overset{2.5\,b)}{>} \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot e \cdot \widehat{q}_{e,n-1} \cdot \big((A_0 f - L)^+ \widehat{q}_{f,n} + (A_0 d - L)^+ \widehat{q}_{d,n}\big) \\ &= b_2(x_1,...,x_{n-2}). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich $E_{Q_1}(f) > E_{Q_3}(f)$, also ein Widerspruch zu $E_{Q_1}(f) = E_{Q_3}(f)$.

$\underline{d < e < 1 + r_i,\ f = 1 + r_j}$: O.B.d.A. sei wieder $i = n-1$ und $j = n$. Mit

$$Q_4 = \bigotimes_{k \neq i,j} (q_{u,k}\delta_u + q_{d,k}\delta_d) \otimes (\widehat{q}_{u,n-1}\delta_u + \widehat{q}_{e,n-1}\delta_e) \otimes \delta_{1+r_n}$$

ergibt sich in nun $E_{Q_1}(f) = E_{Q_4}(f)$. Der Erwartungswert $E_{Q_4}(f)$ läßt sich dabei wieder in der Form

$$E_{Q_4}(f) = \sum_{(x_1,...,x_{n-2}) \in \{d,u\}^{n-2}} \prod_{k=1}^{n-2} q_{x_k,k} \cdot \big(d_1(x_1,...,x_{n-2}) + d_2(x_1,...,x_{n-2})\big)$$

schreiben mit

$$\begin{aligned} d_1(x_1,...,x_{n-2}) &= \Big(A_0 \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot u \cdot (1 + r_n) - K\Big)^+ \widehat{q}_{u,n-1}, \\ d_2(x_1,...,x_{n-2}) &= \Big(A_0 \prod_{k=1}^{n-2} x_k \cdot e \cdot (1 + r_n) - K\Big)^+ \widehat{q}_{e,n-1}. \end{aligned}$$

Analog zu den ersten beiden Fallen ergibt sich $a_s(x_1,...,x_{n-2}) = d_s(x_1,...,x_{n-2})$, $s = 1,2$, für alle $(x_1,...,x_{n-2}) \in \{d,u\}^{n-2}$ mit $\prod_{k=1}^{n-2} x_k \neq u^{k_0-1}d^{n-k_0-1}$, und $a_1(x_1,...,x_{n-2}) = d_1(x_1,...,x_{n-2})$ sowie unter Verwendung von Lemma 2.5 *c)* $a_2(x_1,...,x_{n-2}) > d_2(x_1,...,x_{n-2})$ für alle $(x_1,...,x_{n-2}) \in \{d,u\}^{n-2}$ mit $\prod_{k=1}^{n-2} x_k = u^{k_0-1}d^{n-k_0-1}$.

Insgesamt folgt daher mit $E_{Q_1}(f) > E_{Q_4}(f)$ ein Widerspruch zu $E_{Q_1}(f) = E_{Q_4}(f)$.

Die Fälle $\underline{1 + r_i < e < u}$ bzw. $\underline{e = 1 + r_i}$ und *i)* $\underline{d < f < 1 + r_j}$, *ii)* $\underline{1 + r_j < f < u}$, *iii)* $\underline{f = 1 + r_j}$ werden analog behandelt.

Insgesamt führt obige Annahme stets zu einem Widerspruch, so daß Theorem 2.8 bewiesen ist.

$\square$

Korollar 2.9
In der Situation von Theorem 2.8 seien die Annahmen A1, A2 und

$$\widehat{A_3}: \ \nexists\, i \in \{1,...,n\} : |supp(P_w^{Y_i})| > |supp(P_w^{Y_j})| \ \forall j \in \{1,...,n\} \backslash \{i\}.$$

erfüllt. Dann liegt ein Binomialmodell mit Parametern d, u und $r_1, ..., r_n$ vor. Jede der folgenden Bedingungen ist hinreichend für $\widehat{A3}$:

i) $supp(P_w^{Y_i}) = supp(P_w^{Y_j})$ *für alle* $i, j \in \{1, ..., n\}$.

ii) $P_w^{Y_i} = P_w^{Y_j}$ *für alle* $i, j \in \{1, ..., n\}$.

Im nächsten Schritt soll die Voraussetzung, daß $supp(P_w^{Y_i})$ für jedes i *denselben* Schranken d, u unterliegt, abgeschwächt werden. Mit analogen Techniken wie im Beweis von Theorem 2.2 und Theorem 2.8 erhält man folgende naheliegende Verallgemeinerung:

Theorem 2.10
Im Aktie/Bond Modell gelte für $i = 1, ..., n$

$$0 < d_i := \min supp(P_w^{Y_i}) < 1 + r_i < u_i := \max supp(P_w^{Y_i}) < \infty,$$

und es sei die Annahme

$$A_1: \ P_w \sim \bigotimes_{i=1}^{n} P_w^{Y_i}.$$

erfüllt.

a) Falls eine absicherbare europäische Call- oder Put-Option oder amerikanische Call-Option existiert mit Ausübungspreis

$$K \in \bigcup_{(x_1,...,x_{n-1}) \in \times_{i=1}^{n-1}\{d_i,u_i\}} (A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot d_n, A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot u_n),$$

dann folgt $supp(P_w^{Y_i}) = \{d_i, u_i\}$ *für alle* $1 \leq i \leq n$, *d.h. es liegt ein Binomialmodell mit Parametern* $d_1, ..., d_n$, $u_1, ..., u_n$ *und* $r_1, ..., r_n$ *vor.*

b) Falls eine absicherbare europäische Call- oder Put-Option oder amerikanische Call-Option existiert mit Ausübungspreis

$$K \in \{A_0 \prod_{i=1}^{n} x_i : (x_1, ..., x_n) \in \times_{i=1}^{n} \{d_i, u_i\} \backslash \{\prod_{i=1}^{n} d_i, \prod_{i=1}^{n} u_i\}\},$$

dann folgt $\left|\{i : supp(P_w^{Y_i}) = \{d_i, u_i\}\}\right| \geq n - 1.$

Theorem 2.10 ermöglicht eine umfassende Beantwortung der eingangs gestellten Frage, wieviele „nicht-triviale“ Optionen (d.h. solche, deren Ausübungspreis K die Bedingungen $P_w(A_n > K) > 0$ und $P_w(A_n < K) > 0$ erfüllt) absicherbar sind. Desweiteren zeigt Theorem 2.10, daß der am Anfang des Kapitels vorgestellte intuitive Erklärungsansatz nicht hinreichend ist: Auch in unvollständigen Modellen können u.U. *überabzählbar viele* „nicht-triviale“ Calls und Puts absicherbar sein:

Bemerkung 2.11
Im Aktie/Bond Modell gelte für $i = 1, ..., n$

$$0 < d_i := \min supp(P_w^{Y_i}) < 1 + r_i < u_i := \max supp(P_w^{Y_i}) < \infty,$$

und es sei die Annahme A1 aus Theorem 2.10 erfüllt.

a) Falls das Modell kein Binomialmodell ist, so existieren überabzählbar viele nicht-absicherbare europäische Call- und Put-Optionen sowie amerikanische Call-Optionen; z.B. solche mit Ausübungspreis

$$K \in A := \bigcup_{(x_1,...,x_{n-1}) \in \times_{i=1}^{n-1}\{d_i,u_i\}} (A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot d_n, A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot u_n).$$

b) Falls

$$B := (A_0 \prod_{i=1}^{n} d_i, A_0 \prod_{i=1}^{n} u_i) \setminus \bigcup_{(x_1,...,x_{n-1}) \in \times_{i=1}^{n-1}\{d_i,u_i\}} (A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot d_n, A_0 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot u_n)$$

nicht-leer ist, so existieren $|B|$ nicht-triviale Optionen, aus deren Absicherbarkeit i.a. nicht die Dichotomie der Faktoren $Y_1, ..., Y_n$ folgt (vgl. Beispiel 2.1).

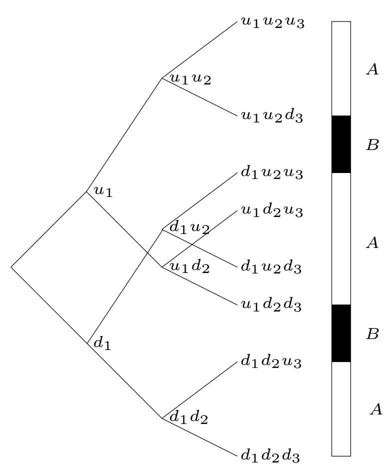

Abb. 8:
Die Mengen A und B im Fall $n = 3$

2.2 Der allgemeine Fall

In diesem Abschnitt wird auf die Forderung der Existenz unterer Schranken $d_i > 0$ und oberer Schranken $u_i < \infty$ für die Träger der $P_w^{Y_i}$, $1 \leq i \leq n$, verzichtet, es wird jedoch wie im letzten Abschnitt und in Satz 1.30 vorausgesetzt, daß die Faktoren $Y_1, ..., Y_n$ nicht-deterministisch sind.

Die Arbitragefreiheit des Aktie/Bond Modells, welche im beschränkten Fall durch die Forderungen $d_i < 1 + r_i < u_i$, $i = 1, ...$,n, impliziert war (vgl. Satz 1.10), soll auch im unbeschränkten Fall gegeben sein.

Nun wird wieder untersucht, unter welchen Bedingungen aus der Forderung der Hedgebarkeit *einer einzigen* nicht-trivialen Option mit geeignet gewähltem Ausübungspreis die Vollständigkeit des Modells folgt. Das folgende Ergebnis zeigt, daß die Antwort bereits im vorigen Abschnitt gegeben worden ist:

Theorem 2.12
Im Aktie/Bond Modell seien die Faktoren nicht-deterministisch, und es seien folgende Annahmen erfüllt:

$$A1: \ P_w \sim \bigotimes_{i=1}^{n} P_w^{Y_i}.$$

$A2$: *Das Modell ist arbitragefrei.*

$$A3: \begin{cases} \textit{Es existiert eine absicherbare europäische Call- oder Put-Option} \\ \textit{oder amerikanische Call-Option, deren Ausübungspreis } K \textit{ den} \\ \textit{Bedingungen } P_w(A_n > K) > 0 \textit{ und } P_w(A_n < K) > 0 \textit{ genügt.} \end{cases}$$

Dann existieren $\widehat{d}_1, ..., \widehat{d}_n$ und $\widehat{u}_1, ..., \widehat{u}_n$ mit $0 < \widehat{d}_i < 1 + r_i < \widehat{u}_i < \infty$, so daß

i) $\widehat{d}_i = \min supp(P_w^{Y_i})$ *und* $\widehat{u}_i = \max supp(P_w^{Y_i})$ *für alle* $1 \leq i \leq n$,

ii) $A_0 \prod_{i=1}^n \widehat{d}_i < K < A_0 \prod_{i=1}^n \widehat{u}_i$

gilt.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $A_0 = 1$; andernfalls ersetze man im folgenden K durch $L := K/A_0$. Zuerst wird gezeigt, daß aus den Voraussetzungen von Theorem 2.12

$$supp(P_w^{Y_i}) \cap (0, 1 + r_i) \neq \emptyset \quad \text{und} \quad supp(P_w^{Y_i}) \cap (1 + r_i, \infty) \neq \emptyset \qquad (\star)$$

für alle $1 \leq i \leq n$ folgt:

Gemäß dem ersten Fundamentalsatz der Preistheorie existiert ein zu P_w äquivalentes W-Maß Q mit

$$E_Q(\alpha_{k+1}\prod_{i=1}^{k+1} Y_i|\mathcal{F}_k) = \alpha_k \prod_{i=1}^{k} Y_i \quad Q\text{-f.s.}$$

für alle $0 \leq k \leq n-1$, d.h.

$$\prod_{i=1}^{k} Y_i \cdot E_Q(Y_{k+1}|\mathcal{F}_k) = (1+r_{k+1})\prod_{i=1}^{k} Y_i \quad Q\text{-f.s..}$$

Wegen $Y_1, ..., Y_k > 0$ Q-f.s. folgt hieraus $E_Q(Y_{k+1}|\mathcal{F}_k) = (1+r_{k+1})$ Q-f.s., und durch Glättung ergibt sich $E_Q(Y_{k+1}) = 1 + r_{k+1}$ für alle $0 \leq k \leq n-1$. Da jedes $P_w^{Y_i}$ und somit Q^{Y_i} nach Voraussetzung nicht-deterministisch ist, erhält man $(\star)$.

Annahme 1: Es existiert ein $j \in \{1, ..., n\}$ mit $0 \in supp(P_w^{Y_j})$.

i) Aus $P_w(\prod_{i=1}^n Y_i > K) > 0$ und $\text{supp}(P_w^{Y_k}) \cap (1+r_k, \infty) \neq \emptyset$ für $k = 1, ..., n$ erhält man die Existenz von $u_k \in supp(P_w^{Y_k}) \cap (1+r_k, \infty)$, $k = 1, ..., n$, mit $\prod_{i=1}^n u_i > K$.

ii) Aus $(\star)$ folgt die Existenz von $d_k \in supp(P_w^{Y_k}) \cap (0, 1+r_k)$ für $k = 1, ..., n$, und da $0 \in supp(P_w^{Y_j})$ gemäß Annahme 1 sowie $Y_j > 0$ nach genereller Voraussetzung gilt, kann d_j so klein gewählt werden, daß

$$\prod_{i=1}^{n} u_i > K > \prod_{i=1}^{j-1} u_i \cdot d_j \cdot \prod_{i=j+1}^{n} u_i$$

erfüllt ist.
Darüberhinaus existiert ein $e_j \in supp(P_w^{Y_j})$ mit $d_j < e_j < 1 + r_j$.

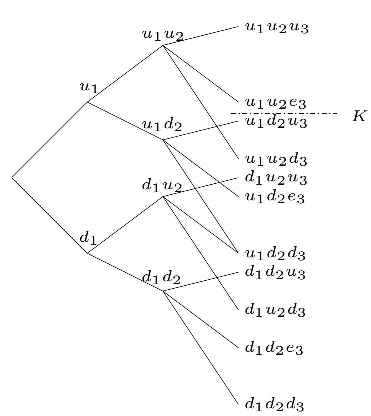

Abb. 9:
Ausgezeichnete Pfade des Aktienpreisprozesses im Fall $n = j = 3$

iii) Lemma 2.5 liefert die Existenz von Folgen $(Q_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(Q_{2,k})_{k\in\mathbb{N}}$ äquivalenter Martingalmaße mit $Q_{i,k} \xrightarrow{w} Q_i$ für $i = 1, 2$, wobei

$$Q_1 = \bigotimes_{i=1}^{n}(q_{u_i}\delta_{u_i} + q_{d_i}\delta_{d_i})$$

und

$$Q_2 = \bigotimes_{i=1}^{j-1}(q_{u_i}\delta_{u_i} + q_{d_i}\delta_{d_i}) \otimes (\widehat{q}_{u_j}\delta_{u_j} + \widehat{q}_{e_j}\delta_{e_j}) \otimes \bigotimes_{i=j+1}^{n}(q_{u_i}\delta_{u_i} + q_{d_i}\delta_{d_i})$$

gilt mit $q_{u_i} = \frac{1+r_i-d_i}{u_i-d_i} = 1-q_{d_i}$ für $1 \leq i \leq n$ sowie $\widehat{q}_{u_j} = \frac{1+r_j-e_j}{u_j-e_j} = 1-\widehat{q}_{e_j}$.

iv) Aus Annahme $A3$ folgt mit Lemma 2.4 die Hedgebarkeit der europäischen Call-Option mit Auszahlungsfunktion $f(Y_1, ..., Y_n) = (\prod_{i=1}^{n} Y_i - K)^+$, und aus Korollar 1.18 erhält man analog zum Beweis von Theorem 2.2

$$E_{Q_{1,k}}(f) = E_{Q_{2,k}}(f) = E_Q(f)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und für alle $Q \in \mathcal{P}$.

v) Die Zerlegung $f(y_1, ..., y_n) = (\prod_{i=1}^{n} y_i - K) + (K - \prod_{i=1}^{n} y_i)^+$ liefert

$$E_Q(f) = \prod_{i=1}^{n}(1 + r_i) - K + E_Q(g)$$

für alle $Q \in \mathcal{P}$, wobei $g(y_1, ..., y_n) = (K - \prod_{i=1}^{n} y_i)^+$ die Auszahlungsfunktion der europäischen Put-Option mit Ausübungspreis K ist. Da g (im Gegensatz zu f) auf Ω beschränkt ist, folgt aus iii) $\lim\limits_{k\to\infty} E_{Q_{s,k}}(g) = E_{Q_s}(g)$, $s = 1, 2$. Aus $E_{Q_s}(\prod_{i=1}^{n} Y_i) = \prod_{i=1}^{n}(1 + r_i)$ erhält man $\lim\limits_{k\to\infty} E_{Q_{s,k}}(f) = E_{Q_s}(f)$, $s = 1, 2$, und zusammen mit iv) ergibt sich hieraus schließlich $E_{Q_1}(f) = E_{Q_2}(f)$.

vi) Wegen der Invarianz von f unter Koordinatenpermutationen kann man ohne Einschränkung $j = n$ annehmen, und somit

$$Q_1 = \bigotimes_{i=1}^{n}(q_{u_i}\delta_{u_i} + q_{d_i}\delta_{d_i}), \quad Q_2 = \bigotimes_{i=1}^{n-1}(q_{u_i}\delta_{u_i} + q_{d_i}\delta_{d_i}) \otimes (\widehat{q}_{u_n}\delta_{u_n} + \widehat{q}_{e_n}\delta_{e_n}).$$

(Ansonsten permutiere man die j-te und die n-te Koordinate und vertausche $d_j \leftrightarrow d_n$ etc.)

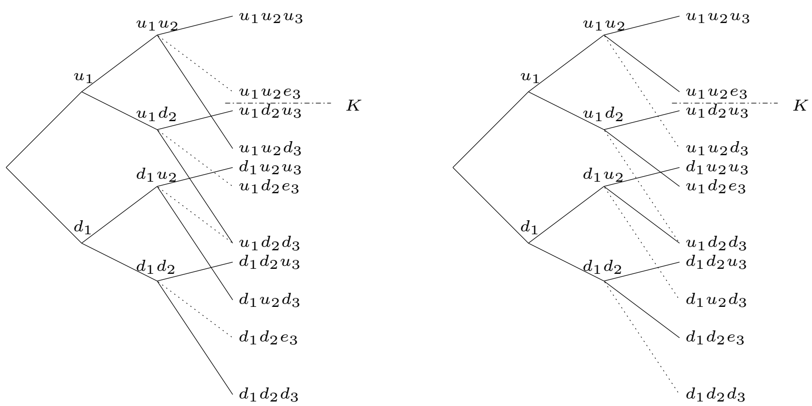

Abb. 10: Die durchgezogenen Linien zeigen die massetragenden Pfade des Aktienpreisprozesses unter Q_1 bzw. Q_2 im Fall $n = 3$.

Damit ergibt sich

$$E_{Q_1}(f) = \sum_{(x_1,...,x_{n-1}) \in \bigtimes_{i=1}^{n-1}\{d_i,u_i\}} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i} \cdot a_1(x_1, ..., x_{n-1})$$

und

$$E_{Q_2}(f) = \sum_{(x_1,...,x_{n-1}) \in \bigtimes_{i=1}^{n-1}\{d_i,u_i\}} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i} \cdot a_2(x_1, ..., x_{n-1})$$

mit

$$\begin{aligned} a_1(x_1, ..., x_{n-1}) &= \Big(\prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot u_n - K\Big)^+ q_{u_n} + \Big(\prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot d_n - K\Big)^+ q_{d_n}, \\ a_2(x_1, ..., x_{n-1}) &= \Big(\prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot u_n - K\Big)^+ \widehat{q}_{u_n} + \Big(\prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot e_n - K\Big)^+ \widehat{q}_{e_n}. \end{aligned}$$

Als nächstes werden die Mengen

$$\begin{aligned} A &= \{(y_1, ..., y_{n-1}) \in \bigtimes_{i=1}^{n-1}\{d_i, u_i\} : \prod_{i=1}^{n-1} y_i \cdot u_n > K\}, \\ B &= \{(y_1, ..., y_{n-1}) \in \bigtimes_{i=1}^{n-1}\{d_i, u_i\} : \prod_{i=1}^{n-1} y_i \cdot u_n \leq K\} \end{aligned}$$

betrachtet.

Für $(x_1, ..., x_{n-1}) \in B$ gilt $a_1(x_1, ..., x_{n-1}) = 0 = a_2(x_1, ..., x_{n-1})$.
Für $(x_1, ..., x_{n-1}) \in A$ erhält man

$$\prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot u_n > K > \prod_{i=1}^{n-1} u_i \cdot d_n \geq \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot d_n,$$

und mit $L = K/\prod_{i=1}^{n-1} x_i \in (d_n, u_n)$ kann man $a_1(x_1, ..., x_{n-1})$ in der Notation von Lemma 2.5 schreiben als

$$\begin{aligned} a_1(x_1, ..., x_{n-1}) &= \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot [(u_n - L)q_{u_n} + (d_n - L)^+ q_{d_n}] \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot a(d_n, u_n, L). \end{aligned}$$

Analog folgt für $(x_1, ..., x_{n-1}) \in A$

$$a_2(x_1, ..., x_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot a(e_n, u_n, L).$$

Lemma 2.5 liefert $a(e_n, u_n, L) < a(d_n, u_n, L)$, so daß $a_1(x_1, ..., x_{n-1}) > a_2(x_1, ..., x_{n-1})$ für alle $(x_1, ..., x_{n-1}) \in A$ gilt. Wegen $(u_1, ..., u_{n-1}) \in A$ ist diese Menge nicht-leer, und man erhält schließlich

$$\begin{aligned} E_{Q_1}(f) &= \sum_{(x_1,...,x_{n-1}) \in \times_{i=1}^{n-1} \{d_i, u_i\}} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i} \cdot a_1(x_1, ..., x_{n-1}) \\ &= \sum_{(x_1,...,x_{n-1}) \in A} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i} \cdot a_1(x_1, ..., x_{n-1}) \\ &> \sum_{(x_1,...,x_{n-1}) \in A} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i} \cdot a_2(x_1, ..., x_{n-1}) \\ &= \sum_{(x_1,...,x_{n-1}) \in \times_{i=1}^{n-1} \{d_i, u_i\}} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i} \cdot a_2(x_1, ..., x_{n-1}) \\ &= E_{Q_2}(f), \end{aligned}$$

also einen Widerspruch zur Aussage $E_{Q_1}(f) = E_{Q_2}(f)$ in iv).
Damit wurde Annahme 1 widerlegt, und es folgt $0 \notin supp(P_w^{Y_j})$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$.

Annahme 2: Es existiert ein $j \in \{1, ..., n\}$ mit $\sup supp(P_w^{Y_j}) = \infty$.

i) Für $i \in \{1, ..., n\}$ erhält man aus $0 \notin supp(P_w^{Y_i})$ und $(\star)$ die Beziehung $0 < d_i := \min supp(P_w^{Y_i}) < 1 + r_i$. Darüberhinaus folgt $\prod_{i=1}^{n} d_i < K$ aus Annahme A3.

ii) Wegen $\sup supp(P_w^{Y_j}) = \infty$ existieren $e_j, u_j \in supp(P_w^{Y_j}) \cap (1 + r_j, \infty)$ mit $e_j < u_j$, so daß $K < \prod_{i=1}^{j-1} d_i \cdot u_j \cdot \prod_{i=j+1}^{n} d_i$ gilt. Mit derselben Argumentation wie oben kann man ohne Einschränkung $j = n$ annehmen.

iii) Aus $(\star)$ folgt für $i \in \{1,...,n-1\}$ die Existenz von $u_i \in supp(P_w^{Y_i}) \cap (1+r_i, \infty)$.

iv) Mit denselben Argumenten wie bei Annahme 1 folgt aus Annahme 2 die Gleichung $E_{Q_3}(f) = E_{Q_4}(f)$, wobei

$$Q_3 = \bigotimes_{i=1}^{n} (q_{u_i}\delta_{u_i} + q_{d_i}\delta_{d_i}), \quad Q_4 = \bigotimes_{i=1}^{n-1} (q_{u_i}\delta_{u_i} + q_{d_i}\delta_{d_i}) \otimes (\widehat{q}_{e_n}\delta_{e_n} + \widehat{q}_{d_n}\delta_{d_n})$$

gilt mit $q_{u_i} = \frac{1+r_i-d_i}{u_i-d_i} = 1 - q_{d_i}$ und $\widehat{q}_{e_n} = \frac{1+r_n-d_n}{e_n-d_n} = 1 - \widehat{q}_{d_n}$.

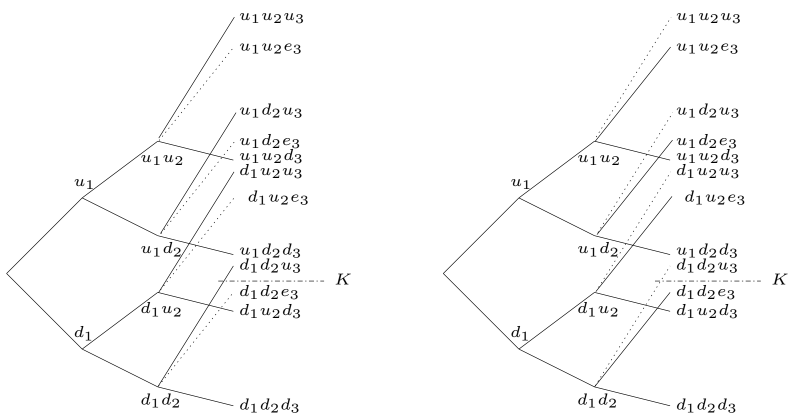

Abb. 11: Die durchgezogenen Linien zeigen die massetragenden Pfade des Aktienpreisprozesses unter Q_3 bzw. Q_4 im Fall $n = 3$.

Die Erwartungswerte $E_{Q_3}(f)$ und $E_{Q_4}(f)$ lassen sich darstellen als

$$\begin{aligned} E_{Q_3}(f) &= \sum_{(x_1,...,x_{n-1}) \in \times_{i=1}^{n-1}\{d_i,u_i\}} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i} \cdot a_3(x_1,...,x_{n-1}), \\ E_{Q_4}(f) &= \sum_{(x_1,...,x_{n-1}) \in \times_{i=1}^{n-1}\{d_i,u_i\}} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i} \cdot a_4(x_1,...,x_{n-1}) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a_3(x_1,...,x_{n-1}) &= \Big(\prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot u_n - K\Big)^+ q_{u_n} + \Big(\prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot d_n - K\Big)^+ q_{d_n}, \\ a_4(x_1,...,x_{n-1}) &= \Big(\prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot e_n - K\Big)^+ \widehat{q}_{e_n} + \Big(\prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot d_n - K\Big)^+ \widehat{q}_{d_n}. \end{aligned}$$

Als nächstes werden die Mengen

$$\begin{aligned} C &= \{(y_1,...,y_{n-1}) \in \times_{i=1}^{n-1}\{d_i,u_i\} : \prod_{i=1}^{n-1} y_i \cdot d_n < K\}, \\ D &= \{(y_1,...,y_{n-1}) \in \times_{i=1}^{n-1}\{d_i,u_i\} : \prod_{i=1}^{n-1} y_i \cdot d_n \geq K\} \end{aligned}$$

betrachtet.

Für $(x_1, ..., x_{n-1}) \in D$ erhält man

$$K \leq \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot d_n \leq \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot e_n \leq \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot u_n,$$

und damit

$$\begin{aligned}
a_3(x_1, ..., x_{n-1}) &= (\prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot u_n - K)q_{u_n} + (\prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot d_n - K)q_{d_n} \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot (u_n q_{u_n} + d_n q_{d_n}) - K \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot (1 + r_n) - K \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot (e_n \widehat{q}_{e_n} + d_n \widehat{q}_{d_n}) - K \\
&= (\prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot e_n - K)\widehat{q}_{e_n} + (\prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot d_n - K)\widehat{q}_{d_n} \\
&= a_4(x_1, ..., x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Für $(x_1, ..., x_{n-1}) \in C$ ergibt sich

$$\prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot d_n < K < \prod_{i=1}^{n-1} d_i \cdot u_n \leq \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot u_n,$$

und mit $L := K / \prod_{i=1}^{n-1} x_i$ folgt aus Lemma 2.5

$$\begin{aligned}
a_3(x_1, ..., x_{n-1}) &= \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot a(d_n, u_n, L) \\
&> \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot a(d_n, e_n, L) \\
&= a_4(x_1, ..., x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Wegen $(d_1, ..., d_{n-1}) \in C$ ist die Menge C ist nicht-leer, so daß sich schließlich der Widerspruch

$$\begin{aligned}
E_{Q_3}(f) &= \sum_{(x_1,...,x_{n-1}) \in \times_{i=1}^{n-1}\{d_i,u_i\}} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i} \cdot a_3(x_1, ..., x_{n-1}) \\
&= \sum_{(x_1,...,x_{n-1}) \in C} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i} \cdot a_3(x_1, ..., x_{n-1}) \\
&\quad + \sum_{(x_1,...,x_{n-1}) \in D} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i} \cdot a_3(x_1, ..., x_{n-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(x_1,...,x_{n-1})\in C} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i} \cdot a_3(x_1,...,x_{n-1}) \\
&\quad + \sum_{(x_1,...,x_{n-1})\in D} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i} \cdot a_4(x_1,...,x_{n-1}) \\
&> \sum_{(x_1,...,x_{n-1})\in C} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i} \cdot a_4(x_1,...,x_{n-1}) \\
&\quad + \sum_{(x_1,...,x_{n-1})\in D} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i} \cdot a_4(x_1,...,x_{n-1}) \\
&= \sum_{(x_1,...,x_{n-1})\in \times_{i=1}^{n-1}\{d_i,u_i\}} \prod_{i=1}^{n-1} q_{x_i} \cdot a_4(x_1,...,x_{n-1}) \\
&= E_{Q_4}(f)
\end{aligned}$$

ergibt. Damit ist Annahme 2 widerlegt, und zusammen mit der Arbitragefreiheit des Modells folgt $\widehat{u}_i := supp(P_w^{Y_i}) \in (1+r_i,\infty)$ für alle $i \in \{1,...,n\}$.

□

Bemerkung 2.13

Die Aussage von Theorem 2.12 gilt i.a. nicht mehr, wenn man die Annahme A3 *durch eine der schwächeren Annahmen*

$$A3^\star : \begin{cases} \text{Es existiert eine absicherbare europäische Call- oder Put-Option} \\ \text{oder amerikanische Call-Option, deren Ausübungspreis } K \text{ die} \\ \text{Bedingungen } P_w(A_n \geq K) > 0 \text{ und } P_w(A_n < K) > 0 \text{ erfüllt.} \end{cases}$$

bzw.

$$A3_\star : \begin{cases} \text{Es existiert eine absicherbare europäische Call- oder Put-Option} \\ \text{oder amerikanische Call-Option, deren Ausübungspreis } K \text{ die} \\ \text{Bedingungen } P_w(A_n > K) > 0 \text{ und } P_w(A_n \leq K) > 0 \text{ erfüllt.} \end{cases}$$

ersetzt.

Zum Beweis der Bemerkung betrachte man als erstes Gegenbeispiel ein Ein-Perioden Modell mit

$$P_w = \frac{1}{2}R(0,u) + \frac{1}{2}\delta_u,$$

wobei $1+r_1 < u < \infty$. Gemäß Satz 1.10 existiert ein äquivalentes Martingalmaß, so daß $A1$ erfüllt ist. $A2$ gilt trivialerweise.

Weiterhin erfüllt die europäische Call-Option mit Ausübungspreis $K = uA_0$ die Bedingungen

$$P_w(A_1 \geq K) > 0 \quad \text{und} \quad P_w(A_1 < K) > 0.$$

Diese Option ist darüberhinaus absicherbar mit Hedge $H_0 = (0,0)^t$, also gilt $A3^\star$. Als zweites Gegenbeispiel betrachte man wieder ein Ein-Perioden Modell und wähle

$$P_w = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{6}{m^2\pi^2}\,\delta_{m^2}.$$

Auch hier sind offensichtlich $A1$ und $A2$ erfüllt; darüberhinaus erfüllt die europäische Call-Option mit Ausübungspreis $K = A_0$ die Bedingungen $P_w(A_1 \leq K) = \frac{6}{\pi^2} > 0$ und $P_w(A_1 > K) = 1 - \frac{6}{\pi^2} > 0$. Das Portfolio $H_0 = (1, -\frac{K}{1+r})^t$ sichert den Claim ab, so daß $A3_\star$ erfüllt ist.

Die Kombination der Theoreme 2.8, 2.10 und 2.12 ermöglicht eine umfassende Beantwortung der Frage, unter welchen Umständen im stochastisch unabhängigen Fall aus der Forderung der Absicherbarkeit einer einzelnen oder endlich vieler Call- bzw. Put-Optionen sofort die Dichotomie der Faktoren $Y_1, ..., Y_n$ folgt:

Theorem 2.14

Im Aktie/Bond Modell seien $Y_1, ..., Y_n$ nicht-deterministisch, und es seien die folgenden Annahmen erfüllt:

$$A1: \; P_w \sim \bigotimes_{i=1}^{n} P_w^{Y_i}.$$

$A2$: Das Modell ist arbitragefrei.

$$A3: \; \left\{ \begin{array}{l} \sup \mathit{supp}(P_w^{Y_i}) = \sup \mathit{supp}(P_w^{Y_j}) \\ \min \mathit{supp}(P_w^{Y_i}) = \min \mathit{supp}(P_w^{Y_j}) \end{array} \right. \quad \text{für alle } i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Weiterhin gelte entweder

$A4^\star$: *Es existiert eine absicherbare europäische Call- oder Put-Option oder amerikanische Call-Option, deren Ausübungspreis K die Bedingungen $P_w(A_n > K) > 0$ und $P_w(A_n < K) > 0$ erfüllt, und $\nexists\, i \in \{1, ..., n\}$ mit $|\mathit{supp}(P_w^{Y_i})| > |\mathit{supp}(P_w^{Y_j})| \;\forall\, j \neq i$.*

oder

$A4_\star$: *Es existieren n verschiedene absicherbare europäische Call- oder Put-Optionen oder amerikanische Call-Optionen, deren Ausübungspreise $K_1, ..., K_n$ die Bedingungen $P_w(A_n > K_i) > 0$ und $P_w(A_n < K_i) > 0$ erfüllen, $i = 1, ..., n$.*

Dann liegt ein Binomialmodell mit Parametern d, u und $r_1, ..., r_n$ vor, die für $i = 1, ..., n$ die Bedingungen $0 < d < 1 + r_i < u < \infty$ erfüllen.

Insbesondere erhält man nicht nur einen alternativen Beweis für Satz 1.30 mit den Methoden der Finanzmathematik, sondern sogar eine deutliche Verschärfung dieses Ergebnisses:

Korollar 2.15
Im Aktie/Bond Modell seien die Faktoren nicht-deterministisch.

a) Die Annahmen

$$\begin{aligned} A1 &: P_w \sim (P_w^{Y_1})^n. \\ A2 &: \textit{Das Modell ist arbitragefrei.} \\ A3 &: \left\{ \begin{array}{l} \textit{Es ex. eine absicherbare europäische Call- oder Put-Option} \\ \textit{oder amerikanische Call-Option, deren Ausübungspreis } K \textit{ den} \\ \textit{Bedingungen } P_w(A_n > K) > 0 \textit{ und } P_w(A_n < K) > 0 \textit{ genügt.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

sind genau dann erfüllt, wenn ein Cox-Ross-Rubinstein Modell vorliegt.

b) Es seien folgende Annahmen erfüllt:

$$\begin{aligned} A1 &: P_w \sim \bigotimes_{i=1}^{n} (P_w^{Y_i}). \\ A2 &: \textit{Das Modell ist arbitragefrei.} \\ A3 &: \left\{ \begin{array}{l} \textit{Es ex. eine absicherbare europäische Call- oder Put-Option} \\ \textit{oder amerikanische Call-Option, deren Ausübungspreis } K \textit{ den} \\ \textit{Bedingungen } P_w(A_n > K) > 0 \textit{ und } P_w(A_n < K) > 0 \textit{ genügt.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dann existieren überabzählbar viele europäische Call- und Put-Optionen und amerikanische Call-Optionen, die genau dann absicherbar sind, wenn ein Binomialmodell vorliegt.

Insbesondere die Ergebnisse von Theorem 2.14 und Korollar 2.15 verdeutlichen die Notwendigkeit der Suche nach geeigneten Preissystemen in der diskreten Finanzmathematik, die nicht auf der Konstruktion von replizierenden Portfolios basieren: Schon unter sehr schwachen Voraussetzungen sind von denjenigen fundamentalen Finanzderivaten *europäische Call- und Put-Option* sowie *amerikanische Call-Option*, deren Ausübungspreis K die Bedingungen $P_w(A_n > K) > 0$ und $P_w(A_n < K) > 0$ erfüllt, höchstens endlich viele absicherbar, insbesondere im i.i.d.-Fall sogar *keine einzige*.

Im nächsten Abschnitt werden anhand der obigen Ergebnisse einige „prominente“ zeitdiskrete Modelle darauf untersucht, ob in ihnen die betrachteten fundamentalen Finanzderivate absicherbar sind.

2.3 Anwendungsbeispiele

2.3.1 Modelle mit diskreten Faktoren

Im Aktie/Bond Modell seien $\Omega_1, ..., \Omega_n$ abzählbare Teilmengen von $(0, \infty)$ mit

$$d_i := \inf \Omega_i < 1 + r_i < u_i := \sup \Omega_i, \quad i = 1, ..., n,$$

und es gelte $supp(P_w) = \bigtimes_{i=1}^{n} \Omega_i$. Insbesondere ist dann die Bedingung $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^{n} P_w^{Y_i}$ erfüllt, so daß sich Theorem 2.12 anwenden läßt:

Korollar 2.16
Falls $u_{i_0} = \infty$ oder $d_{i_0} = 0$ für ein i_0 gilt, so existiert in diesem Modell keine absicherbare europäische Call- oder Put-Option oder amerikanische Call-Option, deren Ausübungspreis die Bedingungen $P_w(A_n > K) > 0$ und $P_w(A_n < K) > 0$ erfüllt.

Es wird daher im folgenden angenommen, daß $0 < d_i < 1 + r_i < u_i < \infty$ für alle i gilt. In Zeiträumen mit echt ansteigender bzw. abfallender Aufspreizung des Aktienkurses erhält man unterschiedliche Ergebnisse für die Existenz absichernder Handelsstrategien:

Korollar 2.17

a) *Es gelte $[d_1, u_1] \subset [d_2, u_2] \subset ... \subset [d_n, u_n]$, wobei mindestens eine Inklusion strikt sei. Dann ist die Existenz einer absicherbaren europäischen Call- oder Put-Option oder amerikanischen Call-Option, deren Ausübungspreis K die Bedingungen $P_w(A_n > K) > 0$ und $P_w(A_n < K) > 0$ erfüllt, äquivalent zu $|\Omega_i| = 2$ für alle i.*

b) *Es gelte $[d_1, u_1] \supset [d_2, u_2] \supset ... \supset [d_n, u_n]$. Aus $|\Omega_{i_0}| > 2$ für mindestens ein i_0 folgt die Existenz überabzählbar vieler nicht-absicherbarer europäischer Call- oder Put-Optionen oder amerikanischer Call-Optionen. Es können jedoch überabzählbar viele Optionen mit einem Ausübungspreis K existieren, der zwar die Bedingungen $P_w(A_n > K) > 0$ und $P_w(A_n < K) > 0$ erfüllt, deren Absicherbarkeit jedoch nicht äquivalent zur Dichotomie der Faktoren ist.*

Die denkbar einfachste Verallgemeinerung des Cox-Ross-Rubinstein Modells bildet das *n-Perioden Trinomialmodell*, bei dem sich der Aktienkurs in jedem Schritt nur um einen Faktor d, e oder u ändern kann. Es findet in der Praxis zum einen Anwendung bei der Bewertung von Kreditderivaten (vgl. z.B. [13]), zum anderen bei der Beurteilung amerikanischer Optionen, beispielsweise im *Adaptive Mesh Model* (vgl. [31], S. 406). Das Trinomialmodell ist jedoch nicht nur unvollständig, sondern ermöglicht für keines der in diesem Kapitel betrachteten fundamentalen Finanzderivate die Preisfestsetzung durch Bildung eines Hedges. Allgemeiner erhält man für diskrete Modelle, in denen die Träger der Faktoren übereinstimmen:

Korollar 2.18
Im Aktie/Bond Modell gelte supp(P_w) $= \Omega_1^n$, wobei Ω_1 eine abzählbare Menge mit $0 < \inf \Omega_1 < 1+r_i < \sup \Omega_1 < \infty$, $i = 1, ..., n$ sei. Dann existiert genau dann eine absicherbare europäische Call- oder Put-Option oder amerikanische Call-Option mit $P_w(A_n > K) > 0$ und $P_w(A_n < K) > 0$, wenn ein Cox-Ross-Rubinstein Modell vorliegt.

2.3.2 Zeitdiskretisierung des Black-Scholes Modells

Das 1973 von F. Black, M. Scholes und R.C. Merton eingeführte Black-Scholes Modell (vgl. [8], [43] und [42]) ist wohl das „prominenteste" zeitstetige Finanzmarktmodell. Innerhalb eines endlichen Zeitraumes $[0, T]$ werden dabei zwei Finanzgüter gehandelt, nämlich ein Bond mit konstanter Zinsrate $\rho > 0$ und eine Aktie mit zufallsabhängigem Preisprozeß.

Der Preisverlauf $\underset{\sim}{B}$ des Bonds wird folglich beschrieben durch

$$B_t = e^{\rho t}, \quad t \in [0, T].$$

Zur Modellierung des Aktienpreisprozesses $\underset{\sim}{A}$ mit Anfangsaktienpreis $A_0 > 0$ wird ein Standard-Wiener-Prozeß $\underset{\sim}{W}$ mit endlichem Horizont T auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verwendet, ferner zwei Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$:

$$A_t = A_0 e^{\mu t} e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t} = A_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}, \quad t \in [0, T].$$

$\underset{\sim}{A}$ wird dann als Aktienpreisprozeß mit *Volatilität* σ und *Trend* μ bzw. *Drift* $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ bezeichnet.

Als Informationsverlauf $\underset{\sim}{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$ wählt man die rechtsseitig stetige vergrößerte kanonische Filtration, d.h.

$$\mathcal{F}_t = \sigma\big(\sigma(X_s : s \leq t) \cup \{A \in \mathcal{F} : P(A) = 0\}\big).$$

Mit Hilfe eines Spezialfalls des Satzes von Girsanov erhält man:

Lemma 2.19 ([50], Lemma 5.1.2)
Das eindeutig bestimmte äquivalente Martingalmaß für den abdiskontierten Aktienpreisprozeß wird durch die Radon-Nikodym Ableitung

$$\frac{dQ}{dP} = \exp(\frac{\rho - \mu}{\sigma} W_T - \frac{(\rho - \mu)^2}{2\sigma^2} T)$$

festgelegt. Bezüglich Q ist $(W_t)_{t \in [0,T]}$ ein Wiener-Prozeß mit Drift $\rho - \frac{\sigma^2}{2}$ und Volatilität σ.

Beim Übergang zum äquivalenten Martingalmaß wird demnach der subjektive Trend μ durch die objektive Drift ρ des Bondpreisprozesses ersetzt.

Die Fundamentalsätze der Preistheorie (vgl. Satz 1.9 und Satz 1.27) lassen sich nicht direkt auf zeitstetige Modelle übertragen, d.h. die Arbitragefreiheit bzw. Vollständigkeit folgt in diesen nicht alleine aus der Existenz bzw. Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes. Beispiele für Arbitragemöglichkeiten befinden sich z.B. in Abschnitt 5.1.1 von [50] und Abschnitt 0.2 von [37]. Auch die umgekehrten Implikationen gelten nicht, wie zum Beispiel in [20] bewiesen wird.

Bei der Untersuchung des Black-Scholes Modells auf Arbitragefreiheit ist zunächst die Menge der Handelsstrategien geeignet einzuschränken:

Definition 2.20 ([50], Seite 112 ff., [33], Kapitel 12 und [7], Definition 6.1.5)

a) *Eine Handelsstrategie im Black-Scholes Modell ist ein Paar $(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b})$ von previsiblen (d.h. bezüglich $\sigma(\{\{0\} \times F_0 : F_0 \in \mathcal{F}_0\} \cup \{(s,t] \times F_s : F_s \in \mathcal{F}_s, 0 \leq s < t < \infty\})$ meßbaren) stochastischen Prozessen.*

b) *Eine Handelsstrategie $(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b})$ heißt selbstfinanzierend, falls der Werteprozeß $(V_t(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}))_{t \in [0,T]}$ mit $V_t(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = a_t A_t + b_t B_t$ die Bedingung*

$$V_t(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = V_0(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) + \int_0^t a_u \, dA_u + \int_0^t b_u \, dB_u$$

erfüllt (wobei das linke Integral im Itô-Sinne zu verstehen ist, vgl. z.B. [33], Kapitel 9). Hinreichend für die Wohldefiniertheit der Integrale sind die Bedingungen

$$P(\int_0^T a_u^2 \, du < \infty) = 1 \quad \textit{und} \quad P(\int_0^T |b_u| \, du < \infty) = 1.$$

c) *Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie* $(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})$ *wird als zahm (engl. tame) bezeichnet, falls der abdiskontierte Werteprozeß* $(e^{-\rho t}V_t(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}))_{t\in[0,T]}$ *die Bedingung*
$$e^{-\rho t}V_t(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) \geq 0 \quad \textit{für alle } t \in [0,T].$$
erfüllt.

d) *Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie* $(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})$ *wird als zulässig bezeichnet, falls ihr abdiskontierter Werteprozeß ein Martingal bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes* Q *ist.*

Hieraus erhält man die erste fundamentale Eigenschaft des Black-Scholes Modells:

Satz 2.21 ([7], Theorem 6.1.1, Theorem 6.1.3 und Definition 6.1.3)
Das Black-Scholes Modell enthält weder in der Menge der zulässigen noch in der Menge der zahmen Handelsstrategien Arbitragemöglichkeiten, d.h. es existiert in diesen Mengen keine selbstfinanzierende Handelsstrategie $(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})$ *mit*

$$V_0(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = 0, \quad P(V_T(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) \geq 0) = 1, \quad P(V_T(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) > 0) > 0.$$

Hier stellt sich nun die Frage nach der *Vollständigkeit* des Black-Scholes Modells, wofür zunächst die Begriffe Claim und Hedge für zeitstetige Modelle definiert werden:

Definition 2.22 ([33], Definition 12.7)
Ein Black-Scholes Claim ist eine $\mathcal{F}_T$*-meßbare Abbildung* $C_T : \Omega \to \mathbb{R}$*. Er heißt absicherbar, wenn eine zulässige selbstfinanzierende Handelsstrategie* $(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})$ *mit*

$$V_T(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = C_T$$

existiert. Man bezeichnet $(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})$ *dann als Martingalhedge von* C_T*.*

Im Gegensatz zu zeitdiskreten Modellen (vgl. Satz 1.28) läßt sich aus der Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes im Black-Scholes Modell nicht sofort die Existenz von (Martingal-)Hedges für *beliebige* Claims folgern. In [33] wird die Absicherbarkeit aller Black-Scholes Claims mit $E_Q(C^2) < \infty$ bewiesen; allgemeiner erhält man:

Satz 2.23 ([7], Theorem 6.1.5)
Das Black-Scholes Modell ist vollständig im eingeschränkten Sinne, d.h. zu jedem Black-Scholes Claim mit

$$e^{-\rho T} C_T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{F}_T, Q)$$

existiert ein Martingalhedge.

Nicht-Absicherbarkeit tritt demnach höchstens bei Claims auf, die nicht bezüglich Q integrierbar sind, und bei denen folglich keine Bewertung mit Hilfe des äquivalenten Martingalmaßes möglich ist. Für alle $C_T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{F}_T, Q)$ erhält man jedoch eine eindeutig bestimmte faire Bewertung:

Satz 2.24 ([7], Theorem 6.1.4)
Der eindeutig bestimmte faire Preis eines absicherbaren Black-Scholes Claims C_T zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ ist gegeben durch

$$s_t(C_T) = e^{\rho(t-T)} E_Q(C_T | \mathcal{F}_t).$$

Als Folgerung dieses Satzes erhält man die „berühmte“ Black-Scholes Bewertungsformel für europäische Call-Optionen, aus der sich die fairen Preise für europäische Put-Optionen und amerikanische Call-Optionen ableiten lassen:

Beispiel 2.25 ([8], [50], Seite 123 und [33], Abschnitt 8.20)
Der faire Preis einer europäischen Call-Option mit Ausübungspreis K, also von $C_T = (A_T - K)^+$, in einem Zeitpunkt $t \in [0, T)$ ist gegeben durch

$$s_t(C_T) = A_t \Phi(d_1(A_t, t)) - K e^{-\rho(T-t)} \Phi(d_2(A_t, t)), \qquad (\star)$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist und

$$\begin{aligned} d_1(A_t, t) &= \frac{\ln(\frac{A_t}{K}) + (\rho + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2(A_t, t) &= \frac{\ln(\frac{A_t}{K}) + (\rho - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

Beim amerikanischen Call mit Ausübungspreis K und Laufzeit T bildet

$$(e^{-\rho t}(A_t - K)^+)_{t \in [0,T]}$$

ein Submartingal bezüglich Q, so daß der faire Preis zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$

gegeben ist durch

$$s_t(\underset{\sim}{C}) = \sup_{\tau \geq t} E_Q(e^{-\rho\tau}(A_\tau - K)^+|\mathcal{F}_t) = E_Q(e^{-\rho T}(A_T - K)^+|\mathcal{F}_t) = s_t(C_T),$$

d.h. durch den fairen Preis des entsprechenden europäischen Calls.

Für die europäische Put-Option mit Ausübungspreis K, also für $P_T = (K - A_T)^+$, erhält man für $t \in [0,T]$ aufgrund der Put-Call-Parität

$$s_t(C_T) - s_t(P_T) = A_t - Ke^{-\rho(T-t)}$$

als fairen Preis

$$s_t(P_T) = Ke^{-\rho(T-t)}\Phi(-d_2(A_t,t)) - A_t\Phi(-d_1(A_t,t)).$$

Das Black-Scholes Modell findet in der Praxis vielfache Anwendung, insbesondere bei der Bewertung von europäischen Call- und Put-Optionen und amerikanischen Call-Optionen. Aus der Black-Scholes Bewertungsformel ($\star$) läßt sich z.B. sofort eine absichernde Handelsstrategie für einen europäischen Call mit Ausübungspreis K ablesen:

Zu jedem Zeitpunkt $t \in [0,T)$

- erwerbe man $\Phi(d_1(A_t,t))$ Aktien und
- gehe ein short-selling von $Ke^{-\rho T}\Phi(d_2(A_t,t))$ Einheiten Bond ein.

Die zugehörige Handelsstrategie

$$(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = \big((\Phi(d_1(A_t,t)))_{t\in[0,T]}, (Ke^{-\rho T}\Phi(d_2(A_t,t)))_{t\in[0,T]}\big)$$

(mit $\Phi(d_i(A_T,T)) = \lim_{t\to T}\Phi(d_i(A_t,t)) = 1$, $i = 1,2$) ist selbstfinanzierend (vgl. [33], Satz 12.16) mit $V_t(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = s_t(C_T)$, $t \in [0,T)$, und $V_T(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = C_T$.

In der Anwendung erweist sich diese Strategie jedoch als nicht praktikabel. Zum einen ist ein zeitstetiges Anpassen allein aus technischen Gründen nicht möglich. Zum anderen sind in realen Finanzmarktsituationen Umschichtungen mit Kosten verbunden. Selbst wenn diese für einmalige (und somit auch für endlich viele) Transaktionen in der Regel vernachlässigbar klein sind und daher in der Modellierung nicht berücksichtigt werden, würden sie sich bei zeitstetigen Portfolioveränderungen innerhalb einer beliebig kurzen Zeitspanne zum Wert unendlich aufsummieren.

In realen Situationen wird daher das „absichernde“ Portfolio der Bank nur an endlich vielen diskreten Zeitpunkten $t_1, ..., t_n$ neu zusammengestellt, wobei $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ in der Regel einen Tag (!) beträgt.

Daher wird eine Zeitdiskretisierung des Black-Scholes Modells mit $n+1$ äquidistanten Handelszeitpunkten $0 = t_0 < t_1 = \frac{T}{n} < t_2 = \frac{2T}{n} < ... < t_n = T$ nun auf die grundlegenden Eigenschaften Arbitragefreiheit und Absicherbarkeit der fundamentalen Finanzderivate aus Beispiel 2.25 untersucht.

Bei der Modellierung des Aktienpreisprozesses sollen dabei die grundlegenden Eigenschaften des Wiener-Prozesses mit Drift μ und Volatilität $\sigma^2 > 0$ auf den zeitdiskreten Fall übertragen werden. Gesucht sind daher Zufallsgrößen $W_{t_0},...,W_{t_n}$ auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, für die gilt:

1) $W_0 = 0$,

2) für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ besitzt W_{t_k} eine $N(\mu t_k, \sigma^2 t_k)$-Verteilung,

3) die Zuwächse $W_{t_1} - W_{t_0}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sind stochastisch unabhängig,

4) die Zuwächse $W_{t_1} - W_{t_0}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sind stationär, d.h. $P^{W_{t_k} - W_{t_{k-1}}} = P^{W_{t_j} - W_{t_{j-1}}}$ für alle $1 \leq j < k \leq n$.

Aus 3) folgt sofort, daß auch für beliebige $J = \{s_1, ..., s_j\} \subset \{t_0, ..., t_n\}$ mit $|J| \geq 2$ die Zuwächse $W_{s_j} - W_{s_{j-1}}$, $j \in J$, stochastisch unabhängig sind. Weiter erhält man aus 3) und 4), daß $P^{W_{t_{k+j}} - W_{t_k}} = P^{W_{t_{r+j}} - W_{t_r}}$ für $r, j, k \in \{0, ..., n\}$ mit $k + j, r + j \leq n$ gilt. Als Folgerung von 1), 2) und 4) ergibt sich ferner

$$P^{W_{t_k} - W_{t_{k-1}}} = P^{W_{t_1} - W_{t_0}} = N\big(\mu\frac{T}{n}, \sigma^2\frac{T}{n}\big), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Über die Darstellung

$$W_{t_k} = \sum_{j=1}^{k}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}), \quad 1 \leq k \leq n,$$

und Eigenschaft 3) ergibt sich sofort eine (eindeutige) Konstruktionsmöglichkeit von $(W_{t_k})_{0 \leq k \leq n}$:

Lemma 2.26
Es existieren genau dann Zufallsgrößen $(W_{t_k})_{0 \leq k \leq n}$ mit den Eigenschaften 1)-4) auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, wenn auf diesem W-Raum stochastisch unabhängige, identisch $N(0,1)$-verteilte Zufallsgrößen $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ existieren. Dann wird $(W_{t_k})_{0 \leq k \leq n}$ festgelegt durch $W_0 = 0$ und

$$W_{t_k} = \sum_{j=1}^{k}\big(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\,\varepsilon_j + \mu\frac{T}{n}\big), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Damit erhält man schließlich ein zeitdiskretes Analogon zum Black-Scholes Modell:

Definition 2.27
Betrachtet werde ein n-Perioden Modell eines Finanzmarktes mit zwei Finanzgütern, nämlich einem Bond mit konstanter Zinsrate $\rho > 0$ und einer Aktie mit einem exponentiellen Random Walk als Preisprozeß. Der Zeithorizont sei T, und die Handelszeitpunkte seien $t_0, t_1, ..., t_n$ mit $t_k = k\frac{T}{n}$ für $0 \leq k \leq n$.

Der Preisverlauf des Bonds sei gegeben durch $B_0 = 1$ und

$$B_{t_k} = \exp(\rho\, t_k) = (1 + r_n)^k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

mit $r_n = \exp(\frac{T}{n}\rho) - 1$.

Weiterhin seien $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ stochastisch unabhängige, identisch $N(0,1)$-verteilte Zufallsgrößen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Der Aktienpreisprozeß mit Anfangsaktienkurs $A_0 > 0$, Volatilität $\sigma > 0$ und Trend $\mu \in \mathbb{R}$ werde modelliert durch

$$\begin{aligned} A_{t_k} &= A_0 \exp\Big(\sum_{i=1}^{k} \Big(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\, \varepsilon_i + \big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\big)\frac{T}{n}\Big)\Big) \\ &= A_0 \exp\Big(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\, \big(\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i\big) + \big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\big)\frac{kT}{n}\Big) \end{aligned}$$

für $1 \leq k \leq n$. Schließlich sei der Informationsverlauf $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ gegeben durch die von $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ erzeugte kanonische Filtration, wobei $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ gelte.

Dieses Modell wird als zeitdiskretes Analogon zum Black-Scholes Modell mit n+1 äquidistanten Handelszeitpunkten bezeichnet, kurz $BS_{(n)}$ Modell.

Bei Modellen der Form $BS_{(n)}$ stimmen nicht nur die Verteilung des Aktienkurses zu den Zeitpunkten $t_0, ..., t_n$ mit denen eines Black-Scholes Modells mit derselben Drift und Volatilität überein und erfüllen die Voraussetzungen stochastisch unabhängiger und stationärer Zuwächse. Vielmehr liefert der nachfolgende *Satz von Donsker*, daß bei einer Einbettung des zeitdiskreten Aktienpreisprozesses in einen stetigen Zeitrahmen durch eine geeignete Interpolation der Aktienkurse zwischen den Handelszeitpunkten $t_0, ..., t_n$ stochastische Prozesse mit stetigen Pfaden entstehen, die für $n \to \infty$ schwach gegen die geometrische Brownsche Bewegung eines Black-Scholes Modells konvergieren.

Der Beweis des Satzes von Donsker (vgl. z.B. [6], Kapitel 8) läßt sich dabei von seiner ursprünglichen Formulierung für den Horizont $[0,1]$ direkt auf den Horizont $[0,T]$ übertragen, für den er hier notiert wird:

Satz 2.28 (Satz von Donsker) (vgl. [6], Theorem 8.2)
Seien $\underset{\sim}{W}$ *ein Standard-Wiener-Prozeß,* $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Zufallsgrößen mit Erwartungswert 0 und Varianz* 1 *sowie* $S_0 := 0$ *und* $S_k := \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i,\ k \in \mathbb{N}$. *Definiert man dann für* $n \in \mathbb{N}$ *den stochastischen Prozeß* $\underset{\sim}{X}^n$ *durch*

$$X_t^n(\omega) = \sqrt{\frac{T}{n}} \cdot \left[S_{\lfloor \frac{nt}{T} \rfloor}(\omega) + \big(\frac{nt}{T} - \lfloor \frac{nt}{T} \rfloor\big) \cdot \varepsilon_{\lfloor \frac{nt}{T} \rfloor + 1}(\omega) \right]$$

(wobei $\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \le x\}$*), so folgt*

$$\underset{\sim}{X}^n \xrightarrow{w} \underset{\sim}{W},$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty} E\, h\big((X_t^n)_{t\in[0,T]}\big) = E\, h\big((W_t)_{t\in[0,T]}\big)$$

für alle stetigen und beschränkten Funktionen $h : \mathcal{C}[0,T] \to \mathbb{R}$ *(wobei die Topologie auf* $\mathcal{C}[0,T]$ *induziert sei durch* $\|f - g\| := \sup_{t\in[0,T]} |f(t) - g(t)|$*).*

Die folgenden Abbildungen zeigen für ein festes $\omega \in \Omega$ den Pfad $t \mapsto X_t^n(\omega)$ von X^n bei verschiedenen Iterationstiefen n. Der Zeithorizont beträgt dabei $T = 250$ Tage, d.h. ein Börsenjahr:

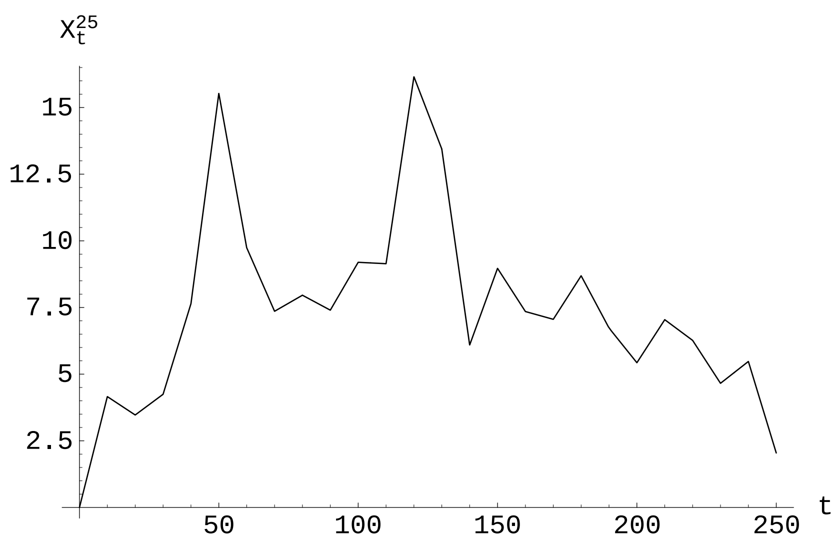

Abb. 12a:
$n = 25$

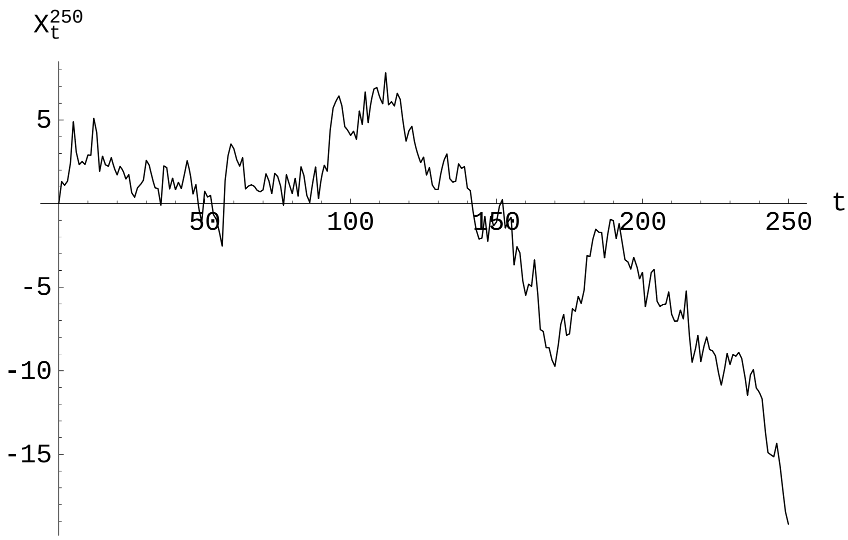

Abb. 12b:
$n = 250$

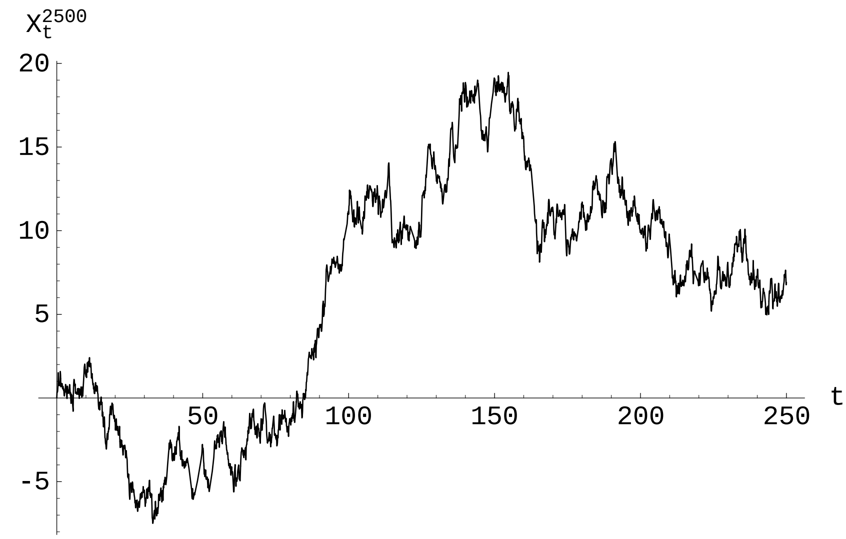

Abb. 12c:
$n = 2500$

Für wachsendes n erkennt man eine zunehmende Ähnlichkeit zwischen $t \mapsto X_t^n(\omega)$ und einem Pfad einer physikalisch realisierten Brownschen Bewegung.

Aus dem Satz von Donsker erhält man eine erste Konvergenzaussage für $BS_{(n)}$ Modelle:

Mit denselben Voraussetzungen und der Notation aus Satz 2.28 sei für $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ der Aktienpreisprozeß $(A_t^n)_{t \in [0,T]}$ festgelegt durch

$$A_t^n(\omega) = A_0 \exp\big(\sigma X_t^n(\omega) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\big).$$

Dann entspricht $(A_{k\frac{T}{n}})_{k \in \{0,\ldots,n\}}$ dem Aktienpreisprozeß eines $BS_{(n)}$ Modells, und man erhält $(A_t^n)_{t \in [0,T]}$ aus $(A_{k\frac{T}{n}})_{k \in \{0,\ldots,n\}}$ durch Interpolation zwischen den

Stützstellen $t_0, ..., t_n$. Anders als bei X_t^n wird hier jedoch nicht *linear*, sondern mit Hilfe von *Exponentialfunktionen* der Form

$$g_t^n(\omega) = \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\right) \sum_{k=1}^{n} \exp\left(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\,(S_k(\omega) + (\frac{nt}{T} - k)\varepsilon_{k+1}(\omega))\right) \cdot 1_{(t_k,t_{k+1})}(t)$$

interpoliert.

Aus dem Satz von Donsker folgt nun zusammen mit dem *mapping theorem* (vgl. [6], Theorem 2.7) und der Stetigkeit der Exponentialfunktion:

Lemma 2.29
Die Folge $((A_t^n)_{t\in[0,T]})_{n\in\mathbb{N}}$ der Aktienpreisprozesse konvergiert schwach (im Sinne von Satz 2.28) gegen eine geometrische Brownsche Bewegung mit Volatilität σ und Drift $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$, d.h. gegen den Aktienpreisprozeß eines Black-Scholes Modells mit Volatilität σ und Trend μ.

Zur Illustration wird dieselbe Folge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und dasselbe ω wie in den Abbildungen 12a, b und c betrachtet. Weiterhin sei wieder $T = 250$, d.h. es soll der Preisprozeß einer Aktie während eines Börsenjahres beobachtet werden. Die 250-Tages-Volatilitäten von Aktien aus dem DAX100 liegen in der Regel zwischen 0.2 und 0.5; es wird daher $\sigma\sqrt{T} = 0.25$, d.h. $\sigma = \sqrt{0.00025}$ gewählt. Zur Festsetzung des Trends wird angenommen, daß sich die Aktie innerhalb des Börsenjahres im Mittel wie eine festverzinsliche Anlage mit Verzinsung $r = 0.05$ entwickelt, was einem Trend von $\mu = \frac{\ln(1.05)}{250}$ entspricht. Die folgenden Abbildungen zeigen jeweils den Pfad $t \mapsto \frac{1}{A_0}A_t^n(\omega)$ für verschiedene Iterationstiefen. Erst bei hinreichender Vergrößerung wird in Abb. 13d erkennbar, daß es sich hierbei nicht um *lineare* Interpolation handelt (welche gestrichelt dargestellt ist).

Abb. 13a:
$n = 25$

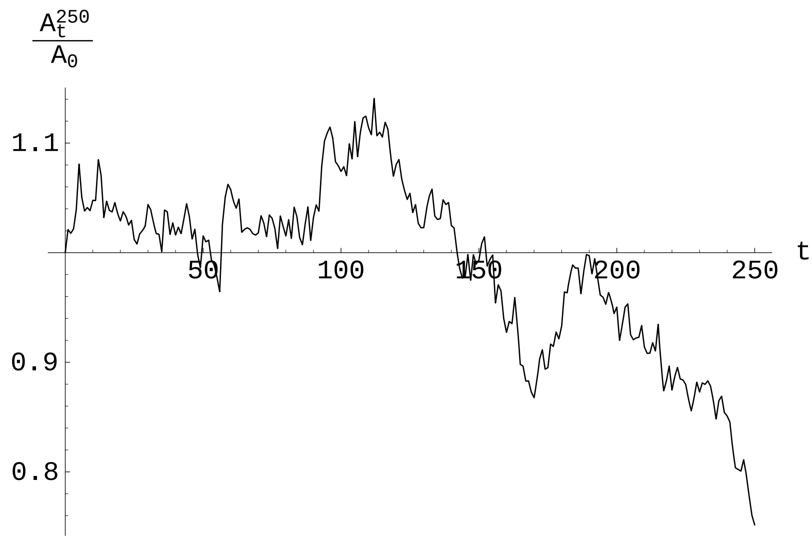

Abb. 13b:
$n = 250$

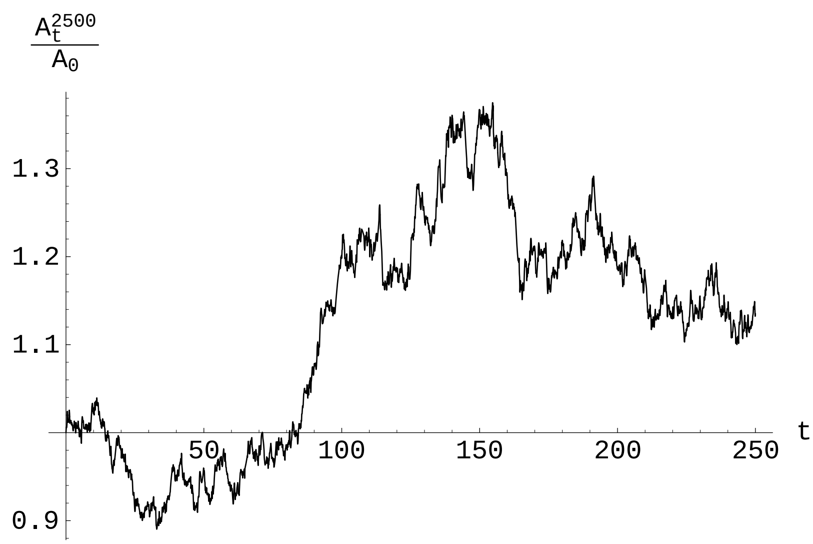

Abb. 13c:
$n = 2500$

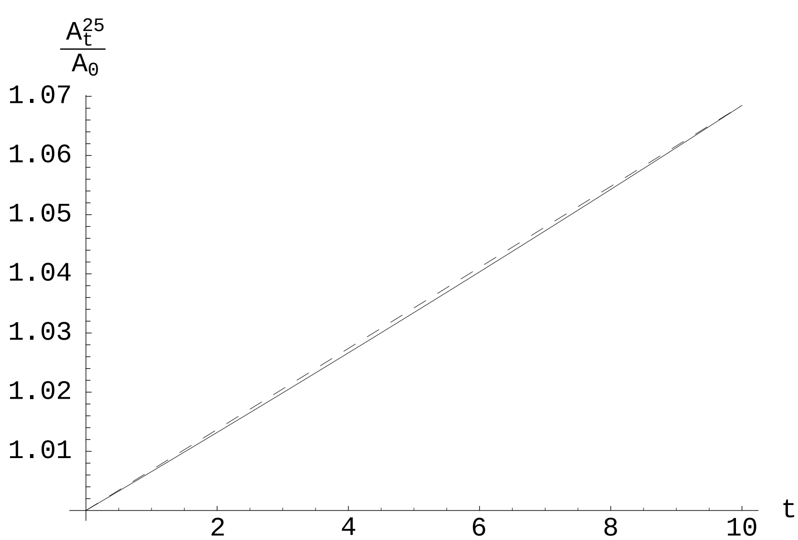

Abb. 13d:
$n = 25$

Die folgende Abbildung verdeutlicht den Einfluß des Trends und somit der Drift auf den Aktienpreisprozeß; im Vergleich zu Abbildung 13c wurde μ um den Faktor 6 vergrößert:

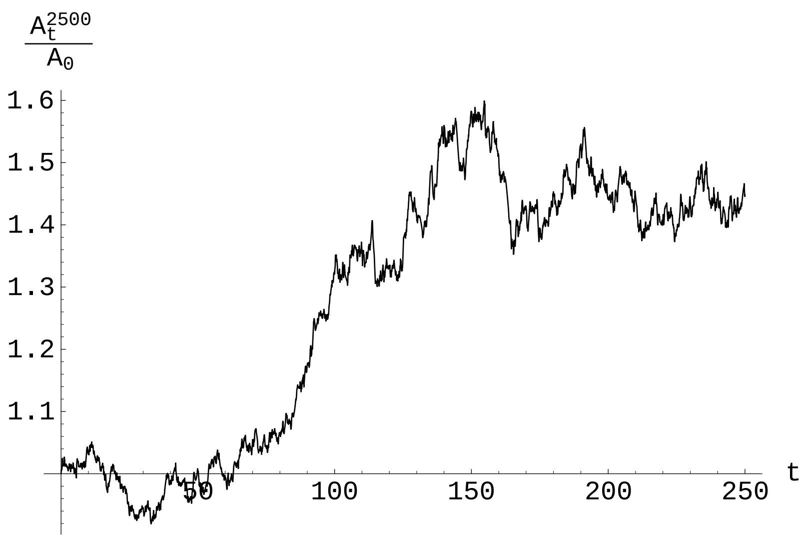

Abb. 13e:
$n = 2500$

Die Konvergenzaussage aus Lemma 2.29 läßt sich noch in zweifacher Hinsicht verbessern. Zum einen entspricht die Konstruktion der Folge $(A_t^n)_{t\in[0,T]}$ nicht der Vorstellung einer immer feineren Betrachtung *eines* Aktienkurses innerhalb *eines* festen Zeitraumes. Mit jedem weiteren Iterationsschritt wird nämlich der gesamte Aktienkursverlauf des letzten Schrittes auf eine kürzere Zeitspanne zusammengestaucht und reskaliert; anschließend findet wieder eine zufallsabhängige Entwicklung bis zum Zeitpunkt T statt. Die Abbildungen 13a, b und c verdeutlichen diese Vorgehensweise: Der Pfad von A^{250} entspricht auf dem Intervall $[0, 25]$ dem reskalierten und gestauchten Pfad von A^{25} und findet sich am Anfang des Pfades von A^{2500} wieder.

Zum anderen ist bei der Interpolation des Aktienkurses zwischen den Beobachtungszeitpunkten die genaue Kenntnis von μ und σ notwendig. Diese Größen sind aber in der Praxis i.a. unbekannt und werden mit Hilfe des Aktienkursverlaufes geschätzt. Wünschenswert wäre daher eine Konvergenzaussage bei *linearer* Interpolation des Aktienkurses. Eine Verallgemeinerung von Lemma 2.29 auf beliebige Folgen von $BS_{(n)}$ Modellen und lineare Interpolation liefert der folgende Satz:

Satz 2.30
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $(S^n_{k\frac{T}{n}})_{k\in\{0,\dots,n\}}$ mit

$$S_{k\frac{T}{n}} = \big(S_{k\frac{T}{n},1}, S_{k\frac{T}{n},2}\big)^t = \Big(A_0 \exp\big(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\,(\sum_{i=1}^{k}\varepsilon^n_i) + \big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\big)\frac{kT}{n}\big), \exp\big(\rho k\frac{T}{n}\big)\Big)^t$$

der Preisprozeß eines $BS_{(n)}$ Modells mit Horizont T, Anfangsaktienpreis $A_0 > 0$, Volatilität $\sigma > 0$, Trend $\mu \in \mathbb{R}$ und Zinsrate $\rho > 0$, wobei $\varepsilon^n_1, \dots, \varepsilon^n_n$ stochastisch unabhängig und $N(0,1)$-verteilt seien. Weiter seien $(A^n_t)_{t\in[0,T]}$ und $({}^l\!A^n_t)_{t\in[0,T]}$ definiert durch

$$A^n_t(\omega) \;=\; A_0 \exp\Big(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\big(\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{nt}{T}\rfloor}\varepsilon^n_k(\omega) + \big(\frac{nt}{T} - \Big\lfloor\frac{nt}{T}\Big\rfloor\big)\varepsilon^n_{\lfloor\frac{nt}{T}\rfloor+1}(\omega)\big)\Big)\cdot\exp\big((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\big),$$

$${}^l\!A^n_t(\omega) \;=\; S_{\lfloor\frac{nt}{T}\rfloor\frac{T}{n},1}(\omega) + \big(\Big\lfloor\frac{nt}{T}\Big\rfloor - \frac{nt}{T}\big)\cdot\big(S_{\lfloor\frac{nt}{T}+1\rfloor\frac{T}{n},1}(\omega) - S_{\lfloor\frac{nt}{T}\rfloor\frac{T}{n},1}(\omega)\big).$$

Schließlich sei $(A^{BS}_t)_{t\in[0,T]}$ der Aktienpreisprozeß eines Black-Scholes Modells mit Volatilität σ und Trend μ. Dann gilt:

a) $(A^n_t)_{t\in[0,T]} \xrightarrow{w} (A^{BS}_t)_{t\in[0,T]}$, d.h. die mit Hilfe von Exponentialfunktionen interpolierten Aktienpreisprozesse der $BS_{(n)}$ Modelle konvergieren schwach gegen den Aktienpreisprozeß des Black-Scholes Modells.

b) Sei $J \in \mathcal{H}([0,T]) := \{I \subset [0,T] : |I| < \infty\}$. Dann folgt

$$\pi_J \circ ({}^l\!A^n_t)_{t\in[0,T]} \xrightarrow{w} \pi_J \circ (A^{BS}_t)_{t\in[0,T]},$$

d.h. die endlich-dimensionalen Randverteilungen der linear interpolierten Aktienpreisprozesse der $BS_{(n)}$ Modelle konvergieren schwach gegen die entsprechenden endlich-dimensionalen Randverteilungen des Aktienpreisprozesses aus dem Black-Scholes Modell.

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ werde der stochastische Prozeß $(\widehat{A}^n_t)_{t\in[0,T]}$ durch

$$\widehat{A}^n_t = A_0 \exp\Big(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\big(\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{nt}{T}\rfloor}\zeta_k + \big(\frac{nt}{T} - \Big\lfloor\frac{nt}{T}\Big\rfloor\big)\zeta_{\lfloor\frac{nt}{T}\rfloor+1}\big)\Big)\cdot\exp\big((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\big)$$

definiert, wobei $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen, identisch $N(0,1)$-verteilten Zufallsgrößen sei. Mit Hilfe von $(g_t)_{t\in[0,T]} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{C}[0,T]$, festgelegt durch

$$g_t(x_1, \dots, x_n) = A_0 \exp\Big(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\big(\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{nt}{T}\rfloor}x_k + \big(\frac{nt}{T} - \Big\lfloor\frac{nt}{T}\Big\rfloor\big)x_{\lfloor\frac{nt}{T}\rfloor+1}\big)\Big)\cdot\exp\big((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\big),$$

erhält man $(\widehat{A}_t^n)_{t\in[0,T]} = (g_t)_{t\in[0,T]} \circ (\zeta_1, ..., \zeta_n)$ und $(A_t^n)_{t\in[0,T]} = (g_t)_{t\in[0,T]} \circ (\varepsilon_1^n, ..., \varepsilon_n^n)$; aus $(\zeta_1, ..., \zeta_n) \sim (\varepsilon_1^n, ..., \varepsilon_n^n)$ folgt daher $(A_t^n)_{t\in[0,T]} \sim (\widehat{A}_t^n)_{t\in[0,T]}$. Gemäß Lemma 2.29 konvergiert $(\widehat{A}_t^n)_{t\in[0,T]}$ schwach gegen $(A_t^{BS})_{t\in[0,T]}$, d.h. *a)* gilt.

Für $s \in [0, T]$ zerlegt man ${}^{l}\!A_s^n(\omega) = {}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns}{T}\rfloor\frac{T}{n}}(\omega) \cdot (1 + \psi_{n,s}(\omega))$ mit

$$\psi_{n,s}(\omega) := \Big(\frac{ns}{T} - \lfloor\frac{ns}{T}\rfloor\Big) \cdot \Big(\exp\big(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\,\varepsilon^n_{\lfloor\frac{ns}{T}+1\rfloor} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{n}\big) - 1\Big).$$

Aus der Ungleichung

$$|\psi_{n,s}| \le \Big|\exp\big(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\,\varepsilon^n_{\lfloor\frac{ns}{T}+1\rfloor} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{n}\big) - 1\Big|$$

ergibt sich wegen $\sqrt{\frac{T}{n}}\,\varepsilon_{\lfloor\frac{ns}{T}+1\rfloor} \xrightarrow{w} 0$ sofort $\psi_{n,s} \xrightarrow{w} 0$. Weiterhin gilt

$${}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns}{T}\rfloor\frac{T}{n}} \sim A_0 \exp\big(\sigma\sqrt{\lfloor\frac{ns}{T}\rfloor\frac{T}{n}} \cdot U + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\lfloor\frac{ns}{T}\rfloor\frac{T}{n}\big)$$

für eine $N(0,1)$-verteilte Zufallsgröße U, und mit $\lim_{n\to\infty}\lfloor\frac{ns}{T}\rfloor\frac{T}{n} = s$ erhält man ${}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns}{T}\rfloor\frac{T}{n}} \xrightarrow{w} A_s^{BS}$. Analog folgt für $s_1, s_2 \in [0, T]$ mit $s_1 < s_2$ aus

$$\frac{{}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns_2}{T}\rfloor\frac{T}{n}}}{{}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns_1}{T}\rfloor\frac{T}{n}}} \sim \exp\big(\sigma(\sqrt{\lfloor\frac{ns_2}{T}\rfloor\frac{T}{n}} - \sqrt{\lfloor\frac{ns_1}{T}\rfloor\frac{T}{n}}) \cdot U + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(\lfloor\frac{ns_2}{T}\rfloor - \lfloor\frac{ns_1}{T}\rfloor)\frac{T}{n}\big)$$

sofort $\frac{{}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns_2}{T}\rfloor\frac{T}{n}}}{{}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns_1}{T}\rfloor\frac{T}{n}}} \xrightarrow{w} \frac{A_{s_2}^{BS}}{A_{s_1}^{BS}}$.

Sei nun $J = \{s_1, ..., s_m\} \in \mathcal{H}([0, T])$ mit $0 \le s_1 < s_2 < ... < s_m \le T$. Aus der stochastischen Unabhängigkeit von ${}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns_1}{T}\rfloor\frac{T}{n}}, \frac{{}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns_2}{T}\rfloor\frac{T}{n}}}{{}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns_1}{T}\rfloor\frac{T}{n}}}, ..., \frac{{}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns_m}{T}\rfloor\frac{T}{n}}}{{}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns_{m-1}}{T}\rfloor\frac{T}{n}}}$ einerseits und derjenigen von $A_{s_1}^{BS}, \frac{A_{s_2}^{BS}}{A_{s_1}^{BS}}, ..., \frac{A_{s_m}^{BS}}{A_{s_{m-1}}^{BS}}$ andererseits erhält man zusammen mit Lemma 2.8 in [6]

$$\Big({}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns_1}{T}\rfloor\frac{T}{n}}, \frac{{}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns_2}{T}\rfloor\frac{T}{n}}}{{}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns_1}{T}\rfloor\frac{T}{n}}}, ..., \frac{{}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns_m}{T}\rfloor\frac{T}{n}}}{{}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns_{m-1}}{T}\rfloor\frac{T}{n}}}\Big) \xrightarrow{w} \Big(A_{s_1}^{BS}, \frac{A_{s_2}^{BS}}{A_{s_1}^{BS}}, ..., \frac{A_{s_m}^{BS}}{A_{s_{m-1}}^{BS}}\Big),$$

und schließlich ergibt sich aus der Stetigkeit von $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $(x_1, ..., x_m) \mapsto (x_1, x_1x_2, ..., \prod_{i=1}^m x_i)$ und Theorem 2.7 in [6]

$$\Big({}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns_1}{T}\rfloor\frac{T}{n}}, ..., {}^{l}\!A^n_{\lfloor\frac{ns_m}{T}\rfloor\frac{T}{n}}\Big) \xrightarrow{w} \Big(A_{s_1}^{BS}, ..., A_{s_m}^{BS}\Big).$$

Theorem 3.9 in [6] liefert

$$(1+\psi_{n,s_1},...,1+\psi_{n,s_m}) \xrightarrow{w} (1,...,1),$$

und durch erneute Anwendung von Theorem 3.9 erhält man

$$\Big(\big({}^l\!A^n_{\lfloor\frac{ns_1}{T}\rfloor\frac{T}{n}},...,{}^l\!A^n_{\lfloor\frac{ns_m}{T}\rfloor\frac{T}{n}}\big),\big(1+\psi_{n,s_1},...,1+\psi_{n,s_m}\big)\Big) \xrightarrow{w} \Big(\big(A^{BS}_{s_1},...,A^{BS}_{s_m}\big),\big(1,...,1\big)\Big).$$

Da die Funktion $g : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^m$, $((x_1,...,x_m),(y_1,...,y_m)) \mapsto (x_1y_1,...,x_my_m)$ stetig ist, ergibt sich schließlich $({}^l\!A^n_{s_1},...,{}^l\!A^n_{s_m}) \xrightarrow{w} (A^{BS}_{s_1},...,A^{BS}_{s_m})$.

□

Eine deutlich stärkere Konvergenzaussage für die linear interpolierten Aktienpreisprozesse erhält man, wenn man zu derjenigen Situation zurückkehrt, welche als Motivation zur Einführung eines zeitdiskreten Analogons des Black-Scholes Modells diente.

Man betrachte also eine Aktie mit Anfangspreis $A_0 > 0$, deren Preisverlauf innerhalb des Zeitraumes $[0,T]$ durch eine geometrische Brownsche Bewegung mit Trend $\mu \in \mathbb{R}$ und Volatilität $\sigma > 0$, d.h. durch

$$(A^{BS}_t)_{t\in[0,T]} = (A_0 \exp(\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t))_{t\in[0,T]}$$

beschrieben wird (wobei $\underset{\sim}{W}$ wieder ein Standard-Wiener-Prozeß sei). Der Aktienkurs werde allerdings nur zu festen äquidistanten Zeitpunkten $t_0,...,t_n$ notiert (mit $t_k = \frac{kT}{n}$) und zwischen den Beobachtungszeitpunkten linear interpoliert.

Dann entspricht der Aktienpreisprozeß $(A^{BS}_{t_k})_{k\in\{0,...,n\}}$ trivialerweise demjenigen eines $BS_{(n)}$ Modells mit Trend μ und Volatilität σ. Für wachsendes n und damit zunehmend feinere Beobachtungen erhält man in dieser Situation für die durch lineare Interpolation in $\mathcal{C}([0,T])$ eingebetteten Aktienpreisprozesse der $BS_{(n)}$ Modelle nun sogar *punktweise* Konvergenz:

Satz 2.31
Definiert man in obiger Situation $({}^l\!A^n_t)_{t\in[0,T]}$ *durch*

$${}^l\!A^n_t = A^{BS}_{\lfloor\frac{nt}{T}\rfloor\frac{T}{n}} + \Big(\frac{nt}{T} - \lfloor\frac{nt}{T}\rfloor\Big)\Big(A^{BS}_{\lfloor\frac{nt}{T}+1\rfloor\frac{T}{n}} - A^{BS}_{\lfloor\frac{nt}{T}\rfloor\frac{T}{n}}\Big),$$

so folgt $\lim_{n\to\infty}({}^l\!A^n_t)_{t\in[0,T]}(\omega) = (A^{BS}_t)_{t\in[0,T]}(\omega)$ *für alle* $\omega \in \Omega$.

Beweis: Sei $\omega \in \Omega$. Zu zeigen ist (mit $\|\cdot\|$ wie in Satz 2.28):

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \geq n_0 : \;\; \|({}^{l}\!A_t^n)_{t\in[0,T]}(\omega) - (A_t^{BS})_{t\in[0,T]}(\omega)\| < \varepsilon.$$

Da $\underset{\sim}{W}$ als Standard-Wiener-Prozeß stetige Pfade besitzt, ist für jedes $\omega \in \Omega$ die Abbildung $t \mapsto A_t^{BS}(\omega)$ auf dem Kompaktum $[0,T]$ gleichmäßig stetig, d.h.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, t, t' \in [0,T],\ |t-t'| < \delta : \;\; |A_t^{BS}(\omega) - A_{t'}^{BS}(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (\star)$$

Für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ werde $\delta > 0$ gemäß $(\star)$ gewählt und $n_0 := \left\lfloor \frac{T}{\delta} \right\rfloor + 1$ definiert. Dann gilt für $n \geq n_0$ und für alle $t \in [0,T]$

$$\left|t - \lfloor \frac{nt}{T} \rfloor \frac{T}{n}\right| < \left|\lfloor \frac{nt}{T} + 1\rfloor \frac{T}{n} - \lfloor \frac{nt}{T} \rfloor \frac{T}{n}\right| \leq \frac{T}{n} \leq \delta,$$

und damit

$$\begin{aligned}
{}^{l}\!A_t^n(\omega) - A_t^{BS}(\omega) &= A^{BS}_{\lfloor \frac{nt}{T}\rfloor \frac{T}{n}}(\omega) + \left(\frac{nt}{T} - \lfloor \frac{nt}{T} \rfloor\right)\left(A^{BS}_{\lfloor \frac{nt}{T}+1\rfloor \frac{T}{n}}(\omega) - A^{BS}_{\lfloor \frac{nt}{T}\rfloor \frac{T}{n}}(\omega)\right) \\
&\quad - A_t^{BS}(\omega) \\
&\leq A^{BS}_{\lfloor \frac{nt}{T}\rfloor \frac{T}{n}}(\omega) + \left|A^{BS}_{\lfloor \frac{nt}{T}+1\rfloor \frac{T}{n}}(\omega) - A^{BS}_{\lfloor \frac{nt}{T}\rfloor \frac{T}{n}}(\omega)\right| - A_t^{BS}(\omega) \\
&\leq \left|A^{BS}_{\lfloor \frac{nt}{T}\rfloor \frac{T}{n}}(\omega) - A_t^{BS}(\omega)\right| + \left|A^{BS}_{\lfloor \frac{nt}{T}+1\rfloor \frac{T}{n}}(\omega) - A^{BS}_{\lfloor \frac{nt}{T}\rfloor \frac{T}{n}}(\omega)\right| \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{l}\!A_t^n(\omega) - A_t^{BS}(\omega) &\geq A^{BS}_{\lfloor \frac{nt}{T}\rfloor \frac{T}{n}}(\omega) - \left|A^{BS}_{\lfloor \frac{nt}{T}+1\rfloor \frac{T}{n}}(\omega) - A^{BS}_{\lfloor \frac{nt}{T}\rfloor \frac{T}{n}}(\omega)\right| - A_t^{BS}(\omega) \\
&\geq -\left|A^{BS}_{\lfloor \frac{nt}{T}\rfloor \frac{T}{n}}(\omega) - A_t^{BS}(\omega)\right| - \left|A^{BS}_{\lfloor \frac{nt}{T}+1\rfloor \frac{T}{n}}(\omega) - A^{BS}_{\lfloor \frac{nt}{T}\rfloor \frac{T}{n}}(\omega)\right| \\
&> -\varepsilon.
\end{aligned}$$

Folglich erhält man

$$\|({}^{l}\!A_t^n)_{t\in[0,T]}(\omega) - (A_t^{BS})_{t\in[0,T]}(\omega)\| = \sup_{t\in[0,T]} |{}^{l}\!A_t^n(\omega) - A_t^{BS}(\omega)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$.

$\square$

Die folgenden Abbildungen zeigen für ein festes $\omega \in \Omega$ den zugehörigen Pfad $t \mapsto {}^{l}\!A_t^n(\omega)$ bei verschiedenen Iterationstiefen n, wobei wieder $T = 250$, $\mu = \frac{\ln(1.05)}{250}$ und $\sigma = \sqrt{0.00025}$ gewählt wird. Auch hier erkennt man eine zunehmende Ähnlichkeit zu dem Pfad einer physikalisch realisierten Brownschen Bewegung; im Gegensatz zur Konstruktion in Lemma 2.29 (vgl. Abb. 13a, b und c) ergibt sich jedoch eine immer feinere Betrachtung *eines* Aktienkurses.

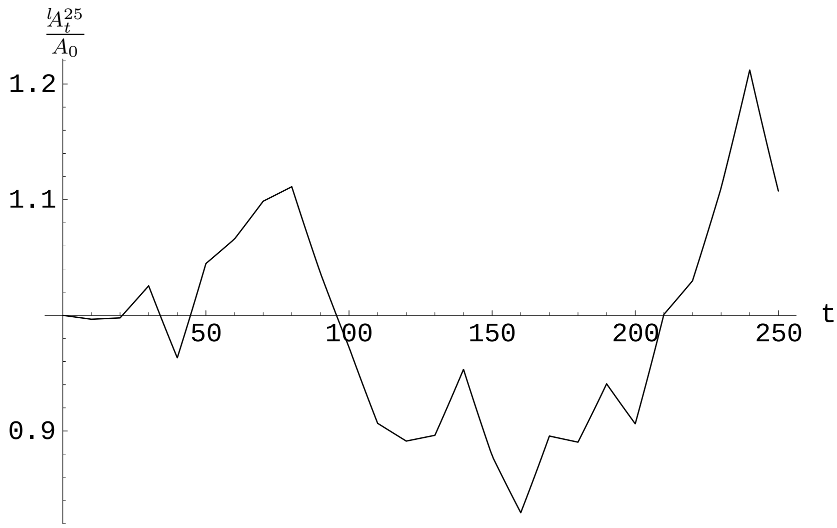

Abb. 14a:
$n = 25$

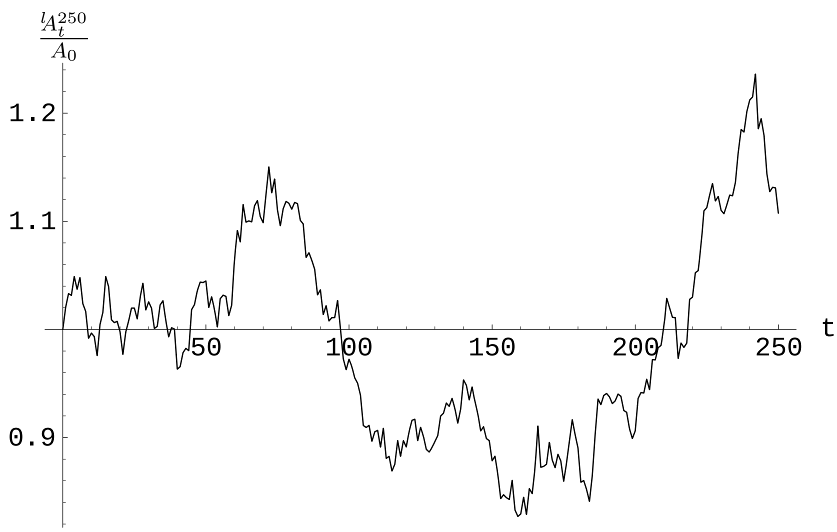

Abb. 14b:
$n = 250$

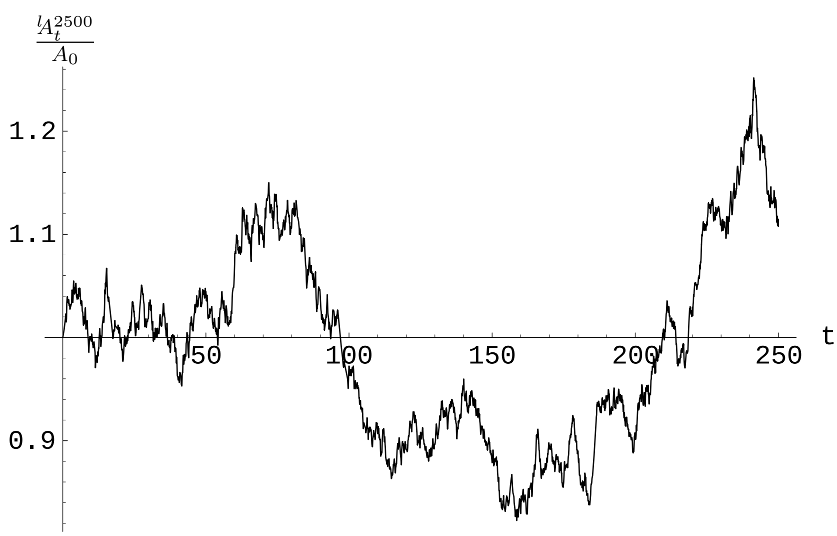

Abb. 14c:
$n = 2500$

Da $BS_{(n)}$ Modelle mit gleichen Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\rho, \sigma > 0$ sowie Horizont $T > 0$ für wachsendes n, d.h. für zunehmend feinere Modellierungen des Aktienpreisprozesses, im Sinne von Lemma 2.29, Satz 2.30 und Satz 2.31 gegen ein Black-Scholes Modell „konvergieren“, stellt sich die Frage, inwieweit sich in ihnen die fundamentalen Eigenschaften Arbitragefreiheit und Absicherbarkeit von Finanzderivaten wiederfinden.

Hinsichtlich der Arbitragefreiheit erhält man „mehr“ als im Black-Scholes Modell, da keine Einschränkung der Menge der Handelsstrategien notwendig ist:

Satz 2.32
Jedes $BS_{(n)}$ Modell ist arbitragefrei.

Beweis: Die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes wird mit Hilfe einer zeitdiskreten Version des Satzes von Girsanov bewiesen. Der abdiskontierte Preisprozeß eines $BS_{(n)}$ Modells mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$, $\rho, \sigma > 0$ sowie Horizont $T > 0$ beträgt gemäß Definition 2.27 $(\widehat{A}_{t_k})_{k\in\{0,\dots,n\}}$ mit

$$\widehat{A}_{t_k} = A_0 \exp\Big(\sum_{i=1}^{k} \Big(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\,\varepsilon_i + \big(\mu - \rho - \frac{\sigma^2}{2}\big)\frac{T}{n}\Big)\Big) = A_0 \exp\Big(\sum_{i=1}^{k}(\widehat{\sigma}\varepsilon_i + \widehat{\mu})\Big),$$

wobei $\widehat{\mu} := (\mu - \rho - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{n}$ und $\widehat{\sigma} := \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}$ sei.

Gilt für $a := -\frac{\widehat{\mu}}{\widehat{\sigma}^2} - \frac{1}{2}$ bereits $a = 0$, so ist $(\widehat{A}_{t_k})_{k\in\{0,\dots,n\}}$ offensichtlich bezüglich P ein Martingal, d.h. P selbst ist ein äquivalentes Martingalmaß.
Falls $a \neq 0$ ist, so definiert man die Zufallsgröße Z_n mittels *bedingter Esscher Transformation* durch

$$Z_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\exp(a\cdot(\widehat{\mu} + \widehat{\sigma}\varepsilon_k))}{E_P\big(\exp(a\cdot(\widehat{\mu} + \widehat{\sigma}\varepsilon_k))\big|(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})\big)},$$

was gemäß Seite 350 in [63] äquivalent ist zu

$$Z_n = \exp\Big(-\sum_{k=1}^{n}\big(\frac{\widehat{\mu}}{\widehat{\sigma}} + \frac{\widehat{\sigma}}{2}\big)\varepsilon_k + \frac{n}{2}\big(\frac{\widehat{\mu}}{\widehat{\sigma}} + \frac{\widehat{\sigma}}{2}\big)^2\Big).$$

Dann liefert Q mit $dQ = Z_n\,dP$ gemäß Abschnitt 3c in Kapitel V von [63] ein äquivalentes Martingalmaß, und aus dem ersten Fundamentalsatz der Preistheorie folgt die Arbitragefreiheit des Modells.

□

Bei der Zeitdiskretisierung des Black-Scholes Modells geht jedoch nicht nur die generelle Absicherbarkeit von Finanzderivaten mit Auszahlungsfunktion aus $\mathcal{L}_1(\mathcal{F}_T, Q)$ verloren; vielmehr ist sogar bei keiner einzigen Call- oder Put-Option eine Preisfestsetzung durch Bildung eines Portfolio-Äquivalentes möglich:

Satz 2.33
In einem $BS_{(n)}$ Modell existiert keine absicherbare europäische Put- oder Call-Option oder amerikanische Call-Option mit echt positivem Ausübungspreis.

Beweis: Sei $(S_{t_k})_{k\in\{0,...,n\}}$ der Preisprozeß eines $BS_{(n)}$ Modells mit Horizont $T > 0$ und Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ sowie $\rho, \sigma > 0$, d.h.

$$S_{t_k} = \Big(A_0 \exp\big(\sum_{i=1}^{k} (\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\,\varepsilon_i + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{n})\big), \exp(\rho t_k)\Big)^t, \quad k = 0, ..., n.$$

Dies läßt sich schreiben als

$$S_{t_k} = \big(A_0 \prod_{i=1}^{k} Y_i, (1+r)^k\big)^t, \quad k = 0, ..., n,$$

mit $Y_i := \exp(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\,\varepsilon_i + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{n})$ und $r := \exp(\frac{T}{n}\rho) - 1$. Man erhält also ein n-Perioden Modell mit stochastisch unabhängigen Faktoren $Y_1, ..., Y_n$. Ohne Einschränkung kann daher

$$(\Omega, \mathcal{F}, P_w) = \big((0,\infty)^n, \mathbb{B}^n_{|(0,\infty)^n}, \bigotimes_{i=1}^{n} P^{\exp(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\,\varepsilon_i + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{n})}\big)$$

als Grundraum und $Y_1, ..., Y_n$ als Koordinatenprojektionen gewählt werden. Offensichtlich gilt

i) $P_w^{(Y_1,...,Y_n)} \sim \bigotimes_{i=1}^{n} P_w^{Y_i}$,

ii) $supp(P_w^{Y_i}) = [0, \infty)$ für $i = 1, ..., n$,

iii) $supp(P_w^{A_0 \prod_{i=1}^{n} Y_i}) = [0, \infty)$,

so daß für jedes $K > 0$ die beiden Bedingungen

$$P_w(A_n > K) > 0 \text{ und } P_w(A_n < K) > 0$$

erfüllt sind; weiterhin ist das Modell nach Satz 2.32 arbitragefrei. Gemäß Theorem 2.12 existiert in ihm folglich keine absicherbare europäische Put- oder Call-Option oder amerikanische Call-Option mit echt positivem Ausübungspreis.

□

Das in der Praxis zur Näherung des Black-Scholes Modells verwendete $BS_{(n)}$ Modell unterstreicht also die Notwendigkeit einer Suche nach alternativen Bewertungskonzepten in der zeitdiskreten Finanzmathematik, welche nicht auf der Bildung eines Hedges basieren.

Im nächsten Abschnitt soll das Ergebnis von Satz 2.33 auf naheliegende Verallgemeinerungen des $BS_{(n)}$ Modells ausgeweitet werden, nämlich auf die Klasse der *Gaußschen Modelle*.

2.3.3 Gaußsche Modelle und bedingte Gaußsche Modelle

Der Aktienpreisprozeß eines $BS_{(n)}$ Modells läßt sich schreiben als

$$(A_{t_k})_{k\in\{0,...,n\}} = (A_0 \exp(\sum_{i=1}^{k} \widehat{h}_i))_{k\in\{0,...,n\}}$$

mit $\widehat{h}_i := \widehat{\mu}+\widehat{\sigma}\varepsilon_i$, $\widehat{\mu} \in \mathbb{R}$, $\widehat{\sigma} > 0$ und stochastisch unabhängigen, identisch $N(0,1)$-verteilten Zufallsgrößen $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Die statistische Analyse von Aktienkursbewegungen zeigt jedoch, daß diese Modellannahme das Verhalten von Preisen nicht immer geeignet widerspiegelt (vgl. [63], S. 103). Eine naheliegende Modifizierung des $BS_{(n)}$ Modells besteht nun darin, die Konstanten $\widehat{\mu}$ und $\widehat{\sigma}$ durch Folgen von previsiblen Zufallsgrößen $(\mu_k)_{k\in\{1,...,n\}}$ und $(\sigma_k)_{k\in\{1,...,n\}}$ zu ersetzen.

Der Einfachheit halber wird als Menge der Handelszeitpunkte die Menge $\{0, ..., n\}$ gewählt; der Bondpreisprozeß sei gegeben durch

$$((1 + r)^k)_{k\in\{0,...,n\}} = (\exp(\rho k))_{k\in\{0,...,n\}}$$

mit $r > 0$ und $\rho = \ln(1 + r)$. Weiter sei

$$h_k := \mu_k + \sigma_k\varepsilon_k$$

für $k = 1, ..., n$ mit $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1 > 0$ und $\sigma(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{k-1})$-meßbaren Zufallsgrößen μ_k, σ_k, $k = 2, ..., n$, wobei zusätzlich $\sigma_k(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ gelte. Der Aktienpreisprozeß werde definiert durch

$$(A_k)_{k\in\{0,...,n\}} = (A_0 \exp(\sum_{i=1}^{k} h_i))_{k\in\{0,...,n\}}.$$

Dann gilt $P^{h_1} = N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $P^{h_k|(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{k-1})} = N(\mu_k, \sigma_k^2)$, insbesondere also

$$\begin{aligned} \mu_1 &= E(h_1), \\ \sigma_1^2 &= Var(h_1), \\ \mu_k &= E(h_k|(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{k-1})) \text{ und} \\ \sigma_k^2 &= Var(h_k|(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{k-1})) := E(h_k^2|(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{k-1})) - (E(h_k|(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{k-1})))^2 \end{aligned}$$

für $k = 2, ..., n$. Für die Folgen $(\mu_k)_k$ und $(\sigma_k)_k$ existiert dabei eine Vielzahl von Konstruktionsmöglichkeiten:

Beispiel 2.34 („*lineare Gaußsche Modelle*“, vgl. [63], Seite 105)
Es seien $p, q \in \mathbb{N}$, $h_{1-p}, ..., h_0, a_0, ..., a_p, \varepsilon_{1-q}, ..., \varepsilon_0, b_0, ..., b_q \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Dann definiert man:

a) ***AR(p) AutoRegressive** model of order p:*
Im AR(p) Modell werden μ_k, σ_k und damit h_k für $k \in \{1, ..., n\}$ festgelegt durch

$$\begin{aligned} \sigma_k &\equiv \sigma, \\ \mu_k &= a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i h_{k-i}, \\ h_k &= a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i h_{k-i} + \sigma\varepsilon_k. \end{aligned}$$

b) ***MA(q) Moving Average** model of order q:*
Hier werden μ_k, σ_k und somit h_k für $k \in \{1, ..., n\}$ festgelegt durch

$$\begin{aligned} \sigma_k &\equiv \sigma, \\ \mu_k &= b_0 + \sum_{i=1}^{q} b_i \varepsilon_{n-i}, \\ h_k &= b_0 + \sum_{i=1}^{q} b_i \varepsilon_{n-i} + \sigma\varepsilon_k. \end{aligned}$$

c) ***ARMA(p,q) AutoRegressive Moving Average** model of order (p, q):*
Im $ARMA(p, q)$ Modell werden μ_k, σ_k und damit h_k für $k \in \{1, ..., n\}$ festgelegt durch

$$\begin{aligned} \sigma_k &\equiv \sigma, \\ \mu_k &= a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i h_{k-i} + b_0 + \sum_{i=1}^{q} b_i \varepsilon_{n-i}, \\ h_k &= a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i h_{k-i} + b_0 + \sum_{i=1}^{q} b_i \varepsilon_{n-i} + \sigma\varepsilon_k. \end{aligned}$$

Beispiel 2.35 (*„bedingte Gaußsche Modelle"*, vgl. [24] und [11])
*Seien $p, q, r \in \mathbb{N}$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1, ..., \alpha_{p\vee r} \geq 0$, $h_{(1-p)\vee r}, ..., h_0 \in \mathbb{R}$ (wobei für $x, y \in \mathbb{R}$ $x \vee y$ das Maximum von x und y bezeichne) sowie $\beta_1, ..., \beta_q \geq 0$ und $\sigma^2_{1-q}, ..., \sigma^2_0 > 0$. Weiter sei $\mathcal{F}_k = \sigma(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k)$ für $k = 1, ..., n$ und $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.
Dann definiert man:*

a) ***ARCH(p) AutoRegressive Conditional Heteroscedastic** model of order p:*
Hier werden μ_k, σ_k und damit h_k für $k \in \{1, ..., n\}$ festgelegt durch

$$\begin{aligned}
\mu_k &= 0, \\
\sigma_k^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_{k-i}^2, \\
h_k &= (\alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_{k-i}^2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_k.
\end{aligned}$$

b) ***AR(r)/ARCH(p)**:*
Im $ARCH(p)$ Modell gelte für $k \in \{1, ..., n\}$

$$\mu_k = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i h_{k-i}$$

anstelle von $\mu_k = 0$, so daß h_k die Form

$$h_k = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i h_{k-i} + (\alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_{k-i}^2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_k$$

besitzt. Dann wird das Modell mit $AR(r)/ARCH(p)$ bezeichnet.

c) ***GARCH(p,q) Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedastic** model of order (p, q):*
In diesem Modell werden μ_k, σ_k und somit h_k für $k \in \{1, ..., n\}$ festgelegt durch

$$\begin{aligned}
\mu_k &= 0, \\
\sigma_k^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_{k-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{k-j}^2, \\
h_k &= (\alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_{k-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{k-j}^2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_k.
\end{aligned}$$

Auch die Gaußschen Modelle sollen auf die fundamentalen Eigenschaften Arbitragefreiheit und Absicherbarkeit der wichtigsten Optionen untersucht werden. Analog zu Satz 2.32 ergibt sich:

Satz 2.36
Die Gaußschen Modelle sind arbitragefrei.

Beweis: Der abdiskontierte Preisprozeß ist gegeben durch $(\widehat{A}_{t_k})_{k\in\{0,\dots,n\}}$ mit

$$A_{t_k} = A_0 \exp(\sum_{i=1}^{k}(\mu_i - \rho + \sigma_i\varepsilon_i)) = A_0 \exp(\sum_{i=1}^{k}(\widehat{\mu}_i + \sigma_i\varepsilon_i)),$$

wobei $\widehat{\mu}_i = \mu_i - \rho$ gesetzt wird. Weiter definiert man $a_k := \frac{\widehat{\mu}_k}{\sigma_k^2} - \frac{1}{2}$, $k = 1, \dots, n$. Falls $a_k = 0$ P-f.s. für alle k gilt, so ist P selbst gemäß Abschnitt 3c in Kapitel V von [63] ein äquivalentes Martingalmaß. Andernfalls definiert man wieder die Zufallsgröße Z_n mittels *bedingter Esscher Transformation* durch

$$Z_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\exp(a_k(\widehat{\mu}_k + \sigma_k\varepsilon_k))}{E(\exp(a_k(\widehat{\mu}_k + \sigma_k\varepsilon_k))|\mathcal{F}_{k-1})};$$

gemäß Abschnitt 3c in Kapitel V von [63] liefert dann Q mit $dQ = Z_n\, dP$ ein äquivalentes Martingalmaß.

$\square$

Auf die Frage nach der Absicherbarkeit der wichtigsten Finanzderivate erhält man ebenfalls dieselbe Antwort wie bei den $BS_{(n)}$ Modellen:

Satz 2.37
In den Gaußschen Modellen aus Beispiel 2.34 und 2.35 existiert keine absicherbare europäische Put- oder Call-Option oder amerikanische Call-Option mit echt positivem Ausübungspreis.

Beweis: Die Zufallsgrößen $Y_1, \dots, Y_n$ seien durch $Y_k = \exp(\mu_k + \sigma_k\varepsilon_k)$, $1 \leq k \leq n$ so definiert, daß der Aktienpreisprozeß in der Form

$$(A_k)_{k\in\{0,\dots,n\}} = (A_0 \prod_{i=1}^{k} Y_i)_{k\in\{0,\dots,n\}}$$

geschrieben werden kann.

Nun wird zunächst gezeigt, daß $P^{(Y_1,\dots,Y_n)} \sim \bigotimes_{i=1}^{n} P^{Y_i}$ gilt.

Aus der $\sigma(\varepsilon_1)$-Meßbarkeit von μ_2 und σ_2 erhält man, daß meßbare Abbildungen $\widehat{r}_2$ und $\widehat{s}_2$ existieren mit $\mu_2 = \widehat{r}_2(\varepsilon_1)$ und $\sigma_2 = \widehat{s}_2(\varepsilon_1)$.
Mit der Darstellung

$$\varepsilon_1 = \frac{\ln(Y_1) - \mu_1}{\sigma_1}$$

folgt weiter die Existenz von meßbaren Abbildungen r_2 und s_2 mit $\mu_2 = r_2(Y_1)$ und $\sigma_2 = s_2(Y_1)$, so daß sich ε_2 als Funktion von (Y_1, Y_2) darstellen läßt. Induktiv ergibt sich, daß für alle $k \in \{2, ..., n\}$ meßbare Funktionen r_k und s_k existieren mit $\mu_k = r_k(Y_1, ..., Y_{k-1})$ und $\sigma_k = s_k(Y_1, ..., Y_{k-1})$. Als Version der faktorisierten bedingten Verteilung $P^{Y_k|(Y_1,...,Y_{k-1})=(y_1,...,y_{k-1})}$ erhält man für $k \geq 2$ aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit von ε_k und $(Y_1, ..., Y_{k-1})$ gemäß Satz 53.10 in [1]

$$P^{\exp(r_k(y_1,...,y_{k-1}) + s_k(y_1,...,y_{k-1}) \cdot \varepsilon_k)}.$$

Aus $\sigma_k(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ folgt nun $s_k(y_1, ..., y_{k-1}) > 0$ und daher

$$P^{Y_k|(Y_1,...,Y_{k-1})=(y_1,...,y_{k-1})} \sim \boldsymbol{\lambda}_{|(0,\infty)}$$

für alle $(y_1, ..., y_{k-1}) \in (Y_1, ..., Y_{k-1})(\Omega)$. Wegen

$$P^{(Y_1,...,Y_k)}(dy_1, ..., dy_k) = P^{Y_1}(dy_1) P^{Y_2|Y_1=y_1}(dy_2) ... P^{Y_k|(Y_1,...,Y_{k-1})=(y_1,...,y_{k-1})}(dy_k)$$

(vgl. Korollar 53.9 in [1]) erhält man hieraus

$$P^{(Y_1,...,Y_k)} \sim \boldsymbol{\lambda}^k_{|(0,\infty)^k} \text{ für alle } k \in \{1, ..., n\}.$$

Für $k \geq 2$ erfüllt die $\boldsymbol{\lambda}^k_{|(0,\infty)^k}$-Dichte von $P^{(Y_1,...,Y_k)}$, welche mit f_k bezeichnet werde, die Gleichung $\boldsymbol{\lambda}^k_{|(0,\infty)^k}(f_k > 0) = 1$ und daher

$$\int f_k(y_1, ..., y_k) \, d\boldsymbol{\lambda}^{k-1}_{|(0,\infty)^{k-1}}(y_1, ..., y_{k-1}) > 0 \quad \boldsymbol{\lambda}_{|(0,\infty)}\text{-f.s.},$$

woraus $P^{Y_k} \sim \boldsymbol{\lambda}_{|(0,\infty)}$ folgt. Insgesamt erhält man schließlich

$$P^{(Y_1,...,Y_n)} \sim \boldsymbol{\lambda}^n_{|(0,\infty)^n} \sim \bigotimes_{k=1}^n P^{Y_k}.$$

Der verbleibende Teil des Beweises verläuft nun analog zum Beweis von Satz 2.33.
□

Bei vielen in der Praxis verwendeten zeitdiskreten Finanzmarktmodellen, zu denen das Trinomialmodell, das $BS_{(n)}$ Modell und die Gaußschen Modelle gehören, geht also nicht nur die Vollständigkeit, sondern vielmehr die Absicherbarkeit der wichtigsten Finanzderivate verloren. Hier zeigt sich deutlich die Notwendigkeit einer Suche nach alternativen Bewertungskonzepten, welche nicht auf der Bildung eines Portfolioäquivalentes beruhen.

Kapitel 3

Modelle mit stochastisch unabhängigen Faktoren

Im Aktie/Bond Modell gelte $P_w = \bigotimes_{i=1}^{n} P_w^{Y_i}$ sowie $d_i = \min supp(P_w^{Y_i}) < 1 + r_i < u_i = \sup supp(P_w^{Y_i})$ für $i = 1, ..., n$, woraus gemäß Lemma 1.11 die Arbitragefreiheit folgt. Sind $Y_1, ..., Y_n$ nicht alle dichotom, so ist das Modell unvollständig (vgl. Satz 1.30). Darüberhinaus zeigt Korollar 2.15, daß selbst von den fundamentalen Finanzderivaten europäischer und amerikanischer Call sowie europäischer Put überabzählbar viele nicht absicherbar sind, und daher eine faire Bewertung durch Bildung eines Portfolioäquivalentes nicht möglich ist.

Da folglich für viele Finanzderivate kein *eindeutig bestimmter* arbitragefreier Preis existiert, stellt sich die Frage, ob man zumindest Schranken ermitteln kann, innerhalb derer sich die Preise unter ökonomischen Gesichtspunkten befinden sollten. Legt man dabei als Bewertungskriterium das zu erwartende Risiko zugrunde, so lassen sich diese Schranken mit Hilfe von „extremalen" vollständigen Modellen gewinnen, wenn die Auszahlungen der Finanzderivate über komponentenweise konvexe Funktionen von den Faktoren des Aktienpreisprozesses abhängen. Geeignete Instrumente hierfür stellt die Balayage-Technik bereit.

3.1 Die Balayage-Technik

Sowohl in der Potentialtheorie (vgl. z.B. [18]) als auch in der Prophetentheorie (vgl. z.B. [28]) wird eine Technik zur Vergrößerung der Varianz ohne Änderung des Erwartungswertes verwendet, die unter einer Vielzahl von Bezeichnungen verwendet wird: „Balayage" [12], „Spreading" [39], „Dilation" [36],[30], „Zufallsgröße mit maximaler Varianz" [3]. Im folgenden wird eine leicht verallgemeinerte Version dieser Methode vorgestellt.

Definition 3.1 (vgl. [45])
Es seien Y eine Zufallsgröße auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Zufallsgröße Y_a^b mit den Eigenschaften

i) $P(\{Y_a^b \in B\} \,|\, \mathcal{G}) = P(\{Y \in B\} \,|\, \mathcal{G}) \quad \forall\, B \in \mathbb{B}_{|[a,b]^c}$,

ii) $P(\{Y_a^b = a\} \,|\, \mathcal{G}) = \frac{1}{b-a} E((b-Y)1_{\{Y \in [a,b]\}} \,|\, \mathcal{G})$,

iii) $P(\{Y_a^b = b\} \,|\, \mathcal{G}) = \frac{1}{b-a} E((Y-a)1_{\{Y \in [a,b]\}} \,|\, \mathcal{G})$

heißt Balayage von Y unter $\mathcal{G}$, im Falle $\mathcal{G} = \sigma(Z)$ auch Balayage von Y unter Z.

Die rechten Seiten von Definition 3.1 $i)-iii)$ definieren eindeutig einen Übergangskern von $(\Omega, \mathcal{G})$ nach $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit

$$P(\{Y_a^b \in B\}|\mathcal{G}) = 0 \text{ für alle } B \in \mathbb{B}_{|(a,b)}.$$

Im Fall $\mathcal{G} = \sigma(Z)$ ist für jedes Balayage Y_a^b von Y unter Z die bedingte Verteilung $P^{Y_a^b|Z}$ und damit die gemeinsame Verteilung $P^{(Y_a^b, Z)}$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung 3.2 ([28], Seite 9)

a) *Die Verteilung der Zufallsgröße Y_a^b ist gegeben durch*

$$\begin{array}{lcl} P(\{Y_a^b \in B\}) & = & P(\{Y \in B\}) \;\; \forall\, B \in \mathbb{B}_{|[a,b]^c}, \\ P(\{Y_a^b = a\}) & = & \frac{1}{b-a} \int_{\{Y \in [a,b]\}} (b-Y) dP, \\ P(\{Y_a^b = b\}) & = & \frac{1}{b-a} \int_{\{Y \in [a,b]\}} (Y-a) dP, \\ P(\{Y_a^b \in (a,b)\}) & = & 0. \end{array}$$

Jede Zufallsgröße Y_a^b mit dieser Verteilung wird als Balayage von Y bezeichnet.

b) *Seien Y und Z Zufallsgrößen auf einem hinreichend großen Wahrscheinlichkeitsraum (z.B. $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$). Dann existiert stets ein Balayage Y_a^b von Y unter Z. Falls Y und Z stochastisch unabhängig sind, so reduzieren sich die Bedingungen aus Definition 3.1 zu*

$i^\star)$ $P^{Y_a^b} = P^Y$ *auf* $[a,b]^c$,

$ii^\star)$ $P(\{Y_a^b = a\}) = \frac{1}{b-a} \int_{\{Y \in [a,b]\}} (b-Y) dP$,

$iii^\star)$ $P(\{Y_a^b = b\}) = \frac{1}{b-a} \int_{\{Y \in [a,b]\}} (Y-a) dP$.

Insbesondere sind dann auch Y_a^b und Z stochastisch unabhängig.

Ist Y_a^b ein Balayage von Y unter $\mathcal{G}$, so stimmen die bedingten Erwartungswerte $E(Y|\mathcal{G})$ und $E(Y_a^b|\mathcal{G})$ überein, jedoch ist Y_a^b „besser“ für konvexe Auszahlungsfunktionen als Y - gerade aus diesem Grunde funktioniert die Balayage-Technik:

Lemma 3.3 (vgl. [59], Seite 9 und [49], Definition 1.5.1)
Seien Y eine integrierbare Zufallsgröße, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und Y_a^b ein Balayage von Y unter $\mathcal{G}$.

i) Es gilt $E(Y_a^b|\mathcal{G}) = E(Y|\mathcal{G})$ $P|\mathcal{G}$-f.s., und daher $E(Y_a^b) = E(Y)$.

ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, für die $E(f(Y))$ existiert. Dann folgt $E(f(Y)) \leq E(f(Y_a^b))$, d.h. Y ist kleiner als Y_a^b in „convex order“.

Für den Spezialfall $f_x(y) = x \vee y$ und $f(y) = (y - E(Y))^2$ erhält man speziell

Korollar 3.4
In der Situation von Lemma 3.3 gilt:

i) Für eine $\mathcal{G}$-meßbare Zufallsgröße X folgt $E(X \vee Y|\mathcal{G}) \leq E(X \vee Y_a^b|\mathcal{G})$ $P|\mathcal{G}$-f.s., insbesondere $E(X \vee Y) \leq E(X \vee Y_a^b)$.

ii) $Var(Y) \leq Var(Y_a^b)$, falls $Var(Y)$ existiert.

Die Aussage von Korollar 3.4 *i*) wurde für den Spezialfall stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen X, Y von Hill und Kertz bewiesen (vgl. [29]); ein allgemeiner Beweis von 3.4 *i*) und 3.4 *ii*) befindet sich z.B. in [28] und [60].

Die Frage, wann in Korollar 3.4 *i*) Gleichheit gilt, läßt sich leicht beantworten:

Korollar 3.5 ([28], Korollar 2.4)
Unter den Voraussetzungen von Korollar 3.4 sind äquivalent:

i) $P(Y \in (a, b)) = 0$ oder $P(X \in (a, b)) = 0$.

ii) $E(X \vee Y|\mathcal{G}) = E(X \vee Y_a^b|\mathcal{G})$ $P|\mathcal{G}$-f.s..

Die Aussage von Lemma 3.3 *ii*) läßt sich in naheliegender Weise für stochastisch unabhängige Zufallsgrößen $Y_1, ..., Y_n$ und komponentenweise konvexe Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verallgemeinern. Die zugehörige Ordnung $\leq_{ccx}$ wurde zuerst in [46] eingeführt.

Definition 3.6
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt komponentenweise konvex, wenn sie der Bedingung

$$\begin{aligned} & f(y_1, ..., y_{k-1}, \lambda y_k + (1-\lambda) z_k, y_{k+1}, ..., y_n) \\ \leq \quad & \lambda f(y_1, ..., y_n) \; + \; (1-\lambda) \, f(y_1, ..., y_{k-1}, z_k, y_{k+1}, ..., y_n) \end{aligned}$$

für alle $k \in \{1, ..., n\}$, $y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_n \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in (0,1)$ genügt.

Lemma 3.7
Seien $\mathbf{Y} = (Y_1, ..., Y_n)$ und $\mathbf{Y_a^b} = (Y_{a_1}^{b_1}, ..., Y_{a_n}^{b_n})$ Zufallsvektoren auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, wobei $Y_{a_k}^{b_k}$ für $k = 1, ..., n$ ein Balayage von Y_k sei mit $-\infty < a_k < b_k < \infty$. Weiter sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ komponentenweise konvex mit existierendem $E(f(Y_1, ..., Y_n))$. Dann gilt:

a) Sind sowohl $Y_1, ..., Y_n$ als auch $Y_{a_1}^{b_1}, ..., Y_{a_n}^{b_n}$ stochastisch unabhängig, so folgt $E(f(Y_1, ..., Y_n)) \leq E(f(Y_{a_1}^{b_1}, ..., Y_{a_n}^{b_n}))$, d.h. $\mathbf{Y}$ ist kleiner als $\mathbf{Y_a^b}$ in „componentwise convex order", kurz $\mathbf{Y} \leq_{ccx} \mathbf{Y_a^b}$ (vgl. [49], Def. 3.6.1).

b) Sind für ein $k \in \{1, ..., n-1\}$ sowohl $(Y_1, ..., Y_k), Y_{k+1}, ..., Y_n$ als auch $(Y_1, ..., Y_k), Y_{a_{k+1}}^{b_{k+1}}, ..., Y_{a_n}^{b_n}$ stochastisch unabhängig, so folgt

$$E(f(Y_1, ..., Y_n) | (Y_1, ..., Y_k)) \leq E(f(Y_1, ..., Y_k, Y_{a_{k+1}}^{b_{k+1}}, ..., Y_{a_n}^{b_n}) | (Y_1, ..., Y_k))$$

$P|\sigma(Y_1, ..., Y_k)$-f.s..

Beweis: Gemäß Lemma 3.3 *ii*) ist Y_k kleiner als $Y_{a_k}^{b_k}$ in konvexer Ordnung, $k = 1, ..., n$, so daß aus Theorem 3.6.3 in [49] die erste Ungleichung folgt.
Teil b) folgt nun aus a) durch Faktorisierung.

□

3.2 Extremaleigenschaften von Modellen mit dichotomen Faktoren

Um die Balayage-Technik zur Ermittlung oberer Schranken für Preise von Finanzderivaten anwenden zu können, wird in diesem Abschnitt zusätzlich angenommen, daß im zugrundeliegenden Aktie/Bond Modell $d_i > 0$ und $u_i < \infty$ gilt, $i = 1, ..., n$. Weiter seien $Y_1, ..., Y_n$ Zufallsgrößen auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$ mit $P^{(Y_1,...,Y_n)} = P_w$.

Für $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in \bigtimes_{i=1}^{n} (d_i, u_i)$ und $A_0 > 0$ sei schließlich

$$\mathcal{Z}_P^\mu := \left\{ \underset{\sim}{A} = (A_i)_{0 \le i \le n} : \begin{array}{l} A_i = A_0 \prod_{k=1}^{i} Z_k,\ 0 \le i \le n,\ \text{wobei } Z_1, ..., Z_n \text{ stoch.} \\ \text{unabhängige Zufallsgrößen auf } (\mathcal{X}, \mathcal{A}, P) \text{ sind, und} \\ Z_k\ \ [d_k, u_k]\text{-wertig ist mit } E_P(Z_k) = \mu_k,\ k = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

die Klasse aller multiplikativen Aktienpreisprozesse mit stochastisch unabhängigen Faktoren und vorgegebenen Driftparametern $\mu_1, ..., \mu_n$.

Falls $P_w = \bigotimes_{i=1}^{n} P_w^{\pi_i}$ gilt (mit $\pi_1, ..., \pi_n$ als Koordinatenprojektionen), und daher $Y_1, ..., Y_n$ stochastisch unabhängig sind, so ist der Aktienpreisprozeß des Aktie/Bond Modells ein Element von

$$\mathcal{Z}_P^{(E_P(Y_1),...,E_P(Y_n))}.$$

Daher wird nun untersucht, unter welchen Voraussetzungen er extremale Eigenschaften in dieser Klasse aufweist. Für $\mu \in \bigtimes_{i=1}^{n} (d_i, u_i)$ beinhaltet die Klasse $\mathcal{Z}_P^\mu$ offensichtlich den Aktienpreisprozeß

$$\underset{\sim}{D} = (A_0, A_0 \widehat{Z}_1, ..., A_0 \prod_{i=1}^{n} \widehat{Z}_i)$$

des *äußeren Binomialmodells*, dessen Faktoren stochastisch unabhängig sind mit

$$P(\widehat{Z}_k = u_k) = \frac{\mu_k - d_k}{u_k - d_k} = 1 - P(\widehat{Z}_k = d_k), \quad k = 1, ..., n. \tag{$\star$}$$

Es zeigt sich, daß er „worst case scenarios“ (vgl. [61], Seite 2) in dieser Klasse liefert:

Satz 3.8
Bezeichne $\underset{\sim}{D}$ *den Aktienpreisprozeß des äußeren Binomialmodells aus* $\mathcal{Z}_P^\mu$*. Dann gilt:*

i) $E_P(\max\limits_{0\le i\le n} D_i) = \max\limits_{\underset{\sim}{A}\in\mathcal{Z}_P^\mu} E_P(\max\limits_{0\le i<n} A_i)$,
d.h. der Aktienpreisprozeß des Binomialmodells maximiert den zu erwartenden maximalen Aktienpreis in $\mathcal{Z}_P^\mu$*.*

ii) $E_P(\min\limits_{0\le i\le n} D_i) = \min\limits_{\underset{\sim}{A}\in\mathcal{Z}_P^\mu} E_P(\min\limits_{0\le i\le n} A_i)$.

iii) $E_P(\max\limits_{0\le i\le n} D_i - \min\limits_{0\le i\le n} D_i) = \max\limits_{\underset{\sim}{A}\in\mathcal{Z}_P^\mu} E_P(\max\limits_{0\le i\le n} A_i - \min\limits_{0\le i\le n} A_i)$,
d.h. der Aktienpreisprozeß des Binomialmodells besitzt die maximale zu erwartende Spanne in $\mathcal{Z}_P^\mu$*.*

iv) $Var_P(D_i) = \max\limits_{\underset{\sim}{A}\in\mathcal{Z}_P^\mu} Var_P(A_i),\ 1\le i\le n,$
d.h. der Aktienpreisprozeß des Binomialmodells besitzt die maximale Varianz in $\mathcal{Z}_P^\mu$*.*

Beweis: Für $(A_i)_{0\le i\le n}\in\mathcal{Z}_P^\mu$ erhält man

$$P(\widehat{Z}_i = u_i) = \frac{\mu_i - d_i}{u_i - d_i} = \frac{1}{u_i - d_i}\int_{\{Z_i\in[d_i,u_i]\}} (Z_i - d_i)\, dP$$

und

$$P(\widehat{Z}_i = d_i) = \frac{u_i - \mu_i}{u_i - d_i} = \frac{1}{u_i - d_i}\int_{\{Z_i\in[d_i,u_i]\}} (u_i - Z_i)\, dP,$$

d.h. $\widehat{Z}_i$ ist ein Balayage $Z_{d_i}^{u_i}$ von Z_i (vgl. Kapitel 2 von [28] bzw. Bemerkung 3.2). Teil i) ergibt sich nun durch Anwendung von Lemma 3.7 auf die komponentenweise konvexe Funktion $f(x_1,...,x_n) = \max_{0\le i\le n} A_0\prod_{k=1}^i x_k$, und Teil ii) folgt aus i) mit $\min_{0\le i\le n} A_i = -\max_{0\le i\le n}(-A_i)$. Die Aussagen i) und ii) liefern die Behauptung iii). Teil iv) erhält man schließlich analog zu Teil i) mit Hilfe der Funktionen $f_i(x_1,...,x_n) := (A_0\prod_{k=1}^i x_k - A_0\prod_{k=1}^i \mu_k)^2$, $i = 1,...,n$.

□

Ein alternativer Beweis von Satz 3.8 befindet sich in [58].

Um eine weitere Extremaleigenschaft des äußeren Binomialmodells aufzuzeigen, werden nun zunächst einige Definitionen für die Relation „eine Zufallsgröße X ist riskanter als eine Zufallsgröße Y“ angegeben. Diese beruhen auf den Artikeln [54] und [55] von Rothschild und Stiglitz.

Definition 3.9 (vgl. [54] und [49], Def. 1.5.1)
Seien X und Y beschränkte Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$. Dann definiert man:

i) „Y is equal to X plus noise“ (kurz $X \leq_{pn} Y$) genau dann, wenn eine beschränkte Zufallsgröße Z existiert mit $E_P(Z|X) = 0$ P-f.s. und

$$Y \sim X + Z.$$

ii) Ohne Einschränkung seien X und Y $[0,1]$-wertig. Die Funktion $S(x) := F^Y(x) - F^X(x)$ sei definiert als Differenz der Verteilungsfunktionen von X und Y, und es sei $T(y) := \int_0^y S(x)dx$. Sind die Bedingungen

i) $E_P X = E_P Y$,

ii) $T(1) = 0$ und

iii) $T(y) \geq 0$ für alle $0 \leq y \leq 1$

erfüllt, so gilt „Y has more weight in the tails than X“ (kurz $X \leq_{wt} Y$).

iii) Ein Marktteilnehmer mit konkaver Nutzenfunktion wird als risikoaversiv bezeichnet. Falls

$$E_P(f(X)) \geq E_P(f(Y))$$

für alle konkaven Funktionen f erfüllt ist, dann gilt „every risk averter prefers X to Y“ bzw. „X is smaller then Y in convex order“ (kurz $X \leq_{cx} Y$). Insbesondere besitzen X und Y dann denselben Erwartungswert.

iv) X heißt weniger riskant als Y im Sinne der „mean-variance analysis“ (kurz $X \leq_{mv} Y$) bzw. „Y has a greater variance than X“, falls gilt:

$$E_P X = E_P Y \quad \text{und} \quad Var_P X \leq Var_P Y.$$

Satz 3.10 ([54], [26])

a) Die Relationen $\leq_{pn}$, $\leq_{wt}$ und $\leq_{cx}$ erzeugen eine partielle und $\leq_{mv}$ eine totale Ordnung auf der Menge aller Zufallsgrößen auf $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$, die beschränkt sind und denselben Erwartungswert besitzen.

b) Die von $\leq_{pn}$, $\leq_{wt}$ und $\leq_{cx}$ erzeugten partiellen Ordnungen stimmen überein und implizieren $\leq_{mv}$. Aus $\leq_{mv}$ läßt sich jedoch nicht auf eine der ersten drei Ordnungen zurückschließen.

In den Arbeiten von Rothschild und Stiglitz wird mit „Y is a mean preserving increase in risk with respect to X“ darüberhinaus eine weitere Definition von größerem Risiko vorgestellt; die von dieser Relation erzeugte partielle Ordnung stimmt wieder mit $\leq_{pn}$, $\leq_{wt}$ und $\leq_{cx}$ überein. Die rationale Erklärung von Rothschild und Stiglitz für dieses Konzept bestand darin, daß ein „mean preserving spread“ Masse vom Zentrum zu den Flanken verschieben sollte. Diese Interpretation hat sich jedoch gemäß Arbeiten von Landsberger und Meilijson (vgl. z.B. [40]) als falsch herausgestellt, weshalb auf dieses Konzept in Definition 3.9 und Satz 3.10 nicht näher eingegangen wurde. In [40] wird mit „Y is a mean preserving increase in risk about ν of X“ ein alternativer (und restriktiverer) Ansatz vorgestellt, welcher zu verschärften Versionen der Konzepte von Rothschild und Stiglitz äquivalent ist (vgl. auch [62], S. 356 ff.). Eine allgemeinere Theorie zum Vergleich von Risiken, in der die Ansätze von Rothschild und Stiglitz sowie von Landsberger und Meilijson vereint werden, wird in [47] vorgestellt. Allerdings ist dieses Konzept genauso wie das von Landsberger und Meilijson zu restriktiv, um für die hier behandelte Problemstellung Anwendung zu finden, so daß im folgenden nur die in 3.9 vorgestellten Definitionen betrachtet werden.

Aus Definition 3.9 und Satz 3.10 erhält man nun weitere Extremaleigenschaften von Modellen mit dichotomen Faktoren:

Satz 3.11
Seien $Z_1, ..., Z_n, \widehat{Z}_1, ..., \widehat{Z}_n$ Zufallsgrößen auf $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$, wobei für $i = 1, ..., n$ Z_i $[d_i, u_i]$-wertig und $\widehat{Z}_i$ $\{d_i, u_i\}$-wertig sei sowie $E_P(Z_i) = E_P(\widehat{Z}_i) = \mu_i \in (d_i, u_i)$ gelte. Weiter sei $\underset{\sim}{A} = (A_0, A_0 Z_1, ..., A_0 \prod_{i=1}^n Z_i)$. Dann gilt:

a) Sind sowohl $Z_1, ..., Z_n$ als auch $\widehat{Z}_1, ..., \widehat{Z}_n$ stochastisch unabhängig, so sind die Komponenten von $\underset{\sim}{A}$ nicht riskanter als die von

$$\underset{\sim}{\widehat{A}} = (A_0, A_0 \widehat{Z}_1, ..., A_0 \prod_{i=1}^{n} \widehat{Z}_i)$$

im Sinne der Definitionen 3.9 i)-iv).

b) Sind für ein $k \in \{1, ..., n-1\}$ sowohl $(Z_1, ..., Z_k), Z_{k+1}, ..., Z_n$ als auch $(Z_1, ..., Z_k), \widehat{Z}_{k+1}, ..., \widehat{Z}_n$ stochastisch unabhängig, so sind die Komponenten von $\underset{\sim}{A}$ nicht riskanter als die von

$$^{k}\underset{\sim}{\widehat{A}} = (A_0, A_0 Z_1, ..., A_0 \prod_{j=1}^{k} Z_k, A_0 \prod_{j=1}^{k} Z_k \cdot \widehat{Z}_{k+1}, ..., A_0 \prod_{j=1}^{k} Z_k \cdot \prod_{j=k+1}^{n} \widehat{Z}_j)$$

im Sinne der Definitionen 3.9 i)-iv).

Beweis: Gemäß Satz 3.10 genügt es zu zeigen, daß für jedes $m \in \{1, ..., n\}$ und für jede konvexe Funktion f die Ungleichungen $E_P(f(A_m)) \leq E_P(f(\widehat{A}_m))$ und $E_P(f(A_m)) \leq E_P(f({}^k\widehat{A}_m))$ erfüllt sind. Dies folgt aber sofort aus Lemma 3.7, da die Funktion $g(y_1, ..., y_n) = f(A_0 \prod_{i=1}^n y_i)$ komponentenweise konvex ist.

□

Ein alternativer Beweis dafür, daß ein Produkt von beschränkten Zufallsgrößen nicht riskanter ist als das Produkt von deren Balayages im Sinne von „equal to plus noise", befindet sich z.B. in [66].

Laut Satz 3.11 besitzt also das äußere Binomialmodell die riskantesten Komponenten in der Klasse $\mathcal{Z}_P^\mu$ im Sinne von „risk aversion", „equal to plus noise", „weight in the tails" und „mean-variance analysis". Weiterhin gilt für jeden Preisprozeß $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{Z}_P^\mu$ und jeden Handelszeitpunkt $k \in \{1, ..., n-1\}$, daß durch Ersetzen der restlichen $n-k$ Faktoren durch Balayages, welche vom Vektor der ersten Faktoren und voneinander stochastisch unabhängig sind, ein Preisprozeß mit mindestens genauso großem Risiko konstruiert wird.

Dies führt zu der Vermutung, daß bei den in diesem Kapitel betrachteten Modellen für eine Vielzahl von Optionen das zu erwartende Risiko zu jedem Zeitpunkt k nicht größer ist als in einem Modell, dessen restliche Faktoren voneinander und vom bisherigen Verlauf stochastisch unabhängig und dichotom sind; insbesondere sollte das zu erwartende Risiko zum Anfangszeitpunkt nicht größer sein als im äußeren Binomialmodell. Die Bestätigung liefert das folgende Theorem:

Theorem 3.12

Seien $Y_1, ..., Y_n, Y_{d_1}^{u_1}, ..., Y_{d_n}^{u_n}$ Zufallsgrößen auf $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$, wobei Y_i $[d_i, u_i]$-wertig sei mit $E_P(Y_i) = E_P(Y_{d_i}^{u_i}) =: \mu_i$, $1 \leq i \leq n$. Weiter sei $Y_{d_i}^{u_i}$ für jedes i ein Balayage von Y_i, und es seien $Y_{d_1}^{u_1}, ..., Y_{d_n}^{u_n}$ stochastisch unabhängig. Schließlich bezeichne für $k \in \{1, ..., n-1\}$ und $A_0 > 0$

$$\mathcal{Z}_P^\mu(Y_1, ..., Y_k) := \left\{ \underset{\sim}{A} : \begin{array}{l} A_i = A_0 \prod_{j=1}^i Z_j,\ 0 \leq i \leq n,\ \textit{wobei } Z_i = Y_i,\ i = 1, ..., k, \\ Z_i\ \ [d_i, u_i]\textit{-wertig mit } E_P(Z_i) = \mu_i,\ i = k+1, ..., n,\ \textit{und} \\ (Y_1, ..., Y_k), Z_{k+1}, ..., Z_n \textit{ stochastisch unabhängig} \end{array} \right\}$$

die Menge der Preisprozesse, deren erste k Faktoren durch $Y_1, ..., Y_k$ gegeben sind, und deren restliche $n-k$ Faktoren voneinander und von $(Y_1, ..., Y_k)$ stochastisch unabhängig sind, und es sei

$${}^k\underset{\sim}{D} = \Big(A_0, A_0 Y_1, ..., A_0 \prod_{i=1}^k Y_i, A_0 \prod_{i=1}^k Y_i \cdot Y_{d_{k+1}}^{u_{k+1}}, ..., A_0 \prod_{i=1}^k Y_i \cdot \prod_{i=k+1}^n Y_{d_i}^{u_i}\Big).$$

Dann gilt:

i) Zum Zeitpunkt 0 werden die zu erwartenden Risiken einer

a) europäischen Option,

b) arithmetischen asiatischen Option,

c) Lookback Option

mit konvexer Auszahlungsfunktion f in der Klasse $\mathcal{Z}_P^\mu$ durch den Preisprozeß ${}^0\underset{\sim}{D} = (A_0, A_0 Y_{d_1}^{u_1}, ..., A_0 \prod_{i=1}^n Y_{d_i}^{u_i})$ des äußeren Binomialmodells maximiert, d.h.

a) $E_P(f({}^0D_n)) = \max\limits_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{Z}_P^\mu} E_P(f(A_n)),$

b) $E_P(\frac{1}{n+1} \sum\limits_{i=0}^n f({}^0D_i)) = \max\limits_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{Z}_P^\mu} E_P(\frac{1}{n+1} \sum\limits_{i=0}^n f(A_i)),$

c) $E_P(\max\limits_{0 \leq i \leq n} f({}^0D_i)) = \max\limits_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{Z}_P^\mu} E_P(\max\limits_{0 \leq i \leq n} f(A_i)).$

Betrachtet werde ferner eine amerikanische Option mit konvexer Auszahlungsfunktion f (d.h. es gelte $C_i = f(A_i)$ für $i = 1, ..., n$). Falls entweder f isoton und die Drift jedes Aktienpreisprozesses aus $\mathcal{Z}_P^\mu$ positiv ist (d.h. $\mu_i \geq 1 \; \forall \, i$) oder f antiton und die Drift jedes Aktienpreisprozesses aus $\mathcal{Z}_P^\mu$ negativ ist (d.h. $\mu_i \leq 1 \; \forall \, i$), dann wird zum Zeitpunkt 0 das zu erwartende Risiko dieser Option durch den Preisprozeß des äußeren Binomialmodells maximiert:

$$\sup_{\widehat{\tau}} E_P(f({}^0D_{\widehat{\tau}})) = \max_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{Z}_P^\mu} \sup_{\tau} E_P(f(A_\tau)).$$

ii) Sind für ein $k \in \{1, ..., n\}$ $(Y_1, ..., Y_k), Y_{d_{k+1}}^{u_{k+1}}, ..., Y_{d_n}^{u_n}$ stochastisch unabhängig, dann sind die zu erwartenden Risiken der in i) betrachteten Optionen in einem Modell mit Preisprozeß ${}^k\underset{\sim}{A} \in \mathcal{Z}_P^\mu(Y_1, ..., Y_k)$ nicht größer als die zu erwartenden Risiken im Modell mit Preisprozeß ${}^k\underset{\sim}{D}$, d.h. es gilt $P|\sigma(Y_1, ..., Y_k)$-f.s.

a) $E_P(f({}^kD_n)|(Y_1, ..., Y_k)) \geq E_P(f({}^kA_n)|(Y_1, ..., Y_k)),$

b) $E_P(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f({}^kD_i)|(Y_1, ..., Y_k)) \geq E_P(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f({}^kA_i)|(Y_1, ..., Y_k)),$

c) $E_P(\max\limits_{0 \leq i \leq n} f({}^kD_i)|(Y_1, ..., Y_k)) \geq E_P(\max\limits_{0 \leq i \leq n} f({}^kA_i)|(Y_1, ..., Y_k)).$

Für eine amerikanische Option mit konvexer isotoner (bzw. antitoner) Auszahlungsfunktion f erhält man bei positiver (bzw. negativer) Drift der Aktienkurse aus $\mathcal{Z}_P^\mu(Y_1, ..., Y_k)$ in den Zeitpunkten $k+1, ..., n$, daß das zu erwartende Risiko im Modell mit Preisprozeß ${}^k\underset{\sim}{A} \in \mathcal{Z}_P^\mu(Y_1, ..., Y_k)$ nicht größer ist als das zu erwartende Risiko im Modell mit Preisprozeß ${}^k\underset{\sim}{D}$, d.h. es gilt $P|\sigma(Y_1, ..., Y_k)$-f.s.

$$\sup_{\widehat{\tau} \geq k} E_P(f({}^kD_{\widehat{\tau}})|(Y_1, ..., Y_k)) \geq \sup_{\tau \geq k} E_P(f({}^kA_\tau)|(Y_1, ..., Y_k)).$$

Beweis: Die Maximaleigenschaften von ${}^0\underset{\sim}{D}$ bzw. ${}^k\underset{\sim}{D}$ für die in $a), b)$ und $c)$ betrachteten Optionen ergeben sich direkt aus Lemma 3.7 bzw. Satz 3.11.

Bezüglich der amerikanischen Option sei zunächst angemerkt, daß im Falle $\mu_i \geq 1$ (bzw. $\mu_i \leq 1$) für alle $i \geq k$ der Prozeß $({}^kA_k, ..., {}^kA_n)$ ein Submartingal (bzw. Supermartingal) bezüglich $\underset{\sim}{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_k, ..., \mathcal{F}_n)$ bildet, wobei $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ im Fall $k = 0$ durch die von den Faktoren $Z_1, ..., Z_n$ erzeugte kanonische Filtration und im Fall $k \geq 1$ durch $\big(\sigma(Y_1, ..., Y_k), \sigma(Y_1, ..., Y_k, Z_{k+1}), ..., \sigma(Y_1, ..., Y_k, Z_{k+1}, ..., Z_n)\big)$ gegeben sei. Die Jensensche Ungleichung für bedingte Erwartungswerte (vgl. z.B. [19], Seite 184) liefert daher für $i \in \{k, ..., n-1\}$

$$E_P(f({}^kA_{i+1})|\mathcal{F}_i) \geq f(E_P({}^kA_{i+1}|\mathcal{F}_i)) \geq f({}^kA_i) \quad P\text{-f.s.},$$

d.h. $(f({}^kA_i))_{k \leq i \leq n}$ bildet ebenfalls ein Submartingal bezüglich $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$. Definiert man $\mathcal{F}_\tau$ für eine Stoppregel τ als σ-Algebra der τ-Vergangenheit, so ergibt sich aus dem Optional-Sampling-Theorem (vgl. z.B. [2], Seite 143) mit $\tau \leq n$ die Ungleichung

$$E_P(f({}^kA_n)|\mathcal{F}_\tau) \geq f({}^kA_\tau) \quad P\text{-f.s..}$$

Weiterhin erhält man für $k \in \{0, ..., n-1\}$ und eine Stoppregel τ mit $\tau \geq k$ die Inklusion $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_\tau$, und aus der Iterationsregel für bedingte Erwartungswerte sowie Aussage $i\,a)$ bzw. $ii\,a)$ ergibt sich $P|\mathcal{F}_k$-f.s.

$$\begin{aligned}
\sup_{\tau \geq k} E_P(f({}^kA_\tau)|\mathcal{F}_k) &\leq E_P(f({}^kA_n)|\mathcal{F}_k) \\
&\leq E_P(f({}^kD_n)|\mathcal{F}_k) \\
&\leq \sup_{\widehat{\tau} \geq k} E_P(f({}^kD_{\widehat{\tau}})|\mathcal{F}_k).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 3.13
Die Aussage von Theorem 3.12 gilt insbesondere für

i) *europäische Call- bzw. Put-Optionen,*

ii) *amerikanische Call-Optionen im Falle positiver Drift und amerikanische Put-Optionen im Falle negativer Drift des Aktienpreisprozesses,*

iii) *Lookback Call-Optionen mit festem Ausübungspreis K, d.h.* $\max\limits_{0\le k\le n} f(A_k) = \max\limits_{0\le k\le n}(A_k - K)^+$,

iv) *Lookback Put-Optionen mit beweglichem Ausübungspreis, d.h.* $\max\limits_{0\le k\le n} f(A_k) = \max\limits_{0\le k\le n}(A_k - A_n)$.

Bei Betrachtung von Theorem 3.12 liegt die Vermutung nahe, daß der Preisprozeß ${}^0\underset{\sim}{D}$ des äußeren Binomialmodells in der Klasse $\mathcal{Z}_P^\mu$ (bzw. der Preisprozeß ${}^k\underset{\sim}{D}$ in der Klasse $\mathcal{Z}_P^\mu(Y_1, ..., Y_k)$) nicht nur die riskantesten Komponenten im Sinne von „convex order“, „equal to plus noise“, „more weight in the tails“ und „mean-variance analysis“ besitzt, sondern sogar am riskantesten in „componentwise convex order“ ist, d.h.

$$E_P(f({}^0\underset{\sim}{D})) = \max_{\underset{\sim}{A}\in\mathcal{Z}_P^\mu} E_P(f(\underset{\sim}{A})) \quad \text{und} \quad E_P(f({}^k\underset{\sim}{D})) = \max_{{}^k\underset{\sim}{A}\in\mathcal{Z}_P^\mu(Y_1,...,Y_k)} E_P(f({}^k\underset{\sim}{A}))$$

für jede komponentenweise konvexe Funktion f. Diese Aussage ist jedoch nur für $k = n-1$ richtig:

Lemma 3.14
In der Situation von Theorem 3.12 ist ${}^k\underset{\sim}{D}$ genau dann am riskantesten in der Klasse $\mathcal{Z}_P^\mu(Y_1, ..., Y_k)$ in „componentwise convex order“, wenn $k = n-1$ gilt.

Beweis: Sei ${}^{n-1}\underset{\sim}{A} = (A_0, A_0Y_1, ..., A_0\prod_{i=1}^{n-1} Y_i \cdot Z_n) \in \mathcal{Z}_P^\mu(Y_1, ..., Y_{n-1})$ und f eine komponentenweise konvexe Funktion. Dann folgt mit Lemma 3.3

$$\begin{aligned} E_P(f({}^{n-1}\underset{\sim}{A})) &= E_P\Big(E_P(f(A_0, A_0y_1, ..., A_0\prod_{i=1}^{n-1} y_i \cdot Z_n)) \circ (Y_1, ..., Y_{n-1})\Big) \\ &\le E_P\Big(E_P(f(A_0, A_0y_1, ..., A_0\prod_{i=1}^{n-1} y_i \cdot Y_{d_n}^{u_n})) \circ (Y_1, ..., Y_{n-1})\Big) \\ &= E_P(f({}^{n-1}\underset{\sim}{D})). \end{aligned}$$

Für $k \in \{0, ..., n-2\}$ betrachte man die komponentenweise konvexe Funktion

$$f_k(x_0, ..., x_n) = \frac{|x_{k+2}|}{A_0} \cdot \exp\Big(-\frac{x_{k+1}}{A_0\prod_{i=1}^{k+1} u_i}\Big)$$

sowie den Aktienpreisprozeß

$$\overset{k}{\underset{\sim}{A}} = (A_0, A_0 Y_1, ..., A_0 \prod_{i=1}^{k} Y_i, A_0 \prod_{i=1}^{k} Y_i \cdot Z_{k+1}, ..., A_0 \prod_{i=1}^{k} Y_i \cdot \prod_{i=k+1}^{n} Z_i)$$

aus $\mathcal{Z}_P^\mu(Y_1, ..., Y_k)$ mit $Z_{k+1} \equiv \mu_{k+1}$. Wegen

$$\begin{aligned} E_P(f_k(\overset{k}{\underset{\sim}{A}})) &= E_P\Big(Z_{k+2} \cdot Z_{k+1} \cdot \prod_{i=1}^{k} Y_i \cdot \exp\big(-\frac{Z_{k+1} \cdot \prod_{i=1}^{k} Y_i}{\prod_{i=1}^{k+1} u_i}\big)\Big) \\ &= \mu_{k+2} E_P\Big(E_P\Big(Z_{k+1} \cdot \prod_{i=1}^{k} y_i \cdot \exp\big(-\frac{Z_{k+1} \cdot \prod_{i=1}^{k} y_i}{\prod_{i=1}^{k+1} u_i}\big)\Big) \circ (Y_1, ..., Y_k)\Big) \end{aligned}$$

und

$$E_P(f_k(\overset{k}{\underset{\sim}{D}})) = \mu_{k+2} E_P\Big(E_P\Big(Y_{d_{k+1}}^{u_{k+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} y_i \cdot \exp\big(-\frac{Y_{d_{k+1}}^{u_{k+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} y_i}{\prod_{i=1}^{k+1} u_i}\big)\Big) \circ (Y_1, ..., Y_k)\Big)$$

reicht es für den Beweis der Ungleichung $E_P(f(\overset{k}{\underset{\sim}{A}})) > E_P(f(\overset{k}{\underset{\sim}{D}}))$ zu zeigen, daß

$$E_P\Big(Z_{k+1} \cdot \exp\big(-\frac{Z_{k+1} \cdot \prod_{i=1}^{k} y_i}{\prod_{i=1}^{k+1} u_i}\big)\Big) > E_P\Big(Y_{d_{k+1}}^{u_{k+1}} \cdot \exp\big(-\frac{Y_{d_{k+1}}^{u_{k+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} y_i}{\prod_{i=1}^{k+1} u_i}\big)\Big)$$

für alle $(y_1, ..., y_k) \in \bigtimes_{i=1}^{k} [d_i, u_i]$ gilt. Mit

$$g_{(y_1,...,y_k)}(x) := x \cdot \exp\Big(-\frac{x \cdot \prod_{i=1}^{k} y_i}{\prod_{i=1}^{k+1} u_i}\Big)$$

läßt sich dies schreiben als

$$g_{(y_1,...,y_k)}(\mu_{k+1}) > p_{d_{k+1}} \cdot g_{(y_1,...,y_k)}(d_{k+1}) + p_{u_{k+1}} \cdot g_{(y_1,...,y_k)}(u_{k+1}) \qquad (\star\star)$$

für alle $(y_1, ..., y_k) \in \bigtimes_{i=1}^{k} [d_i, u_i]$, wobei $p_{u_{k+1}} = 1 - p_{d_{k+1}} = \frac{\mu_{k+1} - d_{k+1}}{u_{k+1} - d_{k+1}}$ sei.

Da für $\lambda > 0$ die Funktion $h_\lambda(x) = xe^{-\lambda x}$ auf dem Intervall $(-\infty, \frac{2}{\lambda})$ streng konkav ist (wie man leicht mit $h''(x) = (\lambda^2 x - 2\lambda)e^{-\lambda x}$ einsieht), ist $g_{(y_1,...,y_k)}(x)$ für $x < \frac{2\prod_{i=1}^{k+1} u_i}{\prod_{i=1}^{k} y_i}$ und damit insbesondere auf dem Intervall $[d_{k+1}, u_{k+1}]$ streng konkav. Hieraus ergibt sich direkt $(\star\star)$, womit $\overset{k}{\underset{\sim}{D}}$ folglich nicht am riskantesten in $\mathcal{Z}_P^\mu(Y_1, ..., Y_k)$ in „componentwise convex order“ ist.

$\square$

Satz 3.11 und Theorem 3.12 zeigen, daß Modelle mit stochastisch unabhängigen und dichotomen Faktoren „worst case scenarios" liefern und daher bei der Risikobewertung „konservative" Eigenschaften für den Herausgeber von Optionen mit konvexen Auszahlungsfunktionen aufweisen. Eine erste ökonomische Folgerung könnte wie folgt aussehen:

- Der Preis der in Theorem 3.12 betrachteten Optionen sollte isoton vom zugehörigen erwarteten Risiko abhängen. Im Einklang mit dem *von Neumann - Morgenstern Axiom des erwarteten Nutzens* (vgl. [65]) sollte die Bank zur Bewertung der Option daher das Modell mit dem größten zu erwartenden Risiko (d.h. dem höchsten zu erwartenden Nutzen der Auszahlungsfunktion) heranziehen. Dabei wird der zu erwartende Nutzen dieser Option in einem Modell mit Aktienpreisprozeß $(A_0, A_0Y_1, ..., A_0\prod_{i=1}^n Y_i)$ aus $\mathcal{Z}_P^\mu$ zu jedem Zeitpunkt k dadurch maximiert, daß man die restlichen Faktoren durch Balayages $Y_{d_{k+1}}^{u_{k+1}}, ..., Y_{d_n}^{u_n}$ ersetzt, welche voneinander und von der Aktienkursentwicklung bis zum aktuellen Zeitpunkt stochastisch unabhängig sind. Daher sollte der Preis in k nicht größer sein als der Preis im Modell mit Aktienpreisprozeß
$$(A_0, ..., A_0\prod_{i=1}^k Y_i, A_0\prod_{i=1}^k Y_i \cdot Y_{d_{k+1}}^{u_{k+1}}, ..., A_0\prod_{i=1}^k Y_i \cdot \prod_{i=k+1}^n Y_{d_i}^{u_i}).$$

- Da zu einem festen Zeitpunkt k der Aktienpreis A_k bekannt ist, kann zu diesem Zeitpunkt in Modellen mit dichotomen Faktoren $Y_{k+1}, ..., Y_n$ für jede der in Theorem 3.12 betrachteten Optionen eine Handelsstrategie bestimmt werden, welche sie für die Restlaufzeit absichert, d.h. es läßt sich ein fairer Preis bestimmen. Dieser ist insbesondere unabhänig von $(\mu_{k+1}, ..., \mu_n)$.

- Legt man als Bewertungs- bzw. Preiskriterium für diese Optionen also das zu erwartende Risiko zugrunde, so sollte der Ausgabepreis in jedem Modell mit Aktienpreisprozeß aus
$$\mathcal{Z}_P := \bigcup_{(\mu_1,...,\mu_n)\in \times_{i=1}^n (d_i,u_i)} \mathcal{Z}_P^\mu$$
nicht größer sein als im äußeren Binomialmodell. Weiterhin sind in einem Handelszeitpunkt $k \in \{1, ..., n-1\}$ die Faktoren $Y_1, ..., Y_k$ bekannt. Der Preis der Optionen in k sollte daher in jedem Modell mit Aktienpreisprozeß aus
$$\mathcal{Z}_P(Y_1, ..., Y_k) := \bigcup_{(\mu_{k+1},...,\mu_n)\in \times_{i\geq k+1} (d_i,u_i)} \mathcal{Z}_P^{(E_P(Y_1),...,E_P(Y_k),\mu_{k+1},...,\mu_n)}(Y_1, ..., Y_k)$$
nicht größer sein als in demjenigen Modell, dessen restliche Faktoren von $(Y_1, ..., Y_k)$ und voneinander unabhängige Balayages $Y_{d_{k+1}}^{u_{k+1}}, ..., Y_{d_n}^{u_n}$ sind.

An dieser Stelle sei angemerkt, daß die durch die Forderung $d_i = \min supp(P_w^{Y_i}) < 1 + r_i < u_i = \sup supp(P_w^{Y_i})$, $i = 1, ..., n$ implizierte Arbitragefreiheit der Modelle mit Aktienpreisprozeß aus $\mathcal{Z}_P$ für die Gültigkeit von Satz 3.11 und Theorem 3.12 nicht notwendig ist. Mit ihrer Hilfe kann jedoch eine weitere ökonomische Folgerung angegeben werden:

Korollar 3.15
Gegeben sei ein Aktie/Bond Modell mit Aktienpreisprozeß

$$\underset{\sim}{A} = (A_0, A_0 Y_1, ..., A_0 \prod_{i=1}^{n} Y_i) \in \mathcal{Z}_P.$$

Für die in Theorem 3.12 betrachteten Optionen seien die Auszahlungen zusätzlich nicht-negativ. Dann sind alle arbitragefreien Preise, welche mit Hilfe von äquivalenten Martingalmaßen aus der Menge

$$\widehat{\mathcal{P}} := \{Q^{(Y_1,...,Y_n)} \in \mathcal{P} : Q^{(Y_1,...,Y_n)} = \bigotimes_{i=1}^{n} Q^{Y_i}\}$$

berechnet werden, nicht größer als die eindeutig bestimmten fairen Preise dieser Optionen im äußeren Binomialmodell.

Beweis: Jeder arbitragefreie Ausgabepreis der in Theorem 3.12 betrachteten Optionen entspricht gemäß Satz 1.16 bzw. Satz 1.22 dem zu erwartenden Risiko ihrer Auszahlungsfunktionen unter einem äquivalenten Martingalmaß, wobei gemäß dem ersten Fundamentalsatz der Preistheorie die Menge $\mathcal{P}$ der äquivalenten Martingalmaße nicht-leer ist. Korollar 3.15 folgt daher aus Theorem 3.12, indem man $\mu = (1 + r_1, ..., 1 + r_n)$ wählt.

□

Bemerkung 3.16
Aus $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{Z}_P$ folgt nicht nur $\widehat{\mathcal{P}} \neq \emptyset$; vielmehr ergibt sich hieraus für jedes $Q^{(Y_1,...,Y_n)} \in \mathcal{P}$, daß $\bigotimes_{i=1}^{n} Q^{Y_i} \sim P_w$ und somit $\bigotimes_{i=1}^{n} Q^{Y_i} \in \widehat{\mathcal{P}}$ gilt. In Kapitel 4 (vgl. Bemerkung 4.44) wird sich darüberhinaus zeigen, daß im Fall $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^{n} P_w^{\pi_i}$ für die in Theorem 3.12 betrachteten Optionen mit Auszahlunsprozeß $\underset{\sim}{C}$ folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i) &= \sup_{Q \in \widehat{\mathcal{P}}} E_Q(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i), \\ \sup_{Q \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau) &= \sup_{Q \in \widehat{\mathcal{P}}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau), \end{aligned}$$

d.h. die Aussage aus Korollar 3.15 überträgt sich auf alle arbitragefreien Preise.

Zusammenfassend ist damit also gezeigt worden, daß Binomialmodelle bzw. allgemeiner Modelle, bei denen die Faktoren vom „aktuellen“ bis zum terminalen Handelszeitpunkt dichotom und unabhängig sind, konservative Eigenschaften für die Bewertung des Risikos von einer Vielzahl von Optionen besitzen sowie obere Schranken für eine Reihe von arbitragefreien Preisen liefern.

3.3 Extremaleigenschaften von Modellen mit deterministischen und dichotomen Faktoren

Anhand der Abschätzung des zu erwartenden Risikos für Modelle mit beschränkten Faktoren ist es im letzten Abschnitt gelungen, für eine Vielzahl von Optionen Schranken anzugeben, welche deren Preise unter ökonomischen Aspekten nicht überschreiten sollten. Für die Berechnung dieser oberen Schranken war die Beschränktheit der Träger der Faktoren eine essentielle Voraussetzung, und die Lage der maximalen und minimalen Elemente lieferte die entscheidenden Informationen.

In diesem Abschnitt sollen durch analoge Überlegungen entsprechende untere Schranken berechnet werden. Hierbei wird nicht die Lage von $\sup supp(P_w^{Y_i})$ und $\min supp(P_w^{Y_i})$, sondern die Region in der „Nähe“ des Erwartungswertes $E_P Z_i$ die entscheidenden Informationen liefern. Daher wird auf die Forderungen $\sup supp(P_w^{Y_i}) < \infty$ und $\min supp(P_w^{Y_i}) > 0$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$ verzichtet und eine verallgemeinerte Definition von „Y ist riskanter als X“ für nicht notwendigerweise beschränkte Zufallsgrößen angegeben. Die Existenz der Erwartungswerte EX und EY ist hierbei eine unverzichtbare Voraussetzung (vgl. [49], Seite 16: „Indeed, any attempt to generalize the idea of variability order to random variables with non-existing means leads to serious difficulties, see, for example, Elton and Hill (1992) ([23]).“

Eine geeignete Formulierung befindet sich z.B. in [62]:

Definition 3.17 (vgl. [62], Seite 357)
Seien X und Y integrierbare Zufallsgrößen auf einem W-Raum $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$.

a) Falls integrierbare Zufallsgrößen $\widehat{X}$ und $\widehat{Y}$ auf $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$ existieren mit

  i) $\widehat{X} \sim X$,

  ii) $\widehat{Y} \sim Y$,

  iii) $E_P(\widehat{Y}|\widehat{X}) = \widehat{X} \quad P\text{-f.s.}$,

  so gilt „Y is equal to X plus noise.“

b) *Falls die Ungleichung $E(f(X)) \leq E(f(Y))$ für alle konvexen Funktionen f erfüllt ist, für die $E(f(X))$ und $E(f(Y))$ existieren, so gilt „X is smaller than Y in convex order".*

c) *Sei $S(x) := F^Y(x) - F^X(x)$ die Differenz der Verteilungsfunktionen und $T(y) := \int_{-\infty}^{y} S(x)dx$. Falls $T(y) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\lim_{y\to\infty} T(y) = 0$ ist, so gilt „Y has more weight in the tails than X".*

Die Aussage von Satz 3.10 überträgt sich auf den allgemeinen Fall:

Satz 3.18 ([62], Theorem 12.C.5)
Die Bedingungen aus Definition 3.17 sind äquivalent.

Die Äquivalenz von *a*) und *b*) in Definition 3.16 ist eine Erweiterung des Theorems von Strassen (vgl. [64], Theorem 11); dieses wird in [62] beim Beweis der Aussage von Satz 3.18 als Theorem 2.A.3 zitiert (aber nicht vollständig bewiesen). Ein konstruktiver Beweis von Strassens Theorem befindet sich z.B. in [9], eine deutlich einfachere Variante (die zugleich einen effizienten Algorithmus zur Bestimmung von $\widehat{Y}$ liefert) in [48].

Mit denselben Techniken wie im letzten Abschnitt läßt sich nun nachweisen, daß für $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in (0, \infty)^n$ unter allen Modellen, deren Preisprozeß ein Element von

$$\widehat{Z}_P^\mu := \left\{ \underset{\sim}{A} = (A_i)_{0\leq i\leq n} : \begin{array}{l} A_i = A_0 \prod_{k=1}^{i} Z_k \text{ mit } Z_1, ..., Z_n \text{ stoch. unabh. und} \\ Z_k > 0 \text{ int. bzgl. } P \text{ mit } E_P(Z_k) = \mu_k,\ k = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

ist, im Modell mit deterministischen Faktoren $(\widehat{Y}_1, ..., \widehat{Y}_n) \equiv (\mu_1, ..., \mu_n)$

- die Komponenten des Aktienpreisprozesses jeweils das kleinste Risiko im Sinne von Definition 3.16 besitzen und

- das zu erwartende Risiko aller in Theorem 3.12 behandelten Optionen minimiert wird.

Wählt man speziell $\mu = (1 + r_1, ..., 1 + r_n)$, so erhält man, daß in jedem arbitragefreien Modell mit echt positiven und stochastisch unabhängigen Faktoren $Y_1, ..., Y_n$ alle mit Hilfe von äquivalenten Martingalmaßen $Q^{(Y_1,...,Y_n)} \in \widehat{\mathcal{P}}$

berechneten arbitragefreien Preise der in Theorem 3.12 vorgestellten Optionen nicht kleiner sind als ihre fairen Preise im deterministischen Modell mit Faktoren $1 + r_1, ..., 1 + r_n$.

Dieses Ergebnis läßt sich durch das Einbringen weiterer Informationen über die Träger der Faktoren u.U. noch verbessern. Ist nämlich $(1 + r_1, ..., 1 + r_n)$ kein Trägerpunkt, d.h. existiert ein $j \in \{1, ..., n\}$ mit $supp(P^{Y_j}) \subset [0, \underline{d}_j] \cup [\underline{u}_j, \infty)$ für gewisse $\underline{d}_j < 1 + r_j < \underline{u}_j$, so können größere untere Schranken für die zu erwartenden Risiken gefunden werden.

Satz 3.19

Seien $\mu_1, ..., \mu_n \in (0, \infty)$, $\mathcal{J} \subset \{1, ..., n\}$ und $\underline{d}_j \in (0, \mu_j)$ sowie $\underline{u}_j \in (\mu_j, \infty)$ für $j \in \mathcal{J}$. Weiter seien $Y_1, ..., Y_n, \widehat{Y}_1, ..., \widehat{Y}_n$ Zufallsgrößen mit $E_P(Y_i) = \mu_i$ für $1 \leq i \leq n$, $P^{\widehat{Y}_j} = \frac{\mu_j - \underline{d}_j}{\underline{u}_j - \underline{d}_j} \cdot \delta_{\underline{u}_j} + \frac{\underline{u}_j - \mu_j}{\underline{u}_j - \underline{d}_j} \cdot \delta_{\underline{d}_j}$ und $supp(P_w^{Y_j}) \subset [0, \underline{d}_j] \cup [\underline{u}_j, \infty)$ für $j \in \mathcal{J}$ sowie $P^{\widehat{Y}_j} = \delta_{\mu_j}$ und $supp(P_w^{Y_j}) \subset [0, \infty)$ für $j \notin \mathcal{J}$.

a) Sind sowohl $Y_1, ..., Y_n$ als auch $\widehat{Y}_1, ..., \widehat{Y}_n$ stochastisch unabhängig, so sind die Komponenten von $\widehat{\underset{\sim}{A}} = (A_0, A_0\widehat{Y}_1, ..., A_0 \prod_{i=1}^n \widehat{Y}_i)$ nicht riskanter als die von $\underset{\sim}{A} = (A_0, A_0Y_1, ..., A_0 \prod_{i=1}^n Y_i)$ im Sinne der Definitionen 3.17 a), b) und c).

b) Sind für ein $k \in \{1, ..., n-1\}$ sowohl $(Y_1, ..., Y_k), Y_{k+1}, ..., Y_n$ als auch $(Y_1, ..., Y_k), \widehat{Y}_{k+1}, ..., \widehat{Y}_n$ stochastisch unabhängig, so sind die Komponenten von

$$^k\widehat{\underset{\sim}{A}} = (A_0, A_0Y_1, ..., A_0 \prod_{i=1}^k Y_i, A_0 \prod_{i=1}^k Y_i \cdot \widehat{Y}_{k+1}, ..., A_0 \prod_{i=1}^k Y_i \cdot \prod_{i=k+1}^n \widehat{Y}_i)$$

nicht weniger riskant als die von $\underset{\sim}{A} = (A_0, A_0Y_1, ..., A_0 \prod_{i=1}^n Y_i)$ im Sinne der Definitionen 3.17 a), b) und c).

Beweis: Zunächst wird gezeigt, daß $\widehat{Y}_j$ für jedes $j \in \{1, ..., n\}$ kleiner ist als Y_j in „convex order“. Sei dafür $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion mit existierendem $E_P(f(Y_j))$. Falls $P^{\widehat{Y}_j} = \delta_{\mu_j}$, so folgt aus der Jensenschen Ungleichung direkt

$$E_P(f(Y_j)) \geq f(E_P(Y_j)) = f(\mu_j) = E_P(f(\widehat{Y}_j)).$$

Gelte nun $P^{\widehat{Y}_j} = \frac{\mu_j - \underline{d}_j}{\underline{u}_j - \underline{d}_j} \cdot \delta_{\underline{u}_j} + \frac{\underline{u}_j - \mu_j}{\underline{u}_j - \underline{d}_j} \cdot \delta_{\underline{d}_j}$.

Auf der Menge $\{Y_j \notin (\underline{d}_j, \underline{u}_j)\}$ erhält man aufgrund der Konvexität von f

$$f(Y_j(\omega)) \geq \frac{f(\underline{u}_j)-f(\underline{d}_j)}{\underline{u}_j-\underline{d}_j}\cdot Y_j(\omega)+\frac{f(\underline{d}_j)\underline{u}_j-f(\underline{u}_j)\underline{d}_j}{\underline{u}_j-\underline{d}_j}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
E_P(f(Y_j)) &\geq E_P\Big(\frac{f(\underline{u}_j)-f(\underline{d}_j)}{\underline{u}_j-\underline{d}_j}\cdot Y_j+\frac{f(\underline{d}_j)\underline{u}_j-f(\underline{u}_j)\underline{d}_j}{\underline{u}_j-\underline{d}_j}\Big)\\
&= \frac{f(\underline{u}_j)-f(\underline{d}_j)}{\underline{u}_j-\underline{d}_j}\cdot E_P(Y_j)+\frac{f(\underline{d}_j)\underline{u}_j-f(\underline{u}_j)\underline{d}_j}{\underline{u}_j-\underline{d}_j}\\
&= \frac{f(\underline{u}_j)-f(\underline{d}_j)}{\underline{u}_j-\underline{d}_j}\cdot \mu_j+\frac{f(\underline{d}_j)\underline{u}_j-f(\underline{u}_j)\underline{d}_j}{\underline{u}_j-\underline{d}_j}\\
&= f(\underline{u}_j)\cdot\frac{\mu_j-\underline{d}_j}{\underline{u}_j-\underline{d}_j}+f(\underline{d}_j)\cdot\frac{\underline{u}_j-\mu_j}{\underline{u}_j-\underline{d}_j}\\
&= E_P(f(\widehat{Y}_j)).
\end{aligned}$$

Sind nun sowohl $Y_1,...,Y_n$ als auch $\widehat{Y}_1,...,\widehat{Y}_n$ stochastisch unabhängig, so ist $(\widehat{Y}_1,...,\widehat{Y}_n)$ gemäß Theorem 3.6.3 in [49] kleiner als $(Y_1,...,Y_n)$ in „component-wise convex order“. In der Situation von $b)$ erhält man für eine komponentenweise konvexe Funktion g mit existierendem $E_P(g(Y_1,...,Y_k,\widehat{Y}_{k+1},...,\widehat{Y}_n))$ und $E_P(g(Y_1,...,Y_n))$ durch Faktorisierung

$$E_P(g(Y_1,...,Y_k,\widehat{Y}_{k+1},...,\widehat{Y}_n)|(Y_1,...,Y_k)) \leq E_P(g(Y_1,...,Y_n)|(Y_1,...,Y_k))$$

$P|\sigma(Y_1,...,Y_k)$-f.s., woraus

$$E_P(g(Y_1,...,Y_k,\widehat{Y}_{k+1},...,\widehat{Y}_n)) \leq E_P(g(Y_1,...,Y_n))$$

folgt. Für eine konvexe Funktion f mit existierendem $E_P(f(A_n))$ und $E_P(f(\widehat{A}_n))$ bzw. $E_P(f({}^k\!\widehat{A}_n))$ ist schließlich $g(y_1,...,y_n) := f(A_0\prod_{i=1}^n y_i)$ komponentenweise konvex, so daß sich $E_P(f(\widehat{A}_n)) \leq E_P(f(A_n))$ bzw. $E_P(f({}^k\!\widehat{A}_n)) \leq E_P(f(A_n))$ ergibt.

$\square$

Definiert man für $\mathcal{J} \subset \{1,...,n\}$ und $\mu = (\mu_1,...,\mu_n) \in \times_{j\in\mathcal{J}}(\underline{d}_j,\underline{u}_j)\dot{\times}\times_{j\notin\mathcal{J}}(0,\infty)$ (wobei mit $\dot{\times}$ wieder die „richtige“ Reihenfolge der Faktorenmenge gemeint ist) die Menge

$${}_{\mathcal{J}}\widehat{Z}_P^{\mu} := \Big\{(A_0, A_0Z_1,...,A_0\prod_{i=1}^n Z_i) \in \widehat{Z}_P^{\mu} :\ supp(P^{Z_j}) \subset [0,\underline{d}_j] \cup [\underline{u}_j,\infty)\,\forall\, j\in\mathcal{J}\Big\},$$

so legt Satz 3.19 nun die Vermutung nahe, daß die zu erwartenden Risiken einer Vielzahl von Optionen in Modellen mit Aktienpreisprozeß aus ${}_{\mathcal{J}}\widehat{Z}_P^{\mu}$ zum Zeitpunkt $k \in \{0,...,n-1\}$ durch einen Preisprozeß minimiert werden, bei dem die restlichen Faktoren $Z_{k+1}, ..., Z_n$ voneinander und von der bisherigen Aktienkursentwicklung stochastisch unabhängig und entweder identisch μ_j-wertig (für $j \notin \mathcal{J}$) oder $\{\underline{d}_j, \underline{u}_j\}$-wertig (für $j \in \mathcal{J}$) sind. Insbesondere sollten zum Anfangszeitpunkt die zu erwartenden Risiken durch das *innere deterministisch/dichotome Modell* minimiert werden, also durch dasjenige Modell, dessen Faktoren stochastisch unabhängig und identisch μ_j-wertig (für $j \notin \mathcal{J}$) oder $\{\underline{d}_j, \underline{u}_j\}$-wertig (für $j \in \mathcal{J}$) sind. Mit analogen Methoden wie im Beweis von Theorem 3.12 erhält man:

Theorem 3.20
In der Situation von Satz 3.19 seien $\widehat{Y}_1, ..., \widehat{Y}_n$ zusätzlich stochastisch unabhängig. Dann gilt:

a) Für die in Theorem 3.12 betrachteten Optionen werden die zu erwartenden Risiken im Zeitpunkt 0 in der Klasse ${}_{\mathcal{J}}\widehat{Z}_P^{\mu}$ durch den Aktienpreisprozeß

$$(A_0, A_0\widehat{Y}_1, ..., A_0 \prod_{i=1}^{n} \widehat{Y}_i)$$

des inneren deterministisch/dichotomen Modells minimiert.

b) Für ein $k \in \{1, ..., n\}$ seien $(Y_1, ..., Y_k), \widehat{Y}_{k+1}, ..., \widehat{Y}_n$ stochastisch unabhängig. Dann werden die zu erwartenden Risiken der in Theorem 3.12 betrachteten Optionen zum Zeitpunkt k in der Klasse

$${}_{\mathcal{J}}\widehat{Z}_P^{\mu}(Y_1, ..., Y_k) := \left\{ \underset{\sim}{A} : \begin{array}{l} A_i = \prod_{j=1}^{i} Z_j, 0 \le i \le n, \text{ wobei } Z_i = Y_i, i \le k, \\ Z_i > 0 \text{ mit } E_P(Z_i) = \mu_i \text{ für } i \ge k+1, \\ supp(P^{Z_i}) \subset [0, \underline{d}_i] \cup [\underline{u}_i, \infty) \text{ für } i \in \mathcal{J}, \\ (Y_1, ..., Y_k), Z_{k+1}, ..., Z_n \text{ stoch. unabhängig} \end{array} \right\}$$

durch den Aktienpreisprozeß

$$(A_0, A_0 Y_1, ..., A_0 \prod_{i=1}^{k} Y_i, A_0 \prod_{i=1}^{k} Y_i \cdot \widehat{Y}_{k+1}, ..., A_0 \prod_{i=1}^{k} Y_i \cdot \prod_{i=k+1}^{n} \widehat{Y}_i)$$

minimiert.

Setzt man zusätzlich die Arbitragefreiheit der betrachteten Modelle voraus, so erhält man analog zu Korollar 3.15 als ökonomische Folgerung untere Schranken für eine Vielzahl von arbitragefreien Preisen von Optionen:

Korollar 3.21
Betrachtet werde ein Aktie/Bond Modell mit stochastisch unabhängigen Faktoren $Y_1, ..., Y_n$. *Weiter sei*

$$\mathcal{J} := \{j \in \{1, ..., n\} : \exists\, 0 < \underline{d}_j < 1 + r_j < \underline{u}_j < \infty \text{ mit } supp(P_w^{Y_j}) \subset [0, \underline{d}_j] \cup [\underline{u}_j, \infty)\}.$$

Für die in Theorem 3.12 betrachteten Optionen seien die Auszahlungsprozesse nicht-negativ. Dann sind diejenigen arbitragefreien Preise, welche mit Hilfe von Martingalmaßen $Q^{(Y_1,...,Y_n)} \in \widehat{\mathcal{P}}$ *berechnet werden, nicht kleiner als die eindeutig bestimmten fairen Preise dieser Optionen im inneren deterministisch/dichotomen Modell, d.h. im Modell, dessen Faktoren* $\widehat{Y}_1, ..., \widehat{Y}_n$ *stochastisch unabhängig sowie identisch* $1 + r_j$ *für* $j \notin \mathcal{J}$ *und* $\{\underline{d}_j, \underline{u}_j\}$*-wertig für* $j \in \mathcal{J}$ *sind.*

Der Beantwortung der nun naheliegenden Frage, ob sich diese Ergebnisse auf alle arbitragefreien Preise und auf Modelle mit nicht notwendigerweise stochastisch unabhängigen Faktoren übertragen lassen, ist das nächste Kapitel gewidmet.

Kapitel 4

Obere und untere Preise in Aktie/Bond Modellen

In diesem Kapitel sei das zugrundeliegende Modell stets als arbitragefrei vorausgesetzt. Eine naheliegende Forderung bei der Bewertung eines Finanzderivates besteht nun darin, daß sein Preis weder für den Käufer noch für den Verkäufer einen risikolosen Profit ermöglichen sollte. Die Menge der arbitragefreien Preise für Finanzderivate mit regelmäßigen nicht-negativen Auszahlungen in einem arbitragefreien Modell ist gemäß Definition/Korollar 1.20 gegeben durch

$$\{E_Q(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_k) | Q \in \mathcal{P}, E_Q(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_k) < \infty\}.$$

Für amerikanische Optionen mit nicht-negtivem Auszahlungsprozeß bilden die arbitragefreien Preise gemäß Satz 1.22 ein Intervall mit den Endpunkten

$$\underline{a}(\underset{\sim}{C}) := \inf_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau)$$

und

$$\overline{a}(\underset{\sim}{C}) := \sup_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau).$$

Von besonderem Interesse sind folglich die Werte

$$\inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_k),\ \sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_k),\ \inf_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau),\ \sup_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau).$$

Bei Kenntnis dieser Grenzen oder zumindest von geeigneten oberen und unteren Schranken für diese Werte erhält man ein „grobes" Einschätzungskriterium, ob der Preis einer Option arbitragebehaftet ist.

In Kapitel 3 wurde unter Verwendung der Balayage-Technik im Falle stochastisch unabhängiger Faktoren bereits bewiesen, daß für Finanzderivate mit konvexen Auszahlungsfunktionen die unteren Grenzen für alle mittels $Q \in \widehat{\mathcal{P}}$ berechneten arbitragefreien Preise durch die fairen Bewertungen im *inneren deterministisch/dichotomen Modell* und die oberen Grenzen im Falle beschränkter Faktoren durch die faire Bewertung im *äußeren Binomialmodell* gegeben sind. Dieses Ergebnis soll nun auf *alle* arbitragefreien Preise und auf Modelle mit nicht notwendigerweise unabhängigen Faktoren verallgemeinert werden. Als duales Problem zur Berechnung der oberen (bzw. unteren) Grenzen aller arbitragefreien Preise eines Finanzderivates wird sich dabei die Konstruktion einer superreplizierenden (bzw. subreplizierenden) Handelsstrategie mit minimalen (bzw. maximalen) Anfangskosten erweisen. Dies führt zum Konzept der *oberen* und *unteren* Preise und *oberen* und *unteren* Hedges.

4.1 Definition des oberen Preises

Die Grundidee des oberen Hedges und oberen Preises einer Option ist die Konstruktion einer geeigneten Handelsstrategie mit *minimalen* Anfangskosten, die es dem *Stillhalter* ermöglicht, *alle* entstehenden Ansprüche ohne weitere Zuzahlungen abzudecken. Dieser Ansatz des „super-hedging“ wurde im zeitdiskreten Rahmen zuerst 1992 von Bensaid et al. behandelt ([5]).

Ein sehr allgemein gehaltener Definitionsansatz für den oberen Preis eines Finanzderivates mit terminaler Auszahlung C_n, welcher z.B. in [56] für das Aktie/Bond Modell verwendet wird, befindet sich in [63], §1b von Kapitel V:

$$a^\star(C_n) = \inf \left\{ x \geq 0 : \begin{array}{l} \text{es existiert eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \text{ mit} \\ H_0^t S_0 = x,\ H_n^t S_n \geq C_n\ P_w\text{-f.s.} \end{array} \right\},$$

wobei $\inf \emptyset := \infty$ sei. Ohne eine geeignete Einschränkung der Menge der Handelsstrategien stellt sich diese Definition jedoch als unzureichend für das zugrundeliegende Modell heraus. Ist nämlich $\underset{\sim}{H}$ eine Handelsstrategie mit $H_n^t S_n \geq C_n$ P_w-f.s., so erhält man durch zusätzliche Aufnahme eines Kredites in Höhe von $L > 0$ zum Zeitpunkt 0 und Zurückzahlung des Kredites zu einem beliebigen Zeitpunkt $j \in \{1, ..., n\}$ eine Handelsstrategie ${}^j\underset{\sim}{\widehat{H}}$ mit ${}^j\widehat{H}_k = (H_{k,1}, H_{k,2} - L)^t$ für $k \in \{0, ..., j-1\}$ und ${}^j\widehat{H}_k = H_k$ für alle $k \in \{j, ..., n\}$. Diese erfüllt die Bedingungen

i) ${}^j\widehat{H}_0^t S_0 = H_0^t S_0 - L$,

ii) ${}^j\widehat{H}_n^t S_n = H_n^t S_n \geq C_n \quad P_w$-f.s..

Da $L > 0$ beliebig gewählt werden kann, beträgt der obere Preis für jeden Claim C_n gemäß obiger Definition entweder 0, falls eine einzige Handelsstrategie existiert mit $H_n^t S_n \geq C_n$ P_w-f.s., oder ∞; dies ist offensichtlich keine sinnvolle Festlegung.

Für eine notwendige Modifizierung der Definition des oberen Preises sollte daher die Menge der betrachteten Handelsstrategien so eingeschränkt werden, daß ${}^j\widehat{\underset{\sim}{H}}$ nicht mehr zulässig ist. Ein short-selling im Bond, d.h. die Aufnahme eines Kredites, ist in allen realen Finanzmärkten möglich und sollte daher nicht ausgeschlossen werden. Das Verbot eines short-selling in der Aktie (d.h. des Eingehens einer short position in der Aktie durch Ausleihen, Übernahme von eventuellen Verpflichtungen wie Dividendenzahlungen und abschließendem Ausgleich der Position) schließt die Anwendung von ${}^j\widehat{\underset{\sim}{H}}$ nicht aus.

Der naheliegendste Ansatz zur Einschränkung der Menge der Handelsstrategien besteht daher in der Vorgabe von Schranken $d_1, ..., d_n \in \mathbb{R}$, welche von den Auszahlungen der Handelsstrategien nicht unterschritten werden dürfen, da dann der Übergang $L \uparrow \infty$ bei der Konstruktion von ${}^j\underset{\sim}{H}$ nicht mehr möglich ist. Es stellt sich demnach die Frage, ob und ggf. für welche $d = (d_1, ..., d_n) \in \mathbb{R}^n$

$$a^\star(C_n) := \inf \left\{ x \in \mathbb{R} \colon \begin{array}{l} \text{es existiert eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \text{ mit } H_0^t S_0 = x, \\ \delta_i(\underset{\sim}{H}) \geq d_i \ P_w\text{-f.s.}, \ 1 \leq i \leq n, \ H_n^t \widetilde{S}_n \geq C_n \ P_w\text{-f.s.} \end{array} \right\} \quad (\star)$$

eine „vernünftige“ Festlegung des oberen Preises liefert.

Der folgende Satz zeigt, welche Werte von d überhaupt zu einer sinnvollen Definition führen können, und daß diese dann äquivalent zur Festlegung bei einer Einschränkung auf *selbstfinanzierende* Handelsstrategien ist:

Satz 4.1

Die Definition ($\star$) führt im Aktie/Bond Modell höchstens dann zu einer Festlegung des oberen Preises, bei der für jeden Claim $C_n \geq 0$ mit $P_w(C_n > 0) > 0$

i) $a^\star(C_n)$ echt größer als 0 ist, und

ii) keine selbstfinanzierende superreplizierende Handelsstrategie (d.h. kein $\underset{\sim}{H}$ mit $\delta_i(\underset{\sim}{H}) = 0$ P_w-f.s. für $1 \leq i \leq n$ und $H_n^t S_n \geq C_n$ P_w-f.s.) existiert, deren Anfangspreis echt kleiner als $a^\star(C_n)$ ist,

wenn $\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i = 0$ gilt. In diesem Fall folgt:

$$\begin{aligned}
&\inf\left\{x \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} \textit{es ex. eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \textit{ mit } H_0^t S_0 = x, \\ \delta_i(\underset{\sim}{H}) \geq d_i \ P_w\text{-}f.s.,\ 1 \leq i \leq n,\ H_n^t S_n \geq C_n \ P_w\text{-}f.s. \end{array}\right\} \\
= \ &\inf\left\{x \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} \textit{es ex. eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \textit{ mit } H_0^t S_0 = x, \\ \delta_i(\underset{\sim}{H}) \geq 0 \ P_w\text{-}f.s.,\ 1 \leq i \leq n,\ H_n^t S_n \geq C_n \ P_w\text{-}f.s. \end{array}\right\} \\
= \ &\inf\left\{x \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} \textit{es ex. eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \textit{ mit } H_0^t S_0 = x,\ H_n = 0, \\ \delta_i(\underset{\sim}{H}) \geq 0 \ P_w\text{-}f.s.,\ 1 \leq i \leq n-1,\ \delta_n(\underset{\sim}{H}) \geq C_n \ P_w\text{-}f.s. \end{array}\right\} \\
= \ &\inf\left\{x \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} \textit{es ex. eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \textit{ mit } H_0^t S_0 = x,\ H_n = 0, \\ \delta_i(\underset{\sim}{H}) = 0 \ P_w\text{-}f.s.,\ 1 \leq i \leq n-1,\ \delta_n(\underset{\sim}{H}) \geq C_n \ P_w\text{-}f.s. \end{array}\right\}.
\end{aligned}$$

Vor dem Beweis von Satz 4.1 werden zunächst einige Hilfsmittel bereitgestellt, wobei insbesondere die Zusammenhänge zwischen *Martingaltransformationen*, *lokalen Martingalen* und *Martingalen* in diesem Kapitel an mehreren Stellen benötigt werden.

Definition 4.2 ([63], Seite 96 ff.)
Sei $\underset{\sim}{X} = (X_k, \mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *ein stochastischer Prozeß auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*.*

a) $\underset{\sim}{X}$ *wird als lokales Martingal bezeichnet, falls eine (lokalisierende) Folge* $(\tau_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *von Stoppzeiten bezüglich* $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *mit folgenden Eigenschaften existiert:*

  i) $\tau_m \leq \tau_{m+1}$ *P-f.s.,*

  ii) $\tau_m \uparrow \infty$ *P-f.s. für* $m \to \infty$*,*

  iii) der gestoppte Prozeß $X^{\tau_m} = (X_{\tau_m \wedge k}, \mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *ist für jedes* $m \in \mathbb{N}$ *ein Martingal (wobei* $x \wedge y$ *für* $x, y \in \mathbb{R}$ *das Minimum von* x *und* y *bezeichne).*

b) Gilt $E|X_0| < \infty$*, und besitzen für alle* $k \geq 1$ *die (im erweiterten Sinne gemäß Seite 93 in [63] definierten) bedingten Erwartungswerte* $E(X_k|\mathcal{F}_{k-1})$ *die Eigenschaften*

  i) $E(|X_k||\mathcal{F}_{k-1}) < \infty$ *P-f.s.,*

  ii) $E(X_k|\mathcal{F}_{k-1}) = X_{k-1}$ *P-f.s.,*

  so wird $\underset{\sim}{X}$ *als verallgemeinertes Martingal bezeichnet.*

c) *Besitzt* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *eine Darstellung der Form*

$$X_k = Y_0 \cdot M_0 + \sum_{i=1}^{k} Y_i \cdot (M_i - M_{i-1}),$$

wobei $\underset{\sim}{M} = (M_k, \mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *ein Martingal und* $\underset{\sim}{Y} = (Y_k, \mathcal{F}_{k-1})_{k\in\mathbb{N}_0}$ *(mit* $\mathcal{F}_{-1} := \mathcal{F}_0$*) ein previsibler stochastischer Prozeß ist, dann wird* $\underset{\sim}{X}$ *als Martingaltransformation bezeichnet.*

Die Konzepte aus Definition 4.2 stehen in diskreter Zeit in enger Beziehung zueinander:

Satz 4.3 ([63], Seite 98)
Sei $\underset{\sim}{X} = (X_k, \mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *ein stochastischer Prozeß mit* $E|X_0| < \infty$*. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

a) $\underset{\sim}{X}$ *ist ein lokales Martingal.*

b) $\underset{\sim}{X}$ *ist ein verallgemeinertes Martingal.*

c) $\underset{\sim}{X}$ *ist eine Martingaltransformation.*

Obwohl bei einem lokalen Martingal $\underset{\sim}{X}$ in *endlicher* diskreter Zeit, d.h. bei Vorgabe eines endlichen Horizonts $n \in \mathbb{N}$, jede lokalisierende Folge $(\tau_m)_{m\in\mathbb{N}}$ für P-f.a. $\omega \in \Omega$ die Eigenschaft

$$\tau_m(\omega) > n$$

für alle $m \geq m_0(\omega)$ mit einem geeigneten $m_0(\omega) \in \mathbb{N}$ besitzt, und $(X_{\tau_m\wedge k}, \mathcal{F}_k)$ ein Martingal ist, stellt $\underset{\sim}{X}$ selbst i.a. dennoch kein Martingal dar, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 4.4
Sei $(Y_k, \mathcal{F}_k)_{k\in\{0,\dots,n\}}$ *ein integrierbarer stochastischer Prozeß auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, wobei* $P(Y_k = 0) < 1$ *für alle* k *und* $E(Y_k|\mathcal{F}_{k-1}) = 0$ P*-f.s. für alle* $k \geq 1$ *gelte. Weiter seien* $Z_0, \dots, Z_n$ *Zufallsgrößen auf* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *mit den Eigenschaften*

i) Z_0 *ist* $\mathcal{F}_0$*-meßbar, und für alle* $k \geq 1$ *ist* Z_k $\mathcal{F}_{k-1}$*-meßbar,*

ii) $Z_k \geq 0$ *für alle* k*,*

iii) $EZ_k = \infty$ *für alle* k*,*

iv) Z_k *und* Y_k *sind für alle* k *stochastisch unabhängig.*

Dann bildet der stochastische Prozeß $\underset{\sim}{X} = (X_k, \mathcal{F}_k)_{k\in\{0,...,n\}}$ *mit*

$$X_k = \sum_{i=0}^{k} Z_i Y_i$$

ein lokales Martingal:

Als previsible Folge von Zufallsgrößen ist $(Z_0, ..., Z_n)$ *lokal beschränkt; als lokalisierende Folge wähle man z.B.* $(\tau_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$\tau_m = \inf\{j \geq 0 : Z_{j+1} > m\},$$

wobei $\inf \emptyset := \infty$ *sei. Dann erhält man für* $\underset{\sim}{X}^{\tau_m} = (X_{\tau_m \wedge k}, \mathcal{F}_k)_{k\in\{0,...,n\}}$ *mit*

$$X_{\tau_m \wedge k} = \sum_{i=0}^{k} Z_i Y_i \, 1_{\{\tau_m \geq i\}}$$

wegen $|Z_i 1_{\{\tau_m \geq i\}}| \leq m$*, daß* $E|X_{\tau_m \wedge k}| < \infty$ *für alle* k *gilt. Weiter besitzt* $\underset{\sim}{X}^{\tau_m}$ *für alle* $k \in \{1, ..., n\}$ *die Eigenschaft*

$$\begin{aligned} E(\sum_{i=0}^{k} Z_i Y_i \, 1_{\{\tau_m \geq i\}} | \mathcal{F}_{k-1}) &= \sum_{i=0}^{k-1} Z_i Y_i \, 1_{\{\tau_m \geq i\}} + E(Z_k Y_k \, 1_{\{\tau_m \geq k\}} | \mathcal{F}_{k-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} Z_i Y_i \, 1_{\{\tau_m \geq i\}} + Z_k 1_{\{\tau_m \geq k\}} E(Y_k | \mathcal{F}_{k-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} Z_i Y_i \, 1_{\{\tau_m \geq i\}} \quad P\text{-f.s.}. \end{aligned}$$

Da jedoch $E(|Y_i Z_i|) = E_Q(|Y_i|)E(|Z_i|) = \infty$ *gilt, bildet* $\underset{\sim}{X}$ *kein Martingal.*

Ein hinreichendes und notwendiges Kriterium dafür, wann ein lokales Martingal bereits ein Martingal ist, liefert der folgende Satz:

Satz 4.5 ([63], Seite 100)
Ein lokales Martingal $(X_k, \mathcal{F}_k)_{k\in\{0,...,n\}}$ *ist genau dann ein Martingal, wenn die Bedingungen*

i) $E|X_0| < \infty$,

ii) $EX_n^- < \infty$ *oder* $EX_n^+ < \infty$

erfüllt sind.

Damit besitzt man nun die benötigten Hilfsmittel für den

Beweis von Satz 4.1: Sei $d = (d_1, ..., d_n) \in \mathbb{R}^n$ und

$$a^\star(C_n) := \inf \left\{ x \geq 0 : \begin{array}{l} \text{es existiert eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \text{ mit } H_0^t S_0 = x, \\ \delta_i(\underset{\sim}{H}) \geq d_i \ P_w\text{-f.s.}, 1 \leq i \leq n, \ H_n^t \widetilde{S}_n \geq C_n \ P_w\text{-f.s.} \end{array} \right\}.$$

Es werde zunächst angenommen, daß $\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i < 0$ gilt. Dann besitzt die Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ mit $H_0 = 0$ und $H_k = (0, -\sum_{i=1}^k \alpha_i d_i)^t$, $k = 1, ..., n$, die Eigenschaften

i) $H_0^t S_0 = 0,$

ii) $\delta_i(\underset{\sim}{H}) = \alpha_i d_i B_i = d_i, \quad 1 \leq i \leq n,$

iii) $H_n^t S_n = -\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i B_n =: L_1 > 0.$

Für alle Claims mit $0 < C_n \leq L_1 \ \ P_w$-f.s., zu denen z.B. alle europäischen Put-Optionen mit Ausübungspreis $K \in (\min supp(P_w^{A_n}), \min supp(P_w^{A_n}) + L_1)$ gehören, wäre daher der obere Preis 0 und damit nicht „sinnvoll“ festgelegt.

Betrachtet werde nun der Fall $\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i > 0$. Für einen Claim $C_n \geq 0$ erfüllt jede Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ mit $\delta_i(\underset{\sim}{H}) \geq d_i \ P_w$-f.s., $1 \leq i \leq n$ und $H_n^t S_n \geq C_n \ P_w$-f.s. die Ungleichung

$$\begin{aligned} H_0^t S_0 - \alpha_n H_n^t S_n + \sum_{i=1}^n H_{i-1}^t(\alpha_i S_i - \alpha_{i-1} S_{i-1}) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_i(\underset{\sim}{H}) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i \quad P_w\text{-f.s..} \end{aligned}$$

Aufgrund der in diesem Kapitel vorausgesetzten Arbitragefreiheit existiert ein äquivalentes Martingalmaß Q. Da die Bedingung $E_Q|H_0^t S_0| < \infty$ trivialerweise erfüllt ist, stellt

$$\underset{\sim}{X} := \Big(H_0^t S_0 + \sum_{i=1}^k H_{i-1}^t (\alpha_i S_i - \alpha_{i-1} S_{i-1}), \mathcal{F}_k \Big)_{k \in \{0, \ldots, n\}}$$

als Martingaltransformation gemäß Satz 4.3 ein lokales Martingal bezüglich Q dar. Aus der Ungleichung

$$\begin{aligned} H_0^t S_0 + \sum_{i=1}^{n} H_{i-1}^t(\alpha_i S_i - \alpha_{i-1} S_{i-1}) &\geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i + \alpha_n H_n^t S_n \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i + \alpha_n C_n \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i \quad P_w\text{-f.s.} \qquad (\star\star) \end{aligned}$$

folgt nun $E_Q\big((H_0^t S_0 + \sum_{i=1}^n H_{i-1}^t(\alpha_i S_i - \alpha_{i-1} S_{i-1}))^-\big) < \infty$, so daß $\underset{\sim}{X}$ laut Satz 4.5 sogar ein Martingal ist. Aus $(\star\star)$ erhält man daher durch Erwartungswertbildung bezüglich Q

$$H_0^t S_0 \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i$$

und folglich $a^\star(C_n) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i$ für jeden Claim $C_n \geq 0$.

Für $L_2 \in (0, \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i B_n)$ erhält man für alle Claims $\underset{\sim}{C}$ mit $0 \leq C_n \leq L_2$, zu denen insbesondere wieder die europäischen Put-Optionen mit Ausübungspreis $K \in (\min supp(P_w^{A_n}), \min supp(P_w^{A_n}) + L_2)$ gehören, die Ungleichung $a^\star(C_n) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i$. Für diese Claims existiert jedoch mit

$$\underset{\sim}{H} = \big((0, L_2\alpha_n)^t\big)_{k\in\{0,\ldots,n\}}$$

eine superreplizierende selbstfinanzierende Handelsstrategie, deren Anfangspreis echt kleiner als $a^\star(C_n)$ ist. Da der obere Preis die minimalen Anfangskosten für eine superreplizierende selbstfinanzierende Handelsstrategie angeben soll, ist folglich auch in diesem Fall die Definition nicht „sinnvoll“.

Es gelte also $\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i = 0$. Nun seien die Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_4$ von Handelsstrategien festgelegt durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &:= \{\underset{\sim}{H}:\ \delta_i(\underset{\sim}{H}) \geq d_i\ P_w\text{-f.s.}, 1 \leq i \leq n,\ H_n^t S_n \geq C_n\ P_w\text{-f.s.}\}, \\ \mathfrak{A}_2 &:= \{\underset{\sim}{H}:\ \delta_i(\underset{\sim}{H}) \geq 0\ P_w\text{-f.s.}, 1 \leq i \leq n,\ H_n^t S_n \geq C_n\ P_w\text{-f.s.}\}, \\ \mathfrak{A}_3 &:= \{\underset{\sim}{H}:\ H_n = 0,\ \delta_i(\underset{\sim}{H}) \geq 0\ P_w\text{-f.s.}, 1 \leq i \leq n-1,\ \delta_n(\underset{\sim}{H}) \geq C_n\ P_w\text{-f.s.}\}, \\ \mathfrak{A}_4 &:= \{\underset{\sim}{H}:\ H_n = 0,\ \delta_i(\underset{\sim}{H}) = 0\ P_w\text{-f.s.}, 1 \leq i \leq n-1,\ \delta_n(\underset{\sim}{H}) \geq C_n\ P_w\text{-f.s.}\}, \end{aligned}$$

und es bleibt zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} \inf\{H_0^t S_0 : \underset{\sim}{H} \in \mathfrak{A}_1\} &= \inf\{H_0^t S_0 : \underset{\sim}{H} \in \mathfrak{A}_2\} \\ &= \inf\{H_0^t S_0 : \underset{\sim}{H} \in \mathfrak{A}_3\} \\ &= \inf\{H_0^t S_0 : \underset{\sim}{H} \in \mathfrak{A}_4\} \end{aligned}$$

gilt. Dafür betrachte man die Abbildungen

$$
\begin{aligned}
&\Psi_1 : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2,\ \underset{\sim}{H} \mapsto \underset{\sim}{\widehat{H}} \quad \text{mit} \quad \widehat{H}_k = (H_{k,1}, H_{k,2} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i d_i)^t,\ 0 \le k \le n,\\
&\Psi_2 : \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3,\ \underset{\sim}{H} \mapsto \underset{\sim}{\widehat{H}} \quad \text{mit} \quad \widehat{H}_k = (H_{k,1}, H_{k,2})^t \cdot 1_{\{0,\dots,n-1\}}(k),\ 0 \le k \le n,\\
&\Psi_3 : \mathfrak{A}_3 \to \mathfrak{A}_4,\ \underset{\sim}{H} \mapsto \underset{\sim}{\widehat{H}} \quad \text{mit} \quad \widehat{H}_k = (H_{k,1}, H_{k,2} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_i(\underset{\sim}{H}))^t,\ 0 \le k \le n,\\
&\Psi_4 : \mathfrak{A}_4 \to \mathfrak{A}_1,\ \underset{\sim}{H} \mapsto \underset{\sim}{\widehat{H}} \quad \text{mit} \quad \widehat{H}_k = (H_{k,1}, H_{k,2} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i d_i)^t,\ 0 \le k \le n-1,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{und} \quad \widehat{H}_n = (H_{n-1,1}, H_{n-1,2} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i)^t.
\end{aligned}
$$

Aus ihrer Eigenschaft $\delta_0(\Psi_i(\underset{\sim}{H})) = \delta_0(\underset{\sim}{H})$ für $i = 1, ..., 4$ ergibt sich schließlich

$$
\begin{aligned}
\inf\{H_0^t S_0 : \underset{\sim}{H} \in \mathfrak{A}_1\} &\ge \inf\{H_0^t S_0 : \underset{\sim}{H} \in \mathfrak{A}_2\}\\
&\ge \inf\{H_0^t S_0 : \underset{\sim}{H} \in \mathfrak{A}_3\}\\
&\ge \inf\{H_0^t S_0 : \underset{\sim}{H} \in \mathfrak{A}_4\}\\
&\ge \inf\{H_0^t S_0 : \underset{\sim}{H} \in \mathfrak{A}_1\}.
\end{aligned}
$$

□

Die Selbstfinanzierung, welche in [63] (vgl. Bemerkung 2 auf Seite 395) nur als „mögliche zusätzliche“ Einschränkung genannt wird, stellt sich also im Sinne von Satz 4.1 als unverzichtbar bei der Festlegung des oberen Preises im Aktie/Bond Modell heraus! Der obere Preis eines Finanzderivates mit regelmäßigen Auszahlungen wird daher wie folgt definiert:

Definition 4.6 (vgl. [5])
In einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell wird der obere Preis eines Claims mit terminaler Auszahlung C_n festgelegt durch

$$
a^\star(C_n) := \inf\left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} \textit{es ex. eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \textit{ mit } H_0^t S_0 = x,\ H_n = 0, \\ \delta_i(\underset{\sim}{H}) = 0\ P_w\textit{-f.s.},\ 1 \le i \le n-1,\ \delta_n(\underset{\sim}{H}) \ge C_n\ P_w\textit{-f.s.} \end{array} \right\},
$$

wobei $\inf \emptyset := \infty$ *sei.*

Um die Definition des oberen Preises für Finanzderivate mit terminaler Auszahlung auf solche mit regelmäßigen Auszahlungen zu übertragen, werden für einen Claim $\underset{\sim}{C} = (C_1, ..., C_n)$ die folgenden Mengen von Handelsstrategien betrachtet:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_5 &:= \{\underset{\sim}{H} : \ \delta_i(\underset{\sim}{H}) \geq C_i \ P_w\text{-f.s.}, \ 1 \leq i \leq n\}, \\
\mathfrak{A}_6 &:= \{\underset{\sim}{H} : \ \delta_i(\underset{\sim}{H}) = 0 \ P_w\text{-f.s.}, \ 1 \leq i \leq n-1, \ \delta_n(\underset{\sim}{H}) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i B_n \ P_w\text{-f.s.}\}.
\end{aligned}$$

Die Abbildungen $\Psi_5 : \mathfrak{A}_5 \to \mathfrak{A}_6$ und $\Psi_6 : \mathfrak{A}_6 \to \mathfrak{A}_5$, festgelegt durch

$$\Psi_5(\underset{\sim}{H}) = \underset{\sim}{\widehat{H}} \ \text{ mit } \ \begin{cases} \widehat{H}_0 = H_0, \\ \widehat{H}_k = \left(H_{k,1}, H_{k,2} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_i(\underset{\sim}{H})\right)^t, \ 1 \leq k \leq n-1, \\ \widehat{H}_n = H_n \end{cases}$$

$$\Psi_6(\underset{\sim}{H}) = \underset{\sim}{\widehat{H}} \ \text{ mit } \ \begin{cases} \widehat{H}_0 = H_0, \\ \widehat{H}_k = \left(H_{k,1}, H_{k,2} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i C_i\right)^t, \ 1 \leq k \leq n-1, \\ \widehat{H}_n = H_n \end{cases}$$

erfüllen $\delta_0(\Psi_i(\underset{\sim}{H})) = \delta_0(\underset{\sim}{H})$ für $i = 5, 6$, so daß sich

$$\inf\{H_0^t S_0 : \underset{\sim}{H} \in \mathfrak{A}_5\} = \inf\{H_0^t S_0 : \underset{\sim}{H} \in \mathfrak{A}_6\}$$

ergibt. Daher ist die folgende Verallgemeinerung der Definition des oberen Preises auf Finanzderivate mit regelmäßigen Auszahlungen verträglich mit Definition 4.6:

Definition 4.7
In einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell wird der obere Preis eines Claims $\underset{\sim}{C} = (C_1, ..., C_n)$ *definiert durch*

$$a^\star(\underset{\sim}{C}) := \inf\left\{x \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} \textit{es ex. eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \textit{ mit } H_0^t S_0 = x, \ H_n = 0 \\ \textit{und } \delta_i(\underset{\sim}{H}) \geq C_i \ P_w\textit{-f.s.}, \ 1 \leq i \leq n \end{array}\right\}$$

mit $\inf \emptyset := \infty$. *Handelsstrategien* $\underset{\sim}{H}$ *mit* $\delta_i(\underset{\sim}{H}) \geq C_i$ P_w*-f.s. für alle* $1 \leq i \leq n$ *und* $H_n = 0$ *werden als oberer Hedge von* $\underset{\sim}{C}$ *bzw. als superreplizierend bezeichnet.*

Bemerkung 4.8
Der in Definition 4.7 festgelegte obere Preis eines Finanzderivates mit regelmäßigen Auszahlungen $C_1, ..., C_n$ *erfüllt die Gleichung*

$$a^\star(\underset{\sim}{C}) = \inf\left\{x \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} \qquad \textit{es ex. eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \textit{ mit } H_0^t S_0 = x, \\ H_n = 0, \ \delta_i(\underset{\sim}{H}) = 0 \ P_w\textit{-f.s.}, \ 1 \leq i \leq n-1, \\ \textit{und } \delta_n(\underset{\sim}{H}) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i B_n \ P_w\textit{-f.s.} \end{array}\right\},$$

wobei $\inf \emptyset := \infty$ *sei.*

Als erste wichtige Eigenschaft des oberen Preises erhält man:

Bemerkung 4.9
Ist der Ausgabepreis a_0 *eines Claims* $\underset{\sim}{C}$ *echt größer als* $a^\star(\underset{\sim}{C})$*, so erhält der Verkäufer der Option einen risikolosen Profit (vgl. [63], Seite 396) durch den Verkauf der Option zum Preis* a_0 *und Erwerb einer superreplizierenden Handelsstrategie* $\underset{\sim}{H}$ *mit Anfangspreis* $H_0^t S_0 \in [a^\star(\underset{\sim}{C}), a_0)$ *sowie Investition von* $a_0 - H_0^t S_0$ *in die risikolose Anlagestrategie.*

Ein Verkauf des Finanzderivates zu einem Preis $a_0 < a^\star(\underset{\sim}{C})$ *ermöglicht es dem Verkäufer offensichtlich nicht, ohne weitere Zuzahlungen einen oberen Hedge zu erwerben und damit risikolos alle entstehenden Ansprüche abzudecken.*

Folglich stellt $a^\star(\underset{\sim}{C})$ *das Supremum aller Preise dar, für die zwischen Verkäufer und Käufer eine Einigung zustandekommen sollte.*

Bei der Definition des oberen Preises eines Finanzderivates mit regelmäßigen Auszahlungen $\underset{\sim}{C}$ als Infimum über alle Anfangspreise von superreplizierenden Handelsstrategien stellen sich natürlich die Fragen, ob zum oberen Preis selbst auch ein oberer Hedge existiert, und welcher Zusammenhang mit der kleinsten oberen Schranke $\sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{k=1}^n \alpha_k C_k)$ aller arbitragefreien Preise des Finanzderivates besteht. Zur Beantwortung dieser Fragen werden zunächst wieder einige Hilfsmittel benötigt:

Definition 4.10 (vgl. [32], Anhang A2)
Sei $T \subset \mathbb{R}$ *eine beliebige Indexmenge und* $(X_t)_{t\in T}$ *eine Familie von* $\overline{\mathbb{R}}$*-wertigen Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$*. Eine Zufallsgröße* Y *heißt essentielles Supremum der* $(X_t)_{t\in T}$*, kurz* $Y = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in T} X_t$*, falls gilt:*

i) $X_t \leq Y$ *P-f.s. für alle* $t \in T$*.*

ii) Ist $\widehat{Y}$ *eine Zufallsgröße mit* $X_t \leq \widehat{Y}$ *P-f.s. für alle* $t \in T$*, so folgt* $Y \leq \widehat{Y}$*.*

Bemerkung 4.11 (vgl. [32], Anhang A2)
Für jede Familie $(X_t)_{t\in T}$ *von* $\overline{\mathbb{R}}$*-wertigen Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$ *gilt:*

a) $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in T} X_t$ *existiert, und es gibt eine abzählbare Teilmenge* $T_0 \subset T$ *mit* $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in T} X_t = \sup_{t\in T_0} X_t$*.*

b) $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in T} X_t$ *ist P-f.s. eindeutig bestimmt.*

Das wichtigste Instrument für die Konstruktion eines oberen Hedges zum oberen Preis bildet die *optionale Doob-Zerlegung*, deren Existenz zuerst 1995 von El Karoui und Quenez [21] in einem zeitstetigen Rahmen bewiesen worden ist:

Satz 4.12 (Optional Doob Decomposition) ([25], Theorem 7.5)
Sei $\underset{\sim}{U} = (U_k, \mathcal{F}_k)_{k\in\{0,\ldots,n\}}$ *ein nicht-negativer und* $\underset{\sim}{A} = (A_k, \mathcal{F}_k)_{k\in\{0,\ldots,n\}}$ *ein d-dimensionaler stochastischer Prozeß auf einem W-Raum* $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$*. Ferner sei die Menge*

$$\mathcal{Q} := \{Q : Q \sim P,\ \underset{\sim}{A} \text{ ist ein Martingal bezüglich } Q\}$$

nicht-leer. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) $(U_k, \mathcal{F}_k)_{k\in\{0,\ldots,n\}}$ *ist ein* $\mathcal{Q}$*-Supermartingal (d.h. ein Supermartingal bzgl. eines jeden Maßes* $Q \in \mathcal{Q}$*).*

ii) Es existiert ein zu $(\mathcal{F}_k)_{k\in\{0,\ldots,n\}}$ *adaptierter isotoner Prozeß* $\underset{\sim}{I}$ *mit* $I_0 = 0$ *und ein d-dimensionaler previsibler Prozeß* $\underset{\sim}{\xi}$ *mit*

$$U_k = U_0 + \sum_{j=1}^{k} \xi_j^t (A_j - A_{j-1}) - I_k \quad P\text{-f.s.}$$

für alle $k \in \{0, ..., n\}$.

Die Aussage von Satz 4.12 bleibt erhalten, wenn man $\underset{\sim}{U}$ lediglich als P-f.s. nach unten beschränkt voraussetzt, so daß sie im folgenden nicht nur auf Finanzderivate mit nicht-negativen Auszahlungen anwendbar ist. So kann z.B. bei einem *Bear Spread*, d.h. bei einer Kombination aus einer europäischen Call-Option mit Ausübungspreis K_1 und einem short-selling in einer weiteren europäischen Call-Option mit Ausübungspreis $K_2 < K_1$, der Claim

$$C_n = (A_n - K_1)^+ - (A_n - K_2)^+$$

negative Werte annehmen.

Mit Hilfe der optionalen Doob-Zerlegung erhält man nun eine erste Existenzaussage für obere Hedges:

Satz 4.13
Sei $\underset{\sim}{C} = (C_1, ..., C_n)$ ein Finanzderivat mit regelmäßigen Auszahlungen in einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell. Ist $\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i$ P_w-f.s. nach unten beschränkt, und gilt

$$\overline{a}(\underset{\sim}{C}) := \sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i) < \infty,$$

so existiert ein oberer Hedge für dieses Finanzderivat mit Anfangspreis $\overline{a}(\underset{\sim}{C})$.

Beweis: Es werde zunächst angenommen, daß $C_1 = ... = C_{n-1} = 0$ gilt. Die Existenz einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ mit $\delta_n(\underset{\sim}{H}) \geq C_n$ P_w-f.s. wird z.B. in [63], Abschnitt 1c von Kapitel VI wie folgt bewiesen:
Für $k \in \{0, ..., n\}$ sei

$$U_k := \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\alpha_n C_n | \mathcal{F}_k),$$

insbesondere also $U_n = \alpha_n C_n$ P_w-f.s. und $U_0 = \sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\alpha_n C_n)$. In [63], Abschnitt 2b von Kapitel VI wird gezeigt, daß $\underset{\sim}{U} = (U_k, \mathcal{F}_k)_{k \in \{0,...,n\}}$ ein $\mathcal{P}$-Supermartingal bildet, so daß Satz 4.11 die Existenz eines previsiblen Prozesses $\underset{\sim}{\xi}$ und eines (eindimensionalen) adaptierten isotonen Prozesses $\underset{\sim}{I}$ mit $I_0 = 0$ liefert mit

$$U_k = U_0 + \sum_{j=1}^k \xi_j(\alpha_j A_j - \alpha_{j-1} A_{j-1}) - I_k \quad P_w\text{-f.s.}$$

für alle $k \in \{1, ..., n\}$. Schließlich erfüllt die Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ mit

i) $H_{0,1} = \xi_1, \quad H_{0,2} = U_0 - \xi_1 A_0,$

ii) $H_{k,1} = \xi_{k+1}, \quad H_{k,2} = U_0 - \xi_1 A_0 + \sum\limits_{j=1}^k (\xi_j - \xi_{j+1}) \alpha_j A_j \quad \text{für} \quad 0 \leq k \leq n-1,$

iii) $H_n = 0$

die Bedingungen

1) $H_0^t S_0 \;= U_0 = \sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\alpha_n C_n),$

2) $\delta_k(\underset{\sim}{H}) = (\xi_k - \xi_{k+1}) A_k + (\xi_{k+1} - \xi_k) \alpha_k A_k B_k = 0, \quad 2 \leq k \leq n-1,$

3)
$$\begin{aligned}\delta_n(\underset{\sim}{H}) &= \xi_n A_n + (U_0 - \xi_1 A_0) B_n + \sum_{j=1}^{n-1} (\xi_j - \xi_{j+1}) \alpha_j A_j B_n \\ &= B_n\big(U_0 + \textstyle\sum_{j=1}^n \xi_j(\alpha_j A_j - \alpha_{j-1} A_{j-1})\big) \\ &= B_n(U_n + I_n) \\ &\geq B_n U_n \\ &= C_n \quad P_w\text{-f.s..}\end{aligned}$$

Damit erhält man also, daß $\underset{\sim}{H}$ einen oberen Hedge zum Preis $\sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_n C_n)$ darstellt.

Im allgemeinen Fall existiert nun ein oberer Hedge $\underset{\sim}{H}$ für $(0,...,0,\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i)$ mit Anfangspreis $\sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i)$. Die Handelsstrategie $\psi_6(\underset{\sim}{H})$ (mit ψ_6 wie bei der Überlegung im Anschluß an Definition 4.6) liefert dann einen oberen Hedge für $(C_1,...,C_n)$ mit gleichem Anfangspreis.

□

Für ein Finanzderivat mit regelmäßigen Auszahlungen $C_1,...,C_n$ sei $\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i$ P_w-f.s. nach unten beschränkt. Im Fall $\sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i) < \infty$ folgt dann aus Satz 4.13

$$a^\star(\underset{\sim}{C}) \leq \sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i) < \infty.$$

Ist umgekehrt der obere Preis dieses Finanzderivates endlich, so ist gemäß der Definition des oberen Preises die Menge der oberen Hedges nicht-leer. Sei also $\underset{\sim}{H}$ eine Handelsstrategie mit $H_n = 0$ und $\delta_i(\underset{\sim}{H}) \geq C_i$ P_w-f.s., $i = 1,...,n$. Dann erhält man die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_i(\underset{\sim}{H}) = H_0^t S_0 + \sum_{i=1}^n H_{i-1}^t(\alpha_i S_i - \alpha_{i-1} S_{i-1}) \quad P_w\text{-f.s.}. \quad (\star\star\star)$$

Der stochastische Prozeß $\underset{\sim}{M} = (M_k, \mathcal{F}_k)_{k\in\{0,...,n\}}$ mit $M_0 = H_0^t S_0$ und

$$M_k = H_0^t S_0 + \sum_{i=1}^k H_{i-1}^t(\alpha_i S_i - \alpha_{i-1} S_{i-1}),$$

für $1 \leq k \leq n$ ist bzgl. jedes äquivalenten Martingalmaßes Q als Martingaltransformation gemäß Satz 4.3 ein lokales Martingal. Satz 4.5 liefert nun zusammen mit $(\star\star\star)$, daß $\underset{\sim}{M}$ bezüglich jedes $Q \in \mathcal{P}$ sogar ein Martingal ist. Durch Erwartungswertbildung ergibt sich aus $(\star\star\star)$ die Ungleichung

$$E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i) \leq H_0^t S_0$$

für jedes $Q \in \mathcal{P}$ und jeden oberen Hedge $\underset{\sim}{H}$, so daß schließlich

$$\sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i) \leq a^\star(\underset{\sim}{C}) < \infty$$

folgt. Zusammenfassend erhält man die „upper hedging duality“ für Finanzderivate mit regelmäßigen Auszahlungen, wobei mit obiger Argumentation die in

[63] geforderte Beschränktheit der Auszahlungen (welche z.B. bei europäischen Call-Optionen in Modellen mit unbeschränktem Aktienkurs A_n nicht gegeben ist) entscheidend abgeschwächt werden kann:

Satz 4.14
Sei $\underset{\sim}{C} = (C_1, ..., C_n)$ ein Finanzderivat mit regelmäßigen Auszahlungen in einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell. Weiter sei $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i$ P_w-f.s. nach unten beschränkt. Dann gilt:

a) $a^\star(\underset{\sim}{C})$ ist genau dann endlich, wenn $\sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i)$ endlich ist.

b) **Upper Hedging Duality** *(vgl. [63], Theorem 1 auf Seite 514):*
Ist eine der beiden äquivalenten Bedingungen aus a) erfüllt, so folgt

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i) = \inf\{H_0^t S_0 : \ \underset{\sim}{H} \text{ ist ein oberer Hedge für } \underset{\sim}{C}\}.$$

Satz 4.13 und Satz 4.14 ergeben schließlich:

Korollar 4.15
Sei $\underset{\sim}{C} = (C_1, ..., C_n)$ ein Finanzderivat mit regelmäßigen Auszahlungen in einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell, und sei $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i$ P_w-f.s. nach unten beschränkt. Ist dann der obere Preis dieses Finanzderivates endlich, so existiert ein oberer Hedge mit Anfangspreis $a^\star(\underset{\sim}{C})$.

Legt man also den oberen Preis eines Finanzderivates mit regelmäßigen Auszahlungen gemäß Definition 4.6 bzw. Definition 4.7 fest, so gibt er die minimalen Anfangskosten an, die der Verkäufer der Option für einen oberen Hedge aufwenden muß, d.h. für eine Handelsstrategie, mit deren Hilfe er ohne weitere Zuzahlungen alle entstehenden Ansprüche abdecken kann. Diese Festlegung steht folglich im Einklang mit der anfangs formulierten Grundidee des Superhedging und erweist sich daher als „sinnvoll“.

Die Definition des oberen Preises läßt sich nun leicht auf amerikanische Optionen übertragen; auch für sie soll (bei P_w-f.s. nach unten beschränktem Auszahlungsprozeß) der obere Preis die minimalen Anfangskosten einer Handelsstrategie angeben, mit deren Hilfe der Verkäufer ohne weitere Zuzahlungen alle entstehenden Ansprüche abdecken kann.

Anders als bei Finanzderivaten mit regelmäßigen Auszahlungen wird die amerikanische Option einmalig innerhalb eines Zeitraumes ausgeübt; der Stillhalter kann daher im Ausübungszeitpunkt sein aktuelles Portfolio auflösen und sollte aus dem Erlös den Claim erfüllen können. Da er die Ausübungsstrategie τ des Optionshalters nicht kennt, muß sein oberer Hedge die Bedingung $H_\tau^t S_\tau \geq C_\tau$ P_w-f.s. für *alle* $\tau \in \mathcal{T}$ erfüllen, was offensichtlich äquivalent ist zu $H_k^t S_k \geq C_k$ P_w-f.s. für alle $k \in \{0, ..., n\}$. Da weiterhin keine Zuzahlungen seitens des Stillhalters erfolgen sollen, muß für den Auszahlungsprozeß des oberen Hedges darüberhinaus $\delta_i(\underset{\sim}{H}) \geq 0$ P_w-f.s. für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gelten.

Der allgemein gehaltene Definitionsansatz

$$a^\star(\underset{\sim}{C}) := \inf \left\{ x \geq 0 : \begin{array}{l} \text{es existiert eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \text{ mit } H_0^t S_0 = x \\ \text{und } H_\tau^t S_\tau \geq C_\tau \ P_w\text{-f.s. für alle } \tau \in \mathcal{T} \end{array} \right\}$$

aus Abschnitt 5a in Kapitel VI von [63] erweist sich aus denselben Gründen wie die allgemein gehaltende Definition des oberen Preises eines Finanzderivates mit terminaler Auszahlung als ungeeignet für das Aktie/Bond Modell; als sinnvolle Zusatzforderung bietet sich wieder die Selbstfinanzierung an:

Definition 4.16 (vgl. [25], Definition 7.7)
Das zugrundeliegende Aktie/Bond Modell sei arbitragefrei. Der obere Preis einer amerikanischen Option mit Auszahlungsprozeß $\underset{\sim}{C}$ wird dann festgelegt durch

$$a^\star(\underset{\sim}{C}) := \inf \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} \textit{es existiert eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \textit{ mit } H_0^t S_0 = x, \\ \delta_k(\underset{\sim}{H}) = 0 \ P_w\textit{-f.s. für } 1 \leq k \leq n \textit{ und } H_\tau^t S_\tau \geq C_\tau \\ P_w\textit{-f.s. für alle } \tau \in \mathcal{T} \end{array} \right\},$$

wobei $\inf \emptyset := \infty$ *sei.*

Bemerkung 4.17
In der Situation von Definition 4.16 seien die Mengen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_3$ von Handelsstrategien festgelegt durch

$$\mathfrak{B}_1 \ := \ \left\{ \underset{\sim}{H} : \begin{array}{l} \underset{\sim}{H} \textit{ ist eine Handelsstrategie mit } H_0^t S_0 = x, \\ \delta_k(\underset{\sim}{H}) = 0 \ P_w\textit{-f.s. für } 1 \leq k \leq n \textit{ und} \\ H_\tau^t S_\tau \geq C_\tau \ P_w\textit{-f.s. für alle } \tau \in \mathcal{T} \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{B}_2 \;:=\; \left\{ \underset{\sim}{H}: \begin{array}{l} \underset{\sim}{H} \textit{ ist eine Handelsstrategie mit } H_0^t S_0 = x, \\ \delta_k(\underset{\sim}{H}) \geq 0 \;\; P_w\textit{-f.s. für } 1 \leq k \leq n \textit{ und} \\ H_\tau^t S_\tau \geq C_\tau \;\; P_w\textit{-f.s. für alle } \tau \in \mathcal{T} \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{B}_3 \;:=\; \left\{ \underset{\sim}{H}: \begin{array}{l} \underset{\sim}{H} \textit{ ist eine Handelsstrategie mit } H_0^t S_0 = x, \\ \delta_k(\underset{\sim}{H}) \geq 0 \;\; P_w\textit{-f.s. für } 1 \leq k \leq n \textit{ und} \\ H_k^t S_k \geq C_k \;\; P_w\textit{-f.s. für alle } 0 \leq k \leq n \end{array} \right\}.$$

Dann gilt $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_3$ *und*

$$\inf\{H_0^t S_0 : \underset{\sim}{H} \in \mathfrak{B}_1\} = \inf\{H_0^t S_0 : \underset{\sim}{H} \in \mathfrak{B}_2\}.$$

Jede Handelsstrategie $\underset{\sim}{H} \in \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ *wird als oberer Hedge der betrachteten amerikanischen Option bezeichnet.*

Die Existenz eines oberen Hedges, dessen Anfangspreis dem Supremum aller arbitragefreien Preise entspricht, wird bei amerikanischen Optionen mit denselben Methoden wie bei Finanzderivaten mit terminaler Auszahlung bewiesen:

Satz 4.18 ([25], Korollar 7.9)
In einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell sei $\underset{\sim}{C}$ *der Auszahlungsprozeß einer amerikanischen Option. Sind* $C_0, ..., C_n$ P_w*-f.s. nach unten beschränkt, und gilt*

$$\overline{a}(\underset{\sim}{C}) := \sup_{Q \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau) < \infty,$$

so existiert ein oberer Hedge für $\underset{\sim}{C}$ *mit Anfangspreis* $\overline{a}(\underset{\sim}{C})$*.*

Beweis: ([25], Seite 284 ff.) Sei $\underset{\sim}{U} = (U_k)_{k \in \{0,...,n\}}$ definiert als *Snell's upper envelope* von $(\alpha_k C_k)_{k \in \{0,...,n\}}$, d.h. mit $\mathcal{T}_k := \{\tau \in \mathcal{T} : \tau \geq k\}$, $1 \leq k \leq n-1$, gelte

i) $U_n := \alpha_n C_n$,

ii) $U_k := \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{P}} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_k} E_Q(\alpha_\tau C_\tau | \mathcal{F}_k)$,
$k = n-1, ..., 1$,

iii) $U_0 := \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{P}} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau | \mathcal{F}_0) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau)$.

Gemäß Theorem 7.3 in [25] bildet $\underset{\sim}{U}$ dann ein $\mathcal{P}$-Supermartingal, so daß aus Satz 4.12 analog zum Beweis von Satz 4.13 die Existenz einer selbstfinanzierenden

Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ folgt mit $H_0^t S_0 = U_0$ und $\alpha_k H_k^t S_k = U_k + I_k \geq U_k$ P_w-f.s., $0 \leq k \leq n-1$.
Da $\underset{\sim}{U}$ gemäß Theorem 7.2 in [25] dem Rekursionsschema

1) $U_n = \alpha_n C_n$,

2) $U_k = \alpha_k C_k \vee \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{P}} E(U_{k+1}|\mathcal{F}_k)$ P_w-f.s., $\quad k = n-1, ..., 0$,

genügt, ergibt sich schließlich $\alpha_k H_k^t S_k \geq U_k \geq \alpha_k C_k$ P_w-f.s., $0 \leq k \leq n$.

□

Für eine amerikanische Option mit P_w-f.s. nach unten beschränktem Auszahlungsprozeß $\underset{\sim}{C}$ ergibt sich demnach im Fall

$$\overline{a}(\underset{\sim}{C}) := \sup_{Q \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau) < \infty$$

die Ungleichung

$$a^\star(\underset{\sim}{C}) \leq \overline{a}(\underset{\sim}{C}) < \infty.$$

Im Fall $a^\star(\underset{\sim}{C}) < \infty$ ist die Menge der oberen Hedges für $\underset{\sim}{C}$ nicht-leer. Sei also $\underset{\sim}{H}$ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit $H_k^t S_k \geq C_k$ P_w-f.s. für alle $k \in \{0, ..., n\}$ und $H_0^t S_0 \geq a^\star(\underset{\sim}{C})$.

Da jedes C_k P_w-f.s. nach unten beschränkt ist, existieren die bedingten Erwartungswerte $E_Q(\alpha_k H_k^t S_k|\mathcal{F}_{k-1})$ für alle $k \in \{1, ..., n\}$ und alle $Q \in \mathcal{P}$. Der abdiskontierte Werteprozeß $(\alpha_k H_k^t S_k)_{k \in \{0,...,n\}}$ besitzt (außerhalb einer P_w-Nullmenge) die Darstellung

$$\alpha_k H_k^t S_k = H_0^t S_0 + \sum_{i=1}^{k} H_{i-1}^t(\alpha_i S_i - \alpha_{i-1} S_{i-1})$$

und bildet damit für jedes $Q \in \mathcal{P}$ als Martingaltransformation ein lokales Martingal. Wegen $\alpha_n H_n^t S_n \geq C_n$ Q-f.s. ist $(\alpha_k H_k^t S_k, \mathcal{F}_k)_{k \in \{0,...,n\}}$ laut Satz 4.5 schließlich ein Martingal bezüglich Q. Für jede Stoppregel $\tau \in \mathcal{T}$ und alle $Q \in \mathcal{P}$ liefert das Optional Sampling Theorem daher

$$H_0^t S_0 = E_Q(\alpha_\tau H_\tau^t S_\tau) \geq E_Q(\alpha_\tau C_\tau),$$

woraus sich schließlich

$$\overline{a}(\underset{\sim}{C}) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau) \leq a^\star(\underset{\sim}{C}) < \infty$$

ergibt.

Als Analogon zu Satz 4.14 erhält man nun:

Satz 4.19
Sei $\underset{\sim}{C} = (C_0, ..., C_n)$ *der Auszahlungsprozeß einer amerikanischen Option in einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell. Weiter sei jedes* C_k P_w*-f.s. nach unten beschränkt. Dann gilt:*

a) $a^\star(\underset{\sim}{C})$ *ist genau dann endlich, wenn* $\sup_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau)$ *endlich ist.*

b) **Upper Hedging Duality** *(vgl. [63], Theorem 1 auf Seite 539):*
Ist eine der beiden äquivalenten Bedingungen aus a) erfüllt, so folgt

$$a^\star(\underset{\sim}{C}) = \sup_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau).$$

Korollar 4.20
Sei $\underset{\sim}{C} = (C_0, ..., C_n)$ *der Auszahlungsprozeß einer amerikanischen Option in einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell. Weiter sei jedes* C_k P_w*-f.s. nach unten beschränkt. Ist dann der obere Preis der Option endlich, so existiert ein oberer Hedge mit Anfangspreis* $a^\star(\underset{\sim}{C})$.

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.14 bzw. 4.19 erhält man, daß die oberen Preise sowohl von Finanzderivaten mit regelmäßigen Auszahlungen als auch von amerikanischen Optionen die minimalen Anfangskosten von oberen Hedges angeben, d.h. von Handelsstrategien, mit deren Hilfe alle entstehenden Ansprüche ohne weitere Zuzahlungen erfüllt werden können.

Aus der *upper hedging duality* ergibt sich weiterhin, daß zum einen die oberen Preise die obere Grenze zwischen arbitragefreien und arbitragebehafteten Preisen darstellen, und daß zum anderen bei der Berechnung des oberen Preises (zumindest theoretisch) nicht die explizite Kenntnis *aller* oberen Hedges notwendig ist.

Unter diesen Gesichtspunkten erweisen sich folglich die Definitionen 4.6 und 4.16 als „sinnvoll“.

Die Existenzbeweise von oberen Hedges zum oberen Preis sowohl bei Finanzderivaten mit regelmäßigen Auszahlungen als auch bei amerikanischen Optionen weisen jedoch einen erheblichen Nachteil auf: Es gehen sowohl bedingte Erwartungswerte als auch essentielle Suprema und gleichmäßige Doob-Zerlegungen von $\mathcal{P}$-Supermartingalen ein. Deren Existenzbeweise wiederum sind allesamt *nicht-konstruktiv*, so daß sich selbst bei genauer Kenntnis von $\mathcal{P}$ die konkrete Gestalt des Hedges i.a. nicht direkt bestimmen läßt.

Darüberhinaus ist das Maß P_w in *realen* Finanzmarktsituationen i.a. nicht vollständig bekannt, so daß sich die Klasse $\mathcal{P}$ nicht bestimmen läßt. Die Berechnung des oberen Preises mit Hilfe der *upper hedging duality* erweist sich dann ebenfalls als problematisch.

Im nächsten Abschnitt soll daher zum einen untersucht werden, unter welchen Bedingungen sich die oberen Hedges und oberen Preise explizit berechnen lassen, und zum anderen, ob für die oberen Preise (insbesondere bei unvollständiger Kenntnis von P_w) zumindest *obere Schranken* existieren, zu denen obere Hedges konstruiert werden können.

4.2 Schranken für die oberen Preise von Finanzderivaten mit komponentenweise konvexen Auszahlungsfunktionen

Betrachtet werde ein arbitragefreies Aktie/Bond Modell, in dem die einzig verfügbaren Informationen der Anfangsaktienpreis A_0, die Verzinsungen $r_1, ..., r_n > 0$ sowie untere Schranken $d_1, ..., d_n \geq 0$ und obere Schranken $u_1, ..., u_n$ für die Faktoren $Y_1, ..., Y_n$ des Aktienpreisprozesses seien. Für Finanzderivate, deren Auszahlungen über komponentenweise konvexe Funktionen von $Y_1, ..., Y_n$ abhängen, lassen sich allein aufgrund dieser minimalen Aussagen über P_w Abschätzungen für die oberen Preise angeben.

4.2.1 Universelle obere Arbitragegrenzen

Im Fall $n=1$ gebe es $0 \leq d < 1+r =: \rho < u$ mit $supp(P_w^{Y_1}) \subset [d, u]$. Dann lassen sich für Finanzderivate mit konvexen terminalen Auszahlungsfunktionen sowohl obere Schranken für ihre oberen Preise als auch eine hinreichende Bedingung angeben, unter der die Schranken angenommen werden:

Satz 4.21
In einem arbitragefreien Ein-Perioden Aktie/Bond Modell seien $0 \leq d < 1+r =: \rho < u$ *gegeben mit* $supp(P_w^{Y_1}) \subset [d, u]$*. Weiter sei* C_1 *ein Finanzderivat mit konvexer terminaler Auszahlungsfunktion* $f(Y_1)$*. Dann gilt:*

a) Im Fall $u < \infty$ erfüllt der obere Preis des Finanzderivates die Ungleichung

$$a^\star(C_1) \leq \frac{1}{\rho}\Big(f(u)\frac{\rho - d}{u-d} + f(d)\frac{u-\rho}{u-d}\Big),$$

d.h. $a^\star(C_1)$ ist nicht größer als der faire Preis von C_1 in einem Ein-Perioden Binomialmodell mit Parametern d, u und r. Speziell für $d = 0$ ergibt sich

$$a^\star(C_1) \leq \frac{1}{\rho}\Big(f(u)\frac{\rho}{u} + f(0)(1 - \frac{\rho}{u})\Big).$$

b) Im Fall $u = \infty$ erfüllt der obere Preis des Finanzderivates die Ungleichung

$$a^\star(C_1) \leq c \cdot (1 - \frac{d}{\rho}) + \frac{f(d)}{\rho}$$

mit

$$c := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Speziell für $d = 0$ ergibt sich

$$a^\star(C_1) \leq c + \frac{f(0)}{\rho}.$$

c) Im Fall $d = \min supp(P_w^{Y_1})$ und $u = \sup supp(P_w^{Y_1})$ werden die Schranken aus a) und b) angenommen.

Zum Beweis von 4.21 werden zunächst zwei Hilfsaussagen benötigt, wobei der Beweis von Lemma 4.22 der Vollständigkeit halber geliefert wird:

Lemma 4.22
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Dann existieren sowohl $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ als auch $\lim_{x\to\infty} D^+f(x)$ (wobei D^+f die rechtsseitige Ableitung von f bezeichne), und es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} D^+f(x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Beweis: Wegen der Konvexität von f ist $D^+f(x)$ isoton; folglich gilt entweder $\lim_{x\to\infty} D^+f(x) = \infty$, oder es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to\infty} D^+f(x) = c$. Weiterhin gilt für alle $x_0, x \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \leq x$

$$D^+f(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq D^+f(x) \qquad (+)$$

(vgl. z.B. [22], Kapitel VI).

Gelte nun $\lim_{x\to\infty} D^+f(x) = \infty$. Dann existiert für alle $K > 0$ ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $D^+f(x) \geq 2K$ für alle $x \geq x_0$. Aus (+) folgt dann für alle $x \geq x_0$

$$g(x) := 2K \cdot \frac{x - x_0}{x} + \frac{f(x_0)}{x} \leq \frac{f(x)}{x}.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} g(x) = 2K$ existiert ein $x_1 \geq x_0$ mit $g(x) \geq K$ für alle $x \geq x_1$, und es ergibt sich

$$\forall\, K \in \mathbb{R}\ \exists\, x_1 \in \mathbb{R}\ \forall\, x \geq x_1 :\ \frac{f(x)}{x} \geq K,$$

d.h. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$.

Im Fall $c := \lim_{x\to\infty} D^+f(x) \in \mathbb{R}$ existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein x_0 mit $c - \frac{\varepsilon}{2} < D^+f(x)$ für alle $x \geq x_0$. Für $x \geq x_0$ ergibt sich aus den Ungleichungen

$$c - \frac{\varepsilon}{2} \leq D^+f(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq D^+f(x) \leq c$$

weiterhin

$$l(x) := \frac{(c - \frac{\varepsilon}{2})(x - x_0) + f(x_0)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{c(x - x_0) + f(x_0)}{x} =: r(x),$$

und mit $\lim_{x\to\infty} l(x) = (c - \frac{\varepsilon}{2})$ und $\lim_{x\to\infty} r(x) = c$ folgt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_1 \in \mathbb{R}\ \forall\, x \geq x_1 :\ \ c - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{x} \leq c + \varepsilon,$$

d.h. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = c$.

$\square$

Lemma 4.23
In der Situation von Satz 4.21 b) gelte $d = \min supp(P_w^{Y_1})$ *und* $u = \sup supp(P_w^{Y_1})$. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) Es existiert ein oberer Hedge für das Finanzderivat.

ii) Es gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$.

Beweis: ii) $\Rightarrow$ *i)* : Es existiere ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = c$. Dann gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\frac{f(x)}{x} \leq 2|c|$ für $x \geq x_0$ sowie (aufgrund der Stetigkeit von f) ein $K > 0$ mit $f(x) \leq K$ für alle $x \in [0, x_0]$.

Das Portfolio

$$H_0 = \Big(\frac{|2c|}{A_0}, \frac{K}{\rho}\Big)^t$$

erfüllt nun für alle $y_1 \geq 0$

$$H_0^t \cdot (A_0 y_1, \rho)^t = 2|c|y_1 + K \geq f(y_1),$$

d.h. es bildet einen oberen Hedge für das Finanzderivat.

$i) \Rightarrow ii)$ Es existiere ein Portfolio H_0 mit

$$H_0^t S_1 = H_{0,1} A_0 Y_1 + H_{0,2}\, \rho \geq f(Y_1) \quad P_w\text{-f.s..} \tag{$\star$}$$

Für die Funktion $g(x) = H_{0,1} A_0 x + H_{0,2}\, \rho$ folgt hieraus wegen $g \geq f$ P_w-f.s.

1) Es existiert ein $e \in supp(P_w^{Y_1})$ mit $g(e) \geq f(e)$.

2) Es existiert eine antitone Folge $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $supp(P_w^{Y_1})$ mit $d_1 = e$ und $d_k \downarrow d$ d.d. $g(d_k) \geq f(d_k)$ für alle k gilt.

3) Es existiert eine isotone Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $supp(P_w^{Y_1})$ mit $u_1 = e$ und $u_k \uparrow \infty$ d.d. $g(u_k) \geq f(u_k)$ für alle k gilt.

Aufgrund der Konvexität von f und der Linearität von g ergibt sich aus 1)-3)

$$g(x) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (d_{k+1}, d_k) \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (u_k, u_{k+1}) = (d, \infty). \tag{$\star\star$}$$

Nun wird gezeigt, daß $D^+f(x) \leq H_{0,1}A_0$ für alle x gilt.
Angenommen, es existiert ein x_0 mit $D^+f(x_0) > H_{0,1}A_0$. Aus der Konvexität von f ergibt sich dann für $x > x_0$ wegen $D^+f(x_0) \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (und somit $-f(x) \leq -D^+f(x_0)(x-x_0) - f(x_0)$)

$$g(x) - f(x) \leq (H_{0,1}A_0 - D^+f(x_0))x + H_{0,2}\,\rho + D^+f(x_0)x_0 - f(x_0).$$

Für $x > \frac{f(x_0) - D^+f(x_0)x_0 - H_{0,2}\,\rho}{H_{0,1}A_0 - D^+f(x_0)}$ folgt nun $g(x) - f(x) < 0$, also ein Widerspruch zu ($\star\star$). Da D^+f folglich nach oben beschränkt und isoton ist, existiert schließlich ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to\infty} D^+f(x) = c$, woraus sich mit Lemma 4.22 $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$ ergibt.

□

Beweis von Satz 4.21: Der Beweis von a) wird für $0 \leq d < u < \infty$ z.B. in §1c des Kapitels V in [63] wie folgt geführt:

Das Portfolio

$$H_0 = \Big(\frac{f(u) - f(d)}{A_0(u-d)}, \frac{f(d)u - f(u)d}{\rho(u-d)}\Big)^t$$

erfüllt $H_0^t \cdot (A_0 y, \rho)^t = f(y)$ für alle $y \in \{d, u\}$, und aus der Konvexität von f ergibt sich für alle $y \in (d, u)$

$$\begin{aligned} H_0^t \cdot (A_0 y, \rho)^t &= H_0^t \cdot (A_0 \frac{y-d}{u-d} u, \rho)^t + H_0^t \cdot (A_0 \frac{u-y}{u-d} d, \rho)^t \\ &= \frac{y-d}{u-d} f(u) + \frac{u-y}{u-d} f(d) \\ &\geq f\big(\frac{y-d}{u-d} u + \frac{u-y}{u-d} d\big) \\ &= f(y), \end{aligned}$$

d.h. $H_0^t \cdot (A_0 Y_1, \rho)^t \geq f(Y_1)$ P_w-f.s.. Gemäß Definition gilt also

$$a^\star(f) \leq H_0^t S_0 = \frac{1}{\rho}\Big(f(u)\frac{\rho - d}{u-d} + f(d)\frac{u-\rho}{u-d}\Big).$$

b): Die Existenz von $c := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ wurde in Lemma 4.22 bewiesen. Im Fall $c = \infty$ ist offensichtlich nichts zu zeigen, daher gelte $c \in \mathbb{R}$. Der Wert des Portfolios

$$H_0 = \Big(\frac{c}{A_0}, \frac{f(d) - cd}{\rho}\Big)^t$$

im Zeitpunkt 1 ist gegeben durch $h(x) = H_0^t \cdot (A_0 x, \rho)^t = cx + f(d) - cd$; die Funktion h erfüllt dabei

i) $h(d) = f(d)$ und

ii) $h'(x) = c \geq D^+ f(x)$ für alle $x \geq d$,

folglich also $h(x) \geq f(x)$ für alle $x \geq d$. H_0 bildet demnach einen oberen Hedge für das Finanzderivat mit Anfangspreis $H_0^t S_0 = H_0^t \cdot (A_0, 1)^t = c \cdot (1 - \frac{d}{\rho}) + \frac{f(d)}{\rho}$.

c) Es gelte $d = \min supp(P_w^{Y_1})$ und $u = \sup supp(P_w^{Y_1})$. Dann existiert eine Folge $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $d_k \in supp(P_w^{Y_1}) \cap (0, 1+r)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $d_k \downarrow d$.

Im Fall $u < \infty$ existiert gemäß Lemma 2.6 für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $(Q_{k,m})_{m\in\mathbb{N}}$ äquivalenter Martingalmaße mit

$$Q_{k,m} \xrightarrow{w} q_{u,k}\delta_u + q_{d_k}\delta_{d_k},$$

wobei $q_{u,k} = \frac{1+r-d_k}{u-d_k} = 1 - q_{d_k}$ gilt. Aus der Stetigkeit von f folgt zusammen mit der upper hedging duality

$$a^\star(f) \geq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\rho} E_{Q_{k,m}}(f) = \frac{1}{\rho}(f(u)q_{u,k} + f(d_k)q_{d_k})$$

für alle $k \geq m$, schließlich also

$$a^\star(f) \geq \lim_{k\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\rho} E_{Q_{k,m}}(f) = \frac{1}{\rho}\Big(f(u)\frac{\rho-d}{u-d} + f(d)\frac{u-\rho}{u-d}\Big).$$

Im Fall $u = \infty$ ist der obere Preis des Finanzderivates genau dann endlich, wenn ein oberer Hedge für f existiert, was gemäß Lemma 4.23 äquivalent zu $c := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$ ist. In Satz 4.21 b) gilt im Fall $c = \infty$ folglich

$$a^\star(C_1) = \infty = c \cdot \big(1 - \frac{d}{\rho}\big) + \frac{f(d)}{\rho},$$

d.h. die obere „Schranke“ wird angenommen.

Sei im folgenden also $u = \infty$ und $c \in \mathbb{R}$ angenommen. Zusätzlich zur Folge $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existiert dann eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $supp(P_w^{Y_1}) \cap (1+r, \infty)$ mit $u_k \uparrow \infty$. Für festes $k \in \mathbb{N}$ liefert Lemma 2.6 die Existenz einer Folge $(Q_{k,m})_{m\in\mathbb{N}}$ äquivalenter Martingalmaße mit

$$Q_{k,m} \xrightarrow{w} Q_{k,0} = q_{u_k}\delta_{u_k} + q_{d_k}\delta_{d_k},$$

wobei $q_{u_k} = \frac{1+r-d_k}{u_k-d_k} = 1 - q_{d_k}$ ist. Nun wird gezeigt, daß wieder

$$\lim_{m\to\infty} E_{Q_{k,m}}(f) = E_{Q_{k,0}}(f)$$

gilt. Dafür wird $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$, $Q_k = \bigotimes_{m\in\mathbb{N}_0} Q_{k,m}$ sowie π_m als m-te Koordinatenprojektion gewählt, $m \in \mathbb{N}_0$ (d.h. $\pi_m((x_i)_{i\in\mathbb{N}_0}) = x_m \ \forall\, m \in \mathbb{N}_0$), und die gleichgradige Integrierbarkeit von $(f \circ \pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ bezüglich Q_k gezeigt.

Wegen $c = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$ existiert ein x_0 mit $f(x) \leq 2|c|x$ für alle $x \geq x_0$, und es folgt

$$f^+(x) \leq 2|c|x + \sup_{x\in[0,x_0]} |f(x)|.$$

Für beliebiges $x_1 > d$ gilt ferner aufgrund der Konvexität von f für alle $x \geq 0$

$$f(x) \geq D^+f(x_1)x + f(x_1) - D^+f(x_1)x_1,$$

und somit

$$f^-(x) \leq |D^+f(x_1)|x + |f(x_1) - D^+f(x_1)x_1|.$$

Mit $a := \max\{2|c|, |D^+f(x_1)|\} \in (0,\infty)$ und $b := \max\{\sup_{x\in[0,x_0]} |f(x)|, |f(x_1) - D^+f(x_1)x_1|\} \in (0,\infty)$ gelangt man zu

$$|f(x)| \leq g(x) := ax + b \tag{+}$$

für alle $x \geq 0$. Wegen

i) $E_Q|g \circ \pi_m| = \int (ax+b)\, dQ_{k,m} = a\rho + b < \infty$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$,

ii) $\lim_{m\to\infty} E_Q|g \circ \pi_m| = E_Q|g \circ \pi_0|$

ist die Folge $(g\circ\pi_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ gemäß Korollar 50.6 in [1] gleichgradig integrierbar. Mit Korollar 50.3 in [1] und (+) folgt schließlich die gleichgradige Integrierbarkeit von $(f \circ \pi_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$, und damit

$$\lim_{m\to\infty} E_{Q_{k,m}}(f) = \lim_{m\to\infty} \int f \circ \pi_m \, dQ_k = \int f \circ \pi_0 \, dQ_k = E_{Q_{k,0}}(f).$$

Aus der Definition des oberen Preises ergibt sich

$$a^\star(f) \geq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\rho} E_{Q_{k,m}}(f) = \frac{1}{\rho} E_{Q_{k,0}}(f) = \frac{1}{\rho}\big(f(u_k)q_{u_k} + f(d_k)q_{d_k}\big)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, folglich

$$a^\star(f) \geq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\rho}\Big(\frac{f(u_k)}{u_k} \cdot \frac{u_k}{u_k - d_k} \cdot (\rho - d_k) + f(d_k) \cdot \frac{u_k - \rho}{u_k - d_k}\Big) = c \cdot \big(1 - \frac{d}{\rho}\big) + \frac{f(d)}{\rho}.$$

$\square$

Aus dem Beweis von Lemma 4.23 erhält man zusätzliche Informationen über alle oberen Hedges der Option:

Bemerkung 4.24
In der Situation von Satz 4.21 b) gelte $c = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$, $d = \min supp(P_w^{Y_1})$ und $u = \sup supp(P_w^{Y_1})$. Dann gilt für jeden oberen Hedge H_0 und alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $H_{0,1} \geq \frac{D^+ f(x)}{A_0}$. Insbesondere gilt daher $H_{0,1} \geq \frac{c}{A_0}$, d.h. es müssen mindestens $\frac{c}{A_0}$ Aktien erworben werden.

Die Auszahlungsfunktionen $f_C(x) = (A_0 x - K)^+$ und $f_P(x) = (K - A_0 x)^+$ einer europäischen Call- bzw. Put-Option mit Ausübungspreis K erfüllen die Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{f_C(x)}{x} &= \big(A_0 - \frac{K}{x}\big)^+ \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} A_0, \\ \frac{f_P(x)}{x} &= \big(\frac{K}{x} - A_0\big)^+ \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

so daß für ihre oberen Preise in einem Ein-Perioden Aktie/Bond Modell gilt:

Korollar 4.25

In der Situation von Satz 4.21 sei f_C die Auszahlungsfunktion einer europäischen Call- und f_P diejenige einer europäischen Put-Option mit Ausübungspreis K.

a) Im Fall $u < \infty$ erfüllen die oberen Preise dieser Optionen die Ungleichungen

$$\begin{aligned} a^\star(f_C) &\leq \frac{1}{\rho}\Big((A_0u-K)^+\frac{\rho-d}{u-d}+(A_0d-K)^+\frac{u-\rho}{u-d}\Big),\\ a^\star(f_P) &\leq \frac{1}{\rho}\Big((K-A_0u)^+\frac{\rho-d}{u-d}+(K-A_0d)^+\frac{u-\rho}{u-d}\Big),\end{aligned}$$

d.h. sie sind nicht größer als die jeweiligen fairen Preise der Optionen in einem Ein-Perioden Binomialmodell mit Parametern d, u und r.
Speziell für $d = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} a^\star(f_C) &\leq \frac{1}{u}\,(A_0u-K)^+,\\ a^\star(f_P) &\leq \frac{1}{\rho}\Big((K-A_0u)^+\cdot\frac{\rho}{u}+K(1-\frac{\rho}{u})\Big).\end{aligned}$$

b) Im Fall $u = \infty$ gilt für die oberen Preise dieser Finanzderivate

$$\begin{aligned} a^\star(f_C) &\leq A_0\cdot(1-\frac{d}{\rho})+(A_0d-K)^+\cdot\frac{1}{\rho},\\ a^\star(f_P) &\leq (K-A_0d)^+\cdot\frac{1}{\rho}.\end{aligned}$$

Speziell im Fall $d = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} a^\star(f_C) &\leq A_0,\\ a^\star(f_P) &\leq \frac{K}{\rho}.\end{aligned}$$

c) Im Fall $d = \min supp(P_w^{Y_1})$ und $u = \sup supp(P_w^{Y_1})$ werden die Schranken in a) und b) angenommen. Insbesondere ist im Fall $\min supp(P_w^{Y_1}) = 0$ und $\sup supp(P_w^{Y_1}) = \infty$ der obere Preis der europäischen Call-Option gleich dem Anfangsaktienkurs A_0 und unabhängig vom Ausübungspreis K, und der obere Preis der europäischen Put-Option ist gegeben durch den abdiskontierten Ausübungspreis $\frac{K}{\rho}$ und unabhängig vom Anfangsaktienkurs A_0.

Ein direkter Beweis für $a^\star(f_C) \leq \frac{1}{\rho}\Big((A_0u-K)^+\frac{\rho-d}{u-d}+(A_0d-K)^+\frac{u-\rho}{u-d}\Big)$ im Fall $0 < d < u < \infty$ befindet sich z.B. in [41].

Die Grenzen A_0 und $\frac{K}{\rho}$ aus Korollar 4.25 *b*) werden als „upper universal arbitrage bounds for the European call and put option“ bezeichnet (vgl. [25], Seite 18), die obere Grenze für alle arbitragefreien Preise der europäischen Call-Option ferner als "Merton's upper bound“ (vgl. [43]). In Beispiel 1.16 und Bemerkung 5.58 aus [25] wird (separat) gezeigt, daß diese oberen Grenzen angenommen werden, falls $P_w^{Y_1}$ äquivalent zum Zählmaß auf $\mathbb{N}_0$ bzw. zum Lebesguemaß auf $[0, \infty)$ ist. Mit Hilfe von Satz 4.21 konnten diese Beweise nicht nur zusammengefaßt werden; vielmehr wurde gezeigt, daß für die Annahme dieser oberen Grenzen bereits $\min supp(P_w^{Y_1}) = 0$ und $\sup supp(P_w^{Y_1}) = \infty$ hinreichend ist.

Aus Bemerkung 4.24 ergibt sich ferner eine Aussage über die oberen Hedges von europäischen Call- und Put-Optionen:

Bemerkung 4.26
In der Situation von Satz 4.21 sei $\min supp(P_w^{Y_1}) = 0$ *und* $\sup supp(P_w^{Y_1}) = \infty$. *Dann gilt:*

a) Jeder obere Hedge H_0 einer europäischen Call-Option erfüllt die Ungleichung $H_{0,1} \geq 1$, d.h. es muß mindestens eine Aktie erworben werden. Insbesondere ist der obere Hedge zum oberen Preis eindeutig bestimmt durch $\widehat{H}_0 = (1, 0)^t$.

b) Jeder obere Hedge H_0 einer europäischen Put-Option erfüllt die Ungleichung $H_{0,1} \geq 0$, d.h. es darf kein short-selling in der Aktie stattfinden. Insbesondere ist der obere Hedge zum oberen Preis eindeutig bestimmt durch $H_0 = (0, \frac{K}{\rho})^t$, wobei K den Ausübungspreis der Option bezeichne.

Im n-Perioden Aktie/Bond Modell ergeben sich für europäische Call- und Put-Optionen dieselben oberen universellen Arbitragegrenzen wie im Ein-Perioden Aktie/Bond Modell; für europäische und amerikanische Call-Optionen stimmt die universelle Arbitragegrenze darüberhinaus überein:

Satz 4.27
In einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell sei $C_n^C = (A_0 \prod_{i=1}^n Y_i - K)^+$ *die Auszahlungsfunktion einer europäischen Call-Option,* $C_n^P = (K - A_0 \prod_{i=1}^n Y_i)^+$ *diejenige einer europäischen Put-Option und* $\underset{\sim}{C}^C = ((A_k - K)^+)_{k \in \{0,\dots,n\}}$ *der Auszahlungsprozeß einer amerikanischen Call-Option mit Ausübungspreis* K.
Dann gilt:

a) $a^\star(C_n^C) \le A_0$ *und* $a^\star(\underset{\sim}{C}^C) \le A_0$*, d.h. der obere Preis der Call-Optionen ist nicht größer als der Anfangsaktienkurs.*

b) $a^\star(C_n^P) \le \alpha_n K$*, d.h. der obere Preis der Put-Option ist nicht größer als der abdiskontierte Ausübungspreis.*

Beweis: Obere Hedges für die Call- bzw. Put-Optionen sind z.B. gegeben durch $\underset{\sim}{H}^C = \big((1,0)^t, ..., (1,0)^t, (0,0)^t\big)$ bzw. $\underset{\sim}{H}^P = \big((0,\alpha_n K)^t, ..., (0,\alpha_n K)^t, (0,0)^t\big)$.

$\square$

Existiert zumindest ein Faktor Y_j mit $\min supp(P_w^{Y_j})=0$ und $\sup supp(P_w^{Y_j})=\infty$, so können die oberen Schranken angenommen werden:

Satz 4.28

In einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell gelte $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^n P_w^{Y_i}$*, und es existiere mindestens ein* $j \in \{1,...,n\}$ *mit* $\min supp(P_w^{Y_j}) = 0$ *und* $\sup supp(P_w^{Y_j}) = \infty$*. Dann folgt:*

a) Der obere Preis jeder europäischen Call-Option beträgt $a^\star(C_n^C) = A_0$*.*

b) Der obere Preis einer europäischen Put-Option mit Ausübungspreis K *ist gegeben durch* $a^\star(C_n^P) = \alpha_n K$*.*

c) Der obere Preis jeder amerikanischen Call-Option beträgt $a^\star(\underset{\sim}{C}^C) = A_0$*.*

Beweis: Sei $j\in\{1,...,n\}$ gegeben mit $\min supp(P_w^{Y_j})=0$ und $\sup supp(P_w^{Y_j})=\infty$. Dann existieren Folgen $(d_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $supp(P_w^{Y_j}) \cup (0, 1+r_j)$ sowie $(u_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $supp(P_w^{Y_j}) \cup (1+r_j, \infty)$ mit $d_{j,k} \downarrow 0$ und $u_{j,k} \uparrow \infty$. Für $i \neq j$ folgt aus der Arbitragefreiheit des Modells, daß entweder $P_w(Y_i = 1+r_i) = 1$ oder sowohl $P_w^{Y_i}((1+r_i,\infty)) > 0$ als auch $P_w^{Y_i}((0,1+r_i)) > 0$ gilt.

Sei $I_j := \{i \in \{1,...,n\}\backslash\{j\} : |supp(P_w^{Y_i})| \ge 2\}$. Dann gibt es für jedes $i \in I_j$ sowohl ein $d_i \in (0,1+r_i) \cap supp(P_w^{Y_i})$ als auch ein $u_i \in (1+r_i,\infty) \cap supp(P_w^{Y_i})$. Analog zum Beweis von Theorem 2.2 ergibt sich nun unter Verwendung von Lemma 2.6 und Ausnutzung von $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^n P_w^{Y_i}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Existenz einer Folge von äquivalenten Martingalmaßen $(Q_{k,m})_{m\in\mathbb{N}}$ mit

$$Q_{k,m} \xrightarrow{w} Q_{k,0} := \bigotimes_{i\in I_j} (q_{u_i}\delta_{u_i} + q_{d_i}\delta_{d_i}) \dot{\otimes} (q_{u_{j,k}}\delta_{u_{j,k}} + q_{d_{j,k}}\delta_{d_{j,k}}) \dot{\otimes} \bigotimes_{i\notin I_j\cup\{j\}} \delta_{1+r_i},$$

wobei $q_{u_i} = \frac{1+r_i-d_i}{u_i-d_i} = 1 - q_{d_i}$, $i \in I_j$, und $q_{u_{j,k}} = \frac{1+r_j-d_{j,k}}{u_{j,k}-d_{j,k}} = 1 - q_{d_{j,k}}$ gilt (mit $\dot{\otimes}$ ist dabei die „richtige“ Reihenfolge bei der Produktmaßbildung gemeint).

Der obere Preis einer europäischen Call-Option mit terminaler Auszahlung $C_n^C = (A_n - K)^+$ erfüllt gemäß Satz 4.27 die Ungleichung $a^\star(C_n^C) \leq A_0 < \infty$. Ferner ist die Auszahlung C_n^C nach unten durch Null beschränkt, so daß aufgrund der upper hedging duality

$$a^\star(C_n^C) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\alpha_n C_n^C)$$

gilt. Aus der schwachen Konvergenz von $(Q_{k,m})_{m\in\mathbb{N}}$ gegen $Q_{k,0}$ folgt wegen der Beschränktheit und Stetigkeit von $g(x) = (K-x)^+$ auf $[0,\infty)$ nun

$$\begin{aligned}
E_{Q_{k,m}}(A_n - K)^+ &= E_{Q_{k,m}}(A_n - K) + E_{Q_{k,m}}(K - A_n)^+ \\
&= A_0 B_n - K + E_{Q_{k,m}}(K - A_n)^+ \\
&\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} A_0 B_n - K + E_{Q_{k,0}}(K - A_n)^+ \\
&= E_{Q_{k,0}}(A_n - K)^+,
\end{aligned}$$

und es ergibt sich mit $\mathcal{X} := \times_{i\in I_j}\{d_i, u_i\} \dot{\times} \times_{i\notin I_j \cup \{j\}}\{1+r_i\}$ und $\mathcal{X}_k := \mathcal{X} \dot{\times} \{d_{j,k}, u_{j,k}\}$ (wobei mit $\dot{\times}$ wieder die „richtige“ Reihenfolge der Faktorenmenge gemeint ist)

$$\begin{aligned}
\sup_{m\in\mathbb{N}} E_{Q_{k,m}}(\alpha_n(A_n - K)^+) &\geq \lim_{m\to\infty} E_{Q_{k,m}}(\alpha_n(A_n - K)^+) \\
&= \sum_{(y_1,\ldots,y_n)\in\mathcal{X}_k} \alpha_n (A_0 \prod_{i=1}^n y_i - K)^+ \cdot \prod_{i\in I_j} q_{y_i} \cdot q_{y_j}
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Für $(y_1, ..., y_{j-1}, y_{j+1}, ..., y_n) \in \mathcal{X}$ gilt zum einen wegen $\lim_{k\to\infty} d_{j,k} = 0$

$$(A_0 \prod_{i\neq j} y_i \cdot d_{j,k} - K)^+ \cdot \prod_{i\in I_j} q_{y_i} \cdot q_{d_{j,k}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (A_0 \cdot 0 - K)^+ \cdot \prod_{i\in I_j} q_{y_i} \cdot 1 = 0,$$

und zum anderen wegen $\lim_{k\to\infty} u_{j,k}\, q_{u_{j,k}} = 1 + r_j$

$$\begin{aligned}
(A_0 \prod_{i\neq j} y_i \cdot u_{j,k} - K)^+ \cdot \prod_{i\in I_j} q_{y_i} \cdot q_{u_{j,k}} &= (A_0 \prod_{i\neq j} y_i - \frac{K}{u_{j,k}})^+ \cdot u_{j,k} q_{u_{j,k}} \cdot \prod_{i\in I_j} q_{y_i} \\
&\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} A_0 \cdot \prod_{i\neq j} y_i \cdot \prod_{i\in I_j} q_{y_i} \cdot (1 + r_j).
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{(y_1,\ldots,y_n)\in\mathcal{X}_k} (A_0 \prod_{i=1}^n y_i - K)^+ \cdot \prod_{i\in I_j} q_{y_i} \cdot q_{y_j} &\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{(y_1,\ldots,y_{j-1},y_{j+1},\ldots,y_n)\in\mathcal{X}} A_0 \prod_{i\neq j} y_i \cdot \prod_{i\in I_j} q_{y_i} \cdot (1+r_j) \\
&= A_0 B_n,
\end{aligned}$$

und man erhält schließlich zusammen mit Satz 4.27

$$\begin{aligned} A_0 \geq a^\star(C_n^C) &= \sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_n C_n^C) \\ &\geq \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{m\in\mathbb{N}} E_{Q_{k,m}}(\alpha_n C_n^C) \\ &\geq \lim_{k\to\infty} \lim_{m\to\infty} E_{Q_{k,m}}(\alpha_n C_n^C) \\ &= A_0. \end{aligned}$$

Für die europäische Put-Option mit Ausübungspreis K ergibt sich aus der Zerlegung $(K - A_n)^+ = (K - A_n) + (A_n - K)^+$ für jedes $Q \in \mathcal{P}$

$$E_Q(\alpha_n(K - A_n)^+) = \alpha_n K - A_0 + E_Q(\alpha_n(A_n - K)^+),$$

und aus der upper hedging duality erhält man nun

$$a^\star(C_n^P) = \sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_n(K - A_n)^+) = \alpha_n K - A_0 + \sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_n(A_n - K)^+) = \alpha_n K.$$

Mit denselben Methoden wie im Beweis von Theorem 3.12 läßt sich zeigen, daß der abdiskontierte Auszahlungsprozeß

$$(\alpha_k C_k^C)_{k\in\{0,\dots,n\}} = (\alpha_k (A_k - K)^+)_{k\in\{0,\dots,n\}}$$

der amerikanischen Call-Option mit Ausübungspreis K unter jedem äquivalenten Martingalmaß ein Submartingal bezüglich des Informationsverlaufes bildet. Das Optional-Sampling Theorem liefert daher

$$\sup_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau^C) = \sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_n C_n^C) = A_0,$$

so daß aus der upper hedging duality für amerikanische Optionen schließlich $a^\star(\underset{\sim}{C}^C) = A_0$ folgt.

□

4.2.2 Der beschränkte Fall

Für die Schranken $d_1, ..., d_n$ und $u_1, ..., u_n$ mit

$$supp(P_w) \subset \bigtimes_{i=1}^n [d_i, u_i]$$

gelte zusätzlich $0 < d_i < 1 + r_i < u_i < \infty$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$. Dann lassen sich die in Satz 4.27 angegebenen Abschätzungen der oberen Preise von Finanzderivaten mit regelmäßigen Auszahlungen, die über komponentenweise konvexe Funktionen von den Faktoren $Y_1, ..., Y_n$ abhängen, verbessern.

Im dritten Kapitel wurde bereits gezeigt, daß alle arbitragefreien Preise, die unter Verwendung von äquivalenten Martingalmaßen aus der Menge

$$\widehat{\mathcal{P}} := \{Q \in \mathcal{P} : Q^{(Y_1,...,Y_n)} = \bigotimes_{i=1}^{n} Q^{Y_i}\}$$

berechnet werden, nicht größer sind als die fairen Preise dieser Finanzderivate im äußeren Binomialmodell mit Parametern $d_1, ..., d_n$, $u_1, ..., u_n$ und $r_1, ..., r_n$.

Diese berechnen sich unter Verwendung der in Abschnitt 3.25 von [33] angegebenen allgemeinen Bewertungsformeln wie folgt:

Bemerkung 4.29

Sei $\underset{\sim}{C}$ ein Finanzderivat mit regelmäßigen Auszahlungen in einem n-Perioden Binomialmodell mit Parametern $d_1, ..., d_n$, $u_1, ..., u_n$ und $r_1, ..., r_n$, wobei

$$0 < d_i < 1 + r_i < u_i < \infty$$

für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gelte. Weiterhin existiere für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ eine komponentenweise konvexe Funktion $f_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mit $C_k = f_k(Y_1, ..., Y_k)$. Mit $q_{u_i} := \frac{1+r_i-d_i}{u_i-d_i} =: 1 - q_{d_i}$ ist der faire Ausgabepreis des Finanzderivates dann gegeben durch

$$a_0^{BM}(\underset{\sim}{C}) = \sum_{j\in\{1,...,n\}} \sum_{(y_1,...,y_j)\in \times_{i=1}^{j}\{d_i,u_i\}} \alpha_j f_j(y_1, ..., y_j) \cdot \prod_{i=1}^{j} q_{y_i},$$

und für $k \in \{1, ..., n-1\}$ beträgt der faire Handelspreis des Finanzderivates im Zeitpunkt k

$$a_k^{BM}(\underset{\sim}{C}) = \sum_{j\in\{k+1,...,n\}} \sum_{(y_{k+1},...,y_j)\in \times_{i=k+1}^{j}\{d_i,u_i\}} B_k\alpha_j f_j(Y_1, ..., Y_k, y_{k+1}, ..., y_j) \cdot \prod_{i=k+1}^{j} q_{y_i}$$

Mit Hilfe des *convex-ordering* (vgl. Kapitel 3) läßt sich die Ungleichung

$$E_Q(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_k) \leq a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$$

sogar für *alle* $Q \in \mathcal{P}$ beweisen:

Satz 4.30
In einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell gebe es $d_1, ..., d_n$ und $u_1, ..., u_n$ mit $0 < d_i < 1 + r_i < u_i < \infty$ für alle $1 \leq i \leq n$, so daß

$$supp(P_w) \subset \mathop{\times}_{i=1}^{n} [d_i, u_i]$$

gilt. Weiter sei $\underset{\sim}{C} = (C_1, ..., C_n)$ ein Finanzderivat mit regelmäßigen Auszahlungen, wobei C_k für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ über eine komponentenweise konvexe Funktion $f_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ von den Faktoren $Y_1, ..., Y_k$ des Aktienpreisprozesses abhängt. Dann gilt für den oberen Preis von $\underset{\sim}{C}$

$$a^\star(\underset{\sim}{C}) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i) \leq a_0^{BM}(\underset{\sim}{C}),$$

wobei $a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$ den fairen Preis des Finanzderivates in einem Binomialmodell mit dem gleichem Anfangsaktienkurs und Parametern $d_1, ..., d_n$, $u_1, ..., u_n$ und $r_1, ..., r_n$ bezeichne (vgl. Bemerkung 4.29).

Beweis: Die Gleichung $a^\star(\underset{\sim}{C}) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i)$ folgt sofort aus Satz 4.14. Gemäß Satz 4.1 und Bemerkung 4.8 entspricht der obere Preis des Finanzderivates mit Auszahlungen $C_1, ..., C_n$ demjenigen eines Claims mit terminaler Auszahlung $D_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_k B_n$. Dabei gilt $D_n = g_n(Y_1, ..., Y_n)$ mit $g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$g_n(y_1, ..., y_n) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(y_1, ..., y_k) B_n,$$

und die komponentenweise Konvexität von $f_1, ..., f_n$ überträgt sich auf g_n. Es kann daher o.B.d.A. $C_1 = ... = C_{n-1} = 0$ angenommen werden.

Sei nun $Q \in \mathcal{P}$. Für alle $k \in \{1, ..., n\}$ folgt aus $E_Q(\alpha_k A_k | \mathcal{F}_{k-1}) = \alpha_{k-1} A_{k-1}$ Q-f.s.

$$\int\limits_{[d_k, u_k]} id \; dQ^{Y_k | (Y_1, ..., Y_{k-1}) = (y_1, ..., y_{k-1})} = 1 + r_k =: \rho_k \qquad Q^{(Y_1, ..., Y_k)}\text{-f.s..} \qquad (\star)$$

Weiter gilt aufgrund der komponentenweisen Konvexität für alle $i \in \{1, ..., n\}$ und $(y_1, ..., y_n) \in \mathop{\times}_{i=1}^{n} [d_i, u_i]$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} f_n(y_1, ..., y_n) &= f_n(y_1, ..., y_{i-1}, \frac{y_i - d_i}{u_i - d_i} \cdot u_i + \frac{u_i - y_i}{u_i - d_i} \cdot d_i, y_{i+1}, ..., y_n) \\ &\leq \frac{y_i - d_i}{u_i - d_i} \cdot f_n(y_1, ..., y_{i-1}, u_i, y_{i+1}, ..., y_n) \\ &\quad + \frac{u_i - y_i}{u_i - d_i} \cdot f_n(y_1, ..., y_{i-1}, d_i, y_{i+1}, ..., y_n). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Fubini für bedingte Verteilungen (vgl. z.B. [1], Satz 53.8 und Korollar 53.9)

$$\begin{aligned}
E_Q(C_n) &= \int\limits_{[d_1,u_1]} \ldots \int\limits_{[d_n,u_n]} f_n(y_1,\ldots,y_n)\; dQ^{Y_n|(Y_1,\ldots,Y_{n-1})=(y_1,\ldots,y_{n-1})}(y_n)\ldots dQ^{Y_1}(y_1) \\
&\leq \int\limits_{[d_1,u_1]} \ldots \int\limits_{[d_n,u_n]} \Big(\frac{u_n-y_n}{u_n-d_n} f_n(y_1,\ldots,y_{n-1},d_n) + \frac{y_n-d_n}{u_n-d_n} f_n(y_1,\ldots,y_{n-1},u_n)\Big) \\
&\qquad\qquad dQ^{Y_n|(Y_1,\ldots,Y_{n-1})=(y_1,\ldots,y_{n-1})}(y_n)\ldots dQ^{Y_1}(y_1) \\
&\overset{(\star)}{=} \int\limits_{[d_1,u_1]} \ldots \int\limits_{[d_{n-1},u_{n-1}]} \Big(\frac{u_n-\rho_n}{u_n-d_n} f_n(y_1,\ldots,y_{n-1},d_n) + \frac{\rho_n-d_n}{u_n-d_n} f_n(y_1,\ldots,y_{n-1},u_n)\Big) \\
&\qquad\qquad dQ^{Y_{n-1}|(Y_1,\ldots,Y_{n-2})=(y_1,\ldots,y_{n-2})}(y_{n-1})\ldots dQ^{Y_1}(y_1) \\
&= \int\limits_{[d_1,u_1]} \ldots \int\limits_{[d_{n-1},u_{n-1}]} \Big(q_{d_n} f_n(y_1,\ldots,y_{n-1},d_n) + q_{u_n} f_n(y_1,\ldots,y_{n-1},u_n)\Big) \\
&\qquad\qquad dQ^{Y_{n-1}|(Y_1,\ldots,Y_{n-2})=(y_1,\ldots,y_{n-2})}(y_{n-1})\ldots dQ^{Y_1}(y_1)
\end{aligned}$$

mit $q_{u_n} = \frac{1+r_n-d_n}{u_n-d_n} = 1 - q_{d_n}$, und man erhält sukzessive

$$E_Q(C_n) \leq \sum_{(y_1,\ldots,y_n)\in \times_{i=1}^{n}\{d_i,u_i\}} f_n(y_1,\ldots,y_n)\cdot \prod_{i=1}^{n} q_{y_i}$$

mit $q_{u_i} = \frac{1+r_i-d_i}{u_i-d_i} = 1 - q_{d_i}$ für $i \in \{1,\ldots,n\}$.

□

Die ökonomische Folgerung aus Kapitel 3, daß im Fall beschränkter Faktoren der Preis eines Finanzderivates $\underset{\sim}{C}$ mit komponentenweise konvexer Auszahlungsfunktion nicht größer sein sollte als sein eindeutig bestimmter fairer Preis im äußeren Binomialmodell, läßt sich nun mit Hilfe von Satz 4.30 bestätigen bzw. präzisieren. Zum einen sind *alle* arbitragefreien Preise dieses Claims im Aktie/Bond Modell nicht größer als $a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$, zum anderen existiert ein oberer Hedge, dessen Anfangspreis nicht größer als $a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$ ist. Daher sollte der Ausgabepreis von $\underset{\sim}{C}$ im Aktie/Bond Modell nicht größer sein als der faire Preis dieses Claims im äußeren Binomialmodell.

Bemerkung 4.31
Die Aussage von Satz 4.30 gilt insbesondere für

a) *Optionen mit terminaler Auszahlung der Form* $C_n = f(A_0 \prod_{i=1}^n Y_i)$ *mit einer konvexen Abbildung* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, wie zum Beispiel*

   i) *eine europäische Call-Option mit festem Ausübungspreis* ($f(x) = (x - K)^+$ *für ein* $K > 0$*),*

   ii) *eine europäische Put-Option mit festem Ausübungspreis* ($f(x) = (K - x)^+$ *für ein* $K > 0$*);*

b) *eine arithmetische asiatische Option mit konvexer Auszahlungsfunktion* f*, d.h. für* $C_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f(A_0 \prod_{k=1}^i Y_k)$*;*

c) *eine Standard Lookback-Option mit konvexer Auszahlungsfunktion* f*, d.h. für* $C_n = \max_{i=0,\dots,n} f(A_0 \prod_{k=1}^i Y_k)$*, wie zum Beispiel*

   i) *eine Lookback Call-Option mit festem Ausübungspreis* ($f(x) = (x - K)^+$ *für ein* $K > 0$*),*

   ii) *eine Lookback Put-Option mit festem Ausübungspreis* ($f(x) = (K - x)^+$ *für ein* $K > 0$*);*

d) i) *eine Lookback Put-Option mit beweglichem Ausübungspreis, d.h. für* $C_n = \max_{i=0,\dots,n}(A_0 \prod_{k=1}^i Y_k) - A_0 \prod_{k=1}^n Y_k$*,*

   ii) *eine Lookback Call-Option mit beweglichem Ausübungspreis, d.h. für* $C_n = A_0 \prod_{k=1}^n Y_k - \min_{i=0,\dots,n}(A_0 \prod_{k=1}^i Y_k)$*.*

Der Beweis von Satz 4.30 besitzt jedoch zwei gravierende Nachteile. Zum einen läßt er sich i.a. nicht direkt auf amerikanische Optionen mit komponentenweise konvexen Auszahlungsfunktionen übertragen, da bei diesen über Mengen der Gestalt

$$\{\tau = k\} \cap \mathop{\times}_{i=1}^{n} [d_i, u_i]$$

mit $\tau \in \mathcal{T}$ integriert wird, und sich daher $(\star)$ bei Anwendung des Satzes von Fubini für bedingte Verteilungen nicht ohne weiteres anwenden läßt. Zum anderen liefert er keine konstruktive Bestimmungsmöglichkeit für einen oberen Hedge zum Preis $a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$.

Als wesentlich geeigneterer Ansatz erweist sich die Lösung des *dualen Problems*, d.h. die explizite Konstruktion eines oberen Hedges mit Anfangspreis $a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$.

Dafür wird zunächst die Gestalt eines Hedges für ein Finanzderivat mit terminaler Auszahlung in einem vollständigen Binomialmodell näher untersucht:

Bemerkung 4.32 (vgl. [33], Abschnitt 3.26)
Gegeben sei ein Binomialmodell mit Anfangsaktienkurs A_0 und Parametern $d_1, ..., d_n$, $u_1, ..., u_n$ und $r_1, ..., r_n$, wobei $0 < d_i < 1 + r_i < u_i < \infty$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gelte. In diesem Modell werde ein Finanzderivat mit terminaler Auszahlung C_n gehandelt. Dann läßt sich ein Hedge für diesen Claim wie folgt konstruieren:

Für $\vec{y}_{n-1} = (y_1, ..., y_{n-1}) \in \bigtimes_{i=1}^{n-1} \{d_i, u_i\}$ seien $H_{n-1,1}(\vec{y}_{n-1})$ und $H_{n-1,2}(\vec{y}_{n-1})$ die eindeutig bestimmten Lösungen von

$$\begin{aligned} H_{n-1,1}(\vec{y}_{n-1}) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} y_i \cdot u_n A_0 + H_{n-1,2}(\vec{y}_{n-1}) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 + r_i) &= C(y_1, ..., y_{n-1}, u_n), \\ H_{n-1,1}(\vec{y}_{n-1}) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} y_i \cdot d_n A_0 + H_{n-1,2}(\vec{y}_{n-1}) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 + r_i) &= C(y_1, ..., y_{n-1}, d_n). \end{aligned}$$

Für $n - 1 \geq k \geq 2$ und $\vec{y}_{k-1} = (y_1, ..., y_{k-1}) \in \bigtimes_{i=1}^{k-1} \{d_i, u_i\}$ sei weiter $H_{k-1}(\vec{y}_{k-1})$ festgelegt durch

$$\begin{aligned} & H_{k-1,1}(\vec{y}_{k-1}) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} y_i \cdot u_k A_0 + H_{k-1,2}(\vec{y}_{k-1}) \cdot \prod_{i=1}^{k} (1 + r_i) \\ = \; & H_{k,1}(\vec{y}_{k-1}, u_k) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} y_i \cdot u_k A_0 + H_{k,2}(\vec{y}_{k-1}, u_k) \cdot \prod_{i=1}^{k} (1 + r_i) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & H_{k-1,1}(\vec{y}_{k-1}) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} y_i \cdot d_k A_0 + H_{k-1,2}(\vec{y}_{k-1}) \cdot \prod_{i=1}^{k} (1 + r_i) \\ = \; & H_{k,1}(\vec{y}_{k-1}, d_k) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} y_i \cdot d_k A_0 + H_{k,2}(\vec{y}_{k-1}, d_k) \cdot \prod_{i=1}^{k} (1 + r_i). \end{aligned}$$

Schließlich gelte

$$\begin{aligned} H_{0,1} \cdot u_1 A_0 + H_{0,2} \cdot (1 + r_1) &= H_{1,1}(u_1) \cdot u_1 A_0 + H_{1,2}(u_1) \cdot (1 + r_1) \\ H_{0,1} \cdot d_1 A_0 + H_{0,2} \cdot (1 + r_1) &= H_{1,1}(d_1) \cdot d_1 A_0 + H_{1,2}(d_1) \cdot (1 + r_1). \end{aligned}$$

Dann liefert $\underset{\sim}{H}$ mit $H_k = (H_{k,1} \circ (Y_1, ..., Y_k), H_{k,2} \circ (Y_1, ..., Y_k))^t$ für alle $k \in \{1, ..., n\}$ und $H_0 = (H_{0,1}, H_{0,2})^t$ einen Hedge für das Finanzderivat (wobei $Y_1, ..., Y_n$ die Faktoren des Binomialmodells seien).

Die Aussage von Satz 4.30 ergibt sich ebenfalls durch Lösung des dualen Problems:

Theorem 4.33
In der Situation von Satz 4.30 existiert ein oberer Hedge für $\underset{\sim}{C}$ mit Anfangspreis $a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$. Folglich gilt für den oberen Preis des Finanzderivates

$$a^\star(\underset{\sim}{C}) = \sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i) \le a_0^{BM}(\underset{\sim}{C}).$$

Beweis: O.B.d.A. gelte $C_1 = ... = C_{n-1} = 0$. Andernfalls betrachte man den Claim $\widehat{\underset{\sim}{C}} = (0, ..., 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i B_n)$, dessen Endauszahlung über eine komponentenweise konvexe Funktion von den Faktoren des Aktienpreisprozesses abhängt (wie im Beweis von Satz 4.30 gezeigt wurde). Für jeden oberen Hedge $\widehat{\underset{\sim}{H}}$ von $\widehat{\underset{\sim}{C}}$ liefert dann $\underset{\sim}{H}$, festgelegt durch

$$\begin{aligned}
&H_0 = \widehat{H}_0,\\
&H_k = \big(\widehat{H}_{k,1}, \widehat{H}_{k,2} - \textstyle\sum_{i=1}^k \alpha_i C_i\big)^t,\ 1 \le k \le n-1,\\
&H_n = \widehat{H}_n = 0,
\end{aligned}$$

einen oberen Hedge von $\underset{\sim}{C}$ mit gleichem Anfangspreis.

Weiter sei $\Omega = (0,\infty)^n$ der Grundraum und $Y_1, ..., Y_n$ die Koordinatenprojektionen,

$$\underset{\sim}{S} = \big((A_0, 1)^t, (A_0 Y_1, B_1)^t, ..., (A_0 \prod_{i=1}^n Y_i, B_n)^t\big)$$

der Preisprozeß (mit $B_i := 1 + r_i$, $1 \le i \le n$), P_w das Wahrscheinlichkeitsmaß des n-Perioden Aktie/Bond Modells und

$$Q_0 = \bigotimes_{i=1}^n (q_{u_i}\delta_{u_i} + q_{d_i}\delta_{d_i})$$

mit $q_{u_i} = \frac{1+r_i-d_i}{u_i-d_i} = 1 - q_{d_i}$ das eindeutig bestimmte äquivalente Martingalmaß des äußeren Binomialmodells.

Die Existenz eines oberen Hedges $\underset{\sim}{H}$ mit Anfangspreis $H_0^t S_0 = a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$ wird induktiv bewiesen; die grundlegende Idee besteht dabei darin, zu jeder möglichen Realisierung $(y_1, ..., y_k)$ von $(Y_1, ..., Y_k)$ das Portfolio $H_k(y_1, ..., y_k)$ zu bilden, welches zum Hedge der Option in einem Binomialmodell mit Anfangspreis $A_0 \prod_{i=1}^k y_i$ und Faktoren $Y_{k+1}, ..., Y_n$ sowie äquivalentem Martingalmaß $Q_0^{(Y_{k+1},...,Y_n)}$ gehört, und dann im Aktie/Bond Modell die Handelsstrategie

$$\big(H_0, H_1(Y_1), ..., H_{n-1}(Y_1, ..., Y_{n-1}), 0\big)$$

auszuüben.

<u>$n = 1:$</u> Die Existenz eines oberen Hedges (H_0, H_1) mit $H_0^t S_0 = a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$ wurde bereits im Beweis von Satz 4.21 a) gezeigt; man wähle $H_1 = 0$ und

$$H_0 = \Big(\frac{f(u) - f(d)}{A_0(u-d)}, \frac{f(d)u - f(u)d}{\rho(u-d)}\Big)^t.$$

<u>$n \geq 2:$</u> Sei $\underset{\sim}{\widehat{H}}$ der gemäß Bemerkung 4.32 konstruierte Hedge des Claims mit terminaler Auszahlung

$$C_n = f_n(Y_1, ..., Y_n)$$

im (vollständigen) Binomialmodell, d.h. $\underset{\sim}{\widehat{H}}$ erfülle

i) $\widehat{H}_0^t S_0 = a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$,

ii) $\delta_i(\underset{\sim}{\widehat{H}}) = 0 \quad Q_0$-f.s., $1 \leq i \leq n-1$, und

iii) $\delta_n(\underset{\sim}{\widehat{H}}) = f_n(Y_1, ..., Y_n) \quad Q_0$-f.s..

Aus iii) ergibt sich

$$\alpha_1 \widehat{H}_0^t S_1 = E_{Q_0}(\alpha_n \delta_n(\underset{\sim}{\widehat{H}}) | \mathcal{F}_1) = E_{Q_0}(\alpha_n f_n(Y_1, ..., Y_n) \,| \mathcal{F}_1) \quad Q_0\text{-f.s.},$$

und zusammen mit der Unabhängigkeit von $Y_1, ..., Y_n$ unter Q_0 folgt

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_{0,1} A_0 u_1 + \widehat{H}_{0,2} B_1 &= \sum_{(y_2,...,y_n) \in \times_{i=2}^n \{d_i, u_i\}} B_1 \alpha_n f_n(u_1, y_2, ..., y_n) \cdot \prod_{i=2}^n q_{y_i}, \\
\widehat{H}_{0,1} A_0 d_1 + \widehat{H}_{0,2} B_1 &= \sum_{(y_2,...,y_n) \in \times_{i=2}^n \{d_i, u_i\}} B_1 \alpha_n f_n(d_1, y_2, ..., y_n) \cdot \prod_{i=2}^n q_{y_i}.
\end{aligned}$$

Analog zum Fall $n = 1$ liefert die Konvexität von $y_1 \mapsto f_n(y_1, y_2, ..., y_n)$

$$\widehat{H}_0^t \cdot (A_0 y_1, B_1)^t \geq \sum_{(y_2,...,y_n) \in \times_{i=2}^n \{d_i, u_i\}} B_1 \alpha_n f_n(y_1, y_2, ..., y_n) \cdot \prod_{i=2}^n q_{y_i}$$

für alle $y_1 \in [d_1, u_1]$.

Für jede Realisierung y_1 des Faktors Y_1 aus dem zugrundeliegenden Aktie/Bond Modell betrachte man nun das $(n-1)$-Perioden Aktie/Bond Modell mit Preisprozeß

$$\big((A_0 y_1, B_1)^t, (A_0 y_1 Y_2, B_2)^t, \ldots, (A_0 y_1 \prod_{i=2}^n Y_i, B_n)^t\big).$$

Aufgrund der Induktionsvoraussetzung (angewendet auf $f_{n-1,y_1}(Y_2,...,Y_n) := f_n(y_1,Y_2,...,Y_n)$) existiert in diesem Modell eine Handelsstrategie $\underset{\sim}{\widehat{H}}(y_1)$ mit Anfangspreis

$$\widehat{H}_1(y_1)^t \cdot (A_0 y_1, B_1)^t = \sum_{(y_2,...,y_n) \in \times_{i=2}^n \{d_i,u_i\}} B_1 \alpha_n f_n(y_1,y_2,...,y_n) \cdot \prod_{i=2}^n q_{y_i},$$

welche einen oberen Hedge für $f_n(y_1,Y_2,...,Y_n)$ in diesem $(n-1)$-Perioden Modell darstellt.

Das Portfolio $\widehat{H}_k(y_1,Y_2,...,Y_k)$ wird dabei für $k \in \{1,...,n-1\}$ gemäß Induktionsvoraussetzung dadurch festgelegt, daß man für jede Realisierung $(y_2,...,y_k)$ von $(Y_2,...,Y_k)$ das $(n-k)$-Perioden Aktie/Bond Modell mit Preisprozeß

$$\Big((A_0 \prod_{i=1}^k y_i, B_k)^t, (A_0 \prod_{i=1}^k y_i \cdot Y_{k+1}, B_{k+1})^t, ..., (A_0 \prod_{i=1}^k y_i \cdot \prod_{i=k+1}^n Y_i, B_n)^t\Big)$$

betrachtet und anhand der in Bemerkung 4.32 beschriebenen Konstruktion das Portfolio $\widehat{H}_k(y_1,...,y_k)$ bildet, welches zum Hedge des Claims mit terminaler Auszahlung $f_n(y_1,...,y_k,Y_{k+1},...,Y_n)$ im zugehörigen $(n-k)$-Perioden Binomialmodell mit Preisprozeß

$$\Big((A_0 \prod_{i=1}^k y_i, B_k)^t, (A_0 \prod_{i=1}^k y_i \cdot Y_{k+1}, B_{k+1})^t, ..., (A_0 \prod_{i=1}^k y_i \cdot \prod_{i=k+1}^n Y_i, B_n)^t\Big)$$

gehört. Aus der in Bemerkung 4.32 beschriebenen Konstruktion des Hedges und der Meßbarkeit von f_n folgt, die Meßbarkeit von $(y_1,...,y_k) \mapsto \widehat{H}_k(y_1,...,y_k)$, so daß zum einen

$$\widehat{H}_k(y_1,Y_2,...,Y_k) := \widehat{H}_k(y_1,y_2,...,y_k) \circ (Y_2,...,Y_k)$$

meßbar bezüglich $\sigma(Y_2,...,Y_k)$ ist, und zum anderen

$$\widehat{H}_k(Y_1,...,Y_k) := \widehat{H}_k(y_1,Y_2,...,Y_k) \circ Y_1$$

meßbar bezüglich $\mathcal{F}_k$ ist.

Im zugrundeliegenden n-Perioden Aktie/Bond Modell betrachte man nun die Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ mit $H_0 = \widehat{H}_0$, $H_k = \widehat{H}_k(Y_1,...,Y_k)$, $1 \le k \le n-1$, und $H_n = 0$.

Dann erfüllt $\underset{\sim}{H}$ die Bedingungen

i) $\delta_0(\underset{\sim}{H}) = -a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$,

ii) $\delta_1(\underset{\sim}{H}) = \widehat{H}_0^t \cdot (A_0 Y_1, B_1)^t - \widehat{H}_1(Y_1)^t \cdot (A_0 Y_1, B_1)^t \geq 0 \quad P_w$-f.s.,

iii) $\delta_k(\underset{\sim}{H}) \geq 0 \quad P_w$-f.s., $\quad 2 \leq k \leq n-1$,

iv) $\delta_n(\underset{\sim}{H}) \geq f_n(Y_1, ..., Y_n) \quad P_w$-f.s.

und bildet damit einen oberen Hedge mit Anfangspreis $a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$.

□

Der Beweis von Theorem 4.33 hat gegenüber dem dualen Beweis von Satz 4.30 nicht nur den Vorteil, daß der obere Hedge konkret bestimmt wird; vielmehr läßt sich die Beweisidee sofort auf amerikanische Optionen übertragen. Zunächst ist daher zu klären, wie diese in vollständigen Modellen bewertet und abgesichert werden:

Satz 4.34 ([33], Abschnitt 4.11)
Sei $\underset{\sim}{C}$ der Auszahlungsprozeß einer amerikanischen Option in einem arbitragefreien und vollständigen n-Perioden Modell mit äquivalentem Martingalmaß Q, wobei $C_k \in \mathcal{L}_1(Q)$ für alle $k \in \{0, ..., n\}$ gelte. Dann beträgt der faire Ausgabepreis der Option

$$a_0(\underset{\sim}{C}) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau),$$

und zum Zeitpunkt $k \in \{1, ..., n-1\}$ beträgt der faire Handelspreis der Option

$$a_k(\underset{\sim}{C}) = \sup_{\tau \geq k} B_k E_Q(\alpha_\tau C_\tau \,|\, \mathcal{F}_k).$$

Beweis (vgl. [33], Seite 88 f.): Zu zeigen ist die Existenz eines Hedges $\underset{\sim}{H}$ mit Anfangspreis $H_0^t S_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau)$. Sei $\underset{\sim}{U}$ Snell's envelope zum abdiskontierten Auszahlungsprozeß $(\alpha_i C_i)_{i \in \{0,...,n\}}$, festgelegt durch

i) $U_n = \alpha_n C_n$,

ii) $U_k = \alpha_k C_k \vee E_Q(U_{k+1} | \mathcal{F}_k), \quad n-1 \geq k \geq 1$,

iii) $U_0 = \alpha_0 C_0 \vee E_Q(U_1)$.

Dann bildet $(U_k, \mathcal{F}_k)_{k\in\{0,\ldots,n\}}$ ein Supermartingal bezüglich Q (vgl. [33], Satz 4.8) und besitzt die Doobsche Zerlegung $\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{M} + \underset{\sim}{D}$, wobei $\underset{\sim}{M}$ ein Martingal bezüglich Q bildet und $\underset{\sim}{D}$ antiton ist mit $D_0 = 0$. Genauer gilt (vgl. [33], Abschnitt 2.21)

$$M_k = U_0 + \sum_{i=1}^{k}(U_i - E_Q(U_i|\mathcal{F}_{i-1})), \quad D_k = \sum_{i=1}^{k}(E_Q(U_i|\mathcal{F}_{i-1}) - U_{i-1})$$

für $0 \leq k \leq n$.

Sei weiterhin $\underset{\sim}{H}$ der nach Voraussetzung existierende Hedge des Claims

$$\underset{\sim}{\widehat{C}} = (0, \ldots, 0, \frac{M_n}{\alpha_n}).$$

Aufgrund der Selbstfinanzierung von $\underset{\sim}{H}$ gilt dann für alle $k \in \{0, ..., n\}$

$$\alpha_k H_k^t S_k = E_Q(\alpha_n \delta_n(\underset{\sim}{H})|\mathcal{F}_k) = E_Q(M_n|\mathcal{F}_k) = M_k \geq U_k \geq \alpha_k C_k \quad P_w\text{-f.s..}$$

Betrachtet man nun die Ausübungsstrategie

$$\tau^\star := \inf\{j \geq 0 : U_j = \alpha_j C_j\},$$

so gilt für $k \in \{0, ..., n\}$ und $i \in \{0, ..., k-1\}$ auf der Menge $\{\tau^\star = k\}$ offensichtlich

$$U_i = \alpha_i C_i \vee E_Q(U_{i+1}|\mathcal{F}_i) > \alpha_i C_i$$

und somit $U_i = E_Q(U_{i+1}|\mathcal{F}_i)$ P_w-f.s.. Hieraus ergibt sich

$$\alpha_k H_k^t S_k 1_{\{\tau^\star=k\}} = M_k 1_{\{\tau^\star=k\}} = U_k 1_{\{\tau^\star=k\}} = \alpha_k C_k 1_{\{\tau^\star=k\}}$$

für alle $k \in \{0, ..., n\}$. Zusammen mit dem *dynamic programming theorem* ([14], Theorem 3.2) folgt für die Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ schließlich

1) $H_0^t S_0 = U_0 = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau)$,

2) $H_k^t S_k \geq C_k$ P_w-f.s. für alle $k \in \{0, ..., n\}$ und

3) $H_{\tau^\star}^t S_{\tau^\star} = C_{\tau^\star}$,

d.h. $\underset{\sim}{H}$ bildet den gesuchten Hedge.

Für einen Handelszeitpunkt $k \in \{1, ..., n-1\}$ betrachte man den „verbleibenden“ Claim mit Auszahlungsprozeß $(0, ..., 0, C_k, ..., C_n)$; dann folgt analog die Existenz eines Hedges mit $\underset{\sim}{\widehat{H}}$ mit $H_k^t S_k = \sup_{\tau\geq k} E_Q(\alpha_\tau C_\tau|\mathcal{F}_k)$.

□

Der faire Ausgabepreis einer amerikanischen Option kann im Binomialmodell mit Hilfe einer Rekursion berechnet werden. Unter Verwendung der *Theorie des optimalen Stoppens* ergibt sich analog zum Beispiel 4.20 in [33], in dem ein amerikanischer Put in einem Cox-Ross-Rubinstein Modell betrachtet wird, die folgende Bewertungsformel:

Bemerkung 4.35
Sei $\underset{\sim}{C} = (f_0, f_1(Y_1), ..., f_n(Y_1, ..., Y_n))$ *der Auszahlungsprozeß einer amerikanischen Option in einem arbitragefreien und vollständigen Binomialmodell mit Parametern* $d_1, ..., d_n$, $u_1, ..., u_n$ *und* $r_1, ..., r_n$. *Weiter seien* $h_0 := f_0$ *sowie* $h_i := \alpha_i f_i$ *und* $q_{u_i} := \frac{1+r_i-d_i}{u_i-d_i} =: 1 - q_{d_i}$ *für* $i = 1, ..., n$. *Definiert man schließlich* $\widehat{a}_{n-1}, ..., \widehat{a}_0$ *rekursiv durch*

$$\begin{aligned}
\widehat{a}_{n-1}(u_1, ..., u_{n-1}) &= q_{u_n} h_n(u_1, ..., u_{n-1}, u_n) + q_{d_n} h_n(u_1, ..., u_{n-1}, d_n), \\
&\vdots \\
\widehat{a}_{n-1}(d_1, ..., d_{n-1}) &= q_{u_n} h_n(d_1, ..., d_{n-1}, u_n) + q_{d_n} h_n(d_1, ..., d_{n-1}, d_n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{a}_{n-2}(u_1, ..., u_{n-2}) = \;& q_{u_{n-1}} \max\{h_{n-1}(u_1, ..., u_{n-2}, u_{n-1}), \widehat{a}_{n-1}(u_1, ..., u_{n-2}, u_{n-1})\} \\
&+ q_{d_{n-1}} \max\{h_{n-1}(u_1, ..., u_{n-2}, d_{n-1}), \widehat{a}_{n-1}(u_1, ..., u_{n-2}, d_{n-1})\}, \\
&\vdots \\
\widehat{a}_{n-2}(d_1, ..., d_{n-2}) = \;& q_{u_{n-1}} \max\{h_{n-1}(d_1, ..., d_{n-2}, u_{n-1}), \widehat{a}_{n-1}(d_1, ..., d_{n-2}, u_{n-1})\} \\
&+ q_{d_{n-1}} \max\{h_{n-1}(d_1, ..., d_{n-2}, d_{n-1}), \widehat{a}_{n-1}(d_1, ..., d_{n-2}, d_{n-1})\}, \\
&\vdots \\
\widehat{a}_1(u_1) = \;& q_{u_2} \max\{h_2(u_1, u_2), \widehat{a}_2(u_1, u_2)\} \\
&+ q_{d_2} \max\{h_2(u_1, d_2), \widehat{a}_2(u_1, d_2)\}, \\
\widehat{a}_1(d_1) = \;& q_{u_2} \max\{h_2(d_1, u_2), \widehat{a}_2(d_1, u_2)\} \\
&+ q_{d_2} \max\{h_2(d_1, d_2), \widehat{a}_2(d_1, d_2)\}, \\
\widehat{a}_0 = \;& q_{u_1} \max\{h_1(u_1), \widehat{a}_1(u_1)\} + q_{d_1} \max\{h_1(d_1), \widehat{a}_1(d_1)\},
\end{aligned}$$

dann beträgt der faire Ausgabepreis der Option

$$a_0^{BM}(\underset{\sim}{C}) = \max\{\widehat{a}_0, h_0\}.$$

Als Analogon zu Theorem 4.33 ergibt sich nun:

Theorem 4.36
In einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell gebe es $d_1, ..., d_n$ und $u_1, ..., u_n$ mit $0 < d_i < 1 + r_i < u_i < \infty$ für alle $1 \leq i \leq n$, so daß

$$supp(P_w) \subset \bigtimes_{i=1}^{n} [d_i, u_i]$$

gilt. Weiter sei $\underset{\sim}{C} = (C_0, ..., C_n)$ der Auszahlungsprozeß einer amerikanischen Option, wobei für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ C_k über eine komponentenweise konvexe Funktion $f_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ von den Faktoren $Y_1, ..., Y_k$ des Aktienpreisprozesses abhängt. Dann existiert ein oberer Hedge für $\underset{\sim}{C}$ mit Anfangspreis $a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$, wobei $a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$ den fairen Preis des Finanzderivates in einem Binomialmodell mit gleichem Anfangsaktienkurs und Parametern $d_1, ..., d_n$, $u_1, ..., u_n$ und $r_1, ..., r_n$ bezeichne (vgl. Bemerkung 4.35). Folglich gilt für den oberen Preis der Option

$$a^{\star}(\underset{\sim}{C}) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau) \leq a_0^{BM}(\underset{\sim}{C}).$$

Beweis: Die Bezeichnungen seien wie im Beweis von Theorem 4.33 gewählt. Die Existenz eines oberen Hedges mit Anfangspreis $H_0^t S_0 = a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$ wird induktiv bewiesen. Die grundlegende Idee besteht wieder darin, für jede mögliche Realisierung $(y_1, ..., y_k)$ von $(Y_1, ..., Y_k)$ das zum Hedge der Option im $(n-k)$-Perioden Binomialmodell mit Preisverlauf

$$\Big((A_0 \prod_{i=1}^{k} y_i, B_k)^t, (A_0 \prod_{i=1}^{k} y_i \cdot Y_{k+1}, B_{k+1})^t, ..., (A_0 \prod_{i=1}^{k} y_i \cdot \prod_{i=k+1}^{n} Y_i, B_n)^t\Big)$$

und äquivalentem Martingalmaß $Q_0^{(Y_{k+1}, ..., Y_n)}$ gehörige Portfolio $H_k(y_1, ..., y_k)$ auszuwählen und dann im n-Perioden Aktie/Bond Modell die Handelsstrategie

$$(H_0, H_1(Y_1), ..., H_n(Y_1, ..., Y_n))$$

auszuüben.

<u>$n = 1$:</u> Man definiere $\underset{\sim}{U} = (U_0, U_1)$ durch

$$\begin{aligned} U_1(Y_1) &= \alpha_1 f_1(Y_1), \\ U_0 &= C_0 \vee E_{Q_0}(U_1(Y_1)), \end{aligned}$$

d.h. als Snell's envelope von $(\alpha_k C_k)_{k=0,1}$ bezüglich Q_0. $\underset{\sim}{U}$ besitzt dann bezüglich Q_0 die Doob-Zerlegung $\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{M} + \underset{\sim}{D}$, wobei $M_0 = U_0$, $D_0 = 0$ sei und

$$\begin{aligned} M_1(Y_1) &= U_1(Y_1) - E_{Q_0}(U_1(Y_1)) + U_0, \\ D_1 &= E_{Q_0}(U_1(Y_1)) - U_0. \end{aligned}$$

Sei $\widehat{\underset{\sim}{H}}$ ein Hedge von $(0, \frac{M_1}{\alpha_1})$ im Ein-Perioden Binomialmodell mit Parametern d_1, u_1 und r_1, konstruiert wie in Bemerkung 4.32. Dann erfüllt $\widehat{H}_0$ die Bedingungen

i) $\widehat{H}_0^t S_0 = U_0 = a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$,

ii) $\widehat{H}_0^t S_0 \geq C_0$ und

iii) $\widehat{H}_0^t \cdot (A_0 u_1, B_1)^t \geq f_1(u_1)$ sowie $\widehat{H}_0^t \cdot (A_0 d_1, B_1)^t \geq f_1(d_1)$,

woraus zusammen mit der Konvexität von f_1 (analog zum Beweis von 4.21 a)) schließlich $\widehat{H}_0^t \cdot (A_0 y_1, B_1)^t \geq f_1(y_1)$ für alle $y_1 \in [d_1, u_1]$ folgt.

Im Aktie/Bond Modell bildet folglich die Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ mit $H_1 = H_0 = \widehat{H}_0$ einen oberen Hedge für die Option mit Anfangspreis $a_0^{BM}(\underset{\sim}{\widetilde{C}})$.

<u>$n \geq 2$:</u> Im Binomialmodell wird analog zum Beweis von Satz 4.34 ein Hedge $\underset{\sim}{\widetilde{H}}$ konstruiert. Aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit von $Y_1, ..., Y_n$ unter $\widetilde{Q_0}$ läßt sich Snell's envelope zum abdiskontierten Auszahlungsprozeß

$$(C_0, \alpha_1 f_1(Y_1), ..., \alpha_n f_n(Y_1, ..., Y_n))$$

festlegen durch

$$\begin{aligned} U_n(Y_1, ..., Y_n) &= \alpha_n f_n(Y_1, ..., Y_n), \\ U_k(Y_1, ..., Y_k) &= \alpha_k f_k(Y_1, ..., Y_k) \vee E_{Q_0}(U_{k+1}(y_1, ..., y_k, Y_{k+1})) \circ (Y_1, ..., Y_k), \\ & \quad n-1 \geq k \geq 1, \\ U_0 &= C_0 \vee E_{Q_0}(U_1(Y_1)), \end{aligned}$$

d.h. man kann $E_{Q_0}(U_{k+1}(y_1, ..., y_k, Y_{k+1}))$ als Version des faktorisierten bedingten Erwartungswertes $E_{Q_0}(U_{k+1}(Y_1, ..., Y_k, Y_{k+1}) | (Y_1, ..., Y_k) = (y_1, ..., y_k))$ wählen. Ferner sei

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{M} + \underset{\sim}{D}$$

mit

$$\begin{aligned} M_0 &= U_0, \quad D_0 = U_0, \\ M_k &= \sum_{j=2}^{k} \left[U_j(Y_1, ..., Y_j) - E_{Q_0}(U_j(y_1, ..., y_{j-1}, Y_j)) \circ (Y_1, ..., Y_{j-1}) \right] \\ & \quad + U_1(Y_1) - E_{Q_0}(U_1(Y_1)) + U_0, \\ D_k &= \sum_{j=2}^{k} \left[E_{Q_0}(U_j(y_1, ..., y_{j-1}, Y_j)) \circ (Y_1, ..., Y_{j-1}) - U_{j-1}(Y_1, ..., Y_{j-1}) \right] \\ & \quad + E_{Q_0}(U_1(Y_1)) - U_0 \end{aligned}$$

die Doobsche Zerlegung von $\underset{\sim}{U}$. Weiter sei $\underset{\sim}{\widehat{H}}$ der (gemäß Bemerkung 4.32 konstruierte) Hedge des Claims

$$\underset{\sim}{\widehat{C}} = (0, ..., 0, \frac{M_n}{\alpha_n})$$

im Binomialmodell. Dann erfüllt das Portfolio $\widehat{H}_0$ die Bedingungen

1) $\widehat{H}_0^t S_0 = E_{Q_0}(\alpha_n \widehat{C}_n) = E_{Q_0}(M_n) = M_0 = U_0 = a_0^{BM}(\underset{\sim}{C}) \quad Q_0\text{-f.s.},$

2) $$\begin{aligned} \alpha_1 \widehat{H}_0^t S_1 &= E_{Q_0}(\alpha_n \delta_n(\underset{\sim}{\widehat{H}}) \,|\, Y_1) \\ &= E_{Q_0}(\alpha_n \widehat{C}_n \,|\, Y_1) \\ &= E_{Q_0}(M_n \,|\, Y_1) \\ &= M_1 \\ &= U_1(Y_1) - E_{Q_0}(U_1(Y_1)) + U_0 \\ &\geq U_1(Y_1) \quad Q_0\text{-f.s.}, \end{aligned}$$

3) $\widehat{H}_0^t S_1 \geq f_1(Y_1) \quad Q_0\text{-f.s.}.$

Als nächstes wird gezeigt, daß die Abbildung

$$U_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad y_1 \mapsto \max\{\alpha_1 f_1(y_1), E_{Q_0}(U_2(y_1, Y_2))\}$$

konvex ist. Da für zwei konvexe Funktionen g und h sowohl $g + h$ als auch $g \vee h$ konvex ist, reicht es wegen

$$E_{Q_0}(U_2(y_1, Y_2)) = U_2(x, u_2) q_{u_2} + U_2(x, d_2) q_{d_2}$$

zu zeigen, daß die Abbildung

$$y_1 \mapsto U_2(y_1, y_2) = \alpha_2 f_2(y_1, y_2) \vee \big(U_3(y_1, y_2, d_3) q_{d_3} + U_3(y_1, y_2, u_3) q_{u_3}\big)$$

für $y_2 \in \{d_2, u_2\}$ konvex ist. Sukzessive ergibt sich daher die Konvexität von U_1 aus der nach Voraussetzung gegebenen Konvexität von

$$y_1 \mapsto U_n(y_1, y_2, ..., y_n) = \alpha_n f_n(y_1, y_2, ..., y_n)$$

für alle $(y_2, ..., y_n) \in \bigtimes_{i=2}^{n} \{d_i, u_i\}$. Für jede Realisierung $y_1 \in [d_1, u_1]$ von Y_1 erhält man schließlich aus der Konvexität von U_1

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \cdot \widehat{H}_0^t \cdot (A_0 y_1, B_1)^t &= \alpha_1 \cdot \big(\widehat{H}_{0,1} \cdot A_0 y_1 + \widehat{H}_{0,2} \cdot B_1\big) \\
&= \alpha_1 \cdot \frac{y_1 - d_1}{u_1 - d_1} \cdot [\widehat{H}_{0,1} \cdot A_0 u_1 + \widehat{H}_{0,2} \cdot B_1] \\
&\quad + \alpha_1 \cdot \frac{u_1 - y_1}{u_1 - d_1} \cdot [\widehat{H}_{0,1} \cdot A_0 d_1 + \widehat{H}_{0,2} \cdot B_1] \\
&\overset{ii)}{\geq} \frac{y_1 - d_1}{u_1 - d_1} \cdot U_1(u_1) + \frac{u_1 - y_1}{u_1 - d_1} \cdot U_1(d_1) \\
&\geq U_1(y_1) \\
&\geq \alpha_1 f_1(y_1),
\end{aligned}$$

d.h. es gilt

4) $\widehat{H}_0^t \cdot (A_0 Y_1, B_1)^t \geq \frac{1}{\alpha_1} U_1(Y_1)$ P_w-f.s.,

5) $\widehat{H}_0^t \cdot (A_0 Y_1, B_1)^t \geq f_1(Y_1)$ P_w-f.s..

Für jede Realisierung y_1 von Y_1 betrachte man nun das $(n-1)$-Perioden Aktie/ Bond Modell mit Preisprozeß

$$\big((A_0 y_1, B_1)^t, (A_0 y_1 Y_2, B_2)^t, ..., (A_0 y_1 \prod_{i=2}^{n} Y_i, B_n)^t\big).$$

In diesem existiert gemäß Induktionsvoraussetzung ein oberer Hedge

$$\underset{\sim}{\widehat{H}}(y_1) = (\widehat{H}_1(y_1), \widehat{H}_2(y_1, Y_2), ..., \widehat{H}_{n-1}(y_1, Y_2, ..., Y_{n-1}), 0)$$

zur amerikanischen Option mit Auszahlungsprozeß

$$(f_1(y_1), f_2(y_1, Y_2), ..., f_n(y_1, Y_2, ..., Y_n)),$$

dessen Anfangspreis sich wie folgt berechnet:

Das äquivalente Martingalmaß im zugehörigen $(n-1)$-Perioden Binomialmodell ist gegeben durch $Q_1 = Q_0^{(Y_2,...,Y_n)}$. Snell's envelope zum abdiskontierten Auszahlungsprozeß im Binomialmodell läßt sich dann festlegen durch

$$\begin{aligned}
\widehat{U}_n(y_1, Y_2, ..., Y_n) &= \frac{\alpha_n}{\alpha_1} f_n(y_1, Y_2, ..., Y_n), \\
\widehat{U}_k(y_1, Y_2, ..., Y_k) &= \frac{\alpha_k}{\alpha_1} f_k(y_1, Y_2, ..., Y_k) \vee E_{Q_1}(\widehat{U}_{k+1}(y_1, y_2, ..., y_k, Y_{k+1})) \circ (Y_2, ..., Y_k), \\
& \qquad n-1 \geq k \geq 2, \\
\widehat{U}_1(y_1) &= f_1(y_1) \vee E_{Q_1}(U_2(y_1, Y_2)),
\end{aligned}$$

und der Anfangspreis des Hedges beträgt

$$\widehat{H}_1(y_1)^t \cdot (A_0 y_1, B_1)^t = \widehat{U}_1(y_1) = \frac{1}{\alpha_1} U_1(y_1).$$

Für $k \in \{2,...,n\}$ wird dabei $\widehat{H}_k(y_1, Y_2, ..., Y_k)$ gemäß Induktionsvoraussetzung wie folgt festgelegt: Für jede Realisierung $(y_2, ..., y_k)$ von $(Y_2, ..., Y_k)$ wird das $(n-k)$-Perioden Aktie/Bond Modell mit Preisprozeß

$$\Big((A_0 \prod_{i=1}^{k} y_i, B_k)^t, (A_0 \prod_{i=1}^{k} y_i \cdot Y_{k+1}, B_{k+1})^t, ..., (A_0 \prod_{i=1}^{k} y_i \cdot \prod_{i=k+1}^{n} Y_i, B_n)^t\Big)$$

betrachtet. In diesem Modell bildet man zum abdiskontierten Auszahlungsprozeß

$$(\alpha_k f_k(y_1, ..., y_k), \alpha_{k+1} f_{k+1}(y_1, ..., y_k, Y_{k+1}), ..., \alpha_n f_n(y_1, ..., y_k, Y_{k+1}, ..., Y_n))$$

Snell's envelope

$$(U_k(y_1, ..., y_k), U_{k+1}(y_1, ..., y_k, Y_{k+1}), ..., U_n(y_1, ..., y_k, Y_{k+1}, ..., Y_n))$$

bezüglich des Martingalmaßes $Q_k := Q_0^{(Y_{k+1},...,Y_n)}$ des zugehörigen $(n-k)$-Perioden Binomialmodells sowie dessen Doobsche Zerlegung mit Martingalanteil

$$(M_k(y_1, ..., y_k), M_{k+1}(y_1, ..., y_k, Y_{k+1}), ..., M_n(y_1, ..., y_k, Y_{k+1}, ..., Y_n)).$$

Aufgrund der Meßbarkeit von $f_k, ..., f_n$ lassen sich dabei $U_k, ..., U_n$ und $M_k, ..., M_n$ so wählen, daß die Abbildungen $(y_1, ..., y_k) \mapsto U_m(y_1, ..., y_k, Y_{k+1}, ..., Y_m)$ und $(y_1, ..., y_k) \mapsto M_m(y_1, ..., y_k, Y_{k+1}, ..., Y_m)$ für alle $m \in \{k, ..., n\}$ meßbar sind. Schließlich bildet man das Portfolio $\widetilde{H}_k(y_1, ..., y_k)$, welches zum Hedge des Claims $(0, ..., 0, M_n(y_1, ..., y_k, Y_{k+1}, ..., Y_n))$ im zugehörigen $(n-k)$-Perioden Binomialmodell gehört. Dann ist die Abbildung $(y_1, ..., y_k) \mapsto \widetilde{H}_k(y_1, y_2, ..., y_k)$ ebenfalls meßbar, so daß zum einen $\widehat{H}_k(y_1, Y_2, ..., Y_k) = \widetilde{H}_k(y_1, y_2, ..., y_k) \circ (Y_2, ..., Y_k)$ meßbar bezüglich $\sigma(Y_2, ..., Y_k)$ und zum anderen $\widehat{H}_k(Y_1, ..., Y_k) = \widetilde{H}_k(Y_1, Y_2, ..., Y_k)$ meßbar bezüglich $\mathcal{F}_k$ ist.

Im n-Perioden Aktie/Bond Modell definiere man nun $\underset{\sim}{H}$ durch $H_0 := \widehat{H}_0$ und

$$H_k := \widehat{H}_k(y_1, Y_2, ..., Y_k) \circ Y_1, \quad 1 \le k \le n.$$

Die Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ erfüllt dann insgesamt die Bedingungen

a) $H_0^t S_0 = U_0 = a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$,

b) $\delta_1(\underset{\sim}{H}) = H_0^t S_1 - H_1^t S_1 \ge U_1(Y_1) - H_1^t S_1 = 0 \;\; P_w$-f.s.,

c) $\delta_k(\underset{\sim}{H}) \ge 0 \;\; P_w$-f.s., $\; 2 \le k \le n$,

d) $H_k^t S_k \ge C_k \;\; P_w$-f.s., $\; 0 \le k \le n$

und liefert damit einen oberen Hedge für $\underset{\sim}{C}$ mit Anfangspreis $a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$.

□

Bemerkung 4.37
Ein oberer Hedge eines Finanzderivates mit regelmäßigen Auszahlungen $C_1, ..., C_n$ bzw. einer amerikanischen Option mit möglichen Auszahlungen $C_0, ..., C_n$, die über komponentenweise konvexe Funktionen von den Faktoren des Aktienpreisprozesses abhängen, zum Anfangspreis $a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$ läßt sich gemäß dem Beweis von Theorem 4.33 bzw. Theorem 4.36 wie folgt konstruieren:

Zum Zeitpunkt $k = 0$ bilde man dasjenige Anfangsportfolio, welches zum Hedge dieses Finanzderivates im äußeren Binomialmodell gehört. Zu jedem Zeitpunkt $k \in \{1, ..., n-1\}$ löse man nun das im Zeitpunkt $k-1$ zusammengestellte Portfolio H_{k-1} wieder auf. Im $(n-k)$-Perioden Modell mit zum Zeitpunkt k bekanntem Aktienpreis A_k und Faktoren $\widehat{Y}_{k+1}, ..., \widehat{Y}_n$, die von $(Y_1, ..., Y_k)$ und voneinander stochastisch unabhängige Balayages von $Y_{k+1}, ..., Y_n$ darstellen, existiert ein Hedge $\underset{\sim}{H}$ für den „verbleibenden“ Claim $(C_{k+1}, ..., C_n)$. Dessen Portfolio H_k erwerbe man nun unter Verwendung (eines Teiles) des Verkaufserlöses $H_{k-1}^t \cdot (A_k, B_k)^t$ und behalte es bis zum Zeitpunkt $k+1$.

Bemerkung 4.38
Theorem 4.33 und Theorem 4.36 sowie Bemerkung 4.37 liefern eine formale Begründung für die in Kapitel 3.2 aufgestellte ökonomische Folgerung, daß im Falle beschränkter Faktoren der Preis eines Finanzderivates mit komponentenweise konvexen Auszahlungsfunktionen zu jedem Zeitpunkt $k \in \{0, ..., n-1\}$ nicht größer sein sollte als der faire Preis a_k des Claims in demjenigen Modell, dessen erste k Faktoren durch $Y_1, ..., Y_k$ gegeben sind, und dessen restliche Faktoren $Y_{k+1}, ..., Y_n$ voneinander und von $(Y_1, ..., Y_k)$ stochastisch unabhängige Balayages von $Y_{k+1}, ..., Y_n$ darstellen:

Es existiert zum Zeitpunkt k ein oberer Hedge $(H_j)_{j \in \{k,...,n\}}$ des Claims mit Preis $H_k^t \cdot (A_k, B_k)^t = a_k$, d.h. der Herausgeber des Finanzderivates kann zum Preis a_k eine Handelsstrategie erwerben, mit deren Hilfe er alle entstehenden Ansprüche ohne weitere Zuzahlungen erfüllen kann.

Ohne die nähere Struktur des Maßes P_w bzw. seines Trägers zu kennen, ist nun nur aufgrund der Kenntnis von Schranken $d_1, ..., d_n > 0$ und $u_1, ..., u_n < \infty$ eine Abschätzung für die oberen Preise bzw. für die oberen Arbitragegrenzen möglich, wobei Mertons obere Schranken aus Abschnitt 4.2.1 verbessert werden. Weiterhin lassen sich zu diesen oberen Schranken obere Hedges konstruieren.

Als nächstes stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen diese oberen Schranken angenommen werden, und somit in den Beweisen von Theorem 4.33 und Theorem 4.36 bereits die oberen Preise berechnet und obere Hedges zum oberen Preis konstruktiv bestimmt werden. In diesem Fall ergäbe sich dann eine deutliche Verbesserung gegenüber den nicht-konstruktiven Existenzbeweisen von Satz 4.13 und 4.18.

4.2.3 Die schwache Konvergenzbedingung $A^\star$

In den Beweisen von Satz 4.21 und Satz 4.28 wurde jeweils eine geeignete schwach konvergente Folge äquivalenter Martingalmaße konstruiert um zu zeigen, daß die oberen Schranken angenommen werden. Diese Idee läßt sich direkt auf n-Perioden Modelle mit beschränktem Träger übertragen:

Theorem 4.39
In der Situation von Theorem 4.33 und 4.36 gelte

$$A^\star : \begin{cases} \text{Die Menge } \mathcal{P} \text{ äquivalenter Martingalmaße enthält} \\ \text{eine Folge } (Q_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ mit} \\ \quad Q_m \xrightarrow{w} Q_0 = \bigotimes_{i=1}^n (q_{u_i}\delta_{u_i} + q_{d_i}\delta_{d_i}), \\ \text{wobei } q_{u_i} = \frac{1+r_i-d_i}{u_i-d_i} = 1 - q_{d_i} \text{ gilt, } i = 1, ..., n. \end{cases}$$

Dann folgt $a^\star(\underset{\sim}{C}) = a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$.

Beweis: Sei $\underset{\sim}{C} = (C_1, ..., C_n) = (f_1(Y_1), ..., f_n(Y_1, ..., Y_n))$ ein Finanzderivat mit regelmäßigen Auszahlungen, wobei jedes f_k komponentenweise konvex und damit stetig ist. Aus der schwachen Konvergenzbedingung $A^\star$ und dem Dualitätssatz 4.14 b) für obere Preise ergibt sich dann

$$a^\star(\underset{\sim}{C}) = \sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i) \geq \lim_{m\to\infty} E_{Q_m}(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i) = E_{Q_0}(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i) = a_0^{BM}(\underset{\sim}{C}),$$

und zusammen mit der Ungleichung $a^\star(\underset{\sim}{C}) \leq a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$ aus Theorem 4.33 folgt

$$a^\star(\underset{\sim}{C}) = a_0^{BM}(\underset{\sim}{C}).$$

Sei nun $\underset{\sim}{C} = (C_0, ..., C_n)$ der Auszahlungsprozeß einer amerikanischen Option, wobei für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ eine komponentenweise konvexe und damit stetige Funktion f_i existiere mit $C_i = f_i(Y_1, ..., Y_i)$. Zunächst wird gezeigt, daß für jede Stoppregel $\tau \in \mathcal{T}$ eine Folge von Stoppregeln $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\tau_k \in \mathcal{T}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert, welche der Bedingung

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{m\in\mathbb{N}} E_{Q_m}(\alpha_{\tau_k} C_{\tau_k}) \geq E_{Q_0}(\alpha_\tau C_\tau)$$

genügt. Offensichtlich reicht es dabei, Stoppregeln $\tau \geq 1$ zu betrachten. Für $s \in \{1, ..., n\}$ existiert wegen $\{\tau = s\} \in \sigma(Y_1, ..., Y_s)$ eine Menge $T_s \in \mathbb{B}^s_{|(0,\infty)^s}$ mit

$\{\tau = s\} = (Y_1, ..., Y_s)^{-1}(T_s)$, so daß sich (wegen $supp(Q_0) = \bigtimes_{i=1}^{n}\{d_i, u_i\}$) die Darstellung

$$E_{Q_0}(\alpha_\tau C_\tau) = \sum_{1\leq s\leq n} \sum_{(y_1,...,y_s)\in \bigtimes_{i=1}^{s}\{d_i,u_i\}} \alpha_s f_s(y_1, ..., y_s) \cdot \prod_{i=1}^{s} q_{y_i} \cdot 1_{T_s}(y_1, ..., y_s)$$

ergibt.

Weiter sei für $i \in \{1, ..., n\}$ und $k \in \mathbb{N}$ $\varepsilon_k := \min_{j\in\{1,...,n\}}\{\frac{u_j-d_j}{3^k} \wedge \frac{d_j}{3^k}\}$ und

i) $A^k_{d_i} := [d_i - \varepsilon_k, d_i + \varepsilon_k]$,

ii) $A^k_{u_i} := [u_i - \varepsilon_k, u_i + \varepsilon_k]$,

iii) $R^k_i := (0, \infty) \setminus (A^k_{d_i} \cup A^k_{u_i})$

sowie für $s \in \{2, ..., n\}$ und $\vec{y}_s := (y_1, ..., y_s) \in \bigtimes_{j=1}^{s}\{d_j, u_j\}$

iv) $A^k_{\vec{y}_s} := \bigtimes_{j=1}^{s} A^k_{y_j}$.

Schließlich sei

$$\widehat{\Omega} := \bigtimes_{i=1}^{n}[d_i, u_i]$$

sowie für $s \in \{1, ..., n\}$

$$\Omega_s := \bigtimes_{i=1}^{s}\{d_i, u_i\}.$$

Dann wird für $k \in \mathbb{N}$ durch

$$\begin{aligned} \tau_k(\omega) \quad := \quad & \sum_{1\leq s\leq n} \sum_{\vec{y}_s\in\Omega_s} s \cdot 1_{T_s}(\vec{y}_s) \cdot 1_{A^k_{\vec{y}_s}}\big((Y_1, ..., Y_s)(\omega)\big) \\ & + \sum_{1\leq s\leq n-1} \sum_{\vec{y}_s\in\Omega_s} n \cdot \prod_{i=1}^{s} 1_{T^c_i}(y_1, ..., y_i) \cdot 1_{A^k_{\vec{y}_s}\times R^k_{s+1}}\big((Y_1, ..., Y_{s+1})(\omega)\big) \\ & + \ n\, 1_{R^k_1}\big(Y_1(\omega)\big) \end{aligned}$$

eine Stoppregel auf $\Omega = (0, \infty)^n$ festgelegt, und für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} E_{Q_m}(\alpha_{\tau_k} C_{\tau_k}) \quad &= \quad \sum_{1\leq s\leq n} \int\limits_{\{\tau_k=s\}} \alpha_s f_s(y_1, ..., y_s)\, dQ_m^{(Y_1,...,Y_s)} \\ &\geq \quad a(k, m) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a(k,m) \quad := & \sum_{1\le s\le n} \sum_{\vec{y}_s\in\Omega_s} 1_{T_s}(\vec{y}_s)\cdot\alpha_s\cdot\inf_{A^k_{\vec{y}_s}} f_s(x_1,...,x_s)\cdot Q_m^{(Y_1,...,Y_s)}(A^k_{\vec{y}_s}) \\ & - \sum_{1\le s\le n-1} \sum_{\vec{y}_s\in\Omega_s} \prod_{i=1}^{s} 1_{T_i^c}(y_1,...,y_i)\cdot\alpha_n\cdot\sup_{\widehat{\Omega}}|f_n(x_1,...,x_n)|\cdot Q_m^{Y_{s+1}}(R^k_{s+1}) \\ & - \quad \alpha_n\cdot\sup_{\widehat{\Omega}}|f_n(x_1,...,x_n)|\cdot Q_m^{Y_1}(R^k_1). \end{aligned}$$

Aus der schwachen Konvergenzbedingung $A^\star$, dem Portmanteau-Theorem (vgl. [57], Satz 7.9) und der Stetigkeit von $f_1,...,f_n$ folgt für alle $k\in\mathbb{N}$, $s\in\{1,...,n\}$ und $(y_1,...,y_s)=\vec{y}_s\in\Omega_s$

1) $\lim\limits_{m\to\infty} Q_m^{(Y_1,...,Y_s)}(A^k_{\vec{y}_s}) = Q_0^{(Y_1,...,Y_s)}(A^k_{\vec{y}_s}) = \prod_{i=1}^s q_{y_i}$,

2) $\lim\limits_{m\to\infty} Q_m^{Y_s}(R^k_s) = 0$,

3) $\lim\limits_{k\to\infty}\inf\limits_{A^k_{\vec{y}_s}} f_s(x_1,...,x_s) = f(y_1,...,y_s)$,

4) $\sup\limits_{\widehat{\Omega}}|f_n(x_1,...,x_n)| < \infty$,

so daß sich schließlich

$$\begin{aligned} \sup_{k\in\mathbb{N}}\sup_{m\in\mathbb{N}} E_{Q_m}(\alpha_{\tau_k}C_{\tau_k}) \quad & \ge \quad \lim_{k\to\infty}\lim_{m\to\infty} a(k,m) \\ & = \quad \sum_{1\le s\le n}\sum_{\vec{y}_s\in\Omega_s} 1_{T_s}(\vec{y}_s)\cdot\alpha_s\cdot f_s(y_1,...,y_s)\cdot\prod_{i=1}^s q_{y_i} \\ & = \quad E_{Q_0}(\alpha_\tau C_\tau) \end{aligned}$$

ergibt. Für alle Stoppregeln $\tau_0\in\mathcal{T}$ erhält man daher

$$E_{Q_0}(\alpha_{\tau_0}C_{\tau_0}) \le \sup_{\tau\in\mathcal{T}}\sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau),$$

so daß zusammen mit dem Dualitätssatz 4.19 b) für die oberen Preise von amerikanischen Optionen und Theorem 4.36

$$a_0^{BM}(\underset{\sim}{C}) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_{Q_0}(\alpha_\tau C_\tau) \le \sup_{\tau\in\mathcal{T}}\sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau) = a^\star(\underset{\sim}{C}) \le a_0^{BM}(\underset{\sim}{C})$$

folgt.

□

Ist im beschränkten Fall die schwache Konvergenzbedingung $A^\star$ erfüllt, so lassen sich bereits nur aufgrund der Kenntnis von $d_1, ..., d_n$, $u_1, ..., u_n$ die oberen Preise von Finanzderivaten, deren Auszahlungsfunktionen über komponentenweise konvexe Funktionen von den Faktoren des Aktienpreisprozesses abhängen (insbesondere also von europäischen und amerikanischen Call- und Put-Optionen), berechnen. Darüberhinaus lassen sich obere Hedges mit minimalen Anfangskosten für diese Finanzderivate konstruktiv bestimmen.

Als nächstes stellt sich folglich die Frage, welche Eigenschaften von P_w notwendig bzw. hinreichend für die Gültigkeit der schwachen Konvergenzbedingung $A^\star$ sind. Insbesondere mit Hilfe von hinreichenden Kriterien wäre es u.U. möglich, für die wichtigsten Finanzderivate selbst bei unvollständiger Information über P_w sowohl obere Preise als auch obere Hedges zu diesen oberen Preisen anzugeben.

In [56] wird als generell hinreichendes Kriterium für die Gültigkeit von $A^\star$ in arbitragefreien Aktie/Bond Modellen mit bekannten Schranken $d_1, ..., d_n > 0$ und $u_1, ..., u_n < \infty$ die Bedingung

$$B^\star: \; P_w\big(\times_{k\in T}[d_k, d_k+\varepsilon]\dot{\times}\times_{k\notin T}[u_k-\varepsilon, u_k]\big) > 0 \text{ für alle } \varepsilon > 0 \text{ und } T \subset \{1, ..., n\}$$

genannt (wobei mit $\dot{\times}$ wieder die „richtige“ Reihenfolge der Faktorenmenge gemeint ist). Diese Implikation stellt sich jedoch im allgemeinen als *falsch* heraus; genauer gilt:

Satz 4.40
In einem Aktie/Bond Modell gebe es $d_1, ..., d_n > 0$ und $u_1, ..., u_n < \infty$ mit $supp(P_w^{Y_i}) \subset [d_i, u_i]$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$. Dann gilt:

Die Bedingung $B^\star$ ist notwendig, i.a. aber (selbst im Falle der Arbitragefreiheit) nicht hinreichend für die Gültigkeit von $A^\star$.

Beweis: Aus der Existenz einer Folge $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ äquivalenter Martingalmaße mit

$$Q_m \xrightarrow{w} Q_0 = \bigotimes_{i=1}^{n}(q_{u_i}\delta_{u_i} + q_{d_i}\delta_{d_i})$$

ergibt sich für $T \subset \{1, ..., n\}$, $\varepsilon > 0$ und $G_{\varepsilon,T} := \times_{k\in T}[d_k, d_k+\varepsilon)\dot{\times}\times_{k\notin T}(u_k-\varepsilon, u_k]$ aus dem Portmanteau-Theorem (vgl. [57], Satz 7.9)

$$\begin{aligned}\liminf_{m\to\infty} Q_m(G_{\varepsilon,T}) &= \liminf_{m\to\infty} Q_m\big(\times_{k\in T}(0, d_k+\varepsilon)\dot{\times}\times_{k\notin T}(u_k-\varepsilon, \infty)\big)\\ &\geq Q_0(G_{\varepsilon,T})\\ &> 0.\end{aligned}$$

Hieraus folgt $P_w\big(\bigtimes_{k\in T}[d_k, d_k+\varepsilon]\dot{\times}\bigtimes_{k\notin T}[u_k-\varepsilon, u_k]\big) > 0$ für alle $\varepsilon > 0$ und alle $T \subset \{1, ..., n\}$.

Das folgende Beispiel zeigt, daß die Bedingung $B^\star$ i.a. jedoch (selbst unter der Zusatzvoraussetzung der Arbitragefreiheit) *nicht* hinreichend für die Gültigkeit der schwachen Konvergenzbedingung $A^\star$ ist:

Beispiel 4.41
Im zugrundeliegenden Modell gelte $n = 2$, und es seien $d_1, u_1, d_2, u_2 > 0$ mit

$$0 < d_i = \min supp(P_w^{Y_i}) < 1 + r_i < u_i = \sup supp(P_w^{Y_i}) < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Weiterhin gebe es $\underline{d}_2, \underline{u}_2 \in \mathbb{R}$ mit $d_2 < \underline{d}_2 < 1 + r_2 < \underline{u}_2 < u_2$. Schließlich sei P_w festgelegt durch

$$P_w^{Y_1}(y_1) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & y_1 \in \{d_1, u_1\} \\ \frac{3}{\pi^2 m^2}, & y_1 \in \{d_1 + \frac{1+r_1-d_1}{2m} : m \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

sowie $P_w^{Y_2|Y_1=y_1}(y_2) = \frac{1}{2}$ für

$(y_1, y_2) \in \{d_1\}\times\{d_2, \underline{u}_2\} \cup \{u_1\}\times\{d_2, u_2\} \cup \{d_1 + \dfrac{1+r_1-d_1}{2m} : m \in \mathbb{N}\}\times\{\underline{d}_2, u_2\}$.

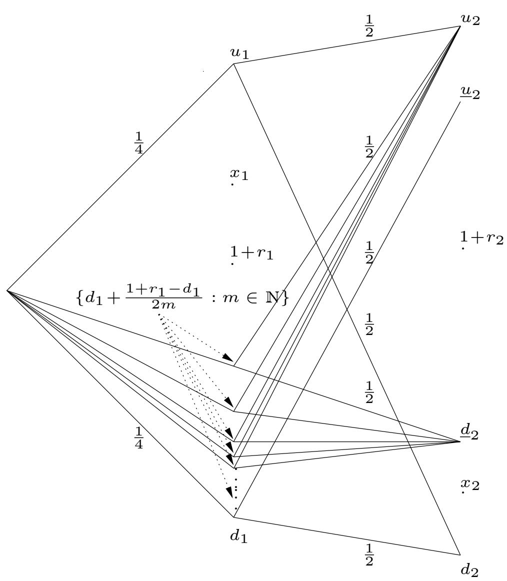

Abb. 15:
Massetragende Pfade von P_w

Dann ist die Bedingung $B^\star$, nicht jedoch die schwache Konvergenzbedingung $A^\star$ erfüllt.

Die Gültigkeit von $B^\star$ folgt dabei aus

$$P_w(\{(u_1, u_2)\}) = P_w(\{(u_1, d_2)\}) = P_w(\{(d_1, d_2)\}) = \frac{1}{8} > 0$$

und

$$P_w([d_1, d_1+\varepsilon] \times \{u_2\}) \geq \sum_{m \geq \frac{1+r_1-d_1}{2\varepsilon}} \frac{3}{2\pi^2 m^2} > 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Satz 1.10 liefert die Arbitragefreiheit des Modells und damit $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Für jedes äquivalente Martingalmaß Q liegt die Masse wegen $Q \sim P_w$ auf der Menge

$$\{u_1\}\times\{d_2,u_2\} \cup \{d_1\}\times\{d_2,\underline{u}_2\} \cup \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{d_1 + \frac{1+r_1-d_1}{2m}\}\times\{\underline{d}_2,u_2\}.$$

Aus $E_Q(Y_1) = 1 + r_1$ folgt nun

$$\begin{aligned} Q^{Y_1}(\{d_1\}) &= \frac{u_1 - (1+r_1) - \sum_{m\in\mathbb{N}}(d_1+\frac{1+r_1-d_1}{2m}) \cdot Q^{Y_1}(\{d_1 + \frac{1+r_1-d_1}{2m}\})}{u_1 - d_1} \\ &\leq \frac{u_1 - (1+r_1)}{u_1 - d_1}, \end{aligned}$$

und aus $E_Q(Y_2|Y_1 = y_1) = 1 + r_2$ $P_w^{Y_1}$-f.s. ergibt sich

$$1 + r_2 = E_Q(Y_2|Y_1 = d_1) = \underline{u}_2 Q^{Y_2|Y_1=d_1}(\{\underline{u}_2\}) + d_2 Q^{Y_2|Y_1=d_1}(\{d_2\}),$$

woraus zusammen mit $Q^{Y_2|Y_1=d_1}(\{\underline{u}_2\}) + Q^{Y_2|Y_1=d_1}(\{d_2\}) = 1$ schließlich

$$Q^{Y_2|Y_1=d_1}(\{\underline{u}_2\}) = \frac{1 + r_2 - d_2}{\underline{u}_2 - d_2} = 1 - Q^{Y_2|Y_1=d_1}(\{d_2\})$$

folgt. Für jedes $(x_1, x_2) \in (d_1, u_1) \times (d_2, \underline{d}_2)$ (vgl. Abb. 15) erfüllt die Verteilungsfunktion F_Q von Q die Ungleichung

$$\begin{aligned} F_Q(x_1, x_2) &= Q^{(Y_1,Y_2)}(\{(d_1, d_2)\}) \\ &= Q^{Y_1}(\{d_1\}) \cdot Q^{Y_2|Y_1=d_1}(\{d_2\}) \\ &\leq \frac{u_1 - (1+r_1)}{u_1 - d_1} \cdot \frac{\underline{u}_2 - (1+r_2)}{\underline{u}_2 - d_2} \\ &< \frac{u_1 - (1+r_1)}{u_1 - d_1} \cdot \frac{u_2 - (1+r_2)}{u_2 - d_2} \\ &= F_{Q_0}(x_1, x_2), \end{aligned}$$

wobei F_{Q_0} die Verteilungsfunktion des äquivalenten Martingalmaßes

$$Q_0 = \frac{1 + r_1 - d_1}{u_1 - d_1}\delta_{u_1} + \frac{u_1 - (1+r_1)}{u_1 - d_1}\delta_{d_1}$$

aus dem Binomialmodell mit Parametern d_1, d_2, u_1, u_2, r_1 und r_2 bezeichne. Für jede Folge $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von äquivalenten Martingalmaßen ergibt sich folglich

$$F_{Q_m}(x_1, x_2) \leq \frac{u_1 - (1+r_1)}{u_1 - d_1} \cdot \frac{\underline{u}_2 - (1+r_2)}{\underline{u}_2 - d_2} < F_{Q_0}(x_1, x_2)$$

für alle $(x_1, x_2) \in (d_1, u_1) \times (d_2, \underline{d}_2) \subset \mathcal{C}(F_{Q_0})$, d.h. $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ kann nicht die

Bedingung

$$\lim_{m\to\infty} F_{Q_m}(x_1,x_2) = F_{Q_0}(x_1,x_2) \quad \text{für alle } (x_1,x_2) \in \mathcal{C}(F_{Q_0})$$

erfüllen.

□

Setzt man allerdings zusätzlich $P_w \sim \bigotimes P_w^{Y_i}$ voraus, so erweist sich $B^\star$ doch als notwendiges *und* hinreichendes Kriterium:

Satz 4.42
Gilt in der Situation von Theorem 4.33 bzw. 4.36 zusätzlich $P_w \sim \bigotimes P_w^{Y_i}$, so ist die Bedingung

$$A^\star : \begin{cases} \textit{Die Menge } \mathcal{P} \textit{ äquivalenter Martingalmaße enthält} \\ \textit{eine Folge } (Q_m)_{m\in\mathbb{N}} \textit{ mit} \\ \quad Q_m \xrightarrow{w} Q_0 = \bigotimes_{i=1}^n (q_{u_i}\delta_{u_i} + q_{d_i}\delta_{d_i}), \\ \textit{wobei } q_{u_i} = \frac{1+r_i-d_i}{u_i-d_i} = 1 - q_{d_i} \textit{ gilt, } i = 1,...,n. \end{cases}$$

genau dann erfüllt, wenn

$$B^\star :\ P_w\Big(\bigtimes_{k\in T}[d_k, d_k+\varepsilon] \dot{\times} \bigtimes_{k\notin T}[u_k-\varepsilon, u_k]\Big) > 0 \textit{ für alle } \varepsilon > 0 \textit{ und } \ T \subset \{1,...,n\}$$

gilt.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß aus der Gültigkeit von $B^\star$ diejenige von $A^\star$ folgt; mit Satz 4.40 ergibt sich dann die Äquivalenz der beiden Bedingungen.

Aus $B^\star$ folgt zunächst $P_w^{Y_i}([d_i, d_i+\varepsilon]) > 0$ und $P_w^{Y_i}([u_i-\varepsilon, u_i]) > 0$ für alle $\varepsilon > 0$ und $i \in \{1,...,n\}$, d.h. $d_i, u_i \in supp(P_w^{Y_i})$. Aus Lemma 2.6 folgt für jedes $i \in \{1,...,n\}$ die Existenz einer Folge $(Q_{i,m})_{m\in\mathbb{N}}$ von W-Maßen mit

i) $Q_{i,m} \sim P_w^{Y_i} \ \ \forall\, m \in \mathbb{N}$,

ii) $E_{Q_{i,m}}(id) = 1 + r_i \ \ \forall\, m \in \mathbb{N}$,

iii) $Q_{i,m} \xrightarrow{w} (q_{u_i}\delta_{u_i} + q_{d_i}\delta_{d_i})$, wobei $q_{u_i} = \frac{1+r_i-d_i}{u_i-d_i} = 1 - q_{d_i}$ gilt.

Dann liefert $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $Q_m := \bigotimes_{i=1}^n Q_{i,m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ die gesuchte Folge äquivalenter Martingalmaße mit $Q_m \xrightarrow{w} Q_0$.

□

Als Folgerung von Theorem 4.39 und Satz 4.42 ergibt sich:

Korollar 4.43
Im zugrundeliegenden Aktie/Bond Modell gelte $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^{n} P_w^{Y_i}$ *und*

$$0 < d_i := \min supp(P_w^{Y_i}) < 1 + r_i < u_i := \sup supp(P_w^{Y_i}) < \infty,$$

$i = 1, ..., n$. *Dann gelten für die oberen Preise der in Satz 4.30 und Theorem 4.36 betrachteten Finanzderivate die Gleichungen*

$$a^\star(\underset{\sim}{C}) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i) = E_{Q_0}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i)$$

bzw.

$$a^\star(\underset{\sim}{C}) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_{Q_0}(\alpha_\tau C_\tau),$$

wobei

$$Q_0 = \bigotimes_{i=1}^{n} (\frac{1 + r_i - d_i}{u_i - d_i} \cdot q_{u_i} + \frac{d_i - (1 + r_i)}{u_i - d_i} \cdot q_{d_i})$$

das eindeutig bestimmte äquivalente Martingalmaß des äußeren Binomialmodells ist.

Bemerkung 4.44
In der Situation von Korollar 4.43 existiert eine Folge $(Q_m)_{m \in \mathbb{N}}$ *äquivalenter Martingalmaße aus der Menge*

$$\widehat{\mathcal{P}} := \{Q \in \mathcal{P} : Q = \bigotimes_{i=1}^{n} Q^{Y_i}\}$$

mit

$$a^\star(\underset{\sim}{C}) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i) = \sup_{m \in \mathbb{N}} E_{Q_m}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i)$$

bzw.

$$a^\star(\underset{\sim}{C}) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_{Q_m}(\alpha_\tau C_\tau).$$

Die Bedingung $A^\star$ liefert ein hinreichendes Kriterium dafür, daß die oberen Preise von Finanzderivaten mit komponentenweise konvexen Auszahlungsfunktionen mit ihren fairen Preisen im zugehörigen äußeren Binomialmodell übereinstimmen, und daß die dort konstruktiv bestimmten superreplizierenden Handelsstrategien die Anfangskosten unter allen oberen Hedges minimieren.

Insbesondere lassen sich in demjenigen Fall, daß die Eigenschaft $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^{n} P_w^{Y_i}$ und die Lage der minimalen und maximalen Elemente der Träger der Faktoren die *einzigen* verfügbaren Informationen über P_w darstellen, sowohl die oberen Preise als auch obere Hedges mit minimalen Anfangskosten für Finanzderivate mit komponentenweise konvexen Auszahlungsfunktionen bestimmen, zu denen insbesondere amerikanische und europäische Call- und Put-Optionen zählen.

4.3 Definition des unteren Preises

Die Definitionen von oberen Preisen und oberen Hedges wurden durch die Intention des *Verkäufers* motiviert, mit dem Verkaufserlös von Finanzderivaten Handelsstrategien zu erwerben, mit deren Hilfe alle entstehenden Ansprüche ohne weitere Zuzahlungen abgedeckt werden können. Der obere Preis $a^\star(\underset{\sim}{C})$ eines Claims $\underset{\sim}{C}$ bildet dabei aus Sicht des *Verkäufers* die Schranke zwischen Preisen $a > a^\star(\underset{\sim}{C})$, die ihm Arbitragemöglichkeiten eröffnen, und Preisen $a < a^\star(\underset{\sim}{C})$, die ihn keinen risikolosen Profit erwirtschaften lassen.

Bei der Festlegung von *unteren Preisen* und *unteren Hedges* agiert man aus der Sichtweise des *Käufers*: Wenn zu einem Finanzderivat $\underset{\sim}{C}$ eine Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ mit $H_n = 0$ gefunden werden kann, deren Anfangspreis mit dem Verkaufspreis des Finanzderivates übereinstimmt, und deren Entnahmen nicht größer sind als die Auszahlungen aus dem Claim, so wäre es für den Käufer sinnvoll, im Zeitpunkt $k = 0$ ein short-selling in $\underset{\sim}{H}$ durchzuführen und $\underset{\sim}{C}$ zu erwerben. Die aus der short-position entstehenden Ansprüche $\delta_1(\underset{\sim}{H}), ..., \delta_{n-1}(\underset{\sim}{H})$ kann der Käufer dann mit Hilfe der Auszahlungen $C_1, ..., C_{n-1}$ erfüllen, und unter Verwendung des Erlöses C_n kann er die short-position ausgleichen. Falls die Handelsstrategie den Claim nicht exakt repliziert, ergibt sich so für den Käufer eine Arbitragemöglichkeit.

Analog zur Festlegung des oberen Preises soll der untere Preis $a_\star(\underset{\sim}{C})$ eines Claims $\underset{\sim}{C}$ die Schranke bilden zwischen Preisen $a < a_\star(\underset{\sim}{C})$, die dem *Käufer* Arbitragemöglichkeiten eröffnen, und jenen $a > a_\star(\underset{\sim}{C})$, die ihn keinen risikolosen Profit erwirtschaften lassen.

Die allgemeine Definition des unteren Preises eines Finanzderivates mit terminaler Auszahlung C_n

$$a_\star(C_n) := \sup \left\{ x \geq 0 : \begin{array}{l} \text{es existiert eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \text{ mit} \\ H_0^t S_0 = x,\ H_n^t S_n \leq C_n \ P_w\text{-f.s.} \end{array} \right\}$$

aus §1b von Kapitel V in [63] erweist sich wieder als ungeeignet für das Aktie/Bond Modell, und analog zur Argumentation in Abschnitt 4.1 stellt sich *Selbstfinanzierung* als (im wesentlichen einzige) sinnvolle Zusatzforderung heraus.

Definition 4.45
In einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell wird der untere Preis eines Finanzderivates mit terminaler Auszahlung C_n festgelegt durch

$$\begin{aligned} a_\star(C_n) &:= \sup\left\{x \in \mathbb{R}\colon \begin{array}{l} \textit{es ex. eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \textit{ mit } H_0^t S_0 = x,\ H_n = 0, \\ \delta_i(\underset{\sim}{H}) = 0\ P_w\textit{-f.s.},\ 1 \le i \le n-1,\ \delta_n(\underset{\sim}{H}) \le C_n\ P_w\textit{-f.s.} \end{array}\right\} \\ &= \sup\left\{x \in \mathbb{R}\colon \begin{array}{l} \textit{es ex. eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \textit{ mit } H_0^t S_0 = x,\ H_n = 0, \\ \delta_i(\underset{\sim}{H}) \le 0\ P_w\textit{-f.s.},\ 1 \le i \le n-1,\ \delta_n(\underset{\sim}{H}) \le C_n\ P_w\textit{-f.s.} \end{array}\right\}, \end{aligned}$$

wobei $\sup\emptyset := -\infty$ *sei.*

Diese Definition läßt sich wieder auf Finanzderivate mit regelmäßigen Auszahlungen übertragen:

Definition 4.46
In einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell wird der untere Preis eines Claims $\underset{\sim}{C} = (C_1, ..., C_n)$ *mit regelmäßigen Auszahlungen definiert durch*

$$\begin{aligned} a_\star(\underset{\sim}{C}) &:= \sup\left\{x \in \mathbb{R}\colon \begin{array}{l} \textit{es ex. eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \textit{ mit } H_0^t S_0 = x,\ H_n = 0 \\ \textit{und } \delta_i(\underset{\sim}{H}) \le C_i\ P_w\textit{-f.s.},\ 1 \le i \le n \end{array}\right\} \\ &= \sup\left\{x \in \mathbb{R}\colon \begin{array}{l} \textit{es ex. eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \textit{ mit } H_0^t S_0 = x, \\ H_n = 0,\ \delta_i(\underset{\sim}{H}) = 0\ P_w\textit{-f.s.},\ 1 \le i \le n-1, \\ \textit{und } \delta_n(\underset{\sim}{H}) \le \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i B_n\ P_w\textit{-f.s.} \end{array}\right\}, \end{aligned}$$

wobei $\sup\emptyset := -\infty$ *sei.*

Handelsstrategien $\underset{\sim}{H}$ *mit* $\delta_i(\underset{\sim}{H}) \le C_i$ P_w*-f.s. für alle* $1 \le i \le n$ *und* $H_n = 0$ *werden als unterer Hedge von* $\underset{\sim}{C}$ *bzw. als subreplizierend bezeichnet.*

Die Aussagen von Satz 4.13 und 4.14 übertragen sich direkt auf die unteren Preise von Finanzderivaten mit regelmäßigen Auszahlungen. Die Abbildung

$$\underset{\sim}{H} \mapsto -\underset{\sim}{H} = (-H_0, ..., -H_n)$$

liefert nämlich eine Bijektion zwischen der Menge der unteren Hedges für $\underset{\sim}{C}$ und der Menge der oberen Hedges für $-\underset{\sim}{C} = (-C_1, ..., -C_n)$; folglich ist die Existenz eines unteren Hedges für $\underset{\sim}{C}$ mit Anfangspreis $a_\star(\underset{\sim}{C})$ äquivalent zur Existenz eines oberen Hedges für $-\underset{\sim}{C} = (-C_1, ..., -C_n)$ mit Anfangspreis $a^\star(-\underset{\sim}{C}) = -a_\star(\underset{\sim}{C})$.

Darüberhinaus ist $\sum_{i=1}^n -\alpha_i C_i$ genau dann P_w-f.s. nach unten beschränkt und $\sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n -\alpha_i C_i)$ endlich, wenn $\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i$ P_w-f.s. nach oben beschränkt und $\inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i)$ endlich ist.

Satz 4.47
Sei $\underset{\sim}{C} = (C_1, ..., C_n)$ ein Finanzderivat mit regelmäßigen Auszahlungen in einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell. Weiter sei $\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i$ P_w-f.s. nach oben beschränkt. Dann gilt:

a) $a_\star(\underset{\sim}{C})$ ist genau dann endlich, wenn $\inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i)$ endlich ist.

b) Ist eine der beiden äquivalenten Bedingungen aus a) erfüllt, so gilt:

i) Es existiert ein unterer Hedge für $\underset{\sim}{C}$ mit Anfangspreis

$$\underline{a}(\underset{\sim}{C}) = \inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i).$$

ii) **Lower Hedging Duality***:*

$$\inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i) = \sup\{H_0^t S_0 : \ \underset{\sim}{H} \textit{ ist ein unterer Hedge für } \underset{\sim}{C}\}.$$

Die Voraussetzung der Existenz einer oberen Schranke für $\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i$ in Satz 4.47 ist bei Modellen mit unbeschränkten Aktienkursen ungünstig, da in diesen für viele Finanzderivate (wie z.B. europäische Call-Optionen) die Auszahlungsfunktionen nach *unten*, nicht aber nach *oben* beschränkt sind. Wünschenswert wäre daher eine Version der *lower hedging duality* für Finanzderivate $\underset{\sim}{C}$, bei denen $\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i$ P_w-f.s. nach *unten* beschränkt ist. Diese erhält man zumindest unter der Zusatzvoraussetzung $a^\star(\underset{\sim}{C}) < \infty$:

Satz 4.48 (Lower Hedging Duality)
Sei $\underset{\sim}{C} = (C_1, ..., C_n)$ ein Finanzderivat mit regelmäßigen Auszahlungen in einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell. Weiter sei $\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i$ P_w-f.s. nach unten beschränkt und $a^\star(\underset{\sim}{C}) < \infty$. Dann existiert ein unterer Hedge für $\underset{\sim}{C}$ mit Anfangspreis $a_\star(\underset{\sim}{C})$, und es gilt

$$\inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i) = \sup\{H_0^t S_0 : \ \underset{\sim}{H} \textit{ ist ein unterer Hedge für } \underset{\sim}{C}\}.$$

Beweis: Die Grundidee stammt aus dem Beweis der lower hedging duality für amerikanische Optionen in [25] (Seite 293 f.). Gemäß Satz 4.13 existiert ein oberer Hedge $\underset{\sim}{\overline{H}}$ für $\underset{\sim}{C}$ mit Anfangspreis $\overline{H}_0^t S_0 = a^\star(\underset{\sim}{C}) = \sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i) \in \mathbb{R}$. Der Claim $\underset{\sim}{\widehat{C}}$ mit

$$\widehat{C}_i = \delta_i(\underset{\sim}{\overline{H}}) - C_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

besitzt dann die Eigenschaften

i) $\sum_{i=1}^n \alpha_i \widehat{C}_i \geq 0 \;\; P_w$-f.s.,

ii) $E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i \widehat{C}_i) = E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_i(\underset{\sim}{\overline{H}})) - E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i)$
$= \overline{H}_0^t S_0 - E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i)$ für alle $Q \in \mathcal{P}$,

und damit $\sup\limits_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i \widehat{C}_i) = \overline{H}_0^t S_0 - \inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i) < \infty$.

Aus i) und ii) folgt zusammen mit Satz 4.13 die Existenz eines oberen Hedges $\underset{\sim}{\widehat{H}}$ für den Claim $\underset{\sim}{\widehat{C}}$ mit Anfangspreis

$$\widehat{H}_0^t S_0 = a^\star(\underset{\sim}{\widehat{C}}) = \sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i \widehat{C}_i).$$

Schließlich besitzt die Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ mit $H_i = \overline{H}_i - \widehat{H}_i$ die Eigenschaften

1) $H_0^t S_0 = \overline{H}_0^t S_0 - \widehat{H}_0^t S_0 = \inf\limits_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i)$,

2) $\delta_i(\underset{\sim}{H}) = \delta_i(\underset{\sim}{\overline{H}}) - \delta_i(\underset{\sim}{\widehat{H}}) \leq \delta_i(\underset{\sim}{\overline{H}}) - \widehat{C}_i = C_i \quad P_w$-f.s., $1 \leq i \leq n$,

3) $H_n = \overline{H}_n - \widehat{H}_n = 0$

und bildet daher einen unteren Hedge für $\underset{\sim}{C}$ mit Anfangspreis $\inf\limits_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i)$. Hieraus folgt sofort die Ungleichung

$$\inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i) \leq a_\star(\underset{\sim}{C}).$$

Da $\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i$ gemäß Voraussetzung P_w-f.s. nach unten beschränkt ist, ist die Menge der unteren Hedges nicht-leer. Sei daher $\underset{\sim}{H}$ ein beliebiger unterer Hedge für $\underset{\sim}{C}$ und Q ein beliebiges äquivalentes Martingalmaß. Dann folgt aus $\delta_i(\underset{\sim}{H}) \leq C_i$ P_w-f.s. für alle $i \in \{1, ..., n\}$ die Ungleichung

$$H_0^t S_0 = E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_i(\underset{\sim}{H})) \leq E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i),$$

und damit

$$a_\star(\underset{\sim}{C}) \le \inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i).$$

Bei der Gleichheit $H_0^t S_0 = E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_i(\underset{\sim}{H}))$ geht dabei ein, daß $(M_k)_{k\in\{0,...,n\}}$ mit $M_0 = H_0^t S_0$ und $M_k = H_0^t S_0 + \sum_{i=1}^k H_{i-1}^t(\alpha_i S_i - \alpha_{i-1} S_{i-1}),\ k = 1, ..., n$, als Martingaltransformation ein lokales Martingal bezüglich Q bildet, welches wegen $H_0^t S_0 \in \mathbb{R}$ und

$$E_Q(\sum_{i=1}^n \delta_i(\underset{\sim}{H})) \le E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i) \le a^\star(\underset{\sim}{C}) < \infty$$

(und somit $E_Q(M_n^+) < \infty$) sogar ein Martingal darstellt.

□

Zwischen oberen sowie unteren Preisen und Hedges bestehen bei Finanzderivaten mit regelmäßigen Auszahlungen die Symmetrieeigenschaften

- $a^\star(\underset{\sim}{C}) = -a_\star(-\underset{\sim}{C})$,
- $\underset{\sim}{H}$ ist genau dann ein oberer Hedge für $\underset{\sim}{C}$, wenn $-\underset{\sim}{H}$ ein unterer Hedge für $-\underset{\sim}{C}$ ist,

so daß sich die Definitionen 4.45 und 4.46 sowie Satz 4.47 direkt aus ihren Pendants in Abschnitt 4.1 herleiten ließen.

Bei amerikanischen Optionen stellt sich dieser Transfer als schwieriger heraus: „However, a difficulty is created by the basic asymmetry of the hedging problem for American options: The seller of $\underset{\sim}{C}$ must hedge against *all* possible exercise strategies, while the buyer must find only *one* suitable stopping time.“ (aus [25], Seite 293).

Die Festlegung des unteren Preises als Supremum aller Preise, die einen risikolosen Profit für den Käufer ermöglichen, stellt sich jedoch wieder als geeigneter Ansatz heraus (vgl. [25], Seite 293):

Wenn zu einer amerikanischen Option mit Auszahlungsprozeß $\underset{\sim}{C}$ eine Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ mit P_w-f.s. nicht-negativen Entnahmen $\delta_1(\underset{\sim}{H}), ..., \delta_n(\underset{\sim}{H})$ und eine Ausübungsstrategie τ existiert, so daß der Anfangspreis $H_0^t S_0$ mit dem Verkaufspreis der Option übereinstimmt und die Ungleichung $H_\tau^t S_\tau \le C_\tau$ P_w-f.s. erfüllt ist, so wäre es sinnvoll, die Option im Anfangszeitpunkt zu erwerben und ein short-selling in $\underset{\sim}{H}$ durchzuführen. Durch Ausübung der Option im „Zeitpunkt" τ läßt sich die short-position ohne weitere Zuzahlungen ausgleichen. Wenn die Entnahmen nicht alle P_w-f.s. Null sind oder $H_\tau^t S_\tau$ den realisierten Claim C_τ nicht exakt repliziert, so ergibt sich schließlich eine Arbitragemöglichkeit.

Ein naheliegender Ansatz für die Definition des unteren Preises einer amerikanischen Option ist daher gegeben durch:

Definition 4.49 (vgl. [25], Seite 293)
In einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell wird der untere Preis einer amerikanischen Option mit Auszahlungsprozeß $\underset{\sim}{C}$ festgelegt durch

$$\begin{aligned} a_\star(\underset{\sim}{C}) &:= \sup\left\{ x\in\mathbb{R} : \begin{array}{l} \text{es existiert eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \text{ und eine} \\ \text{Stoppregel } \tau \text{ mit } \delta_i(\underset{\sim}{H}) \le 0 \ P_w\text{-f.s.}, 1\le i\le n, \\ \text{und } H_\tau^t S_\tau \le C_\tau \ P_w\text{-f.s.} \end{array} \right\} \\ &= \sup\left\{ x\in\mathbb{R} : \begin{array}{l} \text{es existiert eine Handelsstrategie } \underset{\sim}{H} \text{ und eine} \\ \text{Stoppregel } \tau \text{ mit } \delta_i(\underset{\sim}{H}) = 0 \ P_w\text{-f.s.}, 1\le i\le n, \\ \text{und } H_\tau^t S_\tau \le C_\tau \ P_w\text{-f.s.} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Handelsstrategien $\underset{\sim}{H}$, zu denen eine Stoppregel $\tau \in \mathcal{T}$ existiert mit $H_\tau^t S_\tau \le C_\tau$ P_w-f.s., werden als untere Hedges von $\underset{\sim}{C}$ bezeichnet.

Die Frage nach der Existenz eines unteren Hedges zum unteren Preis einer amerikanischen Option, bei der die Auszahlungen P_w-f.s. nach *unten* beschränkt sind, läßt sich im Fall eines endlichen oberen Preises wieder positiv beantworten:

Satz 4.50 (Lower Hedging Duality) ([25], Theorem 6.41 und Theorem 7.14)
In einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell sei $\underset{\sim}{C}$ der Auszahlungsprozeß einer amerikanischen Option. Weiter seien $C_0, ..., C_n$ P_w-f.s. nach unten beschränkt, und es sei

$$a^\star(\underset{\sim}{C}) = \sup_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau) < \infty.$$

Dann existiert ein unterer Hedge für $\underset{\sim}{C}$ mit Anfangspreis $a_\star(\underset{\sim}{C})$, und es gilt

$$a_\star(\underset{\sim}{C}) = \inf_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau).$$

Beweis: Die Existenz eines unteren Hedges mit Anfangspreis $\inf\limits_{Q\in\mathcal{P}}\sup\limits_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau)$ ergibt sich wie folgt analog zum Beweis von Theorem 7.14 in [25]:

Sei $\underset{\sim}{U} = (U_k)_{k\in\{0,...,n\}}$ *Snell's lower envelope* zum abdiskontierten Auszahlungsprozeß $(\alpha_k C_k)_{k\in\{0,...,n\}}$, definiert durch

$$\begin{aligned} U_k &= \operatorname*{ess\,inf}_{Q\in\mathcal{P}} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\geq k} E_Q(\alpha_\tau C_\tau|\mathcal{F}_k), \quad n\geq k\geq 1, \\ U_0 &= \inf_{Q\in\mathcal{P}}\sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau), \end{aligned}$$

und sei

$$\tau_\star := \inf\{k\in\{0,...,n\} : U_k = \alpha_k C_k\}.$$

Diese Stoppregel erfüllt gemäß Theorem 6.42 $\inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_{\tau_\star} C_{\tau_\star}) = U_0$.

Nach Satz 4.19 existiert ein oberer Hedge $\underset{\sim}{\overline{H}}$ für $\underset{\sim}{C}$ mit Anfangspreis $a^\star(\underset{\sim}{C})$. Man betrachte nun die amerikanische Option mit Auszahlungsprozeß $(\widehat{C}_k)_{k\in\{0,...,n\}}$, festgelegt durch

$$\widehat{C}_k = (\overline{H}_k^t S_k - C_k)1_{\{\tau_\star=k\}} \geq 0, \quad k=0,...,n.$$

Eine erneute Anwendung von Satz 4.19 liefert die Existenz eines oberen Hedges $\underset{\sim}{\widehat{H}}$ für $\underset{\sim}{\widehat{C}}$ mit Anfangspreis

$$\begin{aligned} \widehat{H}_0^t S_0 &= \sup_{Q\in\mathcal{P}}\sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau \widehat{C}_\tau) \\ &= \sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_{\tau_\star}\widehat{C}_{\tau_\star}) \\ &= \overline{H}_0^t S_0 - \inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_{\tau_\star} C_{\tau_\star}) \\ &= \overline{H}_0^t S_0 - \inf_{Q\in\mathcal{P}}\sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau). \end{aligned}$$

Die Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ mit $H_k = \overline{H}_k - \widehat{H}_k$, $k=1,...,n$, besitzt dann die Eigenschaften

i) $H_0^t S_0 = \overline{H}_0^t S_0 - \widehat{H}_0^t S_0 = \inf\limits_{Q\in\mathcal{P}}\sup\limits_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau)$,

ii) $H_{\tau_\star}^t S_{\tau_\star} = \overline{H}_{\tau_\star}^t S_{\tau_\star} - \widehat{H}_{\tau_\star}^t S_{\tau_\star} \leq \overline{H}_{\tau_\star}^t S_{\tau_\star} - \widehat{C}_{\tau_\star} = C_{\tau_\star} \quad P_w$-f.s.

und bildet damit einen unteren Hedge für $\underset{\sim}{C}$ mit Anfangspreis $\inf\limits_{Q\in\mathcal{P}} \sup\limits_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau)$, so daß

$$a_\star(\underset{\sim}{C}) \geq \inf_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau)$$

folgt. Für den Beweis der Ungleichung $a_\star(\underset{\sim}{C}) \leq \inf\limits_{Q\in\mathcal{P}} \sup\limits_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau)$ und der Dualität

$$\inf_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau)$$

sei auf den Beweis von Theorem 7.14 (b) und Theorem 6.41 in [25] verwiesen.

□

Die Definition des unteren Preises einer amerikanischen Option erweist sich folglich als sinnvoll; unter den Voraussetzungen aus Satz 4.50 bildet er die Grenze $\inf\limits_{Q\in\mathcal{P}} \sup\limits_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau)$ zwischen arbitragefreien und arbitragebehafteten Preisen (vgl. Satz 1.22).

Die Existenznachweise von unteren Hedges zu den unteren Preisen von Finanzderivaten in den Beweisen von Satz 4.48 und 4.50 weisen wieder den Nachteil auf, daß sie nicht konstruktiv sind.

Im Hinblick auf die Ergebnisse aus Abschnitt 4.2 stellt sich nun die Frage, ob sich zumindest leicht zu berechnende untere Schranken für die unteren Preise angeben lassen, zu denen explizit subreplizierende Handelsstrategien bestimmt werden können, und ob unter einer geeigneten schwachen Konvergenzbedingung sogar die unteren Preise und die zugehörigen unteren Hedges auch bei unvollständiger Information über P_w konkret ermittelt werden können.

4.4 Schranken für die unteren Preise von Finanzderivaten mit komponentenweise konvexen Auszahlungsfunktionen

4.4.1 Universelle untere Arbitragegrenzen

Für Finanzderivate mit regelmäßigen Auszahlungen, welche über komponentenweise konvexe Funktionen von den Faktoren des Aktienpreisprozesses abhängen, lassen sich universelle untere Schranken für die unteren Preise angeben:

Satz 4.51
In einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell sei $\underset{\sim}{C}$ *ein Finanzderivat mit regelmäßigen Auszahlungen, wobei es für jedes* $k \in \{1, ..., n\}$ *eine komponentenweise konvexe Funktion* f_k *gebe mit* $C_k = f_k(Y_1, ..., Y_k)$*. Dann existiert ein unterer Hedge für* $\underset{\sim}{C}$ *mit Anfangspreis* $\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(1+r_1, ..., 1+r_k)$*; folglich gilt die Ungleichung*

$$a_\star(\underset{\sim}{C}) \geq \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(1+r_1, ..., 1+r_k).$$

Zum Beweis von Satz 4.51 wird zunächst eine Hilfsaussage benötigt:

Lemma 4.52 (vgl. [52], Seite 213 und 227 f.)
Jede konvexe Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist rechts- und linksseitig differenzierbar, und die rechts- und linksseitigen Ableitungen* D^+f *und* D^-f *sind meßbar und besitzen die Eigenschaften*

1) $D^-f(x) \leq D^+f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$,

2) $D^+f(x) \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \quad \forall\, x, z \in \mathbb{R}$ *mit* $z > x$,

3) $D^-f(x) \geq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \quad \forall\, x, z \in \mathbb{R}$ *mit* $z < x$.

Beweis von Satz 4.51: Wegen $a_\star(\underset{\sim}{C}) = a_\star(0, ..., 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i B_n)$ kann o.B.d.A. $C_1 = ... = C_{n-1} = 0$ angenommen werden (andernfalls ersetze man f_n durch die komponentenweise konvexe Funktion $g_n(y_1, ..., y_n) := \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(y_1, ..., y_k) B_n$).

Für $i \in \{1, ..., n\}$ definiere man $\rho_i := 1 + r_i$ sowie D_i^+ und D_i^- durch

$$D_i^+ g_n(x_1, ..., x_n) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{g_n(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_n) - g_n(x_1, ..., x_n)}{h}$$

und

$$D_i^- g_n(x_1, ..., x_n) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{g_n(x_1, ..., x_{i-1}, x_i - h, x_{i+1}, ..., x_n) - g_n(x_1, ..., x_n)}{h}.$$

Weiter sei die Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ festgelegt durch $H_n = 0$ und

$$\begin{aligned}
H_{0,1} &= \frac{D_1^+ g_n(\rho_1, ..., \rho_n)}{A_0 \prod_{k=2}^n \rho_k}, \\
H_{0,2} &= \frac{g_n(\rho_1, ..., \rho_n)}{\prod_{k=1}^n \rho_k} - \frac{D_1^+ g_n(\rho_1, ..., \rho_n)}{\prod_{k=2}^n \rho_k}, \\
H_{i,1} &= \frac{D_{i+1}^+ g_n(Y_1, ..., Y_i, \rho_{i+1}, ..., \rho_n)}{A_0 \cdot \prod_{k=1}^i Y_k \cdot \prod_{k=i+2}^n \rho_k}, \\
H_{i,2} &= \frac{g_n(Y_1, ..., Y_i, \rho_{i+1}, ..., \rho_n)}{\prod_{k=1}^n \rho_k} - \frac{D_{i+1}^+ g_n(Y_1, ..., Y_i, \rho_{i+1}, ..., \rho_n)}{\prod_{k=1}^i \rho_k \cdot \prod_{k=i+2}^n \rho_k},
\end{aligned}$$

$i = 1, ..., n-1$.

Dann besitzt $\underset{\sim}{H}$ den Anfangspreis

$$H_0^t S_0 = \frac{g_n(\rho_1, ..., \rho_n)}{\prod_{k=1}^n \rho_k} = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(\rho_1, ..., \rho_k) B_n,$$

und zum Zeitpunkt $i \in \{1, ..., n-1\}$ gilt

$$H_i^t S_i = \frac{g_n(Y_1, ..., Y_i, \rho_{i+1}, ..., \rho_n)}{\prod_{k=i+1}^n \rho_k}.$$

Sei nun $\omega \in \Omega$ und $y_1 := Y_1(\omega)$.

Im Fall $y_1 = 1 + r_1$ gilt dann

$$\begin{aligned}
H_0^t S_1(\omega) &= H_{0,1} A_0 \rho_1 + H_{0,2} \rho_1 \\
&= \frac{g_n(\rho_1, ..., \rho_n)}{\prod_{k=2}^n \rho_k} \\
&= \frac{g_n(Y_1(\omega), \rho_2, ..., \rho_n)}{\prod_{k=2}^n \rho_k}.
\end{aligned}$$

Für $y_1 \in (\rho_1, u_1]$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
H_0^t S_1(\omega) &= H_{0,1} A_0 y_1 + H_{0,2} \rho_1 \\
&= \frac{g_n(\rho_1, ..., \rho_n)}{\prod_{k=2}^n \rho_k} + \frac{D_1^+ g_n(\rho_1, ..., \rho_n)}{\prod_{k=2}^n \rho_k} \cdot (y_1 - \rho_1) \\
&\overset{4.52}{\leq} \frac{g_n(\rho_1, ..., \rho_n)}{\prod_{k=2}^n \rho_k} + \frac{g_n(y_1, \rho_2, ..., \rho_n) - g_n(\rho_1, ..., \rho_n)}{\prod_{k=2}^n \rho_k} \\
&= \frac{g_n(Y_1(\omega), \rho_2, ..., \rho_n)}{\prod_{k=2}^n \rho_k},
\end{aligned}$$

und im Fall $y_1 \in [d_1, \rho_1)$ gilt schließlich

$$\begin{aligned} H_0^t S_1(\omega) &= H_{0,1} A_0\, y_1 + H_{0,2}\, \rho_1 \\ &= \frac{g_n(\rho_1, ..., \rho_n)}{\prod_{k=2}^n \rho_k} - \frac{D_1^+ g_n(\rho_1, ..., \rho_n)}{\prod_{k=2}^n \rho_k} \cdot (\rho_1 - y_1) \\ &\overset{4.52}{\leq} \frac{g_n(\rho_1, ..., \rho_n)}{\prod_{k=2}^n \rho_k} - \frac{D_1^- g_n(\rho_1, ..., \rho_n)}{\prod_{k=2}^n \rho_k} \cdot (\rho_1 - y_1) \\ &\overset{4.52}{\leq} \frac{g_n(\rho_1, ..., \rho_n)}{\prod_{k=2}^n \rho_k} - \frac{g_n(\rho_1, ..., \rho_n) - g_n(y_1, \rho_2, ..., \rho_n)}{\prod_{k=2}^n \rho_k} \\ &= \frac{g_n(Y_1(\omega), \rho_2, ..., \rho_n)}{\prod_{k=2}^n \rho_k}. \end{aligned}$$

Insgesamt erfüllt das Portfolio H_0 also die Ungleichung $H_0^t S_1 \leq H_1^t S_1$, und analog ergibt sich $H_i^t S_{i+1} \leq H_{i+1}^t S_{i+1}$ für alle $i \in \{1, ..., n-2\}$ sowie $H_{n-1}^t S_n \leq g_n(Y_1, ..., Y_n)$.

Die Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ liefert demnach einen unteren Hedge für den Claim $(0, ..., 0, \sum_{k=1}^n \alpha_k C_k B_n)$ mit Anfangspreis $\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(\rho_1, ..., \rho_k)$. Schließlich bildet $\underset{\sim}{\widehat{H}}$ mit $\widehat{H}_k = (H_{k,1}, H_{k,2} - \sum_{i=1}^k \alpha_i C_i)^t$, $k = 1, ..., n-1$, und $\widehat{H}_n = H_n$ einen unteren Hedge für $\underset{\sim}{C}$ mit Anfangspreis $\widehat{H}_0^t S_0 = H_0^t S_0$, und es folgt

$$a_\star(\underset{\sim}{C}) \geq \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(\rho_1, ..., \rho_k).$$

□

Korollar 4.53 (vgl. [25], Seite 18)
In einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell gelten für die unteren Preise einer europäischen Call- bzw. Put-Option mit Ausübungspreis K, d.h. für $C_n^C = (A_n - K)^+$ bzw. $C_n^P = (K - A_n)^+$, die Ungleichungen

$$a_\star(C_n^C) \geq (A_0 \prod_{i=1}^n \rho_i - K)^+, \quad a_\star(C_n^P) \geq (K - A_0 \prod_{i=1}^n \rho_i)^+.$$

Die unteren Schranken aus Korollar 4.53 werden als „lower universal arbitrage bounds for the European call and put option“ bezeichnet (vgl. [25], Seite 18), die untere Schranke $(A_0 \prod_{i=1}^n \rho_i - K)^+$ ist auch als „Merton's lower bound“ bekannt (vgl. [43]).

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß sich diese unteren Schranken durch das Einbringen zusätzlicher Informationen über den Träger noch verbessern lassen; entscheidend wird dabei der Bereich in der „Umgebung“ von $(1 + r_1, ..., 1 + r_n)$ sein.

4.4.2 Das deterministisch/dichotome Modell

Satz 4.42 zeigt, daß die schwache Konvergenzbedingung $A^\star$ erfüllt ist, wenn man $d_1, ..., d_n$ und $u_1, ..., u_n$ als minimale bzw. maximale Elemente der Träger der Faktoren wählt und $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^n P_w^{Y_i}$ gilt.

Wünschenswert ist nun eine schwache Konvergenzbedingung $A_\star$ für die unteren Preise, unter der die unteren Schranken angenommen werden, und für welche wiederum $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^n P_w^{Y_i}$ hinreichend ist.

Für die in Satz 4.51 gefundenen Schranken existiert eine solche Bedingung i.a. nicht. Insbesondere erweist sich auch die Aussage von Theorem 3 in [56] als falsch, daß die unteren Schranken aus Satz 4.51 generell angenommen werden, wenn die schwache Konvergenzbedingung $A^\star$ für die *oberen* Preise erfüllt ist. Als Gegenbeispiel betrachte man ein arbitragefreies n-Perioden Binomialmodell; in diesem ist $A^\star$ erfüllt, und die unteren Preise stimmen mit den oberen Preisen überein, so daß sie i.a. oberhalb der unteren Schranken aus Satz 4.51 liegen.

Zunächst wird daher gezeigt, daß die unteren Schranken aus Satz 4.51 noch verbessert werden können, wenn nicht $1+r_i \in supp(P_w^{Y_i})$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gilt.

Theorem 4.54
In der Situation von Satz 4.51 sei

$$\mathcal{J} := \left\{ j \in \{1, ..., n\} : \begin{array}{l} \exists\, \underline{d}_j, \underline{u}_j \in supp(P_w^{Y_j}) \text{ mit } 0 < \underline{d}_j < 1 + r < \underline{u}_j < \infty, \\ \text{so daß } supp(P_w^{Y_j}) \subset [0, \underline{d}_j] \cup [\underline{u}_j, \infty) \text{ gilt.} \end{array} \right\}.$$

Für $j \in \mathcal{J}$ sei weiter $q_{\underline{u}_j} := \frac{1+r_j-\underline{d}_j}{\underline{u}_j-\underline{d}_j} =: 1-q_{\underline{d}_j}$, und für $j \notin \mathcal{J}$ sei $\underline{u}_j := 1+r_j =: \underline{d}_j$ sowie $q_{1+r_j} := 1$.

Dann existiert ein unterer Hedge für $\underset{\sim}{C}$, dessen Anfangspreis mit dem fairen Preis des Finanzderivates im zugehörigen inneren deterministisch/dichotomen Modell übereinstimmt (d.h. im Modell, dessen eindeutig bestimmtes äquivalentes Martingalmaß gegeben ist durch $Q_0 = \bigotimes\limits_{j\in\mathcal{J}} (q_{\underline{u}_j}\delta_{\underline{u}_j} + q_{\underline{d}_j}\delta_{\underline{d}_j}) \,\dot{\otimes}\, \bigotimes_{j\notin\mathcal{J}} \delta_{1+r_j}$).
Insbesondere gilt für den unteren Preis die Ungleichung

$$a_\star(\underset{\sim}{C}) \geq a_{dd}(\underset{\sim}{C}) := \sum_{k\in\{1,...,n\}} \sum_{(y_1,...,y_k)\in \times_{j=1}^k \{\underline{d}_j, \underline{u}_j\}} \alpha_k g_k(y_1, ..., y_k) \cdot \prod_{j=1}^k q_{y_j}.$$

Beweis: Man betrachte statt $\underset{\sim}{C}$ wieder den Claim $(0, ..., 0, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_k B_n)$ mit terminaler Auszahlung $g_n(Y_1, ..., Y_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(Y_1, ..., Y_k) B_n$. Die Existenz eines unteren Hedges mit Anfangspreis $a_{dd}(\underset{\sim}{C})$ wird nun induktiv bewiesen.

$\underline{n = 1:}$ Im Fall $\mathcal{J} = \emptyset$ lege man H_0 fest durch

$$H_{0,1} = \frac{D_1^+ g_1(1 + r_1)}{A_0}, \quad H_{0,2} = \frac{g_1(1 + r_1)}{1 + r_1} - D_1^+ g_1(1 + r_1).$$

Gemäß dem Beweis von Satz 4.51 ist $(H_0, 0)$ dann ein unterer Hedge für $\underset{\sim}{C}$ mit Anfangspreis $\alpha_1 g_1(1 + r_1)$.

Sei nun $\mathcal{J} = \{1\}$ und $\underset{\sim}{H}$ der Hedge von $\underset{\sim}{C}$ in einem Ein-Perioden Binomialmodell mit Parametern $\underline{d}_1, \underline{u}_1$ und r_1. Dann erfüllt $\underset{\sim}{H}$ die Bedingungen

i) $H_0^t S_0 = g_1(\underline{u}_1) q_{\underline{u}_1} + g_1(\underline{d}_1) q_{\underline{d}_1} = a_{dd}(\underset{\sim}{C})$,

ii) $H_0^t \cdot (A_0 \underline{u}_1, 1 + r_1)^t = g_1(\underline{u}_1)$,

iii) $H_0^t \cdot (A_0 \underline{d}_1, 1 + r_1)^t = g_1(\underline{d}_1)$

mit $q_{\underline{u}_1} := \frac{1 + r_1 - \underline{d}_1}{\underline{u}_1 - \underline{d}_1}$ und $q_{\underline{d}_1} := \frac{\underline{u}_1 - (1 + r_1)}{\underline{u}_1 - \underline{d}_1}$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß H_0 für $P_w^{Y_1}$-f.a. $y_1 \in (0, \infty)$ die Ungleichung

$$H_{0,1} A_0 y_1 + H_{0,2}(1 + r_1) \leq g_1(y_1)$$

erfüllt.

Sei zunächst $y_1 \in [\underline{u}_1, \infty)$. Dann gilt $\underline{u}_1 = \frac{y_1 - \underline{u}_1}{y_1 - \underline{d}_1} \cdot \underline{d}_1 + \frac{\underline{u}_1 - \underline{d}_1}{y_1 - \underline{d}_1} \cdot y_1$, und aus der Konvexität von g_1 folgt

$$g_1(\underline{u}_1) \leq \frac{y_1 - \underline{u}_1}{y_1 - \underline{d}_1} \cdot g_1(\underline{d}_1) + \frac{\underline{u}_1 - \underline{d}_1}{y_1 - \underline{d}_1} \cdot g_1(y_1),$$

und damit

$$\begin{aligned} g_1(y_1) \quad &\geq \quad \frac{y_1 - \underline{d}_1}{\underline{u}_1 - \underline{d}_1} \cdot g_1(\underline{u}_1) + \frac{\underline{u}_1 - y_1}{\underline{u}_1 - \underline{d}_1} \cdot g_1(\underline{d}_1) \\ &\overset{\text{ii), iii)}}{=} \quad \frac{y_1 - \underline{d}_1}{\underline{u}_1 - \underline{d}_1} \cdot H_0^t \cdot (A_0 \underline{u}_1, 1 + r_1)^t + \frac{\underline{u}_1 - y_1}{\underline{u}_1 - \underline{d}_1} \cdot H_0^t \cdot (A_0 \underline{d}_1, 1 + r_1)^t \\ &= \quad H_0^t \cdot (A_0 y_1, 1 + r_1)^t. \end{aligned}$$

Im Fall $y_1 \in [0, \underline{d}_1]$ folgt analog $g_1(y_1) \geq H_0^t \cdot (A_0 y_1, 1 + r_1)^t$ aus der Darstellung

$$\underline{d}_1 = \frac{\underline{u}_1 - \underline{d}_1}{\underline{u}_1 - y_1} \cdot y_1 + \frac{\underline{d}_1 - y_1}{\underline{u}_1 - y_1} \cdot \underline{u}_1.$$

<u>$n \geq 2$:</u> Im Fall $1 \in \mathcal{J}$, d.h. $Q_0^{Y_1} = q_{\underline{u}_1}\delta_{\underline{u}_1} + q_{\underline{d}_1}\delta_{\underline{d}_1}$ mit $0 < \underline{d}_1 < 1 + r_1 < \underline{u}_1 < \infty$, wähle man einen beliebigen Hedge $\underset{\sim}{\widehat{H}}$ für $(0, ..., 0, g_n(Y_1, ..., Y_n))$ im inneren deterministisch/dichotomen Modell (welcher u.U. nicht eindeutig bestimmt ist) und lege das Anfangsportfolio H_0 des zu konstruierenden unteren Hedges im Aktie/Bond Modell fest durch $H_0 := \widehat{H}_0$. Dann besitzt H_0 den Anfangswert

$$\begin{aligned} H_0^t S_0 &= E_{Q_0}(\alpha_n g_n(Y_1, ..., Y_n)) \\ &= \sum_{(y_1,...,y_n) \in \times_{j=1}^n \{\underline{d}_j, \underline{u}_j\}} \alpha_n g_n(y_1, ..., y_n) \cdot \prod_{j=1}^n q_{y_j} \\ &= a_{dd}(\underset{\sim}{C}), \end{aligned}$$

und es gilt $Q_0^{Y_1}$-f.s.

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot H_0^t \cdot (A_0 Y_1, 1 + r_1)^t &= E_{Q_0}(\alpha_n g_n(Y_1, ..., Y_n) | Y_1) \\ &= E_{Q_0}(\alpha_n g_n(y_1, Y_2, ..., Y_n)) \circ Y_1 \\ &= \sum_{(y_2,...,y_n) \in \times_{j=2}^n \{\underline{d}_j, \underline{u}_j\}} \alpha_n g_n(Y_1, y_2, ..., y_n) \cdot \prod_{j=2}^n q_{y_j} \\ &=: f(Y_1). \end{aligned}$$

Aus $\alpha_1 \cdot H_0^t \cdot (A_0 y_1, 1 + r_1)^t = f(y_1)$ für $y_1 \in \{\underline{d}_1, \underline{u}_1\}$ und der Konvexität von f folgt nun analog zum Fall $n = 1$ die Ungleichung

$$\alpha_1 \cdot H_0^t \cdot (A_0 y_1, 1 + r_1)^t \leq f(y_1) = \sum_{(y_2,...,y_n) \in \times_{j=2}^n \{\underline{d}_j, \underline{u}_j\}} \alpha_n g_n(y_1, y_2, ..., y_n) \cdot \prod_{j=2}^n q_{y_j} \tag{$\star$}$$

für alle $y_1 \in (0, \underline{d}_1] \cup [\underline{u}_1, \infty)$.

Im Fall $1 \notin \mathcal{J}$, d.h. $Q_0^{Y_1} = \delta_{1+r_1}$, definiere man

$$h(x) := \sum_{(y_2,...,y_n) \in \times_{j=2}^n \{\underline{d}_j, \underline{u}_j\}} g_n(x, y_2, ..., y_n) \cdot \prod_{j=2}^n q_{y_j}$$

und lege H_0 fest durch

$$H_{0,1} = \frac{D^+ h(1 + r_1)}{A_0 \prod_{k=2}^n (1 + r_k)}, \quad H_{0,2} = \frac{h(1 + r_1)}{\prod_{k=1}^n (1 + r_k)} - \frac{D^+ h(1 + r_1)}{\prod_{k=2}^n (1 + r_k)}.$$

Dann ergibt sich analog zum Beweis von Satz 4.51 $H_0^t S_0 = \alpha_n \cdot h(1+r_1) = a_{dd}(\underset{\sim}{C})$ und

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot H_0^t \cdot (A_0 y_1, 1 + r_1)^t &\leq \alpha_n \cdot h(y_1) \\ &= \sum_{(y_2,...,y_n) \in \times_{j=2}^n \{\underline{d}_j, \underline{u}_j\}} \alpha_n g_n(y_1, y_2, ..., y_n) \cdot \prod_{j=2}^n q_{y_j} \end{aligned} \tag{$\star\star$}$$

für alle $y_1 \in (0, \infty)$.

Für jede Realisierung y_1 von Y_1 betrachte man nun das $(n-1)$-Perioden Modell mit Preisprozeß

$$\big((A_0 y_1, B_1)^t, (A_0 y_1 Y_2, B_2)^t, ..., (A_0 y_1 \prod_{k=2}^{n} Y_k, B_n)^t\big).$$

Gemäß Induktionsvoraussetzung existiert in diesem ein unterer Hedge

$$\underset{\sim}{\widehat{H}}(y_1) = \big(\widehat{H}_1(y_1), \widehat{H}_2(y_1, Y_2), ..., \widehat{H}_n(y_1, Y_2, ..., Y_n)\big)$$

für den Claim $(0, ..., 0, g_n(y_1, Y_2, ..., Y_n))$ mit Anfangspreis

$$\sum_{(y_2,...,y_n) \in \times_{j=2}^{n} \{\underline{d}_j, \underline{u}_j\}} B_1 \alpha_n g_n(y_1, y_2, ..., y_n) \cdot \prod_{j=2}^{n} q_{y_j}.$$

Im Aktie/Bond Modell wähle man nun

$$H_k = \widehat{H}_k(Y_1, Y_2, ..., Y_k) := \widehat{H}(\cdot, Y_2, ..., Y_k) \circ Y_1, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Aus der Konstruktion von $\underset{\sim}{\widehat{H}}(y_1)$ ergibt sich gemäß Induktionsvoraussetzung, daß H_k $\sigma(Y_1, ..., Y_k)$-meßbar und $\underset{\sim}{H}$ folglich eine Handelsstrategie ist. Diese erfüllt die Bedingungen

1) $H_0^t S_0 = a_{dd}(\underset{\sim}{C})$,

2) $\delta_1(\underset{\sim}{H}) = H_0^t S_1 - H_1^t S_1 \leq 0$ P_w-f.s. gemäß $(\star)$ und $(\star\star)$,

3) $\delta_k(\underset{\sim}{H}) \leq 0$ P_w-f.s. für alle $2 \leq k \leq n-1$,

4) $\delta_n(\underset{\sim}{H}) \leq g_n(Y_1, ..., Y_n)$ P_w-f.s.

und liefert somit einen unteren Hedge für $(0, ..., 0, g_n(Y_1, ..., Y_n))$ mit Anfangspreis $a_{dd}(\underset{\sim}{C})$. Also folgt

$$a_\star(\underset{\sim}{C}) = a_\star((0, ..., 0, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_k B_n)) \geq a_{dd}(\underset{\sim}{C}).$$

Der untere Hedge für $\underset{\sim}{C}$ läßt sich aus $\underset{\sim}{H}$ wieder analog zum Beweis von Satz 4.51 konstruieren.

□

Die Aussage und Beweisidee von Theorem 4.54 lassen sich wieder auf amerikanische Optionen mit komponentenweise konvexen Auszahlungsfunktionen übertragen. Neben der Konstruktion eines unteren Hedges, dessen Anfangspreis mit dem fairen Preis der Option im inneren deterministisch/dichotomen Modell übereinstimmt, ist aufgrund der bereits erwähnten Asymmetrie zwischen der Definition des unteren und des oberen Preises einer amerikanischen Option ebenfalls die Angabe einer zugehörigen Ausübungsstrategie notwendig.

Theorem 4.55
In der Situation von Theorem 4.54 sei $\underset{\sim}{C}$ der Auszahlungsprozeß einer amerikanischen Option, wobei C_k über eine komponentenweise konvexe Funktion f_k von den Faktoren $Y_1, ..., Y_k$ abhänge, $1 \leq k \leq n$. Dann existiert ein unterer Hedge für $\underset{\sim}{C}$, dessen Anfangspreis mit dem fairen Preis $a_{dd}(\underset{\sim}{C})$ der Option im inneren deterministisch/dichotomen Modell übereinstimmt (d.h. im Modell mit eindeutig bestimmtem äquivalenten Martingalmaß $Q_0 = \bigotimes_{j\in\mathcal{J}}(q_{\underline{u}_j}\delta_{\underline{u}_j} + q_{\underline{d}_j}\delta_{\underline{d}_j})\dot{\otimes}\bigotimes_{j\notin\mathcal{J}}\delta_{1+r_j}$). Insbesondere gilt für den unteren Preis $a_\star(\underset{\sim}{C})$ dieser Option die Ungleichung

$$a_\star(\underset{\sim}{C}) \geq a_{dd}(\underset{\sim}{C}).$$

Beweis: Die Existenz einer Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ und einer Stoppregel τ mit den Eigenschaften $H_0^t S_0 = a_{dd}(\underset{\sim}{C})$, $\delta_k(\underset{\sim}{H}) \leq 0$ P_w-f.s., $1 \leq k \leq n$, sowie $H_\tau^t S_\tau \leq C_\tau$ P_w-f.s. wird induktiv bewiesen.

<u>$n = 1$:</u> Sei $\underset{\sim}{U} = (U_0, U_1)$ Snell's envelope von $(\alpha_k C_k)_{k\in\{0,1\}}$ bezüglich Q_0, d.h.

$$\begin{aligned} U_1(Y_1) &= \alpha_1 C_1, \\ U_0 &= C_0 \vee E_{Q_0}(U_1(Y_1)). \end{aligned}$$

Dann besitzt $\underset{\sim}{U}$ bezüglich Q_0 die Doob-Zerlegung $\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{M} + \underset{\sim}{D}$ mit

$$\begin{aligned} M_0 &= U_0, \\ M_1(Y_1) &= U_1(Y_1) - E_{Q_0}(U_1(Y_1)) + U_0, \\ D_0 &= 0, \\ D_1 &= E_{Q_0}(U_1(Y_1)) - U_0. \end{aligned}$$

Wählt man $\tau_0 = \inf\{k \geq 0 : \alpha_k C_k = U_k\}$, so folgt für den fairen Preis der amerikanischen Option im inneren deterministisch/dichotomen Modell

$$a_{dd}(\underset{\sim}{C}) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_{Q_0}(\alpha_\tau C_\tau) = E_{Q_0}(\alpha_{\tau_0} C_{\tau_0}) = U_0$$

(vgl. [25], Theorem 6.12 und 6.20).

Es sind nun die Fälle $1 \in \mathcal{J}$ und $1 \notin \mathcal{J}$ zu unterscheiden:

<u>1. Fall: $1 \in \mathcal{J}$</u> Es gebe $0 < \underline{d}_1 < 1 + r_1 < \underline{u}_1 < \infty$ mit $supp(P_w^{Y_1}) \subset [0, \underline{d}_1] \cup [\underline{u}_1, \infty)$. Legt man $\underset{\sim}{H}$ fest durch $H_1 = H_0 = (H_{0,1}, H_{0,2})^t$ mit

$$H_{0,1} = \frac{M_1(\underline{u}_1) - M_1(\underline{d}_1)}{(\underline{u}_1 - \underline{d}_1)\alpha_1 A_0}, \quad H_{0,2} = \frac{M_1(\underline{d}_1)\underline{u}_1 - M_1(\underline{u}_1)\underline{d}_1}{\underline{u}_1 - \underline{d}_1},$$

so erhält man eine Handelsstrategie mit $\delta_1(\underset{\sim}{H}) = 0$. Weiterhin liefert

$$\tau = 1_{\{U_0 > C_0\}}$$

eine Stoppregel bezüglich $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$.

Nach Wahl von H_0 gilt

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot H_0^t \cdot (A_0 \underline{u}_1, 1 + r_1)^t &= M_1(\underline{u}_1), \\ \alpha_1 \cdot H_0^t \cdot (A_0 \underline{d}_1, 1 + r_1)^t &= M_1(\underline{d}_1), \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} U_0 &= M_0 \\ &= E_{Q_0}(M_1) \\ &= E_{Q_0}(\alpha_1 H_0^t S_1) \\ &= H_0^t \cdot \big(E_{Q_0}(\alpha_1 A_0 Y_1), 1\big)^t \\ &= H_0^t S_0. \end{aligned}$$

Im Fall $U_0 > C_0$, d.h. für $\tau \equiv 1$, ergibt sich für $y_1 \in \{\underline{d}_1, \underline{u}_1\}$ nun

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot H_1^t \cdot (A_0 y_1, 1 + r_1)^t &= \alpha_1 \cdot H_0^t \cdot (A_0 y_1)^t \\ &= M_1(y_1) \\ &= U_1(y_1) - E_{Q_0}(U_1(Y_1)) + U_0 \\ &= U_1(y_1) \\ &= \alpha_1 C_1(y_1). \end{aligned}$$

Wegen der Konvexität von C_1 folgt daher auf $\{\tau = 1\} \cap (\underline{d}_1, \underline{u}_1)^c$ die Ungleichung

$$H_1^t \cdot (A_0 y_1, 1 + r_1)^t \leq C_1(y_1).$$

Insgesamt erfüllt $\underset{\sim}{H}$ dann die Bedingungen

a) $H_0^t S_0 = U_0 = a_{dd}(\underset{\sim}{C})$,

b) $\delta_1(\underset{\sim}{H}) = 0$ und

c) $$\begin{aligned} P_w(H_\tau^t S_\tau \leq C_\tau) &= P_w(\{H_0^t S_0 \leq C_0\} \cap \{\tau = 0\}) \\ &\quad + P_w(\{H_1^t S_1 \leq C_1\} \cap \{\tau = 1\}) \\ &= P_w(\{\tau = 0\}) + P_w(\{\tau = 1\} \cap (\underline{d}_1, \underline{u}_1)^c) \\ &= 1. \end{aligned}$$

<u>2. Fall: $1 \notin \mathcal{J}$</u> Sei $1 + r_1 \in supp(P_w^{Y_1})$. Die Stoppzeit τ sei analog zum Fall $1 \in \mathcal{J}$ festgelegt durch

$$\tau = 1_{\{U_0 > C_0\}}.$$

Falls $U_0 = C_0$ gilt, so wähle man $H_1 = H_0 = (0, U_0)^t$; diese Handelsstrategie erfüllt offensichtlich $\delta_1(\underset{\sim}{H}) = 0$ sowie $H_0^t S_0 = U_0 = C_0$, und damit $H_\tau^t S_\tau = C_\tau$.

Im Fall $U_0 > C_0$ sei $\underset{\sim}{H}$ festgelegt durch $H_1 = H_0 = (H_{0,1}, H_{0,2})^t$ mit

$$H_{0,1} = \frac{D_1^+ C_1(1 + r_1)}{A_0}, \quad H_{0,2} = \frac{C_1(1 + r_1)}{1 + r_1} - D_1^+ C_1(1 + r_1)$$

Diese Handelsstrategie erfüllt $H_0^t \cdot (A_0(1 + r_1), 1 + r_1)^t = C_1(1 + r_1)$, und damit

$$\begin{aligned} \alpha_1 H_0^t S_1 &= \alpha_1 C_1 \\ &= U_1 \\ &= M_1 \quad Q_0\text{-f.s..} \end{aligned}$$

Der Anfangspreis der Handelsstrategie ist demnach gegeben durch

$$H_0^t S_0 = E_{Q_0}(\alpha_1 H_0^t S_1) = E_{Q_0}(M_1) = M_0 = U_0.$$

Nach Konstruktion von H_0 und H_1 gilt im Fall $U_0 > C_0$ weiterhin die Ungleichung

$$H_1^t (A_0 y_1, 1 + r_1)^t \leq C_1(y_1)$$

für alle $y_1 > 0$.

Insgesamt erfüllt die Handelsstrategie $\underset{\sim}{\widehat{H}} = (\widehat{H}_0, \widehat{H}_1)$ mit

$$\widehat{H}_1 = \widehat{H}_0 = (H_{0,1} 1_{\{U_0 > C_0\}}, U_0 1_{\{U_0 = C_0\}} + H_{0,2} 1_{\{U_0 > C_0\}})^t$$

nun die Bedingungen

d) $H_0^t S_0 = U_0$,

e) $\delta_1(\underset{\sim}{H}) = 0$,

f) $H_\tau^t S_\tau \leq C_\tau \quad P_w$-f.s..

Sowohl für $1 \in \mathcal{J}$ als auch für $1 \notin \mathcal{J}$ existiert also ein unterer Hedge für die amerikanische Option mit Anfangspreis $U_0 = a_{dd}(\underset{\sim}{C})$, woraus $a_{dd}(\underset{\sim}{C}) \leq a_\star(\underset{\sim}{C})$ folgt.

<u>$n \geq 2:$</u> Snell's envelope $\underset{\sim}{U}$ von $(\alpha_k C_k)_{0 \leq k \leq n}$ bezüglich Q_0 läßt sich festlegen durch

$$\begin{aligned} U_n(Y_1, ..., Y_n) &= \alpha_n C_n, \\ U_k(Y_1, ..., Y_k) &= \alpha_k C_k \vee E_{Q_0}(U_{k+1}(y_1, ..., y_k, Y_{k+1})) \circ (Y_1, ..., Y_k), \ n - 1 \geq k \geq 1, \\ U_0 &= C_0 \vee E_{Q_0}(U_1(Y_1)), \end{aligned}$$

und die Doob-Zerlegung $\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{D} + \underset{\sim}{M}$ von $\underset{\sim}{U}$ bezüglich Q_0 läßt sich in der Form $M_0 = U_0,\ D_0 = 0$ sowie

$$\begin{aligned} M_k &= \sum_{j=2}^{k} \big[U_j(Y_1,...,Y_j) - E_{Q_0}(U_j(y_1,...,y_{j-1},Y_j)) \circ (Y_1,...,Y_{j-1})\big] \\ &\quad + U_1(Y_1) - E_{Q_0}(U_1(Y_1)) + U_0, \\ D_k &= \sum_{j=2}^{k} \big[E_{Q_0}(U_j(y_1,...,y_{j-1},Y_j)) \circ (Y_1,...,Y_{j-1}) - U_{j-1}(Y_1,...,Y_{j-1})\big] \\ &\quad + E_{Q_0}(U_1(Y_1)) - U_0 \end{aligned}$$

wählen, $k = 1,...,n$.

Weiter sei $\underset{\sim}{\widehat{H}}$ ein Hedge von $(0,...,0,\frac{M_n}{\alpha_n})$ im vollständigen inneren deterministisch/dichotomen Modell. Dann folgt für $k \in \{1,...,n\}$

$$\alpha_k \widehat{H}_k^t S_k = E_{Q_0}(M_n|(Y_1,...,Y_k)) = M_k \quad Q_0\text{-f.s.},$$

und der Anfangspreis des Portfolios beträgt $\widehat{H}_0^t S_0 = M_0 = U_0 = a_{dd}(\underset{\sim}{C})$.

Falls $C_0 = U_0$ gilt, so wähle man im zugrundeliegenden Modell die Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ mit $H_k = \widehat{H}_0$, $k = 0,...,n$, und die Ausübungsstrategie $\tau \equiv 0$. Dann ergibt sich $H_\tau^t S_\tau \le C_\tau$ und $H_0^t S_0 = a_{dd}(\underset{\sim}{C})$, woraus $a_{dd}(\underset{\sim}{C}) \le a_\star(\underset{\sim}{C})$ folgt.

Im folgenden sei daher $U_0 > C_0$ vorausgesetzt, so daß $E_{Q_0}(U_1(Y_1)) = U_0$, also $M_1 = U_1$ gilt.

Zu untersuchen sind nun wieder die Fälle $1 \in \mathcal{J}$ und $1 \notin \mathcal{J}$.

<u>1. Fall: $1 \in \mathcal{J}$</u> Es gebe $0 < \underline{d}_1 < 1 + r_1 < \underline{u}_1 < \infty$ mit $supp(P_w^{Y_1}) \subset [0,\underline{d}_1] \cup [\underline{u}_1,\infty)$. Dann wähle man $H_0 = \widehat{H}_0$ und setze

$$\{\tau = 1\} = Y_1^{-1}\big((\underline{d}_1,\underline{u}_1) \cup \{y_1 : H_0^t \cdot (A_0 y_1, 1 + r_1)^t \le C_1(y_1)\}\big) \in \sigma(Y_1).$$

Auf $\{\tau = 1\}$ wähle man weiterhin $H_k = H_0$, $1 \le k \le n$. Dann gilt auf der Menge $\{\tau = 1\}$ offensichtlich $\delta_i(\underset{\sim}{H}) = 0$ für alle $i \in \{1,...,n\}$.

Die Stoppregion $\{\tau = 1\}$ besitzt die Gestalt $L_1 \cup (\underline{d}_1,\underline{u}_1) \cup R_1$ mit

i) $L_1 = \emptyset$ oder $L_1 = (0,\underline{d}_1^\star]$ für ein $\underline{d}_1^\star \le \underline{d}_1$,

ii) $R_1 = \emptyset$ oder $R_1 = [\underline{u}_1^\star,\infty)$ für ein $\underline{u}_1^\star \ge \underline{u}_1$;

sie ist in den folgenden Abbildungen jeweils schraffiert dargestellt:

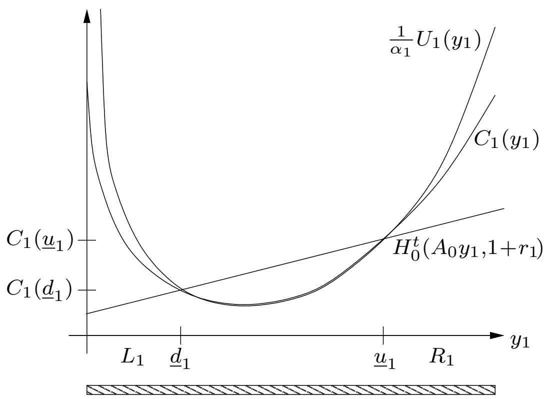

Abb. 16a: Im Fall $\alpha_1 C_1(\underline{d}_1) = U_1(\underline{d}_1)$, $\alpha_1 C_1(\underline{u}_1) = U_1(\underline{u}_1)$ gilt $L_1 = (0, \underline{d}_1]$; $R_1 = [\underline{u}_1, \infty)$; $\tau \equiv 1$.

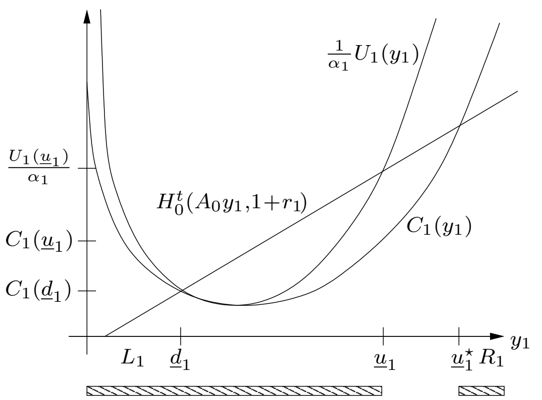

Abb. 16b: Im Fall $\alpha_1 C_1(\underline{d}_1) = U_1(\underline{d}_1)$, $\alpha_1 C_1(\underline{u}_1) < U_1(\underline{u}_1)$ gilt $L_1 = (0, \underline{d}_1]$; $R_1 = [\underline{u}_1^\star, \infty)$, $\underline{u}_1^\star > \underline{u}_1$, oder $R_1 = \emptyset$.

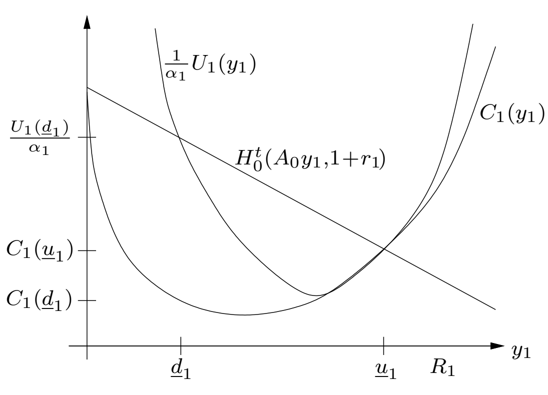

Abb. 16c: Im Fall $\alpha_1 C_1(\underline{d}_1) < U_1(\underline{d}_1)$, $\alpha_1 C_1(\underline{u}_1) = U_1(\underline{u}_1)$ gilt $L_1 = (0, \underline{d}_1^\star]$, $\underline{d}_1^\star < \underline{d}_1$, oder $L_1 = \emptyset$; $R_1 = [\underline{u}_1, \infty)$.

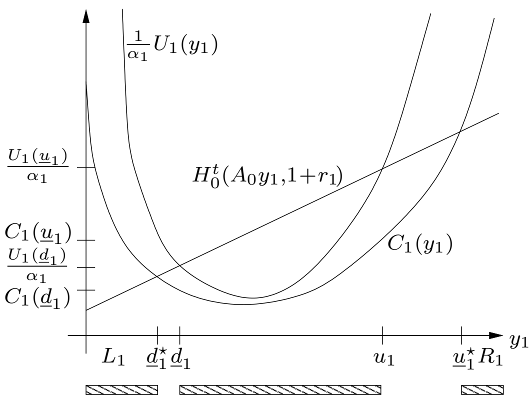

Abb. 16d: Im Fall $\alpha_1 C_1(\underline{d}_1) < U_1(\underline{d}_1)$, $\alpha_1 C_1(\underline{u}_1) < U_1(\underline{u}_1)$ gilt $L_1 = (0, \underline{d}_1^\star]$, $\underline{d}_1^\star < \underline{d}_1$, oder $L_1 = \emptyset$; $R_1 = [\underline{u}_1^\star, \infty)$, $\underline{u}_1^\star > \underline{u}_1$, oder $R_1 = \emptyset$.

Für das Portfolio H_0 gilt

$$\alpha_1 H_0^t S_1 = E_{Q_0}(\alpha_n \widehat{H}_{n-1}^t S_n | Y_1) = E_{Q_0}(M_n|Y_1) = M_1 \quad Q_0\text{-f.s.},$$

woraus wegen $M_1 = U_1$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot H_0^t \cdot (A_0 \underline{d}_1, 1+r_1)^t &= U_1(\underline{d}_1), \\ \alpha_1 \cdot H_0^t \cdot (A_0 \underline{u}_1, 1+r_1)^t &= U_1(\underline{u}_1) \end{aligned}$$

folgen. Aufgrund der Konvexität von U_1 (vgl. Beweis von Theorem 4.36) ergibt sich hieraus

$$\alpha_1 \cdot H_0^t \cdot (A_0 y_1, 1+r_1)^t \leq U_1(y_1) \quad \forall\, y_1 \in (\underline{d}_1, \underline{u}_1)^c, \tag{$\star$}$$

und insbesondere auf der Menge $\{\tau > 1\}$ gilt

$$\alpha_1 C_1 < \alpha_1 H_0^t S_1 \leq U_1(Y_1).$$

<u>2. Fall: $1 \notin \mathcal{J}$</u> Sei $1 + r_1 \in supp(P_w^{Y_1})$. Dann lege man H_0 fest durch $H_0 = (H_{0,1}, H_{0,2})^t$ mit

$$H_{0,1} = \frac{D_1^+ U_1(1+r_1)}{\alpha_1 A_0}, \quad H_{0,2} = U_1(1+r_1) - \frac{D_1^+ U_1(1+r_1)}{\alpha_1}.$$

Dieses Portfolio erfüllt $\alpha_1 \cdot H_0^t \cdot (A_0 \cdot (1+r_1), (1+r_1))^t = U_1(1+r_1)$, also

$$\alpha_1 H_0^t S_1 = U_1(Y_1) = M_1(Y_1) \quad Q_0\text{-f.s.},$$

und damit

$$H_0^t S_0 = M_0 = U_0 = a_{dd}(\underset{\sim}{C}).$$

Weiter sei die Stoppregion $\{\tau = 1\}$ festgelegt durch

$$\{\tau = 1\} = \{H_0^t S_1 \leq C_1\} = Y_1^{-1}(\{y_1 : H_0^t \cdot (A_0 y_1, 1+r_1)^t \leq C_1(y_1)\}),$$

und auf $\{\tau = 1\}$ wähle man $H_k = H_0$, $k = 1, ..., n$. Dieses Portfolio erfüllt auf der Menge $\{\tau = 1\}$ offensichtlich $\delta_i(\underset{\sim}{H}) = 0$, $i = 1, ..., n$.

Die Stoppregion $\{\tau = 1\}$ besitzt im Fall $1 \notin \mathcal{J}$ die Gestalt $L_1 \cup R_1$ mit

i) $L_1 = \emptyset$ oder $L_1 = (0, \underline{d}_1^\star]$ für ein $\underline{d}_1^\star \leq 1 + r_1$,

ii) $R_1 = \emptyset$ oder $R_1 = [\underline{u}_1^\star, \infty)$ für ein $\underline{u}_1^\star \geq 1 + r_1$;

sie ist in den folgenden Abbildungen jeweils schraffiert dargestellt:

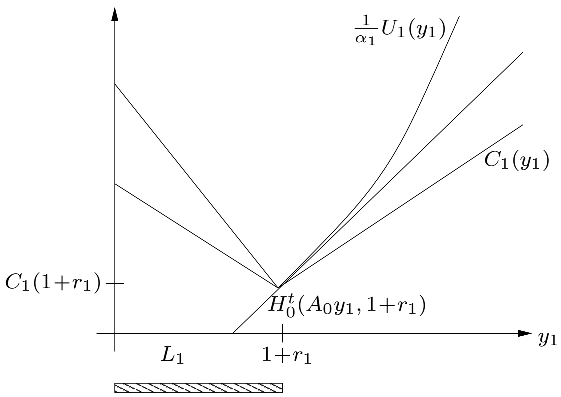

Abb. 17a: Im Fall $U_1(1+r_1) = \alpha_1 C_1(1+r_1)$ gilt $L_1 = (0, 1+r_1]$; $R_1 = [\underline{u}_1^\star, \infty)$, $\underline{u}_1^\star \geq 1+r_1$, oder $R_1 = \emptyset$.

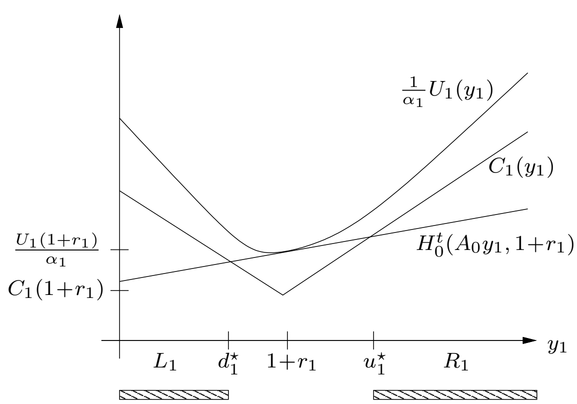

Abb. 17b: Im Fall $U_1(1+r_1) > C_1(1+r_1)$ gilt $L_1 = (0, \underline{d}_1^\star]$, $\underline{d}_1^\star < 1+r_1$, oder $L_1 = \emptyset$; $R_1 = [\underline{u}_1^\star, \infty)$, $\underline{u}_1^\star > 1+r_1$, oder $R_1 = \emptyset$.

Aus der Konstruktion von H_0 und der Konvexität von U_1 folgt die Ungleichung

$$\alpha_1 \cdot H_0^t \cdot (A_0 y_1, 1 + r_1)^t \leq U_1(y_1) \quad \forall\, y_1 > 0, \tag{$\star\star$}$$

d.h. $\alpha_1 H_0^t S_1 \leq U_1(Y_1)$, und insbesondere auf der Menge $\{\tau > 1\}$ ergibt sich

$$\alpha_1 C_1 < \alpha_1 H_0^t S_1 \leq U_1(Y_1).$$

Sowohl im Fall $1 \in \mathcal{J}$ als auch im Fall $1 \notin \mathcal{J}$ betrachte man nun für jede Realisierung y_1 von Y_1 das $(n-1)$-Perioden Aktie/Bond Modell mit Preisprozeß

$$\underset{\sim}{\widehat{S}} = \big((A_0y_1, B_1)^t, (A_0y_1Y_2, B_2)^t, ..., (A_0y_1 \prod_{i=2}^{n} Y_i, B_n)^t\big).$$

Für die amerikanische Option mit Auszahlungsprozeß

$$\underset{\sim}{\widehat{C}} = (f_1(y_1), f_2(y_1, Y_2), ..., f_n(y_1, Y_2, ..., Y_n))$$

existiert in diesem Modell gemäß Induktionsvoraussetzung eine Handelsstrategie

$$\underset{\sim}{G} = (G_1(y_1), G_2(y_1, Y_2), ..., G_n(y_1, Y_2, ..., Y_n))$$

und eine Stoppregel σ_{y_1} mit folgenden Eigenschaften:

1) $\underset{\sim}{G}$ bildet zusammen mit der Ausübungsstrategie σ_{y_1} einen unteren Hedge für die Option, d.h. es gilt $G^t_{\sigma_{y_1}} \cdot \widehat{S}_{\sigma_{y_1}} \leq \widehat{C}_{\sigma_{y_1}} \quad P_w^{(Y_2,...,Y_n)}$-f.s..

2) Der Anfangspreis von $\underset{\sim}{G}$ stimmt mit dem fairen Preis $\widehat{a}_{dd}(\widehat{\underset{\sim}{C}}(y_1))$ dieser Option im inneren $(n-1)$-Perioden deterministisch/dichotomen Modell überein (dessen eindeutig bestimmtes äquivalentes Martingalmaß gegeben ist durch $Q_1 = Q_0^{(Y_2,...,Y_n)}$). Analog zum Beweis von Theorem 4.36 ergibt sich $\widehat{a}_{dd}(\widehat{\underset{\sim}{C}}(y_1)) = \frac{1}{\alpha_1} \cdot U_1(y_1)$, so daß
$$G_1^t \cdot (A_0 y_1, B_1)^t = \frac{1}{\alpha_1} \cdot U_1(y_1)$$
folgt.

3) Die Komponenten von $\underset{\sim}{G}$ hängen gemäß der Konstruktion in den vorherigen Induktionsschritten meßbar von y_1 ab.

4) Für $(y_1, ..., y_n) \in \{\tau > 1\}$ gilt $C_1(y_1) < \frac{1}{\alpha_1} \cdot U_1(y_1)$ und damit
$$\sigma_{y_1}(y_2, ..., y_n) > 1.$$

5) $\sigma_{Y_1} := \sigma_{y_1} \circ Y_1$ ist gemäß der Festlegung von σ_{y_1} (im vorherigen Induktionsschritt) eine Stoppregel im n-Perioden Aktie/Bond Modell.

Insgesamt liefert

$$\tau = 1_{(C_0,\infty)}(U_0) \cdot \left[1_{\{H_0^t \cdot (A_0 y_1, 1+r_1)^t \leq C_1(y_1)\}}(Y_1) + 1_{\{H_0^t \cdot (A_0 y_1, 1+r_1)^t > C_1(y_1)\}}(Y_1) \cdot \sigma_{Y_1}\right]$$

eine Stoppregel und $\underset{\sim}{H}$ mit $H_0 = (H_{0,1}, H_{0,2})^t$ sowie

$$H_k = H_0 1_{\{\tau \leq 1\}} + G_k(Y_1, ..., Y_k) 1_{\{\tau > 1\}}, \quad k = 1, ..., n,$$

eine Handelsstrategie mit den Eigenschaften

i) $H_0^t S_0 = a_{dd}(\underset{\sim}{C})$,

ii) $\delta_1(\underset{\sim}{H}) = 1_{\{\tau > 1\}} \cdot H_0^t S_1 - U_1(Y_1) \leq 0 \quad P_w$-f.s. (vgl. $(\star)$, $(\star\star)$),

iii) $\delta_k(\underset{\sim}{H}) = 1_{\{\tau > 1\}} \cdot \delta_k(\underset{\sim}{G}) \leq 0 \quad P_w$-f.s., $k = 2, ..., n$,

iv) $H_\tau^t S_\tau \leq C_\tau \quad P_w$-f.s..

□

Die Aussage von Korollar 3.21 kann nun deutlich verallgemeinert werden:

Satz 4.56
In der Situation von Theorem 4.54 und Theorem 4.55 seien die Auszahlungsfunktionen zusätzlich nicht-negativ und bezüglich jedes Maßes $Q \in \mathcal{P}$ absolut integrierbar. Dann sind alle arbitragefreien Preise der dort betrachteten Finanzderivate nicht kleiner als ihre fairen Preise im inneren deterministisch/dichotomen Modell.

Beweis: Sei $\underset{\sim}{C}$ ein Finanzderivat mit regelmäßigen nicht-negativen Auszahlungen, die über komponentenweise konvexe Funktionen von den Faktoren des Aktienpreisprozesses abhängen, und gelte $C_k \in \mathcal{L}_1(Q)$ für alle $k \in \{1, ..., n\}$ und $Q \in \mathcal{P}$.

Gemäß Definition/Korollar 1.20 ist die untere Schranke für die arbitragefreien Preise von $\underset{\sim}{C}$ gegeben durch $\inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i)$, und Theorem 4.54 liefert $a_\star(\underset{\sim}{C}) \geq a_{dd}(\underset{\sim}{C})$. Es reicht also zu zeigen, daß

$$a_\star(\underset{\sim}{C}) \leq \inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i)$$

gilt.

Die *lower hedging duality* für Finanzderivate mit regelmäßigen Auszahlungen (vgl. Theorem 4.48) läßt sich hierfür ohne die Voraussetzung $a^\star(\underset{\sim}{C}) < \infty$ nicht verwenden, so daß ein alternativer Ansatz notwendig ist.

Sei $\underset{\sim}{H}$ ein unterer Hedge für $\underset{\sim}{C}$, d.h es gelte $\delta_i(\underset{\sim}{H}) \leq C_i \quad P_w$-f.s. für alle $i \in \{1, ..., n\}$, und es sei $H_n = 0$. Weiter sei Q ein äquivalentes Martingalmaß. Definiert man $\underset{\sim}{M} = (M_k)_{k\in\{0,...,n\}}$ durch $M_0 = H_0^t S_0$ und

$$M_k = H_0^t S_0 + \sum_{i=1}^k H_{i-1}^t(\alpha_i S_i - \alpha_{i-1} S_{i-1}), \quad k = 1, ..., n,$$

so ist $\underset{\sim}{M}$ als Martingaltransformation gemäß Satz 4.3 ein lokales Martingal bezüglich Q. Weiter gilt

$$M_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_i(\underset{\sim}{H}) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i \quad P_w\text{-f.s.},$$

und somit

$$M_n^+ \leq (\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i)^+ \quad Q\text{-f.s.}.$$

Aus $E_Q(|\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i|) < \infty$ folgt daher $E_Q(M_n^+) < \infty$, so daß $\underset{\sim}{M}$ nach Satz 4.5 ein Martingal bezüglich Q bildet. Insgesamt ergibt sich

$$H_0^t S_0 = M_0 = E_Q(M_n) = E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_i(\underset{\sim}{H})) \leq E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i)$$

für alle $Q \in \mathcal{P}$ und jeden unteren Hedge $\underset{\sim}{H}$, und damit schließlich

$$a_\star(\underset{\sim}{C}) = \sup\{H_0^t S_0 : \; H_0 \text{ ist ein unterer Hedge für } \underset{\sim}{C}\} \leq \inf_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i).$$

Sei nun $\underset{\sim}{C}$ der nicht-negative Auszahlungsprozeß einer amerikanischen Option, wobei C_k für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ dieselben Eigenschaften wie oben besitze. Nach Satz 1.22 ist die Menge der arbitragefreien Preise für $\underset{\sim}{C}$ nach unten beschränkt durch $\sup\limits_{\tau \in \mathcal{T}} \inf\limits_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau)$, und gemäß Theorem 4.55 gilt $a_\star(\underset{\sim}{C}) \geq a_{dd}(\underset{\sim}{C})$.
Es reicht also zu zeigen, daß

$$a_\star(\underset{\sim}{C}) \leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \inf_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau)$$

gilt, wobei auch hier die *lower hedging duality* für amerikanische Optionen (vgl. Satz 4.50) ohne die Zusatzvoraussetzung $a^\star(\underset{\sim}{C}) < \infty$ nicht verwendet werden kann.

Sei $\underset{\sim}{H}$ ein unterer Hedge für $\underset{\sim}{C}$, d.h. es gelte $\delta_i(\underset{\sim}{H}) = 0$ P_w-f.s. für alle $i \in \{1, ..., n\}$ und $H_\sigma^t S_\sigma \leq C_\sigma$ für eine Stoppregel σ, und sei Q ein äquivalentes Martingalmaß. Dann bildet $\underset{\sim}{M} = (M_k)_{k \in \{0,...,n\}}$ mit $M_0 = H_0^t S_0$ und

$$M_k = H_0^t S_0 + \sum_{i=1}^k H_{i-1}^t(\alpha_i S_i - \alpha_{i-1} S_{i-1}), \quad k = 1, ..., n,$$

ein lokales Martingal bezüglich Q, und aus der Selbstfinanzierung von $\underset{\sim}{H}$ folgt $M_k = \alpha_k H_k^t S_k$ P_w-f.s. für alle $k \in \{0, ..., n\}$.

Als nächstes wird die folgende Aussage benötigt:

Hilfsbehauptung:
Sei $\underset{\sim}{X} = (X_k)_{k \in \{0,...,n\}}$ *ein lokales Martingal und* τ *eine Stoppregel bezüglich* $\underset{\sim}{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_0, ..., \mathcal{F}_n)$. *Dann bildet der gestoppte Prozeß*

$$\underset{\sim}{X}^\tau = (X_{k \wedge \tau})_{k \in \{0,...,n\}}$$

ebenfalls ein lokales Martingal bezüglich $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$.

Beweis der Hilfsbehauptung: Sei $(\tau_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge für $\underset{\sim}{X}$. Für $j \in \mathbb{N}$ gilt dann $X_{0\wedge\tau\wedge\tau_j} = X_{0\wedge\tau_j}$ sowie

$$\begin{aligned} X_{k\wedge\tau\wedge\tau_j} &= \sum_{i=0}^{k-1} X_{k\wedge\tau\wedge\tau_j} \cdot 1_{\{\tau=i\}} + X_{k\wedge\tau\wedge\tau_j} \cdot 1_{\{\tau\geq k\}} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} X_{i\wedge\tau\wedge\tau_j} \cdot 1_{\{\tau=i\}} + X_{k\wedge\tau\wedge\tau_j} \cdot 1_{\{\tau\geq k\}} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} X_{i\wedge\tau_j} \cdot 1_{\{\tau=i\}} + X_{k\wedge\tau_j} \cdot 1_{\{\tau\geq k\}}, \end{aligned}$$

$k = 1, ..., n$. Aus der Integrierbarkeit von $X_{i\wedge\tau_j}$ für alle $i \in \{0, ..., n\}$ folgt nun diejenige von $X_{k\wedge\tau\wedge\tau_j}$, und aus den Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte ergibt sich für $k \in \{1, ..., n\}$

$$\begin{aligned} E(X_{k\wedge\tau\wedge\tau_j}|\mathcal{F}_{k-1}) &= \sum_{i=0}^{k-1} X_{i\wedge\tau_j} \cdot 1_{\{\tau=i\}} + E(X_{k\wedge\tau_j} \cdot 1_{\{\tau\geq k\}}|\mathcal{F}_{k-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} X_{i\wedge\tau_j} \cdot 1_{\{\tau=i\}} + 1_{\{\tau\geq k\}} \cdot E(X_{k\wedge\tau_j}|\mathcal{F}_{k-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} X_{i\wedge\tau_j} \cdot 1_{\{\tau=i\}} + 1_{\{\tau\geq k\}} \cdot X_{(k-1)\wedge\tau_j} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} X_{(k-1)\wedge\tau\wedge\tau_j} \cdot 1_{\{\tau=i\}} + 1_{\{\tau\geq k\}} \cdot X_{(k-1)\wedge\tau\wedge\tau_j} \\ &= X_{(k-1)\wedge\tau\wedge\tau_j}. \end{aligned}$$

Folglich ist $\underset{\sim}{X}^\tau$ ein lokales Martingal mit $(\tau_j)_{j\in\mathbb{N}}$ als lokalisierender Folge.

□

Aus der Hilfsbehauptung ergibt sich nun, daß der gestoppte Prozeß $\underset{\sim}{M}^\sigma$ ein lokales Martingal bezüglich Q bildet. Weiter gilt

$$M_n^\sigma = M_{n\wedge\sigma} = M_\sigma = \alpha_\sigma H_\sigma^t S_\sigma \leq \alpha_\sigma C_\sigma \quad Q\text{-f.s.},$$

und zusammen mit $C_k \in \mathcal{L}_1(Q)$ für alle $k \in \{1, ..., n\}$ folgt

$$E_Q((M_n^\sigma)^+) \leq E_Q(\alpha_\sigma C_\sigma^+) < \infty.$$

Gemäß Satz 4.5 bildet $\underset{\sim}{M}^\sigma$ ein Martingal bezüglich Q, so daß sich

$$H_0^t S_0 = M_0 = M_0^\sigma = E_Q(M_n^\sigma) \leq E_Q(\alpha_\sigma C_\sigma)$$

ergibt. Da $Q \in \mathcal{P}$ beliebig gewählt war, folgt

$$H_0^t S_0 \leq \inf_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\alpha_\sigma C_\sigma) \leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \inf_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau),$$

insgesamt also

$$a_\star(\underset{\sim}{C}) = \sup\{H_0^t S_0 : \underset{\sim}{H} \text{ ist ein unterer Hedge für } \underset{\sim}{C}\} \leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \inf_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\alpha_\tau C_\tau).$$

□

Insgesamt ist es in diesem Abschnitt gelungen, leicht zu berechnende Schranken für die unteren Preise und zugehörige untere Hedges für Finanzderivate mit komponentenweise konvexen Auszahlungsfunktionen zu finden. Für die Berechnung der *universellen unteren Arbitragegrenzen* aus Satz 4.51 werden dabei *keine* Informationen über P_w benötigt, und die Angabe von „besseren" unteren Schranken in den Theoremen 4.54 und 4.55 beruht allein auf der Kenntnis von Schranken $\underline{d}_1, ..., \underline{d}_n$ und $\underline{u}_1, ..., \underline{u}_n$ mit $supp(P_w^{Y_i}) \subset [0, \underline{d}_i] \cup [\underline{u}_i, \infty)$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Wünschenswert ist nun wieder die Angabe eines hinreichenden Kriteriums dafür, daß die unteren Preise mit den unteren Schranken übereinstimmen. Dann ermöglichen die Beweise von Theorem 4.54 und 4.55 die *konstruktive* Bestimmung von unteren Hedges zu den unteren Preisen, und gegenüber den Beweisen von Satz 4.48 und 4.50 kann auf die Voraussetzung verzichtet werden, daß die oberen Preise der betrachteten Finanzderivate endlich sind.

4.4.3 Die schwache Konvergenzbedingung $A_\star$

Bei der schwachen Konvergenzbedingung $A^\star$ für die oberen Preise ist die Existenz von oben Schranken $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}$ für $supp(P_w^{Y_1}), ..., supp(P_w^{Y_n})$ eine essentielle Voraussetzung. Daher können im Beweis von Theorem 4.39 die Dualitätssätze für die oberen Preise verwendet werden; weiterhin folgt aus der Stetigkeit von C_k sofort $\lim_{m \to \infty} E_{Q_m}(C_k) = E_{Q_0}(C_k)$, $k = 1, ..., n$.

Bei der Berechnung der unteren Schranken in Theorem 4.54 und 4.55 ist die Voraussetzung endlicher oberer Schranken nicht notwendig; die relevanten Informationen liefern die „inneren" Schranken $\underline{u}_i = \min\{x \in supp(P_w^{Y_i}) : x \geq 1 + r_i\}$ und $\underline{d}_i = \max\{x \in supp(P_w^{Y_i}) : x \leq 1 + r_i\}$, $i = 1, ..., n$. Da zum einen ohne die Zusatzvoraussetzung endlicher oberer Preise die Dualitätssätze für die unteren Preise nicht verwendet werden können, zum anderen aus der schwachen Konvergenz einer Folge äquivalenter Martingalmaße nicht direkt die Konvergenz der zugehörigen Erwartungswerte folgt, ist in der Situation von Theorem 4.54 und

Theorem 4.55 die Bedingung

$$A_\star : \begin{cases} \text{Die Menge } \mathcal{P} \text{ äquivalenter Martingalmaße enthält} \\ \text{eine Folge } (Q_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ mit} \\ Q_m \xrightarrow{w} Q_0 = \bigotimes_{j\in\mathcal{J}}(q_{\underline{u}_j}\delta_{\underline{u}_j} + q_{\underline{d}_j}\delta_{\underline{d}_j})\dot{\otimes}\bigotimes_{j\notin\mathcal{J}}\delta_{1+r_j}, \\ \text{wobei } q_{\underline{u}_j} = \frac{1+r_j-\underline{d}_j}{\underline{u}_j-\underline{d}_j} = 1 - q_{\underline{d}_j} \text{ für } j \in \mathcal{J} \text{ gilt.} \end{cases}$$

ohne zusätzliche Voraussetzungen nicht hinreichend dafür, daß die unteren Preise mit den unteren Schranken übereinstimmen.

Als geeignete Zusatzforderung erweist sich die gleichgradige Integrierbarkeit der Auszahlungsfunktionen bezüglich der schwach konvergenten Folge äquivalenter Martingalmaße:

Theorem 4.57
In der Situation von Theorem 4.54 bzw. Theorem 4.55 sei $\underset{\sim}{C}$ ein Finanzderivat mit regelmäßigen Auszahlungen bzw. der Auszahlungsprozeß einer amerikanischen Option, wobei es für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ eine komponentenweise konvexe (und damit stetige) Funktion f_k gebe mit $C_k = f_k(Y_1, ..., Y_k)$. Existiert dann eine Folge $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ äquivalenter Martingalmaße mit

i) $\lim\limits_{a\to\infty} \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \int\limits_{\{|C_k|>a\}} |C_k| dQ_m = 0$ *für alle* $1 \le k \le n$,

ii) $Q_m \xrightarrow{w} Q_0 = \bigotimes_{j\in\mathcal{J}}(\frac{1+r_j-\underline{d}_j}{\underline{u}_j-\underline{d}_j} \cdot \delta_{u_j} + \frac{\underline{u}_j-(1+r_j)}{\underline{u}_j-\underline{d}_j} \cdot \delta_{d_j}) \dot{\otimes} \bigotimes_{j\notin\mathcal{J}} \delta_{1+r_j}$,

so gilt $a_{dd}(\underset{\sim}{C}) = a_\star(\underset{\sim}{C})$.

Beweis: Aus Forderung $i)$ folgt zunächst $C_k \in \mathcal{L}_1(Q_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, ..., n\}$.

Zuerst wird der Fall betrachtet, daß $\underset{\sim}{C}$ ein Finanzderivat mit regelmäßigen Auszahlungen ist. Analog zum Beweis von Satz 4.56 ergibt sich die Ungleichung

$$a_\star(\underset{\sim}{C}) \le \inf_{m\in\mathbb{N}} E_{Q_m}(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i).$$

Weiterhin folgt aus *i)* und *ii)* zusammen mit der Stetigkeit von $C_1, ..., C_n$ die Gleichung

$$\lim_{m\to\infty} E_{Q_m}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i) = E_{Q_0}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i)$$

(vgl. [1], Satz 50.2 und 50.5). Zusammen mit Theorem 4.54 ergibt sich schließlich

$$a_{dd}(\underset{\sim}{C}) \leq a_\star(\underset{\sim}{C}) \leq \inf_{m\in\mathbb{N}} E_{Q_m}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i) \leq E_{Q_0}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i) = a_{dd}(\underset{\sim}{C}),$$

d.h. der untere Preis $a_\star(\underset{\sim}{C})$ des Finanzderivates stimmt mit der unteren Schranke $a_{dd}(\underset{\sim}{C})$ überein.

Sei nun $\underset{\sim}{C}$ der Auszahlungsprozeß einer amerikanischen Option. Analog zum Beweis von Satz 4.56 erhält man

$$a_\star(\underset{\sim}{C}) \leq \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \inf_{m\in\mathbb{N}} E_{Q_m}(\alpha_\tau C_\tau).$$

Wenn nun für alle $\tau \in \mathcal{T}$ die Ungleichung

$$\inf_{m\in\mathbb{N}} E_{Q_m}(\alpha_\tau C_\tau) \leq E_{Q_0}(\alpha_\tau C_\tau) \qquad (\star)$$

gezeigt werden kann, so folgt zusammen mit Theorem 4.55

$$a_{dd}(\underset{\sim}{C}) \leq a_\star(\underset{\sim}{C}) \leq \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \inf_{m\in\mathbb{N}} E_{Q_m}(\alpha_\tau C_\tau) \leq \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_{Q_0}(\alpha_\tau C_\tau) = a_{dd}(\underset{\sim}{C}),$$

d.h. der untere Preis $a_\star(\underset{\sim}{C})$ stimmt mit der unteren Schranke $a_{dd}(\underset{\sim}{C})$ überein.

Zum Beweis von $(\star)$ reicht es zu zeigen, daß für alle $\tau \in \mathcal{T}$ gilt:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\, m_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, m \geq m_0 : \;\; E_{Q_m}(\alpha_\tau C_\tau) \leq E_{Q_0}(\alpha_\tau C_\tau) + \varepsilon.$$

Für $\tau \equiv 0$ ist nichts zu zeigen, so daß im folgenden $\tau \geq 1$ vorausgesetzt wird.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Man wähle zunächst $a \in \mathbb{R}$ so groß, daß für alle $k \in \{1, ..., n\}$

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \int_{\{|C_k|>a\}} \alpha_k |C_k| dQ_m \leq \frac{\varepsilon}{6n} \qquad (\star)$$

gilt. Für $k \in \{1, ..., n\}$ definiere man weiter $M_k := supp(Q_0^{(Y_1,...,Y_k)}) = \bigtimes_{i=1}^{k} D_i$ mit

$$D_i = \begin{cases} \{\underline{d}_i, \underline{u}_i\}, & i \in \mathcal{J}, \\ \{1+r_i\}, & i \notin \mathcal{J}. \end{cases}$$

Für $s_i \in D_i$ und (festes) $\delta > 0$ sei weiterhin

$$A_{s_i} := (s_i - \delta, s_i + \delta),$$

wobei δ so klein gewählt wird, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) $0 < \underline{d}_j - \delta < \underline{d}_j + \delta < \underline{u}_j - \delta$ für alle $j \in \mathcal{J}$.

2) $0 < 1 + r_j - \delta$ für alle $j \notin \mathcal{J}$.

3) Für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ und für jede Wahl von $(s_1, ..., s_k) \in M_k$ gilt

$$\sup_{(y_1,\dots,y_k) \in \bigtimes_{i=1}^{k} A_{s_i}} |f_k(y_1, ..., y_k) - f_k(s_1, ..., s_k)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Schließlich definiere man $\Omega_k := \bigtimes_{\substack{j \in \mathcal{J} \\ j \geq k}} (A_{\underline{d}_j} \cup A_{\underline{u}_j}) \,\dot{\times} \bigtimes_{\substack{j \notin \mathcal{J} \\ j \geq k}} A_{1+r_j}$.

Dann gilt für $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} E_{Q_m}(\alpha_\tau C_\tau) &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\{\tau=k\}} \alpha_k C_k \, dQ_m \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\{\tau=k\}\cap\Omega_1} \alpha_k C_k \, dQ_m \ + \ \sum_{k=1}^{n} \int_{\{\tau=k\}\cap\Omega_1^c} \alpha_k C_k \, dQ_m \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\{\tau=k\}\cap\Omega_1} \alpha_k C_k \, dQ_m \ + \ \sum_{k=1}^{n} \int_{\{\tau=k\}\cap\Omega_1^c\cap\{|C_k|>a\}} \alpha_k |C_k| \, dQ_m \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} a \, \alpha_k \, Q_m(\Omega_1^c). \end{aligned} \tag{$\star\star$}$$

Aus $(\star)$ folgt nun

$$\int_{\{\tau=k\}\cap\Omega_1^c\cap\{|C_k|>a\}} \alpha_k |C_k| \, dQ_m \leq \frac{\varepsilon}{6n}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und für alle $k \in \{1, ..., n\}$.

Weiter folgt aus $Q_m \xrightarrow{w} Q_0$ zusammen mit $Q_0(\partial\, \Omega_1^c) = 0$ und dem Portmanteau-Theorem (vgl. [57], Satz 7.9) $\lim_{m\to\infty} Q_m(\Omega_1^c) = Q_0(\Omega_1^c) = 0$; für hinreichend großes m_1 gilt demnach

$$a \, \alpha_k \, Q_m(\Omega_1^c) \leq \frac{\varepsilon}{6n}$$

für alle $m \geq m_1$ und für alle $k \in \{1, ..., n\}$.

Aus $(\star\star)$ ergibt sich daher für alle $m \geq m_1$

$$E_{Q_m}(\alpha_\tau C_\tau) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\{\tau=k\}\cap\Omega_1} \alpha_k C_k \, dQ_m \ + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{$\star\star\star$}$$

Für $k \in \{1, ..., n-1\}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\{\tau=k\}\cap\Omega_1} \alpha_k C_k \, dQ_m &= \sum_{(s_1,...,s_k)\in M_k} \int_{\{\tau=k\}\cap(\bigtimes_{i=1}^{k} A_{s_i}\times\Omega_{k+1})} \alpha_k f_k(y_1, ..., y_k) \, dQ_m \\
&\leq \sum_{(s_1,...,s_k)\in M_k} \int_{\{\tau=k\}\cap(\bigtimes_{i=1}^{k} A_{s_i}\times\Omega_{k+1})} \alpha_k f_k(s_1, ..., s_k) \, dQ_m \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{3} \cdot Q_m(\{\tau = k\}),
\end{aligned}$$

und analog folgt für $k = n$

$$\begin{aligned}
\int_{\{\tau=n\}\cap\Omega_1} \alpha_n C_n \, dQ_m &\overset{3)}{\leq} \sum_{(s_1,...,s_n)\in M_n} \int_{\{\tau=n\}\cap\bigtimes_{i=1}^{n} A_{s_i}} \alpha_n f_n(s_1, ..., s_n) \, dQ_m \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{3} \cdot Q_m(\{\tau = n\}).
\end{aligned}$$

Für $m \geq m_1$ folgt daher zusammen mit $(\star\star\star)$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
E_{Q_m}(\alpha_\tau C_\tau) \leq & \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{(s_1,...,s_k)\in M_k} \alpha_k f_k(s_1, ..., s_k) \cdot Q_m\big(\{\tau = k\} \cap (\bigtimes_{i=1}^{k} A_{s_i} \times \Omega_{k+1})\big) \\
+ & \sum_{(s_1,...,s_n)\in M_n} \alpha_n f_n(s_1, ..., s_n) \cdot Q_m\big(\{\tau = n\} \cap \bigtimes_{i=1}^{n} A_{s_i}\big) \\
+ & \frac{2}{3} \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

Für $k \in \{1, ..., n-1\}$ gilt $\{\tau = k\} = (Y_1, ..., Y_k)^{-1}(G_k) = G_k \times (0, \infty)^{n-k}$ für eine meßbare Menge $G_k \subset (0, \infty)^k$, so daß sich die Darstellung

$$\{\tau = k\} \cap (\bigtimes_{i=1}^{k} A_{s_i} \times \Omega_{k+1}) = (G_k \cap \bigtimes_{i=1}^{k} A_{s_i}) \times \Omega_{k+1}$$

ergibt. Aus

$$Q_0\big(\partial\,[(G_k \cap \bigtimes_{i=1}^{k} A_{s_i}) \times \Omega_{k+1}]\big) = 0$$

und $Q_m \xrightarrow{w} Q_0$ folgt gemäß dem Portmanteau-Theorem

$$\lim_{m\to\infty} Q_m\big((G_k \cap \bigtimes_{i=1}^{k} A_{s_i}) \times \Omega_{k+1}\big) = Q_0\big((G_k \cap \bigtimes_{i=1}^{k} A_{s_i}) \times \Omega_{k+1}\big) = 1_{G_k}(s_1, ..., s_k) \cdot \prod_{i=1}^{k} q_{s_i}$$

mit $q_{\underline{u}_j} = \frac{1+r_j-\underline{d}_j}{\underline{u}_j-\underline{d}_j} = 1 - q_{\underline{d}_j}$, $j \in \mathcal{J}$, und $q_{1+r_j} = 1$, $j \notin \mathcal{J}$.

Die Menge $\{\tau = n\} = \{\tau \leq n-1\}^c$ läßt sich in der Form $\{\tau = n\} = F_{n-1} \times (0, \infty)$

mit einer meßbaren Menge $F_{n-1} \subset (0,\infty)^{n-1}$ schreiben, so daß sich analog

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} Q_m\big((F_{n-1}\times(0,\infty)) \cap \bigtimes_{i=1}^{n} A_{s_i}\big) &= Q_0\big((F_{n-1}\times(0,\infty)) \cap \bigtimes_{i=1}^{n} A_{s_i}\big) \\ &= Q_0\big((F_{n-1} \cap \bigtimes_{i=1}^{n-1} A_{s_i}) \times A_{s_n}\big) \\ &= 1_{F_{n-1}}(s_1,...,s_{n-1}) \cdot \prod_{i=1}^{n} q_{s_i}\end{aligned}$$

ergibt. Folglich existiert ein $m_2 \geq m_1$, so daß für alle $m \geq m_2$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}E_{Q_m}(\alpha_\tau C_\tau) &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{(s_1,...,s_k)\in M_k} \alpha_k f_k(s_1,...,s_k)\cdot 1_{G_k}(s_1,...,s_k)\cdot \prod_{i=1}^{k} q_{s_i} \\ &\quad + \sum_{(s_1,...,s_n)\in M_n} \alpha_n f_n(s_1,...,s_n)\cdot 1_{F_{n-1}}(s_1,...,s_{n-1})\cdot \prod_{i=1}^{n} q_{s_i} \\ &\quad + \varepsilon \\ &= E_{Q_0}(\alpha_\tau C_\tau) + \varepsilon\end{aligned}$$

erfüllt ist.

$\square$

Speziell für die Funktionen $C_k^C = (A_k - K)^+$ und $C_k^P = (K - A_k)^+$ (mit $K > 0$) folgt aus $|C_k^C| \leq |A_k|$ und $|C_k^P| \leq K$ wegen $E_Q(|A_k|) = B_k < \infty$ und $E_Q(K) < \infty$ für alle $Q \in \mathcal{P}$ zusammen mit Korollar 50.3 in [1]

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{Q\in\mathcal{P}} \int_{\{|C_k^C|>a\}} |C_k^C|dQ = 0, \quad \lim_{a\to\infty} \sup_{Q\in\mathcal{P}} \int_{\{|C_k^P|>a\}} |C_k^P|dQ = 0.$$

Als Folgerung ergibt sich:

Bemerkung 4.58
Die Auszahlungsprozesse von amerikanischen und europäischen Call- und Put-Optionen erfüllen die Eigenschaft i) aus Theorem 4.57 für jede Familie $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von äquivalenten Martingalmaßen.

Als hinreichendes Kriterium für die Gültigkeit der schwachen Konvergenzbedingung $A_\star$ erhält man analog zum Satz 4.42:

Bemerkung 4.59
In einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell gelte $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^n P_w^{Y_i}$. *Weiter sei* $\mathcal{J} := \{j \in \{1,...,n\} : 1 + r_j \notin supp(P_w^{Y_j})\}$*, und für* $j \in \mathcal{J}$ *seien*

$$\underline{d}_j := \max\{y \in supp(P_w^{Y_j}) : y_j < 1 + r_j\},\ \underline{u}_j := \min\{y \in supp(P_w^{Y_j}) : y_j > 1 + r_j\}.$$

Dann existiert eine Folge $(Q_m)_{m \in \mathbb{N}}$ *äquivalenter Martingalmaße mit*

$$Q_m \xrightarrow{w} Q_0 = \bigotimes_{j \in \mathcal{J}} \left(\frac{1 + r_j - \underline{d}_j}{\underline{u}_j - \underline{d}_j} \cdot \delta_{u_j} + \frac{\underline{u}_j - (1 + r_j)}{\underline{u}_j - \underline{d}_j} \cdot \delta_{d_j}\right) \dot{\otimes} \bigotimes_{j \notin \mathcal{J}} \delta_{1+r_j}.$$

Insgesamt liegt mit der schwachen Konvergenzbedingung $A_\star$ ein hinreichendes Kriterium dafür vor, daß die unteren Preise von Finanzderivaten mit komponentenweise konvexen Auszahlungsfunktionen in einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell mit ihren fairen Preisen im inneren determistisch/dichotomen Modell übereinstimmen, und daß die in Theorem 4.54 und 4.55 gefunden unteren Schranken die maximalen Anfangskosten von unteren Hedges angeben.

Insbesondere sind die Informationen $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^n P_w^{Y_i}$ und die Lage von $\underline{d}_i = \max\{y \in supp(P_w^{Y_i}) : y \leq 1 + r_i\}$ und $\underline{u}_i = \min\{y \in supp(P_w^{Y_i}) : y \geq 1 + r_i\}$ hinreichend dafür, bei amerikanischen und europäischen Call- und Put-Optionen die unteren Preise und die zugehörigen unteren Hedges bestimmen zu können. Gegenüber den Dualitätssätzen 4.48 und 4.50 ergeben sich dabei die entscheidenden Vorteile, daß die unteren Hedges konstruktiv ermittelt werden, und daß auf die Forderung eines endlichen oberen Preises verzichtet werden kann.

Kapitel 5

Eigenschaften oberer und unterer Preise

In Kapitel 4 wurde gezeigt, daß sich für Finanzderivate mit komponentenweise konvexen Auszahlungsfunktionen leicht zu berechnende untere Schranken für die unteren Preise finden lassen und im Falle beschränkter Faktoren ebenfalls leicht zu berechnende obere Schranken für die oberen Preise. Die entscheidenden Informationen liefern dabei die Werte $\min supp(P_w^{Y_i})$, $\sup supp(P_w^{Y_i})$, $\min\{y_i : y_i \in supp(P_w^{Y_i}) \cap [1+r_i, \infty)\}$ sowie $\max\{y_i : y_i \in supp(P_w^{Y_i}) \cap [0, 1+r_i]\}$, $i = 1, ..., n$.

Darüberhinaus wurden schwache Konvergenzbedingungen angegeben, die (in Verbindung mit der zusätzlich angenommenen gleichgradigen Integrierbarkeit der Auszahlungsfunktionen bezüglich einer geeigneten Folge äquivalenter Martingalmaße im Falle der unteren Preise) hinreichend dafür sind, daß die oberen bzw. unteren Schranken angenommen werden.

Insbesondere im Fall $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^n P_w^{Y_i}$ werden diese Voraussetzungen von den amerikanischen und europäischen Call- und Put-Optionen erfüllt, so daß sich die oberen und unteren Preise dieser fundamentalen Finanzderivate leicht berechnen lassen. Desweiteren lassen sich die zugehörigen oberen und unteren Hedges konstruktiv bestimmen.

In dieser Hinsicht erscheint das Konzept oberer und unterer Preise und Hedges als sinnvoller Ansatz zur Bewertung von Finanzderivaten in arbitragefreien Aktie/Bond Modellen. Speziell im Falle der Vollständigkeit stimmen oberer, unterer und fairer Preis jedes Finanzderivates überein, und der zugehörige Hedge liefert eine sub- bzw. superreplizierende Handelsstrategie mit maximalen bzw. minimalen Anfangskosten. Das Konzept oberer und unterer Preise erweist sich also als verträglich mit der fairen Bewertung von Derivaten unter Verwendung von Portfolioäquivalenten in vollständigen Modellen und soll in diesem Kapitel näher untersucht werden.

5.1 Untersuchung auf Arbitragefreiheit

Bei der Bewertung eines Finanzderivates in einem arbitragefreien Modell ist die Forderung naheliegend, daß der Ausgabepreis weder für den Verkäufer noch für den Käufer eine Arbitragemöglichkeit eröffnen sollte.

Auf die Frage, ob der obere oder untere Preis eines Finanzderivates mit regelmäßigen Auszahlungen in einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell einen risikolosen Profit ermöglicht, findet sich auf den Seiten 396 und 398 in [63] (unter Verwendung der Notation $C_\star$ bzw. $C^\star$ für $a_\star$ bzw. $a^\star$ und x für den Ausgabepreis des Derivates) die folgende Antwort: „The intervals $[0, C_\star)$ and $(C^\star, \infty)$ are the (maximal) sets of prices that give a buyer or a seller, respectively, *opportunities for arbitrage.*(...) Thus, we have two intervals, $[0, C_\star)$ and $(C^\star, \infty)$, of prices giving opportunities for arbitrage. At the same time, if $x \in [C_\star, C^\star]$, then the buyer and the seller have no such opportunities. (...) We emphasize again that a transaction at a *mutually acceptable price* $x \in [C_\star, C^\star]$ gives no riskless gains to either side."

Folglich würde sich insbesondere der *obere* Preis als ein hervorragender Ansatz zur Bewertung von Finanzderivaten in unvollständigen Märkten anbieten: Zum einen stellt er dem Herausgeber des Finanzderivates die finanziellen Mittel zur Verfügung, einen oberen Hedge zu erwerben und mit dessen Hilfe alle entstehenden Ansprüche ohne weitere Zuzahlungen zu erfüllen, und zum anderen wäre er als *arbitragefreier* Preis auch für den Käufer akzeptabel.

Die obige Aussage stellt sich jedoch in Aktie/Bond Modellen i.a. als *falsch* heraus. Man betrachte z.B. ein $BS_{(n)}$ Modell oder ein Gaußsches bzw. bedingtes Gaußsches Modell. Gemäß Abschnitt 2.3 sind diese Modelle arbitragefrei, und in ihnen gilt $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^n P_w^{Y_i}$ sowie $\min supp(P_w^{Y_i}) = 0$, $\sup supp(P_w^{Y_i}) = \infty$ und $1 + r_i \in supp(P_w^{Y_i})$, $i = 1, ..., n$. Gemäß Satz 4.28 beträgt der obere Preis jeder europäischen Call-Option in diesen Modellen A_0. Durch Verkauf der Option zum oberen Preis und Erwerb der Aktie erwirtschaftet der Herausgeber einen risikolosen Profit in Höhe von $A_n - (A_n - K)^+ = K 1_{\{A_n \geq K\}} + A_n 1_{\{A_n < K\}}$. Der obere Preis jeder europäischen Put-Option ist gegeben durch $\alpha_n K$, so daß sich für den Herausgeber durch Investition von $\alpha_n K$ in die festverzinsliche Anlage ein risikoloser Profit in Höhe von $K - (K - A_n)^+ = K 1_{\{A_n \geq K\}} + A_n 1_{\{A_n < K\}}$ ergibt.

Der untere Preis einer europäischen Call-Option mit Ausübungspreis $K > 0$ beträgt gemäß Theorem 4.54 und Theorem 4.57 $\alpha_n (B_n - K)^+$. Für $K \geq B_n$ ist er folglich gleich Null, es gilt jedoch $P_w(A_n > K) > 0$, so daß der Käufer durch

Erwerb der Option zum unteren Preis einen risikolosen Profit erwirtschaften kann. Analog ergibt sich, daß für eine europäische Put-Option mit Ausübungspreis $K \leq B_n$ der untere Preis Null beträgt und folglich arbitragebehaftet ist.

Aus den Existenzbeweisen oberer bzw. unterer Hedges zum oberen bzw. unteren Preis (vgl. Satz 4.13, 4.18, 4.48 und 4.50) ergibt sich allgemeiner:

Bemerkung 5.1
In einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell sei $\underset{\sim}{C}$ ein Claim mit regelmäßigen Auszahlungen, für den $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i$ P_w-f.s. nach unten beschränkt ist, oder eine amerikanische Option mit P_w-f.s. nach unten beschränkten Auszahlungsfunktionen. Ist der obere Preis des Finanzderivates endlich, so existieren sowohl obere Hedges zu den oberen Preisen als auch untere Hedges zu den unteren Preisen. Ist $\underset{\sim}{C}$ nicht absicherbar, so eröffnet folglich der obere Preis dem Verkäufer und der untere Preis dem Käufer eine Arbitragemöglichkeit.

Aus Bemerkung 5.1 ergibt sich ein erster wesentlicher Kritikpunkt am Konzept der oberen und unteren Preise: Nur wenn die in Bemerkung 5.1 genannten Finanzderivate absicherbar sind, und folglich eindeutig bestimmte arbitragefreie Preise existieren, liefern die oberen und unteren Preise keine Arbitragemöglichkeit. Für absicherbare Finanzderivate ist jedoch eine Suche nach alternativen Preiskonzepten nicht erforderlich.

Als direkte Folgerung aus Theorem 2.14 erhält man für die fundamentalen Finanzderivate europäische Call- und Put-Optionen und amerikanische Call-Optionen:

Satz 5.2
In einem arbitragefreien n-Perioden Aktie/Bond Modell, in dem die Faktoren nicht-deterministisch und nicht alle dichotom seien, gelte $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^{n} P_w^{Y_i}$ sowie $\sup supp(P_w^{Y_i}) = \sup supp(P_w^{Y_j})$ und $\min supp(P_w^{Y_i}) = \min supp(P_w^{Y_j})$ für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$. Dann gilt:

a) Es existieren höchstens $n-1$ verschiedene europäische Call- oder Put-Optionen oder amerikanische Call-Optionen, deren Ausübungspreise $K_1, ..., K_{n-1}$ die Bedingungen $P_w(A_n > K_i) > 0$ und $P_w(A_n < K_i) > 0$ erfüllen, $i = 1, ..., n-1$, und bei denen die oberen oder die unteren Preise keine Arbitragemöglichkeit eröffnen.

b) Existiert in diesem Modell kein $i \in \{1, ..., n\}$ mit $|supp(P_w^{Y_i})| > |supp(P_w^{Y_j})|$ für alle $j \neq i$, so ermöglichen die oberen und unteren Preise aller europäischen Call- und Put-Optionen und amerikanischen Call-Optionen, deren Ausübungspreis K die beiden Bedingungen $P_w(A_n > K) > 0$ und $P_w(A_n < K) > 0$ erfüllt, einen Arbitrage.

Korollar 5.3
In $BS_{(n)}$ Modellen und Gaußschen sowie bedingten Gaußschen Modellen ermöglichen die oberen und unteren Preise von europäischen Call- und Put-Optionen und amerikanischen Call-Optionen einen risikolosen Profit.

Unter dem Aspekt der Arbitragefreiheit erweist sich das Konzept der oberen und unteren Preise folglich als ungeeignet für die Bewertung von Finanzderivaten in unvollständigen Aktie/Bond Modellen, insbesondere von europäischen Call- und Put-Optionen und amerikanischen Call-Optionen in $BS_{(n)}$ Modellen sowie Gaußschen und bedingten Gaußschen Modellen.

Für die in Bemerkung 5.1 beschriebenen Finanzderivate geben die oberen und unteren Preise jedoch zumindest Schranken für alle arbitragefreien Preise an und liefern somit kritische Werte, anhand derer sich die Ausgabepreise auf Arbitragefreiheit untersuchen lassen.

5.2 Konsistente Preissysteme

Im diesem Abschnitt werden elementare Eigenschaften vorgestellt, die ein „vernünftiges“ Preissystem besitzen sollte. Anschließend wird untersucht, ob die Abbildungen $\underset{\sim}{C} \mapsto a^\star(\underset{\sim}{C})$ und $\underset{\sim}{C} \mapsto a_\star(\underset{\sim}{C})$ diesen Anforderungen entsprechen, und ob sie andernfalls zumindest wieder Schranken für alle Ausgabepreise in „vernünftigen“ Preissystemen liefern.

Dazu wird zunächst die Definition eines *konsistenten Preissystems* von Harrison und Pliska verallgemeinert. Für ein Aktie/Bond Modell mit endlichem Grundraum Ω, in dem Finanzderivate mit nicht-negativen terminalen Auszahlungen gehandelt werden, wird in [27] eine Abbildung π von $\mathcal{C} := \{C : \Omega \to [0, \infty)\}$ nach $[0, \infty)$ mit

i) $\pi(C) = 0 \Leftrightarrow C = 0$ und

ii) $\pi(aC_1 + bC_2) = a\pi(C_1) + b\pi(C_2)$ für alle $a, b \geq 0$ und $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$

als *Preissystem* bezeichnet. Gilt weiterhin

iii) $\pi(H_n^t S_n) = H_0^t S_0$ für alle selbstfinanzierenden Handelsstrategien $\underset{\sim}{H}$ mit nicht-negativem Werteprozeß $(H_k^t S_k)_{k \in \{0,...,n\}}$,

so heißt das Preissystem *konsistent* (mit dem zugrundeliegenden Finanzmarkt).

Harrison und Pliska zeigen in [27], daß die Abbildungen

$$\begin{aligned}&\Psi_1: \ Q \mapsto \pi_Q \text{ mit } \pi_Q(C) = E_Q(\alpha_n C),\\ &\Psi_2: \ \pi \mapsto Q_\pi \text{ mit } Q_\pi(G) = \pi(B_n 1_G)\end{aligned}$$

eine Bijektion zwischen den Mengen der konsistenten Preissysteme und der äquivalenten Martingalmaße liefern.

Dieses Ergebnis soll nun auf Finanzderivate mit regelmäßigen Auszahlungen in beliebigen Aktie/Bond Modellen verallgemeinert werden. Insbesondere soll der Grundraum nicht notwendigerweise endlich sein, so daß die Auszahlungen nicht zwangsläufig primitive Funktionen sind. Zusätzlich wird die Forderung von nichtnegativen Auszahlungen abgeschwächt, so daß auch die Entnahmeprozesse von Handelsstrategien und Kombinationen von Finanzderivaten wie z.B. *bear spreads* bewertet werden können.

Definition 5.4
In einem Aktie/Bond Modell seien

$$\begin{aligned}&\mathfrak{C} := \left\{ \underset{\sim}{C} = (C_1, ..., C_n) : \begin{array}{l} \underset{\sim}{C} \textit{ ist ein Claim mit regelmäßigen Auszahlungen, für} \\ \textit{den ein } K \in \mathbb{R} \textit{ existiert mit } \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i \geq K \ P_w\textit{-f.s.} \end{array} \right\},\\ &\mathfrak{C}^+ := \{ \underset{\sim}{C} \in \mathfrak{C} : \ C_i \geq 0 \ P_w\textit{-f.s.}, \ 1 \leq i \leq n \}.\end{aligned}$$

Ein Preissystem ist eine Abbildung $\pi : \mathfrak{C} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit den Eigenschaften:

1) *Für alle $\underset{\sim}{C}, \underset{\sim}{D} \in \mathfrak{C}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a\underset{\sim}{C} + b\underset{\sim}{D} := (aC_i + bD_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathfrak{C}$ gilt $\pi(a\underset{\sim}{C} + b\underset{\sim}{D}) = a\pi(\underset{\sim}{C}) + b\pi(\underset{\sim}{D})$.*

2) *Für alle $\underset{\sim}{C} \in \mathfrak{C}^+$ gilt $\pi(\underset{\sim}{C}) \geq 0$ sowie $\pi(\underset{\sim}{C}) = 0 \Leftrightarrow \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{0}$ P_w-f.s..*

3) *Besitzt $\underset{\sim}{C} \in \mathfrak{C}^+$ eine Zerlegung der Form $\underset{\sim}{C} = \sum_{k=1}^\infty \underset{\sim}{C_k}$ mit $\underset{\sim}{C_k} \in \mathfrak{C}^+$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt $\pi(\underset{\sim}{C}) = \sum_{k=1}^\infty \pi(\underset{\sim}{C_k})$.*

4) *$\pi\big((C_1, ..., C_n)\big) = \pi\big((0, ..., 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i B_n)\big)$ für alle $\underset{\sim}{C} \in \mathfrak{C}$.*

Es wird als konsistent (mit dem zugrundeliegenden Finanzmarkt) bezeichnet, falls die Bedingung

5) *$\pi\big((\delta_1(\underset{\sim}{H}), ..., \delta_n(\underset{\sim}{H}))\big) = H_0^t S_0$ für alle Handelsstrategien $\underset{\sim}{H}$, für die $H_n = 0$ gilt und $\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_i(\underset{\sim}{H})$ P_w-f.s. nach unten beschränkt ist.*

erfüllt ist.

Bemerkung 5.5
Sei π ein konsistentes Preissystem gemäß Definition 5.4 und $\underset{\sim}{H}$ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit $V_n(\underset{\sim}{H}) \geq 0$ P_w-f.s.. Weiter sei $\underset{\sim}{G}$ festgelegt durch $G_k = H_k$, $k = 0, ..., n-1$, und $G_n = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \pi\big((0, ..., 0, V_n(\underset{\sim}{H}))\big) &= \pi\big((0, ..., 0, H_{n-1}^t S_n)\big) \\ &= \pi\big((\delta_1(\underset{\sim}{G}), ..., \delta_n(\underset{\sim}{G}))\big) \\ &\overset{5)}{=} G_0^t S_0 \\ &= H_0^t S_0, \end{aligned}$$

d.h. die Festlegung eines konsistenten Preissystems in Definition 5.4 ist verträglich mit der Festlegung von Harrison und Pliska.

Das folgende Theorem liefert eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines konsistenten Preissystems in Aktie/Bond Modellen und verallgemeinert das Resultat von Harrison und Pliska:

Theorem 5.6
In einem Aktie/Bond Modell existiert genau dann ein konsistentes Preissystem, wenn $|\mathcal{P}| \geq 1$ gilt. Weiterhin liefern die Abbildungen

i) $\pi \to Q_\pi$ *mit* $Q_\pi(G) := \pi\big((0, ..., 0, B_n 1_G)\big)$ *für alle* $G \in \mathcal{F}_n$,

ii) $Q \to \pi_Q$ *mit* $\pi_Q(\underset{\sim}{C}) := E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i)$ *für alle* $\underset{\sim}{C} \in \mathfrak{C}$

eine Bijektion zwischen den Mengen der konsistenten Preissysteme und der äquivalenten Martingalmaße.

Zum Beweis von Theorem 5.6 wird zunächst eine Hilfsaussage benötigt:

Lemma 5.7
Sei $(\underset{\sim}{C}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Claims mit $\underset{\sim}{C}_k = (C_{k,1}, ..., C_{k,n}) \in \mathfrak{C}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Weiter existiere eine P_w-Nullmenge N mit

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\omega\in N^c} |C_{k,i}(\omega) - C_{0,i}(\omega)| = 0$$

für alle $1 \leq i \leq n$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} \pi(\underset{\sim}{C}_k) = \pi(\underset{\sim}{C}_0)$.

Beweis: Wegen $\lim_{k\to\infty} \sup_{\omega \in N^c} |C_{k,i}(\omega) - C_{0,i}(\omega)| = 0$ existiert für alle $\varepsilon > 0$ und $i \in \{1, ..., n\}$ ein $k_i(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|C_{k,i}(\omega) - C_{0,i}(\omega)| \leq \frac{\varepsilon}{n} \cdot \prod_{j=1}^{i}(1 + r_j) = \frac{\varepsilon}{n} B_i$$

für alle $k \geq k_i(\varepsilon)$ und alle $\omega \in N^c$.

Sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für alle $k \geq k_0(\varepsilon) := \max\limits_{1\leq i\leq n} k_i(\varepsilon)$ ergibt sich unter Verwendung der Notation $\underset{\sim}{C}_1 \preceq \underset{\sim}{C}_2 :\Leftrightarrow C_{1,i} \leq C_{2,i}$ P_w-f.s., $i = 1, ..., n$, die Ungleichung

$$\underset{\sim}{C}_k - \big(\frac{\varepsilon}{n} B_1, ..., \frac{\varepsilon}{n} B_n\big) \preceq \underset{\sim}{C}_0 \preceq \underset{\sim}{C}_k + \big(\frac{\varepsilon}{n} B_1, ..., \frac{\varepsilon}{n} B_n\big).$$

Für ein konsistentes Preissystem π folgt aus Eigenschaft 1)

$$\pi(\underset{\sim}{C}_k) - \pi\big(\frac{\varepsilon}{n} B_1, ..., \frac{\varepsilon}{n} B_n\big) \leq \pi(\underset{\sim}{C}_0) \leq \pi(\underset{\sim}{C}_k) + \pi\big(\frac{\varepsilon}{n} B_1, ..., \frac{\varepsilon}{n} B_n\big).$$

Weiterhin erfüllt die Handelsstrategie

$$\underset{\sim}{H} = \Big(\big(0, \varepsilon\big)^t, \big(0, \frac{(n-1)\varepsilon}{n}\big)^t, \big(0, \frac{(n-2)\varepsilon}{n}\big)^t, ..., \big(0, \frac{\varepsilon}{n}\big)^t, \big(0, 0\big)^t\Big)$$

die Gleichungen

i) $H_0^t S_0 = \varepsilon$ und

ii) $\delta_i(\underset{\sim}{H}) = \frac{\varepsilon}{n} B_i,\ i = 1, ..., n.$

Die Eigenschaft 5) von π liefert daher $\pi\big(\frac{\varepsilon}{n} B_1, ..., \frac{\varepsilon}{n} B_n\big) = H_0^t S_0 = \varepsilon$.

Folglich existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\pi(\underset{\sim}{C}_k) - \varepsilon \leq \pi(\underset{\sim}{C}_0) \leq \pi(\underset{\sim}{C}_k) + \varepsilon$$

für alle $k \geq k_0(\varepsilon)$.

$\square$

Beweis von Theorem 5.6: *a*) Es gelte $|\mathcal{P}| \geq 1$. Für ein äquivalentes Martingalmaß Q sei $\pi_Q : \mathfrak{C} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ festgelegt durch $\pi_Q(\underset{\sim}{C}) = E_Q(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i)$. Dann besitzt π_Q offensichtlich die Eigenschaften 1), 2) und 4). Weiter ergibt sich Eigenschaft 3) aus dem Satz von der monotonen Konvergenz (vgl. z.B. [22], Satz 2.7).

Für den Nachweis der Konsistenz von π_Q betrachte man eine Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ mit $H_n = 0$, für die $\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_i(\underset{\sim}{H})$ P_w-f.s. nach unten beschränkt ist.

Dann bildet $(M_k)_{k\in\{0,...,n\}}$ mit $M_0 = H_0^t S_0$ und

$$M_k = H_0^t S_0 + \sum_{j=1}^{k} H_{j-1}^t(\alpha_j S_j - \alpha_{j-1}S_{j-1}),$$

$k = 1, ..., n$, als Martingaltransformation wegen $E_Q(M_n^-) < \infty$ ein Martingal bezüglich Q, so daß sich

$$H_0^t S_0 = E_Q(M_n) = E_Q\big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_i(\underset{\sim}{H})\big) = \pi_Q\big((\delta_1(\underset{\sim}{H}), ..., \delta_n(\underset{\sim}{H}))\big)$$

ergibt. Folglich ist π_Q ein konsistentes Preissystem.

$b)$ Es existiere ein konsistentes Preissystem π. Man lege $Q_\pi : \mathcal{F}_n \to \mathbb{R}$ fest durch $Q_\pi(G) = \pi\big((0, ..., 0, B_n 1_G)\big)$. Aus $(0, ..., 0, B_n 1_G) \in \mathfrak{C}^+$ folgt zunächst $Q_\pi(G) \geq 0$ für alle $G \in \mathcal{F}_n$, und die Handelsstrategie $\underset{\sim}{H} = \big((0,1)^t, ..., (0,1)^t, (0,0)^t\big)$ liefert die Gleichung $Q_\pi(\Omega) = \pi\big((0, ..., 0, B_n 1_\Omega)\big) = \pi\big((\delta_1(\underset{\sim}{H}), ..., \delta_n(\underset{\sim}{H}))\big) = H_0^t S_0 = 1$. Die σ-Additivität von Q_π ergibt sich schließlich direkt aus der Eigenschaft 3) von π; folglich ist Q_π ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Aus Eigenschaft 2) folgt $Q_\pi(G) = 0 \Leftrightarrow \pi\big((0, ..., 0, B_n 1_G)\big) = 0 \Leftrightarrow B_n 1_G = 0$ P_w-f.s. $\Leftrightarrow P_w(G) = 0$ für alle $G \in \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$.

Als nächstes wird gezeigt, daß $(\alpha_i A_i)_{0\leq i\leq n}$ ein Martingal bezüglich Q_π ist. Dafür benötigt man das folgende

Hilfslemma:
Sei π ein konsistentes Preissystem und Q_π das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß, festgelegt durch $Q_\pi(G) = \pi\big((0, ..., 0, B_n 1_G)\big)$. Dann gilt

$$\pi(\underset{\sim}{C}) = E_{Q_\pi}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i) \quad \textit{für alle } \underset{\sim}{C} \in \mathfrak{C}. \tag{+}$$

Beweis des Hilfslemmas: Für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ seien $(a_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ und $(G_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $a_{i,j} \in [0, \infty)$ und $G_{i,j} \in \mathcal{F}_i$ für alle $j \in \mathbb{N}$ sowie $G_{i,j} \cap G_{i,m} = \emptyset$ für alle $j, m \in \mathbb{N}$ mit $j \neq m$. Dann folgt für den Claim

$$\underset{\sim}{C} = \big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{1,j} \cdot 1_{G_{1,j}}, ..., \sum_{j=1}^{\infty} a_{n,j} \cdot 1_{G_{n,j}}\big) = \sum_{j=1}^{\infty} \big(a_{1,j} \cdot 1_{G_{1,j}}, ..., a_{n,j} \cdot 1_{G_{n,j}}\big)$$

aus den Eigenschaften von π und dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned}
\pi(\underset{\sim}{C}) &\overset{3)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \pi\big((a_{1,j} \cdot 1_{G_{1,j}}, ..., a_{n,j} \cdot 1_{G_{n,j}})\big) \\
&\overset{4)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \pi\big((0, ..., 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_n a_{i,j} \cdot 1_{G_{i,j}})\big) \\
&\overset{1)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{i,j} \cdot \pi\big((0, ..., 0, B_n 1_{G_{i,j}})\big) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{i,j} \cdot Q_\pi(G_{i,j}) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} E_{Q_\pi}\big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{i,j} \cdot 1_{G_{i,j}}\big) \\
&= E_{Q_\pi}\big(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{i,j} \cdot 1_{G_{i,j}}\big) \\
&= E_{Q_\pi}\big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_i a_{i,j} \cdot 1_{G_{i,j}}\big) \\
&= E_{Q_\pi}\big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i\big). \qquad (++)
\end{aligned}$$

Für $\underset{\sim}{C}_0 = (C_{0,1}, ..., C_{0,n}) \in \mathfrak{C}^+$ betrachte man die Folge $(\underset{\sim}{C}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\underset{\sim}{C}_k = \big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^k} \cdot 1_{\{\frac{j}{2^k} \le C_{0,1} < \frac{j+1}{2^k}\}}, ..., \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^k} \cdot 1_{\{\frac{j}{2^k} \le C_{0,n} < \frac{j+1}{2^k}\}}\big).$$

Sei $M := \{\omega \in \Omega :\ C_{0,i}(\omega) \ge 0 \text{ für alle } 1 \le i \le n\}$. Dann gilt

$$0 \le \sup_{\omega\in M} |C_{k,i}(\omega) - C_{0,i}(\omega)| \le \frac{1}{2^k}$$

und damit

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\omega\in M} |C_{k,i}(\omega) - C_{0,i}(\omega)| = 0,$$

$i = 1, ..., n$, so daß zusammen mit Lemma 5.7 die Gleichung

$$\pi(\underset{\sim}{C}_0) = \lim_{k\to\infty} \pi(\underset{\sim}{C}_k) \overset{(++)}{=} \lim_{k\to\infty} E_{Q_\pi}\big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_{k,i}\big) = E_{Q_\pi}\big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_{0,i}\big) \qquad (+++)$$

folgt (wobei im letzten Schritt eingeht, daß $(C_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$ isoton gegen $C_{0,i}$ konvergiert, $i = 1, ..., n$).

Für beliebiges $\underset{\sim}{C} \in \mathfrak{C}$ existiert ein $K \in \mathbb{R}$ mit $C_i \geq K$ P_w-f.s., $1 \leq i \leq n$. Dann gilt $(C_1 - K, ..., C_n - K) \in \mathfrak{C}^+$, so daß schließlich

$$\begin{aligned}
\pi(\underset{\sim}{C}) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K &= \pi(\underset{\sim}{C}) + \pi\big((-K, ..., -K)\big) \\
&= \pi\big((C_1 - K, ..., C_n - K)\big) \\
&\overset{(+++)}{=} E_{Q_\pi}\big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (C_i - K)\big) \\
&= E_{Q_\pi}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K,
\end{aligned}$$

also $\pi(\underset{\sim}{C}) = E_{Q_\pi}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i)$ folgt.

□

Unter Verwendung des Hilfslemmas wird nun gezeigt, daß

$$E_{Q_\pi}(\alpha_k A_k) = A_0$$

für alle $k \in \{1, ..., n\}$ gilt. Dafür betrachte man die Handelsstrategie $\underset{\sim}{H}$ mit

$$H_j = \begin{cases} (1,0)^t, & 1 \leq j \leq k-1, \\ (0, \alpha_k A_k)^t, & k \leq j \leq n-1, \\ (0,0)^t, & j = n. \end{cases}$$

Der zugehörige Auszahlungsprozeß beträgt $\delta_i(\underset{\sim}{H}) = 0$, $1 \leq i \leq n-1$, und $\delta_n(\underset{\sim}{H}) = \alpha_k B_n A_k$. Aus der Konsistenz von π und der Hilfsbehauptung ergibt sich

$$A_0 = H_0^t S_0 = \pi\big((0, ..., 0, \alpha_k B_n A_k)\big) \overset{(+)}{=} E_{Q_\pi}(\alpha_k A_k).$$

Schließlich ist noch zu zeigen, daß für alle $k, m \in \{0, ..., n\}$ mit $k < m$ und für alle $G \in \mathcal{F}_k$ die Gleichung

$$E_{Q_\pi}(\alpha_m A_m 1_G) = E_{Q_\pi}(\alpha_k A_k 1_G)$$

erfüllt ist. Für $G \in \mathcal{F}_k$ betrachte man dazu die Handelsstrategie $\underset{\sim}{\widehat{H}}$ mit

$$\widehat{H}_j = \begin{cases} (1,0)^t, & 1 \leq j \leq k-1, \\ (1_{G^c}, \alpha_k A_k 1_G)^t, & k \leq j \leq m-1, \\ (0, \alpha_m A_m 1_{G^c} + \alpha_k A_k 1_G)^t, & m \leq j \leq n-1, \\ (0,0)^t, & j = n. \end{cases}$$

Die zugehörigen Auszahlungen sind gegeben durch $\delta_j(\underset{\sim}{\widehat{H}}) = 0$, $1 \leq j \leq n-1$, sowie $\delta_n(\underset{\sim}{\widehat{H}}) = (\alpha_m A_m 1_{G^c} + \alpha_k A_k 1_G) B_n$, und man erhält

$$\begin{aligned}
E_{Q_\pi}(\alpha_m A_m) &= A_0 \\
&= \widehat{H}_0^t S_0 \\
&= \pi\big((0, ..., 0, (\alpha_m A_m 1_{G^c} + \alpha_k A_k 1_G) B_n)\big) \\
&\overset{(+)}{=} E_{Q_\pi}(\alpha_m A_m 1_{G^c} + \alpha_k A_k 1_G),
\end{aligned}$$

folglich also $E_{Q_\pi}(\alpha_m A_m 1_G) = E_{Q_\pi}(\alpha_k A_k 1_G)$. Insgesamt wurde damit bewiesen, daß Q_π ein äquivalentes Martingalmaß bildet.

c) Es bleibt zu zeigen, daß die Abbildungen $\psi_1 : \pi \mapsto Q_\pi$ und $\psi_2 : Q \mapsto \pi_Q$ bijektiv sind mit $\psi_1^{-1} = \psi_2$.

Sei Q_0 ein äquivalentes Martingalmaß. Dann gilt $\psi_1 \circ \psi_2(Q_0) = Q_{\pi_{Q_0}}$ mit

$$Q_{\pi_{Q_0}}(G) = \pi_{Q_0}\big((0, ..., 0, B_n 1_G)\big) = E_{Q_0}(1_G) = Q_0(G) \quad \forall\, G \in \mathcal{F}_n = \mathcal{F},$$

d.h. $\psi_1 \circ \psi_2 = id$.

Für ein konsistentes Preissystem π_0 ergibt sich $\psi_2 \circ \psi_1(\pi_0) = \pi_{Q_{\pi_0}}$ mit

$$\pi_{Q_{\pi_0}}(\underset{\sim}{C}) = E_{Q_{\pi_0}}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i) \overset{(+)}{=} \pi_0(\underset{\sim}{C}) \quad \forall\, \underset{\sim}{C} \in \mathfrak{C},$$

d.h. $\psi_2 \circ \psi_1 = id$.

□

Aus Theorem 5.6 und Definition/Korollar 1.20 ergibt sich nun eine wichtige Eigenschaft von konsistenten Preissystemen:

Korollar 5.8
In einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell sei $\underset{\sim}{C}$ ein Claim mit regelmäßigen nicht-negativen Auszahlungen und endlichem oberen Preis. Dann ist der Anfangspreis $\pi(\underset{\sim}{C})$ in jedem konsistenten Preissystem π arbitragefrei.

Mit denselben Methoden wie im Beweis von Satz 4.56 ergibt sich aus Theorem 5.6 weiterhin für Finanzderivate, bei denen $\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i$ P_w-f.s. nach unten beschränkt ist, eine Ungleichung zwischen den Anfangspreisen in konsistenten Preissystemen und den oberen sowie unteren Preisen:

Korollar 5.9
In einem arbitragefreien Aktie/Bond Modell sei $\underset{\sim}{C}$ ein Claim mit regelmäßigen Auszahlungen, für den $\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i$ P_w-f.s. nach unten beschränkt ist. Weiter sei π ein konsistentes Preissystem. Dann gilt

$$a_\star(\underset{\sim}{C}) \leq \inf_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i) \leq \pi(\underset{\sim}{C}) \leq \sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i) \leq a^\star(\underset{\sim}{C}).$$

Hängen die Auszahlungen $C_1, ..., C_n$ zusätzlich über komponentenweise konvexe Funktionen von den Faktoren des Aktienpreisprozesses ab, so ist $\pi(\underset{\sim}{C})$ nicht kleiner als der faire Preis des Claims im inneren deterministisch/dichotomen Modell, und im Falle $\min supp(P_w^{Y_i}) > 0$ sowie $\sup supp(P_w^{Y_i}) < \infty$, $i = 1, ..., n$, ist $\pi(\underset{\sim}{C})$ nicht größer als der faire Preis des Claims im äußeren Binomialmodell.

Die oberen und unteren Preise von Finanzderivaten liefern folglich zumindest wieder kritische Werte, anhand derer untersucht werden kann, ob die Anfangspreise unter Verwendung eines konsistenten Preissystems bestimmt worden sind. Die Abbildungen $a_\star : \underset{\sim}{C} \mapsto a_\star(\underset{\sim}{C})$ und $a^\star : \underset{\sim}{C} \mapsto a^\star(\underset{\sim}{C})$ selbst bilden jedoch nur in Ausnahmefällen ein konsistentes Preissystem:

Satz 5.10
In einem Aktie/Bond Modell sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) Die Abbildung $a_\star : \mathfrak{C} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\underset{\sim}{C} \mapsto a_\star(\underset{\sim}{C})$ liefert ein konsistentes Preissystem.

ii) Die Abbildung $a^\star : \mathfrak{C} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\underset{\sim}{C} \mapsto a^\star(\underset{\sim}{C})$ liefert ein konsistentes Preissystem.

iii) $|\mathcal{P}| = 1$, d.h. das Modell ist arbitragefrei und vollständig.

Beweis: Es gelte $|\mathcal{P}| = 1$, d.h. $\mathcal{P} = \{Q_0\}$. Gemäß Satz 1.28 ist im Aktie/Bond Modell jedes Finanzderivat hedgebar und wegen $|supp(P_w)| \leq 2^n$ auch P_w-f.s. beschränkt. Hieraus folgt für jeden Claim $\underset{\sim}{C}$ mit regelmäßigen Auszahlungen

$$a_\star(\underset{\sim}{C}) = a^\star(\underset{\sim}{C}) = E_{Q_0}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i) = \pi_{Q_0}(\underset{\sim}{C}),$$

wobei π_{Q_0} das zu Q_0 gehörige konsistente Preissystem sei.

Sei nun angenommen, daß $a_\star$ ein konsistentes Preissystem liefert. Aus Theorem 5.6 folgt dann die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes Q_0 mit

$$a_\star(\underset{\sim}{C}) = E_{Q_0}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i)$$

für alle $\underset{\sim}{C} \in \mathfrak{C}$. Für jedes $G \in \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ ist der Claim $(0, ..., 0, B_n 1_G)$ ein Element von $\mathfrak{C}$ und besitzt aufgrund der Beschränktheit der Auszahlungsfunktionen einen endlichen oberen Preis, so daß die lower hedging duality 4.48 die Gleichung

$$Q_0(G) = E_{Q_0}(1_G) = a_\star\big((0, ..., 0, B_n 1_G)\big) = \inf_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(1_G) = \inf_{Q \in \mathcal{P}} Q(G) \qquad (\star)$$

liefert. Sei nun $Q_1 \in \mathcal{P}$ ein beliebiges äquivalentes Martingalmaß. Aus ($\star$) folgt $Q_0(G) \leq Q_1(G)$ für alle $G \in \mathcal{F}$, woraus sich direkt $Q_0 = Q_1$ ergibt.

Analog erhält man aus der Konsistenz von $a^\star$ die Existenz und Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes.

□

Im Fall $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^n P_w^{Y_i}$ läßt sich weiterhin die Frage beantworten, ob eine europäische Call- oder Put-Option existiert, deren oberer oder unterer Preis mit dem Anfangspreis der Option in einem konsistenten Preissystem übereinstimmt:

Satz 5.11
Im Aktie/Bond Modell seien $Y_1, ..., Y_n$ nicht-deterministisch, und es seien die folgenden Annahmen erfüllt:

$$A1: \ P_w \sim \bigotimes_{i=1}^n P_w^{Y_i}.$$

$A2:$ *Das Modell ist arbitragefrei.*

$$A3: \ \begin{cases} \sup \mathit{supp}(P_w^{Y_i}) = \sup \mathit{supp}(P_w^{Y_j}) \\ \min \mathit{supp}(P_w^{Y_i}) = \min \mathit{supp}(P_w^{Y_j}) \end{cases} \ \text{für alle } i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Weiterhin gelte entweder

$\widehat{A}4:$ *Es existiert eine europäische Call- oder Put-Option, deren oberer oder unter Preis mit dem Preis der Option in einem konsistenten Preissystem übereinstimmt, und deren Ausübungspreis K die Bedingungen $P_w(A_n > K) > 0$ sowie $P_w(A_n < K) > 0$ erfüllt; weiter existiere kein $i \in \{1, ..., n\}$ mit $|\mathit{supp}(P_w^{Y_i})| > |\mathit{supp}(P_w^{Y_j})| \, \forall \, j \neq i$.*

oder

$\widehat{A}4:$ *Es existieren n verschiedene europäische Call- oder Put-Optionen, für die jeweils der obere oder untere Preis mit dem Preis der Option in einem konsistenten Preissystem übereinstimmt, und deren Ausübungspreise $K_1, ..., K_n$ die Bedingungen $P_w(A_n > K_i) > 0$ sowie $P_w(A_n < K_i) > 0$ erfüllen, $i = 1, ..., n$.*

Dann liegt ein Binomialmodell mit Parametern d, u und $r_1, ..., r_n$ vor, die für $i = 1, ..., n$ die Bedingungen $0 < d < 1 + r_i < u < \infty$ erfüllen.

Beweis: Die Ungleichungen $0 \leq (A_n - K)^+ \leq A_n$ und $0 \leq (K - A_n)^+ \leq K$ liefern $\sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q((A_n - K)^+) < \infty$ und $\sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q((K - A_n)^+) < \infty$. Für die zugehörigen Claims der Form $(0, ..., 0, C_n)$ gilt daher

$$\Pi(C_n) = \{E_Q(\alpha_n C_n) | Q \in \mathcal{P}, E_Q(C_n) < \infty\} \neq \emptyset,$$

und die Dualitätssätze 4.14 und 4.50 für die oberen und unteren Preise liefern $a_\star(C_n) = \inf_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\alpha_n C_n)$ sowie $a^\star(C_n) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\alpha_n C_n)$. Falls der untere (bzw. obere) Preis einer Call- oder Put-Option mit dem Anfangspreis in einem konsistenten Preissystem übereinstimmt, so folgt $\inf_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\alpha_n C_n) \in \Pi(C_n)$ (bzw. $\sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(\alpha_n C_n) \in \Pi(C_n)$). Aus Satz 1.17 ergibt sich nun die Hedgebarkeit dieser Option, so daß man Satz 5.11 direkt aus Theorem 2.14 erhält.

□

Korollar 5.12
In $BS_{(n)}$ Modellen, Gaußschen Modellen und bedingten Gaußschen Modellen existiert keine einzige europäische Call- oder Put-Option, deren oberer oder unterer Preis mit dem Preis der Option in einem konsistenten Preissystem übereinstimmt.

Auch unter dem Aspekt der Konsistenz erweist sich das Konzept der unteren und oberen Preise als ungeeignet für die Bewertung von Finanzderivaten, insbesondere für Preisberechnungen von europäischen Call- und Put-Optionen in $BS_{(n)}$ Modellen sowie Gaußschen und bedingten Gaußschen Modellen. Allerdings liefern die unteren und oberen Preise wieder kritische Werte, anhand derer untersucht werden kann, ob der Ausgabepreis eines Finanzderivates mit regelmäßigen Auszahlungen unter Verwendung eines konsistenten Preissystems berechnet worden ist.

5.3 Untersuchung auf Konvergenzeigenschaften

In Satz 2.30 wurde gezeigt, daß die Aktienpreisprozesse von $BS_{(n)}$ Modellen mit gleichem Horizont T, Anfangsaktienkurs A_0 und Parametern μ, σ und ρ für $n \to \infty$ bei Interpolation mit Hilfe geeignet gewählter Exponentialfunktionen schwach gegen den Aktienpreisprozeß eines Black-Scholes Modells konvergieren. Bei linearer Interpolation konnte darüberhinaus zumindest die schwache Konvergenz aller endlich-dimensionalen Randverteilungen des Aktienpreisprozesses gegen die entsprechenden Randverteilungen des Black-Scholes Modells bewiesen werden (vgl. Satz 2.30).

Betrachtet man speziell eine Folge von $BS_{(n)}$ Modellen, welche durch zunehmend feinere Beobachtungen des Aktienpreisprozesses *eines* (vorgegebenen) Black-

Scholes Modells entsteht, so konvergieren die Aktienpreisprozesse dieser $BS_{(n)}$ Modelle bei linearer Interpolation zwischen den Handelszeitpunkten gemäß Satz 2.31 sogar *punktweise* gegen denjenigen des Black-Scholes Modells.

Im zeitstetigen Black-Scholes Modell existieren für alle Black-Scholes Claims C_T mit $e^{-\rho T}C_T \in \mathcal{L}_1(Q_{BS})$ (wobei Q_{BS} das eindeutig bestimmte äquivalente Martingalmaß in diesem Modell bezeichne) Martingalhedges und somit eindeutig bestimmte faire Preise.

Hieraus ergibt sich die folgende naheliegende Forderung an Bewertungskonzepte in unvollständigen zeitdiskreten Aktie/Bond Modellen: Wenn bei einer Folge zeitdiskreter Modelle die Aktienpreisprozesse bei entsprechender Einbettung in den zeitstetigen Rahmen durch eine geeignete Interpolation schwach gegen den Aktienpreisprozeß eines vollständigen zeitstetigen Modells konvergieren, dann sollten auch die Ausgabepreise von Finanzderivaten gegen die fairen Preise im „Grenzmodell“ konvergieren.

Die oberen und unteren Preise besitzen diese Eigenschaft jedoch i.a. nicht. Man betrachte z.B. eine Aktie mit Anfangspreis $A_0 > 0$, deren Preisverlauf durch eine geometrische Brownsche Bewegung mit Trend $\rho > 0$ und Volatilität $\sigma > 0$ beschrieben wird, d.h. es gelte

$$(A_t^{BS})_{t\in[0,T]} = \left(A_0 \exp(\sigma W_t + (\rho - \frac{\sigma^2}{2})t)\right)_{t\in[0,T]}.$$

Weiter sei $\underset{\sim}{B} = (e^{\rho t})_{t\in[0,T]}$ der Preisverlauf eines festverzinslichen Wertpapiers. Approximiert man das zugehörige Black-Scholes Modell durch eine Folge von zeitdiskreten $BS_{(n)}$ Modellen, indem man für $n \in \mathbb{N}$ den Preisprozeß $(S_{k\frac{T}{n}})_{k\in\{0,\dots,n\}}$ mit

$$S_{k\frac{T}{n}} = (A^{BS}_{k\frac{T}{n}}, e^{\rho k\frac{T}{n}})^t$$

betrachtet, so gilt gemäß Satz 2.31 für die durch lineare Interpolation eingebetteten Aktienpreisprozesse

$$A^{BS}_{\lfloor\frac{nt}{T}\rfloor\frac{T}{n}} + \left(\frac{nt}{T} - \lfloor\frac{nt}{T}\rfloor\right)\left(A^{BS}_{\lfloor\frac{nt}{T}+1\rfloor\frac{T}{n}} - A^{BS}_{\lfloor\frac{nt}{T}\rfloor\frac{T}{n}}\right)$$

$\lim_{n\to\infty}({}^lA_t^n)_{t\in[0,T]}(\omega) = (A_t^{BS})_{t\in[0,T]}(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$, d.h. es liegt *punktweise* Konvergenz vor.

Für jede amerikanische oder europäische Call-Option mit Ausübungspreis $K > 0$ stimmt jedoch der obere Preis in den $BS_{(n)}$ Modellen nach Satz 4.28 mit dem Anfangsaktienkurs A_0 überein, so daß für jedes dieser Finanzderivate die Folge der oberen Preise trivialerweise konvergiert, jedoch *nicht* gegen den zugehörigen fairen Preis im Black-Scholes Modell.

Der untere Preis einer amerikanischen oder europäischen Call-Option mit Ausübungspreis $K > 0$ in einem $BS_{(n)}$ Modell ist gemäß Theorem 4.57 und den Bemerkungen 4.58 und 4.59 gegeben durch ihren fairen Preis $e^{-\rho T}(A_0 e^{\rho T} - K)^+$ im zugehörigen inneren deterministisch/dichotomen Modell, d.h. im Modell mit Aktienpreisprozeß $(A_0 e^{\rho k \frac{T}{n}})_{k \in \{0,\dots,n\}}$. Für jedes dieser Finanzderivate konvergiert demnach auch die Folge der unteren Preise, jedoch nicht gegen den zugehörigen fairen Preis im Black-Scholes Modell.

Aus Satz 4.28 folgt generell, daß bei der Approximation eines zeitstetigen Modells durch eine Folge zeitdiskreter Modelle mit stochastisch unabhängigen Faktoren die Folge der oberen Preise amerikanischer und europäischer Call-Optionen sowie europäischer Put-Optionen konstant ist, wenn in jedem zeitdiskreten Modell zumindest bei der Verteilung eines Faktors der Träger die Null enthält und nicht nach oben beschränkt ist.

Auch hier ergibt sich wieder ein Kritikpunkt am Konzept oberer und unterer Preise: Diese konvergieren bei zunehmend feinerer Approximation eines zeitstetigen Modells durch zeitdiskrete Modelle i.a. nicht gegen die fairen Preise der Finanzderivate im Grenzmodell.

Andererseits zeigen die folgenden Ergebnisse, daß durch geeignetes Trunkieren der Faktoren in den zeitdiskreten Modellen bei einer Reihe von Finanzderivaten die Konvergenz von oberen und unteren Preisen gegen die zugehörigen fairen Preise im approximierten Modell erreicht werden kann:

Satz 5.13

Gegeben sei ein Black-Scholes Modell mit Anfangsaktienkurs $A_0 > 0$, Zeithorizont T, Trend und Zinsrate $\rho > 0$ sowie Volatilität $\sigma > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien weiter $Z_1^n, \dots, Z_n^n$ stochastisch unabhängige und identisch verteilte $[a_n, b_n]$-wertige Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ mit $EZ_1^n = (\rho - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{n}$ und $VarZ_1^n = \sigma^2 \frac{T}{n}$, wobei $a_n = \inf supp(P_n^{Z_1^n}) > -\infty$ und $b_n = \sup supp(P_n^{Z_1^n}) < \infty$ so gewählt sind, daß für $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned} c_n &:= n \cdot \Big(b_n \cdot \frac{e^{\rho \frac{T}{n}} - e^{a_n}}{e^{b_n} - e^{a_n}} + a_n \cdot \frac{e^{b_n} - e^{\rho \frac{T}{n}}}{e^{b_n} - e^{a_n}}\Big), \\ d_n &:= n \cdot \Big(b_n^2 \cdot \frac{e^{\rho \frac{T}{n}} - e^{a_n}}{e^{b_n} - e^{a_n}} + a_n^2 \cdot \frac{e^{b_n} - e^{\rho \frac{T}{n}}}{e^{b_n} - e^{a_n}}\Big) \end{aligned}$$

die Bedingungen

$$\lim_{n \to \infty} c_n = (\rho - \frac{\sigma^2}{2})T, \quad \lim_{n \to \infty} d_n = \sigma^2 T$$

erfüllt sind. Schließlich betrachte man für jedes $n \in \mathbb{N}$ das n-Perioden Aktie/Bond Modell, dessen Preisprozeß $(S^n_{k\frac{T}{n}})_{k\in\{0,\dots,n\}}$ festgelegt ist durch

$$S^n_{k\frac{T}{n}} = (A^n_{k\frac{T}{n}}, B^n_{k\frac{T}{n}})^t = \big(A_0 \prod_{i=1}^{k} e^{Z^n_i}, e^{\rho k \frac{T}{n}}\big)^t.$$

Dann gilt:

i) $\big(A^n_{\lfloor \frac{nt}{T}\rfloor \frac{T}{n}} \cdot \exp\big((\frac{nt}{T} - \lfloor\frac{nt}{T}\rfloor) Z^n_{\lfloor\frac{nt}{T}+1\rfloor}\big)\big)_{t\in[0,T]} \xrightarrow{w} (A^{BS}_t)_{t\in[0,T]}$, *d.h. die mit Exponentialfunktionen interpolierten Aktienpreisprozesse der n-Perioden Aktie/Bond Modelle konvergieren schwach gegen den Aktienpreisprozeß des Black-Scholes Modells.*

ii) Sei C_T die terminale Auszahlung eines Finanzderivates, wobei eine stetige und beschränkte Funktion f_T existiere mit $C_T = f(A_T)$ (d.h. der Claim hänge nur vom terminalen Aktienkurs ab). Weiter werde für jedes $n \in \mathbb{N}$ der obere Preis von C_T im n-Perioden Aktie/Bond Modell mit $a^\star_n(C_T)$ bezeichnet. Dann erhält man $\lim_{n\to\infty} a^\star_n(C_T) = a^{BS}(C_T)$, d.h. die Folge der oberen Preise konvergiert gegen den eindeutig bestimmten fairen Anfangspreis des Finanzderivates im Black-Scholes Modell.

Beweis: i) Für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, ..., n\}$ definiere man $\varepsilon^n_i := \frac{Z^n_i - EZ^n_i}{\sqrt{Var Z^n_i}}$. Dann gilt

$$A_{\lfloor \frac{nt}{T}\rfloor \frac{T}{n}} \cdot \exp\big((\frac{nt}{T} - \lfloor\frac{nt}{T}\rfloor) Z^n_{\lfloor\frac{nt}{T}+1\rfloor}\big) = A_0 \exp\big(X^n_t\big)$$

mit

$$\begin{aligned} X^n_t &= \sum_{i=1}^{\lfloor\frac{nt}{T}\rfloor} Z^n_i + (\frac{nt}{T} - \lfloor\frac{nt}{T}\rfloor) Z^n_{\lfloor\frac{nt}{T}+1\rfloor} \\ &= \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} \cdot \big(\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{nt}{T}\rfloor} \varepsilon^n_i + (\frac{nt}{T} - \lfloor\frac{nt}{T}\rfloor)\varepsilon^n_{\lfloor\frac{nt}{T}+1\rfloor}\big) + (\rho - \frac{\sigma^2}{2})t. \end{aligned}$$

Durch verteilungsgleiches Ersetzen von ε^n_i durch $\hat{\varepsilon}^n_i$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, ..., n\}$ unter Verwendung einer Familie $\{\hat{\varepsilon}^n_i : n \in \mathbb{N}, i \in \{1, ..., n\}\}$ von stochastisch unabhängigen Zufallsgrößen folgt nun Aussage i) von Satz 5.13 durch Anwendung des Satzes von Donsker (vgl. Satz 2.28) und des mapping theorems (vgl. [6], Theorem 2.7).

ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind die Faktoren $e^{Z^n_1}, ..., e^{Z^n_n}$ des Aktienpreisprozesses stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit

$$0 < e^{a_n} = \inf supp(P_n^{\exp(Z^n_1)}) < e^{\rho\frac{T}{n}} < e^{b_n} = \sup supp(P_n^{\exp(Z^n_1)}) < \infty.$$

Gemäß Theorem 4.39 ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ der obere Preis $a_n^\star(C_T)$ gegeben durch den fairen Preis des Finanzderivates im äußeren n-Perioden Cox-Ross-Rubinstein Modell mit Parametern e^{a_n}, e^{b_n} und $r_n = e^{\rho\frac{T}{n}} - 1$. Dieser kann wie folgt berechnet werden: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $X_1^n, ..., X_n^n$ stochastisch unabhängige und identisch verteilte Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, W_n)$ mit

$$W_n^{X_1^n} = \frac{e^{\rho\frac{T}{n}} - e^{a_n}}{e^{b_n} - e^{a_n}} \cdot \delta_{e^{b_n}} + \frac{e^{b_n} - e^{\rho\frac{T}{n}}}{e^{b_n} - e^{a_n}} \cdot \delta_{e^{a_n}}.$$

Man betrachte nun das n-Perioden Cox-Ross-Rubinstein Modell mit Preisprozeß

$$\big((A_0, 1)^t, (A_0 X_1^n, e^{\rho\frac{T}{n}})^t, ..., (A_0 \prod_{i=1}^n X_i^n, e^{\rho T})^t\big)$$

und äquivalentem Martingalmaß W_n. Dann gilt

$$a_n^\star(C_T) = E_{W_n}\big(e^{-\rho T} f_T(A_0 \prod_{i=1}^n X_i^n)\big).$$

Der Aktienpreisprozeß des Cox-Ross-Rubinstein Modells läßt sich darstellen als

$$A_n = A_0 \prod_{i=1}^n X_i^n = A_0 \exp(\sum_{i=1}^n \ln X_i^n),$$

und aus dem Satz von Lindeberg für Dreiecksschemata (vgl. [1], Satz 37.8) ergibt sich für $Y_n := \frac{\sum_{i=1}^n \ln X_i^n - nE\ln X_1^n}{\sqrt{nVar \ln X_1^n}}$

$$W_n^{Y_n} \xrightarrow{w} N(0,1). \tag{$\star$}$$

Nach Voraussetzung gilt weiterhin

$$\begin{aligned} nE\ln X_1^n &= n\big(b_n \cdot \frac{e^{\rho\frac{T}{n}} - e^{a_n}}{e^{b_n} - e^{a_n}} + a_n \cdot \frac{e^{b_n} - e^{\rho\frac{T}{n}}}{e^{b_n} - e^{a_n}}\big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\rho - \frac{\sigma^2}{2})T, \\ nVar \ln X_1^n &= n\big(b_n^2 \cdot \frac{e^{\rho\frac{T}{n}} - e^{a_n}}{e^{b_n} - e^{a_n}} + a_n^2 \cdot \frac{e^{b_n} - e^{\rho\frac{T}{n}}}{e^{b_n} - e^{a_n}}\big) - n(E\ln X_1^n)^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2 T - 0, \end{aligned}$$

so daß sich aus $(\star)$ zusammen mit dem mapping theorem

$$\sum_{i=1}^n \ln X_i^n = \sqrt{nVar \ln X_1^n} \cdot Y_n + nE\ln X_1^n \xrightarrow{w} U$$

und damit

$$\prod_{i=1}^n X_i^n \xrightarrow{w} e^U$$

für eine $N\big((\rho - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T\big)$-verteilte Zufallsgröße U ergibt. Die terminalen Aktienpreisprozesse der Cox-Ross-Rubinstein Modelle konvergieren folglich schwach gegen den terminalen Aktienpreisprozeß des Black-Scholes Modells, so daß aus der Stetigkeit und Beschränktheit von C_T schließlich

$$\lim_{n\to\infty} a_n^\star(C_T) = a^{BS}(C_T)$$

folgt.

$\square$

Bemerkung 5.14
Die bei der Approximation eines Black-Scholes Modells durch Cox-Ross-Rubinstein Modelle häufig verwendeten Parameter $-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}$ und $\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}$ (vgl. z.B. [7], Abschnitt 4.6.2 und [50], Abschnitt 2.1.2) erweisen sich für jedes $n \in \mathbb{N}$ als eine geeignete Wahl von a_n und b_n:

$$\text{1)}\quad n\Big(b_n^2 \cdot \tfrac{e^{\rho\frac{T}{n}} - e^{a_n}}{e^{b_n} - e^{a_n}} + a_n^2 \cdot \tfrac{e^{b_n} - e^{\rho\frac{T}{n}}}{e^{b_n} - e^{a_n}}\Big) \;=\; n\sigma^2\tfrac{T}{n} = \sigma^2 T,$$

$$\begin{aligned}\text{2)}\quad n\Big(b_n \cdot \tfrac{e^{\rho\frac{T}{n}} - e^{a_n}}{e^{b_n} - e^{a_n}} + a_n \cdot \tfrac{e^{b_n} - e^{\rho\frac{T}{n}}}{e^{b_n} - e^{a_n}}\Big) \;&=\; \sigma\sqrt{Tn}\cdot\Big(2\tfrac{\exp(\rho\frac{T}{n}) - \exp(-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}})}{\exp(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}) - \exp(-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}})} - 1\Big)\\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\rho - \tfrac{\sigma^2}{2})T.\end{aligned}$$

(Die Konvergenzaussage in 2) ergibt sich durch einfache Anwendung der Regel von de l'Hospital.)

Analog zum Beweis von Satz 5.13 erhält man schließlich ebenfalls eine Konvergenzaussage für die unteren Preise:

Bemerkung 5.15
Existieren in der Situation von Satz 5.13 zusätzlich für jedes $n \in \mathbb{N}$ Parameter $\underline{a}_n \in [a_n, \rho\frac{T}{n})$ und $\underline{b}_n \in (\rho\frac{T}{n}, b_n]$ mit $\underline{a}_n = \max\{z_1 : z_1 \in supp(P_n^{Z_1^n}) \cap [a_n, \rho\frac{T}{n}]\}$, $\underline{b}_n = \min\{z_1 : z_1 \in supp(P_n^{Z_1^n}) \cap [\rho\frac{T}{n}, b_n]\}$, welche den Bedingungen

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\underline{b}_n \cdot \frac{e^{\rho\frac{T}{n}} - e^{\underline{a}_n}}{e^{\underline{b}_n} - e^{\underline{a}_n}} + \underline{a}_n \cdot \frac{e^{\underline{b}_n} - e^{\rho\frac{T}{n}}}{e^{\underline{b}_n} - e^{\underline{a}_n}}\right) = (\rho - \frac{\sigma^2}{2})T,$$

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\underline{b}_n^2 \cdot \frac{e^{\rho\frac{T}{n}} - e^{\underline{a}_n}}{e^{\underline{b}_n} - e^{\underline{a}_n}} + \underline{a}_n^2 \cdot \frac{e^{\underline{b}_n} - e^{\rho\frac{T}{n}}}{e^{\underline{b}_n} - e^{\underline{a}_n}}\right) = \sigma^2 T$$

genügen, so konvergiert auch die Folge der unteren Preise von C_T in den zeitdiskreten Modellen und damit insbesondere auch jede Folge von arbitragefreien oder konsistenten Preisen gegen den fairen Preis des Claims im Black-Scholes Modell.

Aus $f(x) = (K - x)^+ \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$ für alle $K > 0$ und der Zerlegung $(K - x)^+ = K - x + (x - K)^+$ ergibt sich schließlich:

Bemerkung 5.16
Die Aussagen von Satz 5.13 und Bemerkung 5.15 gelten insbesondere für die oberen und unteren Preise von europäischen Call- und Put-Optionen.

Bei der Approximation eines Black-Scholes Modells durch unvollständige zeitdiskrete Modelle mit stochastisch unabhängigen Faktoren kann folglich erreicht werden, daß die oberen und unteren Preise vieler Finanzderivate mit terminaler Auszahlung gegen die zugehörigen fairen Preise im Black-Scholes Modell konvergieren. Allerdings müssen die Grenzen für die Träger der Faktoren geeignet gewählt werden; insbesondere dürfen keine $BS_{(n)}$ Modelle oder Gaußschen bzw. bedingten Gaußschen Modelle verwendet werden.

Kapitel 6

Schlußbemerkungen

In diesem Kapitel sollen die wichtigsten Ergebnisse der vorliegenden Arbeit reflektiert und sich daraus ergebende offene Probleme vorgestellt werden.

Ausgangspunkt dieser Arbeit war die Suche nach geeigneten Preiskonzepten für arbitragefreie zeitdiskrete Aktie/Bond Modelle. Durch eine deutliche Verallgemeinerung eines Ergebnisses von A. Irle (vgl. [34]) wurde im zweiten Kapitel gezeigt, daß schon unter sehr schwachen Voraussetzungen die Forderung der Absicherbarkeit einer einzigen europäischen oder amerikanischen Call-Option oder europäischen Put-Option das Vorliegen eines Binomialmodells impliziert. Als Folgerung ergab sich, daß in vielen praxisrelevanten Modellen, wie z.B. in Gaußschen und bedingten Gaußschen Modellen sowie in $BS_{(n)}$ Modellen, welche zur zeitdiskreten Approximation von Black-Scholes Modellen verwendet werden, keines dieser fundamentalen Finanzderivate absicherbar ist. Hieraus ergab sich die Notwendigkeit, für Modelle mit nicht ausschließlich deterministischen oder dichotomen Faktoren alternative Preiskonzepte zur Verfügung zu stellen, die nicht auf der Bildung von exakt replizierenden Handelsstrategien basieren.

In diesem Zusammenhang ist noch zu untersuchen, ob sich die Ergebnisse des zweiten Kapitels auch auf amerikanische Put-Optionen übertragen lassen. Anders als bei amerikanischen Call-Optionen bilden ihre Auszahlungsfunktionen kein $\mathcal{P}$-Submartingal, so daß sich hier keine direkte Äquivalenz zur Absicherbarkeit der europäischen Put-Optionen mit gleichem Ausübungspreis ergibt.

Eine naheliegende Modifizierung zeitdiskreter Modelle besteht in der Einführung von Transaktionskosten für die Portfolioumschichtungen. Bensaid et al. haben in [5] gezeigt, daß die Vollständigkeit des Binomialmodells bei linearen Transaktionskosten erhalten bleibt. Hieraus ergibt sich die Frage, ob unter den Voraussetzungen von Theorem 2.14 die Absicherbarkeit einer bzw. endlich vieler europäischer Call- oder Put-Optionen oder amerikanischer Call-Optionen auch unter der Annahme linearer Transaktionskosten die Dichotomie der Faktoren impliziert.

Aus den im dritten Kapitel mit Hilfe der Balayage-Technik hergeleiteten extremalen Eigenschaften von Modellen mit deterministischen und dichotomen Faktoren ergaben sich Schranken für die Handelspreise von Finanzderivaten mit komponentenweise konvexen Auszahlungsfunktionen. Die Theorie der oberen und unteren Preise lieferte schließlich im vierten Kapitel die nötigen Instrumente, um diese Schranken auch für Modelle mit nicht notwendigerweise stochastisch unabhängigen Faktoren zu berechnen. Insbesondere ist es gelungen, auch ohne vollständige Kenntnis von P_w obere und untere Schranken für die Ausgabepreise anzugeben, zu denen obere bzw. untere Hedges konstruktiv bestimmt werden können. Die schwachen Konvergenzbedingungen $A_\star$ und $A^\star$, welche z.B. im Fall $P_w \sim \bigotimes_{i=1}^n P_w^{Y_i}$ erfüllt sind, lieferten darüberhinaus hinreichende Bedingungen dafür, daß die oberen bzw. unteren Hedges minimale bzw. maximale Anfangskosten besitzen, so daß sich in diesem Fall alternative (konstruktive) Beweise der upper und lower hedging duality ergaben.

Als vorsichtige/konservative Strategie für den Herausgeber von Finanzderivaten mit komponentenweise konvexen Auszahlungsfunktionen erweist sich daher die Bewertung mit Hilfe von Binomialmodellen, deren Parameter durch die maximalen Aufspreizungen der zukünftigen Aktienkurse bestimmt werden.

In diesem Kontext stellt sich die Frage, ob auch im Fall linearer Transaktionskosten bei zeitdiskreten Modellen die oberen und unteren Preise von Finanzderivaten mit komponentenweise konvexen Auszahlungsfunktionen die fairen Preise in den zugehörigen äußeren Binomialmodellen bzw. inneren deterministisch/dichotomen Modellen als Schranken besitzen, und ob sich auch hier entsprechende schwache Konvergenzbedingungen $A^\star$ und $A_\star$ angeben lassen, unter denen die Schranken angenommen werden.

Neben dem Vorteil leichter Berechenbarkeit in Modellen mit stochastisch unabhängigen Faktoren besitzen die oberen und unteren Preise jedoch eine Reihe von Nachteilen. Zunächst konnte in Kapitel 5 die Aussage aus [63] widerlegt werden, daß bei Finanzderivaten $\underset{\sim}{C}$ sowohl $a^\star(\underset{\sim}{C})$ als auch $a_\star(\underset{\sim}{C})$ generell keinen Arbitrage ermöglichen. Darüberhinaus stellte sich heraus, daß die Abbildungen $a_\star$ und $a^\star$ in unvollständigen Modellen kein konsistentes Preissystem bilden, andererseits jedoch zumindest Schranken für alle Preise in konsistenten Preissystemen liefern. Schließlich wurde gezeigt, daß bei der Approximation von Black-Scholes Modellen durch zeitdiskrete Modelle mit unbeschränkten Faktoren selbst bei punktweiser Konvergenz der mittels Interpolation eingebetteten Aktienpreisprozesse gegen die geometrische Brownsche Bewegung des Grenzmodells weder der obere noch der untere Preis einer europäischen Call- oder Put-Option gegen den zugehörigen fairen Preis im Black-Scholes Modell konvergiert.

Diese Eigenschaft ergab sich erst bei geeigneter Trunkierung der Faktoren.

Insbesondere für die praxisrelevanten $BS_{(n)}$ Modelle sowie für die Gaußschen und bedingten Gaußschen Modelle ergibt sich hieraus die Notwendigkeit, nach weiteren alternativen Preiskonzepten zu suchen. In diesem Zusammenhang sollten u.a. die Konzepte *Mean-Square-Hedging* (vgl. z.B. [63], Seite 518 ff.) und *Quantile Hedging* (vgl. z.B. [25], Kapitel 8) näher untersucht werden. Auch hier stellt sich die Frage, ob im Fall beschränkter Faktoren mit Hilfe von Binomialmodellen und deterministisch/dichotomen Modellen Schranken für alle anhand dieser Konzepte berechneten Preise angegeben werden können.

Literaturverzeichnis

[1] **Alsmeyer G.** *Wahrscheinlichkeitstheorie.*
Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 30 (2. Auflage), Universität Münster (2000)

[2] **Alsmeyer G.** *Stochastische Prozesse Teil 1: Diskrete Markov-Ketten, Martingale und Erneuerungstheorie.*
Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 33, Universität Münster (2000)

[3] **Badewitz T.** *Prophetenregionen für Folgen von unabhängigen Zufallsvariablen.*
Diplomarbeit, Universität Göttingen (1989)

[4] **Bauer H.** *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie.*
de Gruyter, Berlin (1978)

[5] **Bensaid B., Lesne J.P., Pagès H., Scheinkman J.** *Derivative asset pricing with transaction costs.*
Mathematical Finance 2, 63-86 (1992)

[6] **Billingsley P.** *Convergence of Probability Measures.*
Wiley & Sons Ltd, New York (1999)

[7] **Bingham N.H., Kiesel R.** *Risk-Neutral Valuation.*
Springer, London (1998)

[8] **Black F., Scholes M.** *The pricing of options and corporate liabilities.*
Journal of Political Economy 81, 637-659 (1973)

[9] **Blackwell D.** *Equivalent comparisons of experiments.*
Ann. Math. Stat. 24, 265-272 (1953)

[10] **Bodie Z., Merton R.C.** *Finance.*
Prentice Hall, New Jersey (1998)

[11] **Bollerslev T.** *Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity.*
Journal of Econometrics 31, 307-327 (1986)

[12] **Boshuizen F.** *Prophet and minimax problems in optimal stopping theory.* Ph.D.-Thesis, Vrije Universiteit Amsterdam (1991)

[13] **Bree C.** *Mathematiker in der Bank.* Vortrag an der WWU Münster / Private Korrespondenz (2003)

[14] **Chow Y.S., Robbins H., Siegmund G.** *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping.* Houghton Mifflin company, Boston (1971)

[15] **Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M.** *Option Pricing: A Simplified Approach.* Journal of Financial Economics 7, 229-263 (1979)

[16] **Cox J.C., Rubinstein M.** *Options Markets.* Prentice Hall, Englewood Cliffs (1985)

[17] **Dalang R.C., Morton A., Willinger W.** *Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic security market models.* Stochastics and Stochastics Reports 29, 185-201 (1990)

[18] **Doob J.L.** *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart.* Springer, New York (1984)

[19] **Doob J.L.** *Measure Theory.* Springer, New York (1994)

[20] **Duffie D., Huang C.-F.** *Implementing Arrow-Debreu equilibria by continuous trading of a few long-lived securities.* Econometrica 53(6), 1337-1356 (1985)

[21] **El Karoui N., Quenez M.C.** *Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market.* SIAM Journal on Control and Optimization 33 No.1, 29-66 (1995)

[22] **Elstrodt J.** *Maß- und Integrationstheorie.* Springer, Berlin (1996)

[23] **Elton J., Hill T.P.** *Fusions of probability distributions.* Ann. Probab. 20, 421-454 (1992)

[24] **Engle R.F.** *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation.* Econometrica 50 No.4, 987-1008 (1982)

[25] **Föllmer H., Schied A.** *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time.* de Gruyter, Berlin (2002)

[26] **Hader J., Russell W.** *Rules for ordering uncertain prospects.*
Amer. Econ. Rev. 59, 25-34 (1969)

[27] **Harrison J.M., Pliska S.R.** *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading.*
Stochastic Processes and Their Applications 11, 215-260 (1981)

[28] **Harten F., Meyerthole A., Schmitz N.** *Prophetentheorie.*
Teubner, Stuttgart (1997)

[29] **Hill T.P., Kertz R.P.** *Additive comparisons of stop rule and supremum expectations of uniformly bounded independent random variables.*
Proc. Amer. Math. Soc. 83, 582-585 (1981)

[30] **Hill T.P., Kertz R.P.** *A survey of prophet inequalities in optimal stopping theory.*
Contemporary Mathematics AMS Vol. 125, 191-207 (1992)

[31] **Hull J.C.** *Options, Futures, & Other Derivatives.*
Prentice Hall, New Jersey (2000)

[32] **Irle A.** *Sequentialanalyse: Optimale Sequentielle Tests.*
Teubner, Stuttgart (1990)

[33] **Irle A.** *Finanzmathematik: Die Bewertung von Derivaten.*
Teubner, Stuttgart (1998)

[34] **Irle A.** *Completeness of Financial Markets via Call Options.*
Preprint, Universität Kiel (2000)

[35] **Jacod J., Shiryaev A.N.** *Local Martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case.*
Finance and Stochastics 3, 259-273 (1998)

[36] **Jones M.** *Prophet inequalities for cost of observation stopping problems.*
Journal of Multivar. Anal. 34, 238-253 (1990)

[37] **Karatzas I.** *Lectures on the Mathematics of Finance.*
CRM Monograph Series Vol. 8, American Mathematical Society (1997)

[38] **Karatzas I., Shreve S.E.** *Methods of Mathematical Finance.*
Springer, New York (1998)

[39] **Kertz R.P.** *Prophet problems in optimal stopping: results, techniques and variations.*
Preprint, Atlanta (1987)

[40] **Landsberger M., Meilijson I.** *A tale of two tails: An alternative characterization of comparative risk.*
Journal of Risk and Uncertainty 3, 65-82 (1990)

[41] **Levy H., Levy A.** *Option Valuation: An Extension of the Binomial Model.*
Conference HEC, Paris (1988)

[42] **Merton R.C.** *An intertemporal asset pricing model.*
Econometrica 41, 867-888 (1973)

[43] **Merton R.C.** *Theory of rational option pricing.*
Bell Journal of Econom. Manag. Sci. 4, 141-183 (1973)

[44] **Merton R.C.** *Continuous-time Finance.*
Blackwell Publishers, Malden (1990)

[45] **Meyerthole A.** *Prophetenungleichungen für zeitstetige Prozesse: Martingale und der allgemeine Fall.*
Preprint 7/93-S, Universität Münster (1993)

[46] **Mosler K.** *Entscheidungsregeln bei Risiko: Multivariate stochastische Dominanz.*
Springer, Berlin (1982)

[47] **Müller A.** *Another tale of two tails: On characterizations of comparative risk.*
Journal of Risk and Uncertainty 16, 187-197 (1998)

[48] **Müller A., Rüschendorf L.** *On the optimal stopping values induced by general dependence structures.*
Journal of Appl. Probab. 38, 672-684 (2001)

[49] **Müller A., Stoyan D.** *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks.*
Wiley & Sons Ltd, Chichester (2002)

[50] **Musiela M., Rutkowski M.** *Martingale Methods in Financial Modelling.*
Springer, Berlin (1997)

[51] **Pliska S.R.** *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models.*
Blackwell Publishers, Malden (1997)

[52] **Rockafeller R.T.** *Convex Analysis.*
Princeton University Press, New Jersey (1970)

[53] **Rogers L.C.G.** *Equivalent Martingale Measures And No-Arbitrage.*
Stochastics and Stochastics Reports 51, 41-49 (1994)

[54] **Rothschild M., Stiglitz J.E.** *Increasing Risk I: A Definition.*
Journal of Economic Theory 2, 225-243 (1970)

[55] **Rothschild M., Stiglitz J.E.** *Increasing Risk II: Its economic consequences.*
Journal of Economic Theory 3, 66-84 (1970)

[56] **Rüschendorf L.** *On upper and lower prices in discrete time models.*
Proceedings of the Steklov Math. Inst. 237, 134-139 (2002)

[57] **Schmitz N.** *Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitstheorie.*
Teubner, Stuttgart (1996)

[58] **Schmitz N.** *The fair price of the Cox-Ross-Rubinstein model is conservative.*
Preprint 20/98-S, Universität Münster (1998)

[59] **Schmitz N.** *Prophet Theory. Part I: The general and the independent case.*
Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 34, Universität Münster (2000)

[60] **Schmitz N., Wrede M.** *Variations of the Cox-Ross-Rubinstein Model.*
Preprint 02/00-S, Universität Münster (2000)

[61] **Schmitz N., Wrede M.** *Variations of the Cox-Ross-Rubinstein model - conservative pricing strategies.*
Mathematical Methods of Operations Research 53, 505-515 (2001)

[62] **Shaked M., Shanthikumar J.G.** *Stochastic Orders and Their Applications.*
Academic Press, San Diego (1994)

[63] **Shiryaev A.N.** *Essentials of Stochastic Finance. Facts, Models, Theory.*
World Scientific, Singapore (1999)

[64] **Strassen V.** *The existence of probability measures with given marginals.*
Ann. Math. Stat. 36, 423-439 (1965)

[65] **Von Neumann J., Morgenstern O.** *Theory of Games and Economic Behaviour.*
Princeton University Press, New Jersey (1947)

[66] **Wrede M.** *Amerikanische Optionen; Variationen des Cox-Ross-Rubinstein Modells.*
Diplomarbeit, Universität Münster (1999)