

**Guido Krüger**

**Strukturbildung in unidirektional gekoppelten  
nichtlinearen optischen Systemen**

**2007**



Theoretische Physik

**Strukturbildung in unidirektional gekoppelten  
nichtlinearen optischen Systemen**

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von  
**Guido Krüger**  
aus Melle

-2007-

Dekan:	Prof. Dr. J.P. Wessels
Erster Gutachter:	Prof. Dr. R. Friedrich
Zweite Gutachterin:	Prof.in Dr. C. Denz
Tag der mündlichen Prüfung:	01.02.08
Tag der Promotion:	01.02.08

# Kurzfassung

In dieser Arbeit wird die Kopplung zweier musterbildender räumlich ausgedehnter nichtlinearer optischer Systeme numerisch untersucht. In einem System bilden sich dabei eine Vielzahl verschiedener Muster. Das Spektrum der Muster reicht dabei von regulär periodischen Mustern bis hin zu Solitären Strukturen. Die Kopplung zweier Systeme wird anhand einer unidirektionalen Sender-Empfänger Konfiguration untersucht und die Auswirkung der Kopplung auf die Musterbildung in dem zweiten System wird analysiert. Ein System besteht in dieser Arbeit aus einem nichtlinearen Medium, welches von einem Laserstrahl durchlaufen wird. Der Laserstrahl wird dann von einem Spiegel in das Medium zurückgekoppelt. Durch die Rückkopplungen können in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Laserstrahls Strukturen entstehen. Da der Laserstrahl nur einmal von einem Spiegel reflektiert wird, wird das System auch als Einspiegel Rückkopplungssystem bezeichnet. In den Strahlengang des Lasers kann zusätzlich eine Wellenplatte eingefügt werden. Je nach der Art der Platte wird ein System in unterschiedlichen Konfigurationen betrieben. Als nichtlineares Medium wird in dieser Arbeit ein Natrium-Dampf verwendet.

Die Grundgleichungen der Systeme werden ausgehend von einer semi-klassischen quantenmechanischen Beschreibung der Wechselwirkung eines Natrium-Atoms mit einem Laserstrahl abgeleitet und mit einer Stabilitätsanalyse werden die relevanten Parameter für die Simulation der verschiedenen Muster berechnet. Die analytische Beschreibung wird dabei über einen Formalismus realisiert, mit dem verschiedene Kombinationen der Systeme dargestellt werden können. Die Systeme selbst können zusätzlich in verschiedenen Konfigurationen betrieben werden, welche sich von der Art der verwendeten Wellenplatte unterscheiden.

Eine numerische Untersuchung der Kopplung zweier musterbildender Systeme zeigt ein großes Spektrum verschiedenster Muster, die in einem System nicht stabil sind und in diesem System teilweise noch nicht beobachtet worden sind. Unter diesen Mustern sind Strukturen mit mehreren Längenskalen, Strukturen mit Domänen und labyrinthartige Strukturen.

In einer Konfiguration mit einem  $\lambda/8$ -Plättchen als Wellenplatte im System wird eine optische Bistabilität beobachtet und Solitonen können entstehen. Diese Solitonen können dabei verschiedene Ordnungen aufweisen, es ist eine ganze Familie von Solitonen zu beobachten. Die Kopplung zweier Systeme,

die Solitonen als Lösung haben, nimmt einen zentralen Teil dieser Arbeit ein. In den numerischen Untersuchungen können verschiedene Mechanismen der Wechselwirkung bei der Kopplung von Solitonen gezeigt werden. Die Wechselwirkung zwischen den Solitonen kann dabei sowohl anziehend als auch abstoßend sein. Zusätzlich können die Solitonen durch die Wechselwirkung in ihrer Ordnung verändert werden.

# Abstract

In this thesis the coupling between two spatially extended pattern forming nonlinear optical systems is analysed. In one system a vast range of patterns can emerge. The spectrum of the patterns varies from regular periodic patterns to solitary structures. The coupling of two systems is analysed by a unidirectional transmitter-receiver configuration and the effect of the coupling to the pattern forming mechanism in the second system is investigated. One system consists in this work of a nonlinear medium, which is passed by a laser. The laser is then, through a mirror, fed back in the medium. Because the laser is only one time fed back in the medium, this setting is called a single mirror feedback system. In the optical path a wave plate can additionally put into the system. Depending on the wave plate the system runs in different configurations. A sodium vapor is used as the nonlinear medium in this work.

The basic equations of the systems are calculated with a semi-classical quantum mechanical approach for the interaction of the sodium atoms with the laser. The relevant parameters for the pattern forming process are calculated with a linear stability analysis. The analytical treatment is done with a formalism that allows different combinations of the systems. Additionally the systems them self can be run in different configurations, depending on the kind of wave plate inserted in the optical path.

A numerical investigation of the coupling of the two pattern forming systems yields a vast spectrum of different patterns, which are not stable in one single system and how have not been observed in the single system. Among these patterns are structures with different length scales, structures with domains and labyrinthine patterns.

An optical bistability is observed in an configuration with a  $\lambda/8$  wave plate in the optical path and solitary structures can emerge. These solitary structures can have different ranks and form a whole family of solitary structures. The coupling of two systems which have solitons as solutions takes a central part in this work. Numerical investigations of these couplings shows different mechanisms of the interactions. The interactions in this work are either attractive or repelling as well as changing the rank of the soliton.





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Musterbildung in nichtlinearen Systeme</b>	<b>3</b>
2.1	Grundlagen . . . . .	3
2.1.1	Musterbildende Systeme . . . . .	3
2.1.2	Fluid-Dynamik . . . . .	5
2.1.3	Nichtlineare Optik - Laser Instabilitäten . . . . .	6
2.1.4	Einspiegel Rückkopplungssysteme . . . . .	7
2.1.4.1	Natrium-Dampf Einspiegel Rückkopplungs- system . . . . .	7
2.1.4.2	Optisches Flüssigkristall-Lichtventil / LCLV-System . . . . .	8
2.2	Koppeln und Treiben von Systemen . . . . .	9
2.3	Natrium-Dampf Einspiegel Rückkopplungssystem . . . . .	12
2.3.1	Prinzip der Musterbildung / Talbot-Effekt . . . . .	12
2.3.2	Natrium-Dampf als nichtlineares Medium . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Theoretische Beschreibung</b>	<b>17</b>
3.1	Eine Natrium-Dampf Zelle . . . . .	18
3.1.1	Natrium-Dampf als 4-Niveau System . . . . .	18
3.1.2	Das klassische elektrische Feld . . . . .	19

3.1.3	Quantenmechanische Beschreibung des Atoms . . . . .	20
3.1.4	Propagation des elektrischen Feldes . . . . .	27
3.1.4.1	Freie Propagation . . . . .	28
3.1.4.2	Propagation im Medium . . . . .	29
3.1.4.3	$\lambda$ -Plättchen . . . . .	30
3.1.4.4	Reflexionen . . . . .	32
3.1.5	Abschwächung durch Absorption . . . . .	32
3.2	Zwei Natrium-Dampf Zellen . . . . .	33
3.3	Bestimmung der Pumpraten . . . . .	35
3.4	Die vollständigen Grundgleichungen . . . . .	37
3.5	Lineare Stabilitätsanalyse . . . . .	39
3.5.1	Homogener Zustand . . . . .	40
3.5.2	Wachstumsraten . . . . .	41
3.5.3	Stabilitätsballons . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Numerische Berechnungen</b>	<b>43</b>
4.1	Integration der Differentialgleichungen . . . . .	43
4.2	Darstellung der Muster . . . . .	45
4.3	Vergleich der Muster . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Koppeln von regulären Mustern</b>	<b>49</b>
5.1	Kopplung gleicher Muster . . . . .	49
5.1.1	Quadrate . . . . .	50
5.1.2	8-fach Quasimuster . . . . .	57
5.1.3	Hexagone . . . . .	63
5.2	Kopplung unterschiedlicher Muster . . . . .	74
5.2.1	Quadrate und Hexagone - Id.L8 . . . . .	80

---

5.2.2	Hexagone und Quasimuster - L8.L4 . . . . .	84
5.3	Kopplung irregulärer Mustern . . . . .	88
5.3.1	Labyrinth . . . . .	90
5.3.1.1	Existenzbereiche . . . . .	90
5.3.1.2	Koppeln von Labyrinth . . . . .	92
5.3.2	Quasimuster und Hexagone . . . . .	95
<b>6</b>	<b>Solitonen in gekoppelten Systemen</b>	<b>101</b>
6.1	Solitonen in einer Zelle . . . . .	101
6.1.1	Bildung solitärer Objekte . . . . .	102
6.1.2	Solitärer Bereich . . . . .	103
6.1.3	Zünden der solitären Objekte . . . . .	105
6.1.4	Verschiedene solitäre Objekte . . . . .	106
6.2	Solitonen in unidirektional gekoppelten Systemen . . . . .	108
6.2.1	Übertragung von Solitonen . . . . .	108
6.2.2	Kopplung von Solitonen gleicher Ordnung . . . . .	112
6.2.3	Koppeln von Solitonen unterschiedlicher Ordnung . . . . .	122
6.2.3.1	Soliton in der zweiten Zelle wird zerstört . . . . .	122
6.2.3.2	Ordnung des Soliton in der zweiten Zelle wird verändert . . . . .	124
6.2.3.3	Soliton in der zweiten Zelle wird verschoben . . . . .	126
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>133</b>
<b>A</b>	<b>Differentialgleichungen</b>	<b>137</b>
A.1	Zelle $I$ . . . . .	137
A.1.1	DGL Homogener Zustand . . . . .	138
A.1.2	DGL Variationsfeld . . . . .	138

A.1.3	Eigenwert $I$ . . . . .	139
A.2	Zelle $II$ . . . . .	139
A.2.1	DGL Homogener Zustand . . . . .	141
A.2.2	DGL Variationsfeld . . . . .	144

# Kapitel 1

## Einleitung

Musterbildung und Selbstorganisation sind in vielen Bereichen der Physik, Biologie und Chemie zu finden [Hak75,CH93,ABR99]. Die Kontrolle der sich selbstorganisiert bildenden Strukturen ist in diesem Zusammenhang wichtig für mögliche technische Anwendungen der Systeme oder um ein besseres Verständnis der Musterbildung und der Systeme selbst zu ermöglichen. Kontrolle der Strukturen kann dabei über eine Wechselwirkung eines Systems mit einem externen Signal erreicht werden. Die Wechselwirkung zwischen den Systemen kann über künstliche oder auch über von anderen musterbildenden Systemen erzeugte Signale erfolgen. Speziell in der Informationsverarbeitung und -übermittlung ist die Wechselwirkung von zwei gleichen Systemen in einer Sender-Empfänger Konfiguration von großer Wichtigkeit. Während bisher in diesen Systemen rein zeitbasierte Signale verwendet werden, liegt die Zukunft vermutlich in raum-zeitlich strukturierten Systemen. Dabei werden optische Systeme einen immer größeren Anteil einnehmen. So ist die Geschwindigkeit, die Bandbreite und Parallelität der optischen Systeme ein überragender Vorteil gegenüber herkömmlicher elektrischer Signalübertragung [CMB<sup>+</sup>99].

In dieser Arbeit werden zwei musterbildende Systeme unidirektional in einer Sender-Empfänger Konfiguration gekoppelt und die Wechselwirkung zwischen den Zuständen der Systeme untersucht. Dabei wird sowohl auf den Bereich von regulären Mustern als auch auf solitäre Strukturen eingegangen. Solitäre Strukturen, in diesem Kontext auch *dissipative Solitonen* genannt, werden als die Bits der optischen Kommunikation angesehen [FS96, BLP<sup>+</sup>97, BTB<sup>+</sup>02]. In diesem Zusammenhang ist die Kontrolle dieser Strukturen und die Wechselwirkung untereinander von entscheidender Bedeutung. Die Wechselwirkung *dissipativer Solitonen* in einer Sender-

Empfänger Konfiguration wurde bisher noch nicht untersucht und soll in dieser Arbeit analysiert werden. Die Wechselwirkung der Solitonen ermöglicht es dabei, diese gezielt zu manipulieren.

Die Kopplung zweier zweidimensionaler musterbildender Systeme ist dabei ein relativ neues und wenig erforschtes Gebiet, obwohl es die Voraussetzung für die raum-zeitliche Informationsübermittlung mittels optischer Systeme ist. Solitäre Strukturen spielen dabei eine wichtige Rolle, da diese sowohl über eine lange Zeitstrecke als auch eine große räumliche Distanz formstabil sein können und sich somit als Informationsbits hervorragend eignen [FS96].

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen gegliedert: In Kapitel 1 wird eine Einleitung in das bearbeitete Thema gegeben und die Gliederung der Arbeit vorgestellt. Kapitel 2 stellt einige musterbildende nichtlineare Systeme vor, die in dieser Arbeit eingehend behandelt werden. Anhand dieser Beispielsysteme wird die Geschichte musterbildender nichtlinearer Systeme und die Ansätze zur Kopplung dieser skizziert, und die Motivation für diese Arbeit dargelegt. Als letztes wird das in dieser Arbeit benutzte nichtlineare optische System beschrieben und die bisher an diesem System erzielten Ergebnisse werden vorgestellt. In Kapitel 3 wird die Grundgleichung zur mathematischen Beschreibung des betrachteten Systems entwickelt und die Kopplung zwischen den Systemen definiert. Dabei wird ein Formalismus dargestellt, der es erlaubt, beliebige Kombinationen einzelner Elemente, zum Beispiel Polarisatoren oder nichtlineare Bausteine, optischer Systeme mittels eines Matrixformalismus zu beschreiben. Als letzter Punkt wird die lineare Stabilitätsanalyse dargestellt, die Grundlage für die Vorhersage der Instabilitäten in den betrachteten Systemen ist. Die numerischen Routinen, die für die Integration der Differentialgleichungen verwendet werden, werden in Kapitel 4 vorgestellt. In diesem Kapitel werden ebenfalls Methoden vorgestellt um die erzielten numerischen Ergebnisse auszuwerten und zu quantifizieren. In Kapitel 5 werden die Ergebnisse für die Kopplung regulärer und quasi-periodischer Muster dargestellt. In diesem Zusammenhang wird auch die Kopplung von Labyrinthen und die Bildung von Domänenstrukturen diskutiert. Kapitel 6 behandelt solitäre Strukturen. Beginnend mit der Bildung der solitären Strukturen in einer Zelle wird zunächst die Transmission eines Solitons von der ersten in die zweite Zelle diskutiert. Schließlich folgt die Kopplung verschiedener solitärer Objekte untereinander in unterschiedlichen Zellen. Die Kopplung dieser Objekte führt auf drei Mechanismen, mit denen eine gezielte Manipulation der Solitonen möglich ist. Zum Schluss wird eine Zusammenfassung in Kapitel 7 über die erzielten Ergebnisse und ein Ausblick über mögliche weitere Arbeiten gegeben.

# Kapitel 2

## Musterbildung in nichtlinearen Systemen

In diesem Kapitel werden verschiedene nichtlineare musterbildende Systeme vorgestellt. Dabei werden nur einige musterbildende Systeme exemplarisch ausgesucht, da zu diesen Ergebnisse mit externen Signalen existieren. Es konnte jedoch nur an einem System eine Kopplung von zwei musterbildenden Elementen gefunden werden. Gekoppelte Systeme sind in diesem Fall Systeme, die durch ein externes Signal beeinflusst werden. Dieses Signal kann dabei statisch, dynamisch oder selbst ein musterbildendes System sein. Einige dieser Systeme eignen sich zur Kopplung untereinander, andere können durch externe Signale beeinflusst werden.

Die verschiedenen Ansätze der Kopplung werden vorgestellt und zusammengefasst. Dabei wird mit der zeitlichen Kopplung eindimensionaler Systeme begonnen und danach die räumliche Kopplung der Systeme betrachtet. Anschließend wird das in dieser Arbeit benutzte System beschrieben und die bisherigen Arbeiten an diesem System zusammengefasst.

### 2.1 Grundlagen

#### 2.1.1 Musterbildende Systeme

Die *Musterbildung* durch *Selbstorganisation* kann in vielen Systemen der belebten und unbelebten Natur beobachtet werden [CH93, Hak75]. Essenziell für die Musterbildung sind dabei eine Nichtlinearität in den Systemen

und der stetige Durchfluss von Energie. Die Systeme, in denen sich räumliche, zeitliche oder raum-zeitliche Muster bilden, sind, aufgrund des steten durchflusses von Energie, fernab des thermodynamischen Gleichgewichts. Strukturen die in diesen Systemen auftreten werden deshalb auch *dissipative* Strukturen genannt [NP77].

Muster können sich dabei in vielfältiger Weise in den Systemen bilden. Oftmals sind die Muster periodischer Natur oder besitzen ausgezeichnete Wellenlängen in Raum und/oder Zeit. So treten zeitlich stationär und räumlich periodische (Typ  $I_s$  in [CH93]), zeitlich periodisch und räumlich homogene (Typ  $III_o$ ) oder raum-zeitlich periodische (Typ  $I_o$ ) Muster bzw. Instabilitäten auf. Desweiteren können in diesen Systemen auch *lokalisierte Strukturen* oder *dissipative Solitonen* entstehen [AA05, SFAL00, Pes06, PGWAL05].

Muster, sowohl zeitlicher als auch raum-zeitlicher Art, können auch in optischen Systemen entstehen. Mit der Entwicklung des Lasers wurde es möglich, Intensitäten des Lichtfeldes zu erzeugen, die groß genug sind nichtlineare Effekte in optisch aktiven Medien zu erzeugen. Sind die Intensitäten der elektrischen Felder klein, ist die Antwort eines isotropen, instantan reagierenden Mediums auf diese Felder linear zu dem elektrischen Feld. Die Polarisation  $\mathbf{P}$  ist proportional dem elektrischen Feld  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ .  $\chi$  wird die elektrische *Suszeptibilität* des Mediums genannt und hängt im linearen Fall nicht von der Feldstärke ab. Ist die Feldstärke hoch, dann kann die Suszeptibilität eines Mediums von dieser abhängen und damit neue und interessante Effekte hervorbringen [MN90, ABR99, MT04]. Die Entstehenden Lösungen des elektrischen Feldes können ein großes Spektrum der Lösungen nichtlinearer Gleichungen enthalten, so z.B. Selbstfokussierung, Solitonen, Musterbildung uvm..

Ein weites Gebiet in diesem Zusammenhang ist die Bildung *transversaler optischer Muster*, d.h. senkrecht zur Ausbreitungsrichtung eines Laserstrahles [AF90, ABR99, Lug94, MT04, Ros92, SSM03, DSW03]. Dieses Feld eignet sich besonders gut zur Untersuchung von Strukturbildung in nichtlinearen Systemen, da hier sehr leicht in Mechanismen der Musterbildung und Musterselektion eingegriffen werden kann, z.B. über Fourierfilterung [PGWAL03, DSW03]. Diese Vorteile werden in der Anwendung bei der Telekommunikation und der Informationsübermittlung schon heute intensiv genutzt. Dennoch ist die Übertragung optischer Signale bis heute auf eindimensionale (zeitliche) Signale begrenzt und auch optische Computer sind noch in der Entwicklungsphase.



Im Folgenden werden einige Beispiele musterbildender Systeme aus verschiedenen Bereichen der Physik vorgestellt. An einige dieser Systeme sind schon externe Signale angekoppelt worden [KP78, Cou86, CW89, GOR01, NJ03, NG04, GZD<sup>+</sup>05, HCM<sup>+</sup>03]. In den meisten Fällen wurden jedoch synthetische externe Signale angekoppelt. Die Wechselwirkung musterbildender Systeme untereinander wurde bisher kaum untersucht und soll Gegenstand dieser Arbeit sein. Das Konzept ist hierbei ein Sender-Empfänger Schema, das bei der Übermittlung von Informationen eine große Rolle spielt. Der Vorteil eines optischen Systems besteht dabei in der sehr großen Parallelität und der sehr hohen Datenraten der Informationsübermittlung.

### 2.1.2 Fluid-Dynamik

Die Fluid-Dynamik war eines der ersten Gebiete, in dem Musterbildung beobachtet und erklärt worden ist. Als Musterbeispiel für ein System, welches Muster ausbildet, gilt das Rayleigh-Bénard System [Ray16]. Die in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts entwickelte Navier-Stokes Gleichung lieferte den analytischen Zugang zur Hydrodynamik und, da die relevanten Zeit- und Raumskalen im Sekunden- und Millimeterbereich liegen, konnten Experimente wie das von Bénard durchgeführte Konvektionsexperiment schon Anfang des 20. Jahrhunderts durchgeführt werden. Ausgehend von den beobachteten Phänomenen der Hydrodynamik wurden in der Folge viele Methoden entwickelt, um nichtlineare Systeme zu beschreiben [CH93]. Die fort-dauernde Untersuchung hydrodynamischer Systeme führte dabei auch von primären musterbildenden Instabilitäten zu höheren Instabilitäten bis hin zu der Beobachtung von Chaos [AFH95]. Höhere Instabilitäten sind dabei diejenigen, bei denen die nichtlineare Wechselwirkung einzelner Moden eines Musters neue stabile Zustände hervorbringen. Im Folgenden soll das Paradebeispiel für Musterbildung in der Hydrodynamik, das *Rayleigh-Bénard System*, dargestellt werden, da an diesem Beispiel sehr viele Phänomene nichtlinearer Gleichungen gefunden werden können.

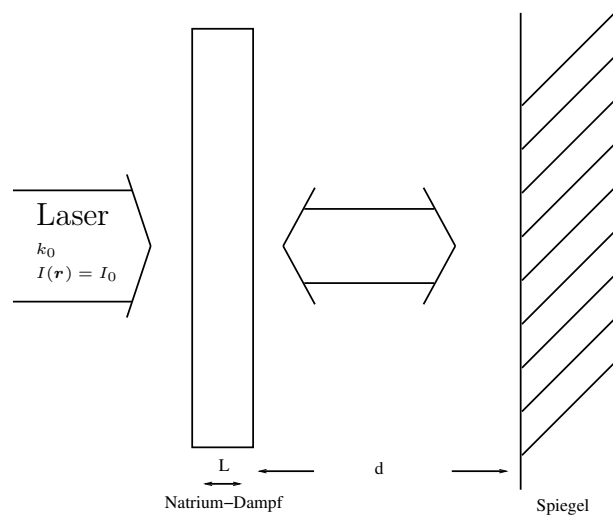
Das von Bénard durchgeführte und von Rayleigh analysierte [Ray16] Konvektionsexperiment spielt in der Hydrodynamik und der Geophysik eine große Rolle zur Beschreibung der Konvektion in Ozeanen und im Erdmantel. Das Rayleigh-Bénard System besteht aus einer Flüssigkeit zwischen zwei horizontalen Platten, von denen die tieferliegende von unten erhitzt wird. Die Art der entstehenden Muster hängt dabei von der Temperaturdifferenz zwischen den Platten, die mit dem Kontrollparameter  $R$  quantifiziert wird, ab. Unterhalb eines kritischen Wertes des Kontrollparameters, der Rayleigh-

Zahl  $R_c$ , wird die Temperatur in der Flüssigkeit durch reine Konduktion von der unteren zur oberen Platte transferiert. Innerhalb der Flüssigkeit findet dabei kein Massentransport abseits der Diffusion statt. Oberhalb der kritischen Rayleigh-Zahl setzt Konvektion ein. Der Wärmetransport ist dabei auch mit einem Massentransport verbunden. Die Flüssigkeit beginnt in einigen Bereichen aufzusteigen und in anderen Bereichen abzusinken. Die Bereiche sind dabei räumlich periodisch angeordnet, es bilden sich sogenannte Konvektionsrollen [Ray16, CH93]. Wird der Kontrollparameter weiter erhöht und übersteigt einen zweiten kritischen Wert, beginnt die Strömung periodisch zu pulsieren. In dem System tritt eine höhere Instabilität auf. Bei einer weiteren Erhöhung des Parameters oberhalb eines dritten kritischen Wertes wird das Strömungsverhalten komplexer, bleibt aber immer noch regulär. Es überlagern sich weitere periodische Teilströmungen. Oberhalb eines vierten kritischen Wertes wird die Strömung ungeordnet, turbulentes Verhalten setzt ein [AFH95]. Reguläres Verhalten zeigt, im Gegensatz zu turbulentem Verhalten, eine endliche Anzahl diskreter Fourierkomponenten.

### 2.1.3 Nichtlineare Optik - Laser Instabilitäten

Die Entwicklung des Lasers öffnete den Weg zu den Bereichen der nichtlinearen Optik. Die Intensitäten der Lichtfelder wurden so groß, dass Effekte abseits der linearen Theorie elektromagnetischer Wellen untersucht werden konnten [MN90]. Der Laser ist dabei ein Beispiel für Selbstorganisation in Verbindung mit einem Phasenübergang [Hak83]. Ein Laser besteht dabei aus einem Medium, welches zwischen zwei Spiegel platziert wird. Die Spiegel wirken dabei als Rückkopplung des Mediums auf sich selbst und geben eine Richtung der Emission vor. Das Medium wird durch eine externe Lichtquelle angetrieben. Die Atome innerhalb des Mediums wirken als Antennen und emittieren einen Lichtpuls. Die Intensität der externen Lichtquelle ist in diesem System der Kontrollparameter. Unterhalb eines kritischen Wertes dieses Parameters emittieren alle Atome mit einer zufällig verteilten Phase und der Laser arbeitet als Lampe. Wird der kritische Wert überschritten, dann emittieren alle Atome Licht mit gleicher Phase und der Laser sendet kohärentes Licht hoher Intensität aus.

Mit dieser Entwicklung eines kohärenten Lichtfeldes hoher Intensität wurde ein neues Feld der Physik, die *nichtlineare Optik* geboren. Die Wechselwirkung eines Lasers mit Materie führte dabei zu neuen Phänomenen wie z.B. der Selbstfokussierung eines Laserstrahles (Review z.B. [AF90, MN90]).



**Abbildung 2.1:** Laserrückkopplungssystem mit einer Zelle nach dem Vorschlag von Firth [Fir90]

Theoretische Beschreibungen der Wechselwirkungen wurden entwickelt und Gemeinsamkeiten mit hydrodynamischen Gleichungen taten sich auf. So konnten sowohl aus hydrodynamischen, wie auch aus nichtlinearen optischen Systemen *Swift-Hohenberg*, *Ginzburg-Landau* und *nichtlineare Schrödinger-Gleichungen* abgeleitet werden. Die Berücksichtigung von Beugung und Brechung führte zu Kopplungen transversal zur Ausbreitungsrichtung des Laserstrahls und zur Entdeckung räumlicher Muster und solitärer Objekte [MN90, CH93, AF90, MT04].

## 2.1.4 Einspiegel Rückkopplungssysteme

Im Folgenden werden Einspiegel Rückkopplungssysteme vorgestellt, da diese alle nötigen Bausteine zur Musterbildung besitzen und auf verschiedenste Weise realisiert werden können.

### 2.1.4.1 Natrium-Dampf Einspiegel Rückkopplungssystem

Ein Beispiel für ein nichtlineares optisches System, das Muster hervorbringt, ist ein Natrium-Dampf Einspiegel Rückkopplungssystem. Vorge schlagen von Firth [Fir90] und theoretisch untersucht von d'Allessandro und Firth [DF91, DF92, SF96] konnten in diesem System hexagonale Strukturen

vorhergesagt werden. In weitergehenden theoretischen und experimentellen Arbeiten konnten weitere zeitlich stationäre reguläre und solitäre Muster, sowie auch zeitlich oszillierende und dynamische ungeordnete Strukturen gefunden werden [Aum99, GW02, Pes06, Hun06, Sch06]. In Abb. 2.1 ist ein Einspiegel Rückkopplungssystem schematisch dargestellt. Das System ist aufgebaut aus einem optisch nichtlinearen Medium, einer freien Propagation und einem Spiegel, der das Laserfeld in das Medium zurückkoppelt.

Dieses System sollte die elementaren Bausteine zur transversalen Musterbildung in optischen Systemen in einfacher Weise beinhalten. Die Bausteine zur transversalen Musterbildung sind eine Nichtlinearität (hier realisiert durch ein nichtlineares Medium) und eine räumliche Kopplung eines Ordnungsparameterfeldes. Die Idee von Firth war nun, die beiden Prozesse räumlich zu trennen. Die Nichtlinearität ist dabei als *dünn* angenommen, die Beugung des Lichtfeldes kann also in dieser Näherung innerhalb des Mediums vernachlässigt werden. Während der freien Propagation hingegen ist die Nichtlinearität nicht mehr vorhanden und nur die Beugung des Lichtes muss betrachtet werden. Mit dieser Konfiguration kann die Beschreibung des Systems für beide Teile, Nichtlinearität und freie Propagation, separat vorgenommen werden [Fir90]. Die räumliche Kopplung wird im Natrium-Dampf System durch die Beugung des Lichtfeldes verursacht, die Nichtlinearität durch den Polarisations- und Intensitätsabhängigen Brechungsindex des Mediums.

Die Trennung der Bausteine der Musterbildung lässt hier eine analytische Beschreibung des Systems zu. Aufgrund der relativ einfachen experimentellen Realisierung, sowie der Vielzahl der entstehenden Muster ist dieses System ein geeignetes Modellsystem für ein Einspiegel Rückkopplungssystem.

#### 2.1.4.2 Optisches Flüssigkristall-Lichtventil / LCLV-System

Eine weitere Realisierung eines Einspiegel Rückkopplungssystems basiert auf einer elektro-optischen Nichtlinearität [NOTT95]. Dieses System besteht aus einer Flüssigkristallschicht, einem dielektrischen Spiegel und einem photosensitivem Material, die zwischen zwei Elektroden platziert sind. Das Lichtfeld wandert durch die Flüssigkristallschicht, wird vom Spiegel reflektiert und über einen freien Propagationsweg auf das photosensitive Material zurückgekoppelt. Eine Amplitudenmodulation des Lichtfeldes wird dabei über die Flüssigkristalle in eine Phasenmodulation konvertiert. Das Eingangslichtfeld wird dabei auf der *Lese*-Seite vom Spiegel reflektiert

und über eine freie Propagation auf die *Schreib*-Seite des Systems projiziert [NOTT95]. Da das Einganglichtfeld durch die *dünne* Flüssigkristallschicht moduliert und danach über eine freie Propagation auf die Nichtlinearität zurückgekoppelt wird, ist auch hier die räumliche Trennung von Brechung und Beugung gegeben und das System stellt eine Realisierung eines Einspiegel Rückkopplungssystems nach Firth dar [Fir90]. Die Flüssigkristallschicht wirkt hierbei als *Lichtventil*, daher wird das System als *liquid crystal light valve* (LCLV)-System bezeichnet.

Die entstehenden Muster sind in diesem Fall Streifen, Quadrate und Hexagone, die in komplexe dynamische Strukturen übergehen, wenn der Wert des Ordnungsparameters weit oberhalb einer kritischen Schwelle gewählt wird [NOTT95]. Die dominierenden Strukturen sind Hexagone, jedoch sind in diesem System ebenfalls lokalisierte Strukturen und dissipative Solitonen zu finden [GZD<sup>+</sup>05].

## 2.2 Koppeln und Treiben von Systemen

Wechselwirkungen zwischen einzelnen Systemen untereinander sind allgegenwärtig in der Natur. Die Wechselwirkung koppelt die Systeme miteinander. Die Kopplung der Systeme kann dabei allgemein auf verschiedene Arten realisiert werden:

- zeitliche Kopplung
- räumliche Kopplung
- raum-zeitliche Kopplung

Eine Wesentliche Eigenschaft zeitlich gekoppelter Systeme ist die *Synchronisation*. Die Beobachtung dieses Phänomens geht zurück auf Huygens, der die Kopplung zweier Pendeluhren studierte. Die Schwingungen der Pendel wurden über eine starre Verbindung zwischen den Uhren übertragen. Huygens stellte dabei fest, dass sich die Pendel im Gleichtakt bewegten, also synchronisierten. In neuerer Zeit rückte die Kopplung nichtlinearer chaotischer Systeme in den Fokus [BKO<sup>+</sup>02, GOR01]. Die Synchronisation chaotischer Systeme wird dabei als Ansatzpunkt gesehen, Informationen verschlüsselt zu übertragen [GOR01]. Bei der Untersuchung der Kopplung nichtlinearer chaotischer Systeme konnten dabei viele verschiedene Arten der Synchronisation gefunden werden, so z.B. vollständige, zeitverzögerte oder Phasensynchronisation [BKO<sup>+</sup>02]. Die zeitliche Synchronisation der Systeme soll

in dieser Arbeit jedoch nur einen kleinen Teil einnehmen, da die Muster im betrachteten Parameterbereich des Systems zum größten Teil stationär und damit zeitunabhängig sind.

Die räumliche Kopplung eines Systems an ein externes Signal wurde am Rayleigh-Bénard System aufgrund imperfekter Ränder (statisch), transienten induzierten Störungen oder stochastischen Effekten (thermisches Rauschen) motiviert [CH93](Abschnitt VIII.D.1). In diesem Zusammenhang wurde die räumliche [KP78, LGL83, LG85] und zeitliche [MCA<sup>+</sup>88, CH93] Kopplung eines externen Signals an ein musterbildendes System untersucht. Die Muster, charakterisiert durch eine bestimmte Wellenlänge, konnten dabei durch das externe Signal zu verschiedenen Zuständen getrieben werden, je nachdem ob das Signal resonant, kommensurabel oder inkommensurabel gewählt wurde. Ist die Wellenlänge des Signals dabei ein rationales Vielfaches der Wellenlänge der Muster, wird das Signal kommensurabel genannt, ist das Verhältnis irrational, wird das Signal inkommensurabel genannt. Dabei konnte eine Vielzahl von Zuständen gefunden werden, die durch den Treiber in dem System induziert werden [Cou86, CW89, NJ03]. Die Ansätze mit externen, synthetischen Signalen als Treiber [DBZE01, RMMn<sup>+</sup>03, NJ03, MPVMn05], sind auf die Kontrolle der nichtlinearen Zustände des Systems erweitert worden [Pyr92, GZD<sup>+</sup>05, NJ03, GZCD07]. Da Systeme durch die Ankopplung eines externen Signals zu Zuständen getrieben werden konnten, die ohne diese Kopplung, nicht stabil in diesem System gefunden werden konnten, schlug Pyragas Methoden vor, instabile periodische Orbits eines chaotischen Systems mittels einer Rückkopplung zu stabilisieren [Pyr92]. Bei einer Methode war das genaue Verhalten des Systems zur Stabilisierung eines instabilen Zustandes nicht notwendig, da die Rückkopplung eines Signals durch eine Zeitverschiebung eines Systemzustandes auf das System zu einem späteren Zeitpunkt realisiert wurde. Bei diesen zeitverzögerten Rückkopplungsmethoden werden jedoch systemeigene Zustände für die Kontrolle der Strukturen benutzt. Eine andere Methode mit externen Signalen, die nicht aus einem Systemzustand gewonnen werden, wird auch als *forcing* bezeichnet [DBZE01, GZD<sup>+</sup>05]. An einem LCLV-System wurden schon synthetische räumlich periodische externe Signale an reguläre optische Muster angekoppelt [NJ03]. Dabei wurden Muster eingekoppelt, die die selbe Symmetrie wie die spontan entstehenden Muster des LCLV-Systems aufwiesen. In diesen Untersuchungen konnte ein Verhalten festgestellt werden, das auf die räumliche Synchronisation der Muster schließen lässt.

Die raum-zeitliche Kopplung zweier musterbildender Systeme miteinander wurde bisher jedoch kaum untersucht [GOR01, NG04, RBB06]. Hauptan-

satzpunkt für diese Arbeiten ist die Kopplung zweier LCLV-Systeme miteinander [NG04,RBB06]. In diesen Anordnungen werden die LCLV-Systeme unidirektional miteinander gekoppelt und die raum-zeitliche (komplexe) Dynamik eines Sender oder *Master* Systems wird auf ein Empfänger oder *Slave* System abgebildet. Dabei konnte komplette und zeitverzögerte Synchronisation der Systeme gefunden werden. Die raum-zeitliche Kopplung für die Informationsübermittlung mittels optischer nichtlinearer Systeme ist ein weiterer Ansatzpunkt [BKO<sup>+</sup>02, GOR01]. Durch Synchronisation chaotischer Zustände eines nichtlinearen Systems können auf diese Art Informationen zwischen zwei identischen nichtlinearen Systemen übermittelt werden. Dabei werden zwei identische Systeme, die raum-zeitliches chaotisches Verhalten zeigen können, miteinander gekoppelt [GOR01]. Ein System wirkt dabei als Sender, das andere als Empfänger. Die Systeme können dabei durch ein raum-zeitliches Treibersignal komplett synchronisieren und ein Datensignal kann auf die Systementwicklung aufmoduliert werden. Wird die Systementwicklung mit dem Treibersignal beim Empfängersystem verglichen, dann ergibt sich die übertragene Botschaft als Synchronisationsfehler des Systems. Die Informationen können in diesem System auch in zwei Raumdimensionen übertragen werden, was die Übertragungsrate gegenüber einer Dimension erheblich erhöht.

Neben der raum-zeitlichen Synchronisation komplexer Zustände in LCLV-Systemen ist die Kontrolle solitärer Strukturen in diesen Systemen untersucht worden [GZD<sup>+</sup>05, GZCD07]. Durch die Einkopplung eines periodischen externen Signals konnten Solitonen dazu gebracht werden, sich entsprechend dem Signal räumlich auszurichten [GZD<sup>+</sup>05]. Diese Methode wurde dahingehend verfeinert, dass eine Gradienten induzierte Positionierung entwickelt wurde, mit deren Hilfe Solitonen gezielt bewegt werden können [GZCD07].

In einem nichtlinearen optischen Systemen, einem LCLV-System, ist die raum-zeitliche Synchronisation komplexer Zustände mit unidirektionaler Kopplung nachgewiesen worden [NG04, RBB06]. Zusätzlich konnte in einem LCLV-System die Positionierung und Kontrolle von Solitonen dargestellt werden [GZD<sup>+</sup>05, GZCD07]. In dieser Arbeit soll daher zunächst die Synchronisation regulärer Muster anhand eines Natrium-Dampf Systems nachgewiesen werden. Die Synchronisation labyrinthartiger Strukturen, die in einem LCLV-System nicht zu beobachten sind, folgt im Anschluss, sowie die Kopplung unterschiedlicher Muster im Regime einer optischen Bistabilität. Anschließend soll die Kopplung solitärer Strukturen in dem nichtlinearen optischen System untersucht werden.

## 2.3 Natrium-Dampf Einspiegel Rückkopplungssystem

In diesem Abschnitt wird das optische nichtlineare System beschrieben, das in dieser Arbeit als Modellsystem benutzt wird. Die Basis ist dabei ein Einspiegel Rückkopplungssystem mit einem Alkali-Dampf als Nichtlinearität. Ein optisches Natrium-Dampf System wird hierbei gewählt, da die Strukturen in diesem Fall leicht analysiert werden können und eine theoretische Behandlung auf mikroskopischer Basis möglich ist.

### 2.3.1 Prinzip der Musterbildung / Talbot-Effekt

Nach der experimentellen Beobachtung von transversaler Musterbildung in einem nichtlinearen optischen Rückkopplungssystem [AVI88] schlug Firth ein Modell vor, das alle elementaren Bausteine zur Musterbildung in nichtlinearen optischen Systemen enthält [Fir90]. Das Modell ist ein Einspiegel Rückkopplungssystem, in dem das Licht mit einem nichtlinearen Medium wechselwirkt und in dieses zurückgekoppelt wird. Eine schematische Darstellung eines einfachen Rückkopplungssystems ist in Abb. 2.1 gezeigt. Das von Firth vorgeschlagene nichtlineare Medium war ein reines *Kerr-Medium*, jedoch ermöglichen auch verschiedene andere Kerr-artigen Medien die Musterbildung [GMP94].

Die Trennung von Brechung und Beugung ist hierbei die Voraussetzung für die relativ einfache theoretische Beschreibung. Über die Länge  $L$  im Medium findet vernachlässigbar wenig Beugung statt, die Wechselwirkung beschränkt sich auf die Nichtlinearität. In diesem Fall spricht man von einem *dünnen* Medium. Außerhalb des Mediums wiederum existiert keine Nichtlinearität und das Lichtfeld wird über die freie Propagationslänge  $2d$  nur gebeugt. Mathematisch führt diese Trennung zu zwei verschiedenen Operatoren, die auf das Ausgangslichtfeld angewandt werden um die Propagation im Medium oder außerhalb zu beschreiben. In dieser Arbeit wird ein Operatorformalismus entwickelt, der es möglich macht, beliebige Anordnungen von diesen Rückkopplungssystemen zu berechnen. Dieser wird in Kapitel 3 vorgestellt.

Strukturbildung erfolgt durch eine Wechselwirkung der Nichtlinearität mit sich selbst über die Rückkopplung. In dem nichtlinearen optischen System wird dabei der Brechungsindex  $n(\mathbf{r}, t)$  moduliert. Die Modulation kann über die Intensitätsverteilung des transmittierten Lichtes sichtbar gemacht wer-



den. Der Brechungsindex  $n(\mathbf{r})$  ist dabei mit der Intensität des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  über

$$n(\mathbf{r}, t) \sim |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (2.1)$$

verknüpft.

Grundlegend für die Musterbildung in vielen dieser Systeme ist die Veränderung der Intensität oder der Phase des elektrischen Feldes (Lichtes). Oft bewirkt die Nichtlinearität eine Phasenmodulation, die durch den *Talbot-Effekt* [Tal36, Pat89, TBWS93] an periodisch auftretenden Punkten zu einer Amplitudenmodulation wird. Wird der Propagationsweg des Lichtes auf diese Entfernungen eingestellt, so wird aus einer Phasenmodulation eine Amplitudenmodulation und der Brechungsindex des Mediums verändert sich.

Der Talbot-Effekt, auch als *self-imaging* [Pat89] bezeichnet, bewirkt, dass eine Amplitudenmodulation in eine Phasenmodulation überführt wird und umgekehrt. Diese Vorgänge wiederholen sich periodisch. Eine transversale Phasenmodulation mit dem Wellenvektor  $\mathbf{q}$  ist nach einer *Talbot-Länge*

$$z_T = \frac{4\pi}{\mathbf{q}^2} k_0 \quad (2.2)$$

und jedem ganzzahligem Vielfachen davon wieder vollständig identisch. Nach einer halben Talbot-Länge  $z_T/2$  ist aus der Phasenmodulation eine Amplitudenmodulation geworden. Für jede Distanz existieren also transversale Strukturen, für die die gewählte Distanz  $2d$  gerade die Talbot-Länge ist. Das sind gerade die Wellenlängen, die in der Musterbildung angeregt werden können, da nur diese den Brechungsindex des Mediums verändern, weil der Brechungsindex intensitätsabhängig ist. In der Numerik sind allerdings keine solchen Beschränkungen vorhanden, nur die Anzahl und die Reichweite der berechneten Fourierkomponenten, die in dem Muster vorkommen, müssen vollständig abgedeckt sein.

Da das System prinzipiell recht einfach ist und die Nichtlinearität auf verschiedenste Weise realisiert werden kann, wurden in der Folge mehrere experimentelle Realisierungen dieses Systems entwickelt. Einige davon sind schon in 2.1.1 beschrieben worden. So wurden Systeme mit Alkali-Metall-Dämpfen [AL94, GMP94], mit photorefraktiven Kristallen [DSS<sup>+</sup>98] und mit elektro-optischen Hybrid Systemen (LCLV) [NOTT95] aufgebaut. Keines dieser Experimente arbeitet mit einem reinem Kerr-Medium. Für das Alkali-Metall System mit einem Natrium-Dampf konnte eine mikroskopische Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Laser und Medium entwickelt werden, die eine analytische und numerische Behandlung dieser Systeme

ermöglicht. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit ein solches System als Beispielsystem diskutiert.

### 2.3.2 Natrium-Dampf als nichtlineares Medium

In dieser Arbeit wird ein System mit Natrium-Dampf als nichtlineares Medium betrachtet, da dieses System experimentell und theoretisch bereits besonders gut untersucht ist [Aum99, GW02, Pes06, Hun06, Sch06] und daher der Fokus auf die Wechselwirkung zwischen den Zellen gelegt werden kann. Außerdem besitzt dieses System eine Vielzahl von verschiedenen Mustern und Zuständen, die für zukünftige Anwendungen relevant werden könnten. So können in diesem System reguläre Muster [Aum99, GW02], dissipative Solitonen [Pes06], Spiralen [Hun06] und labyrinthartige Strukturen [Sch06] erzeugt werden. Ein weiterer Vorteil dieses Systems ist die Möglichkeit, eine quantitative, mikroskopische Beschreibung des Systems vorzunehmen [MDLM86]. Daher ist eine Ab-initio Berechnung des Systemverhaltens möglich. Eine ausführliche Beschreibung der Grundgleichungen und ihrer analytischen Beschreibung findet sich in Kapitel 3.

Für das Natrium-Dampf System entwickelte Firth [SF96] ausgehend von der mikroskopischen Beschreibung durch Lange und Mlynek [MDLM86] eine Differentialgleichung für das System. Eine lineare und nichtlineare Stabilitätsanalyse liefert für dieses System eine Vorhersage für Musterbildung. Für lineare Polarisation des Eingangsfeldes werden Quadrate vorhergesagt, die numerisch und experimentell auch gefunden werden. Für elliptische Polarisation werden Hexagone prognostiziert, die ebenfalls numerisch und experimentell bestätigt werden konnten.

Parallel zu Firth entwickelte Le Berre und Leduc für einen Rubidium-Dampf eine Theorie [LLBRT96], die sehr ähnlich zu der Theorie von Firth ist, allerdings nur lineare Polarisation des Eingangsfeldes zulässt. Auch hier ergibt sich wieder eine DGL für das Ordnungsparameterfeld. Die lineare und nichtlineare Stabilitätsanalyse prognostizierte Quadrate und 8-fach Quasimuster, die auch numerisch und experimentell verifiziert werden konnten [LLBRT96, LLBR<sup>+</sup>95, Aum99].

Die Gruppe Lange baute 1994 an der Universität Münster ein Natrium-Dampf System auf, das dem Modell von Firth folgt [AL94, LAL97, ABL<sup>+</sup>97, AAGWL02, GWHAL03, PGWAL03, GAGW<sup>+</sup>04, HLA06, ALHL95, HGWA<sup>+</sup>99, SFAL00, PGWAL05, AGWH<sup>+</sup>99, AGWAL00, LAT<sup>+</sup>00, AAGW<sup>+</sup>01]. Idee ist hier die experimentelle Trennung von Brechung und

Beugung des Lichtes, so dass die theoretischen Ergebnisse von Firth auch experimentell bestätigt werden konnten. Ausgehend von den theoretischen Arbeiten konnten bis 2002 mit verschiedenen Konfigurationen dieses Systems Quadrate, Hexagone und Superlattices numerisch und experimentell gefunden werden. So wurden mit linearer Polarisation des Eingangsfeldes Quadrate vorhergesagt und gefunden [Aum99]. Elliptische Polarisation ergab Hexagone [Aum99], und der Einbau eines  $\lambda/4$ -Plättchens in den Strahl lieferte Quasimuster [Aum99], wie von Le Berre und Leduc vorhergesagt.

Weitere Experimente an dem Natrium-Dampf System, unter anderem auch mit einem  $\lambda/8$ -Plättchen im Strahl lieferten weitere Muster die in diesem System auftreten können. Dazu zählen Rhomben, Dreiecke, Hexagone, Honeycombs, Spiralen und dissipative solitäre Strukturen. Die solitären Strukturen sind hierbei ohne äußeres Magnetfeld nur in der Konfiguration mit dem  $\lambda/8$ -Plättchen im Strahl möglich. Eine genauere Untersuchung hierzu ist in der Dissertation von M. Pesch zu finden [Pes06, PGWAL05]. In der Arbeit von M. Pesch werden insbesondere die Mechanismen, die zur Entstehung der dissipativen Solitonen führen beschrieben und untersucht. Außerdem werden auch verschiedenartige Solitonen im System gefunden. Spiralen können bei elliptischer Polarisation mit Magnetfeld gefunden werden, eine detaillierte Beschreibung ist in der Dissertation von F.Huneus zu finden [Hun06, HLA06]. Labyrinthartige Strukturen werden in der Dissertation von J.Schüttler beschrieben [Sch06].

Diese Arbeiten zeigen die Vielfalt an transversalen optischen Mustern, die in diesem System auftreten können. Die mikroskopische Beschreibung liefert den Zugang zu einer theoretischen Untersuchung dieser Muster und den Mechanismen die zum Entstehen dieser notwendig sind. Weitergehende Untersuchungen werden in dieser Arbeit zu der Fragestellung der Kopplung zweier dieser Zellen angestellt. Insbesondere wird dabei auf die Kopplung regulärer Muster (Quadrate, 8-fach Quasimuster und Hexagone), die Kopplung solitärer Strukturen und labyrinthartigen Strukturen eingegangen.

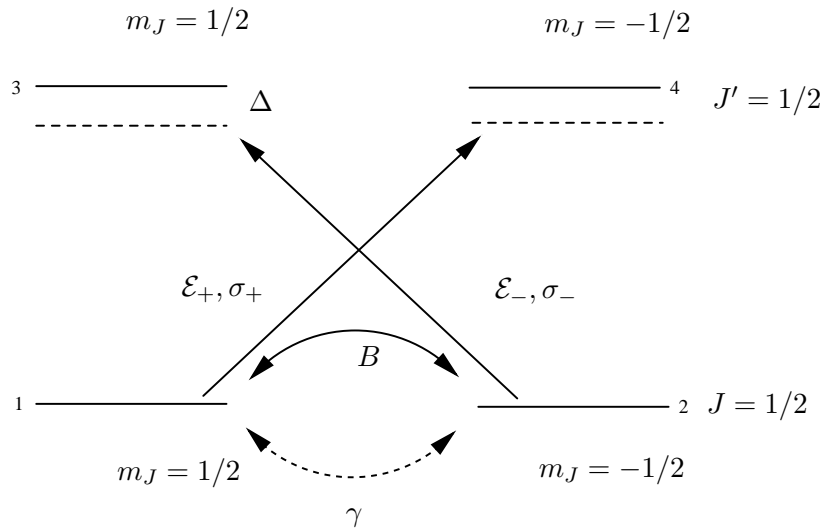


# Kapitel 3

## Theoretische Beschreibung

In diesem Abschnitt wird die Differentialgleichung für das nichtlineare optische System hergeleitet und der Formalismus vorgestellt, mit dem eine Beschreibung für beliebige Kombinationen von Zellen und  $\lambda$ -Plättchen entwickelt werden kann. Der Formalismus beschreibt dabei die Propagation des elektrischen Feldes durch nichtlineare Medien, über eine freie Strecke oder durch  $\lambda$ -Plättchen. Ist die Wechselwirkung eines anderen nichtlinearen optischen Mediums mit dem elektrischen Feld bekannt, können mit diesen Methoden auch Konfigurationen dieser Medien beschrieben werden.

Die mikroskopische Beschreibung einer Natrium-Dampf Zelle wird analog zu der Arbeit von Mitschke et al. [MDLM86] dargestellt. Aus dieser Beschreibung wird eine Differentialgleichung für das Natrium-Dampf System entwickelt. Anschließend wird die Wechselwirkung eines eingestrahlten Lasers mit dem Natrium-Dampf diskutiert und Übergangsraten zwischen einzelnen Niveaus des atomaren Systems, die *Pumpraten*, berechnet. Die Pumpraten liefern den Schließungsansatz für die Differentialgleichung und beinhalten die Rückkopplung des Systems. Mit den Pumpraten ist die Beschreibung einer Zelle abgeschlossen. Anschließend wird die Kopplung zwischen den Zellen dargestellt und für eine zweite Zelle werden die relevanten Pumpraten hergeleitet. Ein nachfolgender Abschnitt führt alle zu lösenden Gleichungen zusammen und stellt sie in übersichtlicher Form vollständig dar. Abschließend wird eine Einführung in die lineare Stabilitätsanalyse gegeben, um alle nötigen Begriffe und Methoden für die folgenden Abschnitte einzuführen.



**Abbildung 3.1:** Kastler Diagramm des Niveauschemas des  $3^2S_{1/2} \rightarrow 3^2P_{1/2}$  Überganges im Natrium-Atom.  $\mathcal{E}_{\pm}$  bezeichnet dabei das elektrische Feld in zirkularer Basis,  $\sigma_{\pm}$  positiv/negativ zirkulares Licht.  $\bar{\Delta}$  stellt die Verstimmung des eingestrahnten Lichtes gegenüber der Übergangsfrequenz dar.

## 3.1 Eine Natrium-Dampf Zelle

Mitschke et al. zeigten 1986 [MDLM86] stabile optische Selbstoszillationen zwischen zirkular polarisierten Komponenten eines Lasers. Diese Selbstoszillationen wurden in einem Natrium-Dampf System beobachtet, wobei die Oszillationen durch einen Pumpprozess der Polarisationskomponenten des Lichtfeldes herbeigeführt wurden. Dieser Pumpprozess führt zu einer inhomogenen räumlichen Verteilung der Intensität der zirkular polarisierten Komponenten. In diesem Abschnitt wird die Grundgleichung für eine Zelle des hier untersuchten Systems in Analogie zu der Herleitung der Grundgleichung von [MDLM86] dargestellt.

### 3.1.1 Natrium-Dampf als 4-Niveau System

Die Wechselwirkung eines elektrischen Feldes mit Materie folgt in dieser Arbeit einem semiklassischen Ansatz. Die Materie wird dabei quantenmechanisch und die elektrischen Felder werden klassisch beschrieben. Die Modellierung der Materie, bzw. der Atome, kann auf wenige Zustände reduziert werden, wenn die betrachteten Energiedifferenzen sehr unterschiedlich

zu allen anderen Energiedifferenzen im Atom sind [Hak81]. Die quantenmechanische Beschreibung der Atome kann über ein 4-Niveau Schema wie in Abb. 3.1 dargestellt werden.

Der in dieser Arbeit betrachtete Übergang zwischen den atomaren Zuständen ist die Natrium  $D_1$  Linie. Dies ist der Übergang zwischen dem  $3^2P_{1/2}$  und dem  $3^2S_{1/2}$  Niveau eines Natrium-Atoms. Die Niveaus 1 und 2 gehören zu den Orbitalen  $3^2S_{1/2}$  und die Niveaus 3 und 4 zu den Orbitalen  $3^2P_{1/2}$ . Durch den Kernspin eines Natrium-Atoms von  $I = 3/2$  müssen sowohl für das obere als auch für das untere Niveau acht Zustände betrachtet werden. Die Aufspaltung der Niveaus aufgrund des Kernspins wird auch Hyperfeinaufspaltung genannt. Die Hyperfeinaufspaltung der oberen und unteren Niveaus des Natrium-Dampfes kann jedoch durch die Anwesenheit eines zusätzlichen Gases (z.B. Argon oder Stickstoff) soweit *verschmiert* werden, dass eine Beschreibung mit den in Abb. 3.1 dargestellten vier Niveaus eine gute Approximation des Systems darstellt [Aum99, DH97]. Die Diffusion der Natrium Atome wird dabei stark unterdrückt, so dass auch die Doppler-Verbreiterung der Linien vernachlässigt werden kann [Aum99]. Die Natrium-Dampf Atome bilden dann ein Gemisch von  $J = 1/2$  Atomen, das Modell ist ein  $J = 1/2 \leftrightarrow J = 1/2$  oder auch  $J_{1/2}$  Modell.

### 3.1.2 Das klassische elektrische Feld

In der semiklassischen Beschreibung der Wechselwirkung eines elektrischen Feldes mit Materie wird das elektrische Feld in klassischer Art beschrieben. Wie in Abb. 2.1 dargestellt, wird das elektrische Feld in ein Medium eingekoppelt, propagiert über eine freie Strecke  $d$ , wird an einem Spiegel reflektiert und durchläuft das Medium ein zweites Mal in der anderen Richtung. Das elektrische Feld setzt sich also aus einem vorwärtslaufenden und einem rückwärtslaufenden Teil zusammen.

Das elektrische Feld breitet sich entlang der  $z$ -Achse aus, die  $x$ - und  $y$ -Komponenten befinden sich transversal dazu. Das elektrische Feld kann, wie in [Aum99], in der zirkularen Basis als

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{E}_+(\mathbf{r}, t) \hat{e}_+ e^{i\omega t} + \mathcal{E}_-(\mathbf{r}, t) \hat{e}_- e^{i\omega t} + c.c. \} \quad (3.1)$$

dargestellt werden. Hierbei bezeichnet  $c.c.$  das komplex Konjugierte der ersten Terme. Die zirkularen Komponenten des elektrischen Feldes können als

$$\mathcal{E}_\pm(\mathbf{r}_\perp, z, t) = \mathcal{E}_{\pm,f} e^{ik_0 z} + \mathcal{E}_{\pm,b} e^{-ik_0 z} \quad (3.2)$$

geschrieben werden, wobei  $f$  den vorwärtslaufenden und  $b$  den rückwärtslaufenden Anteil des elektrischen Feldes beschreibt. Die Einheitsvektoren  $\hat{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x \pm i\hat{e}_y)$  und  $\hat{e}_0 = \hat{e}_z$  sind die Basisvektoren, die die zirkularen Komponenten des elektrischen Feldes beschreiben. Positiv zirkular polarisiertes ( $\sigma_+$ )-Licht wird dargestellt durch eine reine  $\mathcal{E}_+$  Komponente des elektrischen Feldes und negativ zirkular polarisiertes ( $\sigma_-$ )-Licht durch eine reine  $\mathcal{E}_-$  Komponente. Linear polarisiertes Licht in  $x$ -Richtung, wie in dieser Arbeit als Eingangsfeld angenommen, wird damit über

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_+ \\ \mathcal{E}_- \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

beschrieben.

In der gleichen Basis wie das elektrische Feld kann die Polarisation

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{P}_+(\mathbf{r}, t)\hat{e}_+ e^{i\omega t} + \mathcal{P}_-(\mathbf{r}, t)\hat{e}_- e^{i\omega t} + \mathcal{P}_z(\mathbf{r}, t)\hat{e}_z + c.c. \} \quad (3.4)$$

geschrieben werden. Im folgenden soll allerdings die  $z$ -Komponente der Polarisation vernachlässigt werden, d.h. es gilt  $\mathcal{P}_z \approx 0$ .

### 3.1.3 Quantenmechanische Beschreibung des Atoms

Die quantenmechanische Beschreibung des Atoms erfolgt über eine Dichtematrix für das atomare System [CTDL99a]. Quantenmechanisch kann das atomare vier Niveau System, aus Abb. 3.1, durch vier Zustände  $|\phi_i\rangle$   $i = 1..4$  beschrieben werden. Die Beschreibung eines solchen Systems kann zweckmäßigerweise mit dem Dichteoperator geleistet werden. Der Dichteoperator  $\rho(t)$  ist in diesem Fall eine  $4 \times 4$ -Matrix mit den Einträgen

$$\rho_{ij}(t) = \langle \phi_i | \rho(t) | \phi_j \rangle . \quad (3.5)$$

Aus der Schrödinger-Gleichung, die die Zeitentwicklung des Systems beschreibt, folgt im Dichtematrixformalismus die Liouville-von Neumann-Gleichung. In dieser Beschreibung sind Relaxationsprozesse, die in realen Systemen immer auftreten, nicht enthalten. Ausgangspunkt der Beschreibung des Systems mit dem Dichteoperator ist deshalb die erweiterte Liouville-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{H}, \rho] + \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho \right)_{relax} \quad (3.6)$$



mit dem Dichteoperator  $\rho$  und dem Hamiltonoperator

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_B + \mathcal{H}_E \quad (3.7)$$

des Systems. Der letzte Term in (3.6) beschreibt die Relaxation des Systems und ist aus physikalischen Gründen hinzugefügt. Die Diagonalelemente stehen dabei für die Besetzungszahlen der vier Niveaus und die Nebendiagonalelemente sind für die Interferenzeffekte zwischen den verschiedenen Zuständen verantwortlich. Sind die Nebendiagonalelemente Null, verschwinden im Mittel alle Interferenzeffekte zwischen den Zuständen. Ist ein Nebendiagonalelement ungleich Null, besteht zwischen den Zuständen eine *Kohärenz*. Daher werden diese Elemente auch *Kohärenzen* genannt [CTDL99a].

Der Hamiltonoperator des Gesamtsystems besteht dabei aus einem Hamiltonoperator für das ungestörte Atom  $\mathcal{H}_0$ , dem Operator für die Wechselwirkung des Atoms mit einem Magnetfeld  $\mathcal{H}_B$  und dem Operator für die Wechselwirkung des Atoms mit einem elektrischen Feld  $\mathcal{H}_E$ . Die Operatoren sind formal, wie auch der Dichteoperator,  $4 \times 4$ -Matrizen.

### Der ungestörte Hamilton Operator

Der ungestörte Hamilton-Operator des Systems  $\mathcal{H}_0$  hat dabei Diagonalgestalt und die Einträge stellen die Energien der ungestörten Niveaus dar. Es gilt also

$$\mathcal{H}_0 = \text{Diag}(\hbar\omega_i)_{i=1..4}. \quad (3.8)$$

Da die Niveaus 1 und 2 sowie die Niveaus 3 und 4 jeweils dieselbe Energie besitzen gilt zusätzlich  $\omega_1 = \omega_2$  und  $\omega_3 = \omega_4$ . Die *Übergangsfrequenz* zwischen den Niveaus wird mit  $\omega_0 = \omega_3 - \omega_1$  bezeichnet.

### Der Hamilton Operator für das elektrische Feld

Das elektrische Feld regt nur Übergänge zwischen Niveaus mit unterschiedlichen Quantenzahlen  $m_J$  an. Die Differenz der Frequenz des Übergangs und der Frequenz des elektrischen Feldes bestimmt dabei die Raten, mit der ein Übergang stattfindet. Daher regt das elektrische Feld nur die Übergänge zwischen den Niveaus 1 und 4 und zwischen den Niveaus 2 und 3 an, vgl. dazu Abb. 3.1.

Die Kopplung eines Dipols, mit dem elektrischen Dipolmoment  $\boldsymbol{\mu}_E$ , an ein elektrisches Feld  $\boldsymbol{E}$  ist [Hak81, CTDL99a, CTDL99b]

$$\mathcal{H}_E = -\boldsymbol{\mu}_E \cdot \boldsymbol{E}. \quad (3.9)$$

Die Operator Darstellung der Kopplung enthält nur Matrixelemente ungleich Null an den Stellen, an denen durch das elektrische Feld Übergänge induziert werden.

Positiv zirkulares ( $\sigma_+$ )-Licht induziert dabei die Übergänge von 1 nach 4 und negativ zirkulares ( $\sigma_-$ )-Licht induziert die Übergänge von 2 nach 3 [MDLM86, DH97, Aum99]. Der Hamiltonoperator für das elektrische Feld kann also durch

$$(\mathcal{H}_E)_{32} = (\mathcal{H}_E)_{23}^* = \frac{\mu_E \mathcal{E}_+}{2} e^{i\omega t} - \frac{\mu_E \mathcal{E}_-^*}{2} e^{-i\omega t} \quad (3.10)$$

$$(\mathcal{H}_E)_{41} = (\mathcal{H}_E)_{14}^* = -\frac{\mu_E \mathcal{E}_-}{2} e^{i\omega t} + \frac{\mu_E \mathcal{E}_+^*}{2} e^{-i\omega t}. \quad (3.11)$$

ausgedrückt werden. Alle anderen Einträge des Operators sind Null. Die Indizes  $\pm$  an den elektrischen Feldern deuten auf die verschiedenen Übergänge durch die zirkular polarisierten Feldkomponenten hin. Die Stärke der Kopplung wird im folgenden mit  $\beta_{\pm} = \mu_E \mathcal{E}_{\pm} / (2\hbar)$  abgekürzt. Das elektrische Dipolmoment  $\mu_E$  hat im Fall von Natrium-Dampf den Betrag  $\mu_E = 1.72 \cdot 10^{-29} \text{Cm}$ .

### Der Hamilton Operator für das magnetische Feld

Ein magnetisches Feld induziert transversale Übergänge zwischen Niveaus gleicher Energie. Daher werden nur die Übergänge zwischen den Niveaus 1 und 2 und zwischen 3 und 4 angeregt.

Die Kopplung eines magnetischen Dipols  $\mu_B$  an ein magnetisches Feld  $\mathbf{B}$  ist durch

$$\mathcal{H}_B = -\mu_B \cdot \mathbf{B} \quad (3.12)$$

gegeben [Hak81, CTDL99a, CTDL99b]. Die Stärke der Kopplung ergibt die Larmor-Frequenz  $\Omega_L$  bzw.  $\Omega'_L$  und ist gegeben durch

$$\hbar\Omega_L = \mu_B g_J B \quad (3.13)$$

mit dem Lande-Faktor  $g_J$  bzw.  $g_{J'}$  und dem Bohrschen Magneton  $\mu_B \approx -9.27 \cdot 10^{-24} \text{J/T}$ . Für die Matrixeinträge des Operators folgt damit

$$(\mathcal{H}_B)_{12} = (\mathcal{H}_B)_{21}^* = \frac{1}{2} \hbar\Omega_L \quad (3.14)$$

$$(\mathcal{H}_B)_{34} = (\mathcal{H}_B)_{43}^* = \frac{1}{2} \hbar\Omega'_L. \quad (3.15)$$

Alle anderen Einträge sind wiederum Null. Mit den Gleichungen (3.8),(3.10) und (3.14) ist der Hamilton Operator des Systems vollständig bestimmt. Um die Entwicklungsgleichungen für die Dichtematrix vollständig bestimmen zu können, müssen die Relaxationszeiten des Systems bestimmt werden.

### Relaxationszeiten

Der letzte Term in der Entwicklungsgleichung der Dichtematrix (3.6) bestimmt die Relaxation des Systems. Ohne äußere Einflüsse verschwinden die Besetzungen der oberen Niveaus und die Kohärenzen, sodass das Atom wieder in den Grundzustand zurückkehrt. Die Relaxationszeiten können der folgenden Tabelle entnommen werden [MDLM86].

Zerfallszeit	Eintrag in der Dichtematrix	Zeitskala
$\tau_1$	$\rho_{11} - \rho_{22}$	$\approx 10\mu s$
$\tau_2$	$\rho_{12}$	$\approx 10\mu s$
$\tau'_1$	$\rho_{33} - \rho_{44}$	$\approx 0$
$\tau'_2$	$\rho_{34}$	$\approx 0$
$T_1$	$\rho_{33}, \rho_{44}$	$\approx 0$
$T_2$	$\rho_{13}, \rho_{14}, \rho_{23}, \rho_{24}$	$\approx 10^{-10} s$

Für den Relaxationsanteil der Diagonalelemente der Dichtematrix gilt dann [MDLM86]

$$(\dot{\rho})_{relax,11} = -\frac{1}{2\tau_1}(\rho_{11} - \rho_{22}) + \frac{1}{2T_1}(\rho_{33} + \rho_{44}) \quad (3.16)$$

$$(\dot{\rho})_{relax,22} = \frac{1}{2\tau_1}(\rho_{11} - \rho_{22}) + \frac{1}{2T_1}(\rho_{33} + \rho_{44}) \quad (3.17)$$

$$(\dot{\rho})_{relax,33} = -\frac{1}{2\tau'_1}(\rho_{33} - \rho_{44}) - \frac{1}{T_1}\rho_{33} \quad (3.18)$$

$$(\dot{\rho})_{relax,44} = \frac{1}{2\tau'_1}(\rho_{33} - \rho_{44}) - \frac{1}{T_1}\rho_{44}. \quad (3.19)$$

Die Nebendiagonalelemente zerfallen mit ihren oben angegebenen Zerfallszeiten.

### Entwicklungsgleichung für die Dichtematrix

Mithilfe der Relaxationszeiten kann die Entwicklungsgleichung der Dichtematrix vollständig beschrieben werden. Es sind dann insgesamt zehn ver-

schiedene Gleichungen zu lösen. Für das betrachtete System können allerdings einige Annahmen getroffen werden, die die Beschreibung vereinfachen. Die Populationen der oberen Niveaus  $\rho_{33}$  und  $\rho_{44}$ , sowie die Kohärenz der oberen Niveaus  $\rho_{34}$  werden durch die Anwesenheit eines Dämpfungsgases zerstört und können deshalb vernachlässigt werden. Zusätzlich gilt, dass die Relaxationszeit  $T_2$  sehr viel größer als die Zeitskala für die Larmor-Frequenzen  $\Omega_L$  und  $\Omega'_L$  ist ( $T_2 \approx 10^{-10}$ ,  $\Omega_L, \Omega'_L \leq 10^8$ ). Da die Zeitskala für die optischen Kohärenzen  $T_2$  sehr viel kleiner ist als die Zeitskala für die Relaxationszeiten der unteren Niveaus  $\tau_1$ , können die Entwicklungsgleichungen der optischen Kohärenzen ( $\rho_{13}, \rho_{14}, \rho_{23}$  und  $\rho_{24}$ ) adiabatisch eliminiert und integriert werden. Damit reduziert sich die Beschreibung auf drei zu lösende Gleichungen. Für die verbleibenden Entwicklungsgleichungen für die unteren Niveaus  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{22}$  und  $\rho_{12}$  folgt damit

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{11} &= i\frac{\Omega_L}{2}(\rho_{12} - \rho_{21}) + i(\beta_+^*\rho_{14} - \beta_+\rho_{41})e^{i\omega t} \\ &\quad - \frac{1}{2\tau_1}(\rho_{11} - \rho_{22}) + \frac{1}{2T_1}(\rho_{33} + \rho_{44}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{22} &= -i\frac{\Omega_L}{2}(\rho_{12} - \rho_{21}) + i(\beta_-\rho_{32} - \beta_-^*\rho_{23})e^{i\omega t} \\ &\quad - \frac{1}{2\tau_1}(\rho_{11} - \rho_{22}) + \frac{1}{2T_1}(\rho_{33} + \rho_{44}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{12} &= i\frac{\Omega_L}{2}(\rho_{11} - \rho_{22}) - i(\beta_+\rho_{42} - \beta_-^*\rho_{13})e^{i\omega t} \\ &\quad - \frac{1}{\tau_2}\rho_{12}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

In diesen Gleichungen können weiterhin alle Terme proportional zu  $\rho_{33}$  und  $\rho_{44}$  vernachlässigt werden, da die Populationen der oberen Niveaus vernachlässigbar klein sind. Die Gleichungen für die optischen Kohärenzen sind nach der Integration durch adiabatische Eliminierung durch

$$\rho_{13}e^{i\omega t} = \frac{\beta_-}{\Delta + i/T_2}\rho_{12} \quad (3.23)$$

$$\rho_{14}e^{i\omega t} = \frac{-\beta_+}{\Delta + i/T_2}\rho_{11} \quad (3.24)$$

$$\rho_{23}e^{i\omega t} = \frac{\beta_-}{\Delta + i/T_2}\rho_{22} \quad (3.25)$$

$$\rho_{24}e^{i\omega t} = \frac{-\beta_+}{\Delta + i/T_2}\rho_{21} \quad (3.26)$$

$$(3.27)$$

gegeben. Hierbei bezeichnet  $\Delta = \omega_0 - \omega$  die *Verstimmung* des Lasers gegenüber der Übergangsfrequenz  $\omega_0$  des atomaren Systems, vgl Abb. 3.1. Einführen der Abkürzungen

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_2} = \gamma, \quad \frac{1}{T_2} = \Gamma_2, \quad \bar{\Delta} = \frac{\Delta}{\Gamma_2} \quad \text{und} \quad P_{\pm} = \frac{|\beta_{\pm}|^2}{\Gamma_2(\bar{\Delta}^2 + 1)} \quad (3.28)$$

sowie

$$u = \rho_{12} + \rho_{21}, \quad v = i(\rho_{12} - \rho_{21}) \quad \text{und} \quad w = \rho_{22} - \rho_{11}, \quad (3.29)$$

ergeben die Entwicklungsgleichungen

$$\dot{u} = -(P_+ + P_- + \gamma)u - (P_- - P_+)\bar{\Delta}v \quad (3.30)$$

$$\dot{v} = -(P_+ + P_- + \gamma)v + (P_- - P_+)\bar{\Delta}u - \Omega_L w \quad (3.31)$$

$$\dot{w} = -(P_+ + P_- + \gamma)w + (P_- - P_+) + \Omega_L v \quad (3.32)$$

des Systems. Diese Gleichungen können mit dem Bloch-Vektor  $\mathbf{m} = (u, v, w)$  als eine generalisierte Bloch-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{m} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{m} - \gamma_{\text{eff}} \mathbf{m} + \mathbf{P} \quad (3.33)$$

mit

$$\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_L, 0, (P_- - P_+)\bar{\Delta}) \quad (3.34)$$

$$\mathbf{P} = (0, 0, P_- - P_+) \quad (3.35)$$

$$\gamma_{\text{eff}} = P_+ + P_- + \gamma \quad (3.36)$$

geschrieben werden [MDLM86]. Die Entwicklung des Systems wird also durch Gleichung (3.33) bestimmt. Die Verstimmung  $\bar{\Delta}$  ist hier auf die Relaxationsrate  $\Gamma_2$  der optischen Kohärenzen normiert und wird deshalb als *normalisierte Verstimmung* bezeichnet.

Die Entwicklungsgleichung (3.33) des Systems beinhaltet in dieser Form noch keine Ortskopplung. Durch die Diffusion der Atome wird allerdings eine Ortskopplung des Bloch-Vektors hergestellt. Deshalb wird zu der effektiven Dämpfungsrate  $\gamma_{\text{eff}}$  ein Diffusionsterm addiert [Aum99, Ack96]. Damit ergibt sich für die effektive Dämpfungsrate ein Ausdruck von

$$\gamma_{\text{eff}} = P_+ + P_- + \gamma - D\nabla_{\perp}^2. \quad (3.37)$$

In Gleichung (3.30) ist nur in der dritten Komponente ein Quellenterm, der durch optisches Pumpen bedingt ist, vorhanden. Die Indizes  $\pm$  deuten wieder auf die durch  $\sigma_+$ - und  $\sigma_-$ -Licht induzierten Übergänge des atomaren Systems hin. Zusätzlich wird die dritte Komponente nur durch ein Magnetfeld

$\Omega_L$  mit den anderen beiden Gleichungen gekoppelt. Wird das Magnetfeld vernachlässigt, entkoppeln die Gleichungen und das System kann durch eine skalare Gleichung der Form

$$\dot{w} = -(\gamma - D\nabla_{\perp}^2)w - (P_+(w) + P_-(w))w + P_+(w) - P_-(w) \quad (3.38)$$

beschrieben werden [Aum99, SF96]. Die Terme  $P_{\pm}$  stellen in dieser Form Pumpraten der unterschiedlich zirkular polarisierten Komponenten des elektrischen Feldes dar und hängen von der Besetzungszahldifferenz  $w$  ab. Sie sind nach (3.28) durch

$$\begin{aligned} P_{\pm} &= \frac{3}{16} \frac{|\mu_E|^2 |\mathcal{E}_{\pm}|^2}{4\hbar^2 \Gamma_2 (\bar{\Delta}^2 + 1)} \\ &=: \Psi_1 |\mathcal{E}_{\pm}|^2 \\ &=: \tilde{\Psi}_1 \frac{1}{\bar{\Delta}^2 + 1} |\mathcal{E}_{\pm}|^2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

gegeben. Der Faktor  $3/16$  wurde in die Gleichungen eingefügt um Effekte aus der Hyperfeinaufspaltung der Niveaus, die zu einer Reduzierung der Pumpraten führen, zu kompensieren [Ack96, Aum99]. Die Berechnung der Pumpraten benötigt also das elektrische Feld innerhalb des Mediums. Aufgrund der Rückkopplung des elektrischen Feldes in das Medium können Interferenzeffekte des elektrischen Feldes entstehen. Diese Effekte sollen im Folgenden vernachlässigt werden, da atomare Diffusion diese Effekte auslöscht [Ack96, Aum99]. Daher gilt für die Pumpraten

$$P_{\pm} = \Psi_1 (|\mathcal{E}_{f,\pm}|^2 + |\mathcal{E}_{b,\pm}|^2) \quad (3.40)$$

mit dem vorwärtslaufenden Anteil  $f$  des elektrischen Feldes und dem rückwärtslaufenden Anteil  $b$ .

Die Antwort des Mediums ist abhängig von dem Polarisationszustand des elektrischen Feldes, das in das Medium eingekoppelt wird [MDLM86]. Die makroskopische Polarisation des Mediums kann mit der Dichtematrix über [MB90, Duc73, DH97, MDLM86]

$$\mathcal{P}_+(z, t) = N\mu_E |\rho_{14} e^{i\omega t}| \quad (3.41)$$

$$\mathcal{P}_-(z, t) = N\mu_E |\rho_{23} e^{i\omega t}| \quad (3.42)$$

und der Anzahl der Atome  $N$  pro Volumen, bestimmt werden. Insgesamt ergibt sich damit für die makroskopische Polarisation

$$\mathcal{P}_+(z, t) = \frac{N\mu_E^2}{2\hbar\Gamma_2} \frac{\bar{\Delta} - i}{\bar{\Delta}^2 + 1} (1 \mp w) \mathcal{E}_{\pm} = \epsilon_0 \chi_{\pm} \mathcal{E}_{\pm} \quad (3.43)$$

Hierbei bezeichnet  $\chi_{\pm}$  die nichtlineare Suszeptibilität des Natrium-Dampfes.

### Nichtlineare Suszeptibilität des Natrium-Dampfes

Die nichtlineare Suszeptibilität des Mediums (die Antwort auf ein elektrisches Feld) wird durch die Besetzungszahldifferenz der unteren Niveaus  $w$  bestimmt. Dieser Zusammenhang ist nach (3.43) durch

$$\chi_{\pm} = \chi_{\text{lin}}(1 \mp w) \quad (3.44)$$

gegeben. Dabei ist die lineare Suszeptibilität des Mediums über

$$\chi_{\text{lin}} = -\frac{2}{k_0} \alpha_0 (\bar{\Delta} + i), \quad (3.45)$$

mit der linearen Absorption  $\alpha_0$ , definiert. Die Indizes  $\pm$  stellen dabei wieder die Verbindung zu den zirkularen Polarisationskomponenten des elektrischen Feldes her.

Der Brechungsindex des Mediums hängt mit der Besetzungszahldifferenz  $w$  über

$$n_{\pm} = 1 + \frac{1}{2} \text{Re} \chi_{\pm} = 1 + (n_0 - 1)(1 \mp w) \quad (3.46)$$

zusammen. Die Absorption im Medium ist ebenfalls abhängig von der Besetzungszahldifferenz und ist gegeben durch

$$\alpha_{\pm} = -\frac{\omega}{2c} \text{Im} \chi_{\pm} = \alpha_0(1 \mp w). \quad (3.47)$$

#### 3.1.4 Propagation des elektrischen Feldes

Um die Pumpraten tatsächlich bestimmen zu können, müssen Entwicklungsgleichungen für das elektrische Feld bestimmt werden, die die Propagation des Lichtfeldes angeben. Die Ausgangsgleichung ist die Wellengleichung mit Polarisation

$$\nabla_{\perp}^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t). \quad (3.48)$$

In dieser Gleichung bezeichnet  $\mu_0$  die magnetische Permeabilität und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  bezeichnet das elektrische Feld und  $\mathcal{E}_{\pm}(\mathbf{r}, t)$  die Amplitude des elektrischen Feldes in der Basis der zirkularen Polarisationskomponenten.

Nach Abb. 2.1 muss jeweils eine Entwicklungsgleichung für die vorwärtslaufende Welle und für die rückwärtslaufende Welle aufgestellt werden. Einsetzen des Ansatzes für das elektrische Feld (3.1) und für die Polarisation

(3.43) und vernachlässigen der zweiten Ableitung der Amplituden  $\mathcal{E}_\pm(\mathbf{r}, t)$  nach  $z$  (paraxiale Näherung), sowie der Ableitung der Amplituden nach der Zeit (*langsam veränderlichen Amplituden* Näherung), ergibt Entwicklungsgleichungen für die vorwärts- und rückwärtslaufenden Lichtwellen. Die Entwicklungsgleichung für die vorwärtslaufende Lichtwelle lautet damit

$$2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_{\pm,f}(r_\perp, z, t) = \underbrace{\nabla_\perp^2 \mathcal{E}_{\pm,f}(r_\perp, z, t)}_{\text{freie Propagation}} + \underbrace{k_0^2 \chi_\pm \mathcal{E}_{\pm,f}(r_\perp, z, t)}_{\text{Propagation im Medium}} \quad (3.49)$$

und für die rückwärts laufende Lichtwelle gilt

$$-2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_{\pm,b}(r_\perp, z, t) = \nabla_\perp^2 \mathcal{E}_{\pm,b}(r_\perp, z, t) + k_0^2 \chi_\pm \mathcal{E}_{\pm,b}(r_\perp, z, t) \quad (3.50)$$

mit den Abkürzungen  $\nabla_\perp^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$  und  $r_\perp = (x, y)^T$  [Aum99, SF96]. Die zu berechnenden Felder hängen damit nur noch von der  $x$ - und  $y$ -Komponente ( $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$ ) ab. Das elektrische Feld ist damit eine 2-dimensionale Größe, die über

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_+ \\ \mathcal{E}_- \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

beschrieben werden kann. Da die freie Propagation und die Propagation im Medium voneinander getrennt werden kann, können die Gleichungen (3.49) und (3.50) für die einzelnen Bereiche separat formal integriert werden und liefern Operatoren die die Propagation des Feldes beschreiben.

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Pumpstrahlen bestimmen, wenn die Propagation im Medium und im freien Raum formal integriert wird. Die mathematische Darstellung orientiert sich dabei am *Jones-Formalismus* [CJ41]. Die integrierten Entwicklungsgleichungen können dann durch Operatoren dargestellt werden, die die Form von  $2 \times 2$ -Matrizen haben. Diese Operatoren werden in Kartesischer Basis entwickelt und nach Basistransformation auf das elektrische Feld in der Darstellung (3.51) angewandt.

#### 3.1.4.1 Freie Propagation

Die freie Propagation wird durch formale Integration von (3.49) und (3.50) über den Propagator

$$G(z, z', \nabla_\perp^2) = e^{-\frac{i}{2k}|z-z'|\nabla_\perp^2} \quad (3.52)$$



beschrieben. Mit diesem Propagator wird das Feld an der Stelle  $z'$  ausgehend von dem Feld an der Stelle  $z$  nach

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t) = G(z, z', \nabla_\perp^2) \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z', t) \quad (3.53)$$

berechnet. Dieser Operator wirkt direkt in der zirkularen Basis.

Dieser Propagator hat die Eigenschaften

$$G(z, z', \nabla_\perp^2) = G(|z - z'|, \nabla_\perp^2) \quad (3.54)$$

$$G(z, z', \nabla_\perp^2) G(z', z'', \nabla_\perp^2) = G(z, z'', \nabla_\perp^2) = G(|z - z''|, \nabla_\perp^2). \quad (3.55)$$

Entscheidend sind also nicht Start- und Endpunkt, sondern nur die Strecke der Propagation. Der Ausdruck des Operators für die freie Propagation hängt darüberhinaus nicht von der Ausbreitungsrichtung ( $+z$  oder  $-z$ ) ab. Wird der Propagator  $G(|z - z'|, \nabla_\perp^2)$  mit nur zwei Variablen angegeben, ist mit der Variablen  $|z - z'|$  stets die Propagation über den Betrag der Länge gemeint.

### 3.1.4.2 Propagation im Medium

Da das Medium als dünn angenommen wird, kann die freie Propagation von der Propagation im Medium abgekoppelt werden und es kann ein Propagator für das Medium über

$$K(z, z', w) = \begin{pmatrix} \tilde{K}_+(z, z', w) & 0 \\ 0 & \tilde{K}_-(z, z', w) \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

mit

$$\tilde{K}_\pm(z, z', w) = e^{-\frac{i}{2k} \int_{z'}^z dz'' \chi_\pm(z'', w)} \quad (3.57)$$

definiert werden. Dieser Propagator liefert das Feld im Medium an der Stelle  $z$  nach

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t) = K(z, z', w) \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z', t). \quad (3.58)$$

Dieser Operator wirkt ebenfalls direkt in der zirkularen Basis

Auch dieser Operator hat, aufgrund des Vorzeichenwechsels in der Wellengleichung für die reflektierte Welle die Eigenschaft

$$K(z, z', w) = K(|z - z'|, w). \quad (3.59)$$

Entscheidend ist auch hier nur der Betrag der Länge des Mediums, nicht die Richtung oder die Anfangs- und Endpunkte. Wird der Propagator

mit nur zwei Variablen angegeben, ist stets die Propagation über den Betrag der Länge im Medium gemeint. Über die Suszeptibilität des Mediums  $\chi_{\pm} = \chi_{\pm}(w)$  hängt der Operator  $K(z, w)$  auch von der Orientierung  $w$  des Mediums ab.

Die Integration im Exponenten ist in der Differentialgleichung (3.73) für die gemittelte Orientierung  $\phi$  schon durchgeführt. Als Vorfaktor ergibt sich aufgrund der Absorption im Medium  $(1 - e^{-2\alpha_0 L(1 \pm \phi(\mathbf{r}_{\perp}, t))})$ . Die Orientierung  $w$  kann dabei durch die gemittelte Orientierung  $\phi$  ersetzt werden [Aum99]. Grundlage für die Berechnung der Pumpraten ist dann die Orientierung am Anfang der Zelle für die hin- und rücklaufende Welle, sowie die Orientierung am Ende der Zelle für beide Wellen. Der zweite Term ist bedingt durch die Absorption im Medium und wirkt auf jede Welle. Für die Propagation im Medium folgt dann

$$K(\phi) = \begin{pmatrix} \tilde{K}_+(L, \phi) & 0 \\ 0 & \tilde{K}_-(L, \phi) \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

mit

$$\tilde{K}_{\pm}(L, \phi) = e^{-i\alpha_0 L(\bar{\Delta} + i)(1 \mp \phi)}. \quad (3.61)$$

Die Länge der Zellen ist in diesem Fall mit  $L$  angesetzt. Da die Zellen in der gesamten Arbeit eine konstante Länge haben, kann die Abhängigkeit von der Propagationslänge im Folgenden vernachlässigt werden. Dies ist die Form, die in gesamten Arbeit für die Propagation im Medium verwendet wird.

### 3.1.4.3 $\lambda$ -Plättchen

Als  $\lambda$ -Plättchen werden in dieser Arbeit doppelbrechende optische Elemente, auch Wellenplättchen genannt, bezeichnet. Diese Elemente besitzen eine optische Achse, und elektrische Felder, die durch diese Plättchen laufen werden, abhängig von ihrer Polarisierung zur optischen Achse, phasenverzögert. Die Achse parallel zur optischen Achse wird dabei als *schnelle* Achse und die Achse senkrecht zur optischen Achse wird als *langsame* Achse bezeichnet [Hec87]. Die in den Strahlengang einzubauenden  $\lambda$ -Plättchen werden über den Jones-Formalismus [CJ41, Hec87, PP87] berechnet. Der Operator für die Plättchen berechnet sich durch folgende Vorschrift:

- I Transformation der zirkulären Basis in kartesische Komponenten
- II Drehung des Koordinatensystems um den Winkel, den das Plättchen mit der linearen Eingangspolarisation hat

III Wirkung des Plättchens

IV Rückdrehung des Koordinatensystems

V Rücktransformation des Systems von kartesischer in zirkularer Basis

Damit berechnet sich der Operator für das Plättchen über die Matrizen

$$M(\varphi, \alpha) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}}_V \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{IV} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}}_{III} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{II} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}}_I. \quad (3.62)$$

Die schnelle Achse des Plättchens ist dabei identisch mit der  $y$ -Achse. Für das  $\lambda$ -Plättchen folgt damit der Operator

$$M(\varphi, \alpha) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^{i\varphi} & (-1 + e^{i\varphi})(i \cos(\alpha) + \sin(\alpha))^2 \\ -(-1 + e^{i\varphi})(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^2 & 1 + e^{i\varphi} \end{pmatrix},$$

mit  $\alpha$  als Winkel zwischen der linearen Polarisation des Eingangsfeldes und  $\varphi$  der Phasenverschiebung, die das Plättchen bewirkt.

Der Operator  $M$  liefert das Feld an der Stelle  $z$  nach dem durchlaufen des  $\lambda$ -Plättchens durch

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z + 0, t) = M(\varphi, \alpha) \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z - 0, t). \quad (3.63)$$

Die physikalische Forderung der Addition zweier Plättchen erfüllt dieser Operator, da er mit der freien Propagation vertauscht. Es gilt also

$$M(\varphi, \alpha) G(z) = G(z) M(\varphi, \alpha) \quad (3.64)$$

$$M(\varphi_1, \alpha_1) M(\varphi_2, \alpha_1) = M(\varphi_1 + \varphi_2, \alpha_1). \quad (3.65)$$

Da das Plättchen im Strahlengang zweimal durchlaufen wird und die freie Propagation mit dem Plättchen vertauscht, kann die Phasenverschiebung durch ein Plättchen verdoppelt und nach der Berechnung der freien Propagation an das Feld multipliziert werden. Für die Darstellung der Operatoren für ein  $\lambda$ -Plättchen wird dabei abkürzend die Bezeichnung  $M$  gewählt.

### 3.1.4.4 Reflexionen

Das Feld, das von einem Spiegel reflektiert wird, kann mittels

$$\mathcal{E}_b(\mathbf{r}_\perp, z, t) = \sqrt{R} \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t), \quad (3.66)$$

mit der Reflektivität des Spiegels  $0 < R < 1$ , beschrieben werden.

### 3.1.5 Abschwächung durch Absorption

In der bisherigen Beschreibung ist der Operator für die Propagation im Medium abhängig vom Ort innerhalb des Mediums. Über eine Integration über die Länge des Mediums kann diese Abhängigkeit beseitigt werden. Gleichung (3.38) ist die Entwicklungsgleichung für die relevante Variable des Systems. Diese Gleichung beschreibt die Entwicklung der Besetzungszahldifferenz der unteren Niveaus  $w$  des atomaren Modells. Im Folgenden wird diese Variable auch *Orientierung* genannt. Um die Gleichung (3.38) vollständig zu lösen, ist es erforderlich die elektrischen Felder der vorwärts- und rückwärtslaufenden Welle zu berechnen. Da Interferenzeffekte vernachlässigt werden können [Aum99], können in erster Näherung die Felder an den jeweiligen Eintrittsgrenzflächen des Mediums berechnet und deren Wirkung auf die Orientierung des Mediums, unter Vernachlässigung der Absorption, ermittelt werden [SF96].

Die Abschwächung der Besetzungszahldifferenz  $w$  über die Länge einer Zelle des Mediums durch Absorption wird durch Integration über eine Zellenlänge in das System eingebaut [Aum99, LLBR<sup>+</sup>95]. Damit ergibt sich eine gemittelte Orientierung  $\phi$ , die über

$$\phi(\mathbf{r}_\perp, t) = \frac{1}{L} \int_0^L w(\mathbf{r}_\perp, z, t) dz \quad (3.67)$$

definiert wird.

Integration von Gleichung (3.38) über eine Zellenlänge  $L$  ergibt

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(\mathbf{r}_\perp, t) = & -(\gamma - D\nabla_\perp^2)\phi(\mathbf{r}_\perp, t) \\ & + \frac{1}{L} \int_0^L P_+(1-w)dz - \frac{1}{L} \int_0^L P_-(1+w)dz. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Die Pumpraten können über das elektrische Feld Ausgedrückt werden. Partielle Integration und benutzen der Entwicklungsgleichung des elektrischen Feldes im Medium (3.49) und (3.50) führt auf

$$\frac{1}{L} \int_0^L P_+(1-w)dz = \frac{P_{+,f}(0) - P_{+,f}(L) + P_{+,b}(L) - P_{+,b}(0)}{2\alpha_0 L} \quad (3.69)$$

und

$$\frac{1}{L} \int_0^L P_-(1+w)dz = \frac{P_{-,f}(0) + P_{-,f}(L) - P_{-,b}(L) + P_{-,b}(0)}{2\alpha_0 L}. \quad (3.70)$$

Die Pumpraten nach durchlaufen des Mediums ergeben sich mit gemittelter Orientierung über (3.61). Daher gilt

$$P_{\pm,f}(L) = e^{-2\alpha_0 L(1 \mp \phi(\mathbf{r}_\perp, t))} P_{\pm,f}(0) \quad (3.71)$$

und

$$P_{\pm,b}(0) = e^{-2\alpha_0 L(1 \mp \phi(\mathbf{r}_\perp, t))} P_{\pm,b}(L). \quad (3.72)$$

Mit diesen Gleichungen ergibt sich für die Entwicklungsgleichung der gemittelten Orientierung  $\phi_I(\mathbf{r}_\perp, t)$  für eine Zelle

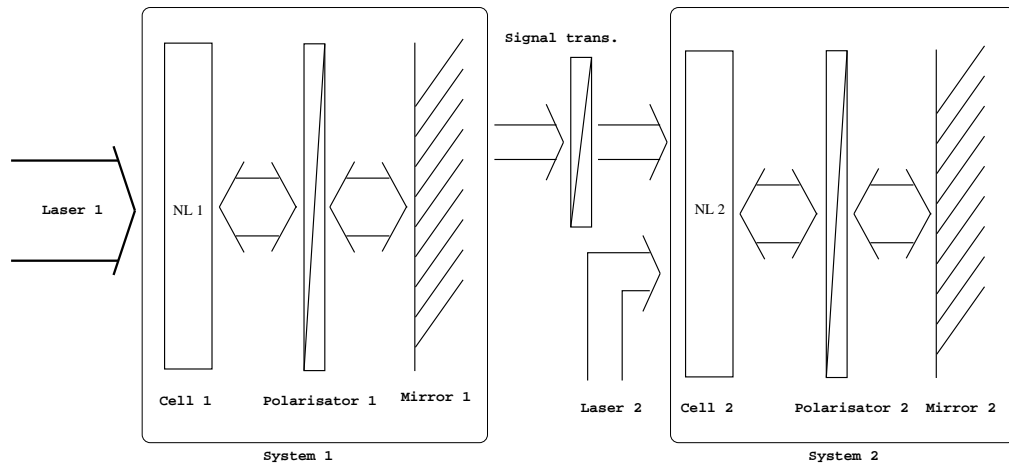
$$\begin{aligned} \dot{\phi}(\mathbf{r}_\perp, t) &= -(\gamma - D\nabla_\perp^2)\phi(\mathbf{r}_\perp, t) \\ &\quad - \frac{1}{2\alpha_0 L} (1 - e^{-2\alpha_0 L(1+\phi(\mathbf{r}_\perp, t))}) P_-(\phi(\mathbf{r}_\perp, t)) \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha_0 L} (1 - e^{-2\alpha_0 L(1-\phi(\mathbf{r}_\perp, t))}) P_+(\phi(\mathbf{r}_\perp, t)). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Dies ist die Entwicklungsgleichung die ausgewertet werden muss. Um diese Gleichung zu lösen, müssen die Pumpraten  $P_\pm(\phi(\mathbf{r}_\perp, t))$  berechnet werden. Zunächst soll allerdings die Kopplung zwischen zwei Zellen eingeführt werden, um dann die Pumpraten für beide Zellen gemeinsam zu berechnen.

## 3.2 Zwei Natrium-Dampf Zellen

Werden zwei Zellen gekoppelt, dann ergibt sich für jede Zelle eine Differentialgleichung der Art (3.73). Um die Parameter und die Orientierungen der beiden Zellen zu kennzeichnen, werden die Indizes  $I$  und  $II$  benutzt. In Abb. 3.2 ist das in dieser Arbeit betrachtete System dargestellt. Grundlage sind zwei Natrium-Dampf Einspiegel Rückkopplungssysteme, die über eine

$$\text{Kopplung } s \text{ mit } s > 0 \quad (3.74)$$

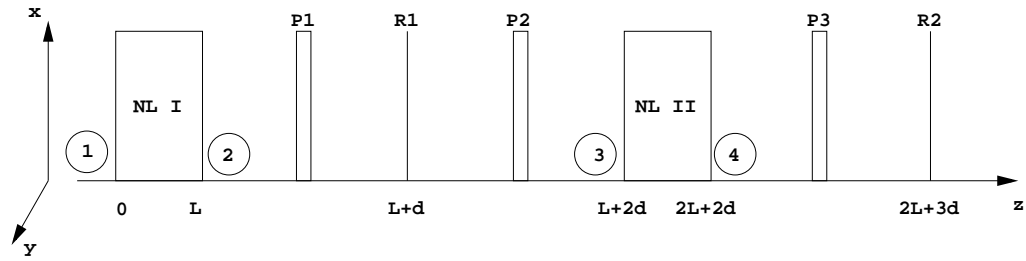


**Abbildung 3.2:** Laserrückkopplungssystem mit zwei Zellen und unidirektionaler Kopplung.

miteinander gekoppelt werden. Die aus der ersten Zelle ausgekoppelten Felder werden dann durch ein  $\lambda$ -Plättchen, welches identisch mit dem in der ersten Zelle ist, geleitet, sodass die ausgekoppelten Felder das Plättchen ebenfalls zweimal durchlaufen. Die freie Propagation in der ersten Zelle beträgt dabei  $d_I$  und die zweite Zelle befindet sich im Abstand  $d_I$  von der ersten, vgl. dazu Abb. 3.3.

Die Kopplung der zwei Zellen ist in dieser Arbeit *unidirektional*, d.h. das Signal aus der ersten Zelle wird in die zweite Zelle eingekoppelt, jedoch wird kein Signal aus der zweiten Zelle in die erste Zelle zurückgekoppelt. Das gesamte System bildet also eine Sender-Empfänger Konfiguration. Die Laufzeiten des Lichtfeldes sind dabei vernachlässigbar klein gegenüber den Antwortzeiten der Medien, so dass von einer instantanen Kopplung ausgegangen werden kann. In Abb. 3.3 ist ein Überblick über die Längenskalen im System dargestellt. Um die Pumpraten für die Differentialgleichungen zu berechnen, müssen die elektrischen Felder an den Positionen (1)-(4) in Abb. 3.3 berechnet werden. Die Positionen (3) und (4) befinden sich dabei in der zweiten Zelle. Für die Berechnung der elektrischen Felder an diesen Stellen muss die Kopplung  $s$  berücksichtigt werden.

Beide Zellen können dabei separat voneinander betrieben werden. Die Kopplung kann also ausgeschaltet werden. Dadurch sind in diesem Aufbau zwei Eingangintensitäten durch die einzelnen Laser vorhanden. Ein Laser für die erste Zelle mit der Intensität  $I_{0I}$  und ein zweiter für die zweite Zelle mit der Intensität  $I_{0II}$ .



**Abbildung 3.3:** Schematischer Überblick über die Längenskalen in den gekoppelten Systemen. Die elektrischen Felder müssen an den Punkten (1)-(4) berechnet werden um die Pumpraten zu berechnen.  $NLI/II$  bezeichnet die Nichtlinearitäten (Natrium-Dämpfe),  $R1$  und  $R2$  die Spiegel und  $P1, P2, P3$  die  $\lambda$ -Plättchen. Hierbei gilt immer  $P1 = P2$ .

### 3.3 Bestimmung der Pumpraten

Um die Differentialgleichung für die gemittelte Orientierung (3.73) vollständig zu bestimmen, müssen die Pumpraten  $P_{\pm I}$  der ersten und  $P_{\pm II}$  der zweiten Zelle bekannt sein. Mit den Operatoren für die freie Propagation (3.52), der Propagation im Medium (3.60), der Reflexion (3.66) und des  $\lambda$ -Plättchens (3.63) können die Pumpraten vollständig bestimmt werden. Dazu müssen die Operatoren in einer festgelegten Reihenfolge auf das elektrische Eingangsfeld angewendet werden. Die Reihenfolge der Operatoren lässt sich über die schematische Darstellung in Abb. 3.3 bestimmen.

Ziel ist die Berechnung der elektrischen Felder an den Punkten (1)-(4). Für die erste Zelle sind dies die Punkte (1) und (2) in Abb. 3.3. Die Pumpraten für die zweite Zelle werden analog über das elektrische Feld an den Punkten (3) und (4) bestimmt.

#### Pumpraten der ersten Zelle

Die Pumpraten lassen sich nach (3.40) durch eine vorwärts- und eine rückwärtslaufende Welle beschreiben. An Punkt (1) in Abb. 3.3 muss die vorwärts- und an Punkt (2) die rückwärtslaufende Welle bestimmt werden. Die Abschwächung der Orientierung durch Absorption im Medium wird durch die Vorfaktoren vor den Pumpraten in der Differentialgleichung (3.73) berücksichtigt.

Am Punkt (1) wird das elektrische Feld durch einen einfallenden Laser bestimmt, also durch die Anfangsbedingung

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{f,I} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{+,f,I}(\mathbf{r}_\perp, 0, t) \\ \mathcal{E}_{-,f,I}(\mathbf{r}_\perp, 0, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_I^0 \\ \mathcal{E}_I^0 \end{pmatrix}. \quad (3.75)$$

Da die Operatoren Matrizen sind, müssen sie von links auf die Anfangsbedingung angewendet werden. Das elektrische Feld durchquert zunächst das Medium  $NLI$ , dann die freie Propagation über  $2d_I$  und das  $\lambda$ -Plättchen  $P1$ . Die Reflexion am ersten Spiegel  $R1$  kann über eine einfache Multiplikation mit der Reflexivität  $\sqrt{R_I}$  eingebaut werden. Am Punkt (2) ist das rückwärtslaufende elektrische Feld also

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{b,I} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{+,b,I}(\mathbf{r}_\perp, L, t) \\ \mathcal{E}_{-,b,I}(\mathbf{r}_\perp, L, t) \end{pmatrix} = \sqrt{R_I} \underbrace{M(2\varphi_I, \alpha_I)}_{M_I} G(2d_I, \nabla_\perp^2) K(\phi) \boldsymbol{\mathcal{E}}_{f,I}. \quad (3.76)$$

Die Phasenverzögerung wird doppelt gezählt, da das Feld auf dem Hin- und Rückweg jeweils einmal durch das Plättchen verzögert wird und Operatoren für die  $\lambda$ -Plättchen mit denen der freien Propagation vertauschen. Für die Pumpraten gilt

$$P_{\pm I} = \Psi_1 (|\mathcal{E}_{\pm f,I}(\textcircled{1})|^2 + |\mathcal{E}_{\pm b,I}(\textcircled{2})|^2). \quad (3.77)$$

## Pumpraten der zweiten Zelle

Für die zweite Zelle gilt ebenfalls eine Differentialgleichung der Art (3.73) für die gemittelte Orientierung  $\phi_{II}$ . Das elektrische Feld in der zweiten Zelle setzt sich allerdings aus zwei Anteilen zusammen. Der erste Anteil kommt aus der ersten Zelle und wird über eine Kopplung  $s$  in die zweite Zelle eingekoppelt. Dabei durchläuft das Feld ein  $\lambda$ -Plättchen  $P2$ , das identisch ist mit dem Plättchen  $P1$ . Die freie Propagationsstrecke ist ebenfalls identisch, sodass der Anteil des elektrischen Feldes aus der ersten Zelle an Punkt (3) proportional ist zu dem elektrischen Feld an Punkt (2). Die Proportionalität wird dabei durch die Kopplung und die Reflexivität bestimmt.

Der zweite Anteil des elektrischen Feldes in der zweiten Zelle wird über einen zusätzlichen Laser, der nur in der zweiten Zelle eingekoppelt wird, bestimmt. Die Interferenz der elektrischen Felder aus der ersten und der zweiten Zelle wird vernachlässigt. Für das elektrische Feld in der zweiten Zelle am Punkt (3) gilt also

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{f,II} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{+,f,II}(\mathbf{r}_\perp, L + 2d, t) \\ \mathcal{E}_{-,f,II}(\mathbf{r}_\perp, L + 2d, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{II}^0 + \sqrt{s/R_I} \mathcal{E}_{+,b,I} \\ \mathcal{E}_{II}^0 + \sqrt{s/R_I} \mathcal{E}_{-,b,I} \end{pmatrix}, \quad (3.78)$$



mit der *Kopplungsstärke*  $s$ . Das reflektiert Feld am Punkt (4) ergibt sich äquivalent zu (3.76) zu

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{b,II} &= \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{+,b,II}(\mathbf{r}_\perp, 2L + 2d, t) \\ \mathcal{E}_{-,b,II}(\mathbf{r}_\perp, 2L + 2d, t) \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{R_{II}} \underbrace{M(2\varphi_{II}, \alpha_{II})}_{M_{II}} G(2d, \nabla_\perp^2) K(\phi) \mathcal{E}_{f,II}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Die Pumpraten in der zweiten Zelle können damit über

$$P_{\pm II} = \Psi_1 (|\mathcal{E}_{\pm f,II}(\textcircled{3})|^2 + |\mathcal{E}_{\pm b,II}(\textcircled{4})|^2). \quad (3.80)$$

berechnet werden. Die Verstimmungen der Laser werden in dieser Arbeit immer identisch angenommen, daher sind die Vorfaktoren der Pumpraten  $\Psi_1$  identisch für beide Zellen. Die Pumpraten (3.80) und (3.77) bilden zusammen mit der Differentialgleichung (3.73) für die Orientierung  $\phi_{I,II}$  ein geschlossenes System.

Soll ein anderes System, mit einer anderen Nichtlinearität, berechnet werden, dann ist der Operator (3.56) auszuwechseln. Für die Verknüpfung der Operatoren muss dann ein Schema der Längenskalen gemäß Abb. 3.3 erstellt werden. Die Kombination der Operatoren der freien Propagation, der nichtlinearen Wechselwirkung und der  $\lambda$ -Plättchen folgt dabei obiger Argumentation. Mit Hilfe dieser Argumentation können die elektrischen Felder an den benötigten Punkten berechnet und in die für das betrachtete System hergeleitete Differentialgleichung eingesetzt werden.

### 3.4 Die vollständigen Grundgleichungen

In diesem Abschnitt sollen die vollständigen Grundgleichungen zusammengefasst werden. Die vollständigen Gleichungen sind dann numerisch zu integrieren und analytisch zu behandeln. Anhand der Gleichungen können dann Aussagen über die Stabilität einzelner Zustände gemacht werden.

Da in dieser Arbeit nur Zellen gleicher Länge und gleicher freier Propagationslänge betrachtet werden, werden im Folgenden die Indizes  $I$  und  $II$  an den Längen weggelassen.

Die Differentialgleichung der Zellen lassen sich schreiben als

$$\dot{\phi}_I = -(\gamma - D\nabla_\perp^2)\phi_I + \mathcal{NL}_I(\nabla_\perp^2, \phi_I) \quad (3.81)$$

$$\dot{\phi}_{II} = -(\gamma - D\nabla_\perp^2)\phi_{II} + \mathcal{NL}_{II}(\nabla_\perp^2, \phi_I, \phi_{II}). \quad (3.82)$$

Die Nichtlinearitäten  $\mathcal{N}\mathcal{L}_I(\nabla_{\perp}^2, \phi_I)$  und  $\mathcal{N}\mathcal{L}_{II}(\nabla_{\perp}^2, \phi_I, \phi_{II})$  werden dabei durch die verwendeten  $\lambda$ -Plättchen in den Zellen bestimmt.

Die Nichtlinearität der ersten Zelle kann dabei durch

$$\mathcal{N}\mathcal{L}_I(\nabla_{\perp}^2, \phi_I) = \mathbf{H}(\phi_I) \cdot \mathbf{P}_I(\nabla_{\perp}^2, \phi_I) \quad (3.83)$$

mit

$$\mathbf{H}(\phi) = \frac{1}{2\alpha_0 L} \begin{pmatrix} 1 - e^{-2\alpha_0 L(1-\phi)} \\ -(1 - e^{-2\alpha_0 L(1+\phi)}) \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

und den aus Gleichung (3.75) und (3.76) bestimmten Pumpraten

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_I = \Psi_1 \left\{ \begin{pmatrix} |\mathcal{E}_I^0|^2 \\ |\mathcal{E}_I^0|^2 \end{pmatrix} + R_I \boldsymbol{\delta}_+ |\boldsymbol{\delta}_+ M_I G(2d, \nabla_{\perp}^2) K(\phi_I) \mathcal{E}_I^0|^2 \right. \\ \left. + R_I \boldsymbol{\delta}_- |\boldsymbol{\delta}_- M_I G(2d, \nabla_{\perp}^2) K(\phi_I) \mathcal{E}_I^0|^2 \right\} \quad (3.85) \end{aligned}$$

ausgedrückt werden. Hierbei bezeichnet

$$\boldsymbol{\delta}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\delta}_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.86)$$

Die Nichtlinearität der zweiten Zelle kann durch

$$\mathcal{N}\mathcal{L}_{II}(\nabla_{\perp}^2, \phi_I, \phi_{II}) = \mathbf{H}(\phi_{II}) \cdot \mathbf{P}_{II}(\nabla_{\perp}^2, \phi_I, \phi_{II}) \quad (3.87)$$

mit den aus Gleichung (3.78) und (3.79) bestimmten Pumpraten

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{II} = & \Psi_1 \left\{ \begin{pmatrix} |\mathcal{E}_{II}^0|^2 \\ |\mathcal{E}_{II}^0|^2 \end{pmatrix} \right. \\ & + s \boldsymbol{\delta}_+ |\boldsymbol{\delta}_+ M_I G(2d, \nabla_{\perp}^2) K(\phi_I) \mathcal{E}_I^0|^2 \\ & + s \boldsymbol{\delta}_- |\boldsymbol{\delta}_- M_I G(2d, \nabla_{\perp}^2) K(\phi_I) \mathcal{E}_I^0|^2 \\ & + R_{II} \boldsymbol{\delta}_+ |\boldsymbol{\delta}_+ M_{II} G(2d, \nabla_{\perp}^2) K(\phi_{II}) \mathcal{E}_{II}^0|^2 \\ & + R_{II} \boldsymbol{\delta}_- |\boldsymbol{\delta}_- M_{II} G(2d, \nabla_{\perp}^2) K(\phi_{II}) \mathcal{E}_{II}^0|^2 \\ & + s R_{II} \boldsymbol{\delta}_+ |\boldsymbol{\delta}_+ M_{II} G(2d, \nabla_{\perp}^2) K(\phi_{II}) M_I G(2d, \nabla_{\perp}^2) K(\phi_I) \mathcal{E}_I^0|^2 \\ & \left. + s R_{II} \boldsymbol{\delta}_- |\boldsymbol{\delta}_- M_{II} G(2d, \nabla_{\perp}^2) K(\phi_{II}) M_I G(2d, \nabla_{\perp}^2) K(\phi_I) \mathcal{E}_I^0|^2 \right\} \quad (3.88) \end{aligned}$$

dargestellt werden.

Die Intensität des elektrischen Feldes lässt sich über

$$\frac{I_{0I,II}}{2} = \Psi_2 |\mathcal{E}_{\pm I,II}^0|^2 \quad (3.89)$$

berechnen. Die einzelnen zirkular polarisierten Komponenten tragen jeweils zur Hälfte zur Gesamtintensität bei, da der Strahl lineare Eingangspolarisation besitzt. Die Intensitäten der einzelnen Komponenten sind hierbei gleich stark, da nur lineare Eingangspolarisationen betrachtet werden. Die Konstante  $\Psi_2$  verknüpft die Intensität des Lasers mit der Stärke des elektrischen Feldes und ist gegeben durch

$$\Psi_2 = \frac{1}{4}c\epsilon_0\pi\omega_0^2, \quad (3.90)$$

mit einem Strahldurchmesser von  $\omega_0 = 1.5\text{mm}$ .

Die Verknüpfung zwischen den Intensitäten der Laser in mW und der Pumparten wird über die Beziehung

$$P_0[s^{-1}] = \tilde{\Psi}_1 \cdot \Psi_2 \cdot \frac{I_0[\text{mW}]}{\Delta^2 + 1} \quad (3.91)$$

hergestellt.

### 3.5 Lineare Stabilitätsanalyse

In diesem Abschnitt sollen die analytischen Methoden zur Bestimmung der Orte der Instabilitäten im Parameterraum vorgestellt werden. Die Methode die hier vorgestellt wird, wird auch *lineare Stabilitätsanalyse* genannt. Die lineare Stabilitätsanalyse erlaubt Aussagen über die Stabilität eines Zustandes in der Nähe eines kritischen Wertes eines Parameters. Die Stabilitätsanalyse wird am Beispiel der ersten Zelle vorgeführt, ist jedoch auch für die zweite Zelle gültig, solange die erste Zelle nicht im musterbildenden Bereich ist.

Die Grundgleichung für die erste Zelle kann als

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_I = -(\gamma - D\nabla_{\perp}^2)\phi_I + \mathcal{NL}_I(\nabla_{\perp}^2, \phi_I) \quad (3.92)$$

geschrieben werden. Der Term  $\mathcal{NL}_I(\nabla_{\perp}^2, \phi_I)$  enthält dabei nichtlineare Anteile in  $\phi_I$ . Unterhalb eines kritischen Wertes eines Parameters  $X$  besitzt das System (3.92) eine stationäre, räumlich homogene Lösung  $\phi_I^h$ . Diese Lösung kann bei Überschreiten eines kritischen Wertes  $X_c$  des Parameters  $X$  instabil gegenüber kleinen Störungen  $\delta\phi_I$  der homogenen Lösung werden. Die Linearisierung der Grundgleichung um die homogene Lösung liefert eine

Eigenwertproblem, mit dem die Stabilität der homogenen Lösung gegenüber Störungen berechnet werden kann.

Das Feld  $\phi_I(\mathbf{r}_\perp, t)$ , lässt sich über

$$\phi_I = \phi_I^h + \delta\phi_I \quad (3.93)$$

in einen homogenen Anteil  $\phi_I^h$  und einen variablen Anteil  $\delta\phi_I$  (das Variationsfeld) aufspalten. Da die betrachteten Muster transversale reguläre oder quasiperiodische Muster sind, die aus einer endlichen Anzahl Fourierkomponenten bestehen, lässt sich das Variationsfeld als Überlagerung verschiedener Fourier-Moden

$$\delta\phi_I = \sum_i a_i e^{\lambda_i t + i\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{r}} + c.c. \quad (3.94)$$

schreiben. Mit diesem Modenansatz folgt für den transversalen Laplace Operator

$$\nabla_\perp^{2n} e^{i\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{r}} = (-1)^n q_i^{2n} e^{i\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{r}}. \quad (3.95)$$

Da die räumlichen Frequenzen der regulären Muster alle den gleichen Betrag haben, gilt zusätzlich  $|\mathbf{q}_i|^2 = q^2$  für alle  $i$ . Mit dieser Bedingung folgt auch, dass alle Eigenwerte für gleiche Beträge identisch sind, d.h. es folgt  $\lambda_i = \lambda$  für alle  $i$ .

### 3.5.1 Homogener Zustand

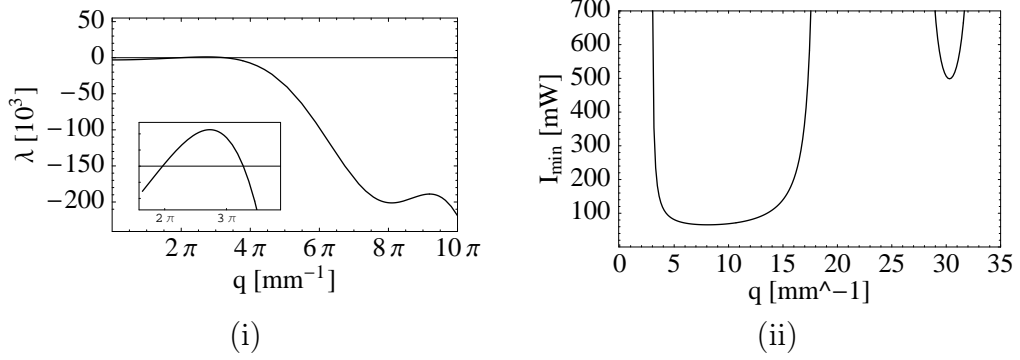
Der homogene Zustand des Feldes  $\phi_I$  wird bestimmt, indem das Variationsfeld und die zeitliche Entwicklung des Variationsfeldes gleich Null gesetzt werden. Der homogene Zustand besitzt keine Ortsabhängigkeit, d.h. es gilt  $\nabla_\perp^2 \phi_I^h = 0$ . Damit folgt dann als zu lösende Gleichung für den homogenen Zustand

$$\dot{\phi}_I^h = -\gamma \phi_I^h + \mathcal{N}\mathcal{L}_I(\nabla_\perp^2, \phi_I^h). \quad (3.96)$$

Die stationäre Lösung ist

$$\phi_I^h = \frac{1}{\gamma} \mathcal{N}\mathcal{L}_I(\nabla_\perp^2, \phi_I^h) \quad (3.97)$$

und ist nicht in allen betrachteten Fällen analytisch lösbar. In diesen Fällen wird der homogene Zustand numerisch bestimmt. Der homogene Zustand ist für alle betrachteten Fälle unterhalb der Schwelle zur Musterbildung stabil.



**Abbildung 3.4:** Beispiel für den Verlauf der Wachstumsrate  $\lambda$  (i) und der Stabilitätsballons (ii).

### 3.5.2 Wachstumsraten

Ist der homogene Zustand bekannt, kann um diesen linearisiert werden. Die Entwicklung des nichtlinearen Operators bis zur ersten Ordnung in  $\delta\phi_I$  führt auf

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\nabla_{\perp}^2, \phi_I^h) \delta\phi_I &= \left( \frac{\partial}{\partial \phi_I} \mathcal{N}\mathcal{L} \right)_{\phi_I = \phi_I^h} \delta\phi_I \\ &= \left[ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \phi} \mathbf{P}_I + H \frac{\partial \mathbf{P}_I}{\partial \phi} \right]_{\phi = \phi_I^h} \delta\phi_I. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Höhere Ordnungen in  $\delta\phi_I$  werden dabei vernachlässigt.

Einsetzen der Entwicklung (3.98) und des Ansatzes (3.94) in die Differentialgleichung (3.92) ergibt ein Eigenwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\phi = \tilde{\lambda} \delta\phi. \quad (3.99)$$

Mit dem Ansatz (3.94) ergeben sich die Eigenwerte für die einzelnen Moden  $a_i$  des Systems. Diese Eigenwerte werden auch *Wachstumsraten* genannt und sind durch

$$\lambda_i = -(\gamma + Dq_i^2) + \mathcal{L}(q_i^2, \phi_I^h) \quad (3.100)$$

gegeben. Der nichtlineare Operator  $\mathcal{N}\mathcal{L}_I(\nabla_{\perp}^2, \phi_I)$  und damit auch der lineare Operator  $\mathcal{L}(q^2, \phi_I^h)$  hängt von dem eingesetzten  $\lambda$ -Plättchen im System ab. Mit der Gleichung für die Wachstumsrate kann die Grenze für die Musterbildung und die Größenordnung der Muster, die Raumfrequenzen  $q_i^2$ , berechnet werden.

Sind alle Eigenwerte  $\lambda_i$  kleiner als Null, dann wird eine kleine Störung gegenüber des homogenen Zustandes abklingen und der homogene Zustand ist die stabile stationäre Lösung des Systems. Die Moden im Ansatz (3.94) werden dabei *passive Moden* genannt. Sobald einer der Eigenwerte abhängig von einem Bifurkationsparameter, hier meistens die Intensität  $I_0$ , größer als Null wird, wird diese Mode eine *aktive Mode* und das Muster wird auf der korrespondierenden Raumfrequenz ausgebildet. Über die Art des Musters kann dabei keine Aussage getroffen werden, da dieses mit nichtlinearen Wechselwirkungen der einzelnen Moden untereinander zusammenhängt. In Abb. 3.4i ist ein Beispiel für einen typischen Verlauf eines Eigenwertes  $\lambda$  kurz oberhalb der kritischen Grenze dargestellt. Die Wachstumsrate (der Eigenwert) ist dabei in einer kleinen Region der Raumfrequenz  $q_c$  größer als Null. Die Raumfrequenz  $q_c$  ist dabei der Ort an dem der Eigenwert, abhängig von dem Bifurkationsparameter, zum ersten Mal einen Realteil größer als Null besitzt. Die Mode, die zu diesem Eigenwert gehört, wird dabei von einer passiven Mode zu einer aktiven Mode und bestimmt damit die Größenordnung des sich bildenden Musters.

### 3.5.3 Stabilitätsballons

Wird der Bifurkationsparameter über die kritische Schwelle erhöht, dann existieren Bereiche, in denen der Eigenwert größer Null ist und Bereiche in denen der Eigenwert kleiner Null ist. Die Grenzen der *marginalen Stabilität*, also der Punkte an denen der Eigenwert gleich Null ist, beschreiben die sogenannten *Stabilitätsballons*. Ist der Bifurkationsparameter die Intensität, dann ist die Intensität proportional dem linearen Operator. Es gilt also  $\mathcal{L}(q^2, \phi_I^h) = A(q^2, \phi_I^h)I_0$ . Für die Kurven der marginalen Stabilität folgt damit

$$I_0 = \frac{\gamma + Dq^2}{A(q^2, \phi_I^h)}. \quad (3.101)$$

Die Funktion  $A(q^2, \phi_I^h)$  hängt dabei wieder vom verwendeten  $\lambda$ -Plättchen im System ab. In Abb. 3.4ii ist ein Beispiel für den typischen Verlauf der Stabilitätsballons dargestellt. Innerhalb der Grenzen der marginalen Stabilität ist also ein Eigenwert größer Null und Musterbildung ist innerhalb dieser Bereiche prinzipiell möglich. Welche Längenskalen ein sich bildendes Muster dabei tatsächlich annimmt kann im Rahmen der linearen Stabilitätsanalyse ebenfalls nicht bestimmt werden. Dafür sind, wie bei den Wachstumsraten, nichtlineare Wechselwirkungen zwischen den aktiven Moden verantwortlich, die in der linearen Stabilitätsanalyse nicht berücksichtigt werden.

# Kapitel 4

## Numerische Berechnungen

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird der numerische Algorithmus zum Berechnen der Orientierung der Zellen dargestellt. In einem weiteren Abschnitt werden Methoden vorgestellt, mit denen sich die Muster in den einzelnen Zellen vergleichen lassen.

### 4.1 Integration der Differentialgleichungen

Für die numerischen Simulationen der Differentialgleichung (3.81) werden die Orientierungen  $\phi_I$  und  $\phi_{II}$  auf einem quadratischen  $N \times N$  Gitter diskretisiert. Die Differentialgleichungen können dabei als

$$\dot{\phi}_I = \mathcal{L}(\nabla_{\perp}^2)\phi_I + \mathcal{NL}_I(\nabla_{\perp}^2, \phi_I) \quad (4.1)$$

$$\dot{\phi}_{II} = \mathcal{L}(\nabla_{\perp}^2)\phi_{II} + \mathcal{NL}_{II}(\nabla_{\perp}^2, \phi_I, \phi_{II}) \quad (4.2)$$

mit einem linearen Operator  $\mathcal{L}$  und nichtlinearen Operatoren  $\mathcal{NL}_{I,II}$  geschrieben werden. Sowohl der lineare, als auch der nichtlineare Operator koppelt die Felder  $\phi_{I,II}$  an den Punkten  $\mathbf{r}_{\perp}$  räumlich mit den Nachbarpunkten.

Die Integration der Differentialgleichungen wird mit einem semi-impliziten Pseudospektralverfahren durchgeführt und ermöglicht gegenüber einem explizitem Verfahren einen größeren Zeitschritt [Boy00, Fle91]. Die Ortsableitungen werden in diesem Verfahren im Fourier-Raum ausgewertet. Diese Methode ermöglicht eine höhere Genauigkeit gegenüber finiten Differenzen [For98].

Am Beispiel der Differentialgleichung für die Orientierung der ersten Zelle  $\phi_I$  wird das Verfahren dargestellt. Als Differenzenquotient kann die Zeitableitung durch

$$\frac{\phi_I(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \phi_I(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} = \mathcal{L}(\nabla_{\perp}^2)\phi_I(\mathbf{r}, t + \Delta t) + \mathcal{NL}_I(\nabla_{\perp}^2, \phi_I(\mathbf{r}, t)) \quad (4.3)$$

geschrieben werden. Die linearen Anteile der rechten Seite werden dabei zum Zeitpunkt  $t + \delta t$  und die nichtlinearen Anteile zum Zeitpunkt  $t$  berechnet. Transformieren in den Fourier-Raum führt zur Berechnung der Ortsableitungen durch Multiplikation mit den Raumfrequenzen  $-\mathbf{q}^2$ , es gilt also  $L(\nabla_{\perp}^2) \rightarrow L(-\mathbf{q}^2)$ . Auflösen der Gleichung nach  $\phi_I(\mathbf{r}, t + \Delta t)$  und Rücktransformation in den Ortsraum ergibt das Feld  $\phi_I$  zum neuen Zeitpunkt  $t + \Delta t$ . Damit folgt

$$\phi_I(\mathbf{r}, t + \Delta t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{1 - \Delta t \mathcal{L}(-\mathbf{q}^2)} \left\{ \tilde{\phi}_I(\mathbf{q}, t) + \Delta t \mathcal{F} [\mathcal{NL}_I(\nabla_{\perp}^2, \phi_I(\mathbf{r}, t))] \right\} \right], \quad (4.4)$$

mit der Fouriertransformierten  $\tilde{\phi}_I(\mathbf{q}, t)$  von  $\phi_I(\mathbf{r}, t)$ .

Die Nichtlinearitäten  $\mathcal{NL}_I(\nabla_{\perp}^2, \phi_I(\mathbf{r}, t))$  hängen über den Operator (3.60) von  $\phi_I$  ab und die räumliche Kopplung wird über den Operator (3.52) vermittelt. Die Berechnung dieser Nichtlinearitäten über die Pumpstrahlen wird durch pseudospektrale Berechnung der Ortsableitungen vorgenommen und ergibt damit für die Kombination der Operatoren

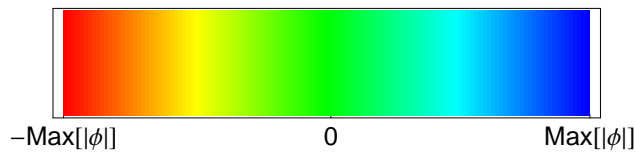
$$G(2d, \nabla_{\perp}^2)K(\phi_I) = \mathcal{F}^{-1} [G(2d, -\mathbf{q}^2)\mathcal{F}[K(\phi_I(\mathbf{r}, t))]]. \quad (4.5)$$

Mithilfe dieser Relation können die Nichtlinearitäten für die Gleichung (4.4) berechnet werden.

Anfangsbedingung für die Berechnung der Orientierung in den Zellen ist eine ebene Welle und es werden periodische Randbedingungen benutzt. Die Ortsauflösung beträgt dabei  $N = 128$  oder  $N = 256$  Punkte, wobei in den meisten Fällen eine Auflösung von  $128 \times 128$  Punkten ausreichend ist [Aum99].

Das Grundgebiet  $Al$  der Berechnungen wird über die kritischen Wellenzahlen der Muster aus der linearen Stabilitätsanalyse bestimmt. Die kritischen Wellenvektoren  $\mathbf{q}_c$  und  $\mathbf{p}_c$  werden berechnet und das Grundgebiet wird so gewählt, dass die kritische Frequenz der Muster kleiner ist als die Nyquist-Frequenz, d.h. kleiner als die Hälfte der größten vorkommende Wellenzahl  $|\mathbf{q}_{\text{num, max}}|$  in der Ortsdiskretisierung. Die relevante Physik spielt sich damit innerhalb des Bereiches der Nyquist-Frequenz ab und die Fehler werden





**Abbildung 4.1:** Farbskalierung der Muster innerhalb dieser Arbeit. Die Muster werden jeweils auf die Betragsgrößten Orientierungen skaliert um die Art der sich bildenden Muster hervorzuheben.

damit minimiert. Die größte vorkommende Wellenzahl im Pseudospektralverfahren berechnet sich dabei über

$$|\mathbf{q}_{\text{num,max}}| = \frac{2\pi N}{Al}. \quad (4.6)$$

Als größte vorkommende Wellenzahl wird dabei nur die Zahl betrachtet, die auf einem Kreis um den Ursprung vollständig im numerischen Gitter liegt.

Das Grundgebiet wird dabei so gewählt, dass auch höhere Harmonische nicht größer als die Nyquist-Frequenz sind. Diese Auswahl der Grundgebiete erlaubt die Berechnungen mit  $128 \times 128$  Punkten. Viele der Berechnungen sind allerdings sowohl mit  $128 \times 128$  als auch mit  $256 \times 256$  Punkten auf verschiedenen Grundgebieten gerechnet worden, um eine Abhängigkeit der Lösungen vom gewählten Grundgebiet oder der gewählten Auflösung zu vermeiden.

## 4.2 Darstellung der Muster

Die Orientierungen der Muster werden farbkodiert dargestellt, wobei blau positiv und rot negativ bedeutet. Grün steht dabei immer für keine Besetzungszahldifferenz, d.h. keine Orientierung. Eine Darstellung der Farbskalierung ist in Abb. 4.1 gegeben. Die Skalierung erfolgt ausgehend von den Maximalwerten in den Mustern um einen größtmöglichen Kontrast für die Darstellung zu gewährleisten. In einigen Darstellungen wird vor der Skalierung der Mittelwert der Orientierung der Muster abgezogen um ebenfalls einen größeren Kontrast zu erreichen. Die Maximal- bzw. Minimalwerte der Orientierungen sind dabei 1 und  $-1$ .

### 4.3 Vergleich der Muster

Werden zwei Zellen gekoppelt, dann ist ein Vergleich beider Zellen interessant. Dafür werden verschiedene Maße eingeführt, die eine Vergleichbarkeit der Muster ermöglichen.

#### Synchronisation/ Korrelation

Wenn sich in beiden Zellen statische Muster bilden, kann die räumliche Übereinstimmung beider Muster berechnet werden. Dazu wird die *Korrelation/ Synchronisation* der Muster  $\phi_I$  und  $\phi_{II}$  über ein Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  mit

$$\text{Sync}(\phi_I, \phi_{II}) = \frac{\langle \tilde{\phi}_I | \tilde{\phi}_{II} \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{\phi}_I | \tilde{\phi}_I \rangle \langle \tilde{\phi}_{II} | \tilde{\phi}_{II} \rangle}} \quad (4.7)$$

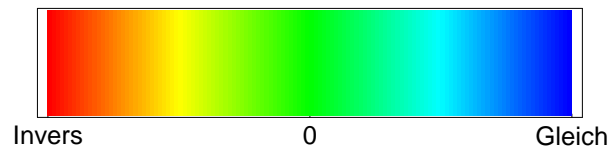
definiert. Dabei gilt  $\tilde{\phi}_{I,II} = \phi_{I,II} - \langle \phi_{I,II} \rangle$ . Die Muster werden also auf einen Mittelwert von Null verschoben. Der Synchronisationswert liegt damit immer zwischen 1 und -1. Er ist genau 1, wenn die Muster identisch sind und -1 wenn  $\phi_I = -\phi_{II}$  ist. Sind die Muster nicht im stationären Zustand, dann wird die gemittelte Synchronisation über eine Zeitreihe der Länge  $\Delta t$  berechnet. Die Zeitreihe ist dabei so bemessen, dass transientes Verhalten in der Entwicklung der zweiten Zelle ausgeschlossen wird.

#### Ortskorrelation

Wenn die Muster zeitlich veränderlich sind, oder die zeitliche Entwicklung bis zur Stationarität betrachtet werden soll, kann der Synchronisationswert für jeden Punkt der Muster über die Zeit nach (4.7) berechnet werden. Das Ergebnis ist eine Matrix, die für jeden Punkt des Musters im Ortsraum einen Synchronisationswert / Korrelationswert ergibt, die *Ortskorrelation*. Um die Ortskorrelation zu berechnen wird eine Zeitserie der Länge  $\Delta t$  jedes Punktes  $u_{I,II}(\mathbf{r}_\perp)$  aufgenommen, der Mittelwert dieser Zeitserie auf Null verschoben und die Korrelation zwischen den Zeitserien der beiden betrachteten Muster zu identischen Punkten berechnet. Damit ergibt sich die Ortskorrelation zu

$$\text{LocSync}(u_I, u_{II}) = \frac{\langle \tilde{u}_I | \tilde{u}_{II} \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{u}_I | \tilde{u}_I \rangle \langle \tilde{u}_{II} | \tilde{u}_{II} \rangle}}. \quad (4.8)$$

Die Ortskorrelation hängt dabei von der Länge  $\Delta t$  der betrachteten Zeitserien ab. Die Werte dieser Korrelation sind dabei auf das Intervall zwischen



**Abbildung 4.2:** Farbskalierung der Ortskorrelation und des Maßes der Abweichung zweier Muster innerhalb dieser Arbeit.

-1 und 1 beschränkt. Für die Darstellung wird die Farbskala nach Abb. 4.2 benutzt. Es gilt, dass wenn die Korrelation invers (-1) ist, die betrachteten Zeitserien invers zueinander sind, die Serien sind antikorreliert. Ist die Korrelation 1, dann sind die Serien identisch. Ist die Korrelation Null, dann sind die Serien nicht korreliert.

Die Ortskorrelation ist ein Sinnvolles Maß, um das Langzeitverhalten der gekoppelten Muster zu studieren, da diese Korrelation nur gegen den Größtmöglichen Wert 1 geht, wenn die Zeitserien gleich sind, d.h. wenn die Systeme an einem Punkt über eine gewisse Zeit gleiches Verhalten zeigen.



# Kapitel 5

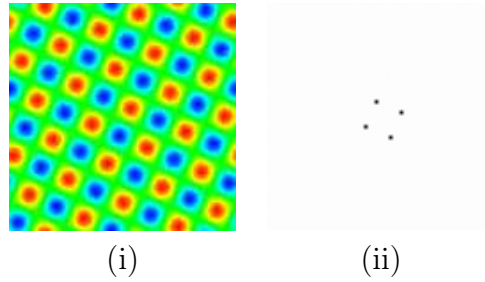
## Koppeln von regulären Mustern

In diesem Kapitel wird ausgehend von den Differentialgleichungen für die verschiedenen  $\lambda$ -Plättchen aus Kapitel 3 eine lineare Stabilitätsanalyse der ersten und zweiten Zelle vorgenommen. Die entstehenden Muster, Quadrate, 8-fach Quasimuster und Hexagone, werden dabei miteinander gekoppelt. Werden gleiche Muster gekoppelt, sind die Zellen identisch, werden unterschiedliche Muster gekoppelt, wird das jeweilige Plättchen in den Strahl gebracht, welches die entsprechenden Muster hervorbringt.

Ein Spezialfall in der Konfiguration mit einem  $\lambda/8$ -Plättchen im Strahl ist die Entstehung von labyrinthartigen Mustern [Sch06]. Die Kopplung dieser Muster untereinander und die Kopplung von Quasimustern und Hexagonen werden im letzten Teil dieses Kapitels beschrieben. Sobald Quasimuster mit Hexagonen gekoppelt werden, entstehen Domänen, die sich auch labyrinthartig über das gesamte Grundgebiet ausbreiten können.

### 5.1 Kopplung gleicher Muster

Werden gleiche Muster gekoppelt, sind die Zellen in der gleichen  $\lambda$ -Plättchen Konfiguration. Wie in vorangegangenen Arbeiten gezeigt wurde, entstehen Quadrate wenn kein Plättchen im Strahl ist [Aum99, AGWAL00, LAT<sup>+</sup>00]. 8-fach Quasimuster entstehen, wenn ein  $\lambda/4$ -Plättchen im Strahl ist [Aum99, AAGWL02] und Hexagone als auch solitäre Strukturen entstehen wenn ein  $\lambda/8$ -Plättchen im Strahl ist [GWKLA00, ALHL95, Pes06, PGWAL05].



**Abbildung 5.1:** Quadratische Muster die sich im Fall ohne Plättchen einstellen. (i) Ortsraum, (ii) Fourier-Raum. Parameter:  $L_I = L_{II} = 0.015\text{m}$ ,  $d_I = d_{II} = 0.088\text{m}$ ,  $N_{Na} = 2.6 \cdot 10^{19} \text{m}^{-3}$ ,  $\Gamma_2 = 9.9 \cdot 10^9 \text{s}^{-1}$ ,  $\gamma = 200 \text{s}^{-1}$ ,  $D = 250 \text{mm/s}^2$ . Das Grundgebiet ist  $6 \times 6 \text{mm}^2$

In diesem Abschnitt werden identische Zellen miteinander gekoppelt und die Musterbildung wird untersucht. Die Indizes für die Zellen lauten  $I$  für die erste und  $II$  für die zweite Zelle. Die Raumfrequenzen in der ersten Zelle werden mit  $\mathbf{q}$  und die in der zweiten Zelle mit  $\mathbf{p}$  bezeichnet.

Für die Simulationen werden, ausgehend von den kritischen Werten für die Musterbildung aus der linearen Stabilitätsanalyse, die Zellen ohne Kopplung bis zum stationären Zustand entwickelt. Sind die Zellen dabei im musterbildenden Bereich, wird eine Intensität kurz oberhalb des kritischen Wertes der Intensität gewählt. Die Intensität ist dabei homogen über den gesamten Grundbereich verteilt und ist somit ein skalarer Wert.

Die Darstellung der Muster erfolgt dabei über die Orientierung  $\phi_{I,II}$  der Zellen. Diese Orientierungen werden so skaliert, dass der Betragsmäßig größte Wert die Endpunkte der jeweiligen Farbskala bildet. Die Farbskala reicht dabei von Blau über Grün zu Gelb und dann zu Rot und ist in Abb. 4.1 dargestellt. Die Skalierung auf das betragsgrößte Element wurde dabei für die bessere Übersichtlichkeit der sich bildenden Muster gewählt.

### 5.1.1 Quadrate

Quadratische Strukturen entstehen in einer Zelle, wenn kein Plättchen im Strahl ist [Aum99, AGWAL00, LAT<sup>+</sup>00]. Die Matrix für das Wellenplättchen (3.63) reduziert sich dabei zu der Einheitsmatrix. Dies ist auch physikalisch sinnvoll, da die Einheitsmatrix, ebenso wie kein Plättchen, keine Wirkung auf die DGL hat.

Die lineare Stabilitätsanalyse einer Zelle wird dabei analog zu [Aum99] vorgenommen. Der homogene Zustand ist in diesem Fall der Nullzustand  $\phi_{I,II}^h \equiv 0$  in beiden Zellen. Um diesen Zustand wird die Differentialgleichung also linearisiert. Ansetzen des Feldes in der ersten Zelle in Fouriermoden analog zu (3.94) mit  $\phi_I = \delta\phi_I = \sum_j^N a_j e^{\lambda_I t + i\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{r}} + c.c.$  liefert

$$\begin{aligned} \lambda_I &= -D_{\text{diff}}q^2 - \gamma - FI_{0I}(FR_I + 1) - (F - 1)FI_{0I}R_I \text{CS} \left( \frac{d_I q^2}{k_0} \right) \\ &= \mathcal{L}_{0,I,\text{Id}}(q, I_{0I}, R_I, F) \end{aligned} \quad (5.1)$$

für die Wachstumsrate  $\lambda_I$  der ersten Zelle mit der Abkürzung  $F = \exp(-2\alpha_0 L_I)$  und dem Operator

$$\text{CS}(x) \equiv \cos(x) + \bar{\Delta} \sin(x). \quad (5.2)$$

Diese ist in Übereinstimmung mit [Aum99]. Die Eingangsintensität  $I_{0I}$  ist hierbei der Bifurkationsparameter. Abhängig von der Systemkonfiguration existiert eine Schwellintensität  $I_{Ic}$ , ab der die erste Zelle instabil wird und sich Quadrate mit der kritischen Wellenlänge  $q_c$  bilden.

In der Arbeit [Aum99] konnte auch eine Amplitudengleichung für die Amplituden  $a_j$  des Musters hergeleitet werden. Für reguläre Muster, d.h.  $a_j = a$  für alle  $j$ , gilt die Amplitudengleichung

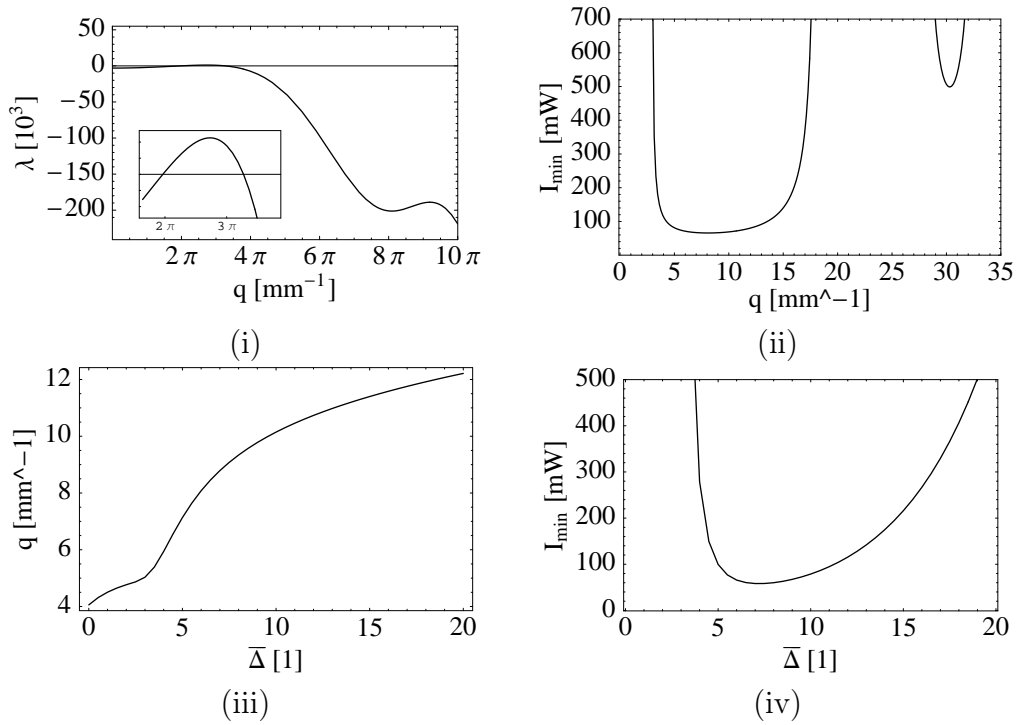
$$\frac{\partial}{\partial t} a_i = \mu a_i - \left( \zeta + \sum_j^N \beta(\theta_{ij}) \right) a_i^3 \quad (5.3)$$

mit den Konstanten  $\mu = \mu(I, q)$  und  $\zeta$  und dem vom Winkel zwischen den Wellenvektoren  $\mathbf{q}_{i,j}$  abhängigen Landau-Koeffizienten  $\beta(\theta_{ij})$ . Für den Landau-Koeffizienten gilt

$$\beta(\theta_{ij}) = 1 - \cos[2q_c^2 \cos(\theta_{ij})]. \quad (5.4)$$

Da die Amplituden des Musters alle gleich stark sind, kann eine stabile Fixpunktlösung für die Amplituden und eine dazugehörige freie Energie bestimmt werden [Aum99, LLBRT96]. Die freie Energie hat in diesem Fall ihr Minimum bei  $\theta_{ij} = \pi/2$  und  $N = 2$ . Es existiert also ein stabiles reguläres Muster, das aus zwei Moden zusammengesetzt ist, die einen Winkel von  $\pi/2$  bilden. Diese Konfiguration der Amplituden entspricht gerade einem quadratischen Muster.

Sind beide Zellen im *quadratischen* Modus, d.h. ist kein Wellenplättchen im Strahl, dann können die Zellen jeweils im kritischen, d.h. musterbildenden, oder unterkritischen, d.h. homogenem, Zustand betrieben werden. Abhängig vom Zustand der ersten Zelle kann die zweite dabei analysiert werden.



**Abbildung 5.2:** (i) Eigenwert zu Zelle  $I/II$  mit der Intensität  $1.06I_c$  und  $\bar{\Delta} = 6$ . (ii) Kurven der marginalen Stabilität für  $\bar{\Delta} = 6$ . (iii) Wellenvektoren bei denen der Eigenwert größer Null wird. (iv) Minimale Intensität der Musterinstabilität gegen die Verstimmung. Parameter: siehe Abb. 5.1.



### Erste Zelle unterkritisch

Ist die erste Zelle unterkritisch, gilt für die Orientierung der ersten Zelle  $\phi_I \equiv 0$  für alle Parameterwerte. Es wird dabei nur eine konstante Intensität aus der ersten Zelle in die zweite Zelle eingekoppelt, die die Schwelle zur Musterbildung für die zweite Zelle verringert. Der homogene Zustand wird dadurch nicht verändert, ist also auch in der zweiten Zelle identisch Null.

Ansetzen der Orientierung in der zweiten Zelle in Fourierkomponenten  $\phi_{II} = \delta\phi_{II} = \sum_j^N b_j e^{\lambda_{II} t + i \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{r}} + c.c.$  ergibt für die Wachstumsrate  $\lambda_{II}$  in der zweiten Zelle

$$\lambda_{II} = \mathcal{L}_{0,I,\text{Id}}(p, I_{\text{eff}}, R_{II}, G) \quad (5.5)$$

mit der Konstanten  $G = \exp(-2\alpha_0 L_{II})$  und der effektiv in die zweite Zelle eingekoppelten Intensität

$$I_{\text{IIeff}} = I_{0II} + sF I_{0I}. \quad (5.6)$$

Sind beide Zellen identisch, ist also  $F = G$  und  $R_I = R_{II}$ , und wird die Erste mit der Intensität  $I_{0I}$  betrieben, dann ist die zweite Zelle identisch mit der ersten wenn

$$I_{0II\text{red}} = (1 - sF) I_{0I} \quad (5.7)$$

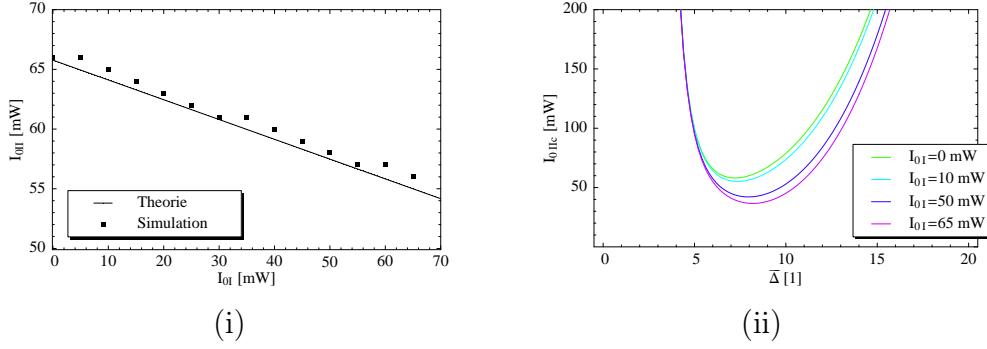
gilt, da dann die Gleichungen für die Eigenwerte identisch sind. Ist die (kritische) Intensität der ersten Zelle bekannt, kann die kritische Intensität der zweiten Zelle mit Gleichung (5.6) über

$$I_{IIc} = I_{Ic} - sF I_{0I} \quad (5.8)$$

berechnet werden. In Abb. 5.3i ist der Verlauf der kritischen Intensität der zweiten Zelle in Abhängigkeit der Intensität der ersten Zelle dargestellt. Das lineare Verhalten kann sehr gut auch in den numerischen Simulationen gefunden werden. In Abb. 5.3ii ist die kritische Intensität der zweiten Zelle gegen die Verstimmung  $\bar{\Delta}$  für verschiedene Intensitäten der ersten Zelle dargestellt. Je höher die Intensität in der ersten Zelle ist, desto niedriger liegt die Schwelle in der zweiten Zelle. Die Form der Eigenwerte aus der linearen Stabilitätsanalyse wird dabei nicht verändert, d.h. es bilden sich keine neuen Längenskalen oder andere Wechselwirkungen heraus. Verändert wird nur die Schwelle zur Musterbildung.

### Erste Zelle kritisch

Ist die erste Zelle im kritischen Bereich, bilden sich quadratische Strukturen in dieser Zelle. Ist die zweite Zelle im unterkritischen Zustand, wenn die



**Abbildung 5.3:** Vergleich der kritischen Intensität in der zweiten Zelle in der Numerik und in der Theorie aus der linearen Stabilitätsanalyse. Parameter: siehe Abb. 5.1.

Kopplung eingeschaltet wird, wird das Muster der ersten Zelle auf die zweite Zelle übertragen. Die Entwicklung der Gleichungen ohne Kopplung bis dritter Ordnung ergibt für diesen Fall Gleichungen (5.3) für die Amplituden der quadratischen Muster  $a$  und  $b$ . Die Muster können durch Entwicklung in Fourier-Komponenten als

$$\phi_I = \sum_{j=1}^N a e^{i\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{r}} + c.c. \quad (5.9)$$

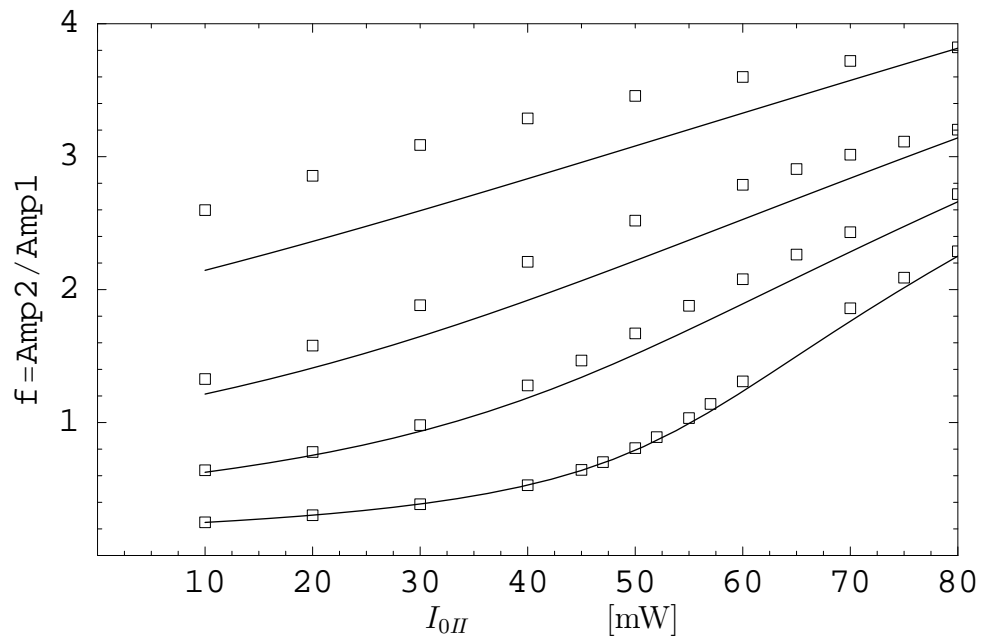
$$\phi_{II} = \sum_{j=1}^N b e^{i\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{r}} + c.c. \quad (5.10)$$

geschrieben werden. Die Muster sind regulär und periodisch angenommen, für die Amplituden gilt deshalb  $a_i = a$  und  $b_i = b$  für alle  $i$ . Da in diesem Fall Quadrate als stabile Strukturen entstehen gilt zusätzlich  $N = 2$ . Die kritischen Wellenvektoren liegen dabei alle auf einem Kreis, es gilt also  $|\mathbf{q}_j| = q_c$  und  $|\mathbf{p}_j| = p_c$  für alle  $j$ .

Wird die zweite Zelle im unterkritischen Bereich mit der ersten im kritischen Bereich gekoppelt, überträgt sich das Muster der ersten Zelle auf die zweite Zelle. Das Feld  $\phi_{II}$  wird deshalb als Vielfaches des ersten Feldes angenommen, es gilt also  $b = f a$ . Die Amplitudengleichungen aus der Entwicklung der Differentialgleichungen (3.73) bis dritter Ordnung in  $\phi_I$  und  $\phi_{II}$  sind

$$\frac{\partial}{\partial t} a = \mu(I_{0I}, q_c) a - \zeta a^3 - \xi a^3 \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} b = \mu(I_{0II\text{eff}}, p_c) b - \zeta b^3 - \xi b^3 + s \mathcal{L}_{\text{Id.Id}}(q_c) a \quad (5.12)$$



**Abbildung 5.4:** Vergleich der Amplituden wenn die erste Zelle kritisch ist und die zweite Zelle unterkritisch. Die Kopplung zwischen den Zellen ist dabei bis zur linearen Ordnung berücksichtigt, die zweite Zelle ist bis zur dritten Ordnung entwickelt. Die Kopplungen sind von oben nach unten  $s = 1.0, s = 0.5, s = 0.25$  und  $s = 0.1$ . Für kleine Kopplungen stimmt die Vorhersage sehr gut, bei größeren Kopplungen reicht die lineare Ordnung der Kopplung nicht aus. Die kritische Intensität ist in diesem Fall  $I_c = 65.79\text{mW}$ . Parameter: siehe Abb. 5.1,  $\bar{\Delta} = 6.0$  und  $I_{0I} = 70\text{mW}$ .

mit

$$\mathcal{L}_{\text{Id.Id}}(q) = -F(G-1)I_{0I} \frac{L_1}{L_2} \left( \text{CS} \left( \frac{d_1 q^2}{k_0} \right) + GR_{II} \text{CS} \left( \frac{(d_1 + d_2) q^2}{k_0} \right) \right). \quad (5.13)$$

Die Kopplungs-Koeffizienten sind dabei durch die Konstante  $\xi = \sum \beta(\theta)$  ausgedrückt. In der Gleichung für die zweite Zelle ist die Kopplung linear über den Term  $\mathcal{L}_{\text{Id.Id}}(q)$  und die effektive Intensität  $I_{0II\text{eff}}$  eingegangen. Da beide Zellen identisch angenommen sind, sind die Parameter  $\zeta$  und  $\xi$  für beide Zellen ebenfalls identisch. Der Vorfaktor  $\mu$  vor dem linearen Term hängt von der Intensität in der Zelle ab. Aufgrund der Kopplung in linearer Ordnung gilt hier statt  $I_{0II}$  die Intensität  $I_{0II\text{eff}}$ .

Die stationäre Lösung von (5.11) und (5.12) ist für quadratische Muster

$$a = \sqrt{\frac{\mu(I_{0I}, q_c)}{\zeta + \xi}} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{\frac{\mu(I_{0II\text{eff}}, p_c)}{\zeta + \xi}}. \quad (5.14)$$

Das stationäre Verhältnis  $f$  der Amplituden ergibt sich mit (5.22) zu

$$0 = \mu(I_{0II\text{eff}}, p_c) f - (\zeta + \xi) \frac{\mu(I_{0I}, q_c)}{\zeta + \xi} f^3 + s \mathcal{L}_{\text{Id.Id}}(q_c). \quad (5.15)$$

Die numerische Lösung dieser Gleichung ist in Abb. 5.4 im Vergleich mit Werten aus der Simulation dargestellt. Für kleine Kopplungen  $s < 0.5$  reicht die lineare Näherung der Kopplung aus. Die numerischen Ergebnisse stimmen sehr gut mit den theoretischen Werten überein. Zu beachten ist, dass bei höheren Intensitäten oder höheren Kopplungen in der zweiten Zelle diese selbst in den kritischen Bereich kommt. In diesem Fall folgt die zweite Zelle nicht einfach der ersten, es bilden sich selbstständige Muster aus, die die Amplituden der Muster durch nichtlineare Wechselwirkungen verändern.

Werden beide Zellen ohne Kopplung im kritischen Bereich betrieben, stellen sich in beiden Zellen quadratische Muster gleicher Wellenlänge ein. Die Orientierung der Quadrate ist jedoch nicht festgelegt, daher werden die Fourier-Komponenten der Muster im Allgemeinen einen Winkel bilden. In Abb. 5.5 ist der Synchronisationsgrad der Muster gegen die Kopplungsstärke (i) und die Fourier-Komponenten der Muster in Zelle *I* und *II* (ii) dargestellt. Koppeln der beiden Zellen im kritischen Bereich 5.5ii,a-b führt bei kleinen Kopplungsraten bis zu  $s < 0.00445$  und  $\bar{\Delta} = 6$  zu einer linearen Überlagerung beider Muster in Zelle *II*, 5.5ii,c. Oberhalb dieser Rate stellt sich eine vollständige Synchronisation beider Muster ein, d.h. die zweite Zelle orientiert sich genau wie die erste Zelle, 5.5ii,d. Der Übergang bei

$s \approx 0.00445$  ist nichtstetig, das Muster synchronisiert sich unterhalb dieses Wertes nur wenig, wohingegen oberhalb dieser Schwelle vollständige Synchronisation einsetzt. Die Fourier-Komponenten der quadratischen Strukturen der ersten Zelle wachsen oberhalb des Überganges an und verdrängen die quadratischen Strukturen der zweiten Zelle komplett. Das Muster wird in die quadratische Ausrichtung der ersten Zelle getrieben. Der Übergang zu perfekter Synchronisation der Muster bei kleiner Kopplungsstärke ist dabei qualitativ in Übereinstimmung mit experimentell gewonnenen Daten eines LCLV-Systems [NG04].

### 5.1.2 8-fach Quasimuster

8-fach Quasimuster entstehen wenn ein  $\lambda/4$ -Plättchen im Strahl eingebaut wird [Aum99, AAGWL02]. Die Matrix für das Wellenplättchen (3.63) reduziert sich dabei auf

$$M(2 * \lambda/4, \alpha) = \begin{pmatrix} 0 & M_{12} \\ M_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

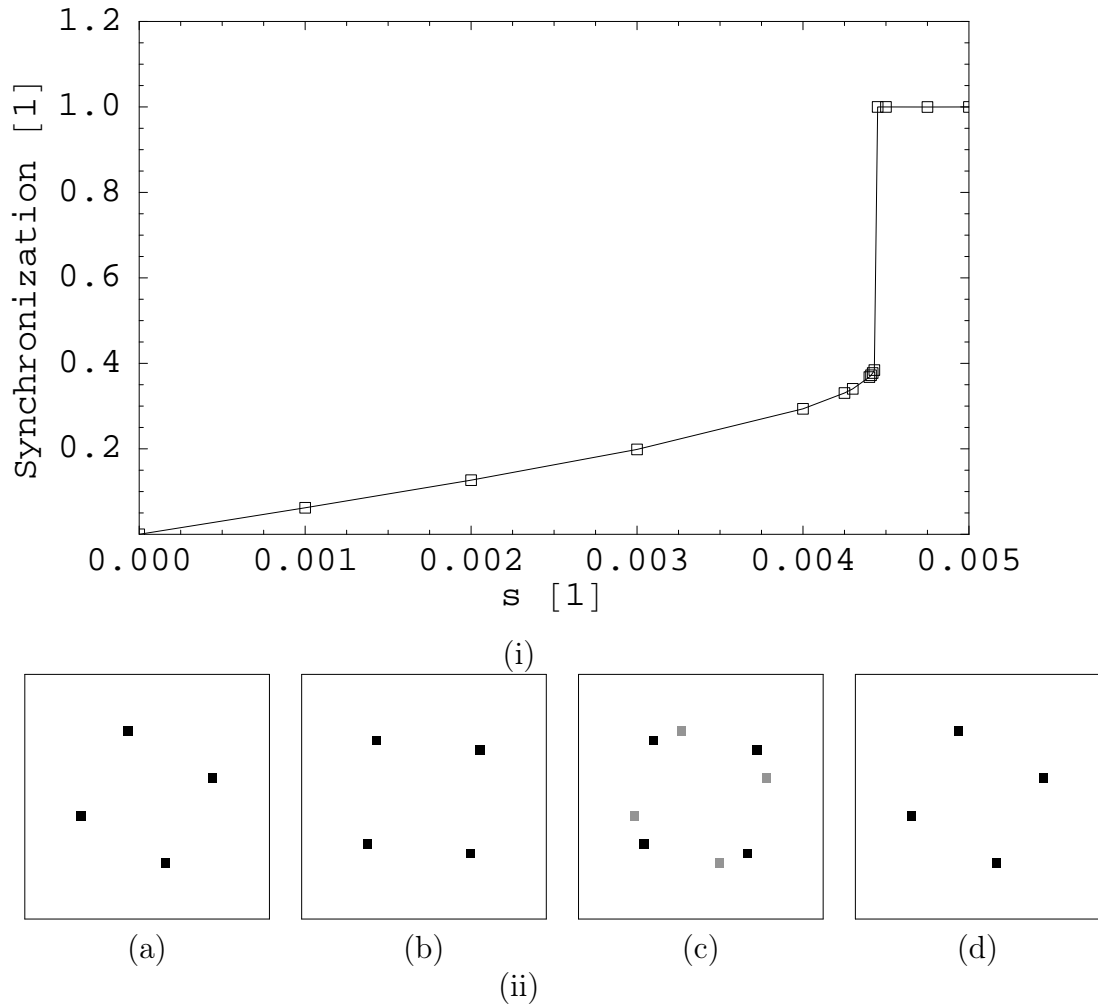
mit  $M_{12} = M_{21}^* = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) + 2i \sin(\alpha) \cos(\alpha)$ . Die Einträge der Matrix haben die Eigenschaft  $|M_{12}|^2 = |M_{21}|^2 = 1$ . In den Gleichungen treten nur Terme der Form  $|M_{12}|^2$  oder  $|M_{21}|^2$  auf, daher gibt es in diesem Fall keine Winkelabhängigkeit der Zustände von der Rotation des Plättchens gegen die Eingangspolarisation des Lasers.

Der homogene stationäre Zustand ist hier  $\phi^h \equiv 0$ , um den linearisiert wird [Aum99]. Ansetzen des Feldes in der ersten Zelle in Fouriermoden analog zu (3.94) mit  $\phi_I = \delta\phi_I = \sum_j^N a_j e^{\lambda_I t + i \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{r}} + c.c.$  liefert für die Wachstumsrate  $\lambda_I$  der ersten Zelle mit

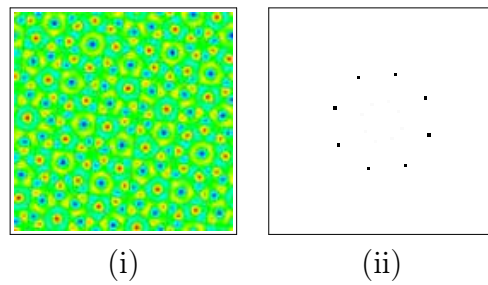
$$\begin{aligned} \lambda_I &= -D_{\text{diff}} q^2 - \gamma - F I_{0I} (F R_I + 1) + (F - 1) F I_{0I} R_I \text{CS} \left( \frac{d_I q^2}{k_0} \right) \\ &= \mathcal{L}_{0,I,\text{QW}}(q, I_{0I}, R_I, F). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Dies ist wiederum in Übereinstimmung mit den Wachstumsraten aus [Aum99]. Die Eingangsintensität  $I_{0I}$  ist hierbei der Bifurkationsparameter. Abhängig von der Systemkonfiguration existiert eine Schwellintensität  $I_{Ic}$ , ab der die erste Zelle instabil wird und sich 8-fach Quasimuster mit der kritischen Wellenlänge  $q_c$  bilden.

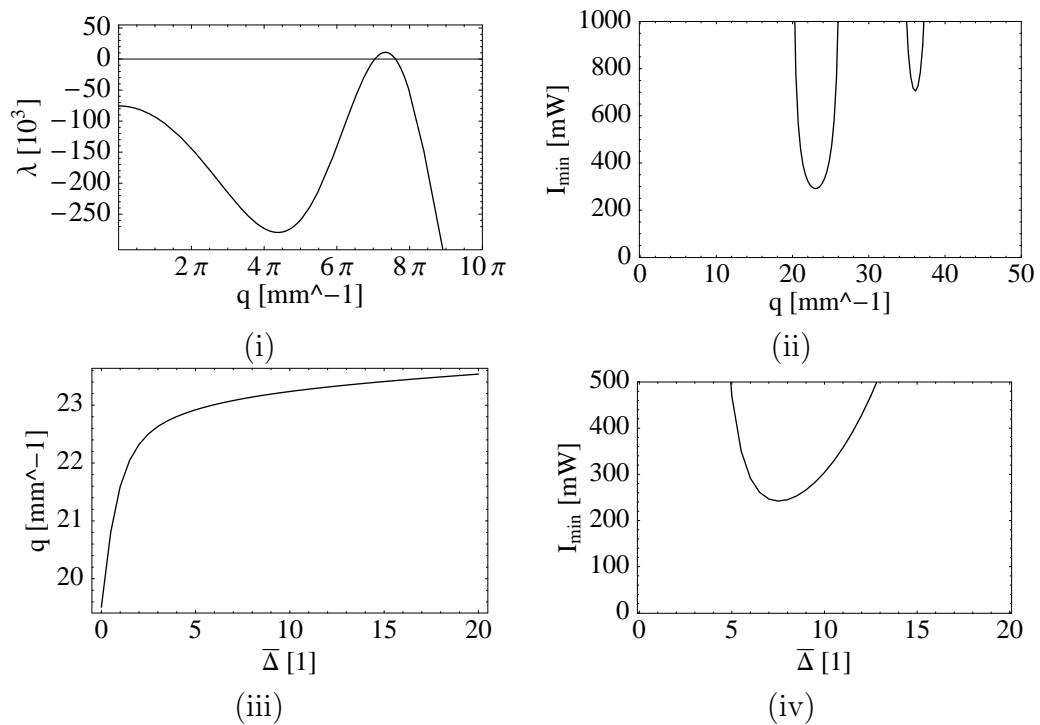
Ebenfalls in [Aum99] und in [LLBRT96] konnte die Amplitudengleichung für diesen Fall berechnet werden. Die Gleichung hat dieselbe Struktur wie (5.3),



**Abbildung 5.5:** Synchronisationsverlauf (i) und Fourier-Komponenten der Muster (ii). (a) Startkomponenten der ersten Zelle. (b) Startkomponenten der zweiten Zelle. (c) Kombination der Komponenten bei  $s < 0.00440$  (d) Komponenten der zweiten Zelle bei  $s > 0.00440$ . Parameter: siehe Abb. 5.1,  $\bar{\Delta} = 6.0$  und  $I_{0I} = I_{0II} = 70\text{mW}$ .



**Abbildung 5.6:** 8-fach Quasimuster die sich im Fall mit  $\lambda/4$ -Plättchen einstellen. (i) Ortsraum, (ii) Fourier-Raum. Parameter: siehe Abb. 5.1.



**Abbildung 5.7:** (i) Eigenwert zu Zelle  $I/II$  mit der Intensität  $1.08I_c$  und  $\bar{\Delta} = 6$  aus der linearen Stabilitätsanalyse. (ii) Kurven der marginalen Stabilität für  $\bar{\Delta} = 6$ . (iii) Wellenvektoren bei denen der Eigenwert größer Null wird. (iv) Minimale Intensität der Musterinstabilität gegen die Verstimmung. Parameter: siehe Abb. 5.1.

jedoch mit veränderten Konstanten. Die freie Energie besitzt ihr Minimum bei  $N = 4$  und einem Winkel zwischen den Komponenten von  $\theta_{ij} = \pi/4$ . Damit sind 8-fach Quasimuster, die in diesem Fall einzigen global stabilen Muster.

Die zweite Zelle wird nun wieder abhängig von der ersten Zelle analysiert. Die erste Zelle kann wieder im unterkritischen oder im musterbildenden (kritischen) Bereich betrieben werden.

### Erste Zelle unterkritisch

Ist die erste Zelle unterkritisch, dann gilt für die Orientierung der ersten Zelle  $\phi_I \equiv 0$ . Es wird dabei nur eine konstante Intensität aus der ersten Zelle in die zweite Zelle eingekoppelt, die die Schwelle zur Musterbildung für den zweiten Laser verringert. Der homogene Zustand wird dadurch nicht verändert, ist also auch in der zweiten Zelle identisch Null.

Ansetzen der Orientierung in der zweiten Zelle in Fourierkomponenten  $\phi_{II} = \delta\phi_{II} = \sum_j^N b_j e^{\lambda_{II} t + i \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{r}} + c.c.$  ergibt für die Wachstumsrate  $\lambda_{II}$  in der zweiten Zelle

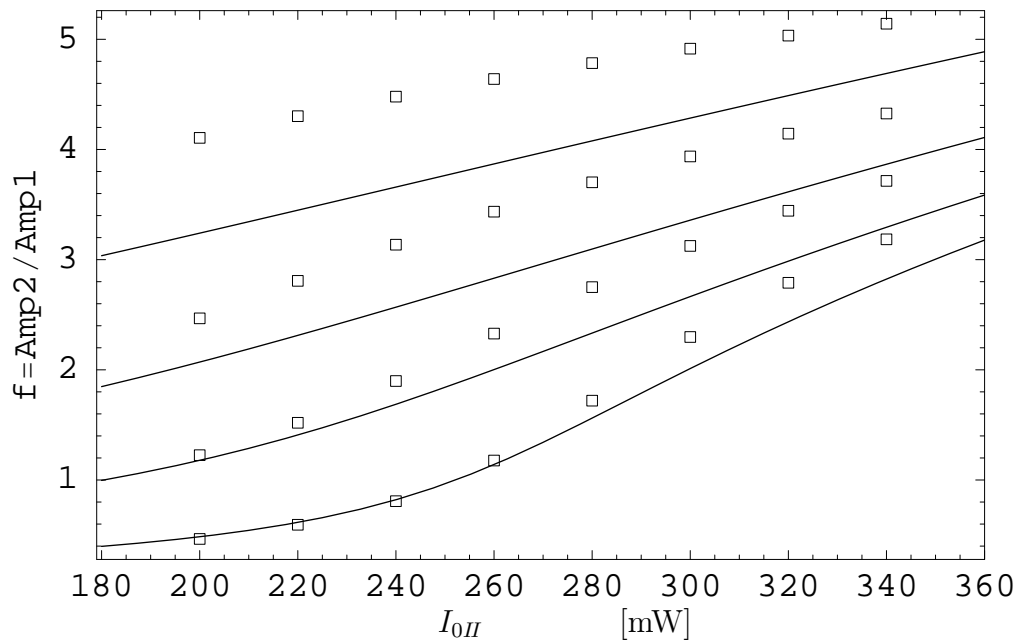
$$\lambda_{II} = \mathcal{L}_{0,I,QW}(p, I_{II\text{eff}}, R_{II}, G). \quad (5.18)$$

Auch hier kann die Gleichung für die zweite Zelle durch Einführen der effektiven Intensität  $I_{II\text{eff}}$  in die Gleichung für die erste Zelle überführt werden. Die Längenskalen für die Muster ändern sich also auch im Fall mit einem  $\lambda/4$ -Plättchen im Strahl nicht, lediglich die Schwellintensität der zweiten Zelle wird reduziert.

### Erste Zelle kritisch

Stabile Muster sind im ungekoppelten Fall 8-fach quasiperiodische Muster [Aum99]. Ist die erste Zelle im kritischen Bereich und die zweite Zelle im unterkritischen, kann analog zum Fall ohne Plättchen das Feld wie in (5.9) in Fourierkomponenten angesetzt werden. Hier ist die Anzahl der Moden allerdings  $N = 4$ . Analog zum Konfiguration ohne  $\lambda$ -Plättchen im Strahl kann wieder eine Entwicklung bis dritter Ordnung der Differentialgleichung vorgenommen werden und Amplitudengleichungen hergeleitet werden [Aum99, LLBRT96]. Die Kopplung der Zellen wird in der Amplitudengleichung der zweiten Zelle linear in die Gleichung eingebaut, da auch





**Abbildung 5.8:** Vergleich der Amplituden wenn die erste Zelle kritisch ist und die zweite Zelle unterkritisch. Die Kopplung zwischen den Zellen ist linear eingegangen, die zweite Zelle ist bis zur dritten Ordnung entwickelt. Die Kopplungen sind von oben nach unten  $s = 1.0, s = 0.5, s = 0.25$  und  $s = 0.1$ . Für kleine Kopplungen stimmt die Vorhersage gut, bei größeren Kopplungen reicht die lineare Ordnung der Kopplung nicht aus. Die kritische Intensität ist in diesem Fall  $I_c = 291.38\text{mW}$ . Parameter: siehe Abb. 5.1,  $\Delta = 6.0$  und  $I_{0I} = 300\text{mW}$ .

hier zunächst eine kleine Kopplungsrate angenommen wird. Damit folgt für die Amplitudengleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t}a = \mu(I_{0I}, q_c)a - \zeta a^3 - \xi a^3 \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}b = \mu(I_{0II\text{eff}}, p_c)b - \zeta b^3 - \xi b^3 + s\mathcal{L}_{\text{QW.QW}}(q_c)a \quad (5.20)$$

mit dem Kopplungsterm

$$\mathcal{L}_{\text{QW.QW}}(q) = F(G-1)I_{0I}\frac{L_I}{L_{II}}\left(\text{CS}\left(\frac{d_I q^2}{k_0}\right) - GR_{II}\text{CS}\left(\frac{(d_I + d_{II})q^2}{k_0}\right)\right). \quad (5.21)$$

Die Koeffizienten  $\mu = \mu(I, q)$ ,  $\zeta$  und  $\xi$  unterscheiden sich dabei von denen im Fall ohne Plättchen im Strahl [Aum99].

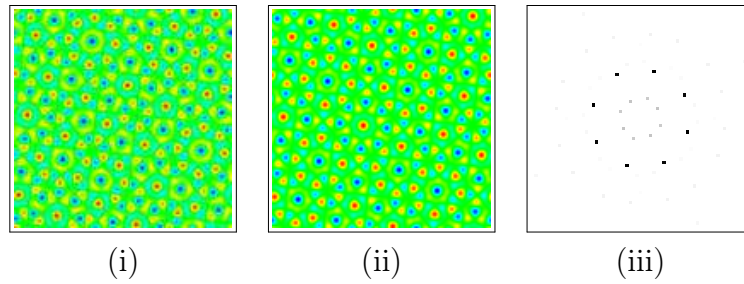
Die stationäre Lösung von (5.19) ist wieder durch (5.22) mit den Parametern  $\mu$ ,  $\zeta$  und  $\xi$  für den  $\lambda/4$ -Fall gegeben [Aum99]. Es gilt also auch hier für die Amplituden  $a$  und  $b$

$$a = \sqrt{\frac{\mu(I_{0I}, q_c)}{\zeta + \xi}} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{\frac{\mu(I_{0II\text{eff}}, p_c)}{\zeta + \xi}}. \quad (5.22)$$

Da die zweite Zelle der ersten Folgt wird für das Verhältnis der Amplituden  $b = fa$  angenommen. Die zu lösende Gleichung für das Verhältnis der Amplituden  $f$  ist analog zu (5.15) durch

$$0 = \mu(I_{0II\text{eff}}, p_c)f - (\zeta + \xi)\frac{\mu(I_{0I}, q_c)}{\zeta + \xi}f^3 + s\mathcal{L}_{\text{QW.QW}}(q_c) \quad (5.23)$$

gegeben. In Abb. 5.8 ist ein Vergleich der numerischen mit den theoretischen Werten dargestellt. Für kleine Kopplungen  $s < 0.5$  und niedrige Intensitäten stimmt die theoretische Kurve gut mit den numerischen Werten überein. Ist die Intensität der zweiten Zelle nahe der Schwelle  $I_{IIc} = I_{Ic} - sFI_{0I}$ , dann werden die Amplituden der Muster durch nichtlineare Wechselwirkungen gestört und die lineare Ordnung der Kopplung reicht nicht mehr aus. Bei einer Kopplung von  $s = 0.1$  und einer überkritischen Intensität ( $I_{Ic} = 291.38\text{mW}$ ) der ersten Zelle von  $I_I = 300\text{mW}$  wird die zweite Zelle ab einer Intensität von  $I_{IIc} = 286.50\text{mW}$  instabil. Die unterste Kurve in Abb. 5.8 zeigt das Ansteigen der Fourier-Komponenten gegenüber der theoretischen Kurve da die zweite Zelle selbst instabil wird. Für eine Kopplung von  $s = 0.25$  ist die kritische Intensität der zweiten Zelle  $I_{IIc} = 278.90\text{mW}$ . Die zweitunterste Kurve in Abb. 5.8 zeigt unterhalb dieser Grenze ebenfalls eine recht gute Übereinstimmung mit den numerischen Werten.



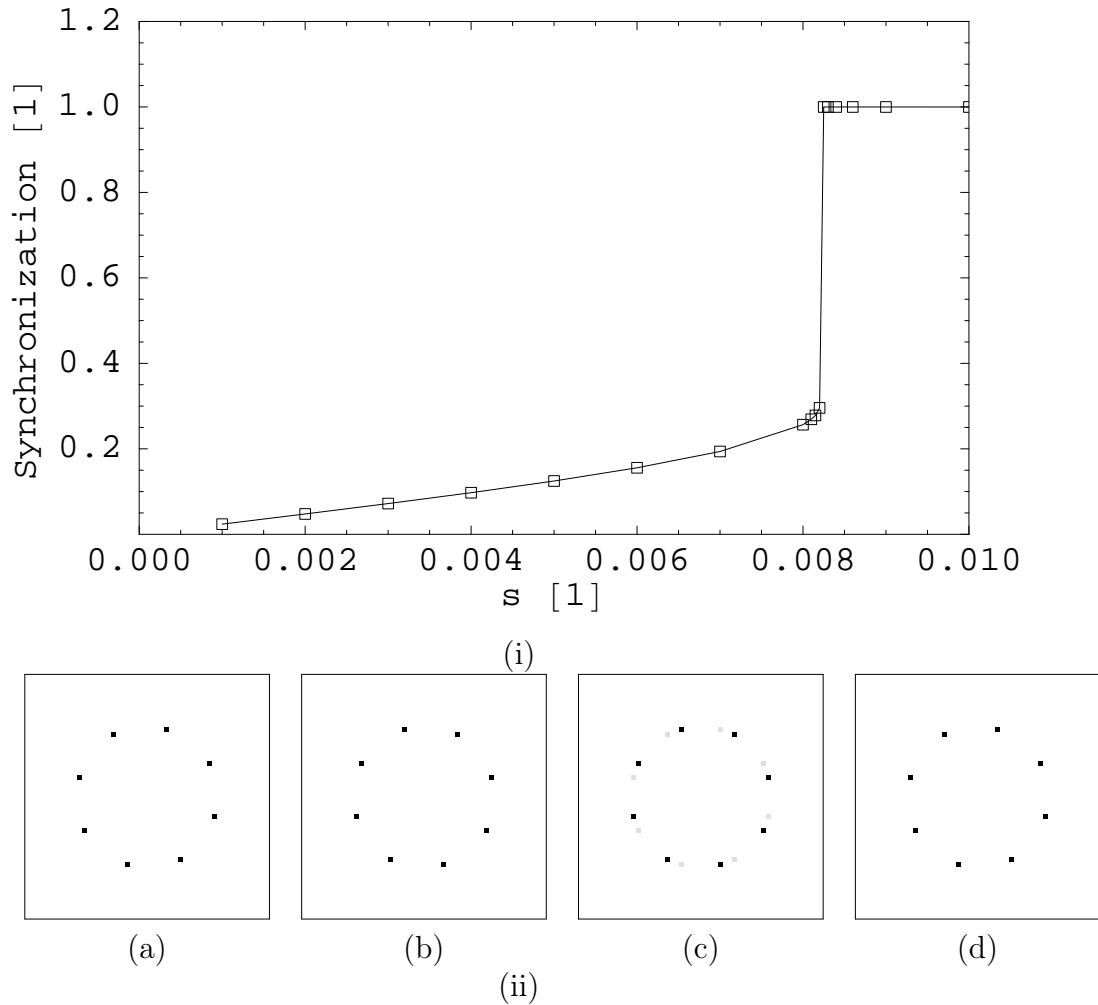
**Abbildung 5.9:** Muster, die sich im Fall mit  $\lambda/4$ -Plättchen und einer Kopplung von  $s = 1.0$  einstellen. Die erste Zelle ist im kritischen Bereich, die zweite Zelle ist unterkritisch. (i) Ortsraum Zelle 1, (ii) Ortsraum Zelle 2, (iii) Fourier-Raum Zelle II. Parameter: siehe Abb. 5.1,  $\bar{\Delta} = 6.0$  und  $I_{0I} = 300\text{mW}$ ,  $I_{0II} = 200\text{mW}$ .

Bei höheren Kopplungen bilden sich zusätzliche Fourierkomponenten in der zweiten Zelle aus, die das Ergebnis in Abb. 5.8 verschlechtern. Die sich ergebenden Muster sind in Abb. 5.9 dargestellt.

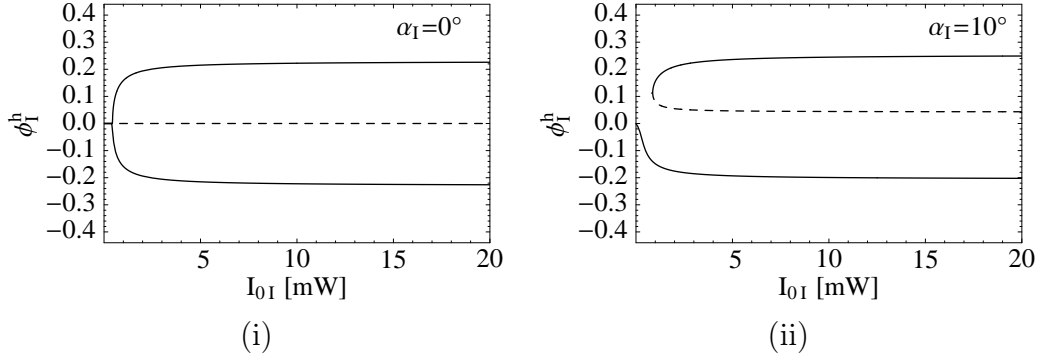
Werden beide Zellen ohne Kopplung im kritischen Bereich betrieben, dann stellen sich in beiden Zellen 8-fach quasiperiodische Muster gleicher Wellenlänge ein. Die Ausrichtung der Muster ist jedoch nicht festgelegt, daher werden die Fourier-Komponenten der Muster im Allgemeinen einen Winkel bilden. In Abb. 5.10 ist der Synchronisationsgrad der Muster gegen die Intensität der zweiten Zelle (i) und die Fourier-Komponenten der beiden Zellen für verschiedene Kopplungsstärken (ii) dargestellt. Koppeln der beiden Zellen im kritischen Bereich führt bei kleinen Kopplungsraten  $s < 0.00825$  für  $\bar{\Delta} = 6$  zu einer linearen Überlagerung beider Muster in Zelle II. Oberhalb dieser Rate stellt sich eine vollständige Synchronisation beider Muster ein, d.h. die zweite Zelle orientiert sich genau wie die erste Zelle. Der Übergang bei  $s \approx 0.00825$  ist nichtstetig, d.h. das Muster synchronisiert sich unterhalb dieses Wertes nur wenig, wohingegen oberhalb dieser Schwelle vollständige Synchronisation einsetzt. Der Übergang von einer Ausrichtung der 8-fach quasiperiodischen Muster zu der der ersten Zelle verläuft dabei analog zu dem Übergang im Fall quadratischer Muster.

### 5.1.3 Hexagone

Neben Quadraten und 8-fach Quasimustern können als dritte Art von Strukturen Hexagone oder auch hexagonale Strukturen mit einfachen  $\lambda$ -Plättchen in diesem System erzeugt werden [GWKLA00, ALHL95]. Quadrate sind die



**Abbildung 5.10:** Synchronisationsverlauf (i) und Fourier-Komponenten der Muster (ii). (a) Startkomponenten der ersten Zelle. (b) Startkomponenten der zweiten Zelle. (c) Kombination der Komponenten bei  $s < 0.00825$  (d) Komponenten der zweiten Zelle bei  $s > 0.00825$  Parameter: siehe Abb. 5.1,  $\bar{\Delta} = 6.0$  und  $I_{0I} = I_{0II} = 300\text{mW}$ .



**Abbildung 5.11:** Homogener stationärer Zustand  $\phi_I^h$  mit  $\lambda/8$ -Plättchen im Strahl gegen die Intensität  $I_{0I}$ . (i) Winkel  $\alpha_I = 0^\circ$ , (ii) Winkel  $\alpha_I = 10^\circ$ . Parameter: siehe Abb. 5.1 und  $\bar{\Delta} = 6.0$ .

generischen Strukturen wenn kein Plättchen in den Strahlengang gebracht werden. 8-fach Quasimuster sind die generischen Strukturen, wenn ein  $\lambda/4$ -Plättchen in den Strahl gebracht wird. Hexagone können entstehen, wenn ein  $\lambda/8$ -Plättchen in den Strahlengang eingebracht wird.

Wenn ein  $\lambda/8$ -Plättchen in den Strahl eingesetzt wird, dann ergibt sich für die Matrix des Wellenplättchens (3.63)

$$M(2\lambda/8, \alpha) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & M_{12} \\ M_{21} & 1+i \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

mit  $M_{12} = (1-i)\cos(2\alpha) - (1+i)\sin(2\alpha)$  und  $M_{21} = (1-i)\cos(2\alpha) + (1+i)\sin(2\alpha)$ . Die Einträge der Matrix haben auch die Eigenschaft  $|M_{ij}|^2 = 1$ . In diesem Fall sind alle Einträge der Matrix ungleich Null, und die Polarisationskomponenten wechselwirken untereinander. Der Winkel  $\alpha_{I,II}$ , in dem das Plättchen gegen die Eingangspolarisation des Lasers steht, ist daher nicht vernachlässigbar [GWKLA00, ALHL95, GW02, Pes06].

Der homogene stationäre Zustand ist in diesem Fall nicht für alle Parameterwerte identisch Null und wird über die implizite Gleichung

$$\gamma\phi_I^h(t) = \frac{FI_{0I}R_I(F\cosh(2\alpha_0L_I\phi_I^h) - 1)\sin(2\alpha_I - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_I\phi_I^h)}{2\alpha_0L_I} - \frac{FI_{0I}(2\sinh(2\alpha_0L_I\phi_I^h) + FR_I\sinh(4\alpha_0L_I\phi_I^h))}{4\alpha_0L_I}. \quad (5.25)$$

bestimmt. Diese Gleichung ist nur numerisch zu lösen und besitzt lediglich für kleine Werte der Intensität  $I_{0I}$  die Lösung Null.

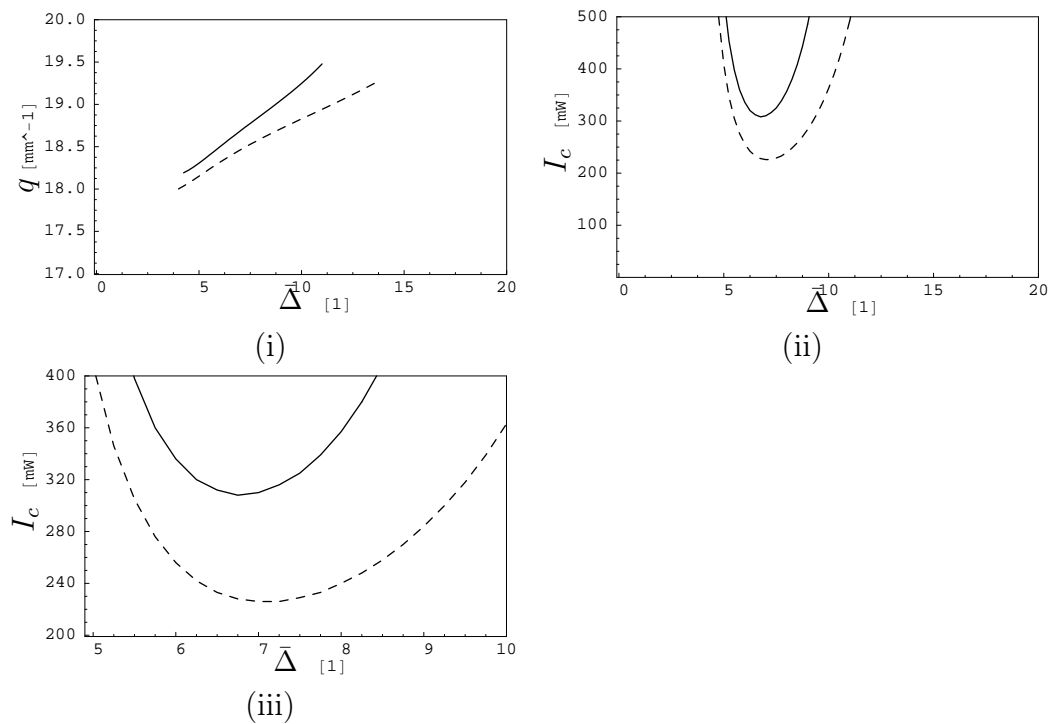
Die Lösung dieser Gleichung ist in Abb. 5.11 für  $\alpha = 0^\circ$  und für  $\alpha = 10^\circ$  dargestellt. Der homogene stationäre Zustand durchläuft eine Pitch-Fork-Bifurkation mit der Intensität als Kontrollparameter. Das System wird bistabil. Es existieren dann zwei stabile Zustände im System, ein positiver und ein negativer Ast. Ist der Winkel  $\alpha_I$  des Plättchens gegen die Eingangspolarisation des Lasers ungleich Null, wird die Bifurkation gestört, und ein Ast wird bevorzugt.

Ansetzen des Feldes in Fourierkomponenten und Linearisierung um den stationären homogenen Zustand  $\phi_I$  führt auf eine Wachstumsrate von

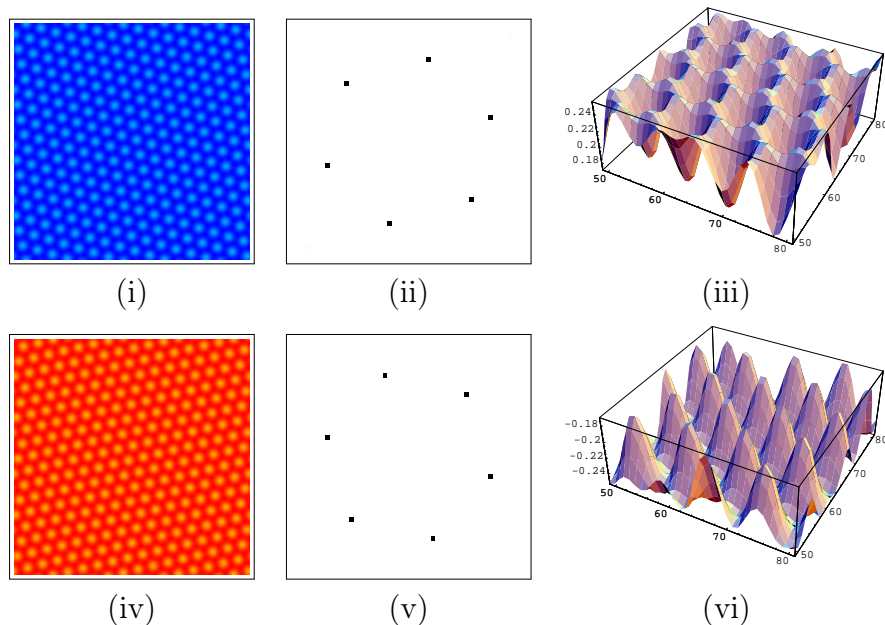
$$\begin{aligned}
\lambda_I &= -\frac{1}{2}I_{0I}R_I F^2 + I_{0I}R_I \sinh(2\alpha_0 L_I \phi_I^h) \\
&\quad \left( \sin(2(\alpha_I - \alpha_0 \bar{\Delta} L_I \phi_I^h)) - \text{CS} \left( \frac{d_I q^2}{k_0} \right) \sinh(2\alpha_0 L_I \phi_I^h) \right) F^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}I_{0I}(2 \cosh(2\alpha_0 L_I \phi_I^h) + F R_I \cosh(4\alpha_0 L_I \phi_I^h)) F \\
&\quad -I_{0I}R_I \cos(2(\alpha_I - \alpha_0 \bar{\Delta} L_I \phi_I^h)) \\
&\quad (F \cosh(2\alpha_0 L_I \phi_I^h) - 1) \text{SC} \left( \frac{d_I k^2}{k_0} \right) F - D_{\text{diff}} q^2 - \gamma \\
&= \mathcal{L}_{0,I,\lambda/8}(I_{0I}, \phi_I^h, \alpha_I, L_I, d_I, R_I, F). \tag{5.26}
\end{aligned}$$

Die Intensität ist in diesem Fall der Kontrollparameter und führt dazu, dass oberhalb einer Schwellintensität der Realteil des Eigenwertes für einen beschränkten Wellenvektorbereich größer Null ist. Der Winkel bricht in dieser Konfiguration die Symmetrie. Solange der Winkel gleich Null ist, sind beide Äste gleichberechtigt und werden am selben Parameterpunkt instabil. Ein Winkel ungleich Null hat allerdings zur Folge, dass die Instabilitätsgrenzen unterschiedlich sind. Die Wellenvektoren und Grenzen der Instabilitäten sind in Abb. 5.12 dargestellt. Der negative Ast (- -) wird in diesem Fall bei einer geringeren Intensität instabil (Abb. 5.12ii,iii) und bildet Hexagone aus. Sobald die Zelle instabil wird, entstehen Hexagone als stabile Strukturen. Sowohl auf dem positiven als auch auf dem negativen Ast. In Abb. 5.13 ist ein sich auf dem positiven Ast ausbildendes Muster dargestellt. Analog existiert ein inverses Muster auf dem negativen Ast.

Werden zwei Zellen im *hexagonalem* Modus, d.h. mit je einem  $\lambda/8$ -Plättchen im Strahl, gekoppelt, so sind verschiedenste Kombinationen der Zustände möglich. Zunächst hängt der Zustand der Zellen von den Winkeln der Plättchen ab. Dazu kann jede Zelle auf einen homogenen Zustand voreingestellt werden. Schließlich kann jede Zelle separat auf jedem Ast in den kritischen Bereich gebracht und dann gekoppelt werden.



**Abbildung 5.12:** Kritische Wellenvektoren (i) und minimale Intensitäten (ii,iii) der Musterbildung für die verschiedenen Äste des homogenen Zustandes. (iii) ist ein vergrößerter Ausschnitt von (ii). Der Winkel ist  $\alpha_I = 10$  Grad. (— positiv, - - negativ). Parameter: siehe Abb. 5.1 und  $\bar{\Delta} = 6.0$ .



**Abbildung 5.13:** Generische Muster im Fall mit  $\lambda/8$ -Plättchen im Strahl. (i-iii) Muster auf dem positiven Ast ( $\phi^h > 0$ ). (Ortsraum 2D, Fourier-Raum, Ortsraum 3D) (iv-vi) Muster auf dem negativen Ast ( $\phi^h < 0$ ). (Ortsraum 2D, Fourier-Raum, Ortsraum 3D). Parameter: siehe Abb. 5.1,  $\bar{\Delta} = 6.0$  und  $I_{0I} = I_{0II} = 290\text{mW}$ .

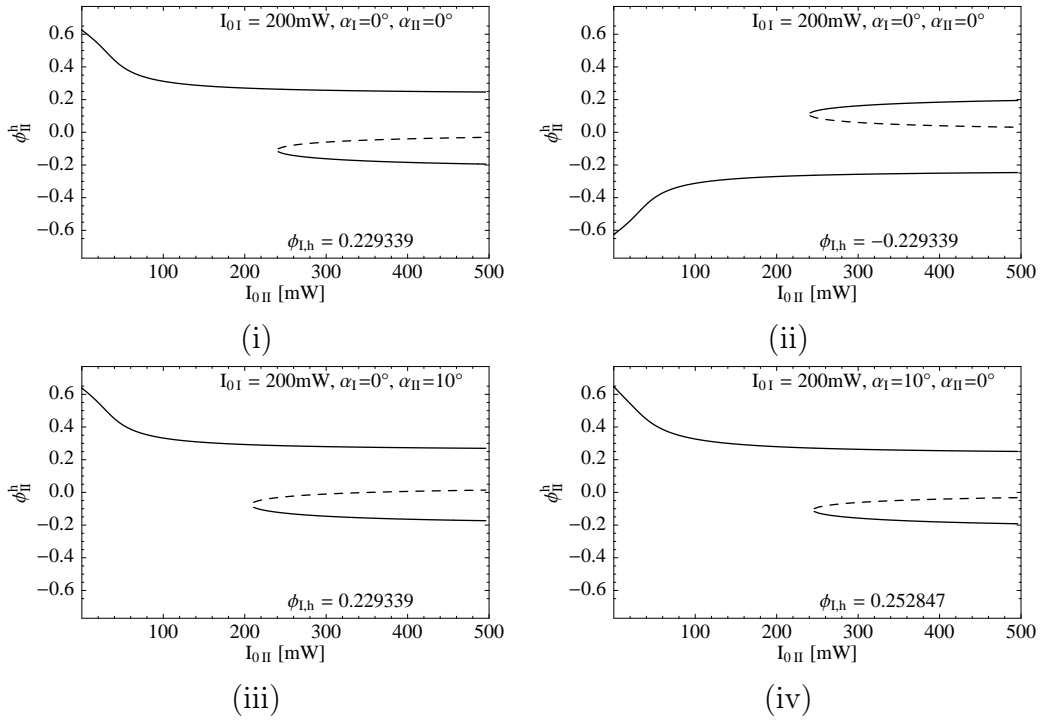
### Erste Zelle unterkritisch

Im unterkritischen Bereich kann die erste Zelle auf dem positiven oder dem negativen homogen stationären Zustand eingestellt sein. Der homogen stationäre Zustand der zweiten Zelle berechnet sich durch

$$\begin{aligned}
\gamma\phi_{II}^h = & \\
& + \frac{1}{4\alpha_0 L_{II}} F I_{0I} s \left( R_{II} (\cosh(4\alpha_0 L_{II} \phi_{II}^h) - 1) G^2 + 2 \cosh(2\alpha_0 L_{II} \phi_{II}^h) G - 2 \right) * \\
& \sin(2(\alpha_I - \alpha_0 \bar{\Delta} L_I \phi_I^h)) \\
& + \frac{1}{4\alpha_0 L_{II}} F G I_{0I} R_{II} s \cos(2(\alpha_I - \alpha_{II} + \alpha_0 \bar{\Delta} L_{II} \phi_{II}^h)) * \\
& (G (\sinh(2\alpha_0 L_I \phi_I^h) - 2\alpha_0 L_{II} \phi_{II}^h) + \sinh(2\alpha_0 L_I \phi_I^h + 2\alpha_0 L_{II} \phi_{II}^h)) \\
& - 2 \sinh(2\alpha_0 L_I \phi_I^h)) \\
& + \frac{1}{8\alpha_0 L_{II}} G (2R_{II} (G \cosh(2\alpha_0 L_{II} \phi_{II}^h) - 1) (2I_{0II} \sin(2(\alpha_{II} - \alpha_0 \bar{\Delta} L_{II} \phi_{II}^h))) \\
& + F I_{0I} s (\sin(2\alpha_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} (L_I \phi_I^h + L_{II} \phi_{II}^h)) \\
& - \sin(4\alpha_I - 2\alpha_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_I \phi_I^h + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_{II} \phi_{II}^h))) \\
& - 2I_{0II} (2 \sinh(2\alpha_0 L_{II} \phi_{II}^h) + G R_{II} \sinh(4\alpha_0 L_{II} \phi_{II}^h)) \\
& + F I_{0I} s (2 (\sinh(2\alpha_0 L_I \phi_I^h) - 2\alpha_0 L_{II} \phi_{II}^h) - \sinh(2\alpha_0 L_I \phi_I^h + 2\alpha_0 L_{II} \phi_{II}^h)) \\
& + G R_{II} (\sinh(2\alpha_0 L_I \phi_I^h - 4\alpha_0 L_{II} \phi_{II}^h) - \sinh(2\alpha_0 L_I \phi_I^h + 4\alpha_0 L_{II} \phi_{II}^h))) (5.27)
\end{aligned}$$

Die zweite Zelle stellt sich dabei abhängig von der Ersten ein. In Abb. 5.14 ist der Zustand der zweiten Zelle in Abhängigkeit der ersten für verschiedene Parameterwerte dargestellt. Ist der homogene Zustand in der ersten Zelle im negativen Bereich, beginnt der Verlauf in der zweiten Zelle ebenfalls im negativen Bereich und bildet bei höheren Intensitäten einen zusätzlichen Ast im positiven Bereich. Ist der homogene Zustand in der ersten Zelle im positiven Bereich, ist der Verlauf andersherum. Die Einstellungen der Winkel verschieben den Verlauf dabei lediglich, es tritt jedoch kein qualitativ anderes Verhalten ein.



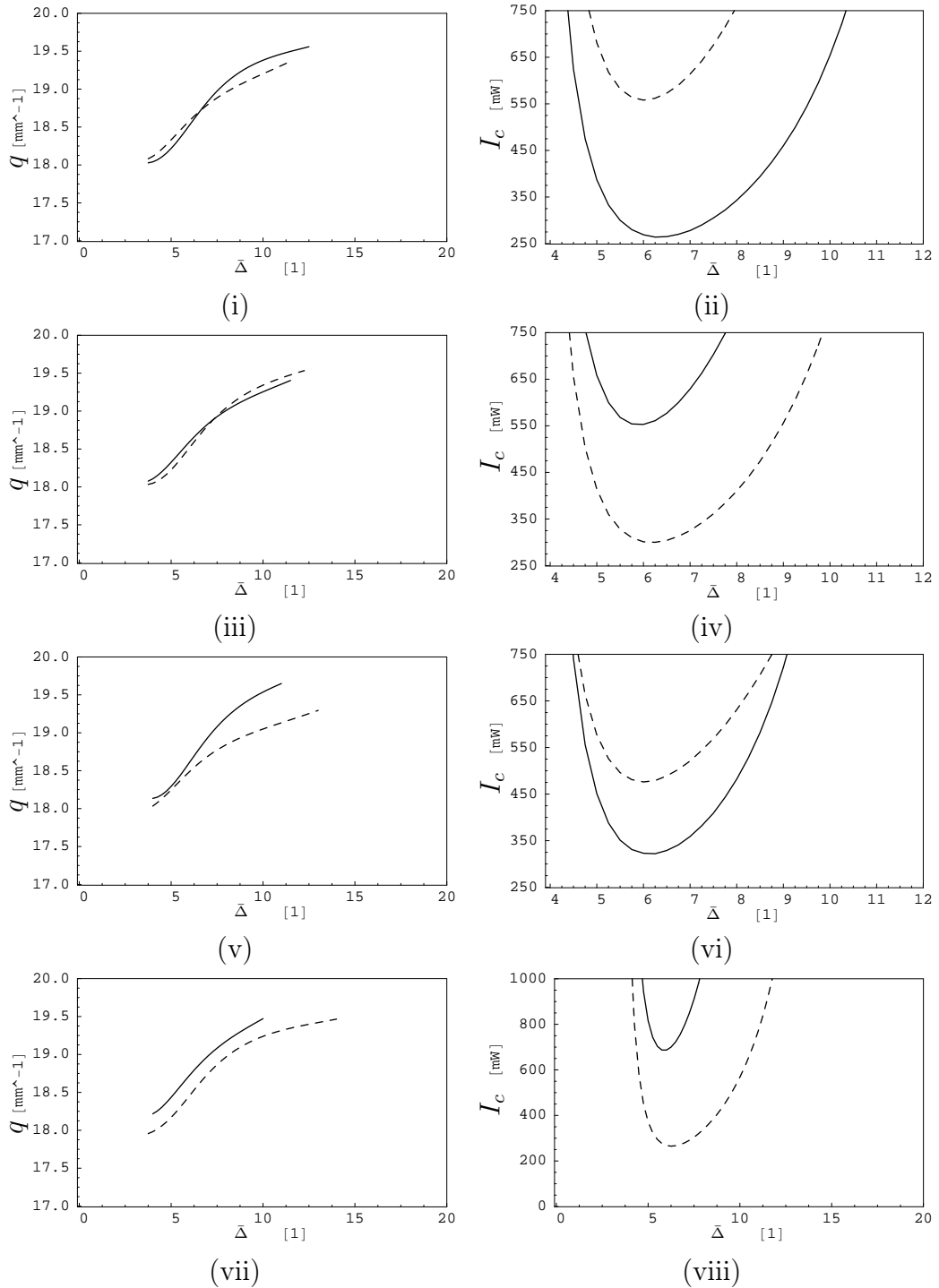


**Abbildung 5.14:** Homogener stationärer Zustand  $\phi_{II}^h$  der zweiten Zelle gegen die Intensität  $I_{0II}$  in der Konfiguration mit jeweils einem  $\lambda/8$ -Plättchen in beiden Zellen für verschiedene Winkel. Der homogene Zustand der ersten Zelle, die Intensität der ersten Zelle und die Winkel sind jeweils im Diagramm angegeben. Parameter: siehe Abb. 5.1 und  $\bar{\Delta} = 6.0$ .

Ansetzten des Feldes  $\phi_{II}$  in Fourierkomponenten und einsetzen des homogenen Zustandes ergibt als Wachstumsraten für die zweite Zelle

$$\begin{aligned}
\lambda_{II} = & -\gamma - D_{\text{diff}}k^2 - \frac{1}{2}I_{0II}R_{II}G^2 \\
& + \frac{1}{4}R_{II}\text{CS}\left(\frac{d_{II}k^2}{k_0}\right) * \\
& (FI_{0I}s(2\cosh(2\alpha_0L_I\phi_I^h) - \cosh(2\alpha_0L_I\phi_I^h - 4\alpha_0L_{II}\phi_{II}^h)) \\
& - \cosh(2\alpha_0L_I\phi_I^h + 4\alpha_0L_{II}\phi_{II}^h) + 2\sin(2\alpha_I - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_I\phi_I^h)\sinh(4\alpha_0L_{II}\phi_{II}^h)) \\
& - 4I_{0II}\sinh^2(2\alpha_0L_{II}\phi_{II}^h)G^2 \\
& - \frac{1}{2}I_{0II}(2\cosh(2\alpha_0L_{II}\phi_{II}^h) + GR_{II}(\cosh(4\alpha_0L_{II}\phi_{II}^h) \\
& - 2\sin(2\alpha_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_{II}\phi_{II}^h)\sinh(2\alpha_0L_{II}\phi_{II}^h)))G \\
& + \frac{1}{2}FI_{0I}s(-2\cosh(2\alpha_0L_I\phi_I^h)\cosh(2\alpha_0L_{II}\phi_{II}^h) \\
& (GR_{II}\cosh(2\alpha_0L_{II}\phi_{II}^h) + 1) + 2\sin(2\alpha_I - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_I\phi_I^h)\sinh(2\alpha_0L_{II}\phi_{II}^h) \\
& + GR_{II}((\sin(2\alpha_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_I\phi_I^h - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_{II}\phi_{II}^h) \\
& - \sin(4\alpha_I - 2\alpha_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_I\phi_I^h + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_{II}\phi_{II}^h) \\
& + 2\cos(2\alpha_I - 2\alpha_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_{II}\phi_{II}^h)\sinh(2\alpha_0L_I\phi_I^h))\sinh(2\alpha_0L_{II}\phi_{II}^h) \\
& + \sin(2\alpha_I - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_I\phi_I^h)\sinh(4\alpha_0L_{II}\phi_{II}^h)))G \\
& + \frac{1}{2}R_{II}\text{SC}\left(\frac{d_{II}k^2}{k_0}\right) \\
& (FI_{0I}s(\cos(2\alpha_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_I\phi_I^h - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_{II}\phi_{II}^h) \\
& + \cos(4\alpha_I - 2\alpha_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_I\phi_I^h + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_{II}\phi_{II}^h) \\
& + 2\sin(2\alpha_I - 2\alpha_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_{II}\phi_{II}^h)\sinh(2\alpha_0L_I\phi_I^h) \\
& - G((\cos(2\alpha_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_I\phi_I^h - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_{II}\phi_{II}^h) \\
& + \cos(4\alpha_I - 2\alpha_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_I\phi_I^h + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_{II}\phi_{II}^h))\cosh(2\alpha_0L_{II}\phi_{II}^h) \\
& + \sin(2\alpha_I - 2\alpha_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_{II}\phi_{II}^h)(\sinh(2\alpha_0L_I\phi_I^h - 2\alpha_0L_{II}\phi_{II}^h) \\
& + \sinh(2\alpha_0L_I\phi_I^h + 2\alpha_0L_{II}\phi_{II}^h)))) \\
& - 2I_{0II}\cos(2\alpha_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_{II}\phi_{II}^h)(G\cosh(2\alpha_0L_{II}\phi_{II}^h) - 1))G \tag{5.28}
\end{aligned}$$

In dieser Konfiguration kann die erste Zelle im positiven oder negativen Bereich und die zweite Zelle ebenfalls im positiven oder negativen Bereich betrieben werden. Es sind also vier verschiedene Szenarien möglich. In Abb. 5.15 sind die vier Szenarien für zwei verschiedene Winkelkonfigurationen dargestellt. In den oberen Bildern (i-iv) ist der Winkel der ersten Zelle  $\alpha_I$  ungleich Null und der zweite Winkel ist Null, in den unteren Bildern (v-



**Abbildung 5.15:** (i) Wellenvektoren bei denen der Eigenwert größer Null wird gegen die Verstimmung. Die Intensität in der ersten Zelle ist  $I_I = 200\text{mW}$  (unterkritisch) und  $\phi_I^h > 0$ . ( $\alpha_I = 10^\circ, \alpha_{II} = 0^\circ$ , —  $\phi_{II}^h > 0$ , - -  $\phi_{II}^h < 0$ ) (ii) Minimale Intensität der Musterinstabilität gegen die Verstimmung. (iii) Wellenvektoren bei denen der Eigenwert größer Null wird. ( $I_I = 200\text{mW}$ ,  $\phi_I^h < 0$ ,  $\alpha_I = 10^\circ$  und  $\alpha_{II} = 0^\circ$ ) (iv) Minimale Intensität der Musterinstabilität gegen die Verstimmung. (v),(vi)  $I_I = 200\text{mW}$ ,  $\phi_I^h > 0$ ,  $\alpha_I = 0^\circ$  und  $\alpha_{II} = 10^\circ$  (vii),(viii)  $I_I = 200\text{mW}$ ,  $\phi_I^h < 0$ ,  $\alpha_I = 0^\circ$  und  $\alpha_{II} = 10^\circ$ . Parameter: siehe Abb. 5.1.

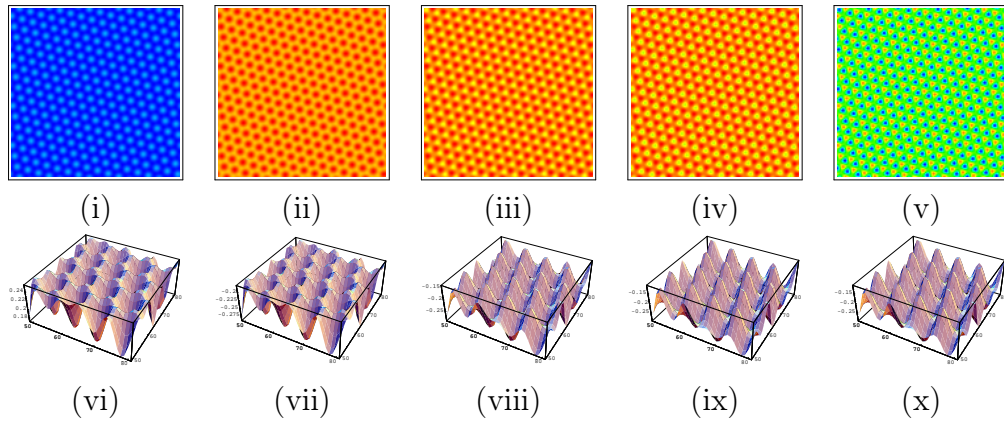
viii) ist der zweite Winkel  $\alpha_{II}$  ungleich Null und der erste Winkel ist gleich Null. Die Wellenvektoren der entstehenden Muster liegen für die beiden Äste sehr dicht beieinander, die Grenzen der Musterbildung jedoch relativ weit auseinander. Wenn die erste Zelle einen Winkel von  $\alpha_I = 10^\circ$  und die zweite Zelle keinen Winkel bildet ( $\alpha_{II} = 0^\circ$ ), und der homogene Zustand der ersten Zelle positiv ist (Abb. 5.15i,ii), dann wird der negative Ast der zweiten Zelle bei geringerer Intensität instabil. Wenn der homogene Zustand der ersten Zelle negativ ist, dann wird der positive Ast bei geringerer Intensität instabil (Abb. 5.15iii,iv). Ebenso verhält es sich, wenn der Winkel in der ersten Zelle gleich Null ist und in der zweiten Zelle  $\alpha_{II} = 10^\circ$  gilt (Abb. 5.15v-viii).

Solange die erste Zelle unterkritisch ist, konnten dabei keine veränderten Muster im System gefunden werden. Die entstehenden Muster in der zweiten Zelle sind wieder Hexagone, wie in Abb. 5.13 dargestellt.

### Erste Zelle kritisch

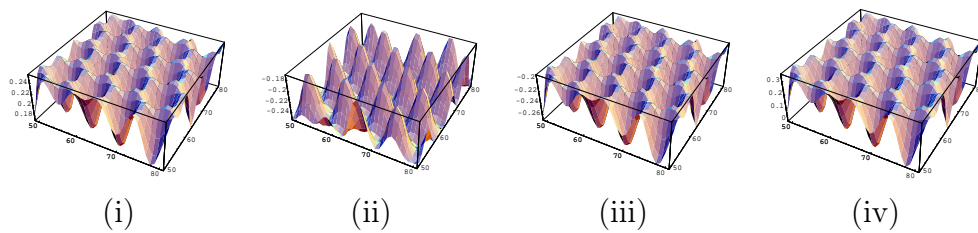
Ist die erste Zelle im kritischen Bereich, kann die zweite Zelle im homogenen Zustand auf dem gleichen oder einem unterschiedlichen Ast sein. Sind beide Zellen auf dem gleichen Ast, z.B. positiver Orientierung, folgt die zweite Zelle der ersten und eine Erhöhung der Intensität in der zweiten Zelle hat eine höhere Amplitude in der zweiten Zelle zur Folge. Sind beide Zellen auf unterschiedlichen Ästen, hängt das Verhalten von der Stärke der Kopplung ab. Bei einer Kopplung von  $s = 1.0$  schaltet die zweite Zelle nach anschalten der Kopplung direkt auf den positiven Ast und folgt der ersten Zelle. Das weitere Verhalten ist dann äquivalent zu dem, bei dem beide Zellen auf dem gleichen Ast sind. Sind die Kopplungen geringer, dann folgt die zweite Zelle der ersten, allerdings bleibt die Orientierung auf dem Startast. Überschreitet die Intensität eine kritische Grenze, wird die zweite Zelle instabil und hexagonale Muster, die für den negativen Ast generisch sind, entstehen. Je höher die Intensität in der zweiten Zelle wird, desto deutlicher treten diese Muster dann hervor. Dazwischen existieren Überlagerungen von beiden Mustern, die alle für eine gewisse Intensität stabil sind, Abb. 5.16.

Werden die beiden Zellen im kritischen Bereich gekoppelt, gibt es wieder zwei Möglichkeiten. Die erste und zweite Zelle befinden sich auf dem gleichen Ast, d.h. beide positiv oder negativ orientiert, oder die beiden Zellen sind auf unterschiedlichen Ästen. Sind beide Zellen auf dem gleichen Ast, sind die generischen Muster ohne Kopplung Hexagone.



**Abbildung 5.16:** Ortsraum der Muster in der Konfiguration L8.L8. Die zweite Zelle ist am Anfang im unterkritischen Bereich und die Kopplung ist  $s = 0.1$ . (i),(vi) Muster in der ersten Zelle  $I_{0I} = 290\text{mW}$  und  $\alpha_I = 0^\circ$ . (ii-x) Muster in der zweiten Zelle mit  $\alpha_{II} = 0^\circ$  und variabler Intensität: (ii),(vii)  $I_{0II} = 320\text{mW}$ , (iii),(viii)  $I_{0II} = 330\text{mW}$ , (iv),(ix)  $I_{0II} = 350\text{mW}$ , (v),(x)  $I_{0II} = 350\text{mW}$  (ohne Mittelwert). Parameter: siehe Abb. 5.1.

Werden die Zellen im kritischen Bereich auf gleichen Ästen gekoppelt, orientiert sich die zweite Zelle schon bei kleinen Kopplungen  $s < 0.1$  wie die erste Zelle und die Amplitude der Hexagone wird verstärkt. Werden die Zellen auf unterschiedlichen Ästen gekoppelt, wird das Muster aus der ersten Zelle auf die zweite Zelle übertragen, Abb. 5.17iii. Das Muster in der zweiten Zelle bleibt allerdings auf dem voreingestellten Ast. Wird die Kopplung erhöht, wechselt das Muster in der zweiten Zelle den Ast und wird vollständig durch das erste Muster bestimmt. Eine weitere Erhöhung der Kopplung führt dann wieder zu einer Erhöhung der Amplitude des Musters.



**Abbildung 5.17:** 3D Darstellung eines Teils der Muster im Fall L8.L8 und beide Zellen auf verschiedenen Ästen. (i) Startmuster in Zelle  $I$  (positiv). (ii) Startmuster in Zelle  $II$  ohne Kopplung (negativ). (iii) Muster in Zelle  $II$  bei  $s = 0.1$ . Die Orientierung des Musters ist negativ. (iv) Muster in Zelle  $II$  bei  $s = 0.9$ . Die Orientierung des Musters ist positiv. Parameter: siehe Abb. 5.1.

Eine Besonderheit im Fall eines  $\lambda/8$ -Plättchens in einer Zelle ist die Möglichkeit der Bildung von solitären Strukturen. Die Analyse dieser Strukturen und der Kopplungen wird in einem eigenen Kapitel behandelt, da verschiedene solitäre Strukturen möglich sind und damit die Kopplungen auf verschiedenste Arten realisiert werden können.

Die Kopplung gleicher Muster führt auf die vollständige Synchronisation der Muster. Sind die Muster Anfangs in unterschiedlichen Orientierungen, d.h. bilden die Fourierkomponenten der ersten und der zweiten Zellen einen Winkel miteinander, richten sich die Fourierkomponenten der zweiten Zelle nach denen der ersten aus. Dieses Verhalten ist ebenfalls in einem LCLV-System [NJ03] und einem chemischen Reaktions-Diffusions-System [DBZE01] beobachtet worden. Die Kopplungsraten die für die vollständige Synchronisation benötigt werden sind in allen Fällen, wie auch in dem in dieser Arbeit betrachteten System, sehr gering (hier gilt  $s \approx 0.010$ ).

## 5.2 Kopplung unterschiedlicher Muster

Quadrate, 8-fach Quasimuster und Hexagone sind die natürlichen Muster in den betrachteten Fällen ohne Plättchen, mit  $\lambda/4$ - und  $\lambda/8$ -Plättchen. Diese Muster entstehen alle bei verschiedenen transversalen Wellenlängen. Im folgenden Abschnitt werden diese drei regulären Mustertypen untereinander gekoppelt um die Wechselwirkungen zwischen den Mustern zu untersuchen. Die Längenskalen der Zellen bleiben identisch, lediglich die Art des Wellenplättchens wird geändert.

Die Nomenklatur der Konfiguration der Zellen folgt dabei dem Muster #1.#2, wobei #1 die Konfiguration in der ersten Zelle beschreibt und #2 die Konfiguration in der zweiten Zelle. Dabei bezeichnet "Id" kein Plättchen, "QW" bezeichnet ein  $\lambda/4$ -Plättchen und "L8" ein  $\lambda/8$ -Plättchen.

Die Zellen werden jeweils in verschiedenen Modi gekoppelt:

1. Zuerst wird die erste Zelle oberhalb des kritischen Bereiches in einen stationären Zustand entwickelt. Die zweite Zelle wird währenddessen ohne Kopplung unterhalb des kritischen Bereiches, der aus der lineare Stabilitätsanalyse folgt, betrieben. In der zweiten Zelle ist damit ein homogener stationärer Zustand stabil. Anschließend wird die Kopplung der Zellen eingeschaltet und bei fester Kopplung wird die Intensität nach und nach erhöht, bis die zweite Zelle in den kritischen Bereich

gelangt. Zwischen der Erhöhung der Kopplung wird immer bis zum stationären Zustand entwickelt.

2. Danach werden beide Zellen im kritischen Bereich mit verschiedenen Stärken gekoppelt. Die Zellen werden jeweils knapp oberhalb der kritischen Schwelle, die sich aus der linearen Stabilitätsanalyse ergibt, betrieben. Für diese Simulationen werden beide Zellen ungekoppelt oberhalb der kritischen Schwelle für die Musterbildung bis zum stationären Zustand entwickelt. Ist der stationäre Zustand erreicht, wird die Kopplung eingeschaltet und wiederum bis zum stationären Zustand entwickelt. Die Kopplung wird dann weiter erhöht, bis zu einem Maximalwert von  $s = 6.0$ .

Im Folgenden werden die entstehenden Muster in der zweiten Zelle gezeigt. Dabei ist das erste Bild in jeder Sequenz das Muster in der ersten Zelle, das während der ganzen Simulation konstant bleibt. Die anderen Bilder sind die stationären Orientierungen in der zweiten Zelle, zu den jeweils angegebenen Parameterwerten.

## Klassifizierung der Muster

Die in der zweiten Zelle entstehenden Muster werden in verschiedene Klassen eingeteilt, die Nomenklatur und die Einteilung der Muster folgt dabei der Bezeichnung aus [GW02, DSS97]. Dabei wird berücksichtigt, dass in den Mustern im Fall unterschiedlicher Zellen zwei Längenskalen präsent sind.

Zunächst existieren die natürlichen Muster der einzelnen Zellen, diese sind mit folgender Nomenklatur gekennzeichnet:

**Quadrate(Sq)** quadratische Struktur mit zwei kritischen Wellenvektoren  $\mathbf{q}_1$  und  $\mathbf{q}_2$ , wobei der Winkel zwischen beiden  $\theta_{12} = \pi/2$  ist. Die Länge beider Wellenvektoren ist  $q_c$ .

**8-fach Quasimuster(8f)** quasiperiodische Struktur mit vier kritischen Wellenvektoren  $\mathbf{q}_i$   $i \in \{1..4\}$  und einem Winkel zwischen den kritischen Wellenvektoren von  $\theta_{ij} = \pi/4$ . Die Länge aller Wellenvektoren ist  $q_c$ .

**Hexagone( $H_{\pm}$ )** hexagonale Struktur mit drei kritischen Wellenvektoren  $\mathbf{q}_i$   $i \in \{1..3\}$  und einem Winkel zwischen den Wellenvektoren von  $\theta_{ij} = 2\pi/3$ . Die Länge aller Wellenvektoren ist  $q_c$ . Die Hexagone treten nur

in einem System auf, in dem der homogene Zustand ungleich Null ist. Der Index  $\pm$  weist dabei auf das Vorzeichen des homogenen Zustandes hin.

Viele der entstehenden Muster können durch eine Kombination dieser natürlichen Muster beschrieben werden, es existieren jedoch auch Parameterbereiche, in denen die entstehenden Strukturen komplexer sind. Die bestehende Nomenklatur wird daher erweitert um die Begriffe:

**Superlattice (SL)** periodische Struktur mit wenigstens zwei Längenskalen. Die Komponenten können dabei aus Quadraten, Hexagonen oder Quasimustern bestehen, können aber auch komplexer sein. Der Index 1 bezeichnet ein Superlattice das aus natürlichen Mustern zusammengesetzt ist, 2 bezeichnet eine komplexere Struktur.

**Irreguläre Struktur (IR)** irreguläre Strukturen entstehen bei sehr hohen Intensitäten oder sehr hohen Kopplungen. Die Wechselwirkungen zwischen den Mustern sind dann sehr stark. Auf einer kritischen Längenskala werden sehr viele Komponenten angeregt, eine periodische Struktur ist nur schwer oder nicht zu erkennen. Meistens tritt eine irreguläre Struktur in Kombination mit einer regulären auf. Dabei bleibt eine Längenskala im Muster regulär, wohingegen eine zweite Längenskala irregulär wird.

**Domänen (D)** Domänen bestehen aus Teilen von regulären Mustern, die eine andere Orientierung als der Rest des Musters besitzen. Diese Art von Strukturen tritt nur in Systemen auf, die bistabil sind. Ist also ein Teil eines Musters auf dem positiven und ein Teil eines Musters auf dem negativen Ast, dann wird das Muster als Domäne bezeichnet.

**Labyrinth (L)** Labyrinthartige Strukturen bestehen aus langezogenen Domänen. Während Domänen irregulär im regulären Muster gestreut sind, sind Labyrinth zusammenhängende Gebiete einer Orientierung, die mit Gebieten der anderen Orientierung verwoben sind.

## Quadrate und Quasimuster - Id.QW

Werden die Zellen in der Konfiguration Id.QW betrieben, dann sind die natürlichen Muster Quadrate in der ersten und Quasimuster in der zweiten Zelle über den gesamten betrachteten Parameterraum. Die Längenskalen



sind dabei  $q_{\text{Id}} = 6 - 10\text{mm}^{-1}$  und  $q_{\text{QW}} \approx 23\text{mm}^{-1}$  im betrachteten Parameterbereich. Die Muster bilden sich also auf zwei verschiedenen Längenskalen aus.

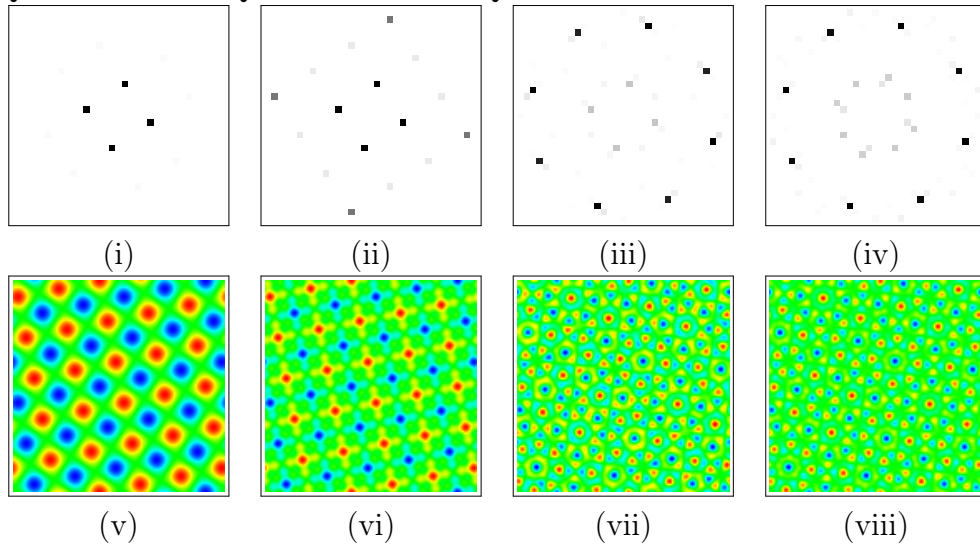
### Zelle 1 kritisch - Zelle 2 unterkritisch

Bei der Kopplung von Quadraten und Quasimustern wurde für alle Verstimmungen  $\bar{\Delta}$  und alle betrachteten Kopplungen  $s \in \{0.1, 0.25, 0.5, 1.0\}$  nur ein Szenario gefunden. Der typische Verlauf ist in Abb. 5.18 dargestellt. Die Verstimmung ist  $\bar{\Delta} = 6.0$  und die erste Zelle ist im kritischen Bereich und bildet Quadrate aus (i,v). Die zweite Zelle ist ohne Kopplung im unterkritischen Bereich und die Orientierung homogen identisch Null  $\phi_{II} = 0$ . Werden die Zellen gekoppelt, werden die Quadrate in die zweite Zelle übertragen, es bilden sich jedoch auch quadratische Strukturen auf der Längenskala der zweiten Zelle. Die entstehende Struktur ist ein  $Sq(I) + Sq(II)$  Muster (ii,vi), wobei die in Klammern stehenden Indizes die Längenskala beschreiben. Es existiert also ein quadratisches Muster auf der Längenskala der ersten Zelle und ein quadratisches Muster auf der Längenskala der zweiten. Sobald die zweite Zelle in den kritischen Bereich kommt, entsteht ein  $8f(II) + Sq(I)$  Muster (iii,vii), das durch weitere Erhöhung der Intensität stetig in ein  $8f(II) + 8f(I)$  übergeht (iv,viii).

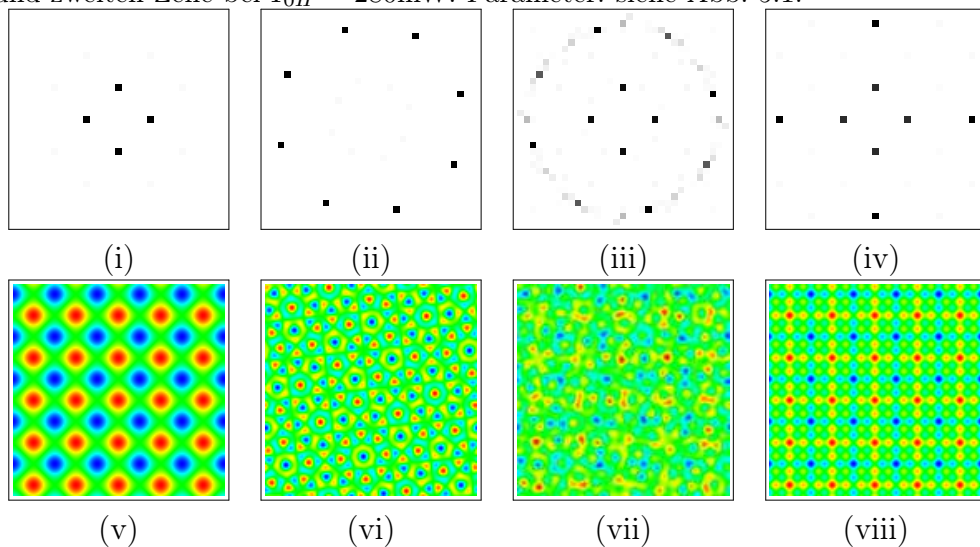
### Zelle 1 kritisch - Zelle 2 kritisch

Sind beide Zellen im kritischen Bereich, d.h. knapp oberhalb der kritischen Intensität aus der linearen Stabilitätsanalyse, konnte für den betrachteten Parameterbereich ebenfalls nur ein Szenario gefunden werden. In diesem Fall sind die Intensitäten fest, die Kopplungsraten werden von  $s = 0.0$  bis  $s = 6.0$  durchgescannt. Das typische Szenario, wenn beide Zellen im kritischen Bereich sind, ist in Abb. 5.19 dargestellt. Die Verstimmung ist dabei  $\bar{\Delta} = 6.0$ . In der zweiten Zelle bildet sich eine Kombination aus beiden Ausgangsmustern. Dabei werden mit steigender Kopplung die Fourierkomponenten des ersten Musters auf der Längenskala der zweiten Zelle angeregt, wodurch das Muster zunehmend irregulärer wird. Das entstehende Muster wird als  $8f(II) + Sq(I)$  klassifiziert (iii,vii). Wird die Kopplung weiter erhöht, dann wird das zweite Muster vollständig unterdrückt, und es bildet sich ein  $Sq(II) + Sq(I)$  Muster heraus (iv,viii). Die Kopplung ist mit  $s = 6.0$  jedoch sehr hoch.

### Quadrate und Quasimuster Id.QW



**Abbildung 5.18:** Fourierkomponenten der Muster mit Id.QW Konfiguration und einer Kopplung von  $s = 0.5$ . Die zweite Zelle ist am Anfang im unterkritischen Bereich. Die effektive kritische Intensität der zweiten Zelle ist  $I_{0II\text{krit,eff}} = 285\text{mW}$ . (i) Startkomponenten der ersten Zelle. (ii) Komponenten der zweiten Zelle unterhalb der kritischen Schwelle  $I_{0II} = 280\text{mW}$ . (iii,vii) zweite Zelle überkritisch  $I_{0II} = 300\text{mW}$ , 8-fach quasiperiodische Muster entstehen. (iv,viii) Weitere Erhöhung der Intensität in der zweiten Zelle bringt ein resonantes 8-fach Muster auf der Längenskala des ersten Musters  $I_{0II} = 400\text{mW}$ . (v,vi) Ortsraum der ersten und zweiten Zelle bei  $I_{0II} = 280\text{mW}$ . Parameter: siehe Abb. 5.1.



**Abbildung 5.19:** Fourierkomponenten der Muster mit Id.QW Konfiguration und ansteigender Kopplung. Die zweite Zelle ist am Anfang im musterbildenden Bereich. Die Intensitäten sind  $I_{0I} = 70\text{mW}$  und  $I_{0II} = 300\text{mW}$ . (i,v) Startfeld der ersten Zelle, (ii,vi) Startfeld der zweiten Zelle, (iii,vii) Kombination beider Muster bei  $s = 4.5$  und (iv,viii) Unterdrückung des zweiten Musters bei  $s = 6.0$ . Parameter: siehe Abb. 5.1.

## Quasimuster und Quadrate - QW.Id

In der Konfiguration QW.Id sind die natürlichen Muster Quasimuster und Quadrate über den gesamten betrachteten Parameterbereich. Die Längenskalen sind, wie im vorherigen Fall, verschieden.

### Zelle 1 kritisch - Zelle 2 unterkritisch

Bei allen betrachteten Kopplungen  $s$  und allen Verstimmungen  $\bar{\Delta}$  ergab sich nur ein Szenario. Der typische Verlauf ist in Abb. 5.20 dargestellt. Die Verstimmung ist dabei  $\bar{\Delta} = 6.0$ . Wird die erste Zelle im überkritischen Bereich betrieben, bilden sich 8-fach Quasimuster aus (i,vi). Wenn die Intensität der zweiten Zelle unterhalb der kritischen Schwelle ist, überträgt sich das Muster aus der ersten Zelle, bildet aber auf der Längenskala der zweiten Zelle zusätzliche Fourier-Komponenten aus. Das entstehende Muster kann mit  $8f(II) + 8f(I)$  beschrieben werden (ii,vii). Wird die Intensität in der zweiten Zelle über die kritische Schwelle erhöht, bilden sich in der zweiten Zelle Quadrate aus den Fourierkomponenten des  $8f(II)$  Musters aus. Dabei entstehen zwei verschieden orientierte quadratische Muster, die miteinander konkurrieren (iv,ix). Die Intensität dieser Quadrate wird im Vergleich zu dem einfach übertragenen  $8f(I)$  Muster mit zunehmender Intensität in der zweiten Zelle immer stärker. Eine weitere Erhöhung der Intensität führt dann dazu, dass ein Quadrat "gewinnt" und dominiert (v,x).

### Zelle 1 kritisch - Zelle 2 kritisch

Sind beide Zellen im überkritischen Bereich, bilden sich in der ersten Zelle  $8f$  und in der zweiten  $Sq$  Muster aus. Werden beide Zellen gekoppelt, wechselwirken beide Muster miteinander. Der typische Verlauf für alle Parameterbereiche ist in Abb. 5.21 dargestellt. Die Verstimmung ist wieder  $\bar{\Delta} = 6.0$ . Die Startzustände der ersten und zweiten Zelle sind in (i,vi) und (ii,vii) abgebildet. Beide Zellen sind jeweils knapp oberhalb der kritischen Schwellen. Die Wechselwirkung der Muster führt bis zu relativ hohen Kopplungsraten  $s > 1.0$  zu einer stetigen additiven Überlagerung beider Muster, es entsteht ein  $Sq(II) + 8f(I)$  Muster (iii,vii). Das Startmuster der zweiten Zelle ist dabei stabil. Ab einer gewissen Kopplungsrate wird die Wechselwirkung der Muster so groß, dass die Fourierkomponenten des quadratischen Musters sich an den Fourierkomponenten der ersten Zelle ausrichten. Durch die Drehung des zweiten Musters entstehen sehr viele Fourierkomponen-

ten auf der kritischen Länge des zweiten Musters (iv,viii). Eine Erhöhung der Kopplungsrate bewirkt, dass das Muster der ersten Zelle auf der Längenskala der zweiten Zelle reproduziert wird, es entsteht ein  $8f(II) + 8f(I)$  Superlattice, (ix-xi,xii,xiv).

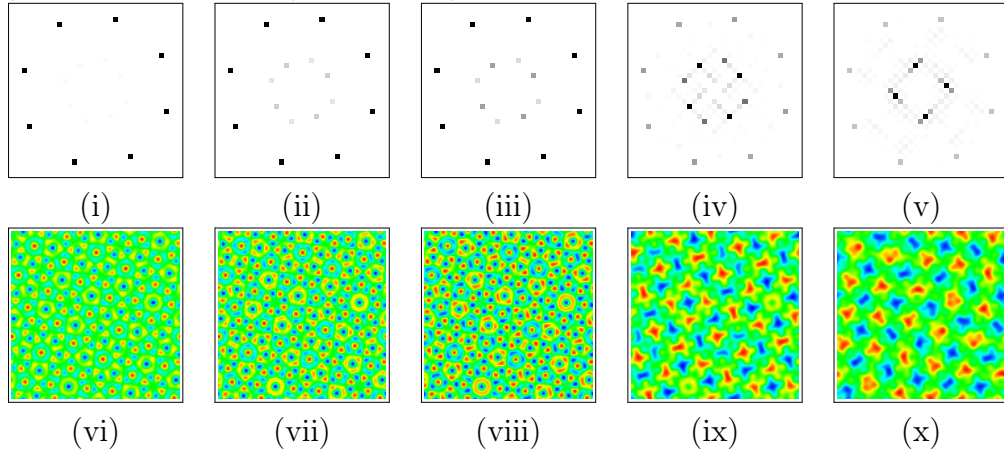
### 5.2.1 Quadrate und Hexagone - Id.L8

Die natürlichen Muster in der Konfiguration Id.L8 sind Quadrate ( $Sq$ ) in der ersten und Hexagone ( $H_{\pm}$ ) in der zweiten Zelle über den gesamten Parameterbereich. Die Längenskalen der Muster sind  $q_{Id} = 6 - 10\text{mm}^{-1}$  und  $q_{L8} = 18 - 19\text{mm}^{-1}$  im betrachteten Parameterbereich. Auch hier sind die Längenskalen unterschiedlich.

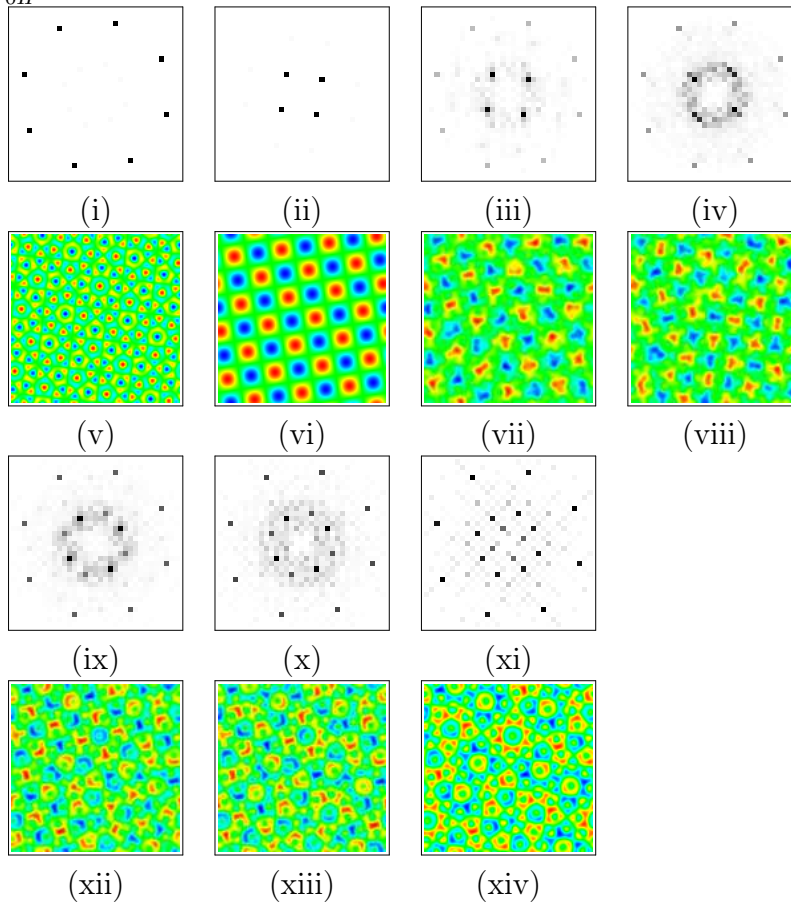
#### Zelle 1 kritisch - Zelle 2 unterkritisch

In der Konfiguration Id.L8 kann die zweite Zelle in verschiedenen subkritischen Zuständen sein. Der homogene Zustand kann positiv oder negativ sein. Das typische Szenario ist unabhängig von dem homogenen Zustand und ist in Abb. 5.22 dargestellt. Für die Verstimmung wird wieder  $\Delta = 6.0$  gewählt. In diesem Fall ist der homogene Zustand positiv, ein entsprechendes Szenario existiert auch für den negativen Zustand. Das in die zweite Zelle induzierte Muster ist in (i,vi) abgebildet. Solange die zweite Zelle im unterkritischen Bereich ist, folgt sie der ersten, bildet aber auf der Längenskala der zweiten Zelle  $q_{L8}$  zusätzlich Strukturen aus, die aus Kopplungen der dritten Ordnung der quadratischen Komponenten bestehen. Die Strukturen werden auch *Supersquares* ( $SuSq$ ) genannt [DSS97] (ii-iii,vii-viii). Eine Erhöhung der Intensität in der zweiten Zelle in den kritischen Bereich führt zur Unterdrückung von vier Komponenten der  $SuSq$  und damit zu einer rhombischen Struktur auf der Längenskala der zweiten Zelle (iv,ix). Die Komponenten der Rhomben sind auf Positionen, die zu später entstehenden Hexagonen gehören. Das Muster der ersten Zelle ist auf der Längenskala der ersten Zelle weiterhin präsent. Wird also einfach mit übertragen. Sobald die Intensität weiter erhöht wird, setzen sich Hexagone  $H_+$  durch und bilden die dominante Struktur (v,x).

## Quasimuster und Quadrate QW.Id



**Abbildung 5.20:** Fourierkomponenten der Muster in der Konfiguration QW.Id und einer Kopplung von  $s = 1.0$ . Die zweite Zelle ist am Anfang im unterkritischen Bereich. (i,vi) Startkomponenten der ersten Zelle  $I_{0I} = 300\text{mW}$ , (ii,vii) Komponenten der zweiten Zelle im unterkritischen Bereich ( $I_{0II} = 10\text{mW}$ ), (iii,viii) im überkritischen Bereich ( $I_{0II} = 20\text{mW}$ ), (iv,ix)  $I_{0II} = 40\text{mW}$  und (v,x)  $I_{0II} = 50\text{mW}$ . Parameter: siehe Abb. 5.1.



**Abbildung 5.21:** Fourierkomponenten der Muster in der Konfiguration QW.Id und beide Zellen im kritischen Bereich ( $I_{0I} = 300\text{mW}$ ,  $I_{0II} = 70\text{mW}$ ). (i,v) Startkomponenten der ersten Zelle, (ii,vi) Startkomponenten der zweiten Zelle, (iii,vii)  $s = 1.40$ , (iv,viii)  $s = 1.50$ , (ix,xii)  $s = 2.50$ , (x,xiii)  $s = 3.00$  und (xi,xiv)  $s = 4.50$ . Parameter: siehe Abb. 5.1.

### Zelle 1 kritisch - Zelle 2 kritisch

Sind beide Zellen im kritischen Bereich, bilden sich in der ersten Zelle  $Sq$  (i,v) und in der zweiten Zelle  $H_{\pm}$  (ii,vi) aus. Über den gesamten Parameterbereich konnte ebenfalls nur ein Szenario gefunden werden. Der typische Verlauf ist in Abb. 5.25 dargestellt. Die Verstimmung ist ebenfalls wieder  $\bar{\Delta} = 6.0$ . Für relativ kleine Kopplungsraten  $s < 0.5$  werden die Hexagone zerstört und es bildet sich eine Kombination von Supersquare und Quadrat ( $SuSq(II) + Sq(I)$ ). Wird die Kopplung erhöht, bilden sich auf der Längenskala der zweiten Zelle vier zusätzliche Komponenten aus, so dass zwei hexagonale Strukturen parallel existieren. Analog zu den Supersquares werden diese Strukturen *Superhexagons* ( $SuH_{\pm}$ ) genannt [DSS97]. Das Muster der ersten Zelle ist allerdings weiterhin stark präsent und verhindert, die Ausbildung von reinen  $SuH_{\pm}$ . Die entstehende Struktur ist daher eine  $SuH_{+}(II) + Sq(I)$  (iii,vii). Diese Struktur ist bis zu einer hohen Kopplungsrate  $s < 3.0$  stabil und wird durch ein quadratisches Superlattice ersetzt  $SL_2$ . Die Fourierkomponenten des Superlattice bestehen aus den Komponenten der Quadrate und den Komponenten der Kopplungen 2. Ordnung der Quadrate (iv,viii).

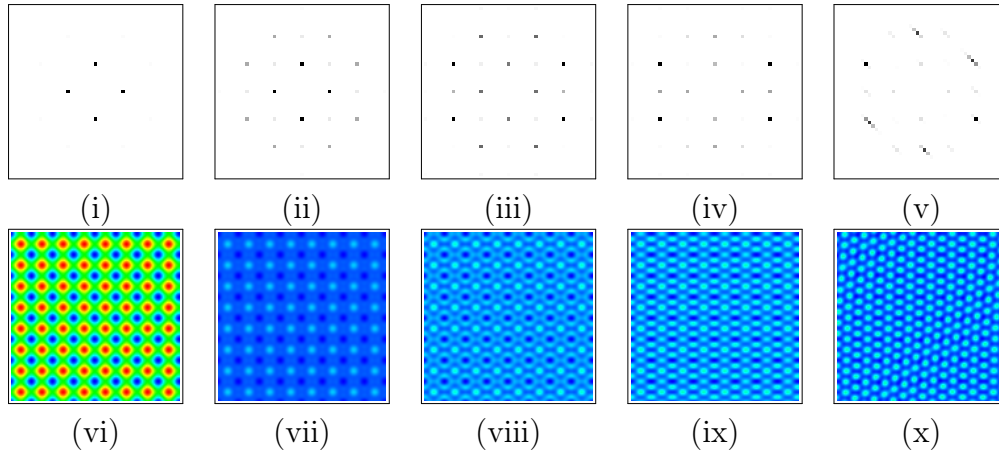
### Hexagone und Quadrate - L8.Id

Die natürlichen Muster sind Hexagone  $H_{\pm}$  und Quadrate  $Sq$ . Die Längenskalen sind wie im vorigen Abschnitt.

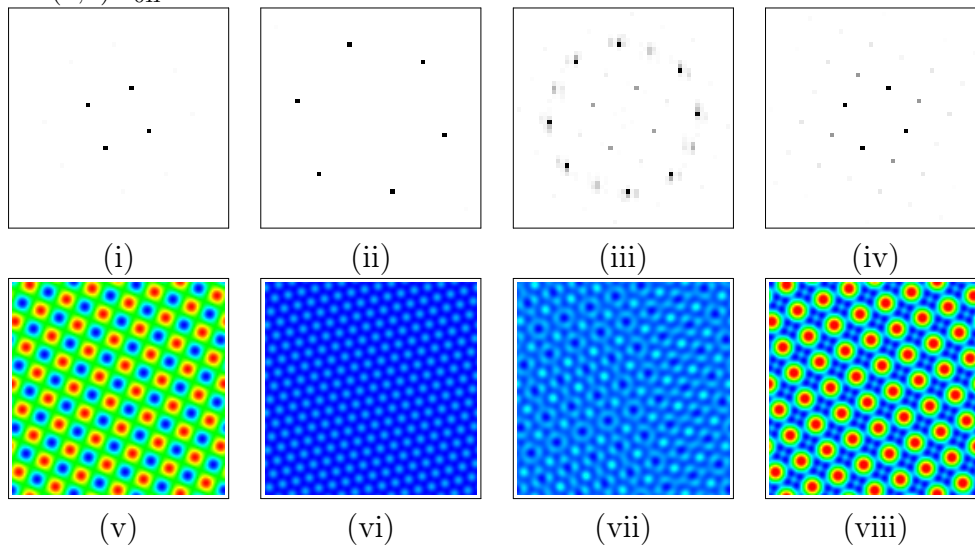
### Zelle 1 kritisch - Zelle 2 unterkritisch

In der Konfiguration L8.Id konnten zwei Szenarien gefunden werden. Der typische Verlauf ist in Abb. 5.24 für eine Verstimmung von  $\bar{\Delta} = 6.0$  dargestellt. Die Orientierung der zweiten Zelle ist ohne Kopplung identisch Null, in der zweiten Zelle bilden sich auf dem positiven oder negativen Ast Hexagone aus. Werden beide Zelle gekoppelt, und ist die erste Zelle im kritischen (i,v) und die zweite Zelle im unterkritischen Bereich, dann wird das Muster der ersten Zelle in die Zweite übertragen (ii,vi). Für eine relativ schwache Kopplung  $s < 0.3$  werden die Hexagone übertragen und bleiben die dominante Struktur. Sobald die zweite Zelle kritisch wird, sind Quadrate die dominante Struktur, allerdings auf den positiven oder negativen Ast verschoben  $Sq_{+}(II)$  (iv,viii). Die Verschiebung des Mittelwertes der Orientierung in der zweiten Zelle resultiert aus der ersten Zelle.

## Quadrate und Hexagone Id.L8



**Abbildung 5.22:** Fourierkomponenten der Muster in der Konfiguration Id.L8 und einer Kopplung von  $s = 1.0$ . Die zweite Zelle ist am Anfang im unterkritischen Bereich. (i,vi) Startkomponenten der ersten Zelle  $I_{0I} = 70\text{mW}$ , (ii,vii) Komponenten der zweiten Zelle im unterkritischen Bereich ( $I_{0II} = 200\text{mW}$ ), (iii,viii) kurz unterhalb des überkritischen Bereiches ( $I_{0II} = 280\text{mW}$ ), (iv,ix)  $I_{0II} = 300\text{mW}$  und (v,x)  $I_{0II} = 320\text{mW}$  und  $s = 0.5$ . Parameter: siehe Abb. 5.1.



**Abbildung 5.23:** Fourierkomponenten der Muster in der Konfiguration Id.L8 und beide Zellen im kritischen Bereich ( $I_{0I} = 70\text{mW}$ ,  $I_{0II} = 290\text{mW}$ ,  $\alpha_{II} = 0$  Grad). (i,v) Startkomponenten der ersten Zelle, (ii,vi) Startkomponenten der zweiten Zelle, (iii,vii)  $s = 0.50$ , (iv,viii)  $s = 3.50$ . Parameter: siehe Abb. 5.1.

Ist die Kopplung stärker, bilden sich sobald die zweite Zelle instabil wird, Hexagone auf der Längenskala der zweiten Zelle aus. Die übertragenen Hexagone werden fast vollständig unterdrückt, es bilden sich  $H_+(II)$  (iii,vii). Eine additive Überlagerung beider Muster konnte für keinen Parametersatz gefunden werden.

### Zelle 1 kritisch - Zelle 2 kritisch

Sind beide Zellen im kritischen Bereich, konnte nur ein Szenario gefunden werden. Der typische Verlauf ist in Abb. 5.25 ebenfalls für eine Verstimmung von  $\bar{\Delta} = 6.0$  dargestellt. Aus den Startmustern  $H_+(I)$  (i,vi) und  $Sq(II)$  (ii,vii) wird in der zweiten Zelle schon bei relativ schwacher Kopplung  $s < 0.4$  das Quadrat zerstört und ab  $s \approx 0.4$  bilden sich Hexagone mit einer Längenskala von  $0.5q_{L8}$ , d.h. der Hälfte der ersten Zelle. Wird die Kopplung zwischen  $0.4 < s < 0.9$  gewählt, werden die Komponenten der ersten Zelle in die zweite übertragen und eine Kombination aus beiden existiert ( $H_+(0.5I) + H_+(I)$ )(iv,ix). Sobald die Kopplung größer wird als 0.9 verschwinden die Hexagone auf der Längenskala der zweiten Zelle und nur  $H_+(I)$  Hexagone bilden sich aus.

## 5.2.2 Hexagone und Quasimuster - L8.L4

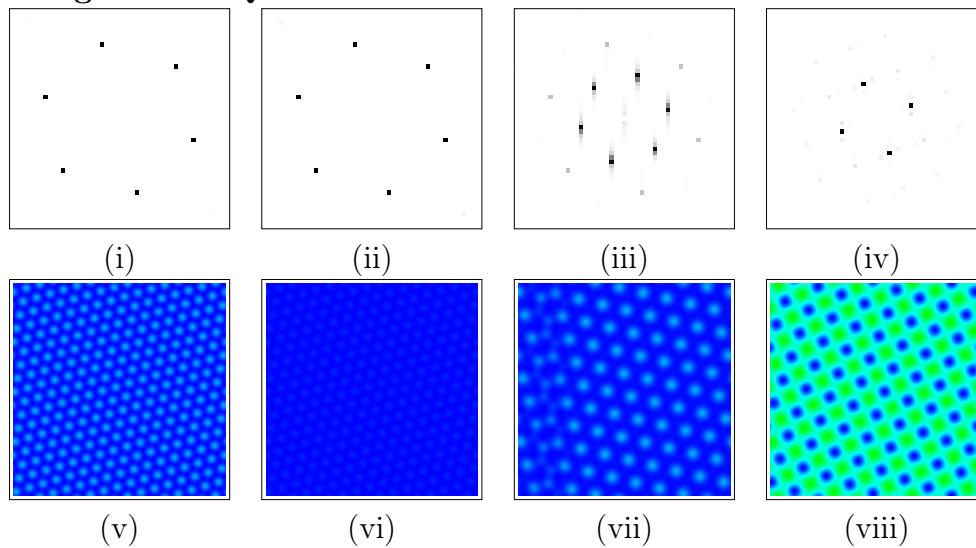
Die natürlichen Muster in der Konfiguration L8.L4 sind Hexagone  $H_{\pm}$  und 8-fach Quasimuster  $8f$ . Die Längenskalen sind dabei  $q_{L8} = 18 - 19\text{mm}^{-1}$  und  $q_{L4} \approx 23\text{mm}^{-1}$ .

### Zelle 1 kritisch - Zelle 2 unterkritisch

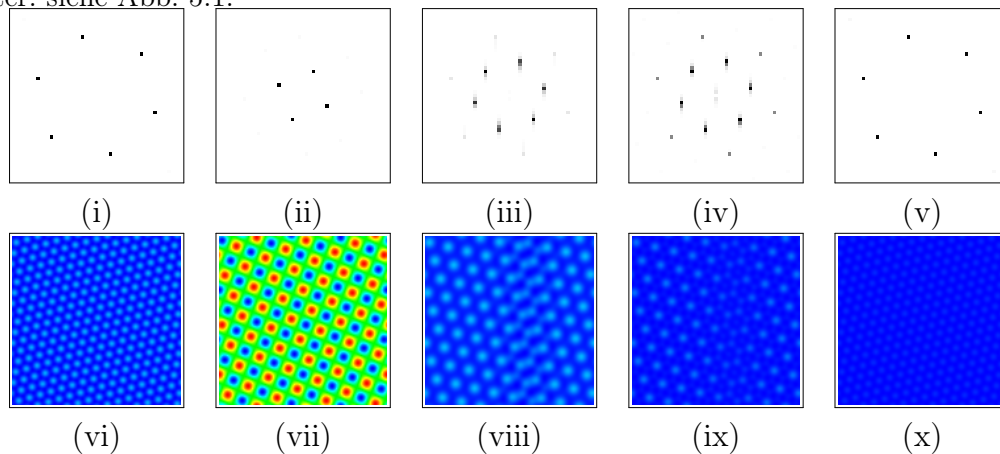
In der Konfiguration L8.L4 konnten wieder zwei Szenarien, abhängig von der Kopplungsstärke, gefunden werden. Für relativ schwache Kopplungsstärken  $s \leq 0.5$  wird das  $H_{\pm}(I)$  Hexagon der ersten Zelle in die zweite Zelle übertragen, solange diese im unterkritischen Bereich ist. Steigt die Intensität über die kritische Schwelle, bilden sich in der zweiten Zelle  $8f(II)$  Quasimuster aus und die Hexagone werden unterdrückt. Der Mittelwert der Quasimuster ist jedoch in die Richtung verschoben, in der auch die Hexagone vorliegen. Ist die Kopplung stärker als 0.5, bildet sich zunächst ein Superlattice. Die entstehenden Muster sind in Abb. 5.26 dargestellt. Unterhalb der kritischen Schwelle wird das Muster der ersten Zelle (i,v) auf die zweite



## Hexagone und Quadrate L8.Id



**Abbildung 5.24:** Fourierkomponenten der Muster in der Konfiguration L8.Id und einer Kopplung von  $s = 1.00$ . Die zweite Zelle ist am Anfang im unterkritischen Bereich. (i,v) Startkomponenten der ersten Zelle ( $I_{0I} = 290\text{mW}$ ), (ii,vi) Komponenten der zweiten Zelle im unterkritischen Bereich ( $I_{0II} = 10\text{mW}$ ), (iii,vii) kurz oberhalb des überkritischen Bereiches ( $I_{0II} = 80\text{mW}$ ), (iv,viii) oberhalb des kritischen Bereiches bei geringer Kopplung,  $I_{0II} = 80\text{mW}$  und  $s = 0.10$ . Parameter: siehe Abb. 5.1.



**Abbildung 5.25:** Fourierkomponenten der Muster in der Konfiguration L8.Id und beide Zellen im kritischen Bereich ( $I_{0I} = 290\text{mW}$ ,  $I_{0II} = 70\text{mW}$ ,  $\alpha_I = 0$  Grad). (i,vi) Startkomponenten der ersten Zelle, (ii,vii) Startkomponenten der zweiten Zelle, (iii,viii)  $s = 0.40$ , (iv,ix)  $s = 0.80$  und (v,x)  $s = 0.90$ . Parameter: siehe Abb. 5.1.

Zelle übertragen (ii,vi). Kurz unterhalb des kritischen Bereiches entsteht ein  $H_+(II) + H_+(I)$   $SL_1$  Superlattice (iii,vii). Dieses verschwindet bei steigender Intensität und ein Kombination  $8f(II) + H_+(I)$  entsteht (iv,viii). Der hexagonale Anteil wird mit steigender Intensität allerdings schnell gedämpft und  $8f(II)$  Quasimuster mit einem Mittelwert ungleich Null entstehen.

### Zelle 1 kritisch - Zelle 2 kritisch

Sind beide Zellen im kritischen Bereich, ergibt sich ein Szenario, das in Abb. 5.27 dargestellt ist. Das Startmuster der ersten Zelle (i,vi) wird in das Startmuster der zweiten Zelle (ii,vii) eingekoppelt. Bis zu einer starken Kopplung von  $s < 3.5$  werden beide Muster in der zweiten Zelle überlagert und es entstehen zwischen den Fourierkomponenten des zweiten Musters zusätzliche Komponenten auf der Längenskala der ersten Zelle. Das entstehende Muster ist ein  $8f(II) + H_+(I)/8f(I)$  Muster, wobei das  $8f(II)$  Muster sehr stark überwiegt. Sobald die Kopplung größer wird  $s \geq 3.5$  werden die  $8f$  Muster auf beiden Längenskalen zerstört und es entsteht ein  $H_+(II) + H_+(I)$  Superlattice. Das Hexagon  $H_+(II)$  ist dabei allerdings stark gestört, die Zelle versucht weiterhin ein  $8f$  Muster auszubilden.

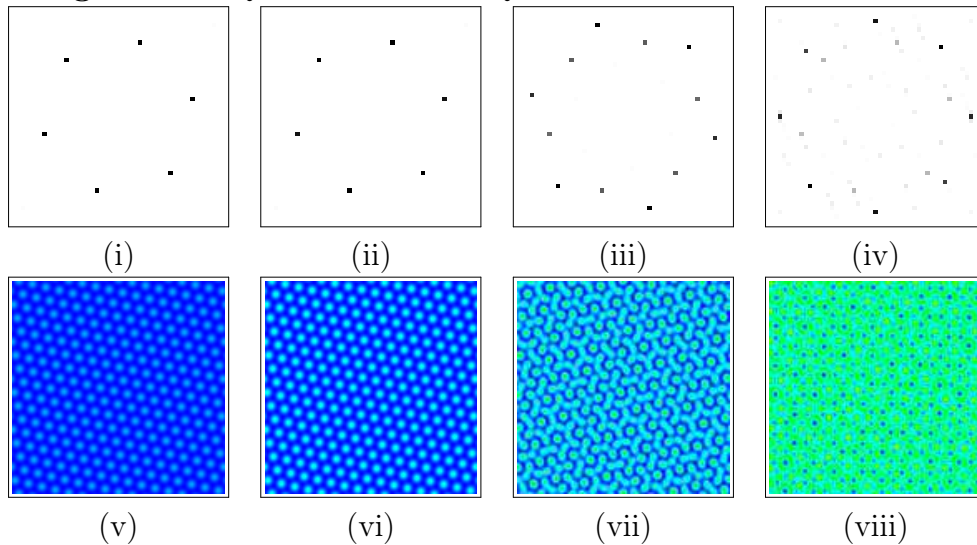
### Quasimuster und Hexagone - L4.L8

Die natürlichen Muster in der Konfiguration L4.L8 sind  $8f$  Quasimuster und Hexagone  $H_{\pm}$ . Die Längenskalen sind wie im vorherigen Abschnitt.

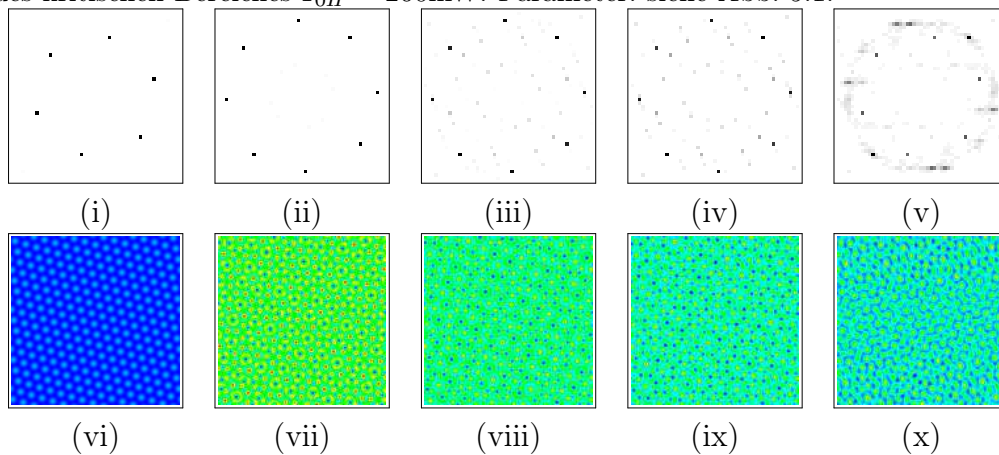
### Zelle 1 kritisch - Zelle 2 unterkritisch

Ist die zweite Zelle am Anfang im unterkritischen Bereich, konnten wieder zwei Szenarien gefunden werden. Im unterkritischen Bereich sind die beiden Szenarien ähnlich, im überkritischen Bereich zeigen sich jedoch Unterschiede aufgrund unterschiedlicher Kopplungsstärken. Der typische Verlauf des komplexeren zweiten Szenarios ist in Abb. 5.28 dargestellt. Bei schwacher Kopplung  $s < 0.5$  wird das  $8f(I)$  Quasimuster auf die zweite Zelle übertragen solange die zweite Zelle im unterkritischen Bereich ist. Zusätzlich bildet sich ein  $8f(II)$  Muster, dessen Komponenten jeweils zwischen zwei Komponenten des ersten Musters liegen. Sobald die Intensität der zweiten Zelle über die kritische Grenze erhöht wird, bildet sich in der zweiten Zelle ein Hexagon  $H_{\pm}(II)$  aus. Das  $8f(II)$  Muster wird zerstört. Weiterhin existent

## Hexagone und Quasimuster L8.QW



**Abbildung 5.26:** Fourierkomponenten der Muster in der Konfiguration L8.QW und einer Kopplung von  $s = 1.00$ . Die zweite Zelle ist am Anfang im unterkritischen Bereich. (i,v) Startkomponenten der ersten Zelle  $I_{0I} = 290\text{mW}$ , (ii,vi) Komponenten der zweiten Zelle im unterkritischen Bereich ( $I_{0II} = 200\text{mW}$ ), (iii,vii) kurz unterhalb des überkritischen Bereiches ( $I_{0II} = 230\text{mW}$ ), (iv,viii) oberhalb des kritischen Bereiches  $I_{0II} = 260\text{mW}$ . Parameter: siehe Abb. 5.1.



**Abbildung 5.27:** Fourierkomponenten der Muster in der Konfiguration L8.QW und beide Zellen im kritischen Bereich ( $I_{0I} = 290\text{mW}$ ,  $I_{0II} = 300\text{mW}$ ,  $\alpha_I = 0$  Grad). (i,vi) Startkomponenten der ersten Zelle, (ii,vii) Startkomponenten der zweiten Zelle, (iii,viii)  $s = 1.00$ , (iv,ix)  $s = 2.00$  und (v,x)  $s = 3.50$ . Parameter: siehe Abb. 5.1.

ist das übertragene  $8f(I)$  Muster, das jedoch mit steigender Intensität vom Hexagon immer stärker dominiert wird. Bei stärkerer Kopplung  $s \geq 0.5$  ist der unterkritische Bereich ähnlich. Sobald die zweite Zelle in die Nähe des überkritischen Bereiches kommt, bilden sich auf der Längenskala der zweiten Zelle mehrere Komponenten aus, die aus verschiedenen  $8f(II)$  und  $H_{\pm}(II)$  zusammengesetzt sind. Das Muster wird deshalb als  $IR(II) + 8f(I)$  klassifiziert, da die einzelnen Musteranteile nicht mehr einzeln aufgelöst werden können (iii,vii). Wird die Intensität weiter erhöht, setzt sich ein  $H_{\pm}(II)$  Muster durch und das entstehende Muster ist ein  $H_{\pm}(II) + 8f(I)$  (iv,viii).

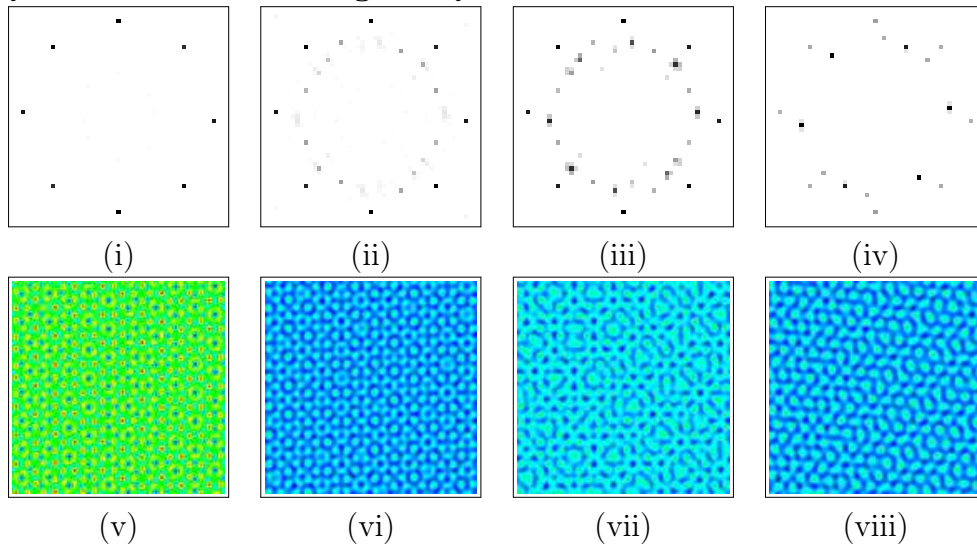
### Zelle 1 kritisch - Zelle 2 kritisch

Sind beide Zellen im kritischen Bereich, ergibt sich ein Szenario, das in Abb. 5.29 dargestellt ist. Die Startmuster sind ein  $8f(I)$  Quasimuster (i,vi) und ein  $H_{+}(II)$  Hexagon (ii,vii). Werden beide Muster gekoppelt, existiert bis zu einer Kopplung von  $s < 0.5$  in der zweiten Zelle eine Kombination aus beiden Mustern, also ein  $H_{+}(II) + 8f(I)$  Muster. Oberhalb dieser Kopplung, bis  $s = 2.5$ , wird das Hexagon zerstört und es kommt zu einer Ausbildung eines  $2 * 8f(II) + 8f(I)$  Musters. Die Hauptkomponenten auf der Längenskala der zweiten Zelle liegen an den Punkten, an denen auch die Komponenten der ersten Zelle liegen (iii,viii). Ab einer Kopplung von  $s > 2.5$  wird die Struktur auf der Längenskala der zweiten Zelle zerstört, und es bilden sich stationäre Domänen  $8f(I) + D$  aus (iv,ix). Diese Domänen wachsen bei steigender Kopplung bis sich labyrinthartige Strukturen entwickeln, die jedoch immer noch eine  $8f(I)$  Struktur besitzen. Die Domänen sind Bereiche des Musters, die auf den negativen stabilen Ast der zweiten Zelle gewechselt haben. Diese Bereiche vergrößern sich mit steigender Kopplung und es bilden sich Fronten aus, die vom positiven auf den negativen Ast gehen.

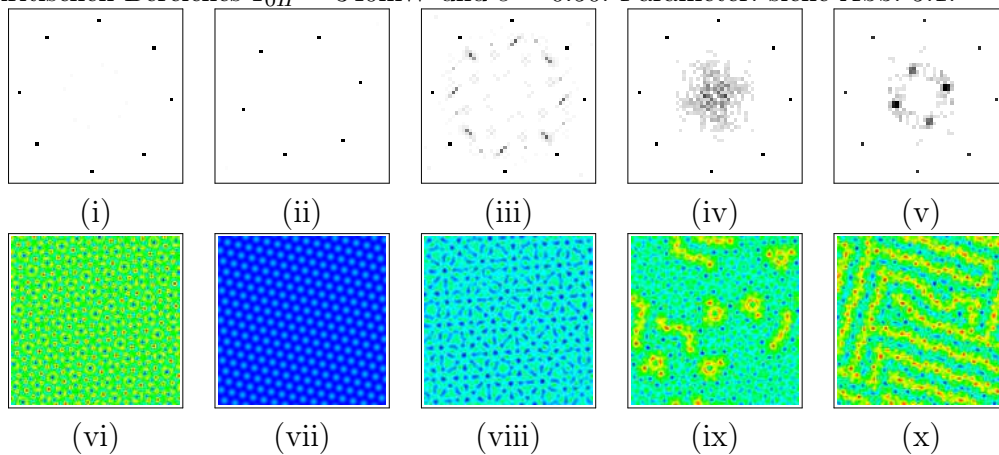
## 5.3 Kopplung irregulärer Mustern

Bei der Kopplung von regulären Mustern entstehen wie im Fall der Kopplung der 8-fach Quasimuster mit den Hexagonen labyrinthartige Strukturen, die in dem Bereich entstehen, wo die Muster sehr stark miteinander wechselwirken, d.h. sehr starke Kopplungen vorliegen. In zwei Konfigurationen der beiden Systeme konnten irreguläre Muster gefunden werden. Die erste Konfiguration ist diejenige mit jeweils einem  $\lambda/8$ -Plättchen in beiden Zellen. In beiden Einzelsystemen tritt dann eine Bistabilität auf und es

## Quasimuster und Hexagone QW.L8



**Abbildung 5.28:** Fourierkomponenten der Muster in der Konfiguration QW.L8 und einer Kopplung von  $s = 1.00$ . Die zweite Zelle ist am Anfang im unterkritischen Bereich. (i,v) Startkomponenten der ersten Zelle  $I_{0I} = 300\text{mW}$ , (ii,vi) Komponenten der zweiten Zelle im unterkritischen Bereich ( $I_{0II} = 260\text{mW}$ ), (iii,vii) kurz oberhalb des überkritischen Bereiches ( $I_{0II} = 300\text{mW}$ ), (iv,viii) oberhalb des kritischen Bereiches  $I_{0II} = 340\text{mW}$  und  $s = 0.50$ . Parameter: siehe Abb. 5.1.



**Abbildung 5.29:** Fourierkomponenten der Muster in der Konfiguration QW.L8 und beide Zellen im kritischen Bereich ( $I_{0I} = 300\text{mW}$ ,  $I_{0II} = 290\text{mW}$ ,  $\alpha_I = 0$  Grad). (i,vi) Startkomponenten der ersten Zelle, (ii,vii) Startkomponenten der zweiten Zelle, (iii,viii)  $s = 1.40$ , (iv,ix)  $s = 2.50$  und (v,x)  $s = 3.00$ . Parameter: siehe Abb. 5.1.

können sich Labyrinth bilden [Sch06]. Die Intensitäten, die nötig sind um labyrinthartige Strukturen zu erzeugen, sind weit oberhalb der Schwelle zur Musterbildung.

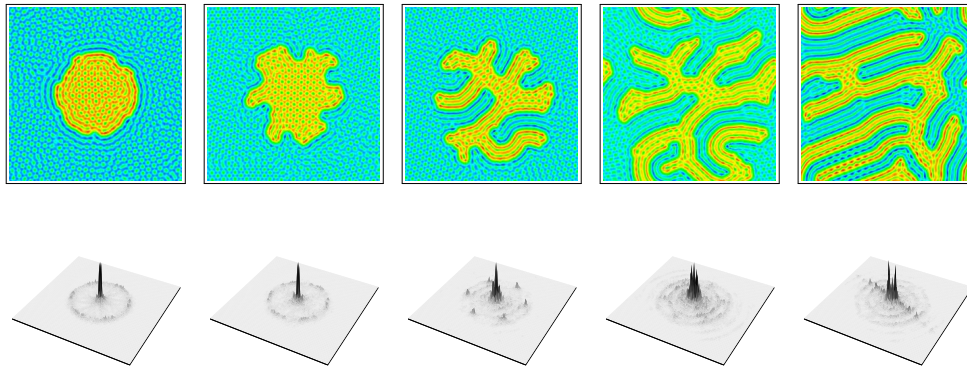
Die zweite Konfiguration, in der irreguläre Strukturen gefunden werden konnten, benötigt in der ersten Zelle ein  $\lambda/4$ -Plättchen und in der zweiten Zelle ein  $\lambda/8$ -Plättchen. Die Muster, die in der ersten Zelle entstehen, sind dann 8-fach Quasimuster und in der zweiten Zelle bilden sich Hexagone. In der zweiten Zelle tritt zusätzlich eine Bistabilität auf. Diese Bistabilität ermöglicht wiederum die Bildung von labyrinthartigen Strukturen und Domänen.

### 5.3.1 Labyrinth

Labyrinthartige Strukturen besitzen wie reguläre Muster charakteristische Längenskalen, jedoch keine Fernordnung [LBRT<sup>+</sup>02, Sch06]. Es ist also nicht möglich, aus einem Teilgebiet eines Labyrinths auf ein anderes zu schließen. In einem Labyrinth existiert keine Translationsinvarianz. In der nichtlinearen Optik sind bisher nur in wenigen Systemen Labyrinth experimentell gefunden oder theoretisch vorhergesagt worden [Sch06, TSW98, GSMT00, LL00, Rom04, ISMS01]. Diese Systeme besitzen zwei stabile Zustände die annähernd gleichberechtigt sind. Zwischen diesen Zuständen können sich Fronten ausbreiten, die die Labyrinth bilden. Wird eine Front in diesem System gestartet, dann hängt das Verhalten dieser Front von den gewählten Systemparametern ab. Der entscheidende Parameter ist dabei die Intensität des Lasers mit dem ein System betrieben wird. Wird ein kreisförmiges Gebiet auf dem einen stabilen Zustand betrieben, der Rest des Gebietes auf dem anderen, dann bildet sich eine kreisförmige Front aus. Unterhalb der Schwelle zur Musterbildung können diese kreisförmige Fronten expandieren, kontrahieren oder zu lokalisierten Strukturen, den Solitonen, führen [Pes06]. Wird die Intensität weit über die Schwelle zur Musterbildung erhöht, dann zeigt sich ein anderes Verhalten. Die Form der Front wird instabil und die Rotationssymmetrie der Front verschwindet. Wird die Intensität weiter erhöht bildet sich ein Labyrinth [Sch06].

#### 5.3.1.1 Existenzbereiche

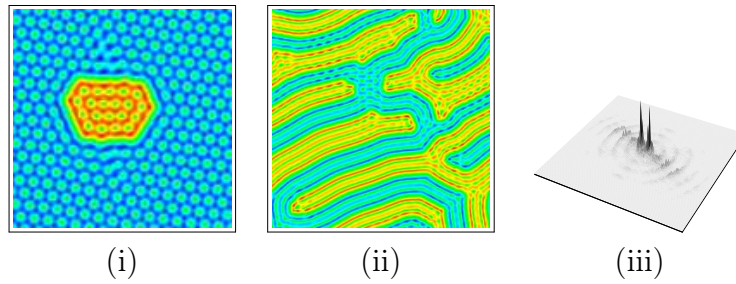
In Abb. 5.30 ist die Entwicklung eines Labyrinthes dargestellt. Die Labyrinth entstehen aus einer Anfangsverteilung bei der ein positiver homogener



**Abbildung 5.30:** Entwicklung eines Labyrinths mit einem  $\lambda/8$ -Plättchen im Strahl (von links nach rechts), auf einem Grundgebiet von  $10 \times 10\text{mm}^2$ . Die Fourierbilder (unten) zeigen die innere Hälfte des Fourier-Raumes. (Von links nach rechts:  $t = 1.75, 4.75, 17.75, 36.75$  und  $78.75\text{ms}$ ) Parameter: siehe Abb. 5.1,  $I_0 = 750\text{mW}$ ,  $\bar{\Delta} = 6.5$  und  $\alpha_I = 0^\circ$ .

Teil durch eine kreisförmige Front von einem negativen homogenen Teil getrennt wird. Oberhalb der Schwelle zur Musterbildung ist der homogene Zustand instabil und Hexagone bilden sich aus. Die Front zwischen diesen Hexagonen wird instabil und fängt an sich zu verzweigen. Diese Verzweigung schreitet fort, bis die Struktur sich nur noch wenig ändert. Diese Strukturen werden auch als *nearly frozen states* beschrieben und sind ebenfalls in [Sch06] beobachtet worden. Auf den jeweiligen Ästen der Verzweigungen des Labyrinthmusters kann dabei eine hexagonale Struktur erhalten bleiben, jedoch sind die Äste in den meisten Fällen zu klein um diese Struktur deutlich hervorzuheben. In diesen Fällen verbinden sich die hexagonal angeordneten Konstituenten der ursprünglichen Muster zu langgezogenen Bändern. Im Fourierraum zeichnet sich dann neben den charakteristischen Längenskalen eine Hauptrichtung der Fourierkomponenten ab (5.31ii,iii). In der Numerik beginnen die Labyrinth wiederum in einigen Fällen dann in eine Richtung zu wandern, bleiben aber in der Anordnung stabil. Dieses Verhalten ist auch in [Sch06] beobachtet worden.

In Abb. 5.32 sind die Existenzbereiche der Labyrinth für eine symmetrische Bistabilität ( $\alpha_{I,II} = 0^\circ$ ) dargestellt. Die numerischen Ergebnisse der Existenzbereiche stimmen dabei sehr gut mit denen aus [Sch06] überein. Wird das System weit oberhalb der kritischen Intensität zur Musterbildung betrieben, dann werden gerade und gekrümmte Fronten instabil, und Labyrinth entstehen [Sch06]. Der Übergang vollzieht sich dabei von Hexagonen



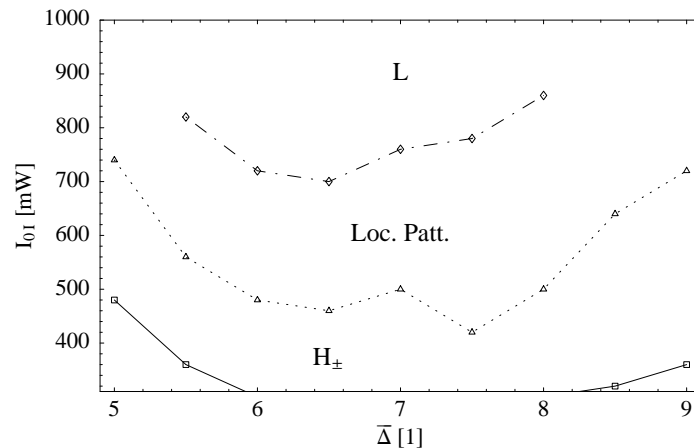
**Abbildung 5.31:** Muster in der Konfiguration mit einem  $\lambda/8$ -Plättchen weit oberhalb der kritischen Grenze. (i) Lokalisiertes Muster  $H_+$  und  $H_-$ , getrennt durch eine Front ( $I_0 = 580\text{mW}, \alpha = 0^\circ$ ), (ii) Labyrinth ( $I_0 = 750\text{mW}, \alpha = 0^\circ, \bar{\Delta} = 6.5$ ), (iii) Fourier-Raum zu (ii). Parameter: siehe Abb. 5.1. Das Grundgebiet beträgt hier  $6 \times 6\text{mm}^2$ (i) und  $10 \times 10\text{mm}^2$ (ii,iii)

über lokalisierte Muster (Abb.5.31i), bei denen die Front zwischen einem positiven Hexagon  $H_+$  und einem negativen Hexagon  $H_-$  durch das hexagonale Gitter örtlich beschränkt bleibt, zu Labyrinthen. Labyrinth konnten in den Simulationen nur für einen begrenzten Bereich ( $5.5 \leq \bar{\Delta} \leq 8.0$ ) in der Verstimmung gefunden werden. Außerhalb dieses Bereiches der Verstimmung bildeten sich keine Labyrinth, es konnten nur lokalisierte Muster gefunden werden. Ist die Symmetrie der beiden stabilen Zustände des Systems gebrochen ( $\alpha_{I,II} \neq 0$ ), können Labyrinth nur gefunden werden, wenn die Asymmetrie zwischen den Zuständen nicht zu groß wird. Der maximale Winkel bei dem Labyrinth noch gefunden werden können liegt in diesem Fall bei  $|\alpha_i| = 8^\circ$ .

### 5.3.1.2 Koppeln von Labyrinthen

Um Labyrinth zu koppeln wird in beiden Zellen die Konfiguration mit einem  $\lambda/8$ -Plättchen im Strahl eingestellt. Der Winkel zwischen der Eingangspolarisation und dem  $\lambda/8$ -Plättchen wird zu  $\alpha_i = 0^\circ$  gewählt, damit die beiden stabilen Zustände symmetrisch sind. Unterhalb der Schwelle zur Musterbildung wird dann in beiden Systemen ein homogener stationärer Zustand eingestellt. Zu diesem Zustand wird dann ein Gauß-förmiger Puls hinzugefügt, der von der Intensität groß genug ist, das System lokal auf den anderen stabilen Zustand zu schalten. Die zeitliche Entwicklung des Systems startet dann ungekoppelt mit dieser Anfangsverteilung und einer Intensität, die weit oberhalb der Schwelle zur Musterbildung ist. Die Entwicklung wird dann abgebrochen, wenn sich ein Labyrinth herausgebildet

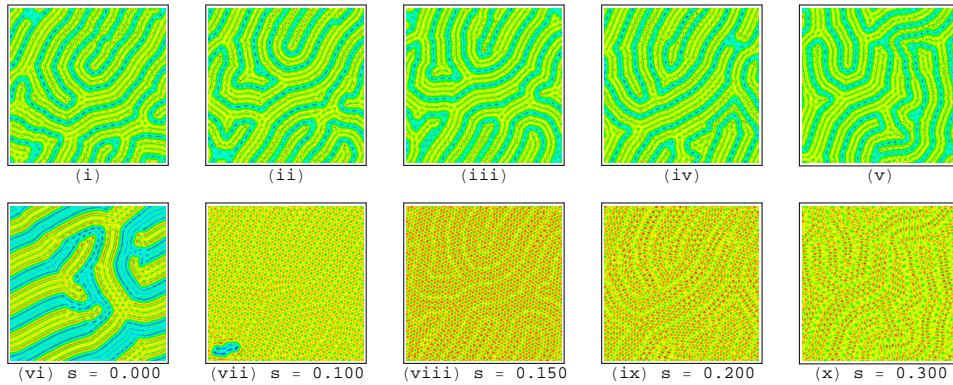




**Abbildung 5.32:** Existenzbereiche der Hexagone ( $H_{\pm}$ ), lokalisierten Muster (Loc.Patt.) und Labyrinth (L) in einer Zelle mit einem  $\lambda/8$ -Plättchen im Strahl. Parameter: siehe Abb. 5.1 und  $\alpha_I = 0^\circ$ .

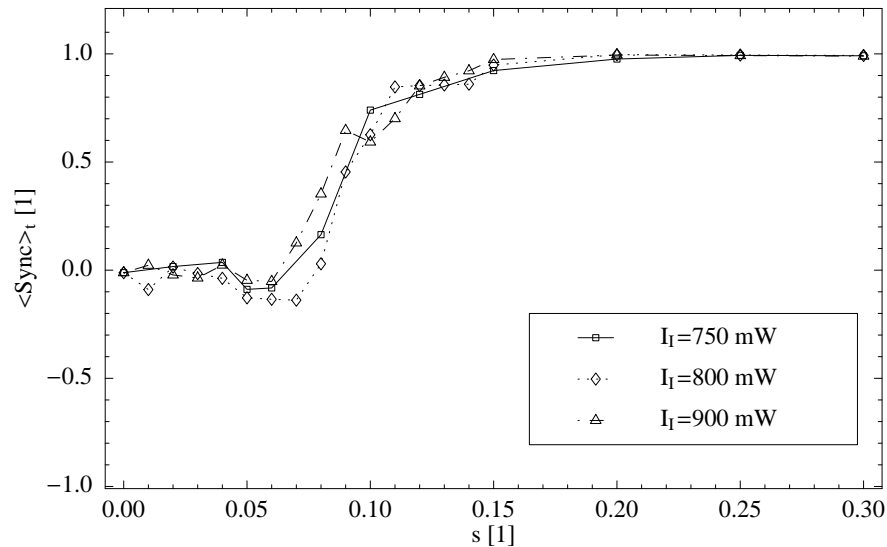
hat. Anschließend wird die Kopplung zwischen den Systemen eingeschaltet. Die Intensität in der zweiten Zelle wird entsprechend der Kopplung reduziert um die Gesamtintensität innerhalb dieser Zelle nahezu konstant zu halten. Das System entwickelt sich dann, bei fester Kopplung, solange, bis die gemittelte Synchronisation keinen Drift mehr aufweist. Anschließend wird die Kopplung erhöht und wiederum entwickelt, bis die Synchronisation keinen Drift mehr aufweist.

Für die Kopplung der Labyrinth konnten dabei zwei Szenarien gefunden werden. Ist der Winkel des  $\lambda$ -Plättchens Null, sind beide Äste der Pitch-Fork Bifurkation des homogenen Zustandes also gleichberechtigt, dann synchronisieren die Muster schon bei relativ geringen Kopplungsraten  $s \approx 0.15$ . Sobald der Winkel ungleich Null ist, ist ein Zustand bevorzugt. Labyrinth können in diesem Zustand zwar gefunden werden, jedoch zerstört die Kopplung der Zellen das Labyrinth in der zweiten Zelle. Das System stellt sich auf den bevorzugten Zustand ein. In Abb. 5.33 sind die Orientierungen der beiden Zellen dargestellt. Wird die Kopplung zwischen den Zellen eingeschaltet ( $s = 0.100$ ), dann breitet sich der bevorzugte Zustand in der zweiten Zelle aus. Bei einer Erhöhung der Kopplung ist das dominierende Muster in der zweiten Zelle der bevorzugte Zustand (in Abb. 5.33  $H_-$  Hexagone). Das Muster der ersten Zelle wird eingekoppelt, bildet sich jedoch nur schwach ab.



**Abbildung 5.33:** Kopplung zweier Labyrinth mit gebrochener Symmetrie des gemusterten Zustandes. Der negative (rote) Zustand ist bevorzugt. (i-v) Zelle  $I$ , (vi-x) Zelle  $II$ . Parameter: siehe Abb. 5.1,  $I_{0I} = 800\text{mW}$ ,  $I_{0II} = I_{II\text{red}}$ ,  $\bar{\Delta} = 6.0$  und  $\alpha_I = 5^\circ$ . Das Grundgebiet beträgt  $10 \times 10\text{mm}^2$

Bei symmetrischen Zuständen synchronisieren die Labyrinth schon bei geringen Kopplungsstärken von  $s \approx 0.15$  fast vollständig. Der Wert der gemittelten Synchronisation gegen die Kopplungsstärke ist in Abb. 5.34 für verschiedene Intensitäten dargestellt. Der Verlauf der Synchronisation der Labyrinth ist für alle Intensitäten nahezu identisch. Der Wert der Synchronisation hängt nur von der Stärke der Kopplung zwischen den beiden Zellen ab. Die Geschwindigkeit, mit der die Labyrinth einen stationären (über einen Zeitraum  $\Delta t$  gemittelten) Synchronisationswert annehmen ist in Abb. 5.35 aufgetragen. Für Kopplungsraten unterhalb von  $s = 0.15$  verläuft die Entwicklung dabei auf einer Zeitskala von ungefähr 50ms, während oberhalb dieses Wertes, die Labyrinth innerhalb von 10 ms in einen stationären Wert laufen. Die Drift des Synchronisationswertes bei der Kopplungsstärke  $s = 0.15$  in Abb. 5.35 endet nach einer Zeit von ca. 44ms und die Synchronisation schwankt danach leicht um einen Wert von 0.76. Die Ortsaufgelöste Entwicklung der Synchronisation, die Ortskorrelation, ist in Abb. 5.36 für den oben beschriebenen Fall dargestellt. Die Felder bevor die Kopplung auf  $s = 0.10$  erhöht wird sind in (a) dargestellt. 14.5ms nach Erhöhen der Kopplung (b) von  $s = 0.05$  auf  $s = 0.10$  bildet sich eine Region aus, die ortskorreliert ist. Im Laufe der Zeit wächst diese Region (c-d), bis schließlich ein Großteil der Entwicklung der Labyrinth synchron verläuft (e). Der Synchronisationswert der letzten Bilder in Abb. 5.36 ist 0.79 und der maximale Wert der Synchronisation zu dieser Kopplung.

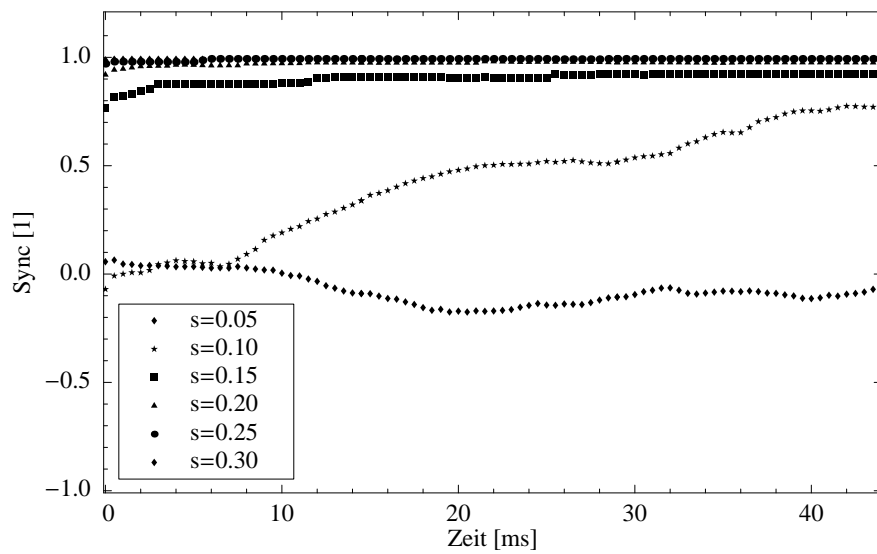


**Abbildung 5.34:** Gemittelte Synchronisation gegen die Kopplungsstärke für verschiedene Intensitäten. Parameter: siehe Abb. 5.1,  $\bar{\Delta} = 6.5$ ,  $I_{0II} = I_{0I}(1 - sF)$  und  $\alpha_{I,II} = 0^\circ$ .

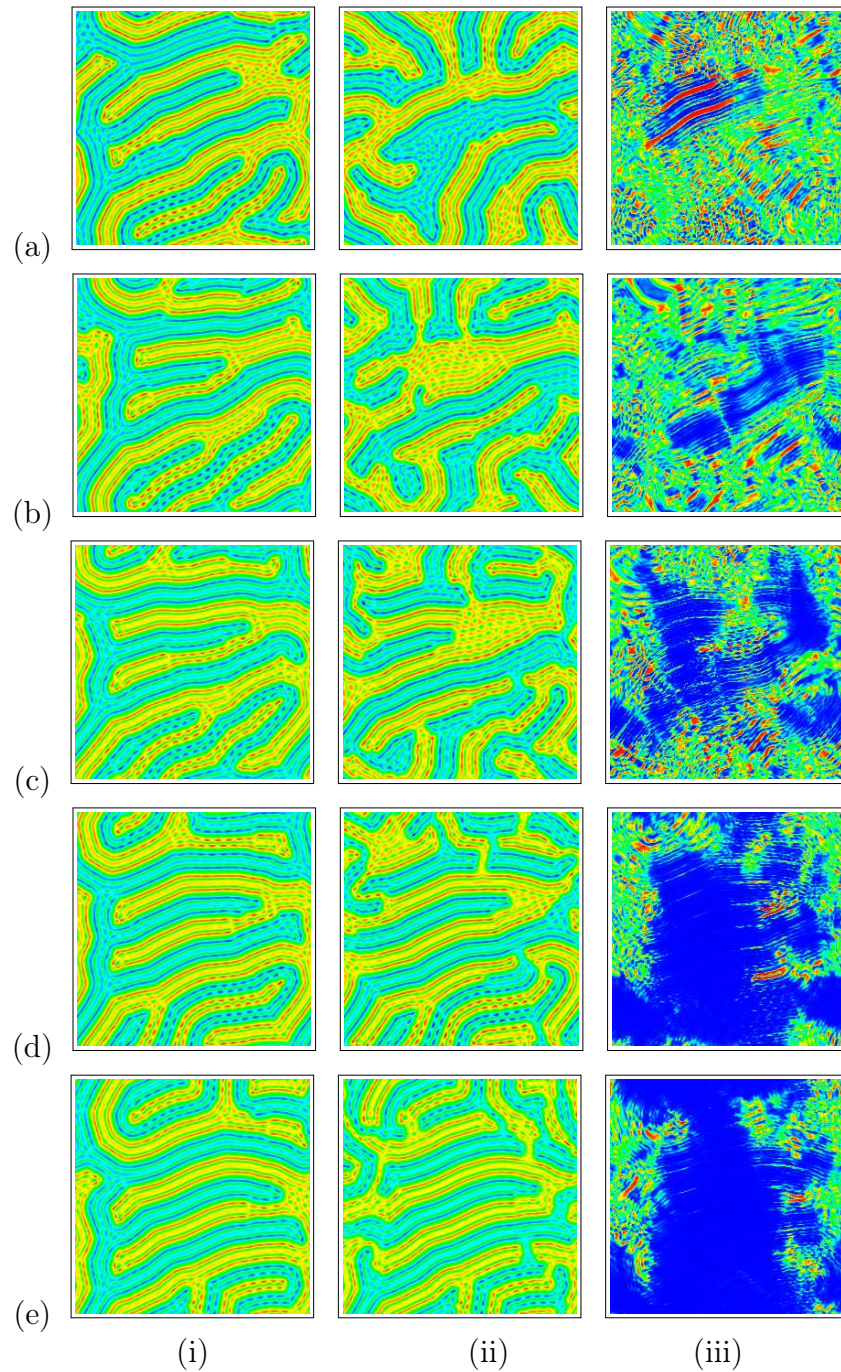
Werden raum-zeitliche Strukturen gekoppelt, dann sind die benötigten Kopplungsraten signifikant höher als bei stationär regulären Strukturen. Die in diesem System gefundenen Verläufe der Synchronisation von Labyrinth zeigen Ähnlichkeiten mit denen der Kopplung von raum-zeitlich komplexen Zuständen in LCLV-Systemen [RBB06, NG04]. Die Größenordnungen der Kopplungsraten stimmen in beiden Fällen mit den hier gefundenen überein. Jedoch sind die Synchronisationsraten für chaotische Zustände in LCLV-Systemen zum teil geringer [NG04].

### 5.3.2 Quasimuster und Hexagone

In der Konfiguration L4.L8 sind die stabilen Muster  $8f$  Quasimuster für ein  $\lambda/4$ -Plättchen im Strahl und  $H_\pm$  Hexagone für  $\lambda/8$ -Plättchen. Um diese Muster zu koppeln, werden beide Zellen ungekoppelt oberhalb der Schwelle zur Musterbildung betrieben und bis zum stationären Zustand entwickelt. Die zweite Zelle kann dabei aufgrund der Bistabilität Hexagone auf dem positiven oder dem negativen Ast ausbilden. Der Winkel des  $\lambda/8$ -Plättchens wird zu Null gewählt, womit die beiden Zustände symmetrisch sind. Anschließend wird die Kopplung schrittweise erhöht und die Zellen werden



**Abbildung 5.35:** Entwicklung der Synchronisation für verschiedene Kopplungen bei fester Intensität gegen die Zeit nach Erhöhen der Kopplung. Die Kopplungen wurden schrittweise erhöht und als Anfangszustand wurden die Felder der vorherigen Kopplungen gewählt. Parameter: siehe Abb. 5.1,  $\bar{\Delta} = 6.5$ ,  $I_{0I} = 750\text{mW}$ ,  $I_{0II} = I_{0I}(1 - sF)$  und  $\alpha_{I,II} = 0^\circ$ .

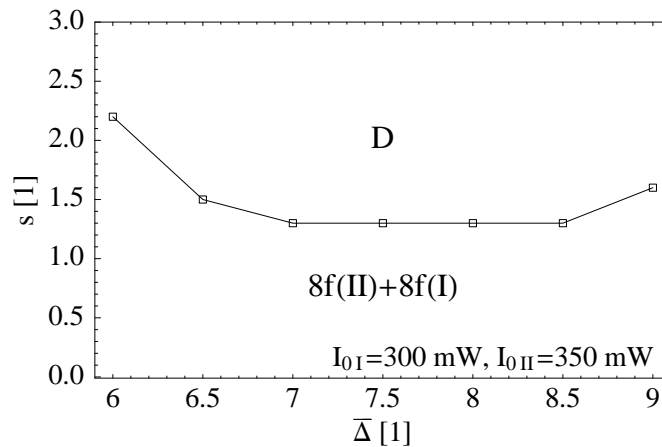


**Abbildung 5.36:** Ortskorrelation der Muster zu verschiedenen Zeitpunkten bei fester Kopplung. Von Links nach Rechts (i) Ortsraum Zelle  $I$ , (ii) Ortsraum Zelle  $II$  und (iii) Ortskorrelation beider Zellen (Blau=1, Rot=-1). Von oben nach unten (a)  $t = 0\text{ms}$ ,  $\langle \text{Sync} \rangle_t = -0.07$  (Erhöhen der Kopplung von  $s = 0.05$  auf  $s = 0.10$ ), (b)  $t = 14.5\text{ms}$ ,  $\langle \text{Sync} \rangle_t = 0.34$ , (c)  $t = 29.0\text{ms}$ ,  $\langle \text{Sync} \rangle_t = 0.52$ , (d)  $t = 43.5\text{ms}$ ,  $\langle \text{Sync} \rangle_t = 0.77$ , (e)  $t = 87.0\text{ms}$ ,  $\langle \text{Sync} \rangle_t = 0.79$ . Parameter: siehe Abb. 5.1,  $s = 0.10$ ,  $\bar{\Delta} = 6.5$ ,  $I_{0I} = 750\text{mW}$ ,  $I_{0II} = I_{0I}(1 - sF)$  und  $\alpha_{I,II} = 0^\circ$ . Das Grundgebiet beträgt  $10 \times 10\text{mm}^2$ .

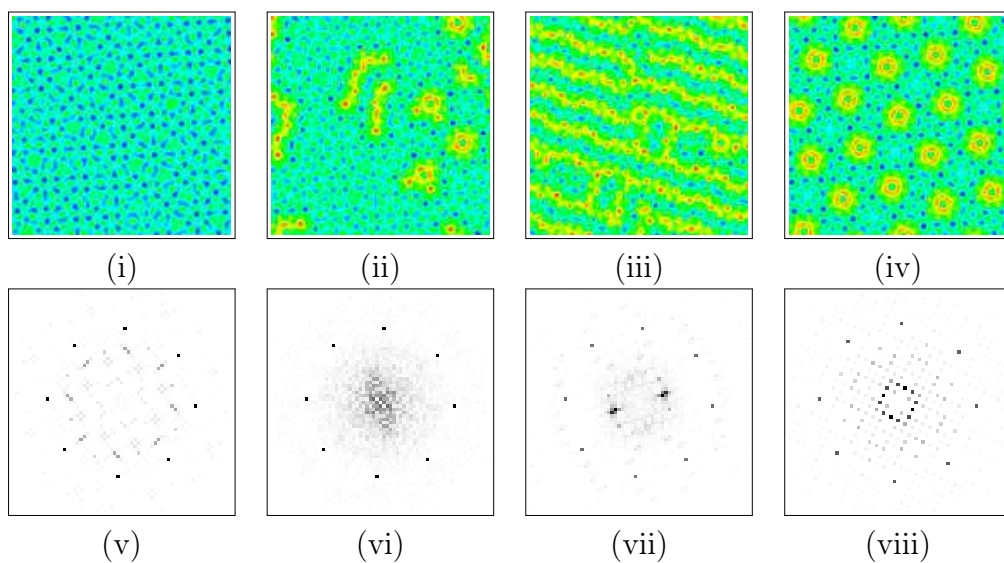
bis zum stationären Zustand entwickelt. Die Intensität in der zweiten Zelle wird in diesem Fall nicht reduziert. In den Darstellungen ist die zweite Zelle standardmäßig auf positive Hexagone eingestellt. Analog zu diesen Mustern existieren natürlich auch diejenigen mit einer Inversen Verteilung der Orientierung, wenn negative Hexagone voreingestellt werden.

Werden beide Zellen knapp oberhalb der kritischen Grenze der Musterinstabilität betrieben, dann bilden sich bei hohen Kopplungsraten  $s > 1.0$  in einem weiten Bereich der Verstimmung  $\bar{\Delta}$  Domänenstrukturen und labyrinthartige Strukturen. In Abb. 5.37 ist der Existenzbereich der Domänen gegen die Verstimmung aufgetragen. Für den gesamten Bereich der Verstimmung ist die Intensität der Zellen konstant gehalten. Unterhalb der Domänenbildung bildet sich in der zweiten Zelle ein  $8f(II) + 8f(I)$  Muster aus (Abb.5.38i,v). Auf den Längenskalen beider Zellen existieren also  $8f$  Muster, wobei der Mittelwert durch die  $\lambda/8$  Konfiguration in der zweiten Zelle ungleich Null ist. Die Orientierung der zweiten Zelle befindet sich dabei im gesamten Muster im Bereich des positiven Astes. Wird die Kopplung über einen kritischen Wert erhöht, dann bilden sich Teile des Musters auf dem gegenüberliegenden Ast aus, es entstehen Domänen, 5.38ii,vi. Dabei wird der  $8f(II)$  Anteil des Musters zerstört und es liegt ein reines  $8f(I)$  Muster auf zwei verschiedenen Ästen vor. Die Domänen bestehen dabei aus zwei Komponenten, (i) langezogene relativ gerade Teilstücke und (ii) eng begrenzte kreisförmige Abschnitte deren Orientierung auf dem jeweils anderen Ast liegen. Eine Domänenstruktur in der nur die kreisförmigen Komponenten vorkommen ist 5.38iv,viii dargestellt.

Oberhalb der kritischen Kopplung entstehen dabei zunächst kleine Domänen, bestehend aus kleinen geraden Teilstücken oder einzelnen Kreisen. Wird die Kopplung erhöht, dann werden die Teilstücke länger und/oder die Anzahl wird erhöht. Die Kreise bilden dabei zum Teil den Ausgangspunkt von geraden Teilstücken. Eine weitere Erhöhung der Intensität lässt die geraden Teilstücke wachsen und der Platz für die Kreise schwindet, bis die geraden Stücke sich labyrinthartig verzweigen und Kreise nur vereinzelt zu finden sind.



**Abbildung 5.37:** Existenzbereich der Domänen in der Konfiguration L4.L8. Die Intensität ist dabei über den gesamten Bereich  $I_{0I} = 300\text{mW}$  und  $I_{0II} = 350\text{mW}$ . Parameter: siehe Abb. 5.1.



**Abbildung 5.38:** Verlauf der Bildung von Domänen vom  $8f(II) + 8f(I)$  Muster bis zu labyrinthartigen Strukturen. (i) Ausbildung von  $8f(II) + 8f(I)$  Muster bei  $s = 2.2$ , (ii) Ausbildung von Domänen  $D$  bei  $s = 2.5$  und (iii) labyrinthartige Struktur bei  $s = 3.0$ . (Parameter :  $\bar{\Delta} = 6.0$ ,  $I_{0I} = 300\text{mW}$  und  $I_{0II} = 290\text{mW}$ ). (iv) Reine Domänenstruktur (Parameter :  $\bar{\Delta} = 5.5$ ,  $I_{0I} = 355\text{mW}$  und  $I_{0II} = 345\text{mW}$ ). Parameter der Zellen: siehe Abb. 5.1. Das Grundgebiet beträgt  $6 \times 6\text{mm}^2$ .





# Kapitel 6

## Solitonen in gekoppelten Systemen

In diesem Kapitel werden dissipative solitäre Strukturen in dem System mit  $\lambda/8$ -Plättchen diskutiert. In Abschnitt 6.1 wird zunächst eine Zelle besprochen und die auftretenden solitären Strukturen charakterisiert. Im Abschnitt 6.2 werden anschließend unidirektional gekoppelte Systeme besprochen und die Wechselwirkung zwischen solitären Strukturen diskutiert.

### 6.1 Solitonen in einer Zelle

In der Mathematik und der Physik existieren verschiedene Konzepte von solitären Strukturen. Als Soliton wird phänomenologisch eine Lösung einer nichtlinearen Gleichung (oder eines Systems), die

- eine Welle mit permanenter Form darstellt,
- lokalisiert ist oder
- mit anderen Solitonen wechselwirken kann und ihre Form behält,

bezeichnet [DJ89]. Solitonen dieser Art sind hauptsächlich in drei Arten von Gleichungen gefunden worden, der *Korteweg-de-Vries* Gleichung, der *nichtlinearen Schrödinger* Gleichung und der *sine-Gordon* Gleichung. Die Solitonen stellen Lösungen dieser Gleichungen in einer Dimension dar, die

sich bewegen und dabei formstabil bleiben. Solitonen in nichtlinearen dissipativen zweidimensionalen Systemen sind dabei eine Erweiterung dieses Begriffes und werden als *dissipative Solitonen* bezeichnet [AA05]. In einer nichtlinearen optischen Anordnung mit einer Rückkopplung werden transverse optische Solitonen auch als *Feedback-Solitonen* oder *Kavitäts-Solitonen* bezeichnet [AF05]. Ist in dieser Arbeit von Solitonen die Rede, sind damit immer *transversale dissipative Feedback-Solitonen* gemeint.

### 6.1.1 Bildung solitärer Objekte

Transverse dissipative solitäre Objekte existieren in verschiedenen Bereichen der nichtlinearen Optik [AF05, OSF01, SFAL00, NOTT95, PGWAL05]. Jedoch existieren bisher nur zwei bekannte Mechanismen, die zur Bildung der Solitonen führen. Der erste Mechanismus ist die Bildung eines Solitons im Bereich einer subkritischen Modulationsinstabilität [SFAL00, NOTT95, MPL97]. Ein homogener und ein musterbildender Zustand eines Systems sind in einem Parameterbereich bistabil. Die Verbindung zwischen diesen beiden Zuständen läuft über eine subkritische Bifurkation im Parameterraum. Das Soliton kann als einzelner lokalisierter Konstituent eines Musters mit oszillierenden Ausläufern angesehen werden. Das lokale Umschalten von homogenem zu gemustertem Zustand kann dabei auch zur Bildung von verschiedenen diskreten Solitonen mit unterschiedlichen radialen Oszillationen führen [MPL97]. Werden größere Bereiche eines Musters angeregt, kann das Muster als lokalisiertes Muster bezeichnet werden.

Der zweite Mechanismus ist die Bildung von Solitonen im Bereich einer optischen Bistabilität. Die Solitonbildung erfolgt durch die Bewegung einer Front [RK90, Pes06, PGWAL05, OSF01, SSM98] zwischen zwei homogenen Zuständen des Systems. Die Bistabilität des optischen Systems kann durch eine S-förmige Kennlinie [RK90] oder durch eine Pitch-Fork Bifurkation [Pes06, PGWAL05, OSF01, SSM98] erzeugt werden. Ist die Pitch-Fork Bifurkation leicht gestört, wird ein Ast bevorzugt und Solitonen können entstehen. Solitonen in dieser Arbeit werden durch diesen Mechanismus hervorgerufen [Pes06, PGWAL05].

Ist in einem System eine leicht gestörte Pitch-Fork Bifurkation zwischen zwei homogenen Zuständen existent, ist ein Zustand bevorzugt. Wird das System auf einen homogenen Zustand gebracht und lokal in einem kreisförmigen Bereich (mit Radius  $R$ ) auf den anderen Zustand geschaltet, dann existiert zwischen beiden Zuständen eine Front. Diese Front besitzt in opti-

schen Systemen radiale Oszillationen durch Beugung. In zwei Dimensionen besitzt diese Front eine Dynamik, welche durch eine Entwicklungsgleichung der Form [Pes06]

$$\frac{\partial}{\partial t} R(t) = -\gamma_c R + \gamma_i + \gamma'_i(R) \quad (6.1)$$

beschrieben werden kann. Der Parameter  $\gamma_i$  hängt von der Asymmetrie der Pitch-Fork Bifurkation ab und bestimmt die Geschwindigkeit einer geraden Front.  $\gamma_c$  hängt vom physikalischen System ab und beschreibt die Geschwindigkeit einer gekrümmten Front. Abhängig vom Vorzeichen von  $\gamma_c$  kann eine gekrümmte Front expandieren ( $\gamma_c < 0$ ) oder kontrahieren ( $\gamma_c > 0$ ). Die Auswirkungen der oszillatorischen Ausläufer der Front sind im Parameter  $\gamma'_i(R)$  enthalten. Gleichung (6.1) besitzt abhängig von der Wahl von  $\gamma'_i(R)$  für verschiedene Radien von Fronten stationäre stabile Werte. Diese stabilen Werte stehen für die verschiedenen Ordnungen stabiler Solitonen [Pes06].

Die Existenz einer Modulationsinstabilität ist nicht die Voraussetzung für die Bildung von Solitonen. Jedoch sind die Parameterbereiche, in denen verschiedene Solitonen gleichzeitig stabil sind, größtenteils oberhalb der Modulationsinstabilität [Pes06]. Die Parameter werden in dieser Arbeit so gewählt, dass viele verschiedene Solitonen zu einem Parametersatz stabil sind, um die Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Solitonen zu simulieren.

### 6.1.2 Solitärer Bereich

Solitonen können ober- und unterhalb der Grenze für die Modulationsinstabilität gezündet werden [Pes06]. Um Solitonen verschiedener Ordnung bei einem Parametersatz zu stabilisieren wird in dieser Arbeit die Absorption des Mediums gegenüber [Pes06] heruntergesetzt. Dies ist gleichbedeutend mit einer geringeren Partikeldichte in der Zelle. Die Grenzen der Solitonen verschieben sich daher nach oben und liegen größtenteils oberhalb der Grenze für die Modulationsinstabilität des favorisierten Astes, welcher bei kleineren Intensitäten instabil wird.

Für die lineare Stabilitätsanalyse (vgl. Abschnitt 3.5) wird die vollständige Differentialgleichung um den homogenen Zustand in eine Taylorreihe entwickelt. Als Entwicklungsparameter dient eine kleine Störung, das Variationsfeld. Das Variationsfeld kann in Fourierkomponenten zerlegt als  $\delta\phi_I = \sum_i q_i e^{\lambda_i t + i\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{r}} + c.c.$  geschrieben werden, da die entstehenden Muster regulär sind. Aus der Taylorentwicklung ergibt sich dann eine Differentialgleichung für den homogenen Zustand und eine Differentialgleichung für das Variationsfeld. Die Differentialgleichung für das Variationsfeld liefert

die Wachstumsraten  $\lambda_i$  der einzelnen Moden. Die Wachstumsraten sind alle identisch, wenn ein Muster mit nur einer Längenskala angesetzt wird.

Die Differentialgleichung für den homogenen Zustand lautet, wie schon in Gleichung (5.25) beschrieben

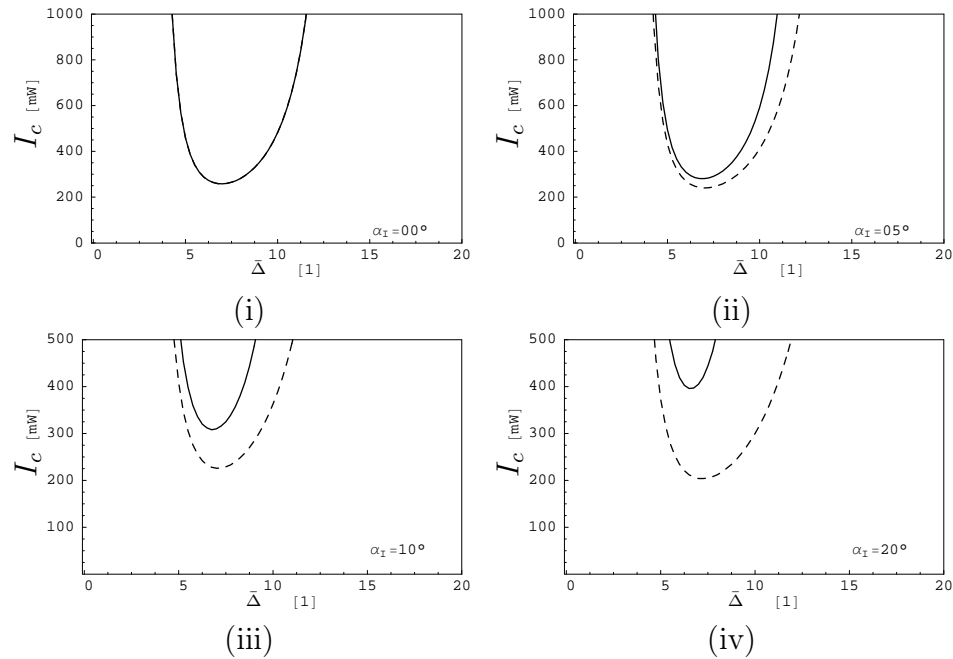
$$\begin{aligned} \phi_I^{h'}(t) = & -\gamma\phi_I^h \\ & + \frac{FI_{0I}R_I(F \cosh(2\alpha_0L_I\phi_I^h) - 1) \sin(2(\alpha_I - \alpha_0\bar{\Delta}L_I\phi_I^h))}{2\alpha_0L_I} \\ & - \frac{FI_{0I}(2 \sinh(2\alpha_0L_I\phi_I^h) + FR_I \sinh(4\alpha_0L_I\phi_I^h))}{4\alpha_0L_I}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Diese DGL besitzt schon für kleine Intensitäten  $I_{0I} \ll I_{Ic}$  zwei stabile Zustände, einen positiven und einen negativen. Der homogene Zustand unterläuft einer Pitch-Fork-Bifurkation, wobei der Winkel  $\alpha_I$  als Störparameter fungiert. Sobald der Winkel ungleich Null ist, liegt eine gestörte Pitch-Fork-Bifurkation vor und einer der Äste wird bevorzugt. Der Verlauf der Lösung des homogenen Zustandes ist in Abb. 5.11 für verschiedene Winkel  $\alpha_I$  dargestellt.

Die musterbildende Bifurkation kann durch die lineare Stabilitätsanalyse bestimmt werden. Wird die volle Gleichung (3.73) um den Zustand  $\phi_I^h$  linearisiert, ergibt sich als Differentialgleichung für das Variationsfeld (vgl. A.1.2). Für die Wachstumsrate einer kleinen Störung folgt damit

$$\begin{aligned} \lambda_I = & -\gamma - D_{\text{diff}}k^2 - \frac{1}{2}I_{0I}R_1F^2 + I_{0I}R_I \sinh(2\alpha_0L_I\phi_I^h) \\ & \left( \sin(2(\alpha_I - \alpha_0\bar{\Delta}L_I\phi_I^h)) - \text{CS} \left( \frac{d_Ik^2}{k_0} \right) \sinh(2\alpha_0L_I\phi_I^h) \right) F^2 \\ & - \frac{1}{2}I_{0I}(2 \cosh(2\alpha_0L_I\phi_{h1}) + FR_1 \cosh(4\alpha_0L_I\phi_I^h))F \\ & - I_{0I}FR_I \cos(2(\alpha_I - \alpha_0\bar{\Delta}L_I\phi_I^h))(F \cosh(2\alpha_0L_I\phi_I^h) - 1)\text{SC} \left( \frac{d_Ik^2}{k_0} \right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Sobald der Eigenwert  $\lambda_I$  größer Null wird, setzt ein Musterbildungsprozeß ein und hexagonale Strukturen entstehen. Da der Winkel die Pitch-Fork-Bifurkation des homogenen Zustandes stört, besitzen die beiden Äste unterschiedliche Grenzen, an denen der Musterbildungsprozeß einsetzt, und ein Ast wird favorisiert. Der Verlauf der minimalen Intensität gegen die Verstimmung ist in Abb. 6.1 dargestellt. Wenn der Winkel gleich Null ist (i), sind beide Grenzen identisch. Ist der Winkel ungleich Null (ii-iv), unterscheiden sich die Grenzen. Innerhalb dieser Region, in der auf dem einen



**Abbildung 6.1:** Minimale Intensität gegen die Verstimmung mit  $\lambda/8$ -Plättchen im System (—  $\phi_I^h > 0$ , - -  $\phi_I^h < 0$ ). Der Winkel  $\alpha_I$  variiert dabei (i)  $\alpha_I = 0^\circ$ , (ii)  $\alpha_I = 5^\circ$ , (iii)  $\alpha_I = 10^\circ$  und (iv)  $\alpha_I = 20^\circ$ . Im Bereich zwischen den Kurven können solitäre Objekte gezündet werden. Parameter:  $L_I = L_{II} = 0.015\text{m}$ ,  $d_I = d_{II} = 0.088\text{m}$ ,  $N_{Na} = 2.6 \cdot 10^{19}\text{m}^{-3}$ ,  $\Gamma_2 = 9.9 \cdot 10^9\text{s}^{-1}$ ,  $\gamma = 200\text{s}^{-1}$ ,  $D = 250\text{mm/s}^2$ . Das Grundgebiet ist  $8 \times 8\text{mm}^2$

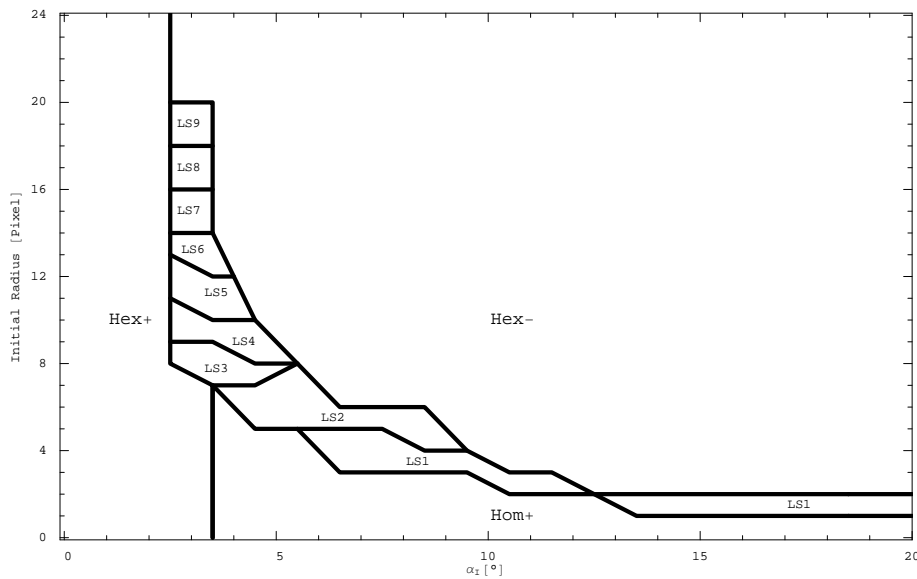
Ast Musterbildung existiert und auf dem anderen der homogene Zustand bevorzugt wird, können die solitären Objekte gezündet werden. Diese Region ist der Bereich zwischen der gestrichelten und der durchgezogenen Linie in Abb. 6.1.

### 6.1.3 Zünden der solitären Objekte

Innerhalb des solitären Bereiches können die solitären Objekte gezündet werden. Der Zündvorgang besteht darin, einen Gauß-Puls

$$I(\mathbf{r}_\perp) = A \exp\left(-\frac{(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (6.4)$$

in die Zelle einzukoppeln. Als Maß für die Breite des Gauß-Pulses dient die Standardabweichung  $\sigma$ , hier auch Radius genannt. Der Ort, an dem der Puls gezündet wird, ist hierbei  $\mathbf{r}_0$ . Wenn die solitären Objekte gezündet

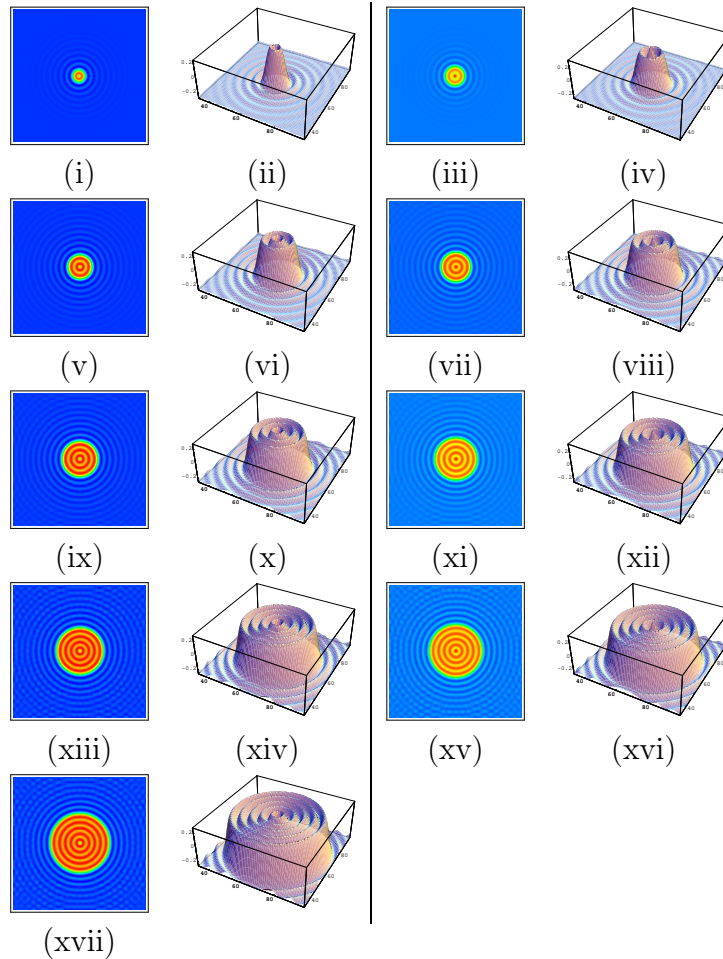


**Abbildung 6.2:** Übersicht der verschiedenen stabilen Solitonen zu einer festen Intensität von  $I_{0I} = 300\text{mW}$ . Neun verschiedene Objekte sind im Bereich von 3-14 Grad bei diesem Parametersatz stabil. In dieser Übersicht entspricht  $1\text{Pixel} \hat{=} 0.0625\text{mm}$ . Parameter: siehe Abb. 6.1 und  $\bar{\Delta} = 6.0$ .

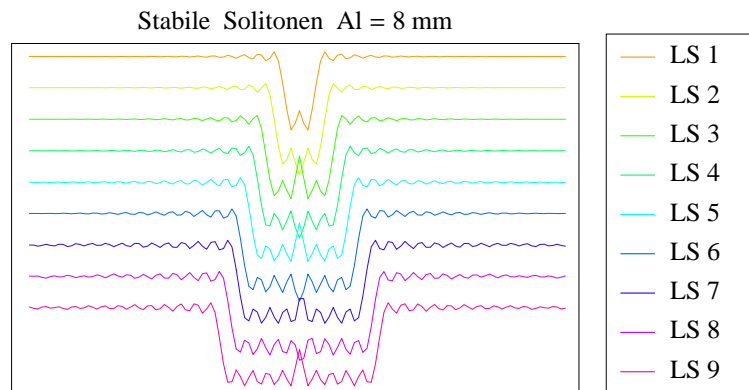
sind, kann der Puls entfernt werden und die entstehenden Strukturen sind räumlich und zeitlich stabil.

### 6.1.4 Verschiedene solitäre Objekte

Die Wahl des Radius  $\sigma$  bestimmt, ob ein Anfangspuls wächst, erlischt oder stationär (solitär) bleibt. Für Winkel zwischen 3 und 14 Grad sind verschiedene solitäre Objekte je nach Radius des Gauß-Pulses stationär. Im Ganzen können neun verschiedene solitäre Objekte angesteuert werden. In Abb. 6.2 ist eine Stabilitätsübersicht der solitären Objekte dargestellt. Der homogene Untergrund der solitären Objekte ist immer positiv, wenn der Winkel positiv ist. Diese Solitonen werden im Folgenden *positive* Solitonen genannt. Äquivalent gibt es dazu solitäre Objekte mit negativem Untergrund, wenn der Winkel negativ ist. Diese Solitonen werden im folgenden *negative* Solitonen genannt. Die in Abb. 6.2 eingezeichneten solitären Objekte, gekennzeichnet mit LS 1 - LS 9 sind in Abb. 6.3 im 2D- und 3D-Ortsraum dargestellt. In Abb. 6.4 sind von allen solitären Objekten Schnitte durch deren Mittelpunkt dargestellt. Der Peak in der Mitte wechselt von Ordnung zu Ordnung das Vorzeichen und die Anzahl der Nebenextrema nimmt zu. Die Solitonen sind



**Abbildung 6.3:** Übersicht über die verschiedenen stabilen solitären Objekte im  $\lambda/8$ -System. (i-ii) LS 1, (iii-iv) LS 2, (v-vi) LS 3, (vii-viii) LS 4, (ix-x) LS 5, (xi-xii) LS 6, (xiii-xiv) LS 7, (xv-xvi) LS 8 und (xvii-xviii) LS 9. Parameter: siehe Abb. 6.1.



**Abbildung 6.4:** 1D-Schnitt durch die verschiedenen stationären stabilen solitären Objekte im  $\lambda/8$ -System. Die Schnitte sind gegeneinander verschoben um sie besser darzustellen. Parameter: siehe Abb. 6.1.

in der Abbildung gegeneinander verschoben um eine bessere Übersichtlichkeit zu gewährleisten.

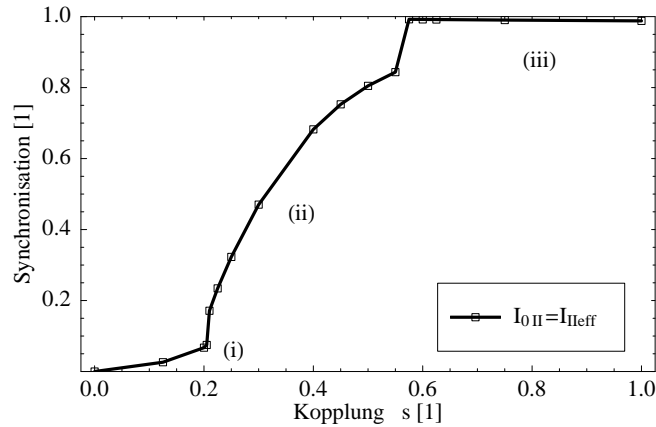
## 6.2 Solitonen in unidirektional gekoppelten Systemen

Solitonen werden in der Literatur als mögliche *Bits* oder auch *Pixel* in optischen Systemen bezeichnet [AF05, FS96, BTB<sup>+</sup>02]. Sollen die Bits optisch übertragen werden, müssen mindestens zwei Systeme, die diese Bits enthalten können, gekoppelt werden. Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, was mit den Solitonen passiert, wenn sie in andere Systeme übertragen und miteinander gekoppelt werden.

### 6.2.1 Übertragung von Solitonen

Die Übertragung von Solitonen spielt eine große Rolle, wenn die Solitonen als Bits eingesetzt werden. Bei der Übertragung von Solitonen in dieser Arbeit wird vorausgesetzt, dass beide Zellen identisch sind. Die Bedingungen sind so gewählt, dass ein LS1 Soliton auf einem homogenen Untergrund stabil ist. Das LS1 Soliton ist in dieser Konfiguration das einzige stabile Soliton. Der Winkel ist hierzu auf  $\alpha_I = 10^\circ$ , die Verstimmung ist  $\bar{\Delta} = 6.0$  und die





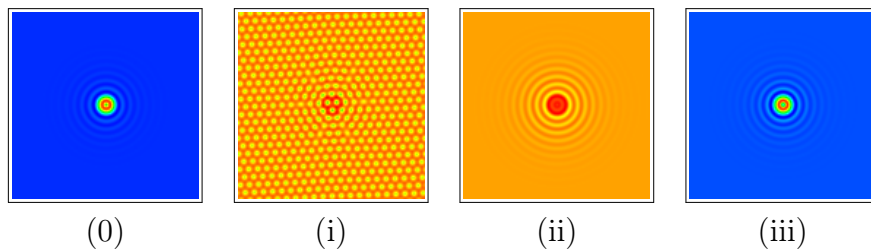
**Abbildung 6.5:** Übertragung eines LS1 Solitons auf eine zufällige Anfangsbedingung mit effektiver Intensität in der zweiten Zelle. Die Regime (i-iii) kennzeichnen die Bilder in Abb. 6.6. Parameter: siehe Abb. 6.1 und  $\alpha_I = 10^\circ$ ,  $\bar{\Delta} = 6.0$ ,  $I_I = I_{II} = 300\text{mW}$

Intensitäten der Zellen sind auf  $I_I = I_{II} = 300\text{mW}$  gewählt. Die Zellen sind im bistabilen und solitären Bereich. Auf dem positiven Ast ist der homogene Zustand stabil und auf dem negativen Ast der hexagonal gemusterte Zustand. Zunächst wird ein LS1 Soliton in der ersten Zelle auf eine zufällige Anfangsbedingung in der zweiten Zelle übertragen, die Kopplungsrate ist variabel. Dabei wird die reduzierte Intensität

$$I_{II\text{red}} = I_I(1 - s \exp(-2\alpha_0 L_I)) \quad (6.5)$$

benutzt, um die Gesamtintensität in der zweiten Zelle nahezu konstant zu halten. In Abb. 6.5 ist die Synchronisationsrate gegen die Kopplung aufgetragen. Das Soliton wird bei kleinen Kopplungen  $s < 0.205$  in die zweite Zelle eingepreßt und lässt Hexagone entstehen. Eine Erhöhung der Kopplung bis  $s < 0.575$  führt zum Unterdrücken der Hexagone, das Soliton ist auf dem negativen Ast eingepreßt. Ausschalten der Kopplung führt zum Erlöschen des Solitons. Oberhalb dieser Grenze schaltet die zweite Zelle auf den positiven Ast und das Soliton wird vollständig übertragen. Auch nach dem Ausschalten der Kopplung bleibt das Soliton stabil. Die Orientierung der Zellen ist in Abb. 6.6 dargestellt.

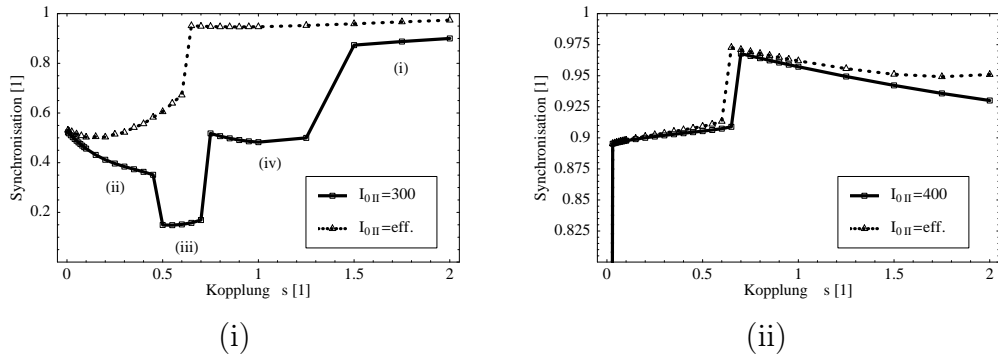
Ist in der zweiten Zelle als Anfangsbedingung der positive Ast eingestellt, ist in der zweiten Zelle der positiv homogene Zustand stabil. Abhängig von der Wahl der Intensität in der zweiten Zelle ergeben sich zwei Szenarien.



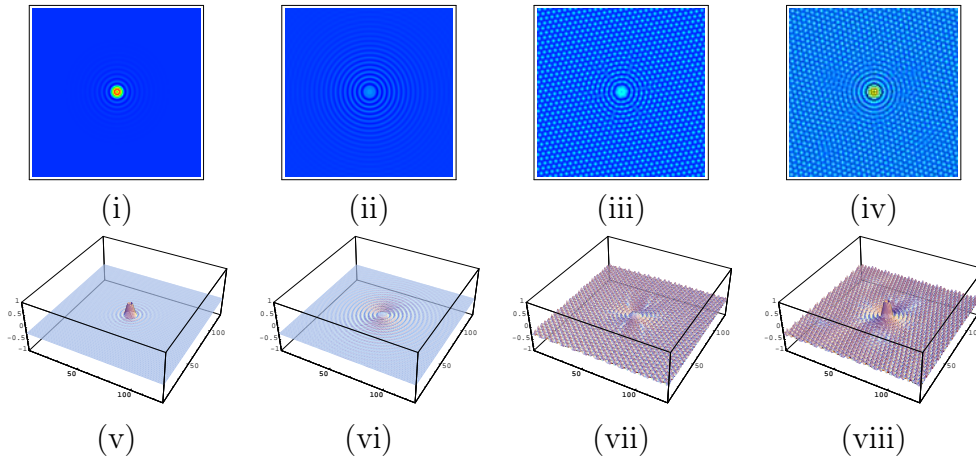
**Abbildung 6.6:** Übertragung eines LS1 Solitons auf eine zufällige Anfangsbedingung. (0) LS1 Soliton in Zelle  $I$ , (i) Negative Hexagone mit eingepprägtem Soliton in Zelle  $II$ , (ii) das eingepprägte Soliton in Zelle  $II$  unterdrückt die Hexagone, (iii) das Soliton wird vollständig übertragen und ist nach ausschalten der Kopplung stabil. Parameter: siehe Abb. 6.1.

Wird die reduzierte Intensität  $I_{I\text{red}}$  in die zweite Zelle eingestrahlt, wird das Soliton schon bei sehr geringer Kopplung in die zweite Zelle eingepragt und wächst bei steigender Kopplung dort stetig weiter bis die Amplitude des übertragenen Solitons bei  $s = 0.65$  groß genug ist in der zweiten Zelle ein stabiles Soliton zu induzieren, Abb. 6.7,6.8. Wird die Intensität in der zweiten Zelle nicht verändert, ist also immer gleich groß wie in der ersten Zelle, bilden sich ab einer Kopplung von  $s = 0.50$  Hexagone aus, auf denen zusätzlich das Soliton eingepragt wird. Die Intensität der zweiten Zelle wird so groß, das die zweite Zelle instabil (überkritisch) wird. Ab einer Kopplung von  $s = 0.70$  wird das Soliton auf einem hexagonalem Untergrund übertragen. Eine weitere Erhöhung der Kopplung führt schließlich ab einer Kopplung von  $s = 1.50$  zur Unterdrückung der Hexagone und die zweite Zelle ist nahezu identisch zur ersten.

Wird in der ersten Zelle ein LS1 Soliton gezündet und die Intensität anschließend in den überkritischen Bereich ( $I_I = 400\text{mW}$ ) erhöht, bildet sich neben dem Soliton ein hexagonaler Untergrund aus. Die Orientierung verhält sich wie in Abb. 6.8iv,viii. In Abb. 6.7ii ist der Synchronisationswert bei der Übertragung eines Solitons mit hexagonal gemustertem Untergrund gegen die Kopplung dargestellt. Die zweite Zelle ist wieder identisch zur ersten, befindet sich also auch im überkritischen Bereich und ist ebenfalls hexagonal gemustert. Die Ausrichtung der Hexagone ist allerdings frei und im allgemeinen nicht identisch mit der Ausrichtung des hexagonalem Untergrundes in der ersten Zelle. Werden die Zellen gekoppelt, dann ergeben sich in diesem Fall für die reduzierte und die konstante Intensität in der zweiten Zelle nahezu identische Szenarien. Schon bei geringer Kopplung  $s \approx 0.03$  synchronisiert sich die Ausrichtung der Hexagone in beiden Zellen. Das So-



**Abbildung 6.7:** Transmission eines LS1 Solitons mit homogenem (i) ( $I_I = 300\text{mW}$ ) und gemustertem (ii) ( $I_I = 400\text{mW}$ ) Untergrund. Die Regime (i-iv) in Teil (i) sind in Abb. 6.8 dargestellt. Parameter: siehe Abb. 6.1. Grundgebiet:  $12 \times 12\text{mm}^2$ .



**Abbildung 6.8:** Transmission eines LS1 Solitons mit homogenem Untergrund. (i) Anfangszustand in Zelle  $I$  und Endzustand in Zelle  $II$ , (ii) schwacher Abdruck des Solitons in Zelle  $II$   $s \leq 0.45$ , (iii) schwacher Abdruck des Solitons in Zelle  $II$  mit hexagonalem Untergrund  $s \leq 0.70$ , (iv) starker Abdruck des Solitons in Zelle  $II$  mit hexagonalem Untergrund  $s < 1.50$ . Bei reduzierter Intensität  $I_{II\text{red}}$  existiert nur das Regime (ii) mit stetig steigender Amplitude des Solitons. Parameter: siehe Abb. 6.1.

liten der ersten Zelle ist jedoch noch nicht in die zweite eingepägt. Wird die Kopplung erhöht, prägt sich das Soliton der ersten Zelle in die zweite ein. Die Orientierung der zweiten Zelle hat die Form wie in Abb. 6.8iii,vii. Ab einer Kopplung von  $s = 0.650$ , bei reduzierter Intensität ( $s = 0.700$  bei konstanter Intensität), wird das Soliton übertragen und bleibt auch nach Ausschalten der Kopplung stabil. Die Orientierung der zweiten Zelle hat dann die Form wie in der ersten Zelle, und die Synchronisation ist maximal.

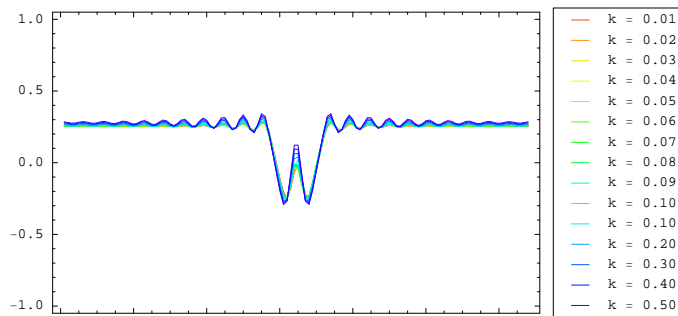
Solitonen können also von der Sender-Zelle in die Empfänger-Zelle übertragen werden. Das Soliton in der ersten Zelle erzeugt dabei wie ein Gauß-Puls in der zweiten Zelle ein lokales Umschalten der Orientierung, das in der Ausbildung eines Solitons in der zweiten Zelle resultiert, sobald die Kopplung stark genug ist.

### 6.2.2 Kopplung von Solitonen gleicher Ordnung

Neben der Übertragung spielt die Wechselwirkung der Solitonen untereinander eine entscheidende Rolle in gekoppelten Systemen. Die Wechselwirkung zwischen Solitonen gleicher Ordnung in unterschiedlichen Zellen wird untersucht, indem in jeder Zelle ein Soliton gezündet und beide anschließend miteinander gekoppelt werden. Der Parameterbereich wird so gewählt, dass die Solitonen alle auf einem homogenen Untergrund gezündet werden können. Die Ausrichtung der Solitonen, positiv oder negativ, wird dabei zusätzlich variiert. Aufgrund der nichtlokalen Wechselwirkung in dem betrachteten System werden die Abstände der gezündeten Solitonen variiert und, abhängig von der Kopplungsstärke, die stationären Zustände in der zweiten Zelle analysiert. Die Abstände zwischen den Solitonen beziehen sich auf die Mittelpunkte der Solitonen und werden ermittelt, indem der Ort des Solitons in jeder Zelle berechnet und die Differenz zwischen den Orten gebildet wird. Die Solitonen befinden sich hierbei jedoch nicht in derselben, sondern in verschiedenen Zellen.

#### Kopplung gleicher Ausrichtung

Um Solitonen gleicher Ausrichtung zu koppeln werden beide Zellen identisch eingestellt. Als  $\lambda$ -Plättchen wird ein  $\lambda/8$ -Wellenplättchen gewählt und die Winkel gegenüber der linearen Eingangspolarisation der Laser (aus der ersten und zweiten Zelle) sind gleich. Solitonen erster Ordnung werden bei einem Winkel von  $\alpha_{I,II} = 10^\circ$  und Solitonen höherer (zweiter, dritter und



**Abbildung 6.9:** Darstellung der Orientierung der stabilen Solitonen in der zweiten Zelle. Als Anfangsbedingung ist in beiden Zellen ein identisches LS1 Soliton gesetzt worden. Parameter wie in Abb. 6.1,  $\alpha_{I,II} = 10^\circ$ ,  $I_I = 300\text{mW}$   $I_{II} = I_{II\text{red}}$ .

vierter) Ordnung bei einem Winkel von  $5^\circ$  untersucht. Die reduzierte Intensität in der zweiten Zelle (6.5) gewährleistet eine nahezu konstante Gesamtintensität in der zweiten Zelle trotz Kopplung der Zellen.

Werden die Zellen mit identischen Solitonen an gleichen Orten in beiden Zellen gekoppelt, bewirkt die Kopplung in der zweiten Zelle nur eine unbedeutende Änderung des Solitons in der zweiten Zelle. In Abb. 6.9 ist ein Schnitt durch die Mitte eines LS1 Solitons, welches mit einem identischen LS1 Soliton gekoppelt ist, für verschiedene Kopplungen aufgetragen.

Dieses Bild ändert sich, wenn die Solitonen an unterschiedlichen Orten gezündet werden. Sobald das Soliton der zweiten Zelle außerhalb eines bestimmten Radius um den Ort des Solitons der ersten Zelle platziert wird, erlischt das zweite Soliton bei der Kopplung beider Zellen, wenn eine gewisse Kopplungsstärke überschritten wird. Der Radius, ab dem das Soliton erlischt, entspricht für Solitonen der ersten, dritten und vierten Ordnung ungefähr der Halbwertsbreite eines Solitons. Solitonen der zweiten Ordnung sind wesentlich instabiler und erlöschen schon nach ungefähr 60 % der Halbwertsbreite. Die maximale Kopplung, ab der das Soliton erlischt, ist ebenfalls wesentlich geringer als bei den anderen Ordnungen. Eine Übersicht der Werte für die verschiedenen Ordnungen ist in 6.1 gegeben.

Unterhalb der kritischen Kopplung, ab der die Solitonen in der zweiten Zelle verschwinden, sind verschiedene diskrete Abstände zwischen den Orten der Solitonen stabil. In Abb. 6.10 sind die stabilen Abstände der Solitonen für die verschiedenen Ordnungen dargestellt. Lediglich für Solitonen zweiter Ordnung sind keine diskreten Abstände aufgrund der geringen Kopplung

Soliton	Halbwertsbreite [mm]	Max. Abstand [mm]	Max. Kopplung [1]
LS1	0.707	0.750	0.028
LS2	1.010	0.656	0.006
LS3	1.428	1.406	0.016
LS4	1.779	1.781	0.016

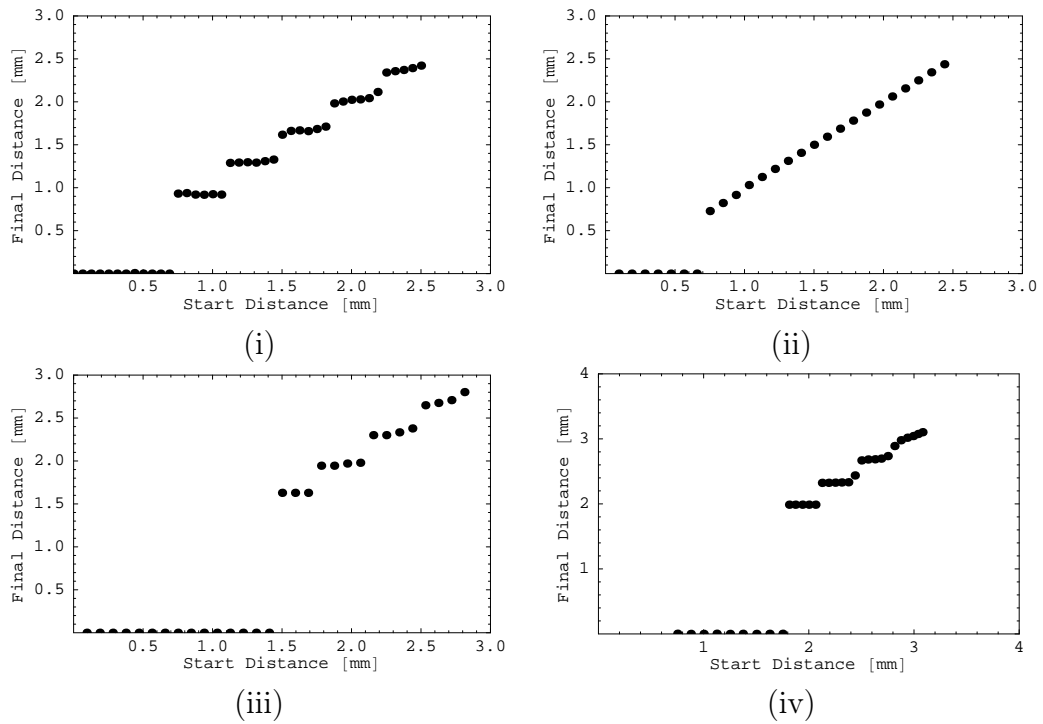
**Tabelle 6.1:** Ordnung der Solitonen, Halbwertsbreiten, maximaler Abstand und maximale Kopplung bis das Soliton in der zweiten Zelle erlischt. Parameter wie in Abb. 6.1 (LS1)  $\alpha_{I,II} = 10^\circ$ , (LS2,3,4)  $\alpha_{I,II} = 5^\circ$ ,  $I_I = 300\text{mW}$   $I_{II} = I_{II\text{red}}$ .

stabil. Werden die Solitonen zweiter Ordnung weiter als 60 % der Halbwertsbreite eines Solitons voneinander gezündet, ist die Wechselwirkung zwischen ihnen so schwach, dass das Soliton in der zweiten Zelle die Position nicht verändert.

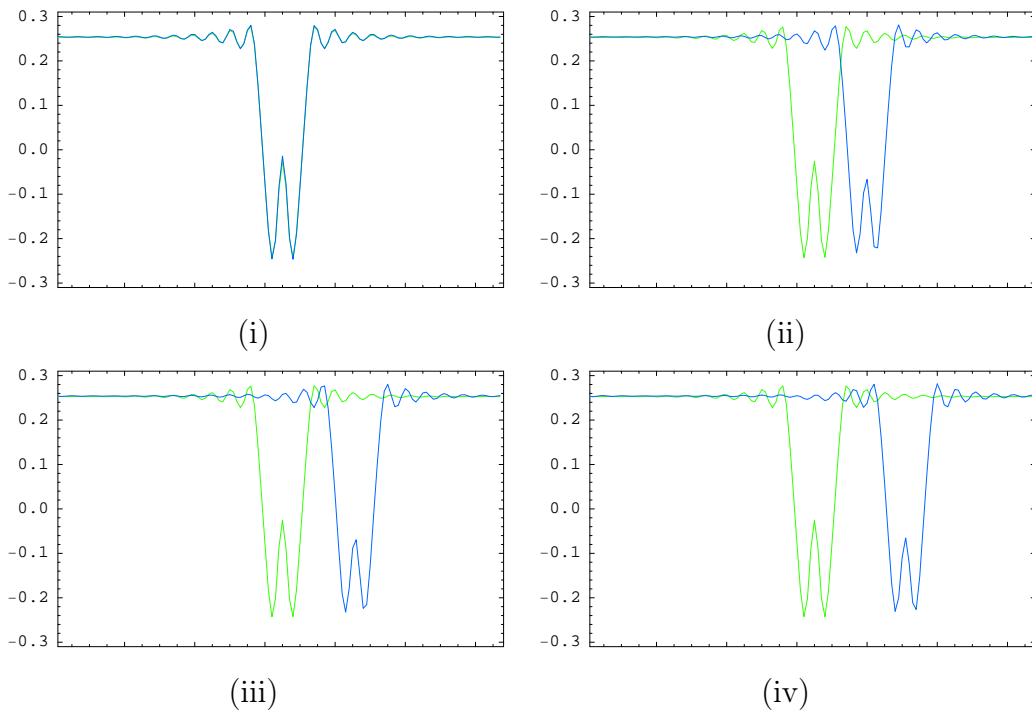
Die Solitonen der ersten, dritten und vierten Ordnung bilden diskrete stabile Abstände zwischen den jeweiligen Anfangspositionen aus. Unterhalb der Halbwertsbreite wirkt die Wechselwirkung dabei anziehend. Das Soliton der zweiten Zelle bewegt sich auf die Position des Solitons der ersten Zelle zu. Wird die Distanz zwischen den Anfangspositionen der Solitonen größer, bilden sich stabile Abstände aus, die durch die oszillatorischen Ausläufer bestimmt werden. Die Solitonen stellen sich so ein, dass die Maxima des Solitons in der ersten Zelle mit den Minima des Solitons in der zweiten Zelle korrespondieren. In Abb. 6.11 sind 1D-Schnitte durch die Verbindungslinie der Solitonen für die einzelnen Zellen dargestellt. Da bei den Solitonen die stabilen Abstände durch die oszillatorischen Ausläufer bestimmt werden [Pes06], existiert bei genügend hoher Kopplung eine endliche Anzahl diskreter, stabiler Abstände. In Abb. 6.12 sind 1D-Schnitte durch LS1 Solitonen oberhalb der kritischen Kopplung dargestellt und zeigen ein Erlöschen der Solitonen, wenn die Distanz zwischen den Anfangspositionen größer als eine Halbwertsbreite wird.

### Kopplung unterschiedlicher Ausrichtung

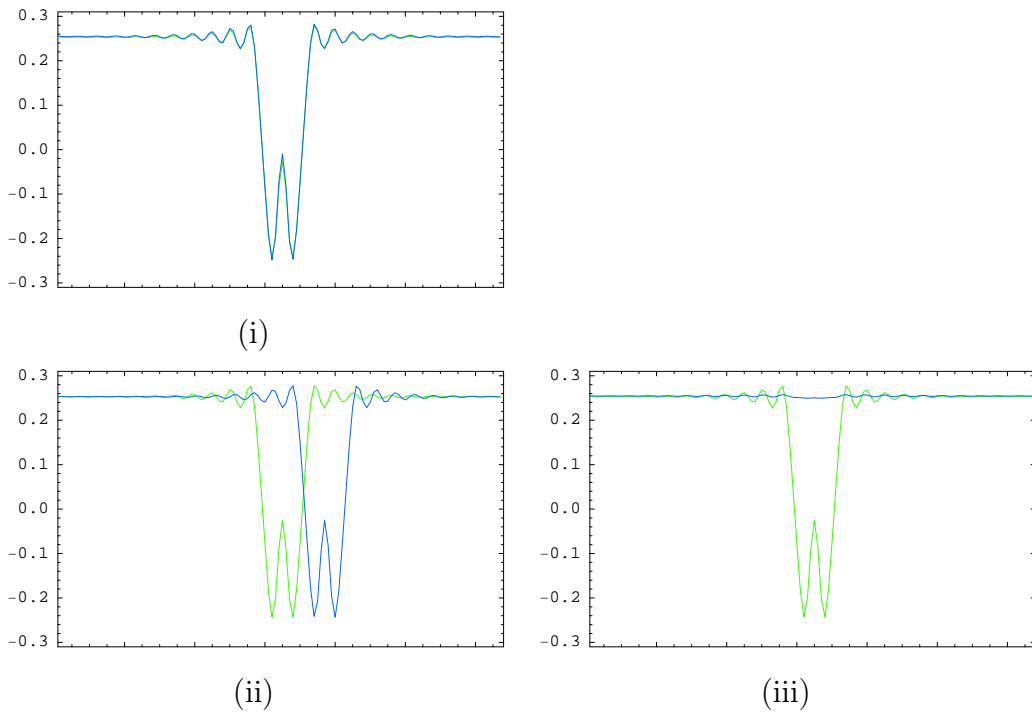
Für die Kopplung von Solitonen unterschiedlicher Ausrichtung werden in beiden Zellen wieder  $\lambda/8$ -Plättchen eingebracht. Im Gegensatz zur Kopplung von Solitonen gleicher Ausrichtung werden die Winkel in beiden Zellen jedoch nicht gleich, sondern invers zueinander eingestellt, es gilt also  $\alpha_I = -\alpha_{II}$ . Beide Zellen besitzen damit die gleichen Stabilitätseigenschaften, befinden sich jedoch auf den beiden unterschiedlichen Ästen der Pitch-



**Abbildung 6.10:** Stabile Abstände von zwei gekoppelten Solitonen. (i) LS1 positiv - LS1 positiv  $s = 0.020$ , (ii) LS2 positiv - LS2 positiv  $s = 0.004$ , (iii) LS3 positiv - LS3 positiv  $s = 0.014$  und (iv) LS4 positiv - LS4 positiv  $s = 0.014$ . Parameter wie in Abb. 6.1 (LS1)  $\alpha_{I,II} = 10^\circ$ , (LS2,3,4)  $\alpha_{I,II} = 5^\circ$ ,  $I_I = 300\text{mW}$   $I_{II} = I_{II\text{red}}$ .



**Abbildung 6.11:** Darstellung von 1D-Schnitten der stabilen Abstände von gekoppelten positiven LS1 Solitonen aus Abb. 6.10i. (Grün = Zelle *I*, blau = Zelle *II*)



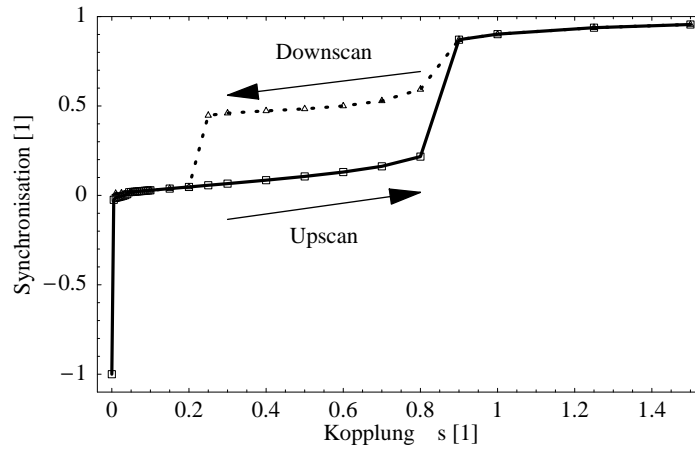
**Abbildung 6.12:** (i,ii) 1D-Schnitte der stabilen Abstände für die Kopplung zweier positiver LS1 Solitonen oberhalb der kritischen Kopplung von  $s = 0.028$ . (ii) Startabstand der Solitonen oberhalb dessen das Soliton in der zweiten Zelle erlischt. (Grün = Zelle *I*, blau = Zelle *II*)



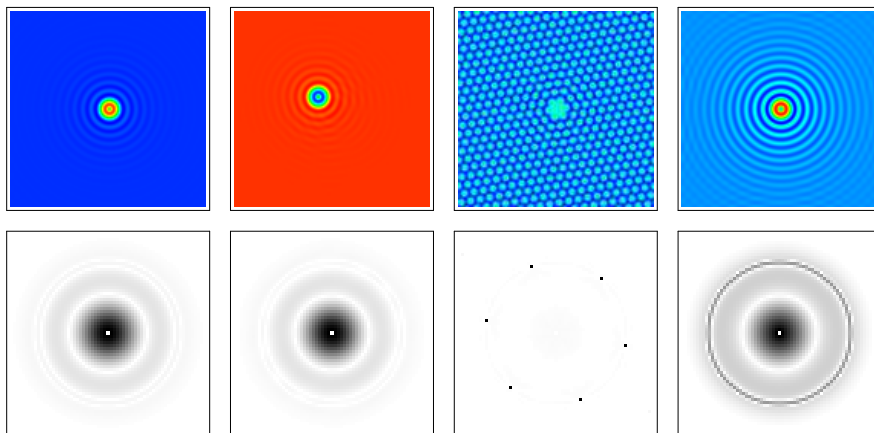
Fork Bifurkation einer  $\lambda/8$ -Zelle. Die invers zueinander eingestellten Winkel bewirken, dass in der einen Zelle ein positives und in der anderen Zelle ein negatives Soliton gezündet werden kann. Eine Zelle befindet sich dann auf dem positiven Ast und die andere auf dem negativen Ast der Pitch-Fork Bifurkation.

In Abb. 6.13 ist der Verlauf der Synchronisation der Zellen gegen steigende und fallende Kopplung gezeigt. In der Simulation wird dazu ein positives mit einem negativem LS1 Soliton gekoppelt, dabei werden beide Solitonen am gleichen Ort in der jeweiligen Zelle gezündet. Eine Übersicht der entstehenden Muster ist in Abb. 6.14 dargestellt. Bei kleinen Kopplungen  $s < 0.045$  wird das Soliton in der zweiten Zelle (ii,vi) von dem in der ersten Zelle (i,v) weggedrückt. Das Soliton in der zweiten Zelle bleibt jedoch stabil. Die Synchronisation geht dabei von minus Eins (invertiertes Muster) auf ungefähr Null. Eine Erhöhung der Kopplung führt dazu, dass die gesamte zweite Zelle auf den positiven Ast umschaltet und Hexagone ausbildet. Die Kopplung der Zellen führt dazu, dass das Soliton der ersten Zelle in das hexagonale Muster eingepreßt wird (iii,vii). Bis zu einer Kopplung von  $s < 1.0$  wächst die Amplitude des eingepreßten Solitons langsam. Überschreitet die Kopplung den Wert  $s = 1.0$  wächst die Amplitude schlagartig und das Soliton ist übertragen (iv,viii). Das übertragene Soliton ist in diesem Fall ohne Kopplung instabil, die Kopplung bewirkt, dass das Soliton nicht zerfällt. Das übertragene Soliton bleibt dann, wenn die Kopplung verringert wird, bis zu einer Kopplungsrate von  $s = 0.25$  stabil. Unterhalb dieser Kopplung erlischt das Soliton und der stabile Zustand ist ein hexagonales Muster. Das aus der ersten Zelle eingepreßte Soliton hat bei dieser Kopplungsrate nicht mehr die „Kraft“, das metastabile Soliton in der zweiten Zelle aufrecht zu erhalten.

Bei der Kopplung von Solitonen gleicher Ordnung aber unterschiedlicher Ausrichtung existiert eine Maximalkopplung, ab der das Soliton in der zweiten Zelle zerstört wird. Der Ort des Solitons in der zweiten Zelle spielt dabei keine Rolle. In dem Fall, dass die Solitonen an denselben Orten gezündet werden oder sich überlappen, wird durch die Kopplung das Soliton in der zweiten Zelle in einen stabilen Abstand zum ersten verschoben. Dieser Abstand ist so groß, dass die Solitonen sich nicht überlappen. Die Kopplungen ab der das Soliton der zweiten Zelle zerstört wird sind in Tabelle 6.2 dargestellt. Wird zum Beispiel ein negatives Soliton zerstört, wird die Zelle durch die Kopplung vom negativen Ast auf den positiven Ast umgeschaltet. Auf diesem Ast ist in den betrachteten Parameterbereichen ein hexagonales Muster stabil, weshalb bei der Zerstörung der Solitonen Hexagone entstehen. In einigen Fällen schaltet die Zelle nicht vollständig um. Es entsteht dann zu-



**Abbildung 6.13:** Synchronisationswert eines positiven LS1 Solitons gekoppelt mit einem negativen LS1 Soliton gegen die Kopplungsrate. Die entstehenden Muster in der zweiten Zelle sind in Abb. 6.14 dargestellt. Parameter:  $\bar{\Delta} = 6.0$ ,  $I_I = 300\text{mW}$   $I_{II} = I_{II\text{red}}$ ,  $\alpha_I = -\alpha_{II} = 10^\circ$



**Abbildung 6.14:** Orientierung in der ersten und zweiten Zelle. Von links nach rechts: LS1 Soliton in der ersten Zelle, verschobenes LS1 Soliton in der zweiten Zelle  $s < 0.045$ , Hexagone mit eingepprägtem Soliton  $0.045 < s < 1.0$ , übertragenes (instabiles) Soliton in der zweiten Zelle  $s > 1.0$ .

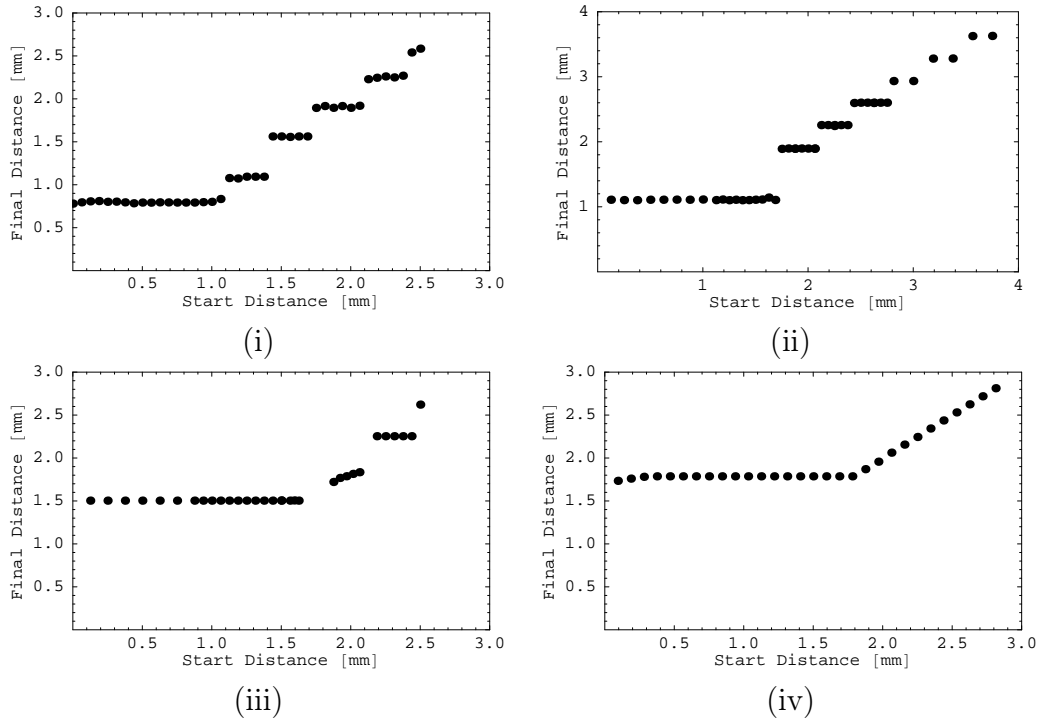
Soliton	Kopplung [1]
LS1	0.042
LS2	0.044
LS3	0.016
LS4	0.008

**Tabelle 6.2:** Minimale Kopplungen ab der das Soliton in der zweiten Zelle zerstört wird. Parameter wie in Abb. 6.1 (LS1)  $|\alpha_{I,II}| = 10^\circ$ , (LS2,3,4)  $|\alpha_{I,II}| = 5^\circ$ ,  $I_I = 300\text{mW}$   $I_{II} = I_{II\text{red}}$ .

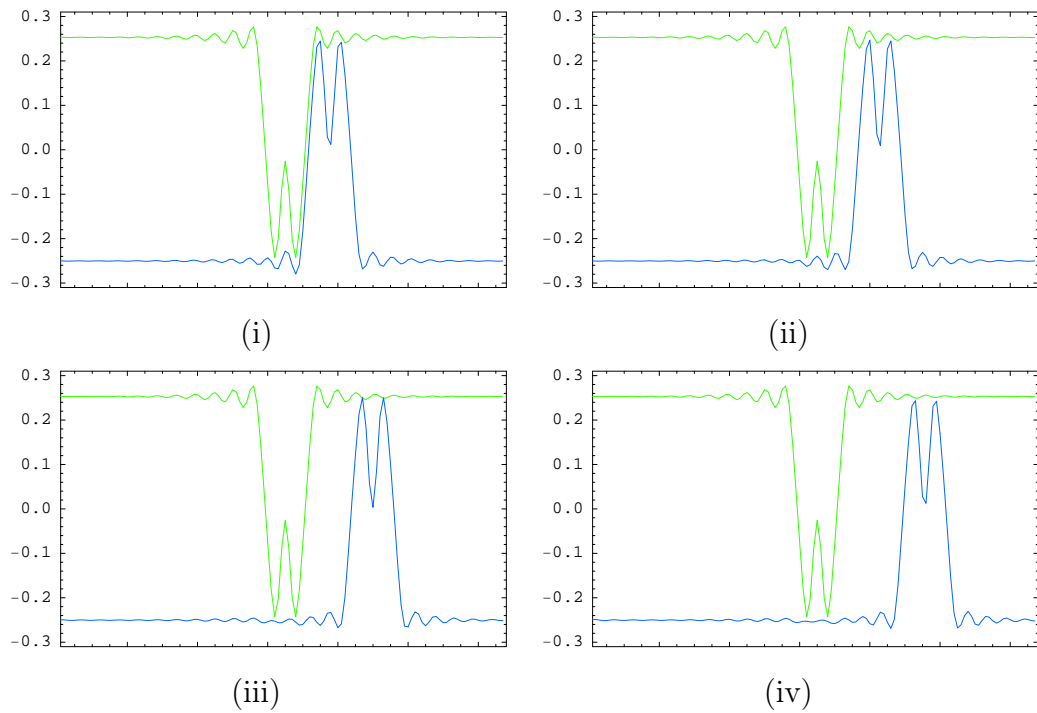
sätzlich eine Front, die den homogenen negativen Ast mit dem gemusterten positiven Ast verbindet.

Die Kopplungen, die zum Zerstören der Solitonen führen, sind für Solitonen der ersten und zweiten Ordnung am größten,  $s \approx 0.04$ . Diese Solitonen sind daher in der Konfiguration der Kopplung mit unterschiedlicher Ausrichtung am stabilsten. Die Solitonen dritter und vierter Ordnung sind am instabilsten und werden schon bei Kopplungen von ungefähr  $s \approx 0.01$  zerstört. Unterhalb der kritischen Kopplung bilden die Solitonen wie im Fall der gleichen Ausrichtung stabile diskrete Abstände aus. Lediglich für Solitonen der vierten Ordnung konnten keine stabilen Abstände, aufgrund der zu geringen Kopplungsrate, gefunden werden. In diesem Fall wird das Soliton in der zweiten Zelle von dem der ersten Zelle weggedrückt; ist die Position des zweiten allerdings schon außerhalb Halbwertsbreite des ersten, dann bleibt das Soliton an dem Platz an dem es gezündet wird. In Abb. 6.15 sind die stabilen Abstände der Solitonen bei unterschiedlicher Ausrichtung dargestellt. Bei allen Ordnungen werden die Solitonen der zweiten Zelle jeweils um genau eine Halbwertsbreite verschoben. 1D-Schnitte durch die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der Solitonen sind in Abb. 6.17 dargestellt. Sind stabile Abstände vorhanden, werden diese wieder durch die oszillatorischen Ausläufer bestimmt. In diesem Fall stellen sich die Solitonen so ein, dass die Maxima der zweiten Zelle mit den Maxima der ersten Zelle übereinstimmen, vgl. Abb. 6.15 und 6.17.

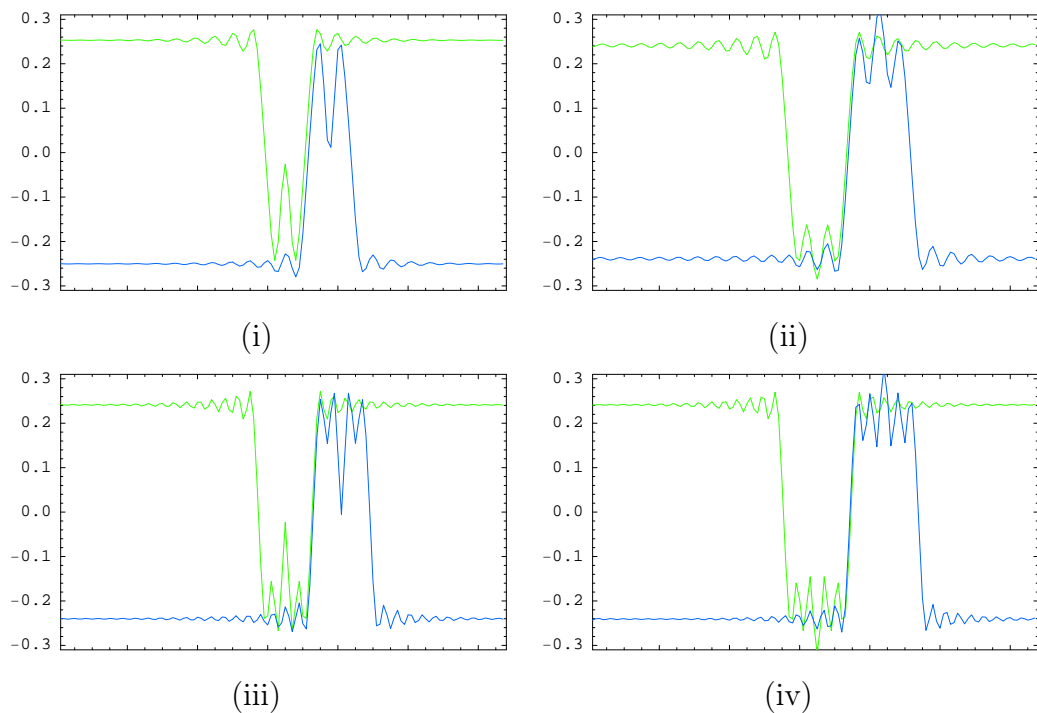
Die Kopplung von Solitonen gleicher und unterschiedlicher Ausrichtung führt in einem begrenzten Kopplungsbereich auf die Bildung von stabilen diskreten Abständen, wie dies auch schon für die Wechselwirkung von Solitonen in einer Zelle gezeigt wurde [Pes06]. Oberhalb dieser Kopplung führt die Wechselwirkung der Solitonen zu der Zerstörung der Solitonen in der Empfängerzelle. Das Soliton wird, im Fall gleicher Ausrichtung, entweder gelöscht oder die gesamte Zelle schaltet, im Fall unterschiedlicher Ausrich-



**Abbildung 6.15:** Stabile Abstände von zwei gekoppelten Solitonen unterhalb der kritischen Kopplung. (i) LS1 positiv - LS1 negativ  $s = 0.030$ , (ii) LS2 positiv - LS2 negativ  $s = 0.030$ , (iii) LS3 positiv - LS3 negativ  $s = 0.014$  und (iv) LS4 positiv - LS4 negativ  $s = 0.006$ . Parameter wie in Abb. 6.1 (LS1)  $|\alpha_{I,II}| = 10^\circ$ , (LS2,3,4)  $|\alpha_{I,II}| = 5^\circ$ ,  $I_I = 300\text{mW}$   $I_{II} = I_{II\text{red}}$ .



**Abbildung 6.16:** Darstellung von 1D-Schnitten der stabilen Abstände eines positiven LS1 mit einem negativen LS1 Soliton aus Abb. 6.15i. (Grün = Zelle *I*, blau = Zelle *II*)



**Abbildung 6.17:** 1D-Schnitte der stabilen Abstände für die Kopplung positiver und negativer Solitonen unterhalb der kritischen Kopplung. (i) LS1, (ii) LS2, (iii) LS3 und (iv) LS4. (Grün = Zelle *I*, blau = Zelle *II*)

tung, auf den anderen Ast der Pitch-Fork Bifurkation und bildet Hexagone aus.

### 6.2.3 Koppeln von Solitonen unterschiedlicher Ordnung

Da in diesem System eine ganze Familie von unterschiedlichen Solitonen stabil ist, können auch verschiedene Ordnungen der Solitonen gekoppelt werden. Die Parameter werden so gewählt, dass in jeder Zelle drei verschiedene Solitonen stabil sind. Dabei hat sich eine Konfiguration angeboten, in der ein LS2, ein LS3 und ein LS4 Soliton in einer Zelle gezündet werden kann. Die Kopplung der Solitonen erfolgt sowohl mit gleichem als auch mit unterschiedlichem homogenem Untergrund. So wird z.B. ein positives LS2 mit einem negativen LS3 oder einem positiven LS3 Soliton gekoppelt.

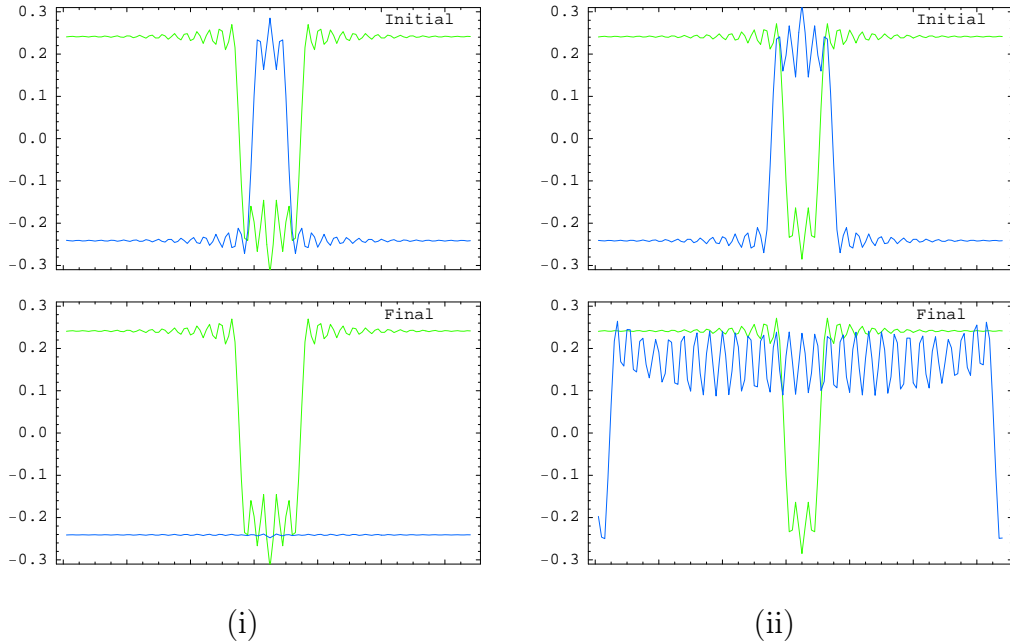
Die Kopplung von Solitonen gleicher Ordnung führt entweder auf die Bildung diskreter Abstände oder die Zerstörung des Solitons in der zweiten Zelle. Es sind also zwei verschiedene Mechanismen beobachtet worden. Werden Solitonen unterschiedlicher Ordnung gekoppelt, werden drei grundsätzliche Mechanismen beobachtet:

- Das Soliton in der zweiten Zelle verschwindet.
- Die Ordnung des Solitons in der zweiten Zelle gleicht sich der des ersten an.
- Das Soliton in der zweiten Zelle wird verschoben.

Die Kopplungsraten sind in jedem Fall sehr gering  $s < 0.05$ . Es können sich also wie im Fall der gleichen Ordnungen stabile Abstände ausbilden, bzw. das Soliton kann verschoben werden, das Soliton der zweiten Zelle kann die Form verändern, oder das Soliton der zweiten Zelle verschwindet. Im Folgenden werden die verschiedenen Fälle diskutiert und die Konfigurationen die zu den einzelnen Mechanismen führen, werden vorgestellt.

#### 6.2.3.1 Soliton in der zweiten Zelle wird zerstört

In allen Konfigurationen, in denen zwei unterschiedliche Solitonen in verschiedenen Ausrichtungen miteinander gekoppelt werden, werden die Solitonen zerstört. Als Beispiel wird die Kopplung eines positiven LS4 mit einem



**Abbildung 6.18:** Kopplung von verschiedenen Solitonen unterschiedlicher Ausrichtung. (i) LS4 positiv mit LS2 negativ, das LS2 in der zweiten Zelle wird zerstört. (ii) LS2 positiv mit LS4 negativ, die zweite Zelle schaltet auf den hexagonal gemusterten Zustand. Rechts und links sind die Ränder einer Front zu sehen. (Grün = Zelle I, blau = Zelle II) Parameter: siehe Abb. 6.1 und  $\bar{\Delta} = 6.0$ ,  $\alpha_I = -\alpha_{II} = 5^\circ$ ,  $I_I = 300\text{mW}$ ,  $I_{II} = I_{II\text{red}}$ .

negativen LS2 Soliton und eines positiven LS2 mit einem negativen LS4 Solitons in Abb. 6.18 dargestellt. Wird ein größeres Soliton in der ersten Zelle mit einem kleineren in der zweiten Zelle in unterschiedlichen Ausrichtungen gekoppelt, dann wird das Soliton in der zweiten Zelle zerstört und es bildet sich der homogene stabile Zustand heraus, Abb. 6.18i. Das Soliton wird auf diese Art und Weise gelöscht. Im Gegensatz zu der Kopplung gleicher Solitonen, bei denen das Soliton in der zweiten Zelle weggedrückt wird, kann das Soliton in der zweiten Zelle hier nicht wandern und wird daher zerstört. Wird ein kleineres mit einem größeren Soliton unterschiedlicher Ausrichtung gekoppelt, beginnt das größere Soliton zu expandieren und die gesamte Zelle schaltet auf den hexagonal gemusterten Ast um. Das Soliton ist dann zerstört und stabile Hexagone bilden sich aus. In einigen Fällen wurde jedoch nicht die gesamte zweite Zelle umgeschaltet, es bildete sich eine gerade Front durch das gesamte Muster. Ein Teil dieser Front ist in Abb. 6.18ii an den Rändern zu sehen.

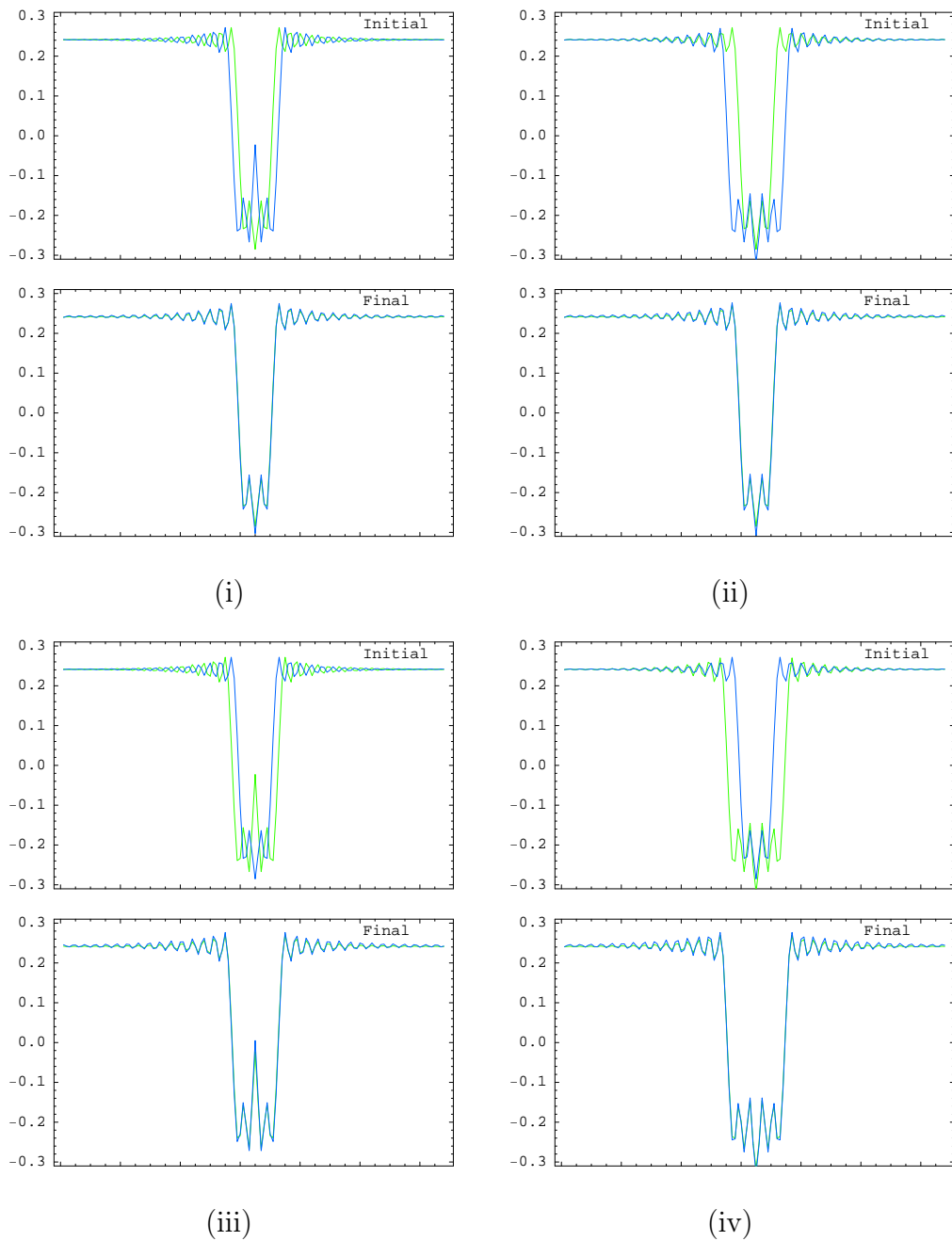
### 6.2.3.2 Ordnung des Soliton in der zweiten Zelle wird verändert

Ein zweiter Mechanismus der gefunden wurde ist die Veränderung der Ordnung des Solitons in der zweiten Zelle. Dabei bildet sich aus einem Startsoliton in der zweiten Zelle immer dasjenige heraus, das aus der ersten Zelle eingekoppelt wird. Die Größe der Solitonen in den Zellen spielt dabei keine systematische Rolle, allerdings muss das Soliton der ersten Zelle in der zweiten stabil sein. Die Veränderung der Solitonen kann also nur bei gleicher Ausrichtung der Solitonen vorkommen. Außerdem müssen die Solitonen an gleichen Orten gezündet werden. Werden die Solitonen an unterschiedlichen Orten gezündet, verändern sie sich nur partiell oder wandern. Dieser Fall wird im nächsten Unterabschnitt behandelt.

In Abb. 6.19 sind verschiedene Fälle der Veränderung des Solitons in der zweiten Zelle dargestellt. Die Anfangssolitonen in der ersten und zweiten Zelle sind jeweils am gleich Ort gestartet. Es werden sowohl Fälle gefunden, bei denen ein größeres Soliton in ein kleineres (i,ii), als auch Fälle, in denen ein kleineres Soliton in ein größeres verwandelt wird (iii,iv). Die Fälle, in denen aus einem größeren Soliton ein kleineres wird, sind in Abb. 6.19i,ii dargestellt. In diesen Fällen wird durch die Kopplung das stabile größere Soliton instabil und die Front, deren Größe das Soliton definiert, kollabiert. Erst wenn die kreisförmige Front auf den Durchmesser des Solitons zweiter Ordnung geschrumpft ist, wird die kollabierende Front durch die Kopplung gestoppt und es bildet sich in der zweiten Zelle ebenfalls ein stabiles Soliton zweiter Ordnung aus. Derselbe Mechanismus greift, wenn sich ein Soliton vierter Ordnung in der zweiten Zelle befindet. Eine Veränderung der Solitonen wird ab einer kritischen Kopplung durch die Frontdynamik der Zelle bestimmt.

Wird aus einem kleineren Soliton ein größeres, wie in Abb. 6.19iii,iv dargestellt, wird durch die Kopplung die Front, der Rand des Solitons, instabil. Die Front beginnt zu expandieren. Da in der gewählten Konfiguration drei Ordnungen der Solitonen stabil sind, kommt die Expansion der Front bei der nächsthöheren Ordnung der Solitonen, und damit dem nächstgrößeren stabilen Radius, zum Stillstand. So kann aus einem Soliton zweiter Ordnung eines dritter Ordnung werden (6.19iii), oder aus einem dritter Ordnung eines vierter Ordnung (6.19iv). Entscheidend für die Veränderung der Ordnung der Solitonen ist dabei, dass die Fronten, die in einem stabilen Zustand sind und damit das Soliton formen, instabil werden und expandieren oder kontrahieren.





**Abbildung 6.19:** Kopplung von verschiedenen Solitonen gleicher Ausrichtung. Das Soliton in der zweiten Zelle wird dabei verändert. (i) LS2 positiv mit LS3 positiv  $s = 0.010$ , (ii) LS 2 positiv mit LS4 positiv  $s = 0.030$ , (iii) LS3 positiv mit LS2 positiv  $s = 0.035$  und (iv) LS4 positiv mit LS3 positiv  $s = 0.045$ . (Grün = Zelle I, blau = Zelle II). Parameter: siehe Abb. 6.1 und  $\bar{\Delta} = 6.0$ ,  $\alpha_I = \alpha_{II} = 5^\circ$ ,  $I_I = 300\text{mW}$ ,  $I_{II} = I_{II\text{red}}$ .

### 6.2.3.3 Soliton in der zweiten Zelle wird verschoben

Der dritte Mechanismus ist, das Verschieben des Solitons in der zweiten Zelle. Dieser Mechanismus wurde bei der Kopplung von Solitonen gleicher Ordnung schon erläutert. In jeder Konfiguration mit Solitonen gleicher Ordnung konnte eine Verschiebung der Solitonen in der zweiten Zelle festgestellt werden. In diesem Abschnitt sollen daher nur Solitonen unterschiedlicher Ordnung betrachtet werden.

Werden zwei ungleich große Solitonen gleicher Ausrichtung miteinander gekoppelt, kann die Kopplung eine Verschiebung des Solitons in der zweiten Zelle bewirken. Dabei kann, ebenfalls durch die Kopplung verursacht, zusätzlich eine Deformation der Form auftreten. Bei dieser Veränderung handelt es sich nicht um eine Änderung der Ordnung des Solitons. Die Kopplung induziert dann eine instabile, d.h. nur durch die Kopplung aufrechterhaltende, Deformation des Solitons. Dies kommt insbesondere dann vor, wenn ein großes Soliton in der ersten Zelle auf ein kleines Soliton in der zweiten Zelle trifft. Sind die Ausrichtungen der Solitonen unterschiedlich, dann werden die Solitonen, wie schon dargelegt, in der zweiten Zelle zerstört.

Eine Verschiebung des Solitons in der zweiten Zelle kann bei den gleichen Parameterwerten auftreten wie eine Veränderung der Ordnung des Solitons. Wenn ein positives LS2 mit einem positiven LS3 Soliton gekoppelt wird, können beide Mechanismen beobachtet werden. Zunächst wird die Kopplung dieser Solitonen an gleichen Orten in den beiden Zellen diskutiert, danach die Kopplung an unterschiedlichen Orten.

Bei sehr kleinen Kopplungsraten wird das Soliton der zweiten Zelle zunächst verschoben; wird die Kopplungsrate erhöht, verändert sich das Soliton in der zweiten Zelle zu dem Typ, der aus der ersten Zelle eingekoppelt wird. In Abb. 6.20 und 6.22 sind die Synchronisationsgrade gegen die Kopplungsraten für den LS2 positiv - LS3 positiv und den LS3 positiv - LS2 positiv Fall dargestellt. In dieser Darstellung sind die Synchronisationsraten der Startzustände (initial) mit den stabilen stationären Endzuständen in der zweiten Zelle (final) aufgetragen. In Abb. 6.21 sind 1D-Schnitte durch die Verbindungslinien der Mittelpunkte der Solitonen für verschiedene Kopplungsstärken dargestellt. Im Fall LS3-LS2 ist für kleine Kopplungsraten,  $s < 0.020$ , der Einfluss der ersten Zelle sehr schwach. Das Soliton der zweiten Zelle verformt sich nur minimal und die Synchronisation ist deshalb für den Startzustand der zweiten Zelle mit dem Endzustand der zweiten Zelle nahe 1, Abb. 6.21ii. Wird die Kopplung zwischen 0.020 und kleiner 0.035 gewählt, spürt die zweite Zelle den Einfluss der ersten Zelle. Das Soliton be-

wegt sich, behält aber die Form und die Ordnung bei. Die Synchronisation zwischen den Start- und Endzuständen der beiden Zellen ist in diesem Fall ähnlich und ungefähr 0.85, Abb. 6.21iii. In allen beobachteten Fällen, in denen ungleich große Solitonen miteinander gekoppelt wurden, konnte dabei festgestellt werden, dass die Bewegung des Solitons so verläuft, dass eine Flanke beider Solitonen an der gleichen Stelle in beiden Zellen verläuft. Wird die Kopplung kontinuierlich erhöht, bewegt sich das Soliton in der zweiten Zelle zunächst so, dass die Ränder beider Solitonen in den jeweiligen Zellen möglichst gut übereinanderliegen. Wird die Kopplung anschließend weiter erhöht, schaltet das Soliton der zweiten Zelle auf vollständige Synchronisation mit der ersten Zelle, d.h. die Ordnung des Solitons wird verändert, Abb. 6.21iv. Dieser Fall ist im vorigen Abschnitt bereits diskutiert worden. Die Bewegung des Solitons in der zweiten Zelle gegenüber dem Startzustand ist in Abb. 6.20ii abgebildet. Zwischen den Kopplungen 0.020 und 0.035 ist die Bewegung des Solitons deutlich zu sehen.

Im Fall der Kopplung eines LS2 Solitons mit einem LS3 Soliton, ist der Verlauf ähnlich, Abb. 6.22, es zeigt sich jedoch, dass das Soliton in der zweiten Zelle durch die Kopplung stark deformiert wird, Abb. 6.23ii,iii. Die Kopplung bis zur Änderung der Ordnung ist mit  $s = 0.020$  etwas geringer.

Werden die beiden Solitonen LS2 und LS3 an unterschiedlichen Orten miteinander gekoppelt, ergeben sich zwei verschiedene Szenarien. In Abb. 6.24 sind die stabilen Abstände und ein Maß für die Deformation der Solitonen dargestellt. Das Soliton der zweiten Zelle wird dabei in unterschiedlichen Abständen zum Ort des Solitons in der ersten Zelle gezündet und nach Einschalten der Kopplung ( $s = 0.010$ ) bis zum stationären Zustand iteriert. Das Maß für die Deformation der Form des Solitons in der zweiten Zelle wird berechnet, indem die Synchronisation des stabilen Endzustandes mit allen Startzuständen, d.h. allen Startdistanzen, gebildet wird. Verändert sich das Soliton nicht, sondern wird einfach nur in einen stabilen Abstand geschoben, ist die Synchronisation mit dem Startzustand, dessen Abstand dem stabilen am Nächsten ist, besonders groß. Wird das Soliton in der zweiten Zelle verändert, existiert kein Startzustand der zweiten Zelle, der mit dem Endzustand eine große Übereinstimmung aufweist, der Synchronisationswert sinkt daher.

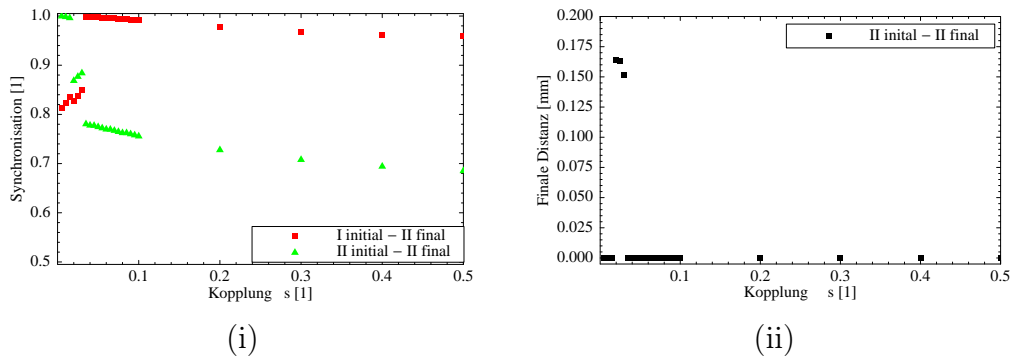
Aus den Berechnungen für den Fall LS2-LS3 ergibt sich ein stabiler Abstand zwischen den Solitonen. Das größere Soliton in der zweiten Zelle wird in diesem Fall leicht verändert und bringt eine Flanke mit dem Soliton in der ersten Zelle zur Deckung, Abb. 6.25i, unten. Der Maximale Abstand, bei dem das Soliton in der zweiten Zelle in den stabilen Abstand läuft, ist in

6.25i, oben dargestellt. Wird das Soliton in der zweiten Zelle ein bisschen weiter nach außen platziert, verformt sich das Soliton. Das entstehende Soliton ist in 6.25ii, unten dargestellt. Der zugehörige Synchronisationswert ist der Wert bei ungefähr 0.99 in Abb. 6.24iii. Sobald das Soliton weiter nach außen platziert wird, findet weder eine Verformung noch eine Wanderung statt. Das Soliton der zweiten Zelle scheint das Soliton der ersten Zelle nicht „zu bemerken“.

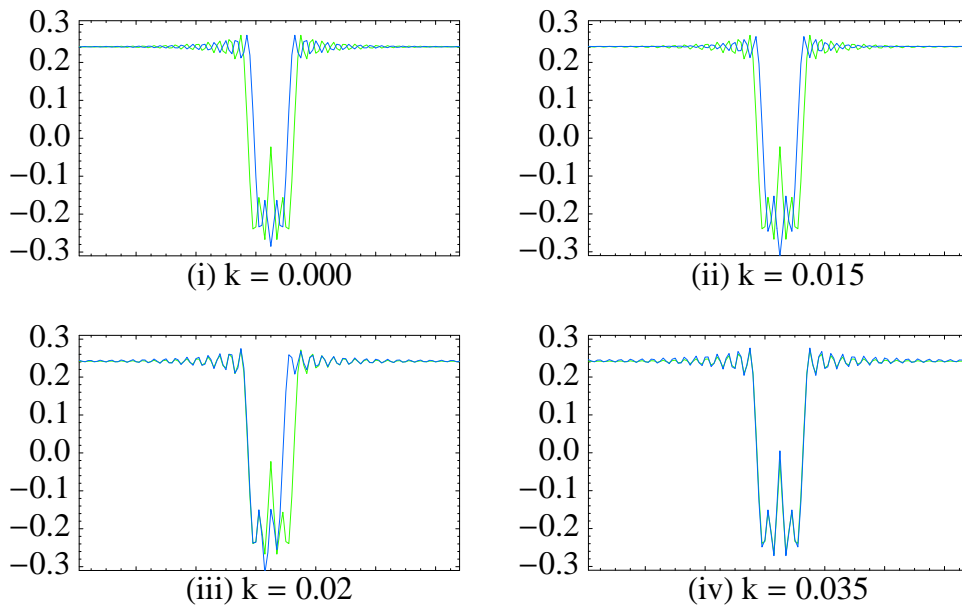
Im Fall LS3-LS2 existiert ebenfalls ein stabiler Zustand, Abb. 6.24ii. Das kleinere Soliton in der zweiten Zelle wird dabei in den Bereich des ersten gezogen und bildet wieder eine gemeinsame Flanke mit dem eingekoppelten Soliton, Abb. 6.26i, unten. Die Verformung des Solitons der zweiten Zelle ist in diesem Fall nur minimal, Abb. 6.24iv. Die maximale Distanz der Solitonen, in der das zweite wieder in den Bereich des ersten gezogen wird, ist in Abb. 6.26i, oben dargestellt. Wird das Soliton weiter außen platziert, wird das Soliton in der zweiten Zelle zerstört.

Durch die Kopplung unterschiedlicher Solitonen gleicher Ausrichtung miteinander können die Ordnungen der Solitonen verändert, bzw. umgeschaltet werden. Solitonen gleicher Ausrichtung haben dabei, solange sie gemeinsame Gebiete besitzen, eine Anziehende Wechselwirkung. Werden sie in getrennten Gebieten gezündet, hängt das Verhalten von der Art der Solitonen und der Stärke der Kopplung ab. In einigen Fällen kann das Soliton in der Empfänger-Zelle trotz der Kopplung überleben, in andern Fällen wird das Soliton in der Empfänger-Zelle gelöscht, sobald keine gemeinsamen Gebiete bestehen. Durch die Kopplung können auch Deformationen auftreten, die sich nach Ausschalten der Kopplung allerdings wieder zurückbilden und das Soliton kehrt wieder in einen stabilen Zustand zurück. Die Kopplung solitärer Objekte mit unterschiedlicher Ausrichtung ergibt nur im Fall gleicher Ordnungen eine Wechselwirkung, die in der zweiten Zelle stabile Objekte überleben lässt. Werden Solitonen unterschiedlicher Ordnung miteinander gekoppelt, führte das in jedem Fall oberhalb einer gewissen Kopplungsstärke zu einer Auslöschung des Solitons in der zweiten Zelle.

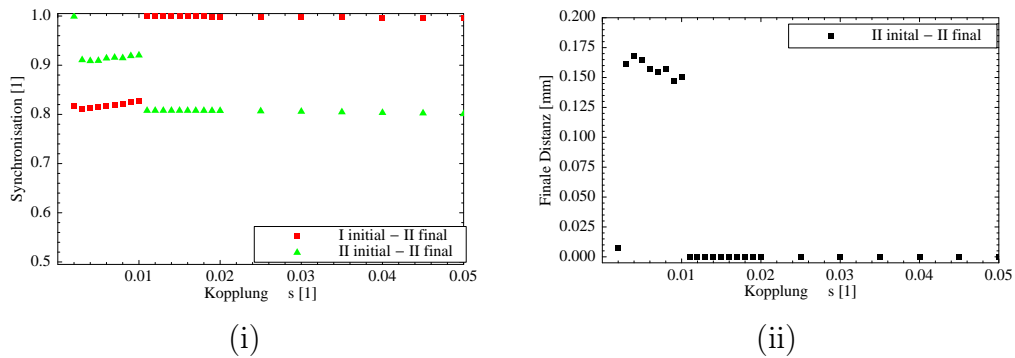
Die Übertragung von Solitonen zwischen räumlich getrennten nichtlinearen optischen Systemen konnte in dieser Arbeit numerisch gezeigt werden. Zusätzlich wurden Mechanismen gefunden, die es ermöglichen zwischen verschiedenen Zuständen hin- und herzuschalten. Damit könnte allein mit der Übertragung von Systemzuständen Informationen gesendet werden. Der robuste Charakter der Solitonen und die Anziehung zwischen Solitonen gleicher Ausrichtung, die sich an ähnlichen Orten in den jeweiligen Systemen befinden, erleichtern eine Übertragung dabei erheblich.



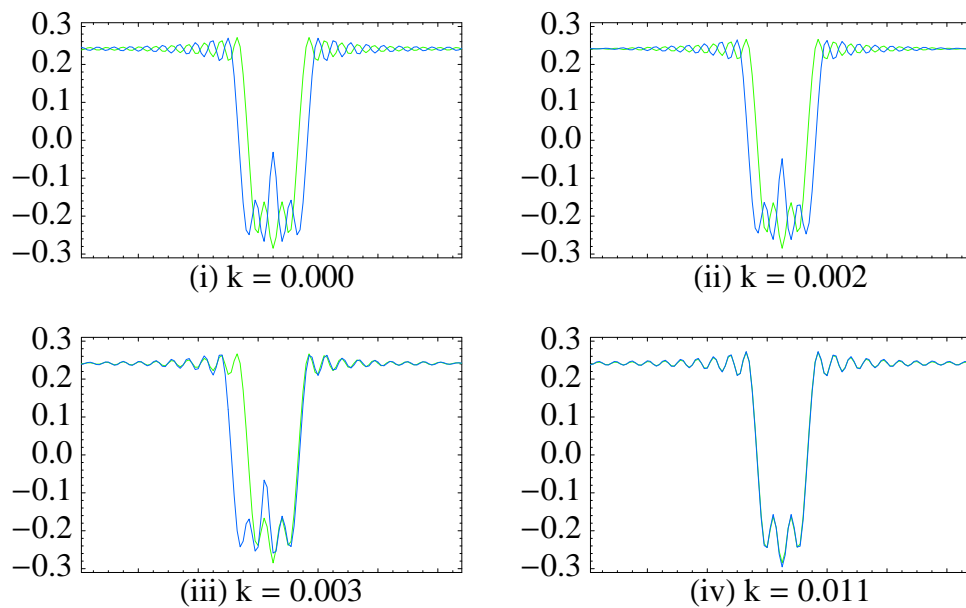
**Abbildung 6.20:** Kopplung unterschiedlicher Solitonen gleicher Ausrichtung. LS 3 positiv - LS2 positiv. (i) Synchronisationsrate gegen Kopplung, (ii) Abstand des Endzustandes in der zweiten Zelle gegenüber dem Startzustand.



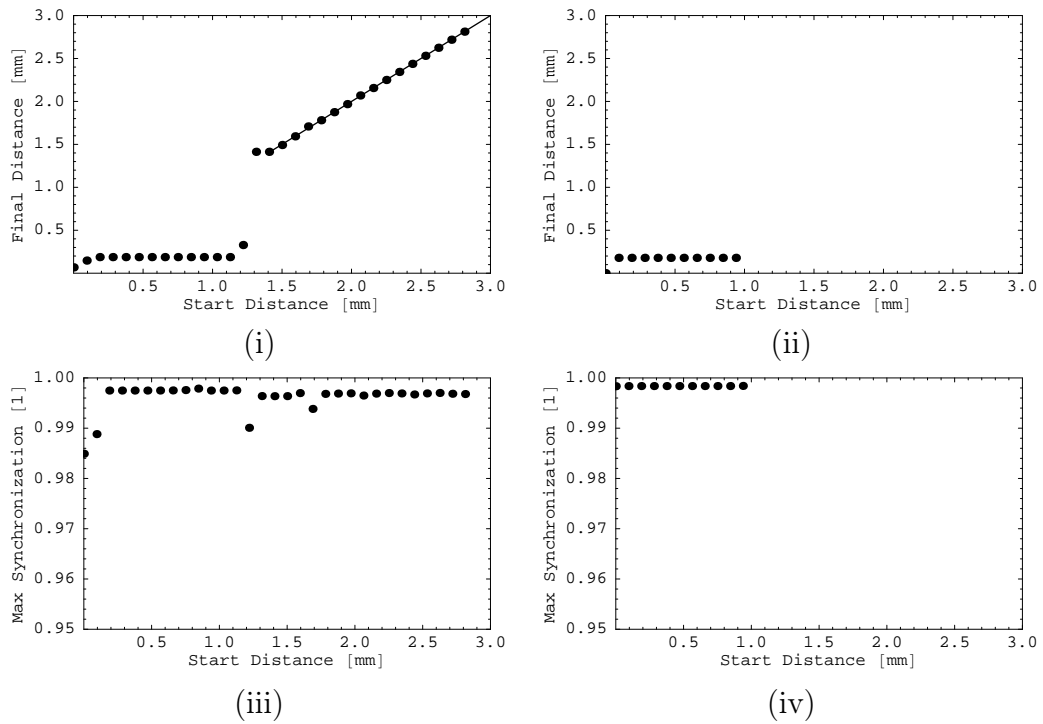
**Abbildung 6.21:** Kopplung unterschiedlicher Solitonen gleicher Ausrichtung. LS 3 positiv - LS2 positiv. 1D-Schnitte durch die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Solitonen für verschiedene Kopplungen. (i) Startzustand, (ii) geringe Kopplung, (iii) Wanderung des Solitons in der zweiten Zelle und (iv) wechseln der Ordnung des Solitons in der zweiten Zelle (Grün = Zelle I, Blau = Zelle II). Parameter: siehe Abb. 6.1 und  $\bar{\Delta} = 6.0$ ,  $\alpha_I = \alpha_{II} = 5^\circ$ ,  $I_I = 300\text{mW}$ ,  $I_{II} = I_{II\text{red}}$ .



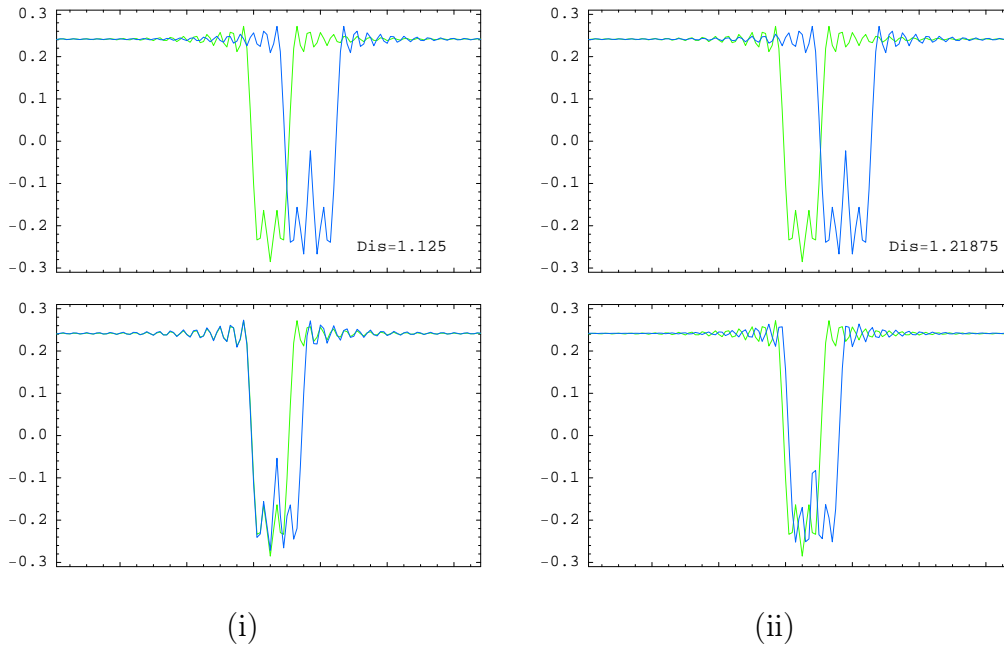
**Abbildung 6.22:** Kopplung unterschiedlicher Solitonen gleicher Ausrichtung. LS 2 positiv - LS3 positiv. (i) Synchronisationsrate gegen Kopplung, (ii) Abstand des Endzustandes in der zweiten Zelle gegenüber dem Startzustand.



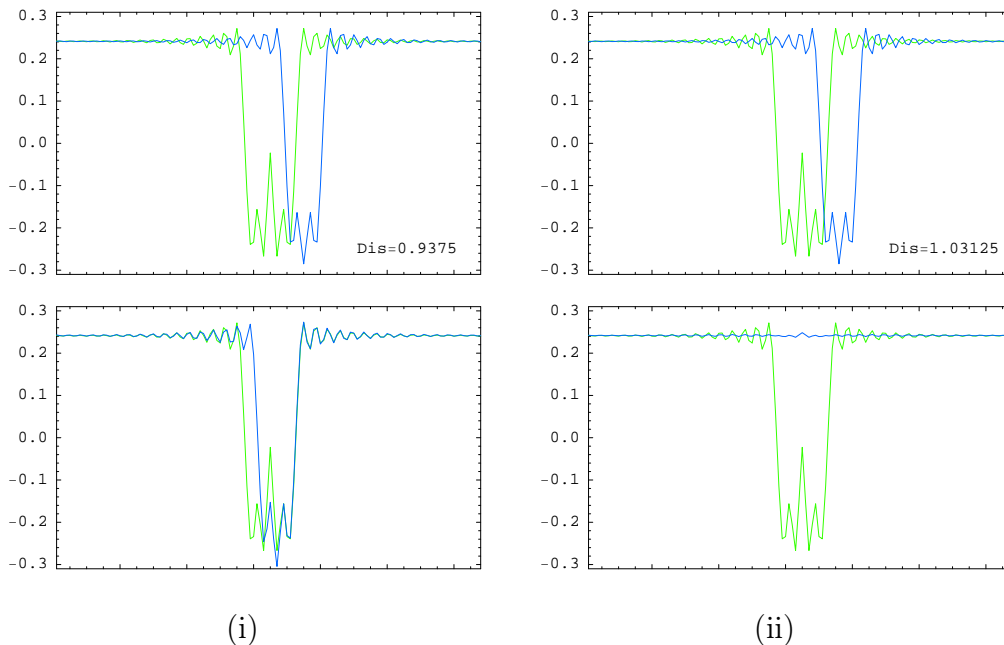
**Abbildung 6.23:** Kopplung unterschiedlicher Solitonen gleicher Ausrichtung. LS 2 positiv - LS3 positiv. 1D-Schnitte durch die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Solitonen für verschiedene Kopplungen. (i) Startzustand, (ii),(iii) Wanderung und Deformation des Solitons in der zweiten Zelle und (iv) wechseln der Ordnung des Solitons in der zweiten Zelle (Grün = Zelle I, Blau = Zelle II). Parameter: siehe Abb. 6.1 und  $\bar{\Delta} = 6.0$ ,  $\alpha_I = \alpha_{II} = 5^\circ$ ,  $I_I = 300\text{mW}$ ,  $I_{II} = I_{II\text{red}}$ .



**Abbildung 6.24:** Stabile Abstände gekoppelter (i) LS2-LS3 und (ii) LS3-LS2 Solitonen und maximale Synchronisation über alle Startzustände (iii) LS2-LS3 und (iv) LS3-LS2. Parameter: siehe Abb. 6.1 und  $\bar{\Delta} = 6.0$ ,  $\alpha_I = \alpha_{II} = 5^\circ$ ,  $I_I = 300\text{mW}$ ,  $I_{II} = I_{II\text{red}}$ ,  $s = 0.010$ .



**Abbildung 6.25:** Kopplungen in der Konfiguration LS2-LS3. (i) Maximale Startdistanz (oben) zu dem stabilen Zustand (unten). (ii) Startdistanz (oben) mit größter Verformung des zweiten Solitons (unten). (Grün = Zelle I, blau = Zelle II) Parameter: siehe Abb. 6.1 und  $\bar{\Delta} = 6.0$ ,  $\alpha_I = \alpha_{II} = 5^\circ$ ,  $I_I = 300\text{mW}$ ,  $I_{II} = I_{II\text{red}}$ ,  $s = 0.010$ .



**Abbildung 6.26:** Kopplungen in der Konfiguration LS3-LS2. (i) Maximale Startdistanz (oben) zu dem stabilen Zustand (unten). (ii) Startdistanz (oben) ab der das Soliton in der zweiten Zelle zerstört wird (unten). (Grün = Zelle I, blau = Zelle II) Parameter: siehe Abb. 6.1 und  $\bar{\Delta} = 6.0$ ,  $\alpha_I = \alpha_{II} = 5^\circ$ ,  $I_I = 300\text{mW}$ ,  $I_{II} = I_{II\text{red}}$ ,  $s = 0.010$ .



# Kapitel 7

## Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Auswirkung einer unidirektionalen Kopplung zweier nichtlinearer musterbildender optischer Systeme, sowohl identischer als auch nichtidentischer Art, untersucht. Als Modellsystem für eine nichtlineare optische musterbildendes System wurde ein Einspiegel Rückkopplungssystem mit einem Natrium-Dampf als Nichtlinearität gewählt, da dieses System mikroskopisch beschreibbar ist und damit einen analytischen Zugang bietet. Zusätzlich ist ein einzelnes dieser Systeme durch Vorarbeiten sehr gut untersucht und bildet eine große Klasse verschiedener Muster aus. Verschiedene solitäre Strukturen können ebenfalls in diesem System in einem großen Parameterbereich gefunden werden und erlauben die Untersuchung der Wechselwirkung dieser Strukturen untereinander. Die untersuchten Systeme wurden unidirektional miteinander gekoppelt, die Konfiguration der Kopplung entspricht damit einer Sender-Empfänger Konfiguration, wobei die erste Zelle als Sender und die zweite Zelle als Empfänger fungiert.

Für die analytischen und numerischen Berechnungen wurde, basierend auf verschiedenen Vorarbeiten, ein Formalismus weiterentwickelt, mit dem es möglich ist, in gewissem Rahmen, beliebige Kombinationen von gekoppelten nichtlinearen optischen Systemen zu untersuchen. Die abgeleiteten Differentialgleichungen zur vollständigen Beschreibung des Systems wurden analytisch und numerisch ausgewertet. Für die numerische Integration der Grundgleichungen wurde ein Code entwickelt, der es möglich macht, die Systeme in verschiedenen Konfigurationen miteinander zu koppeln und die entstehenden Strukturen zu untersuchen. Die Verwendung eines Pseudospektralverfahrens für die Ortsableitungen und eines semi-impliziten Verfahrens für die Zeitintegration gewährleisteten dabei eine hinreichende numerische Genauigkeit der Ergebnisse. Bei diesem Verfahren werden die linearen

Terme der Entwicklungsgleichung explizit und die nichtlinearen Terme implizit behandelt. Die Strukturen die in den Vorarbeiten gefunden werden konnten, konnten damit in qualitativer und quantitativer Art reproduziert werden [Aum99, Pes06, Sch06].

Die unidirektionale Kopplung regulärer, d.h. einfach periodischer, Muster wie zum Beispiel Quadrate und Hexagone wurde im ersten Teil dieser Arbeit diskutiert. Werden gleiche Muster miteinander gekoppelt, konnte eine Synchronisation der Muster der *Empfänger-Zelle* mit den Mustern der *Sender-Zelle* festgestellt werden. Diese Ergebnisse stimmen qualitativ mit an anderen nichtlinearen optischen und chemischen Reaktions-Diffusions Systemen gewonnenen experimentellen Ergebnissen überein [NJ03, DBZE01]. Eine Kopplung verschiedener regulärer Muster untereinander führte zu, in einem System mit linearer Eingangspolarisation, nicht stabilen, Mustern mit mehreren Längenskalen, auch als Übergitter- oder *Superlattice*-Strukturen bekannt. Die Längenskalen der Muster wurden bestimmt durch die Längenskalen der Muster der einzelnen Zellen. Die Kopplung von 8-fach periodischen Quasimustern mit einer Zelle, die bistabiles Verhalten zeigt, führte auf die Bildung von labyrinthartigen Domänenstrukturen, wobei die Domänen ebenfalls 8-fach periodisch gemustert sind. Dieses Verhalten gekoppelter Zellen konnte bisher noch nicht beobachtet werden. Weit oberhalb der Schwelle der Bildung regulärer Muster konnten in Übereinstimmung mit Ergebnissen aus einer Zelle labyrinthartige Muster gefunden werden. Die Kopplung dieser Strukturen untereinander zeigte eine Synchronisation in Raum und Zeit und lässt auf ein Synchronisationsverhalten in einem weiten Parameterbereich des Systems schließen. Diese Ergebnisse stimmen ebenfalls mit an anderen nichtlinearen Systemen gefundenen Ergebnissen überein [RBB06, NG04].

Neben der Bildung regulärer Muster ist die Existenz einer ganzen Familie transverser dissipativer solitärer Objekte in einer Zelle beobachtet worden. Dieses steht ebenfalls in sehr guter qualitativer Übereinstimmung mit Vorarbeiten [Pes06]. Die Untersuchung der Kopplung dieser solitären Objekte ist Bestandteil des zweiten Teils dieser Arbeit. Dabei konnte gezeigt werden, dass es möglich ist, Solitonen von der Sender-Zelle in die Empfänger Zelle zu übermitteln. Die entstehenden Solitonen in der Empfänger-Zelle sind dabei auch nach Ausschalten der Kopplung stabil. Dazu wurden drei Mechanismen in Zusammenhang mit Solitonen in diesem System dargestellt. Als erstes können die Solitonen verschoben werden, bzw. stellen sich durch Wechselwirkung in unterschiedliche diskrete Abstände ein. Dies konnte in einer Zelle ebenfalls für diese Art der Solitonen gefunden werden [Pes06]. In dieser Arbeit ist die Wechselwirkung jedoch nicht direkt, d.h. von Soliton

zu Soliton innerhalb einer Zelle, sonder indirekt, d.h. von Zelle zu Zelle. Als zweites konnte durch die Wechselwirkung aus der Sender-Zelle ein Soliton in der Empfänger-Zelle gelöscht oder zerstört werden. Ein ähnliches Verhalten konnte in einer Zelle durch ein externes Signal gefunden werden [Pes06] und lässt die Solitonen damit als mögliche Kandidaten für optische Bits in zukünftigen Anwendungen erscheinen [FS96]. Als dritter Mechanismus konnte in dieser Arbeit die Veränderung der Ordnung der Solitonen gefunden werden. Dazu wurden verschiedene Ordnungen der Solitonen miteinander gekoppelt. Die Sender-Zelle bestimmte dabei die entstehende Ordnung des Solitons in der Empfänger-Zelle. Die Veränderung der Form der Solitonen ist bedingt durch ein Frontwachstum in positiver oder negativer Richtung, das zu einer Vergrößerung oder Verkleinerung der Ordnung der Solitonen führt. Die Wechselwirkung der ersten Zelle mit der zweiten führt zu einem abstoppen des Frontwachstums und damit zu einem Umschalten der Ordnung des Solitons in der zweiten Zelle. Die Veränderung der Ordnung der Solitonen zusammen mit einer anziehenden Wechselwirkung bei der Kopplung unterschiedlicher Solitonen gleicher Ausrichtung könnte dazu genutzt werden mithilfe von Systemzuständen Informationen zu übertragen. Die unterschiedlichen Ordnungen der Solitonen können als An- und Aus- Zustände eines binären Systems gedeutet werden. Damit ist es möglich mit geringen Kopplungen die Informationen zu übertragen. Die anziehende Wechselwirkung verhindert ein auseinanderlaufen der einzelnen Solitonen und senkt die Fehleranfälligkeit der Übertragung.

Die weitere Untersuchung der Wechselwirkung der Solitonen untereinander, einzeln oder in Gitterformation ist im Hinblick auf zukünftige Anwendungen in der Informationsübermittlung eine Aufgabe für weitergehende Arbeiten. Die Untersuchung der Universalität der gefundenen Mechanismen anhand von weiteren Studien an ähnlichen Systemen kommt ebenfalls in Frage. Mit dem hier entwickelten Formalismus ist es möglich ebenfalls verschiedenste nichtlineare Systeme mit unterschiedlichen Kopplungen zu analysieren und zu beschreiben. Voraussetzung ist in diesem Fall nur die Beschreibung der Nichtlinearität mithilfe einer Differentialgleichung die aus mikroskopischen oder experimentellen Überlegungen gewonnen werden kann. Für das Natrium-Dampf System ist dies z.B. aus quantenmechanischen Betrachtungen möglich [MDLM86, DH97]. Neben der Kopplung der Solitonen untereinander ist die weitere Untersuchung der Kopplung raum-zeitlicher Strukturen eine Herausforderung für die nichtlineare Physik. Im Hinblick auf sichere Datenübermittlung ergibt sich hierbei ebenfalls ein großes Anwendungsgebiet.



# Anhang A

## Differentialgleichungen

Im Anhang werden die vollen Differentialgleichungen für die Orientierung  $\phi$ , die sich aus der Linearisierung um einen homogenen Zustand  $\phi_h$  ergeben, dargestellt. Aufgrund der Länge der Gleichungen wird auf eine Darstellung innerhalb der Arbeit verzichtet.

### A.1 Zelle I

Aus der allgemeinen Differentialgleichung (3.73) können mit den Pumpraten für die erste Zelle (3.77) Differentialgleichungen für den homogenen Zustand und das Variationsfeld berechnet werden. In diesen Differentialgleichungen sind die Parameter für die Wellenplättchen noch frei. Einsetzen der Parameter für die Wellenplättchen liefert dann die DGLn, die in den einzelnen Fällen in Kap. 5 diskutiert werden. Für die zweite Zelle können auch die DGLn angegeben werden, diese sind jedoch sehr lang, da in diesem Fall zwei Parametersätze für die Wellenplättchen eingesetzt werden können. Ein Satz für die erste Zelle und ein Satz für die zweite Zelle. Die DGL für das Variationsfeld in der zweiten Zelle ist ausserdem nur in dem Fall, das die erste Zelle unterkritisch ist, gültig. Die Berechnung der Pumpraten erfolgt durch einsetzen der Propagationsoperatoren in (3.77) für die erste und (3.80) für die zweite Zelle. Die Variationsfelder sind in Linearer Ordnung angegeben.

Alle Berechnungen sind mit *Mathematica* durchgeführt, die Gleichungen für die homogenen Zustände und das Variationsfeld sind dabei automatisch erzeugt worden.

### A.1.1 DGL Homogener Zustand

$$\begin{aligned}
\phi'_{h1}(t) = & \frac{I_{01}R_1 \cosh(2\alpha_0 L_1 \phi_{h1}) \sin(\varphi_I) \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) F^2}{2\alpha_0 L_1} \\
& - \frac{I_{01}R_1 \sinh(4\alpha_0 L_1 \phi_{h1}) F^2}{4\alpha_0 L_1} - \frac{I_{01}R_1 \cos(\varphi_I) \sinh(4\alpha_0 L_1 \phi_{h1}) F^2}{4\alpha_0 L_1} \\
& - \frac{I_{01}R_1 \cos(2\alpha_1 - \varphi_I - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) F}{4\alpha_0 L_1} \\
& + \frac{I_{01}R_1 \cos(2\alpha_1 + \varphi_I - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) F}{4\alpha_0 L_1} \\
& + \frac{I_{01}(R_1 \cos(\varphi_I) - 1) \sinh(2\alpha_0 L_1 \phi_{h1}) F}{2\alpha_0 L_1} - \gamma \phi_{h1} \tag{A.1}
\end{aligned}$$

### A.1.2 DGL Variationsfeld

$$\begin{aligned}
\partial_t \phi_1 = & D_{\text{diff}}(\nabla_t^2 \phi_1) - \frac{1}{2} \phi_1 (I_{01}R_1 F^2 + I_{01}(2 \cosh(2\alpha_0 L_1 \phi_{h1}) \\
& + F R_1 (\cos(\varphi_I) (\cosh(4\alpha_0 L_1 \phi_{h1}) - 1) \\
& + \cosh(4\alpha_0 L_1 \phi_{h1}) - 2 \sin(\varphi_I) \sin(2(\alpha_1 - \alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1})) \\
& \sinh(2\alpha_0 L_1 \phi_{h1}))) F + 2\gamma) - F I_{01} R_1 (F \sinh^2(2\alpha_0 L_1 \phi_{h1}) + \cos(\varphi_I) \cosh(2\alpha_0 L_1 \phi_{h1}) \\
& (F \cosh(2\alpha_0 L_1 \phi_{h1}) - 1) + \bar{\Delta} \cos(2(\alpha_1 - \alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1})) \\
& (F \cosh(2\alpha_0 L_1 \phi_{h1}) - 1) \sin(\varphi_I)) \cos\left(\frac{d_1 \nabla_t^2}{k_0}\right) [\phi_1] \\
& + F I_{01} R_1 (\bar{\Delta} F \sinh^2(2\alpha_0 L_1 \phi_{h1}) + \bar{\Delta} \cos(\varphi_I) \cosh(2\alpha_0 L_1 \phi_{h1}) \\
& (F \cosh(2\alpha_0 L_1 \phi_{h1}) - 1) + \cos(2(\alpha_1 - \alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1})) \\
& (1 - F \cosh(2\alpha_0 L_1 \phi_{h1})) \sin(\varphi_I)) \sin\left(\frac{d_1 \nabla_t^2}{k_0}\right) [\phi_1] \tag{A.2}
\end{aligned}$$

### A.1.3 Eigenwert $I$

$$\begin{aligned}
\lambda_I = & -\frac{1}{2}I_{01}R_1F^2 + \frac{1}{2}I_{01}R_1\cos(\varphi_I)F^2 \\
& -I_{01}\left(FR_1\cosh(4\alpha_0L_1\phi_{h1})\cos^2\left(\frac{\varphi_I}{2}\right) + \cosh(2\alpha_0L_1\phi_{h1})\right)F \\
& +I_{01}R_1\left(-FCS\left(\frac{d_1k^2}{k_0}\right)\sinh^2(2\alpha_0L_1\phi_{h1})\right. \\
& +F\sin(\varphi_I)\sin(2(\alpha_1 - \alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}))\sinh(2\alpha_0L_1\phi_{h1}) \\
& \left. - (F\cosh(2\alpha_0L_1\phi_{h1}) - 1)\right. \\
& \left.\left(\cos(\varphi_I)\cosh(2\alpha_0L_1\phi_{h1})CS\left(\frac{d_1k^2}{k_0}\right)\right.\right. \\
& \left.\left.+ \cos(2(\alpha_1 - \alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}))SC\left(\frac{d_1k^2}{k_0}\right)\sin(\varphi_I)\right)\right)F \\
& -D_{\text{diff}}k^2 - \gamma
\end{aligned} \tag{A.3}$$

## A.2 Zelle II

Für die zweite Zelle werden die Abkürzungen

$$\cosh(\alpha_0L_1\phi_{h1}) \rightarrow C_1 \tag{A.4}$$

$$\cosh(\alpha_0L_2\phi_{h2}) \rightarrow C_2 \tag{A.5}$$

$$\sinh(\alpha_0L_1\phi_{h1}) \rightarrow S_1 \tag{A.6}$$

$$\sinh(\alpha_0L_2\phi_{h2}) \rightarrow S_2 \tag{A.7}$$

und

$$2\alpha_1 - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} \rightarrow \rho_1 \tag{A.8}$$

$$2\alpha_2 - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2} \rightarrow \rho_2 \tag{A.9}$$

benutzt.





## A.2.1 DGL Homogener Zustand

$$\begin{aligned}
\phi'_{h2}(t) = & -\frac{1}{16\alpha_0 L_2} - 2FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I) C_2^4 + 2FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I) C_2^4 - FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I - \varphi_{II}) C_2^4 + FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I - \varphi_{II}) C_2^4 \\
& - FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I + \varphi_{II}) C_2^4 + 4C_1 S_1 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_I + \varphi_{II}) C_2^4 + FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I + \varphi_{II}) C_2^4 + 16S_2 G^2 I_{02} R_2 C_2^3 + 16C_1^2 S_2 FG^2 I_{01} R_2 s C_2^3 + 16S_1^2 S_2 FG^2 I_{01} R_2 s C_2^3 \\
& + 16S_2 G^2 I_{02} R_2 \cos(\varphi_{II}) C_2^3 + 16C_1^2 S_2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_{II}) C_2^3 + 16S_1^2 S_2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_{II}) C_2^3 - 4FGI_{01} s \cos(\rho_1 - \varphi_I) C_2^2 - 12S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I) C_2^2 \\
& + 4FGI_{01} s \cos(\rho_1 + \varphi_I) C_2^2 + 12S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I) C_2^2 - 4G^2 I_{02} R_2 \cos(\rho_2 - \varphi_{II}) C_2^2 - 6S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I - \varphi_{II}) C_2^2 \\
& + 2FGI_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I - \varphi_{II}) C_2^2 + 6S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I - \varphi_{II}) C_2^2 - 2FGI_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I - \varphi_{II}) C_2^2 + 4G^2 I_{02} R_2 \cos(\rho_2 + \varphi_{II}) C_2^2 \\
& - 6S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I + \varphi_{II}) C_2^2 + 2FGI_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I + \varphi_{II}) C_2^2 + 24C_1 S_1 S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_I + \varphi_{II}) C_2^2 - 8C_1 S_1 FGI_{01} R_2 s \cos(\varphi_I + \varphi_{II}) C_2^2 \\
& + 6S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I + \varphi_{II}) C_2^2 - 2FGI_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I + \varphi_{II}) C_2^2 - FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) C_2^2 - FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) C_2^2 \\
& + FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) C_2^2 + FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) C_2^2 \\
& + 4C_1 S_1 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 - 4C_1 S_1 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 \\
& - 4C_1 S_1 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 + 4C_1 S_1 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 \\
& + 2FG^2 I_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 - FG^2 I_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 \\
& - FG^2 I_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 - 2FG^2 I_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 \\
& + FG^2 I_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 + FG^2 I_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 \\
& - 2FG^2 I_{01} R_2 s \cos(2\alpha_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} (L_1 \phi_{h1} + L_2 \phi_{h2})) C_2^2 + 2FG^2 I_{01} R_2 s \cos(2\alpha_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} (L_1 \phi_{h1} + L_2 \phi_{h2})) C_2^2 + 16S_2 G I_{02} C_2 + 16S_2^3 G^2 I_{02} R_2 C_2 \\
& + 16C_1^2 S_2 FGI_{01} s C_2 + 16S_1^2 S_2 FGI_{01} s C_2 + 16C_1^2 S_2^3 FG^2 I_{01} R_2 s C_2 + 16S_1^2 S_2^3 FG^2 I_{01} R_2 s C_2 + 16S_2^3 G^2 I_{02} R_2 \cos(\varphi_{II}) C_2 \\
& - 16S_2 G I_{02} R_2 \cos(\varphi_{II}) C_2 + 16C_1^2 S_2^3 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_{II}) C_2 + 16S_1^2 S_2^3 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_{II}) C_2 - 16C_1^2 S_2 FGI_{01} R_2 s \cos(\varphi_{II}) C_2 - 16S_1^2 S_2 FGI_{01} R_2 s \cos(\varphi_{II}) C_2 + 16\alpha_0 \gamma L_2 \phi_{h2} \\
& + 4FI_{01} s \cos(\rho_1 - \varphi_I) - 4S_2^2 FGI_{01} s \cos(\rho_1 - \varphi_I) - 2S_2^4 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I) \\
& + 2FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I) + 8C_1 S_1 FI_{01} (G^2 R_2 C_2^4 + 2G (3GR_2 S_2^2 + 1) C_2^2 + 2S_2^2 G + (S_2^4 - 1) G^2 R_2 - 2) s \cos(\varphi_I) - 4FI_{01} s \cos(\rho_1 + \varphi_I) \\
& + 4S_2^2 FGI_{01} s \cos(\rho_1 + \varphi_I) + 2S_2^4 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I) - 2FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I) - 4S_2^2 G^2 I_{02} R_2 \cos(\rho_2 - \varphi_{II}) \\
& + 4GI_{02} R_2 \cos(\rho_2 - \varphi_{II}) - S_2^4 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I - \varphi_{II}) - FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I - \varphi_{II}) + 2S_2^2 FGI_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I - \varphi_{II}) \\
& + 4C_1 S_1 FG (GC_2^4 + (6S_2^2 G - 2) C_2^2 - 2S_2^2 + S_2^4 G + G) I_{01} R_2 s \cos(\varphi_I - \varphi_{II}) + S_2^4 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I - \varphi_{II}) \\
& + FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I - \varphi_{II}) - 2S_2^2 FGI_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I - \varphi_{II}) + 4S_2^2 G^2 I_{02} R_2 \cos(\rho_2 + \varphi_{II}) \\
& - 4GI_{02} R_2 \cos(\rho_2 + \varphi_{II}) - S_2^4 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I + \varphi_{II}) - FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I + \varphi_{II}) + 2S_2^2 FGI_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I + \varphi_{II}) \\
& + 4C_1 S_1 S_2^4 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_I + \varphi_{II}) + 4C_1 S_1 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_I + \varphi_{II}) - 8C_1 S_1 S_2^2 FGI_{01} R_2 s \cos(\varphi_I + \varphi_{II}) + S_2^4 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I + \varphi_{II}) + FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I + \varphi_{II}) \\
& - 2S_2^2 FGI_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I + \varphi_{II}) - S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) \\
& + FGI_{01} R_2 s \cos(\rho_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) - S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) + FGI_{01} R_2 s \cos(\rho_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) \\
& + S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) - FGI_{01} R_2 s \cos(\rho_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) \\
& + S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) - FGI_{01} R_2 s \cos(\rho_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) \\
& + 4C_1 S_1 S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) - 4C_1 S_1 FGI_{01} R_2 s \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4C_1 S_1 S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) + 4C_1 S_1 FGI_{01} R_2 s \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) \\
& -4C_1 S_1 S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) \\
& +4C_1 S_1 FGI_{01} R_2 s \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) + 4C_1 S_1 S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) \\
& -4C_1 S_1 FGI_{01} R_2 s \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) + 2S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) \\
& -2FGI_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) \\
& -S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) + FGI_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) \\
& -S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) + FGI_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) \\
& -2S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) + 2FGI_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) \\
& +S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) - FGI_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) \\
& +S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) - FGI_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) \\
& -2S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(2\alpha_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta}(L_1 \phi_{h1} + L_2 \phi_{h2})) + 2FGI_{01} R_2 s \cos(2\alpha_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta}(L_1 \phi_{h1} + L_2 \phi_{h2})) \\
& +2S_2^2 FG^2 I_{01} R_2 s \cos(2\alpha_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta}(L_1 \phi_{h1} + L_2 \phi_{h2})) - 2FGI_{01} R_2 s \cos(2\alpha_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta}(L_1 \phi_{h1} + L_2 \phi_{h2}))
\end{aligned} \tag{A.10}$$



## A.2.2 DGL Variationsfeld

$$\begin{aligned}
\partial_t \phi_2 = & \frac{1}{8} (-2(2G^2 I_{02} R_2 C_2^4 + 2C_1^2 F G^2 I_{01} R_2 s C_2^4 + 2S_1^2 F G^2 I_{01} R_2 s C_2^4 + 2G^2 I_{02} R_2 \cos(\varphi_{II}) C_2^4 + 2C_1^2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_{II}) C_2^4 + 2S_1^2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_{II}) C_2^4 \\
& + 4S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I) C_2^3 - 2S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I - \varphi_{II}) C_2^3 + 8C_1 S_1 S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_I - \varphi_{II}) C_2^3 + 2S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I - \varphi_{II}) C_2^3 \\
& - 2S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I + \varphi_{II}) C_2^3 + 8C_1 S_1 S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_I + \varphi_{II}) C_2^3 + 2S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I + \varphi_{II}) C_2^3 + 4G I_{02} C_2^2 + 12S_2^2 G^2 I_{02} R_2 C_2^2 \\
& + 4C_1^2 F G I_{01} s C_2^2 + 4S_1^2 F G I_{01} s C_2^2 + 12C_1^2 S_2^2 F G^2 I_{01} R_2 s C_2^2 + 12S_1^2 S_2^2 F G^2 I_{01} R_2 s C_2^2 + 12S_2^2 G^2 I_{02} R_2 \cos(\varphi_{II}) C_2^2 + 12C_1^2 S_2^2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_{II}) C_2^2 + 12S_1^2 S_2^2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_{II}) C_2^2 \\
& - 4S_2 F G I_{01} (G R_2 C_2^2 + S_2^2 G R_2 + 1) s \cos(\rho_1 - \varphi_I) C_2 + 16C_1 S_1 S_2 F G I_{01} (G R_2 C_2^2 + S_2^2 G R_2 + 1) s \cos(\varphi_I) C_2 + 4S_2 F G I_{01} s \cos(\rho_1 + \varphi_I) C_2 + 4S_2^3 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I) C_2 \\
& - 4S_2 G^2 I_{02} R_2 \cos(\rho_2 - \varphi_{II}) C_2 - 2S_2^3 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I - \varphi_{II}) C_2 + 8C_1 S_1 S_2^3 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_I - \varphi_{II}) C_2 + 2S_2^3 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I - \varphi_{II}) C_2 + 4S_2 G^2 I_{02} R_2 \cos(\rho_2 + \varphi_{II}) C_2 \\
& - 2S_2^3 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 - \varphi_I + \varphi_{II}) C_2 + 8C_1 S_1 S_2^3 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_I + \varphi_{II}) C_2 + 2S_2^3 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_1 + \varphi_I + \varphi_{II}) C_2 - 2S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) C_2 \\
& - S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) C_2 - S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) C_2 + 2S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) C_2 \\
& + S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) C_2 + S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\rho_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) C_2 + 4C_1 S_1 S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2 \\
& - 4C_1 S_1 S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2 - 4C_1 S_1 S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2 \\
& + 4C_1 S_1 S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2 + 2S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2 \\
& - S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2 - S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2 \\
& - 2S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2 + S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2 \\
& + S_2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2 + 4\gamma + 4S_2^2 G I_{02} + 2S_2^4 G^2 I_{02} R_2 + 2G^2 I_{02} R_2 + 4C_1^2 S_2^2 F G I_{01} s + 4S_1^2 S_2^2 F G I_{01} s + 2C_1^2 S_2^4 F G^2 I_{01} R_2 s \\
& + 2S_1^2 S_2^4 F G^2 I_{01} R_2 s + 2C_1^2 F G^2 I_{01} R_2 s + 2S_1^2 F G^2 I_{01} R_2 s + 2S_2^4 G^2 I_{02} R_2 \cos(\varphi_{II}) - 2G^2 I_{02} R_2 \cos(\varphi_{II}) + 2C_1^2 S_2^4 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_{II}) + 2S_1^2 S_2^4 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_{II}) \\
& - 2C_1^2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_{II}) - 2S_1^2 F G^2 I_{01} R_2 s \cos(\varphi_{II}) \phi_2 + 8D_{\text{diff}} (\nabla_t^2 \phi_2) \\
& + G R_2 ((4\bar{\Delta} G I_{02} C_2^4 + 4C_1^2 \bar{\Delta} F G I_{01} s C_2^4 + 4S_1^2 \bar{\Delta} F G I_{01} s C_2^4 + 4\bar{\Delta} G I_{02} \cos(\varphi_{II}) C_2^4 + 4C_1^2 \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\varphi_{II}) C_2^4 + 4S_1^2 \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\varphi_{II}) C_2^4 + 8S_2 \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\rho_1 + \varphi_I) C_2^3 \\
& - 4S_2 \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\rho_1 - \varphi_I - \varphi_{II}) C_2^3 + 16C_1 S_1 S_2 \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\varphi_I - \varphi_{II}) C_2^3 + 4S_2 \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\rho_1 + \varphi_I - \varphi_{II}) C_2^3 - 4S_2 \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\rho_1 - \varphi_I + \varphi_{II}) C_2^3 \\
& + 16C_1 S_1 S_2 \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\varphi_I + \varphi_{II}) C_2^3 + 4S_2 \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\rho_1 + \varphi_I + \varphi_{II}) C_2^3 + 24S_2^2 \bar{\Delta} G I_{02} C_2^2 + 24C_1^2 S_2^2 \bar{\Delta} F G I_{01} s C_2^2 + 24S_1^2 S_2^2 \bar{\Delta} F G I_{01} s C_2^2 - 8\bar{\Delta} I_{02} \cos(\varphi_{II}) C_2^2 \\
& + 24S_2^2 \bar{\Delta} G I_{02} \cos(\varphi_{II}) C_2^2 - 8C_1^2 \bar{\Delta} F I_{01} s \cos(\varphi_{II}) C_2^2 - 8S_1^2 \bar{\Delta} F I_{01} s \cos(\varphi_{II}) C_2^2 + 24C_1^2 S_2^2 \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\varphi_{II}) C_2^2 + 24S_1^2 S_2^2 \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\varphi_{II}) C_2^2 + 4G I_{02} \sin(\rho_2 - \varphi_{II}) C_2^2 \\
& - 4G I_{02} \sin(\rho_2 + \varphi_{II}) C_2^2 + 2F G I_{01} s \sin(\rho_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) C_2^2 + F G I_{01} s \sin(\rho_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) C_2^2 + F G I_{01} s \sin(\rho_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) C_2^2 \\
& - 2F G I_{01} s \sin(\rho_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) C_2^2 - F G I_{01} s \sin(\rho_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) C_2^2 - F G I_{01} s \sin(\rho_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1}) C_2^2 \\
& + 4C_1 S_1 F G I_{01} s \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 - 4C_1 S_1 F G I_{01} s \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 - 4C_1 S_1 F G I_{01} s \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 \\
& + 4C_1 S_1 F G I_{01} s \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 + 2F G I_{01} s \sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 \\
& - F G I_{01} s \sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 - F G I_{01} s \sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 \\
& - 2F G I_{01} s \sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 + F G I_{01} s \sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 \\
& + F G I_{01} s \sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_1 \phi_{h1} + 2\alpha_0 \bar{\Delta} L_2 \phi_{h2}) C_2^2 - 8S_2 (C_2^2 + S_2^2) \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\rho_1 - \varphi_I) C_2 + 32C_1 S_1 S_2 (C_2^2 + S_2^2) \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\varphi_I) C_2 \\
& + 8S_2^3 \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\rho_1 + \varphi_I) C_2 + 4S_2 \bar{\Delta} F I_{01} s \cos(\rho_1 - \varphi_I - \varphi_{II}) C_2 - 4S_2^3 \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\rho_1 - \varphi_I - \varphi_{II}) C_2 - 16C_1 S_1 S_2 \bar{\Delta} F I_{01} s \cos(\varphi_I - \varphi_{II}) C_2 + 16C_1 S_1 S_2^3 \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\varphi_I - \varphi_{II}) C_2 \\
& - 4S_2 \bar{\Delta} F I_{01} s \cos(\rho_1 + \varphi_I - \varphi_{II}) C_2 + 4S_2^3 \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\rho_1 + \varphi_I - \varphi_{II}) C_2 + 4S_2 \bar{\Delta} F I_{01} s \cos(\rho_1 - \varphi_I + \varphi_{II}) C_2 - 4S_2^3 \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\rho_1 - \varphi_I + \varphi_{II}) C_2 - 16C_1 S_1 S_2 \bar{\Delta} F I_{01} s \cos(\varphi_I + \varphi_{II}) C_2 \\
& + 16C_1 S_1 S_2^3 \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\varphi_I + \varphi_{II}) C_2 - 4S_2 \bar{\Delta} F I_{01} s \cos(\rho_1 + \varphi_I + \varphi_{II}) C_2 + 4S_2^3 \bar{\Delta} F G I_{01} s \cos(\rho_1 + \varphi_I + \varphi_{II}) C_2 + 4S_2^4 \bar{\Delta} G I_{02} - 4\bar{\Delta} G I_{02} + 4C_1^2 S_2^4 \bar{\Delta} F G I_{01} s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4S_1^2S_2^4\bar{\Delta}FGI_{01}s - 4C_1^2\bar{\Delta}FGI_{01}s - 4S_1^2\bar{\Delta}FGI_{01}s - 8S_2^2\bar{\Delta}I_{02}\cos(\varphi_{II}) + 4S_2^4\bar{\Delta}GI_{02}\cos(\varphi_{II}) + 4\bar{\Delta}GI_{02}\cos(\varphi_{II}) - 8C_1^2S_2^2\bar{\Delta}FI_{01}s\cos(\varphi_{II}) - 8S_1^2S_2^2\bar{\Delta}FI_{01}s\cos(\varphi_{II}) + 4C_1^2S_2^4\bar{\Delta}FGI_{01}s\cos(\varphi_{II}) \\
& +4S_1^2S_2^4\bar{\Delta}FGI_{01}s\cos(\varphi_{II}) + 4C_1^2\bar{\Delta}FGI_{01}s\cos(\varphi_{II}) + 4S_1^2\bar{\Delta}FGI_{01}s\cos(\varphi_{II}) + 4S_2^2GI_{02}\sin(\rho_2 - \varphi_{II}) - 4I_{02}\sin(\rho_2 - \varphi_{II}) - 4S_2^2GI_{02}\sin(\rho_2 + \varphi_{II}) + 4I_{02}\sin(\rho_2 + \varphi_{II}) \\
& -2FI_{01}s\sin(\rho_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) + 2S_2^2FGI_{01}s\sin(\rho_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) - FI_{01}s\sin(\rho_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) + S_2^2FGI_{01}s\sin(\rho_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) \\
& -FI_{01}s\sin(\rho_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) + S_2^2FGI_{01}s\sin(\rho_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) + 2FI_{01}s\sin(\rho_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) - 2S_2^2FGI_{01}s\sin(\rho_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) \\
& +FI_{01}s\sin(\rho_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) - S_2^2FGI_{01}s\sin(\rho_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) + FI_{01}s\sin(\rho_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) - S_2^2FGI_{01}s\sin(\rho_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) \\
& -4C_1S_1FI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) + 4C_1S_1S_2^2FGI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) + 4C_1S_1FI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) \\
& -4C_1S_1S_2^2FGI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) + 4C_1S_1FI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) - 4C_1S_1S_2^2FGI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) \\
& -4C_1S_1FI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) + 4C_1S_1S_2^2FGI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) - 2FI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) \\
& +2S_2^2FGI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) + FI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) \\
& -S_2^2FGI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) + FI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) \\
& -S_2^2FGI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) + 2FI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) \\
& -2S_2^2FGI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) - FI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) \\
& +S_2^2FGI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) - FI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) \\
& +S_2^2FGI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) \sin\left(\frac{d_2\nabla_t^2}{k_0}\right) [\phi_2] \\
& -(4GI_{02}C_2^4 + 4C_1^2FGI_{01}sC_2^4 + 4S_1^2FGI_{01}sC_2^4 + 4GI_{02}\cos(\varphi_{II})C_2^4 + 4C_1^2FGI_{01}s\cos(\varphi_{II})C_2^4 + 4S_1^2FGI_{01}s\cos(\varphi_{II})C_2^4 + 8S_2FGI_{01}s\cos(\rho_1 + \varphi_I)C_2^3 - 4S_2FGI_{01}s\cos(\rho_1 - \varphi_I - \varphi_{II})C_2^3 \\
& +16C_1S_1S_2FGI_{01}s\cos(\varphi_I - \varphi_{II})C_2^3 + 4S_2FGI_{01}s\cos(\rho_1 + \varphi_I - \varphi_{II})C_2^3 - 4S_2FGI_{01}s\cos(\rho_1 - \varphi_I + \varphi_{II})C_2^3 + 16C_1S_1S_2FGI_{01}s\cos(\varphi_I + \varphi_{II})C_2^3 + 4S_2FGI_{01}s\cos(\rho_1 + \varphi_I + \varphi_{II})C_2^3 \\
& +24S_2^2GI_{02}C_2^2 + 24C_1^2S_2^2FGI_{01}sC_2^2 + 24S_1^2S_2^2FGI_{01}sC_2^2 + 24S_2^2GI_{02}\cos(\varphi_{II})C_2^2 - 8I_{02}\cos(\varphi_{II})C_2^2 - 8C_1^2FI_{01}s\cos(\varphi_{II})C_2^2 - 8S_1^2FI_{01}s\cos(\varphi_{II})C_2^2 + 24C_1^2S_2^2FGI_{01}s\cos(\varphi_{II})C_2^2 \\
& +24S_1^2S_2^2FGI_{01}s\cos(\varphi_{II})C_2^2 - 4\bar{\Delta}GI_{02}\sin(\rho_2 - \varphi_{II})C_2^2 + 4\bar{\Delta}GI_{02}\sin(\rho_2 + \varphi_{II})C_2^2 - 2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(\rho_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1})C_2^2 - \bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(\rho_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1})C_2^2 \\
& -\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(\rho_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1})C_2^2 + 2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(\rho_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1})C_2^2 + \bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(\rho_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1})C_2^2 + \bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(\rho_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1})C_2^2 \\
& -4C_1S_1\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2})C_2^2 + 4C_1S_1\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2})C_2^2 + 4C_1S_1\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2})C_2^2 \\
& -4C_1S_1\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2})C_2^2 - 2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2})C_2^2 \\
& +\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2})C_2^2 + \bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2})C_2^2 \\
& +2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2})C_2^2 - \bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2})C_2^2 \\
& -\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2})C_2^2 - 8S_2(C_2^2 + S_2^2)FGI_{01}s\cos(\rho_1 - \varphi_I)C_2 + 32C_1S_1S_2(C_2^2 + S_2^2)FGI_{01}s\cos(\varphi_I)C_2 + 8S_2^3FGI_{01}s\cos(\rho_1 + \varphi_I)C_2 \\
& +4S_2FI_{01}s\cos(\rho_1 - \varphi_I - \varphi_{II})C_2 - 4S_2^3FGI_{01}s\cos(\rho_1 - \varphi_I - \varphi_{II})C_2 - 16C_1S_1S_2FI_{01}s\cos(\varphi_I - \varphi_{II})C_2 + 16C_1S_1S_2^3FGI_{01}s\cos(\varphi_I - \varphi_{II})C_2 - 4S_2FI_{01}s\cos(\rho_1 + \varphi_I - \varphi_{II})C_2 \\
& +4S_2^3FGI_{01}s\cos(\rho_1 + \varphi_I - \varphi_{II})C_2 + 4S_2FI_{01}s\cos(\rho_1 - \varphi_I + \varphi_{II})C_2 - 4S_2^3FGI_{01}s\cos(\rho_1 - \varphi_I + \varphi_{II})C_2 - 16C_1S_1S_2FI_{01}s\cos(\varphi_I + \varphi_{II})C_2 + 16C_1S_1S_2^3FGI_{01}s\cos(\varphi_I + \varphi_{II})C_2 \\
& -4S_2FI_{01}s\cos(\rho_1 + \varphi_I + \varphi_{II})C_2 + 4S_2^3FGI_{01}s\cos(\rho_1 + \varphi_I + \varphi_{II})C_2 + 4S_2^4GI_{02} - 4GI_{02} + 4C_1^2S_2^4FGI_{01}s + 4S_1^2S_2^4FGI_{01}s - 4C_1^2FGI_{01}s - 4S_1^2FGI_{01}s - 8S_2^2I_{02}\cos(\varphi_{II}) \\
& +4S_2^4GI_{02}\cos(\varphi_{II}) + 4GI_{02}\cos(\varphi_{II}) - 8C_1^2S_2^2FI_{01}s\cos(\varphi_{II}) - 8S_1^2S_2^2FI_{01}s\cos(\varphi_{II}) + 4C_1^2S_2^4FGI_{01}s\cos(\varphi_{II}) + 4S_1^2S_2^4FGI_{01}s\cos(\varphi_{II}) + 4C_1^2FGI_{01}s\cos(\varphi_{II}) + 4S_1^2FGI_{01}s\cos(\varphi_{II}) \\
& +4\bar{\Delta}I_{02}\sin(\rho_2 - \varphi_{II}) - 4S_2^2\bar{\Delta}GI_{02}\sin(\rho_2 - \varphi_{II}) - 4\bar{\Delta}I_{02}\sin(\rho_2 + \varphi_{II}) + 4S_2^2\bar{\Delta}GI_{02}\sin(\rho_2 + \varphi_{II}) + 2\bar{\Delta}FI_{01}s\sin(\rho_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) - 2S_2^2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(\rho_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\bar{\Delta}FI_{01}s\sin(\rho_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) - S_2^2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(\rho_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) + \bar{\Delta}FI_{01}s\sin(\rho_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) - S_2^2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(\rho_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) \\
& - 2\bar{\Delta}FI_{01}s\sin(\rho_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) + 2S_2^2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(\rho_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) - \bar{\Delta}FI_{01}s\sin(\rho_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) + S_2^2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(\rho_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) \\
& - \bar{\Delta}FI_{01}s\sin(\rho_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) + S_2^2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(\rho_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1}) + 4C_1S_1\bar{\Delta}FI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) \\
& - 4C_1S_1S_2^2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) - 4C_1S_1\bar{\Delta}FI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) + 4C_1S_1S_2^2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) \\
& - 4C_1S_1\bar{\Delta}FI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) + 4C_1S_1S_2^2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) + 4C_1S_1\bar{\Delta}FI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) \\
& - 4C_1S_1S_2^2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) + 2\bar{\Delta}FI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) \\
& - 2S_2^2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) - \bar{\Delta}FI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) \\
& + S_2^2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) - \bar{\Delta}FI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) \\
& + S_2^2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I - \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) - 2\bar{\Delta}FI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) \\
& + 2S_2^2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) + \bar{\Delta}FI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) \\
& - S_2^2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) + \bar{\Delta}FI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2}) \\
& - S_2^2\bar{\Delta}FGI_{01}s\sin(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \varphi_I + \varphi_{II} - 2\alpha_0\bar{\Delta}L_1\phi_{h1} + 2\alpha_0\bar{\Delta}L_2\phi_{h2})) \cos\left(\frac{d_2\nabla_t^2}{k_0}\right) [\phi_2])
\end{aligned} \tag{A.11}$$

# Literaturverzeichnis

- [AA05] AKHMEDIEV, N.N. und N. ANKIEWICZ (Herausgeber): *Dissipative Solitons*. Springer, 2005.
- [AAGW<sup>+</sup>01] ACKEMANN, T., A. AUMANN, E. GROSSE WESTHOFF, YU.A. LOGVIN und W. LANGE: *Polarization degrees of freedom in optical pattern forming systems: alkali metal vapour in a single-mirror arrangement*. Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, 3(2):S124–S132, 2001.
- [AAGWL02] AUMANN, A., T. ACKEMANN, E. GROSSE WESTHOFF und W. LANGE: *Eightfold quasipatterns in an optical pattern-forming system*. Phys. Rev. E, 66(4):046220, Oct 2002.
- [ABL<sup>+</sup>97] AUMANN, A., E. BÜTHE, YU. A. LOGVIN, T. ACKEMANN und W. LANGE: *Polarized patterns in sodium vapor with single mirror feedback*. Phys. Rev. A, 56(3):R1709–R1712, Sep 1997.
- [ABR99] ARECCHI, F. TITO, S. BOCCALETTI und P. RAMAZZA: *Pattern formation and competition in nonlinear optics*. Phys. Rep., 318(1-2):1–83, September 1999.
- [Ack96] ACKEMANN, T.: *Spontane Musterbildung in einem Atomaren Dampf mit optischer Rückkopplung*. Doktorarbeit, WWU Münster, 1996.
- [AF90] ABRAHAM, N.B. und W.J. FIRTH: *Overview of transverse effects in nonlinear-optical systems*. J. Opt. Soc. Am.B, 7(6):951–961, June 1990.
- [AF05] ACKEMANN, T. und W.J. FIRTH: *Dissipative Solitons in Pattern-Forming Nonlinear Optical Systems*. Lect. Notes. Phys., 661:55–100, 2005.

- [AFH95] ARGYRIS, J., G. FAUST und M. HAASE: *Die Erforschung des Chaos*. Vieweg, 1995.
- [AGWAL00] AUMANN, A., E. GROSSE WESTHOFF, T. ACKEMANN und W. LANGE: *Magnetic field control over microscopic symmetry properties of an optical pattern-forming system: experiment*. Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, 2(3):421–425, 2000.
- [AGWH+99] AUMANN, A., E. GROSSE WESTHOFF, R. HERRERO, T. ACKEMANN und W. LANGE: *Interplay of dispersion and absorption in a new optical pattern-forming system*. Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, 1(1):166–170, 1999.
- [AL94] ACKEMANN, T. und W. LANGE: *Non- and nearly hexagonal patterns in sodium vapor generated by single-mirror feedback*. Phys. Rev. A, 50(6):R4468–R4471, Dec 1994.
- [ALHL95] ACKEMANN, T., YU. A. LOGVIN, A. HEUER und W. LANGE: *Transition between Positive and Negative Hexagons in Optical Pattern Formation*. Phys. Rev. Lett., 75(19):3450–3453, Nov 1995.
- [Aum99] AUMANN, A.: *Optical patterns and quasipatterns in an alkali metal vapor with feedback*. Doktorarbeit, WWU Münster, 1999.
- [AVI88] AKHMANOV, S., M.A. VORONTSOV und V.Y. IVANOV: *Large-scale transverse nonlinear interactions in laser beams; new types of nonlinear waves; onset of optical turbulence*. JETP Lett., 47:707, 1988.
- [BKO+02] BOCCALETTI, S., J. KURTHS, G. OSIPOV, D. L. VALLADARES und C. S. ZHOU: *The synchronization of chaotic systems*. Phys. Rep., 366(1-2):1–101, August 2002.
- [BLP+97] BRAMBILLA, M., L. A. LUGIATO, F. PRATI, L. SPINELLI und W. J. FIRTH: *Spatial Soliton Pixels in Semiconductor Devices*. Phys. Rev. Lett., 79(11):2042–2045, Sep 1997.
- [Boy00] BOYD, J.P.: *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Publications, 2000.



- [BTB<sup>+</sup>02] BARLAND, S., J. R. TREDICCE, M. BRAMBILLA, L. A. LUGIATO, S. BALLE, M. GIUDICI, L. SPINELLI, G. TISSONI, T. KNODL, M. MILLER und R. JAGER: *Cavity solitons as pixels in semiconductor microcavities*. *Nature*, 419:699–702, 2002.
- [CH93] CROSS, M. C. und P. C. HOHENBERG: *Pattern formation outside of equilibrium*. *Rev. Mod. Phys.*, 65(3):851, Jul 1993.
- [CJ41] CLARK JONES, R.: *New calculus for the treatment of optical systems. I. Description and discussion of the calculus*. *J. Opt. Soc. Am.*, 31(7):488, 1941.
- [CMB<sup>+</sup>99] COTTER, D., R. J. MANNING, K. J. BLOW, A. D. ELLIS, A. E. KELLY, D. NESSET, I. D. PHILLIPS, A. J. POUSTIE und D. C. ROGER S: *Nonlinear Optics for High-Speed Digital Information Processing*. *Science*, 286(5444):1523–1528, 1999.
- [Cou86] COULLET, P.: *Commensurate-incommensurate transition in nonequilibrium systems*. *Phys. Rev. Lett.*, 56(7):724–727, Feb 1986.
- [CTDL99a] COHEN-TANNOUJJI, C., B. DIU und F. LALOE: *Quantenmechanik I*. Walter de Gruyter, 1999.
- [CTDL99b] COHEN-TANNOUJJI, C., B. DIU und F. LALOE: *Quantenmechanik II*. Walter de Gruyter, 1999.
- [CW89] COULLET, P. und D. WALGRAEF: *Spatial Forcing of 2D Wave Patterns*. *Europhys. Lett.*, 10(6):525–531, 1989.
- [DBZE01] DOLNIK, MILOS, IGAL BERENSTEIN, ANATOL M. ZHABOTINSKY und IRVING R. EPSTEIN: *Spatial Periodic Forcing of Turing Structures*. *Phys. Rev. Lett.*, 87(23):238301, Nov 2001.
- [DF91] D’ALESSANDRO, G. und W. J. FIRTH: *Spontaneous hexagon formation in a nonlinear optical medium with feedback mirror*. *Phys. Rev. Lett.*, 66(20):2597–2600, May 1991.
- [DF92] D’ALESSANDRO, G. und W. J. FIRTH: *Hexagonal spatial patterns for a Kerr slice with a feedback mirror*. *Phys. Rev. A*, 46(1):537–548, Jul 1992.

- [DH97] DANGEL, S. und R. HOLZNER: *Semiclassical theory for the interaction dynamics of laser light and sodium atoms including the hyperfine structure*. Phys. Rev. A, 56(5):3937–3949, Nov 1997.
- [DJ89] DRAZIN, P.G. und R.S. JOHNSON: *Solitons: an introduction*. Cambridge University Press, 1989.
- [DSS97] DIONNE, B., M. SILBER und A.C. SKELDON: *Stability results for steady, spatially periodic planforms*. Nonlin., 10:321–353, 1997.
- [DSS<sup>+</sup>98] DENZ, C., M. SCHWAB, M. SEDLATSCHKE, T. TSCHUDI und T. HONDA: *Pattern dynamics and competition in a photorefractive feedback system*. J. Opt. Soc. Am. B, 15(7):2057–2064, 1998.
- [DSW03] DENZ, C., M. SCHWAB und C. WEILNAU (Herausgeber): *Transverse-Pattern Formation in Photorefractive Optics*. Springer, 2003.
- [Duc73] DUCLOY, MARTIAL: *Nonlinear Effects in Optical Pumping of Atoms by a High-Intensity Multimode Gas Laser. General Theory*. Phys. Rev. A, 8(4):1844–1859, Oct 1973.
- [Fir90] FIRTH, W.J.: *Spatial Instabilities in a Kerr Medium with Single Feedback Mirror*. Journal of Mod. Opt., 37:151–153(3), February 1990.
- [Fle91] FLETCHER, C.A.J.: *Computational Techniques for Fluid Dynamics*. Springer, 2nd Auflage, 1991.
- [For98] FORNBERG, B.: *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*. Cambridge University Press, 1998.
- [FS96] FIRTH, W. J. und A. J. SCROGGIE: *Optical Bullet Holes: Robust Controllable Localized States of a Nonlinear Cavity*. Phys. Rev. Lett., 76(10):1623–1626, Mar 1996.
- [GAGW<sup>+</sup>04] GOMILA, D., T. ACKEMANN, E. GROSSE-WESTHOFF, P. COLET und W. LANGE: *Secondary bifurcations of hexagonal patterns in a nonlinear optical system: Alkali metal vapor in a single-mirror arrangement*. Phys. Rev. E, 69(3):036205, 2004.

- [GMP94] GRYNBERG, G., A. MAÎTRE und A. PETROSSIAN: *Flower-like patterns generated by a laser beam transmitted through a rubidium cell with single feedback mirror*. Phys. Rev. Lett., 72(15):2379–2382, Apr 1994.
- [GOR01] GARCÍA-OJALVO, J. und RAJARSHI ROY: *Spatiotemporal Communication with Synchronized Optical Chaos*. Phys. Rev. Lett., 86(22):5204–5207, May 2001.
- [GSMT00] GALLEGO, RAFA, MAXI SAN MIGUEL und RAÚL TORAL: *Self-similar domain growth, localized structures, and labyrinthine patterns in vectorial Kerr resonators*. Phys. Rev. E, 61(3):2241–2244, Mar 2000.
- [GW02] GROSSE WESTHOFF, E.: *Quasimuster und Überstrukturen in einem optisch getriebenem atomaren Dampf*. Doktorarbeit, WWU Münster, 2002.
- [GWHAL03] GROSSE WESTHOFF, E., R. HERRERO, T. ACKEMANN und W. LANGE: *Self-organized superlattice patterns with two slightly differing wave numbers*. Phys. Rev. E, 67(2):025203, Feb 2003.
- [GWKLA00] GROSSE WESTHOFF, E., V. KNEISEL, Y.A. LOGVIN und T. ACKEMANN: *Pattern formation in the presence of an intrinsic polarization instability*. Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, 2:386–392, 2000.
- [GZCD07] GÜTLICH, B., H. ZIMMERMANN, C. CLEFF und C. DENZ: *Dynamic and static position control of optical feedback solitons*. Chaos, 17(3):037113, 2007.
- [GZD<sup>+</sup>05] GÜTLICH, B., H. ZIMMERMANN, C. DENZ, R. NEUBECKER, M. KREUZER und T. TSCHUDI: *Forcing and control of localized states in optical single feedback systems*. Appl. Phys. B: Lasers and Optics, 81(7):927–936, November 2005.
- [Hak75] HAKEN, H.: *Cooperative phenomena in systems far from thermal equilibrium and in nonphysical systems*. Rev. Mod. Phys., 47(1):67, Jan 1975.
- [Hak81] HAKEN, H.: *Light: Volume I, Waves, Photons, Atoms*. North-Holland Publishing Company, 1981.

- [Hak83] HAKEN, H.: *Synergetics, Introduction and Advanced Topics*. Springer, 1983.
- [HCM<sup>+</sup>03] HILDEBRAND, MICHAEL, JIANXIA CUI, EUGENE MIHALIUK, JICHANG WANG und KENNETH SHOWALTER: *Synchronization of spatiotemporal patterns in locally coupled excitable media*. Phys. Rev. E, 68(2):026205, Aug 2003.
- [Hec87] HECHT, E.: *Optics*. Addison-Wesley, 2nd. Auflage, 1987.
- [HGWA<sup>+</sup>99] HERRERO, R., E. GROSSE WESTHOFF, A. AUMANN, T. ACKEMANN, YU. A. LOGVIN und W. LANGE: *Twelve-fold Quasiperiodic Patterns in a Nonlinear Optical System with Continuous Rotational Symmetry*. Phys. Rev. Lett., 82(23):4627–4630, Jun 1999.
- [HLA06] HUNEUS, F., W. LANGE und T. ACKEMANN: *Competition of pattern forming instabilities due to phase front curvature in an optical system*. Phys. Rev. E, 73(1):016215, 2006.
- [Hun06] HUNEUS, F.: *Dynamische Targetmuster und Spiralen in einem optischen Experiment zur Selbstorganisation*. Doktorarbeit, WWU Münster, 2006.
- [ISMS01] IZÚS, GONZALO, MAXI SAN MIGUEL und MARCO SANTA-GIUSTINA: *Phase-locked spatial domains and Bloch domain walls in type-II optical parametric oscillators*. Phys. Rev. E, 64(5):056231, Oct 2001.
- [KP78] KELLY, R.E. und D. PAL: *Thermal convection with spatially periodic boundary conditions: resonant wavelength excitation*. J. Fluid. Mech., 86(3):433–456, 1978.
- [LAL97] LOGVIN, YU. A., T. ACKEMANN und W. LANGE: *Subhexagons and ultrahexagons as a result of a secondary instability*. Phys. Rev. A, 55(6):4538–4544, Jun 1997.
- [LAT<sup>+</sup>00] LOGVIN, YU. A., A. AUMANN, W. TEGELER, T. ACKEMANN und W. LANGE: *Magnetic field control over microscopic symmetry properties of an optical pattern-forming system: theory*. Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, 2(3):426–431, 2000.

- [LBRT<sup>+</sup>02] LE BERRE, M., E. RESSAYRE, A. TALLET, Y. POMEAU und L. DI MENZA: *Example of a chaotic crystal: The labyrinth*. Phys. Rev. E, 66(2):026203, Aug 2002.
- [LG85] LOWE, MARY und J. P. GOLLUB: *Solitons and the commensurate-incommensurate transition in a convecting nematic fluid*. Phys. Rev. A, 31(6):3893–3897, Jun 1985.
- [LGL83] LOWE, M., J. P. GOLLUB und T. C. LUBENSKY: *Commensurate and Incommensurate Structures in a Nonequilibrium System*. Phys. Rev. Lett., 51(9):786–789, Aug 1983.
- [LL00] LU, WEIPING und SVETLANA L. LACHINOVA: *Formation and transition of labyrinthine domain patterns in a nonlinear optical system*. Phys. Rev. A, 63(1):013807, Dec 2000.
- [LLBR<sup>+</sup>95] LEDUC, D., M. LE BERRE, E. RESSAYRE, A. TALLET und A. MAITRE: *Simulation and analysis of the flower-like instability in the single feedback mirror experiment with rubidium vapor*. Opt. Comm., 118:447–456, 1995.
- [LLBRT96] LEDUC, D., M. LE BERRE, E. RESSAYRE und A. TALLET: *Quasipatterns in a polarization instability*. Phys. Rev. A, 53(2):1072–1080, Feb 1996.
- [Lug94] LUGIATO, L.A.: *Transverse nonlinear optics: Introduction and review*. Chaos, Solitons & Fractals, 4(8-9):1251–1258, 1994.
- [MB90] MCCORD, A. W. und R. J. BALLAGH: *Mutual beam reshaping by two interacting radiation modes*. J. Opt. Soc. Am. B, 7(1):73, 1990.
- [MCA<sup>+</sup>88] MEYER, CHRISTOPHER W., DAVID S. CANNELL, GUENTER AHLERS, J. B. SWIFT und P. C. HOHENBERG: *Pattern Competition in Temporally Modulated Rayleigh-Bénard Convection*. Phys. Rev. Lett., 61(8):947–950, Aug 1988.
- [MDLM86] MITSCHKE, F., R. DESERNO, W. LANGE und J. MLYNEK: *Magnetically induced optical self-pulsing in a nonlinear resonator*. Phys. Rev. A, 33(5):3219–3231, May 1986.
- [MN90] MOLONEY, J.V. und A.C. NEWELL: *Nonlinear Optics*. Physica D, 44:1–37, 1990.

- [MPL97] MICHAELIS, D., U. PESCHEL und F. LEDERER: *Multistable localized structures and superlattices in semiconductor optical resonators*. Phys. Rev. A, 56(5):R3366–R3369, Nov 1997.
- [MPVMn05] MÍGUEZ, D.G., V. PÉREZ-VILLAR und A.P. MUÑUZURI: *Turing instability controlled by spatiotemporal imposed dynamics*. Phys. Rev. E, 71(6):066217, 2005.
- [MT04] MANDEL, P. und M. TLIDI: *Transverse dynamics in cavity nonlinear optics (2000-2003)*. Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, 6:R60–R75, 2004.
- [NG04] NEUBECKER, R. und B. GÜTLICH: *Experimental Synchronization of Spatiotemporal Disorder*. Phys. Rev. Lett., 92(15):154101, 2004.
- [NJ03] NEUBECKER, R. und O. JAKOBY: *Spatial synchronization of regular optical patterns*. Phys. Rev. E, 67(6):066221, Jun 2003.
- [NOTT95] NEUBECKER, R., G.-L. OPPO, B. THUERING und T. TSCHUDI: *Pattern formation in a liquid-crystal light valve with feedback, including polarization, saturation, and internal threshold effects*. Phys. Rev. A, 52(1):791–808, Jul 1995.
- [NP77] NICOLIS, G. und I. PRIGOGINE: *Self-Organization in Nonequilibrium Systems*. Wiley, 1977.
- [OSF01] OPPO, G.-L., A. J. SCROGGIE und W. J. FIRTH: *Characterization, dynamics and stabilization of diffractive domain walls and dark ring cavity solitons in parametric oscillators*. Phys. Rev. E, 63(6):066209, May 2001.
- [Pat89] PATORSKI, K.: *The self-imaging phenomena and its applications*. In: *Progr. in Opt. XXVII*, Seiten 1–108. Elsevier, 1989.
- [Pes06] PESCH, M.: *Formation and Properties of a discrete family of dissipative solitons in a nonlinear optical system*. Doktorarbeit, WWU Münster, 2006.
- [PGWAL03] PESCH, M., E. GROSSE WESTHOFF, T. ACKEMANN und W. LANGE: *Direct measurement of multiple instability regions via a Fourier filtering method in an optical pattern forming system*. Phys. Rev. E, 68(1):016209, Jul 2003.

- [PGWAL05] PESCH, M., E. GROSSE-WESTHOFF, T. ACKEMANN und W. LANGE: *Observation of a Discrete Family of Dissipative Solitons in a Nonlinear Optical System*. Phys. Rev. Lett., 95(14):143906, 2005.
- [PP87] PEDROTTI, F.L. und L.S. PEDROTTI: *Introduction to Optics*. Prentice-Hall, 1987.
- [Pyr92] PYRAGAS, K.: *Continuous control of chaos by self-controlling feedback*. Phys. Lett. A, 170:421–428, 1992.
- [Ray16] RAYLEIGH, LORD: *On Convection Currents in a Horizontal Layer of Fluid, when the Higher Temperature is on the Under Side*. Phil. Mag., 32(6th Ser.)(192):529–546, 1916.
- [RBB06] RAMAZZA, P. L., U. BORTOLOZZO und S. BOCCALETTI: *Experimental synchronization of spatiotemporal chaos in nonlinear optics*. Phys. Rev. E, 73(3):036213, 2006.
- [RK90] ROSANOV, N. N. und G. V. KHODOVA: *Diffractive auto-solitons in nonlinear interferometers*. J. Opt. Soc. Am. B, 7(6):1057, 1990.
- [RMMn<sup>+</sup>03] RÜDIGER, S., D. G. MÍGUEZ, A. P. MUÑUZURI, F. SAGUÉS und J. CASADEMUNT: *Dynamics of Turing Patterns under Spatiotemporal Forcing*. Phys. Rev. Lett., 90(12):128301, Mar 2003.
- [Rom04] ROMANOV, O.G.: *Periodical and Labyrinthine Optical Patterns in the Problem on Two-Wave Mixing in Ring Cavity*. Nonlin. Phen. Comp. Sys., 7(2):168–176, 2004.
- [Ros92] ROSANOV, N.N. (Herausgeber): *Transverse Patterns in Nonlinear Optics*. SPIE, 1992.
- [Sch06] SCHÜTTLER, J.: *Selbstorganisierte Labyrinth und Spiralen in einem nichtlinearen optischen System*. Doktorarbeit, WWU Münster, 2006.
- [SF96] SCROGGIE, A. J. und W. J. FIRTH: *Pattern formation in an alkali-metal vapor with a feedback mirror*. Phys. Rev. A, 53(4):2752–2764, Apr 1996.

- [SFAL00] SCHÄPERS, B., M. FELDMANN, T. ACKEMANN und W. LANGE: *Interaction of Localized Structures in an Optical Pattern-Forming System*. Phys. Rev. Lett., 85(4):748–751, Jul 2000.
- [SSM98] STALIUNAS, K. und VÍCTOR J. SÁNCHEZ-MORCILLO: *Spatial-localized structures in degenerate optical parametric oscillators*. Phys. Rev. A, 57(2):1454–1457, Feb 1998.
- [SSM03] STALIUNAS, K. und V.J. SÁNCHEZ MORCILLO (Herausgeber): *Transverse Patterns in Nonlinear Optical Resonators*. Springer, 2003.
- [Tal36] TALBOT, H.F.: *Facts relating to Optical Science. No. IV*. Phil. Mag., 9(3rd Ser.)(56):401–407, 1836.
- [TBWS93] TAMBURRINI, M., M. BONAVIDA, S. WABNITZ und E. SANTAMATO: *Hexagonally patterned beam filamentation in a thin liquid-crystal film with a single feedback mirror*. Opt. Lett., 18(11):855–, 1993.
- [TSW98] TARANENKO, V. B., K. STALIUNAS und C. O. WEISS: *Pattern Formation and Localized Structures in Degenerate Optical Parametric Mixing*. Phys. Rev. Lett., 81(11):2236–2239, Sep 1998.



# Lebenslauf

Name: Guido Krüger  
Geburtsdatum: 16.11.1976  
Geburtsort: Melle  
Staatsangehörigkeit: deutsch  
Eltern: Ursula Krüger, geb. Wissmann  
Hans-Günter Krüger

## Schulbildung

1983 - 1987 Grundschule Riemsloh  
1987 - 1989 Orientierungstufe Neuenkirchen  
1989 - 1996 Gymnasium Melle  
21.05.1996 Abitur

## Zivildienst

Aug.1996 - Aug.1997 Zivildienst im DRK Altenheim Hardachstift, Melle

## Studium

WS 97/98 Aufnahme des Studiums der Physik an der WWU Münster  
28.09.1999 Vordiplom  
01.09.2001 Beginn der Diplomarbeit am Institut für Angewandte Physik  
mit dem Thema: "Begriffsbildung in Neuronalen Netzen"  
28.03.2003 Diplom

## Tätigkeiten

Okt.00-Sept.02 Studentische Hilfskraft als Tutor im Fachbereich Mathematik  
Okt.02-Apr.03 Studentische Hilfskraft als Praktikumsleiter  
im Physikalischen Institut  
Mai.03-Dez.05 Studentische Hilfskraft als Tutor in theoretischer Physik  
Jan.06-Dez.07 Wiss. Mitarbeiter und Tutor an der WWU Münster

## Dissertation

01.05.2003 Beginn der Dissertation am Institut für Theoretische Physik  
Betreuer: Prof. Dr. R. Friedrich



# Danksagung

Zum Abschluß dieser Arbeit möchte ich all jenen danken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein erster Dank geht an Herrn Prof. Dr. Rudolf Friedrich für die Möglichkeit diese Arbeit anzufertigen, für die vielen Diskussionen und Anregungen sowie für die ständige Gesprächsbereitschaft.

Danken möchte ich auch Frau Prof.‘in Dr. Cornelia Denz für die Anfertigung des Zweitgutachtens.

Bedanken möchte ich mich weiterhin bei der gesamten Arbeitsgruppe von Prof. Friedrich für die freundliche Unterstützung und das sehr angenehme Arbeitsklima. Die Zusammenarbeit mit allen hat mir viel Freude bereitet.

Den Korrekturlesern David Kleinhans, Oliver Kamps und Julia Fischer möchte ich meinen besonderen Dank aussprechen.

Nicht zuletzt danke ich von Herzen meinen Eltern sowie meiner Schwester, die mich während des Studiums und der Promotion zu jeder Zeit bedingungslos unterstützt haben.