Martin Hohelüchter

Formale Axiome als Attribute

Folgerungen aus einer unbeachteten Hilbert-These

Einleitung. Ausgehend von der Geometrie hat sich die axiomatische Methode nicht nur in der Mathematik, sondern in der gesamten nichtempirischen Wissenschaft weitgehend durchgesetzt. Sie erlaubt einen durchsichtigen und stringenten Aufbau eines Theoriegebäudes, indem sie dessen Bausteine in eine deduktive Ordnung bringt, die auf den „Axiomen“ basiert. Während dabei im Zuge der Entwicklung der Logik an Architektur und Statik eines solchen Gebäudes ständig gearbeitet wurde, schien für eine kritische Untersuchung seines Materials keine Notwendigkeit zu bestehen: Bausteine und insbesondere Axiome einer Theorie galten bis zum Ende des 19. Jahrhunderts fraglos als positive Aussagen über die Welt. In der durch Riemann u.a. ausgelösten Grundlagenkrise mußte diese Haltung revidiert werden.

Da diese Krise nicht einzelne Wissenschaften, sondern ihre gemeinsame Methode betrifft, kann sie nicht in Einzeldisziplinen fachwissenschaftlich, sondern nur fächerübergreifend philosophisch bewältigt werden. Eine Lösung kann demnach wohl in einer einzelnen Disziplin gesucht werden, sie darf aber nicht für sie spezifisch sein, sondern muß auf jede deduktive Disziplin übertragen werden können.

Konsequenzen aus dieser Erschütterung der Grundlagen wurden bisher vor allem in der Mathematik gezogen. Dort stellte David Hilbert mit der „formalen Axiomatik“ eine nicht mehr auf Tatsachen bezogene Axiomatik vor. Bausteine einer mathematischen Theorie sind danach sprachliche „Formeln“. „Formale Axiome“ sind Formeln, die am Beginn von „Herleitungen“ stehen. Der Weltbezug einer Theorie wird erst durch Interpretation auf ein „Modell“ hergestellt. In § 1 befassen wir uns kritisch mit diesem Ansatz, der heute weitgehend akzeptiert ist, und stellen ihm einen anderen gegenüber, der im Keim ebenfalls bei Hilbert zu finden ist, aber unbeachtet blieb. Danach sind formale Axiome nicht Formeln, sondern Attribute: Formale *mathematische* Axiome sind Attribute von *Relationen.* Die Formalisierung bezieht sich dann nicht wie in der üblichen Auffassung auf *Interpretation*, sondern auf *Attribution*.

Ziel dieser Arbeit ist es, Bedingungen an die Gestalt formaler mathematischer Axiome und Axiomensysteme (bzgl. dieses zweiten Ansatzes) zu ermitteln und damit den Aufweis ihrer Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit u.ä. zu ermöglichen. Dazu werden wir im ersten Teil am Beispiel von Axiomen der Geometrie den Status inhaltlicher (§ 2) und formaler (§ 3) mathematischer *Einzelaxiome* analysieren und in bezug darauf dann (in § 4) u.a. die Frage der Widerspruchsfreiheit von Axiomen behandeln. Im zweiten Teil (§ 5) werden wir den Begriff des Axiomensystems diskutieren und allgemein Bedingungen an *Systeme* formaler mathematischer Axiome angeben.

Dieses Ziel erreichen wir durch allgemeine attributionstheoretische Überlegungen. Dabei gehen wir aus von einer Modifikation der Fregeschen Theorie der Attribution.[1]

[1] Diese haben wir vorgestellt in M.H., Ein formales Kategoriensystem.

§ 1 Problemstellung und Hilbertsche Lösung

1. Zur Grundlagenkrise der Mathematik. Jahrhunderte lang wurde die Frage nach dem Status von Axiomen als Frage nach ihrer Gültigkeit, Wahrheit o.ä. begriffen.[1] Die Einsicht, dass es möglich ist, zwei in sich widerspruchsfreie Geometrien zu entwickeln, die sich nur in einem Axiom unterscheiden[2] – die eine (euklidische) enthält das Parallelenaxiom[3], die andere (hyperbolische) ein dazu konträres Axiom[4] – , mußte all diese Diskussionen als müßig erweisen. Denn damit war z.B. das Parallelenaxiom zugleich wahr, insofern es ein Axiom war, und falsch, da es einem Axiom widersprach. Unter diesem Verdacht zugleich wahr und falsch sein zu können, standen danach sämtliche Axiome im überkommenen Sinne. Auf sie konnte die Mathematik somit nicht mehr gegründet werden. Damit war nicht die Methode, wohl aber der Gegenstand der Mathematik in Frage gestellt. Eine *Grundlagenkrise* nicht nur der Geometrie, sondern der gesamten Mathematik war die Folge.

1.a. Das Statusproblem in der Axiomatik. Diese Krise betraf nun primär nicht den *funktionalen*, sondern den *absoluten* Status der Axiome. Funktional sind die Axiome nämlich lediglich Basiselemente einer deduktiv aufgebauten Theorie, absolut dagegen haben sie einen gewissen Status, sind vielleicht Sachverhalte, Aussagen oder Formeln.[5] Dieses Statusproblem der Axiomatik mußte *vor* jeder tieferen Untersuchung gelöst werden. Denn der jeweilige Deduktionsbegriff muß zum Status der Axiome passen; er ist ja z.B. zwischen Aussagen ein anderer als zwischen Formeln.[6]

1.b. Zum revisionistischen Lösungsansatz Hilberts. In dieser Situation wurden mehrere Versuche einer neuen Grundlegung der Mathematik unternommen, u.a. von Frege und Whitehead/Russell (Logizismus), von Brouwer und Weyl (Intuitionismus) sowie von Hilbert (Formalismus).[7] Dabei scheint es besser, nicht mit irgendeinem Ansatz neu zu beginnen in der Hoffnung, das sichtbar gewordene Problem so umgangen zu haben, noch durch eine ad hoc vorgenommene Restriktion den Problembereich auszugrenzen, sondern durch eine Analyse der überkommenen “inhaltlichen Axiomatik“ den Grund der Schwierigkeiten aufzudecken und sie damit kontrolliert überwinden zu können.

Diesen letzgenannten Weg zu einem neuen Verständnis des absoluten Status der Axiome schlug David Hilbert ein, wenngleich er ihn nicht sehr weit verfolgte und von ihm bald zugunsten der Beweistheorie, einer Theorie der Deduktion[8], abwich. Ein erster Schritt auf diesem Weg besteht im Erfassen von Axiomen im alten Sinne und der Fixierung der Besonderheit solcher Axiome. Beispielhaft könnte dies in jeder beliebigen mathematischen Disziplin geschehen, da die Frage nach dem Status mathematischer Axiome von der Disziplin unabhängig ist. Hilbert wählte für seine Untersuchungen sinnvollerweise den Teilbereich, der die längste axiomatische Tradition hat und in dem das Problem zuerst auftrat, die Geometrie. Wir folgen ihm darin und betrachten exemplarisch seine Axiome der Geometrie.

---

[1] Vgl. dazu etwa den Artikel *Axiom II* im Hist. Wörterbuch der Philosophie

[2] Zur Entwicklung dieser Einsicht bei C.F. Gauß, N.J. Lobatschewsky, J.v. Bolyai und B:Riemann siehe etwa Herbert Meschkowski, PnM, S.22 ff und Heinz Bachmann, WmG , S.23 ff.

[3] Zu jeder Geraden gibt es durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt genau eine Parallele.

[4] Zu jeder Geraden gibt es durch jeden nicht auf ihr liegenden Punkt mindestens 2 Parallelen.

[5] Funktional sind Axiome und Theoreme verschieden, absolut haben sie denselben Status.

[6] Eine Deduktion (im weitesten Sinne) kann ja nur zwischen Einheiten gleicher Art auftreten, z.B. zwischen Sachverhalten, zwischen Aussagen oder zwischen Formeln.

[7] Vgl. dazu z.B. die Sammlung einschlägiger Texte in Oscar Becker, GdM, S.317 ff.

[8] Die Deduktion ist aber, wie oben angedeutet, von der Art ihrer Argumente abhängig.

2. Axiome der Geometrie hat Hilbert in zwei Schriften thematisiert, in den „Grundlagen der Geometrie“ (1899) und – zusammen mit Paul Bernays – in den „Grundlagen der Mathematik“ (1934). Sie behandeln das Thema zwar in gleicher Weise, lassen aber eine Entwicklung erkennen, wie die folgende knappe Wiedergabe seiner zwei Versionen von Axiomen der Geometrie zeigt.

2.a. Axiome in den „Grundlagen der Geometrie“. In den „Grundlagen der Geometrie“ wies Hilbert den Axiomen erstmalig eine Aufgabe zu, die ihren *absoluten* Status thematisierte. Denn dort stellte er gleich zu Beginn fest, mit welchen Einheiten sich die Geometrie befaßt:

(1.1) 1. mit gewissen „Dingen“, 2. mit „Beziehungen“ dazwischen.

Zu „denken“ sind danach nämlich

(1.2) (a) „drei verschiedene Systeme von Dingen“, genannt „Punkte, bezeichnet mit A,B,C,...“, „Geraden, bezeichnet mit a,b,c,...“ und „Ebenen, bezeichnet mit $\alpha,\beta,\gamma,...$“;
(b) „gewisse gegenseitige Beziehungen“ dazwischen, bezeichnet durch Worte wie *liegen, zwischen, kongruent*.“ [GdG S.2]

In bezug darauf haben dann nach Hilbert die Axiome folgendes zu leisten:

(1.3) „Durch die *Axiome der Geometrie* erfolgt die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen.“ [ibid.]

Nur diesem primären Inhalt der Axiome, „Beschreibung von Beziehungen“ zu sein, gilt hier unser Interesse, nicht ihrer späteren Funktion, als Basiseinheiten einer Deduktion zu dienen.

Wenn in diesem Sinne z.B. „die Verknüpfungsaxiome zwischen den Punkten, Geraden und Ebenen eine Verknüpfung herstellen“ [ibid.], dann ist darunter nach (1.3) zu verstehen, sie beschreiben eine solche Verknüpfung. Solche Axiome sind z.B.[1]:

I 1. Zu zwei Punkten A,B gibt es stets eine Gerade a, die mit jedem der beiden Punkte zusammengehört.
I 3. Auf einer Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte.
Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. [ibid. S. 2 ff]

Entsprechend „definieren die Axiome der Anordnung den Begriff *zwischen*“:

II 1. Wenn ein Punkt B zwischen einem Punkt A und einem Punkt C liegt, so sind A,B,C drei verschiedene Punkte, und B liegt dann auch zwischen C und A.
II 2. Zu zwei Punkten A und C gibt es stets wenigstens einen Punkt B auf der Geraden AC, so dass C zwischen A und B liegt. [ibid. S. 3 f]

Das „Parallelenpostulat“ von Euklid formuliert Hilbert folgendermaßen [ibid. S. 28]:

IV Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb a: dann gibt es in der durch A und a bestimmten Ebene höchstens eine Gerade,die durch A läuft und a nicht schneidet.

Die hier aufgeführten Beispielsaxiome betreffen nur zwei der in (1.2) genannten „Systeme", nämlich Punkte und Geraden. Es sind Axiome der „ebenen Geometrie“. Sie sind nun zwar gemäß (1.3) *Beispiele* von „Beschreibungen von Beziehungen“; aus ihnen geht aber nicht hervor, was als eine solche Beschreibung gelten kann, d.h.

(1.4) (i) was eine Beschreibung ist und
(ii) unter welchen Bedingungen sie eine einer *Beziehung* ist.

Eine Antwort darauf ist möglich erst durch eine veränderte Darstellung der Axiome in den „Grundlagen der Mathematik“.

2.b. Axiome in den „Grundlagen der Mathematik“. Dort stellt Hilbert zur Erläuterung des Unterschieds zwischen der alten „inhaltlichen“, und der neuen von ihm entworfenen „formalen“ Axiomatik erneut *inhaltliche* Axiome der ebenen Geometrie vor [S.6][2]. Verknüpfungs- und Ordnungsaxiome sowie das Parallelenaxiom sind danach [S.5 f]:

---

[1] Hilbert teilt die Axiome der Geometrie in 5 Gruppen ein, in 8 der Verknüpfung, 4 der Anordnung, 5 der Kongruenz, das Parallelenaxiom und 2 Axiome der Stetigkeit.

[2] Eine pure Seitenangabe bezieht sich im Folgenden immer auf D. Hilbert und P. Bernays, GdM.

(1.5) V1: $(x)(y)\ Gr(x,x,y)$ „x,x,y liegen stets auf einer Geraden“

V2: $(x)(y)(z)\ (Gr(x,y,z) \rightarrow [Gr(y,x,z) \wedge Gr(x,z,y)])$
„Wenn x,y,z auf einer Geraden liegen, so liegen stets auch y,x,z sowie auch x,z,y auf einer Geraden.“

V3: $(x)(y)(z)(u)\ (Gr(x,y,z) \wedge Gr(x,y,u) \wedge x \neq y) \rightarrow Gr(x,z,y)$
„Wenn x,y verschiedene Punkte sind und wenn x,y,z sowie x,y,u auf einer Geraden liegen, so liegen stets auch x,z,u auf einer Geraden.“

V4: $(Ex)(Ey)(Ez)\ \neg Gr(x,y,z)$ „Es gibt Punkte x,y,z, die nicht auf einer Geraden liegen.“

(1.6) O1: $(x)(y)(z)\ (Zw(x,y,z) \rightarrow Gr(x,y,z))$
Wenn x zwischen y und z liegt, so liegen x,y,z auf einer Geraden.[1]

O2: $(x)(y)\ \neg Zw(x,y,y)$ x liegt nicht zwischen y und y

O3: $(x((y)(z)\ (Zw(x,y,z) \rightarrow [Zw(x,z,y) \wedge \neg Zw(y,x,z)])$
Wenn x zwischen y und z liegt,liegt x zwischen z und y und y nicht zwischen x und z

O4: $(x)(y)(Ez)\ (x \neq y \rightarrow Zw(x,y,z))$[2]
„Wenn x und y verschiedene Punkte sind, so gibt es stets einen Punkt z derart, dass x zwischen y und z liegt.“

O5: $(x)(y)(z)(u)(v)\ (\neg Gr(x,y,z) \wedge Zw(u,x,y) \wedge \neg Gr(v,x,y) \wedge \neg Gr(z,u,v)$
$\rightarrow (Ew)\ \{Gr(u,v,w) \wedge [Zw(w,x,z) \vee Zw(w,y,z)]\})$[3]

(1.7) P: $(x)(y)(z)\ (\neg(Gr(x,y,z) \rightarrow (Eu)\ \{Par\ (x,y,z,u) \& (v)[Par(x,y,z,v) \rightarrow Gr(z,u,v)]\})$[4]
“Zu jeder Geraden gibt es durch einen außerhalb gelegenen Punkt stets eine und nur eine Gerade.”

Diese Darstellung der Axiome werden wir unseren Untersuchungen zugrundelegen.

2.c. Unterschiede in der Darstellung der Axiome. Gegenüber den entsprechenden Darstellungen der Axiome in GdG sind in GdM erhebliche Veränderungen festzustellen. So wurde erstens eine Relation gegen eine andere ausgetauscht[5]; statt einer Relation zwischen Dingen aus zwei verschiedenen Systemen, dem der Punkte und dem der Geraden, wird eine Relation zwischen Dingen aus einem einzigen System, dem der Punkte, betrachtet. Zweitens sind darin Mängel in der Anwendung des Interpretationsbegriffs behoben[6].

Während in bezug auf unsere Frage diese beiden Verbesserungen zu vernachlässigen sind, bringt die dritte Veränderung bzgl. unserer Frage einen bedeutenden Fortschritt, insofern Hilbert die Axiome zusätzlich in einer zweiten Sprache darstellt. Daraus ergibt sich nämlich, dass Axiome nicht an eine bestimmte Sprache gebunden sind, sondern in mehreren Sprachen auftreten können. Mehr noch, Axiome verschiedener Sprachen sind sogar identifizierbar:

Satz 1.1 : Inhaltliche Axiome verschiedener Sprachen können identisch sein, wenn sie dieselbe Beziehung beschreiben.

Inhaltliche Axiome sind also zwar Einheiten jeweils einer Sprache, sie sind aber nicht an die *Ausdrücke dieser* Sprache gebunden, sondern nur an deren Bedeutung. Relevant für den Status eines inhaltlichen Axioms ist somit primär nicht das Zeichen, sondern das Bezeichnete. Der Status eines Ausdrucks als inhaltliches Axiom bezieht sich demnach auf die Semantik.

[1] Textfassung hier sowie in O2 und O3 ergänzt.

[2] In Hilberts Originalfassung hat dieses Axiom die Gestalt $(x)(y)\ (x \neq y \rightarrow (Ez)\ Zw(x,y,z))$

[3] Da nach Hilberts Klammerregeln [S.5] $\wedge$ stärker bindet als $\vee$, wurde das Klammerpaar [ ] ergänzt.

[4] mit der „Abkürzung *Par* (x,y,u,v) für den Ausdruck:: $\neg(Ew)\ (Gr(x,y,w)\ \& Gr(u,v,w)$“
„Es gibt keinen Punkt w, der sowohl mit x und y wie mit u und v auf einer Geraden liegt.“[S.5 f]

[5] „An die Stelle der Beziehung ´die Punkte x und y bestimmen die Gerade g` tritt eine Beziehung zwischen drei Punkten: ´x,y,z liegen auf einer Geraden`, für die wir die Bezeichnung *Gr*(x,y,z) anwenden.“ [S.4]

[6] In den Axiomen aus GdG *bezeichnete* Hilbert durch dasselbe Wort verschiedene Beziehungen, so durch „zusammengehören“ in I1 eine 3-, in I4 eine 2-stellige Beziehung. In anderen Aufl. tritt diese Ungenauigkeit bzgl. anderer Bezeichnungen, etwa bzgl. „bestimmen“ auf. Siehe z.B. [4]GdG S.2.

2.d. Zur Darstellung von Axiomen in einer Sprache der Prädikatenlogik. Er bezieht sich aber nicht *nur* auf die Semantik. Insofern jedes inhaltliche Axiom „Beschreibung einer Beziehung“ ist, sind inhaltliche Axiome verschiedener Sprachen identisch nicht bereits, wenn sie dieselbe Beziehung beschreiben oder wenn sie sie als dieselbe beschreiben, sondern erst, wenn sie sie zudem auf dieselbe Weise beschreiben. Diese Identität der Beschreibungsweise muß sich auf die Syntax beziehen. Danach muß jedes inhaltliche Axiom nicht nur eine semantische, sondern auch eine syntaktische Bedingung erfüllen: Es muß eine syntaktische Struktur haben; die Bedingung besagt dann:

Jedes inhaltliche Axiom hat in verschiedenen Sprachen *dieselbe* Struktur.

Die von Hilbert *neu* herangezogene Sprache „PL“, die der Prädikatenlogik, macht diese Struktur sichtbar: Es ist die Struktur eines Satzes.[1] Die Darstellung in der Sprache PL verdeutlicht nämlich die Abgrenzung zwischen Subjekt und Prädikat.[2] Dadurch tritt insbesondere die Anzahl der Argumentstellen eines Prädikats hervor, wie z.B. der folgende eher beiläufige Hinweis Hilberts auf die 3-stellige Relation ´zwischen` zeigt: „ Zu dieser Beziehung kommt als zweite Grundbeziehung die des Zwischenliegens: `x liegt zwischen y und z`, die wir mit *Zw*(x,y,z) bezeichnen.“[S.4]. Dagegen wirkt die rein äußerliche Unterscheidung quantifizierter und nichtquantifizierter Sätze, die sich in dieser Sprache aufdrängt, eher verdunkelnd als erhellend. Wir werden auf diese Problematik später (in § 2.4) noch eingehen.

3. Hilberts Vergleich inhaltlicher und formaler Axiomatik. Diese genauere Darstellung durch die Sprache PL nutzt Hilbert nun zwar für sein eigentliches Anliegen, für den Prädikaten*kalkül*, der die Deduktion präzisiert, nicht jedoch bereits vorher für eine Charakterisierung der inhaltlichen Axiomatik.

Er zieht nämlich in GdM einerseits wohl die dort genannte revidierte Fassung (1.5)ff von Axiomen heran, um die „formale“ von der „inhaltlichen“ Axiomatik abzuheben [S.1-7], nennt aber bzgl. dieser Unterscheidung kein Argument, für das die Darstellung der Axiome in der Sprache PL erhellend wäre, sondern führt andere Gründe an. So beschreibt er die *inhaltliche Axiomatik* in folgender Weise:

[a] Sie „führt ihre Grund*begriffe* ein durch Hinweis auf bekannte Erlebnisse“[S.2],

[b] sie „stellt ihre Grund*sätze* als evidente Tatsachen hin oder formuliert sie als Extrakt von Erfahrungskomplexen“ [S.2].

Daraus ergibt sich die *formale Axiomatik*, die „verschärfte Form der Axiomatik,

[c] durch Abstraktion vom Sachgehalt und

(1.8) [d] durch die existentiale Fassung“ [S.2];

[e] „erhalten in der formalen Axiomatik die Grundbeziehungen erst implizite ihre Bestimmung durch die Axiome.“[S.7]

Doch sind diese Abgrenzungskriterien sämtlich unscharf, insbesondere verglichen mit der Schärfe der auf die formale Axiomatik gegründeten Beweistheorie.[3] Zudem sind nur die Bedingungen [c] und [e] spezifisch für die *formale* Axiomatik. Die Bedingung [d] dagegen, das Vorliegen einer

(1.9) „*existentialen Form*“, d.h. eines „festen Systems von Dingen (bzw. mehrere solcher Systeme), das einen abgegrenzten Bereich für alle Prädikate der Theorie bildet“ [S.1f],

scheidet nach Hilbert die *axiomatische* von der *konstruktiven* oder *genetischen* Methode der Begründung einer Theorie. Auf ihr kann daher kein Unterschied *innerhalb* der axiomatischen Mathematik basieren.

[1] Darauf gründet Hilbert auch seine Verwendung dieser Sprache für einen (Beweis-)Kalkül.

[2] Dies entspricht der Fregeschen Unterscheidung von Begriff und Gegenstand. Die Fregesche Funktionsauffassung der Prädikate muß dabei aber *nicht* zugrundegelegt oder vorausgesetzt werden.

[3] Die Formalisierung des Schließens wird nur auf axiomatische Theorien angewandt. [S.87]

Nun scheint zwar die formale Axiomatik von der inhaltlichen abhängig zu sein, denn „die formale Axiomatik bedarf der inhaltlichen notwendig als ihrer Ergänzung, weil durch diese

[1.] überhaupt erst die Anleitung zur Auswahl der Formalismen und ferner

[2.] für eine vorhandene formale Theorie auch erst die Anweisung zu ihrer Anwendung auf ein Gebiet der Tatsächlichkeit gegeben wird“[S.2]

Offen ist aber, welcher Art diese Abhängigkeitsbeziehung ist, ob sie z.B. zur Syntax, zur Semantik oder einem andern Bereich gehört. Sie kann jedenfalls nicht im Übergang zur Sprache PL begründet sein, da offensichtlich die inhaltlichen Axiome ebenso wie die formalen darin darstellbar sind. Zu erwarten wäre danach eine Klärung dieser Beziehung. Hilbert macht dazu aber keinerlei explizite Angaben. Er beläßt es bei einer beispielsbezogenen Gegenüberstellung inhaltlicher und formaler Axiome.

Er sieht nicht einmal eine Veranlassung, die Voraussetzungen für diese Klärung zu schaffen und die eigentlichen Elemente der Axiomatik, die Axiome, zu untersuchen; den Status *inhaltlicher* Axiome, von dem ja ihr Verhältnis zu entsprechenden(?) formalen Axiomen abhängt, analysiert er nur ansatzweise in kurzen Andeutungen. Diese Ansätze werden wir in den beiden folgenden Abschnitten pointiert herausarbeiten.

4. Hilberts Ansätze einer Analyse inhaltlicher Axiome. Zwei solcher Ansätze sind zu unterscheiden, von denen der erste orthodoxe in der Hilbertschule vertreten wird und Hilberts Intentionen wohl am ehesten gerecht wird, während der zweite verborgen ist und trotz seiner weitreichenden Folgen auch von Hilbert selbst nicht als solcher begriffen wurde.

4.a. Inhaltliche Axiome als Aussagen. Wie eingangs erwähnt, liegt der Anlaß für die Beschäftigung mit Axiomen begründet in der überkommenen Ansicht, inhaltliche Axiome seien *Aussagen*. Auch Hilbert geht von dieser Ansicht aus, ja er überbietet sie sogar noch, indem er Sätze einer Theorie – und damit insbesondere Axiome – als *Behauptungen* begreift; so stellt er mit Blick auf die inhaltlichen Axiome (1.5) ff fest:

> In „der inhaltlichen Axiomatik (werden) die Grundbeziehungen als ... inhaltlich Bestimmtes angesehen, worüber die Sätze der Theorie Behauptungen aufstellen. In der formalen Axiomatik dagegen werden die Grundbeziehungen nicht als von vornherein inhaltlich bestimmt angenommen,...“ [S.6f]

Doch können wir das darin erwähnte Behauptungsmoment vernachlässigen; auch Hilbert sieht in ihm nicht die Ursache der Schwierigkeit. An anderer Stelle erläutert er nämlich die Verknüpfung inhaltlicher Axiome und spricht dabei explizit lediglich ihren *Aussage*charakter an:

(1.10) „Denken wir uns die Axiome [V1-V4 und O1-O5] der Reihe nach durch & verbunden, so erhalten wir eine einzige logische Formel, welche eine Aussage über die Prädikate *Gr, Zw* darstellt und die wir mit A(*Gr,Zw*) bezeichnen wollen.“ [S.6]

Unter den „Prädikaten *Gr, Zw*“, *über die eine Aussage gemacht wird*, sind dabei in Entsprechung zu (1.5)f nicht sprachliche Einheiten, sondern die dadurch bezeichneten *Beziehungen* ´auf einer Gerade liegen` und ´zwischen` zu verstehen, denn

(1.11) In „der inhaltlichen Axiomatik (werden) die Grund*beziehungen* als ... inhaltlich Bestimmtes angesehen, worüber die Sätze der Theorie Behauptungen aufstellen.“[S.6f]

Die Analyse inhaltlicher Axiome gründet also in jedem Fall auf der Analyse von Aussagen. Bei Hilbert sind zwei Wege einer solchen Analyse zu finden,

(ii) einer der sich auf die Zeichen, und

(ii) einer, der sich auf das Bezeichnete bezieht.

Im ersten Fall sind die Axiome *wesentlich* semantische Einheiten, im zweiten nicht. Im Falle (i) gehen nämlich nach Hilbert Aussagen durch Interpretation hervor aus „Aussageformen“.[1] Da Wahrheitswerte erst *nach* einer Interpretation auftreten, kön-

[1] Vgl. dazu z.B. Hermes, EmL S.24 ff und S.71 ff.

nen zwar Aussagen, nicht aber Aussageformen einen Wahrheitswert tragen. Daher sieht Hilbert in letzteren ein geeignetes Mittel, das Problem zu lösen. Denn wenn formale Axiome als Aussageformen keinen Wahrheitswert tragen, können so a fortiori nicht zugleich wahr und falsch sein. Insofern Aussagen mit Interpretation versehene Aussageformen sind, muß sich die Analyse von Axiomen qua Aussagen also wesentlich auf die Theorie der Interpretation, d.h. auf die Semantik beziehen.

4.b. Eine Kritik dieses semantischen Ansatzes beschränken wir einzig auf dessen zentralen Punkt, die Lösung des Statusproblems allein mittels der Semantik. Wir gehen also nicht auf allgemeinere Einwände ein, wie sie etwa Frege – teilweise aus einem zu engen Verständnis heraus – an Hilbert herangetragen hat.[1] Weiter werden wir nicht diskutieren, wie das Interpretationsverhältnis bei Hilbert genau zu verstehen[2], bzw. ob es zu halten ist. Denn auch wenn von solchen tief liegenden Einwänden abgesehen und die *Möglichkeit* eines rein semantischen Lösungsversuchs zugestanden wird, kann er nur dann gelingen, wenn das Problem spezifisch an Aussagen gebunden ist, wenn es also erstens sämtliche und zweitens *nur* Aussagen betrifft. Insbesondere die zweite Bedingung ist aber nicht erfüllt. So liegt etwa im Falle

(1.12) Die *Aussage* P (z.B. des Parallelenaxioms) ist zugleich wahr und nicht wahr.

dasselbe Problem vor wie im Falle

(1.13) Der (Sach)*verhalt* A (z.B. des Parallelenaxioms) ist zugleich bestehend und nicht bestehend.

Das Problem hat seine Ursache also nicht in der Semantik und ist daher dort auch nicht zu lösen. Es tritt zwar, wie Hilbert richtig sieht, für Aussagen deshalb auf, weil für sie je eine Interpretation vorliegt, jedoch nur, weil diese Interpretation korrekt ist, insofern sie die syntaktische, d.h. die Satzstruktur der Aussagen erhält. Dies wird deutlich durch ein Schema von Frege[3], in dem der durch die Interpretion vermittelte Isomorphismus zwischen Prädikation und Attribution anschaulich wird:

(1.14)

$$\begin{tikzcd}
\text{(Prädikat,} \arrow[r, dash] & \text{Subjekt,} \arrow[r, "\textit{Prädikation}"] & \text{Satz)} \\
\text{Begriffswort} \arrow[d, "\textit{Interpretation}"] & \text{Eigenname} \arrow[d, "\textit{Interpretation}"] & \text{Aussage} \arrow[d, "\textit{Interpretation}"] \\
\text{Begriff} & \text{Gegenstand} & \text{Sachverhalt} \\
\text{(Attribut,} \arrow[r, dashed, dash] & \text{Item,} \arrow[r, "\textit{Attribution}"] & \text{Urteil)}
\end{tikzcd}$$

Aussagen wie (1.12) machen also das Problem lediglich *sichtbar*; es tritt jedoch etwa mit (1.13) bereits vor und unabhängig von ihnen auf. Wenn Hilbert somit das Problem (spezifisch) für Aussagen löst[4], kuriert er Symptome statt in ihnen einen Hinweis auf die *ursächliche* Aporie zu sehen. Das Problem ist somit nicht so harmlos wie der Hilbertsche Lösungsversuch vermuten läßt, sondern weit fundamentaler und muß daher tiefer angegangen werden.

---

[1] Siehe dazu Frege, Bw S.6 f.

[2] Hilbert behandelt diese für seinen Ansatz entscheidenden Fragen nur oberflächlich, so etwa auf S. 86 f. Sein Verständnis der Prädikation, der Attribution und der Interpretation und damit auch deren Verhältnis zueinander bleibt unklar. Denn neben der Prädikation ist auch die Attribution zu explizieren, da, wie Hermes erläutert, „bei Interpretationen die Subjektsvariablen auf Individuen und die Prädikatenvariablen auf Attribute abgebildet werden [...] und die Subjekte und Prädikate dabei Namen für bestimmte Individuen und Attribute sind“. (Hermes, EmL S. 73) Weiter ist der für diesen Ansatz zentrale Begriff der ´Variablen` sehr fragwürdig eingeführt. (Vgl. dazu z.B. die Kritik Freges an der üblichen Verwendung des Variablenbegriffs in Frege, WiF insbes. S. 86 ff).

[3] In einem Brief an E. Husserl. Gottlob Freges Briefwechsel, S. 35. Dabei haben wir das Schema ein wenig abgewandelt u.a. indem wir die Ebene des *Sinns* hier übergangen haben.

[4] Zudem ist diese Lösung unbefriedigend, weil sie einen wesentlichen syntaktischen Unterschied nicht berücksichtigt, wie in § 2.5 gezeigt werden wird.

5. Eine unbeachtete Hilbertthese. Einen solchen Lösungsweg hat Hilbert an anderer Stelle eröffnet. Wiederum ausgehend von o.g. Beispielen inhaltlicher Axiome hat er dabei nicht (wie beim ersten Ansatz) ihren Status als Aussagen hervorgehoben, sondern ihren inneren Aufbau fixiert und daraus implizite Forderungen abgeleitet.[1] Solche Forderungen hat er statt in semantischer, nun a.) in syntaktischer und b.) in logischer Hinsicht angedeutet.[2]

5.a. Inhaltliche Axiome als Sätze. In syntaktischer Hinsicht kann man diesen Ansatz sowohl in (1.3) wie auch in (1.11) finden. An beiden Stellen begreift er Axiome als *Sätze* und erhebt Forderungen an deren *Subjekte*: Nach (1.3) müssen Axiome Beziehungen beschreiben und deshalb dazu geeignet sein; in (1.11) erhebt Hilbert latent dieselbe Forderung:

(1.15) **These (syntakt.)**: Inhaltliche Axiome der Geometrie sind *Sätze* über Beziehungen.

Wir wollen diese These und ihre Voraussetzungen hier nicht erläutern, sondern nur betonen, dass sie wesentlich die *Prädikation*, d.h. die Syntax einfacher Sätze betrifft.

5.b. Inhaltliche Axiome als Urteile. In einem Brief an Frege formuliert Hilbert eine entsprechende These auf die *Attribution* statt auf die Prädikation bezogen. Dort erläutert er seine Axiome aus GdG, indem er Merkmale, d.h. Attribute, und nicht Prädikate heranzieht:

> „Merkmale sind ausführlich in den Axiomen II1 – II5 angegeben.[...]: ´Zwischen` ist eine Beziehung für die Punkte einer Geraden, die folgende Merkmale hat: II1 ... II5."[3]

Statt eines Satzes, in dem einem Subjekt ein Prädikat zugesprochen wird, liegt hier analog ein (Sach)verhalt vor, in dem einem (logischen) Gegenstand ein Attribut beigelegt wird.[4] Jedes Merkmal der Beziehung ´zwischen` – wie etwa das in II1 angegebene – ist danach nämlich als Attribut der Beziehung ´zwischen` zu begreifen.[5] So erhält die *Hilbert-These* die folgende modifizierte Gestalt:

(1.16) **These (logisch)**: Inhaltliche Axiome der Geometrie sind *Urteile* über Beziehungen.

Mit den Thesen (1.15) f wird das entscheidende Verhältnis zwischen inhaltlichem Axiom und Beziehung begriffen als Verhältnis zwischen einem Satz und seinem Subjekt bzw. einem Urteil und seinem Item. Die erste Frage aus (1.4) ist daher mit jeder der beiden Thesen beantwortet.

---

[1] Das ist ja für jedes Verständnis von Axiomen möglich; sie müssen dazu keine Aussagen sein.

[2] Die „Attribution", d.i. die Verbindung von „Item" und „Attribut" zu einem „Urteil" verstehen wir dabei als *logische*, die „Prädikation", d.i. die Verbindung von „Subjekt" und „Prädikat" zu einem „Satz" als *syntaktische* und die „Interpretation", d.i. die Verbindung zwischen „Signifikat" und „Signifikandum" als *semantische* Relation, wobei Hilbert diese Aspekte nicht genau trennt.

[3] Frege, Bw S.11.

[4] So entspricht dem Satz „3 ist eine Zahl" mit dem Prädikat „ist eine Zahl" das Urteil ´3 ist eine Zahl` mit dem Attribut ´ist eine Zahl`.

[5] Es ist daher *kein Definiens* der Beziehung ´zwischen`. Andernfalls müßte es wie das Definiendum 2-stellig sein, da Definiens und Definiendum stets Attribute gleicher Stelligkeit sind.
Gerade dies sieht Frege nicht. Er ist in seiner Replik an Hilbert so darauf fixiert, dass Hilbert mit seinen Axiomen etwas, nämlich „eigentlich Begriffe zweiter Stufe" zu definieren versuche, dass er seine angemessenen Mittel der Analyse nicht richtig einsetzt. Denn zwar sind die genannten „Merkmale wohl sämtlich höherer als erster Stufe; d.h. sie antworten nicht auf die Frage *Welche Eigenschaften muß ein Gegenstand haben, um ein Punkt (eine Gerade, Ebene usw.) zu sein?*, sondern sie enthalten z.B. Beziehungen zweiter Stufe, etwa des Begriffes[?] *Punkt* zum Begriffe[?] *Gerade*"; aber er übersieht, dass bei Hilbert ein Merkmal nicht auf gleicher Stufe mit seinem Träger steht (ibid.S.18), während für ihn gerade dies wesentlich für Merkmale ist, da „Merkmale den Begriff zusammensetzen". (Frege, GdA S.86) Vgl. die gleichartige Kritik an Hilbert in Frege, LdM, S.159 ff)

§ 2 Inhaltliche Axiome der Geometrie als Urteile

1. Ziel und Methode unseres Vorgehens. Hilbert beachtet diese impliziten Thesen (1.12) f bei seinen weiteren Überlegungen nicht mehr. Wir dagegen werden sie zur Basis unserer Untersuchungen machen. Dabei könnten wir zwar auch von der These (1.12) ausgehen, legen aber statt dessen sogleich ausschließlich These (1.13) zugrunde, da, wie oben gezeigt, das Problem für Urteile genau so besteht wie für Sätze und Urteile tiefer liegen als Aussagen und Sätze. Denn ein mögliches Signifikat kann durch eine Bezeichnung nicht *erzeugt* werden; es muß für die Möglichkeit einer Interpretationsrelation bereits vorausgesetzt werden und geht somit dem Zeichen und der Interpretationsbeziehung logisch voraus.

Wir werden das Statusproblem somit rein logisch, also *vor* der Semantik und vor der Syntax, d.h. ohne Berücksichtigung der Sprache zu lösen versuchen, wenngleich dies beim heutigen Stand der Diskussion als recht ungewöhnlich erscheinen mag. Damit finden wir wieder zum Status der ursprünglichen inhaltlichen Axiome Euklids zurück, für die eine Trennung von Signifikandum und Signifikat zwar möglich, aber für die Axiomatik nicht wesentlich ist. Unsere Analyse wird also zunächst (in § 2) zu erhellen haben, Urteile welcher Gestalt inhaltliche Axiome sein können.

Insofern inhaltliche Axiome Urteile sind, ist es dafür opportun, ihrer Analyse kurz eine allgemeine Analyse von Urteilen in bezug auf relevante Gesichtspunkte vorauszuschicken, wobei wir Hilberts Antworten bezüglich auftretender Fragen berücksichtigen. Dazu stützen wir uns auf die (leicht modifizierte) Fregesche Attributionstheorie. Dabei gehen wir ausschließlich zerlegend vor; wir beginnen bei ganzen Urteilen und zerlegen sie schrittweise in kleinere Einheiten: In § 2.1 heben wir die einfachen – in Item und Attribut zerlegbaren – Urteile von den komplexen ab: Inhaltliche Axiome sind einfach. In § 2.2 untersuchen wir die Items und die Attribute inhaltlicher Axiome: Deren Items sind Relationen, und deren Attribute sind *nur* auf Relationen anwendbar. In § 2.3 trennen wir die singulären von den generellen Urteilen: inhaltliche Axiome sind singulär. In § 2.4 unterscheiden wir eine Sprache der Prädikatenlogik mit *Subjekts*variablen von einer mit *Individuen*variablen und zeigen damit, dass einige der Hilbertschen „Axiome“ keine Axiome sind. Aus diesen Ergebnissen ist anschließend (in § 3) der Status *formaler* Axiome abzuleiten.

2. Zum Komplexitätsgrad inhaltlicher Axiome. Zunächst untersuchen wir, ob Axiome in bezug auf ihre Komplexität einer Einschränkung unterliegen. Als Voraussetzung dafür genügt eine knappe aber allgemeine Unterscheidung einfacher und komplexer Urteile. Sie sind zwar beide zerlegbar, jedoch in verschiedener Weise:

2.a. Einfache und komplexe Urteile. „<u>Einfach</u>“ nennen wir ein Urteil, das in Item und Attribut zerlegbar ist, das also (direktes) Ergebnis der Attribution ist. Diese begreifen wir als 3-stellige nicht-kategoriale Relation mit den Positionen „<u>Attribut</u>“, „<u>Item</u>“ und „<u>Urteil</u>“.[1] Genau die Begriffe nehmen dabei die Attribut-Position ein. Beispiele einfacher Urteile[2] sind

(2.1) (α) ´3 ist eine Zahl`;

(β) ´3>5`;

(γ) ´3 ist, falls durch 5 teilbar, dann größer als 5`.

Diese Urteile sind deshalb einfach, weil sie in Item und Attribut zu zerlegen sind und zwar etwa in folgender Weise:

[1] Ausführlicher diskutiert wird die verwendete Theorie einfacher Urteile in M.H., EfK; vgl. auch M.H., Kon S. 16 ff.

[2] *Einfache* Urteile entsprechen *einfachen* Sätzen, d.h. Sätzen, die in Subjekt und Prädikat zerlegbar, also (direktes) Ergebnis der Prädikation sind.

(α) in das Item ´3` und das Attribut ´ist eine Zahl(X)`;
(β) 1. in das Bitupel ´(3,5)` als Item und ´>(Y)` als Attribut,
2. in das Item ´5` als Item und die teilgesättigte Relation ´3>(x)` als Attribut;
(γ) in das Item ´(3,5) und das Attribut ´ist falls teilbar durch, dann größer als (Y)`.[1]

Die Attribution ist dabei stets dieselbe.[2] Da Item und Attribut nur bei Urteilszerlegungen anfallen, kommen sie nur gemeinsam vor: Jedes Item ist Item zu mindestens einem Attribut, jedes Attribut Attribut zu mindestens einem Item. Ein Attribut ist – in Fregescher Terminologie – „ungesättigt". Es wird in der Attribution durch ein Item gesättigt. Nach Frege ist ja jedes Urteil „gesättigt". Also gilt

Lemma 2.1: Eine Einheit kann nicht sowohl Urteil wie Attribut sein.

In jeder Attribution schränken Attribut, Item und Urteil einander ein:

Lemma 2.2: Ein Urteil wird durch seine beiden Bestandteile eindeutig bestimmt; bei jeder Urteilszerlegung bestimmt das Item sein Attribut, das Attribut sein Item.

Die Items, die mit einem Attribut ein Urteil ergeben, bilden den „Itembereich" dieses Attributes. Er ist also durch das Attribut eindeutig bestimmt,[3] kann und muß daher über die Angabe des Attributes hinaus nicht eigens festgelegt werden.

Wie Beispiel (β) zeigt, ist die Zerlegung eines Urteils in Item und Attribut i.a. nicht eindeutig. Doch müssen bei jeder Zerlegung Item und Attribut zwar nicht 1-stellig sein, aber dieselbe Anzahl von Stellen haben:

Lemma 2.3: (Stelligkeitslemma) Items k-stelliger Attribute sind ausschließlich k-Tupel; Attribute von k-Tupeln sind stets k-stellig.

Für Relationen, d.h. mehrstellige Attribute hat man damit zwischen Item und Argument zu unterscheiden; ein k-stelliges Attribut hat k Argumentstellen und damit (bei einer Attribution stets) k – nicht notwendig verschiedene – Argumente. Dabei sind die Argumentstellen einer Relation voneinander zu unterscheiden, und ebenso ist die Reihenfolge der Argumente eines k-Tupels zu beachten. Ein aus k Argumenten bestehendes Item nennen wir „k-füßig". Ein k-Tupel ist also k-füßig. Die Argumente der k-ten Stelle einer Relation bilden den „Argumentbereich" dieser Stelle.

„Komplex" heißen Urteile, die in *Urteile* zerlegbar sind, die also z.B. Ergebnis einer Junktion sind. So sind etwa komplex die durch 3-stellige(!) aussagenlogische Junktionen der Urteile A und B gebildeten Urteile $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$. Komplexbildend sind daher nur Relationen, die mindestens 3-stellig sind.

Weil einerseits neben einfachen und komplexen Urteilen kein dritter Urteilstyp auftreten kann,[4] andrerseits diese Typen einander ausschließen, sind Urteile entweder einfach oder komplex und damit in einfache Urteile zerlegbar.

2.b. Einfache inhaltliche Axiome. Da inhaltliche Axiome nach (1.13) Urteile sind, ist nun zu untersuchen, ob sie einfach oder komplex sind. Wenn gemäß der These (1.13) inhaltliche Axiome der Geometrie *Urteile „über"* etwas sind, dann weist das „über" darin auf den Gegenstand, d.h. das Item des Urteils hin. Ihm wird danach in einem Axiom ein Attribut beigelegt. Somit können primär nur *einfache* Urteile

[1] Zur Darstellung der Variablen verweisen wir auf § 2.5.

[2] „Die Annahme von zwei verschiedenen Weisen des Urteilens ist zu verwerfen." Frege, Vn S.154

[3] In bezug auf Prädikate wurde diese Eigenheit schon in (1.9) bemerkt. Sie ist also nicht, wie da angenommen, eine Spezifikum der Axiomatik, sondern an das Prädikat- bzw. Attributsein gebunden.

[4] So ist z.B. das Negat eines einfachen Urteils wieder einfach; denn nach Frege werden nicht Sätze, sondern Prädikate verneint, und analog dazu werden nicht Urteile, sondern Attribute negiert. (Frege, BuG S.198) Gleiches gilt für andere 1-stellige Operationen wie etwa die Modalität. Für einen detaillierten Vortrag einer entsprechenden Theorie ist hier nicht der Ort. Vgl. aber M.H. Kon S.114ff. Wir gehen hier in dieser Allgemeinheit vor, obwohl die Hilbertschen Axiome der Geometrie sämtlich nicht verneint sind, damit unsere Ergebnisse auf andere mögliche Axiome übertragbar sind.

Axiome sein. Wir nennen solche Axiome „einfach". Ein komplexes Urteil ist also nur dann ein Axiom, wenn es in einfache Axiome zerlegbar ist:[1]

Satz 2.4: Inhaltliche Axiome sind entweder selbst einfach oder in einfache zerlegbar.

Das Problem ist damit auf die Untersuchung *einfacher* Axiome reduziert.

3. Items einfacher inhaltlicher Axiome. Da jedes einfache Urteil eindeutig bestimmt ist durch seine Bestandteile Item und Attribut, haben wir nun zu prüfen, welche Bedingungen zum einen die *Items*, zum andern die *Attribute* erfüllen müssen, damit die mit ihnen gebildeten Urteile Axiome der Mathematik sein können. Dabei ist nicht nur zu klären, welche Einheiten überhaupt geeignet sind, als Items bzw. Attribute (inhaltlicher Axiome) aufzutreten, sondern auch, welche geeignet sind, *zueinander* im Verhältnis von Item und Attribut zu stehen; ein Item ist ja nicht Item zu jedem Attribut, ein Attribut nicht Attribut zu jedem Item.

3.a. Items einfacher Urteile. Von den vielen Gesichtspunkten, unter denen einfache Urteile vermöge ihrer Items zu gliedern sind, greifen wir hier natürlich denjenigen heraus, den die Hilbertsche These (1.13) anspricht. Er ermöglicht eine vollständige Disjunktion der einfachen Urteile in solche, als deren Items

(i) auch Relationen (ii) keine Relationen

auftreten. Zunächst besagt ja die These (1.13), dass auch *Relationen* Items eines Urteils sein können. Mit unserer Auffassung von Item und Attribut als Rollen, d.h. als Positionen einer Relation, der Attribution, wird diese Einsicht begreifbar. Damit setzt die Hilbertsche These voraus:

Lemma 2.5: Relationen können in der Attribution nicht nur die Attribut-, sondern auch die Itemposition einnehmen.[2]

3.b. Relationen als Items einfacher inhaltlicher Axiome. Wie u.a. aus seiner Darstellung A(*Gr,Zw*) in (1.10) hervorgeht, sind sind aber nach Hilbert inhaltliche Axiome nicht nur Urteile *auch* „über" Beziehungen, sondern sogar Urteile *nur* „über" Beziehungen; sie haben also stets die Gestalt $F(R_1,..., R_k)$. Das Item eines inhaltlichen mathematischen Axioms besteht demnach stets aus einem Tupel von Relationen. Weder Urteile, deren Items k-Tupel aus Relationen und anderen Einheiten sind, noch solche über Items, in denen keine Beziehung vorkommt, sind somit inhaltliche Axiome der Mathematik. Also gilt

Satz 2.6: Jedes einfache inhaltliche Axiom ist ein Urteil mit einem k-Tupel von Relationen ($1 \leq k$) als Item.

Daraus ergeben sich nun Bedingungen an die *Attribute* inhaltlicher Axiome. Der Itembereich solcher Attribute muß danach nämlich stets Relationen oder Tupel davon enthalten; wie an anderer Stelle gezeigt wird[3], darf er sogar *nur* Relationen oder Tupel davon enthalten.[4] Jedes Urteil, dessen Attribut diese Bedingungen erfüllt, d.h. dessen Itebereich nur Relationen oder Tupel davon umfaßt, nennen wir ein „Relationsurteil" und zwar „k-füßig", wenn sein Item k-füßig ist, d.h. aus k Relationen besteht. Damit erhält man

Satz 2.7: Einfache inhaltliche mathematische Axiome sind k-füßige Relationsurteile.

Die bisherige Analyse des Status inhaltlicher Axiome der Mathematik ergibt also:

---

[1] Somit kann etwa das von Hilbert in (1.10) genannte Konjugat der Urteile V1 – V4 und O1 – O5 nur dann ein Axiom sein, wenn die Einzelurteile je Axiome sind.

[2] Dagegen kann ja nach Lemma 2.1 keine Einheit sowohl *Attribut* als auch *Urteil* sein. Ob eine Einheit sowohl *Urteil* als auch *Item* sein kann, wird mit dem Substanzbegriff thematisiert.

[3] Das ist sofort ersichtlich aus den Bedingungen eines Kategoriensystems, das auf Basis der Attribution leicht errichtet werden kann. Siehe dazu M.H., Ein formales Kategoriensystem.

[4] Das ist sofort ersichtlich aus den Bedingungen eines Kategoriensystems, das auf Basis der Attribution leicht errichtet werden kann. Siehe dazu M.H., Ein formales Kategoriensystem.

- Urteile
  - komplex
  - einfach
    - über andere Items
    - über Relationen
      - unspezifisch
      - spezifisch (nur über Relationen) (Relationsurteile)

4. Zur Quantität einfacher Axiome. Nun untersuchen wir, welche Gestalt Urteile haben müssen, um der Bedingung des Satzes 2.7 zu genügen. Dabei gehen wir so vor, dass wir Typen einfacher Urteile *ausgrenzen*, die diese Bedingung *nicht* erfüllen. Da die Bedingung auf Attribute bezogen ist, bietet es sich an, die Urteile in Abhängigkeit von ihren Attributen einzuteilen. Der Aspekt der Quantität eines Urteils liefert eine solche Einteilung. Er tritt nur innerhalb einfacher Urteile auf.

4.a. Singuläre und generelle Urteile. „Generell" sind genau die Urteile mit den Attributen ´ist partikulär erfüllt` oder ´ist universell erfüllt` bzw. deren Modifikationen.[1] Alle anderen einfachen Urteile sind „singulär".[2] Damit gilt

Lemma 2.8: Jedes einfache Urteil ist entweder singulär oder generell.

Beispiele *singulärer* Urteile sind sämtliche Urteile aus (2.1).

Beispiele *genereller* Urteile sind (je in drei Darstellungsweisen[3]):

(2.2) (α) Es gibt Zahlen;
Der Begriff ´Zahl` ist partikulär erfüllt;
(EX) X ist eine Zahl.

(2.3) (β) (i) Alles ist größer als 5;[4]
Der Begriff ´größer als 5` ist universell erfüllt;
(X) X>5.

(ii) Manches ist größer als etwas;
Der Begriff ´größer als` ist partikulär erfüllt;
(EX) >(X).

(2.4) (γ) Was durch etwas teilbar ist, ist größer als dies;
Der Begriff ´falls teilbar durch, dann größer als` ist universell erfüllt;
(X) {teilbar durch $\rightarrow$ grö0er als}(X).

Ein Vergleich der Beispiele singulärer Urteile aus (2.1) mit denen genereller aus (2.2)ff zeigt, dass jedem singulären mindestens ein generelles entspricht und umgekehrt derartig, dass jeweils das Attribut des singulären Urteils das Item eines zugehörigen generellen ist. Definitionsgemäß ist das Attribut eines generellen Urteils 1-stellig. Nach Lemma 2.3 ist also das *Item* eines generellen Urteils stets 1-füßig.

Wie auch die Beispiele zeigen, sind *ausschließlich* Attribute generalisierbar, denn

´F ist partikulär (bzw. universell) erfüllt` besagt
´Mindestens ein (bzw. jedes) Item erfüllt das Attribut F`,

d.h. mit dem Attribut F bildet mindestens ein (bzw. jedes) Item aus dessen Itembereich(!) ein wahres Urteil. Generelle Urteile sind demnach Urteile über Attribute. Da die Items solcher Urteile stets 1-füßig sind, folgt

Lemma 2.9: Item eines generellen Urteils ist stets ein (einziges) Attribut.

---

[1] Solche Modifikationen sind z.B. Negationen wie ´ist *nicht* universell erfüllt`.

[2] Stützt man sich auf eine Theorie der Generalisierung, wie sie von Hilbert angewandt wird [S.98ff], sind generelle Urteile komplex ($A \wedge B \wedge C \wedge ...$), und die vorliegende Fallunterscheidung ist überflüssig; alle einfachen Axiome wären singulär, ein Ergebnis, das diesen Abschnitt beschließen wird.

[3] In der dritten Darstellungsweise verwenden wir dabei eine Sprache der Rädikatenlogik mit *Subjekts*- statt Individuenvariablen.. Weiteres zu dieser Sprache in § 2.4.

[4] Der Itembereich jedes Attributes ist ja nach Lemma 2.2 durch das Attribut eindeutig bestimmt.

4.b. Einfache inhaltliche Axiome als singuläre Urteile. Die Stelligkeit dieses Attributes ist für die Generalisierung irrelevant. Weil die Attribute genereller Urteile somit auf Attribute *beliebiger* Stelligkeit und somit nicht nur auf Relationen anwendbar sind, liefern sie keine Relationsurteile: Kein generelles Urteil ist ein Relationsurteil. Mit Lemma 2.8 folgt

Lemma 2.10: Jedes Relationsurteil ist singulär.

Daraus ergibt sich mit Satz 2.7 sofort

Theorem 2.11 : Einfache inhaltliche Axiome der Mathematik sind *singuläre* Urteile.

Dieses Ergebnis ist in doppeltem Sinne überraschend: Zuerst deswegen, weil man gemeinhin in singulären Urteilen gerade keine Urteile über Begriffe, sondern über Gegenstände sieht;[1] dann dadurch, dass Axiome der Mathematik singulär sein sollen, obwohl doch die Darstellung in der Sprache PL nahelegt, dass sie generell sind. Der ersten Frage werden wir in § 3 nachgehen, die zweite erfordert es, im folgenden kurz Probleme der *Darstellung* von Urteilen in Sprachen der Prädikatenlogik zu behandeln. Damit können wir dann prüfen, ob die von Hilbert genannten Axiome der Geometrie Theorem 2.11 genügen.

5. Zur Darstellung inhaltlicher Axiome in Sprachen der Prädikatenlogik. Für diese Untersuchung ist die Unterscheidung zwischen Item und Argument (in § 2.1) zu beachten; mehrstellige Attribute sind ja sowohl bzgl. ihrer Items wie bzgl. ihrer Argumente (der einzelnen Argumentstellen) zu betrachten. Diese Unterscheidung muß in der sprachlichen Darstellung ihren Ausdruck finden:

5.a. Die Sprachen PL^{In} und PL^{Sub} mit *Individuen*- bzw *Subjekts*variablen. Dazu stellen wir neben die übliche sog. Sprache der Prädikatenlogik, kurz „$\underline{PL}^{\underline{In}}\underline{1}$“, die nicht auf Items, sondern nur auf *Argumente* Bezug nimmt und somit nur *Individuen*-konstanten und –variablen enthält,[2] eine Sprache „$\underline{PL}^{\underline{Sub}}\underline{1}$“, die sich nur auf *Items* und nicht auf Argumente bezieht.[3] Sie enthält keine den Argumenten entsprechende Individuen-, sondern nur den Items entsprechende *Subjekts*konstanten bzw. –variablen, stimmt aber im übrigen mit PL^{In} überein.

Die Sprache PL^{Sub} genügt offenbar zur Darstellung sowohl der Attribution, weil diese nur Items (und Attribute), nicht aber Argumente betrifft, wie auch genereller Urteile, weil dafür wegen Lemma 2.9 die Quantifikation lediglich über *Subjektsvariable* nötig ist. Da ein Prädikat jeweils nur mit einem einzigen (evtl. mehrstelligen) Subjekt zu einem Satz verbunden wird, kann in einem einfachen quantifizierten Satz aus PL^{Sub} stets nur eine einzige Subjektsvariable auftreten. Jede solche Formel hat daher die Gestalt (X) P(X) bzw. (EX) P(X) oder eine Modifikation davon. Somit gilt

Lemma 2.12 : Quantifizierte Formeln aus PL^{Sub} stellen *ausschließlich generelle* Urteile dar.

Beispiele dafür liefert die jeweils letzte Darstellung der Urteile aus (2.2)ff.

In PL^{In} dagegen wird nicht über Subjekts-, sondern über Individuenvariable quantifiziert.[4] Einfachste Beispiele von Urteilen haben in dieser Sprache die Gestalt[5]:

(2.5) $(x_1)(x_2)\ P(x_1,x_2)$; $(Ex_1)(Ex_2)\ P(x_1,x_2)$;

(2.6) $(x_1)(Ex_2)\ P(x_1,x_2)$; $(Ex_1)(x_2)\ P(x_1,x_2)$.

[1] Als seltenes Beispiel eines singulären Urteils über einen *Begriff* gilt etwa ´F inhäriert`. Die Inhärenz kommt ebenfalls *nur* Begriffen zu.

[2] Dass diese Sprache in vielen Varianten vorliegt, können wir hier vernachlässigen.

[3] Im Falle 1-stelliger Prädikate entfällt dieser Unterschied natürlich.

[4] Hilbert führt diese Quantifizierung über *mehrere* Individuenvariable ohne jede Begründung ein [S.115 ff]; er scheint die damit verbundene Problematik nicht zu sehen.

[5] Wie Hilbert verwenden wir dabei bzgl. der Quantoren die Symbolik der Prinzipia Mathematica.

5.b. Zur Darstellung *genereller* Urteile in PL^{In}. Da Hilbert seine Axiome in PL^{In} formuliert, ist nun zu prüfen, welche Formeln aus PL^{In} *generelle* Urteile darstellen und somit nicht zur Darstellung inhaltlicher Axiome der Mathematik geeignet sind. Wie in in PL^{Sub} müssen auch in PL^{In} die generellen Urteile als geschlossene Formeln, d.h. mit „gebundenen" Individuenvariablen dargestellt werden. So werden die generellen Urteile aus (2.2)ff in der Sprache PL^{In} auf folgende Weise formuliert:

(2.7) (Ex) x ist eine Zahl

$(Ex_1)(Ex_2)\ x_1 > x_2$

$(x_1)(x_2)$ (x_1 teilbar durch x_2 $\rightarrow$ x_1 größer als x_2).

Solche Formeln der Sprache PL^{In} nennen wir „generell". Für sie gilt

Lemma 2.13: (i) Jede *generelle* Formel enthält *ausschließlich* ein (evtl. komplexes) Prädikat und gebundene Individuenvariable.

(ii) In jeder generellen Formel sind alle Variablen auf dieselbe Weise gebunden.

Die Quantoren in einer generellen Formel müssen also je übereinstimmen, denn Prädikate können nicht offene, aber *teil*quantifizierte Ausdrücke wie $(Ex_1)\ P(x_1,x_2)$ sein, da nach Lemma 2.8 einfache Urteile nicht zugleich singulär und generell sein können. Danach sind die Beispiele (2.6) *keine* generellen Formeln.[1] Somit können in PL^{In} einfache quantifizierte Formeln nicht *nur* generelle Urteile darstellen.

In PL^{Sub} enthält jedes Prädikat nur *eine* Subjektsstelle und so jede quantifizierte Formel nur *eine* (gebundene) Subjektvariable. Entsprechend gilt in PL^{In}

Lemma 2.14 : In jeder generellen Formel ist die Zahl der (gebundenen) Variablen gleich der Zahl der Argumentstellen des (quantifizierten) Prädikats.

Danach hat ein komplexes Prädikat nicht mehr Variable als jedes seiner einfacheren Teilprädikate, denn es gilt

Lemma 2.15: Ein komplexes Prädikat hat dieselbe Zahl von Argumentstellen wie jedes seiner Teilprädikate.

So sind z.B. sowohl die einfachen Prädikate *Zw*(X) und *Gr*(X) wie auch das komplexe Prädikat (*Zw*(X) → *Gr*(X)) je 3-stellig.

5.c. Anwendung auf Hilberts Beispiele von Axiomen. Damit ist nun zu zeigen, dass zwei der Hilbertschen „Axiome" aus (1.5)ff generell sind. Da nämlich V4 (in (1.5)) und O1 (in (1.6)) in der Sprache PL^{Sub} die Gestalt haben

V4: (EX) ¬*Gr*(X)

O1: (X) (*Zw*(X) → *Gr*(X))

und sie somit besagen

V4: ¬*Gr*(X) ist partikulär erfüllt

O1: (*Zw*(X) → *Gr*(X)) ist universell erfüllt,

sind V4 und O1 *generelle* Urteile. *Singuläre* Urteile mit deren Items als Attribut sind z.B. ´¬*Gr*(London,Berlin,Rom)` bzw.

´ *Zw*(London,Berlin,Rom) → *Gr*(London,Berlin,Rom)`

V4 und O1 können also nach Theorem 2.11 keine inhaltlichen Axiome der Geometrie sein. Auf sie werden wir im folgenden nicht mehr eingehen.[2]

Damit bleiben von den Hilbertschen „Axiomen" (1.5)ff nur die folgenden übrig:[3]

(2.8) V1: $(x)(y)\ Gr(x,x,y)$

V2: $(x)(y)(z)\ Gr(x,y,z) \rightarrow [Gr(y,x,z) \wedge Gr(x,z,y)]$

V3: $(x)(y)(z)(u)\ [Gr(x,y,z) \wedge Gr(x,y,u) \wedge x \neq y] \rightarrow Gr(x,z,y)$

P: $(x)(y)(z)\ (\neg(Gr(x,y,z) \rightarrow (Eu)\{\neg(Ew)(Gr(x,y,w) \wedge Gr(z,u,w)) \wedge$

$(v)[\ \neg(Ew)\ (Gr(x,y,w) \wedge Gr(z,v,w) \rightarrow Gr(z,u,v)]\})$[1]

[1] Vgl. dazu aber Hilberts Bemerkungen [S.95 f].

[2] Wie wir an anderer Stelle zeigen werden, sind sie auch für Beweise überflüssig.

[3] Die Wahl der Gliederung wird in §3 verständlich werden.

(2.9) O2: $(x)(y)\ \neg Zw(x,y,y)$

O3: $(x)(y)(z)\ (Zw(x,y,z) \rightarrow [Zw(x,z,y) \wedge \neg Zw(y,x,z)])$

O4: $(x)(y)(Ez)\ (x \neq y \rightarrow Zw(x,y,z))$

(2.10) O5: $(x)(y)(z)(u)(v)\ (\neg Gr(x,y,z) \wedge Zw(u,x,y) \wedge \neg Gr(v,x,y) \wedge \neg Gr(z,u,v)$
$\rightarrow (Ew)\ \{Gr(u,v,w) \wedge [Zw(w,x,z) \vee Zw(w,y,z)]\})$

Nun zeigen wir mit Hilfe o.g. Lemmata, dass die dadurch dargestellten Urteile sämtlich *nicht* generell sind: (i) V1, V3, O2 und O5 sind nach Lemma 2.14 *nicht* generell.
(ii) O4, O5 und P enthalten sowohl Existenz- als auch Allquantoren und sind daher nach Lemma 2.13(ii) *nicht* generell; dies ist natürlich auch durch äußerliche Umformung etwa mittels Verneinung (Äquipollenz) nicht zu ändern.
(iii) Die in V2 und O3 auftretenden Prädikate stellen Attribute dar, deren Items echte Permutationen voneinander sein müssen. Ihre Items sind also nicht immer dieselben. Daher sind die Attribute nicht zu einem einzigen Attribut zu verbinden,[2] was nach Lemma 2.9 für ein generelles Urteil nötig wäre.

Daher sind die Urteile nach Lemma 2.8 singulär und genügen so dem Theorem 2.11:
Satz 2.16: Die Hilbertschen Axiome (2.8)ff sind singuläre Relationsurteile.

Lediglich *diese* Axiome werden wir daher nun genauer analysieren, um die allgemeine Gestalt inhaltlicher und damit dann formaler Axiome zu klären.

[1] Diese Darstellung des Parallelenaxioms P erhält man durch Einsetzen der Abkürzung Par in (1.7). „Es gibt keinen Punkt w, der sowohl mit x und y wie mit u und v auf einer Geraden liegt.“[S.5 f]
[2] Für eine tiefere Untersuchung dieser Fragen ist hier nicht der Raum.

§ 3 Formale Axiome

Da inhaltliche Axiome spezielle *singuläre* Relationsurteile sind, werden wir zuerst allgemein singuläre Relationsurteile untersuchen und die Ergebnisse dann speziell auf inhaltliche Axiome anwenden. Als einfache Urteile zerfallen singuläre Relationsurteile je in ein Item und ein Attribut.

1. k-Tupel als Items inhaltlicher Axiome. Wir können diese Urteile also zunächst einteilen nach der Gestalt ihrer *Items*. Diese sind nach Definition ausschließlich k-Tupel von Relationen mit 1≤k. Danach sind die 1-füßigen Relationsurteile, d.h. diejenigen mit k=1, zu trennen von denjenigen mit k>1.

1.a. *1-füßige* Relationsurteile finden wir in den Axiomen (2.8)f: In (2.8) und dabei insbesondere auch in P treten nur singuläre Urteile über die Relation ´auf einer Gerade liegen` auf. Die vier Axiome aus (2.8) sind also singuläre Urteile mit verschiedenen Attributen über diese Relation *Gr* als Item. Sie sind demnach darstellbar als $F_1(Gr)$, $F_2(Gr)$, $F_3(Gr)$, $F_4(Gr)$.

Ebenso finden sich in (2.9) nur Urteile über die Relation ´zwischen`, und zwar in O4 ohne, in O2 mit und in O3 sowohl mit als auch ohne Negation; die Negationen sind aber durch Umformungen leicht zu eliminieren:

(3.1) O2´: $(x)(y)(z)\ Zw(x,y,z) \rightarrow y \neq z$ [1]

O3´: $(x)(y)(z)\ [Zw(x,y,z) \rightarrow Zw(x,z,y)] \wedge [Zw(x,y,z) \mid Zw(y,x,z)]$[2]

Somit stellen die drei Anordnungsaxiome O2, O3 und O4 je Relationsurteile nur über die Relation ´zwischen` dar und haben so die Gestalt $G_1(Zw)$, $G_2(Zw)$, $G_3(Zw)$.

1.b. *Mehr-füßige* Relationsurteile. Ein *mehrfüßiges* Relationsurteil ist z.B das Axiom O5 aus (2.10). Sein Item ist das Bitupel [´auf einer Gerade liegen`,´zwischen´] aus den beiden Relationen ´auf einer Gerade liegen` und ´zwischen´. Um dies zu verdeutlichen, formulieren wir es derartig um, dass es keine negierten Attribute enthält[3]:

(3.2) O5´: $(x)(y)(z)(u)(v)(Ew)\ [Zw(u,x,y) \wedge (Gr(z,x,y) \rightarrow z=x) \wedge (Gr(v,x,y) \rightarrow v=y)$
$\wedge (Gr(u,z,v) \rightarrow z=v)] \rightarrow [Gr(u,v,w) \wedge (Zw(w,x,z) \vee Zw(w,y,z))]$

Damit ist das Axiom O5 darstellbar als $H(Gr,Zw)$. Somit gilt insgesamt

Satz 3.1: Die Axiome V1 – P sind singuläre Urteile über *Gr*, die Axiome O2 - O4 singuläre Urteile über *Zw*, das Axiom O5´ ein singuläres Urteil über (*Gr*,*Zw*).

Dadurch ist eine itembezogene Einteilung der inhaltlichen Axiome der ebenen Geometrie in drei Familien gegeben. Diese Einteilung weicht offensichtlich ab von derjenigen in (1.5)ff, die Hilbert meinte ohne Begründung vornehmen zu können. Wir werden aus ihr in § 4 Kriterien für die Bildung von Axiomensystemen gewinnen. Hier wenden wir uns zunächst wieder dem Status von *Einzelaxiomen* zu.

2. Attribute inhaltlicher Axiome. Ein Item, ein Attribut und ein einfaches Urteil treten ja nach Definition nur gemeinsam auf. Dabei ist das Attribut nach Lemma 2.2 durch das Urteil und sein Item eindeutig bestimmt. Insbesondere muß das Attribut eines k-füßigen Relationsurteils nach dem Stelligkeitslemma 2.3 stets k-stellig sein. Die Attribute F_i in (2.8) und G_j in (2.9) sind also je 1-, das Attribut H in (2.10) 2-stellig. Um Attribut und Item innerhalb des Urteils deutlich voneinander abzugrenzen, setzen wir nun neben die gängige auf Quantoren abgestellte Darstellungsweise in der Sprache PL^{In} eine andere, die diese Trennung sichtbar macht.

---

[1] Dabei ist „=“ kein Zeichen für (die Identität, d.h.) eine bestimmte bestimmte Relation, sondern rein darstellungstechnisch zu verstehen. Auf die Grammatik der verwendeten Sprache der PL können wir hier nicht eingehen.

[2] mit der Exklusion „$\mid$“

[3] Zusätzlich haben wir den Quantor aus dem Inneren der Formel vorgezogen.

2.a. Relationsurteile mit (*1-stelligen)* Begriffen als Attributen. Für *1-füßige* Relationsurteile heben wir dazu die Relation in Item-Position heraus und stellen ihr ein 1-stelliges Attribut gegenüber.[1] Beispiele sind

(3.3) $(x)(y)(z)\ (x>y \wedge y>z) \rightarrow x>z$
´>` ist *transitiv*.
$(x)(y)(z)$ (x teilbar durch y $\wedge$ y teilbar durch z) $\rightarrow$ x teilbar durch z
Teilbarkeit ist *transitiv*.

(3.4) V1: $(x)(y)\ Gr(x,x,y)$
´auf einer Gerade liegen´ ist *links-hyperidempotent**.
V2: $(x)(y)(z)\ Gr(x,y,z) \rightarrow (Gr(y,x,z) \wedge Gr(x,z,y))$
´auf einer Gerade liegen` ist *links*- und *rechtskommutativ*.
V3: $(x)(y)(z)(u)\ (Gr(x,y,z) \wedge Gr(x,y,u) \wedge x\neq y) \rightarrow Gr(x,z,y)$
´auf einer Gerade liegen` ist *richtungstransitiv**.
P: $(x)(y)(z)\ (\neg(Gr(x,y,z) \rightarrow (Eu)\{\neg(Ew)(Gr(x,y,w)\wedge Gr(z,u,w)) \wedge$
$(v)[\neg(Ew)\ (Gr(x,y,w)\wedge Gr(z,v,w) \rightarrow Gr(z,u,v)]\})$
´auf einer Gerade liegen` ist *parallelogen**.

(3.5) O2´: $(x)(y)(z)\ Zw(x,y,z) \rightarrow y \neq z$
´zwischen` ist *rechtsirreflexiv**.
O3´: $(x)(y)(z)\ (Zw(x,y,z) \rightarrow Zw(x,z,y)) \wedge (Zw(x,y,z) \mid Zw(y,x,z))$
´zwischen` ist *rechtskommutatitiv* und *linksantikommutativ*.
O4: $(x)(y)(Ez)\ (x\neq y \rightarrow Zw(x,y,z))$
´zwischen` ist *rechtsoffen**.

2.b. Relationsurteile mit *mehr-stelligen* Relationen als Attributen. Für *k-füßige* Relationsurteile ist nun entsprechend ein *k-Tupel* von Relationen als Item herauszuheben und ihm je ein k-stelliges Attribut gegenüberzustellen. Beispiele dafür sind etwa für k=2 die folgenden Relationsurteile:

(3.6) $(x)(y)(u)(v)(w)\ (+(x,u,w) \wedge +(y,u,v)) \rightarrow (\ <(x,y) \leftrightarrow >(w,v))$
(´+`,´>`) ist *monoton*.

(3.7) O5´: $(x)(y)(z)(u)(v)(Ew)\ [Zw(u,x,y) \wedge (Gr(z,x,y)\rightarrow z=x) \wedge (Gr(v,x,y)\rightarrow v=y)$
$\wedge (Gr(u,z,v) \rightarrow z=v)] \rightarrow [Gr(u,v,w) \wedge (Zw(w,x,z) \vee Zw(w,y,z))]$
(´auf einer Gerade liegen`,´zwischen`) ist *flächendicht**.

Zu betonen ist, dass damit nur der *Urteils*status dieser Einheiten angesprochen wird, diese Urteile aber nicht bewertet werden und insbesondere nicht wahr sein müssen.

Die Anwendung dieser allgemein für Relationsurteile geltenden Überlegungen auf inhaltliche Axiome (der ebenen Geometrie) ist in den Beispielen (3.4)f und (3.7) bereits geschehen. Inhaltliche Axiome der Geometrie sind dadurch auch äußerlich als singuläre Urteile zu erkennen; sie enthalten je ein eigenes abtrennbares Attribut.

3. Relationsattribute. Nun versuchen wir, die Attribute in Relationsurteilen, aus dem Urteil zu lösen und sie allein zu betrachten. Dies ist in der Darstellung leicht, indem dem Urteil sein Item genommen wird; zurückbleibt das „ungesättigte“ Attribut; wir nennen jedes solche Attribut ein „Relationsattribute“. Das Fehlen des Items wird darin durch Variable angedeutet.

3.a. Relations*eigenschaften*. Dazu wenden wir uns den Beispielen aus (3.3)ff zu: Ihnen sind einerseits in der Sprache PL^{In}, andrerseits in Funktionsdarstellung zunächst die folgenden „Relationseigenschaften“, d.h. *1-stelligen* Relationsattribute zu entnehmen, wobei r und r_i je als *Argument*variable für relationale Argumente dienen:

(3.8) $(x)(y)(z)\ (r(x,y) \wedge r(y,z)) \rightarrow r(x,z)$
ist transitiv (r).

[1] Dabei können wir nicht immer auf schon eingeführte Termini zurückgreifen und haben daher für manche Attribute Bezeichnungen neu eingeführt. Diese sind jeweils mit einem „*“ gekennzeichnet.

(3.9) v1: $(x)(y)\, r(x,x,y)$
ist links-hyperidempotent (r);

v2: $(x)(y)(z)\, (r(x,y,z) \rightarrow r(y,x,z) \wedge r(x,z,y)$
ist links- und rechtskommutativ (r);

v3: $(x)(y)(z)(u)\, (r(x,y,z) \wedge r(x,y,u) \wedge x{\neq}y) \rightarrow r(x,z,y)$
ist richtungstransitiv (r);

p: $(x)(y)(z)\, (\neg(r(x,y,z) \rightarrow (Eu)\{\neg(Ew)(r(x,y,w){\wedge}r(z,u,w)) \wedge$
$(v)[\,\neg(Ew)\, (r(x,y,w){\wedge}r(z,v,w) \rightarrow r(z,u,v)]\})$
ist parallelogen (r);

(3.10) o2: $(x)(y)(z)\, r(x,y,z) \rightarrow y \neq z$
ist rechtsirreflexiv (r);

o3: $(x)(y)(z)\, [r(x,y,z) \rightarrow r(x,z,y)] \wedge [r(x,y,z) \mid r(y,x,z)]$
ist rechtskommutatitiv und linksantikommutativ (r);

o4: $(x)(y)(Ez)\, (x{\neq}y \rightarrow r(x,y,z))$
ist rechtsoffen (r);

3.b. Relationen*relationen*. In gleicher Weise sind „<u>Relationenrelationen</u>“, d.h. mehrstellige Relationsattribute zu gewinnen, so z.B. aus den zwei Relationsurteilen (3.6)f:

(3.11) $(x)(y)(u)(v)(w)\, [r_1(x,u,w) \wedge r_1(y,u,v)) \rightarrow (r_2(x,y) \leftrightarrow r_2(w,v)]$
ist monoton (r_1, r_2);

(3.12) o5: $(x)(y)(z)(u)(v)(Ew)\, [r_2(u,x,y) \wedge (r_1(z,x,y){\rightarrow}\, z{=}x) \wedge (r_1(v,x,y){\rightarrow}\, v{=}y)$
$\wedge\, (r_1(u,z,v) \rightarrow z{=}v)] \rightarrow [r_1(u,v,w) \wedge (r_2(w,x,z) \vee r_2(w,y,z))]$
ist flächendicht (r_1,r_2).

3.c. Zum Charakter von Relationsattributen. Jedes dieser Attribute hat als solches einen nichtleeren Itembereich. Dieser kann jeweils nur Relationen bzw. Bitupel davon umfassen. *Welche* er enthält, können wir hier nicht untersuchen, wohl aber einige einschränkende Bedingungen an Relationsattribute nennen.

Relationsattribute sind die Attribute in Relationsurteilen. Sie sind also Attribute, deren Items ausschließlich Relationen oder Tupel davon sind. Darum kann jedes solche Attribut wesentlich Bezug nehmen auf die Mehrstelligkeit seiner Argumente, der Relationen. Gerade diese ist nämlich Voraussetzung für die Möglichkeit der Identität oder Vertauschbarkeit der Argumente verschiedener Stellen. So setzt z.B. in (3.4) das Relationsurteil V1 voraus, dass die Argumentbereiche der ersten beiden, V2 setzt voraus, dass die aller drei Stellen übereinstimmen. Dies hat zweierlei Auswirkungen:

Erstens folgt, weil in Relationsurteilen stets die *Argumente* der Relation berücksichtigt werden müssen, diese aber nicht in PL^{Sub}, sondern nur in PL^{In} darstellbar sind,

Satz 3.2: Ein quantifizierter Satz über eine Relation als solche gehört stets zu PL^{In}.

Damit ist PL^{In} die angemessene Sprache zur Darstellung von *Relations*urteilen, während PL^{Sub} zur Darstellung *genereller* Urteile passend war.

Zweitens geht stets die *Anzahl* der Argumentstellen der Relationen in Itemposition in das Relationsurteil ein; jedes Relationsattribut setzt als Items Relationen einer je bestimmten Stelligkeit voraus:

Lemma 3.3: (i) Alle Items einer Relations*eigenschaft* sind Relationen mit derselben Stelligkeit.

(ii) Alle Items einer k-stelligen Relationen*relation* sind k-Tupel von Relationen von je bestimmter Stelligkeit.

So sind etwa die Relationseigenschaften aus (3.8) nur auf 2-, die aus (3.9)f nur auf 3-stellige Relationen anwendbar, die Relationenrelation aus (3.11) nur auf Bitupel 3-stelliger, die aus (3.12) nur auf Bitupel aus einer 3- und einer 2-stelligen Relation (in dieser Reihenfolge). Damit sind Relationsattribute gleicher Stelligkeit weiter zu untergliedern nach der Stelligkeit ihrer Argumente.

4. Formale Axiomatik. Die Relationsattribute eröffnen nun den Übergang von inhaltlichen zu formalen Axiomen. *Hilberts* Sicht der formalen Axiomatik hatten wir ja in (1.8) bereits genannt. Dabei haben „für die formale Axiomatik die Grundbeziehungen die Rolle von variablen Prädikaten."[S.7]

Während also in der *inhaltlichen* Axiomatik zwar Individuen als Variable auftreten, Prädikate aber stets inhaltlich bestimmte Beziehungen sind, sind in der *formalen* Axiomatik auch die Prädikate variabel. Den Begriff „Variable" verwendet Hilbert dabei wohl im Sinne seines ersten Ansatzes als ein potentielles Zeichen, d.h. als potentiell interpretierbar. Variable Prädikate sind danach auf Attribute zu interpretieren.

Diesem Ansatz, bei dem die Variablen *semantischer* Natur sind, stellen wir nun unseren Ansatz gegenüber, bei dem sie *logischer* Natur sind: Sie sind Platzhalter bzgl. der Attribution. Dieser Ansicht entspricht die übliche Darstellungsweise formaler Axiome. Denn nach obigem Ergebnis in (3.8)ff haben die Relationsattribute genau die Gestalt der von Hilbert in GdM angeführten „formalen Axiome".[S.7] Wir dürfen daher in den *formalen* Axiomen allgemein Attribute *inhaltlicher* Axiome sehen:

Theorem 3.4: Formale Axiome sind Relationsattribute (inhaltlicher Axiome).

Inhaltliche Axiome sind nämlich, da sie singuläre Relationsurteile sind, in Item und Attribut zerlegbar. Dabei ist die Zerlegung zu wählen, bei der Item und Attribut die höchstmögliche Stelligkeit haben. Weil diese Zerlegung eindeutig bestimmt ist, folgt

Satz 3.5: Jedes inhaltliche Axiom liefert genau ein formales.

Danach sind formale Axiome also *nicht* (zu interpretierende) Formeln, sondern Attribute oder Prädikate (vgl. (1.14); die grundlegende Beziehung ist *nicht* die Interpretation, sondern die Attribution (bzw. die Prädikation als deren syntaktische Entsprechung). Das Verhältnis eines inhaltlichen zu einem formalen Axiom ist das eines Urteils zu seinem Attribut; es ist ein logisches Verhältnis. Schließlich erfüllt dieser Ansatz der formalen Axiome als Attribute die eingangs genannte Bedingung, nach der ein Axiom (im revidierten Sinne) nicht geeignet sein darf, einen (Wahrheits)wert zu tragen. Damit ist das Ausgangsproblem, die Frage nach dem Status mathematischer Axiome, gelöst. Zu untersuchen sind nun Konsequenzen dieser Lösung.

§ 4 Beziehungen zwischen formalen Axiomen

Solche Konsequenzen betreffen zunächst den Zusammenhang zwischen Axiomen. Nachdem der Status der Einzelaxiome geklärt ist, ist nämlich nun das Verhältnis (formaler) Axiome *zueinander* zu untersuchen. Insbesondere die Frage nach ihrer Widerspruchsfreiheit ist zu behandeln. Hilbert sieht in ihr ja sogar ein Charakteristikum der formalen Axiomatik:

(4.1) „Charakteristisch für sie [die formale Axiomatik] ist, dass sie einen *Nachweis der Widerspruchsfreiheit* erforderlich macht.“[S.2]

Bei dieser Untersuchung gehen wir wieder in gewohnter Weise vor, indem wir zuerst den allgemeinen Fall und dann die Anwendung auf Axiome behandeln. Insofern formale Axiome Attribute sind, kann auf sie die gesamte Theorie der Attribute angewandt werden. Da wir diese hier nicht darlegen können,[1] werden wir davon lediglich zwei Ergebnisse nutzen, die ihre Einteilung und ihre Verträglichkeit betreffen.

1. Einfache und komplexe Attribute. An erster Stelle relevant sind dabei Verfahren der *Unterteilung* von Attributen. Dabei beginnen wir mit einer Einteilung der Attribute nach ihrem Komplexitätsgrad: Ebenso wie *Urteile* (vgl. § 2.1) heißen *Attribute* „<u>komplex</u>“, wenn sie bzgl. einer Relation in einfachere zerlegbar sind, sonst „<u>einfach</u>“. Zu bemerken ist, dass einfache Urteile durchaus keine einfachen Attribute haben müssen. Beispiele dafür sind etwa:

(a) ´Sokrates ist Philosoph und Athener` mit ´Sokrates` als Item und ´ist Philosoph und Athener` als Attribut.

(b) ´8 ist teilbar durch und größer als 2` mit dem Bitupel ´(8,2)` als Item und ´ist teilbar durch und größer als` als Attribut.

Darin sind die Attribute je bzgl. der Konjunktion komplex.[2] Dabei ist aber stets die folgende wesentliche Bedingung erfüllt:

Lemma 4.1: Ein komplexes Attribut und seine einfacheren Bestandteile haben denselben Itembereich.

Attribute mit demselben Itembereich heißen zueinander „<u>soziabel</u>“. Die Soziabilität ist eine Äquivalenzrelation. Alle weiteren Unterscheidungen werden innerhalb von Soziabilitätsklassen vorgenommen.

1.a. Zur Reduktion komplexer auf einfache Relationsattribute. Für uns relevant sind an dieser Stelle nur Relationsattribute. Nur sie sind ja geeignet, formale Axiome zu sein. Da ihr Itembereich ausschließlich aus Relationen(tupeln) besteht, die wiederum je Tupel von Argumenten als Items haben, sind nun diffizile Itembereichsuntersuchungen anzustellen, um die Relationsattribute in Soziabilitätsklassen einzuteilen. Interessant sind innerhalb dieser Klassen primär die *einfachen* (1- und mehrstelligen) Relationsattribute, weil aus ihnen unter Berücksichtigung von Lemma 4.1 die komplexen zu gewinnen sind:

1.a.α. Einfache und komplexe Relations*eigenschaften* finden sich z.B. in der Liste der Relationseigenschaften (3.8)ff. Davon ist (3.8) einfach. v2 und o3 sind komplex:

v2 ist Konjugat der beiden einfachen Relationseigenschaften

(4.2) $(x)(y)(z)\ r(x,y,z) \rightarrow r(y,x,z)$
ist linkskommutativ (r) und
$(x)(y)(z)\ r(x,y,z) \rightarrow r(x,z,y)$
ist rechtskommutativ (r);

---

[1] Siehe dazu aber M.H., Kon S.57 ff.

[2] Die heute übliche extensionale von Wahrheitswerten abhängige „Definition“ von Junktionen kann dies natürlich nicht leisten und ist durch eine andere zu ersetzen, die die Junktion von *Begriffen* ermöglicht. Auf eine Darlegung der entsprechenden Theorie, in der die Junktionen als 3-stellige rechtseindeutige Relation höherer Stufe aufgefaßt werden, müssen wir hier verzichten.

o3 ist Konjugat der beiden einfachen Eigenschaften

$(x)(y)(z)\ r(x,y,z) \rightarrow r(x,z,y)$

ist rechtskommutativ (r) und

(4.3) $(x)(y)(z)\ [r(x,y,z) \mid r(y,x,z)]$

ist linksantikommutativ (r).

1.a.β. Einfache und komplexe Relationen*relationen*. In gleicher Weise ist auch die Relationenrelation (3.11) einfach. Die Relationenrelation (3.12) dagegegen ist komplex; sie ist Konjugat der beiden einfachen Relationenrelationen[1]

(4.4) $(x)(y)(z)(u)(v)(Ew)\ [r_2(u,x,y) \wedge (r_1(z,x,y) \rightarrow z=x) \wedge (r_1(v,x,y) \rightarrow v=y)$
$\wedge (r_1(u,z,v) \rightarrow z=v)] \rightarrow r_1(u,v,w)$

ist winkeldicht* (r_1,r_2) und

$(x)(y)(z)(u)(v)(Ew)\ [r_2(u,x,y) \wedge (r_1(z,x,y) \rightarrow z=x) \wedge (r_1(v,x,y) \rightarrow v=y)$
$\wedge (r_1(u,z,v) \rightarrow z=v)] \rightarrow [r_2(w,x,z) \vee r_2(w,y,z)]$

ist streckenddicht* (r_1,r_2).

1.b. Axiomensysteme einfacher Axiome. Diese Ergebnisse sind direkt übertragbar auf formale Axiome; dabei genügt es nach Satz 2.4, nur *einfache* formale Axiome zu betrachten:

Satz 4.2: (i) Jedes Axiomensystem formaler Axiome ist ersetzbar durch eines aus *einfa chen* formalen Axiomen.

(ii) Jedes Axiomensystem inhaltlicher Axiome ist ersetzbar durch eines aus *einfachen* Urteilen.

Beispiele einfacher formaler Axiome, die zusammen ein Axiomensystem bilden, liefern die Axiome in (3.9)f und (3.12), wobei v2, o3 und o5 zu ersetzen sind durch die einfachen Axiome aus (4.2) ff. Dabei ist lediglich zu sichern, dass die Variablen für möglicherweise verschiedene Relationsargumente verschieden sind:

(4.5) ist links-hyperidempotent (r_1);
ist linkskommutativ (r_1);
ist rechtskommutativ (r_1);
ist richtungstransitiv (r_1);
ist parallelogen (r_1);
(4.6) ist rechtsirreflexiv (r_2);
ist rechtskommutatitiv (r_2);
ist linksantikommutativ (r_2);
ist rechtsoffen (r_2);
(4.7) ist winkeldicht (r_1,r_2)
ist streckendicht (r_1,r_2).

Die Axiome sind hier wie bereits oben – abweichend von Hilbert – im Hinblick auf ihre Items gegliedert. Die Art der Gliederung ist nämlich nicht peripher, sondern wird sich als zentral für Bildung von Axiomensystemen erweisen.

2. Zur Widerspruchsfreiheit formaler Axiome. Nachdem mit Satz 4.2 (formale) Axiome auf *einfache* (formale) Axiome und damit auf einfache Relationsattribute reduziert sind, können wir nun zur weiteren Analyse Mittel heranziehen, die nur auf einfachen Attributen einsetzbar sind. Dafür greifen wir wieder auf die allgemeine Theorie der Attribute zurück. Die einfachen Attribute sind vermöge der Äquivalenzrelation der Pertinenz in Klassen zueinander „pertinenter“ Attribute einzuteilen. Pertinent zueinander sind z.B. alle Farben, alle Gewichte, alle Temperaturen usw. Jede Klasse einfacher soziabler Attribute zerfällt somit in Klassen zueinander pertinenter Attribute. Diese bilden den Rahmen für Unterordnung, Kontrarietät und Wider-

[1] Wie in (3.3)f versehen wir neu eingeführte Bezeichnungen mit einem *.

spruch. Denn innerhalb zueinander pertinenter Attribute sind die 2-stelligen Relationen der „Kontrarietät“ und der „Unterordnung“ definiert. Dafür gilt[1]

Lemma 4.3: Zwei pertinente Attribute sind entweder einander untergeordnet oder zueinander konträr.

Die Kontrarietät ist also primär nicht zwischen Formeln, Aussagen oder Urteilen definiert, sondern zwischen einfachen Attributen. Die Widersprüchlichkeit zwischen Urteilen ist nun auf die Kontrarietät zwischen Attributen zurückzuführen. Wir nennen nämlich Urteile dann „widersprüchlich“ oder „konträr“ zueinander, wenn sie dasselbe Item und zueinander konträre Attribute haben.[2] Für sie gilt

Lemma 4.4: Von zueinander konträren Urteilen ist höchstens eines wahr.

Der Widerspruch zwischen komplexen Urteilen ist somit auf einen zwischen einfachen zu reduzieren. Die Ursache eines Widerspruchs liegt also immer in einem sehr engen Rahmen, in der Kontrarietät zweier pertinenter Attribute desselben Items. So gilt:

Folgerung 4.5 : Einfache Urteile mit nicht zueinander pertinenten Attributen sind s stets widerspruchsfrei.

Dieses allgemeine Gliederungsverfahren ist nun auf einfache *Relations*attribute anzuwenden. Auch sie zerfallen in disjunkte Klassen zueinander pertinenter Attribute. Dafür gilt dann gemäß Lemma 4.4

Lemma 4.6: Konträre Relationsurteile sind nicht beide wahr.

Die Abgrenzung einzelner Pertinenzklassen muß aber hier wie im allgemeinen Fall einer eigenen Untersuchung vorbehalten bleiben.[3] Da inhaltliche Axiome Relationsurteile mit formalen Axiomen als Attributen sind, folgt

Satz 4.7: Zueinander konträre inhaltliche Axiome sind nicht beide wahr.

[1] Siehe dazu M.H., Kon S. 66.

[2] Bei Hilbert wird der Widerspruch dagegen primär zwischen *Formeln* definiert. Zwei Formeln sind widersprüchlich, wenn „die eine die Negation der andern ist“ [S.18].

[3] So können wir hier nicht klären, welche Relationseigenschaften z.B. mit ´linkstotal` pertinent sind.

§ 5 Mathematische Axiomensysteme

1. Bedingungen an inhaltliche und formale Axiome. Bisher haben wir gezeigt, dass jedes *inhaltliche* Axiom ein Relations*urteil* und jedes *formale* Axiom ein Relations*attribut* ist. Nun untersuchen wir umgekehrt,

(5.1) (i) welche Relationsurteile bzw. attribute geeignet sind, a) inhaltliche bzw.
b) formale Axiome zu sein,
(ii) welche Mengen von Relationsurteilen bzw. attributen a) ein inhaltliches bzw.
b) ein formales Axiomensystem bilden.

1.a. Einfache Relationsurteile als *inhaltliche* Axiome. Zuerst ist dazu der Begriff ´inhaltliches Axiom` zu bestimmen. Ein Urteil ist dann ein inhaltliches (mathematisches) Axiom, wenn es zum einen am Beginn einer Deduktionskette steht und zum andern zu einer inhaltlichen (mathematischen) Theorie gehört. Da die erste Bedingung stets zu erfüllen ist, hängt der Begriff nur von der zweiten ab. Um diese zu klären, dürfen wir, der Intention Hilberts folgend, die obigen auf die Geometrie bezogenen Voraussetzungen (1.1) verallgemeinern. Denn für Hilbert bildeten die darauf gegründeten Axiome der Geometrie in ihrer Gesamtheit ein Beispiel eines inhaltlichen Axiomensystems der Mathematik und die Geometrie ein Beispiel einer axiomatisierbaren mathematischen Theorie. Aus dieser Verallgemeinerung ergibt sich, dass eine inhaltliche mathematische Theorie axiomatisierbar ist, wenn sie sich in Bezug auf das „sachliche Vorstellungsmaterial, aus dem ihre Grundbegriffe gebildet sind...“[S.1f], mit genau zweierlei Einheiten befaßt,

(5.2) 1. mit (Systemen von) Dingen,
2. mit Beziehungen zwischen diesen Dingen.[1]

Ein Urteil ist also bereits dann ein Urteil einer inhaltlichen mathematischen Theorie und damit potentiell ein Axiom, wenn es ein Urteil über eine oder mehrere Beziehungen, d.h. ein Relationsurteil ist. Somit gilt

Satz 5.1: Jedes einfache Relationsurteil ist potentiell ein *inhaltliches* mathematisches Axiom.

1.b. Relationsattribute als *formale* Axiome. Daraus folgt mit Theorem 3.4 sofort

Satz 5.2: Jedes Relationsattribut ist potentiell ein *formales* mathematisches Axiom.

Umgekehrt ist jedes Urteil mit einem formalen Axiom als Attribut geeignet, ein inhaltliches Axiom zu sein. Somit gilt

Satz 5.3: Ein einfaches Relationsurteil kann genau dann als *inhaltliches* mathematisches Axiom fungieren, wenn sein Attribut als *formales* Axiom fungieren kann.

Damit sind die Fragen aus (5.1)(i) beantwortet. Ungleich größere Schwierigkeiten werfen die Fragen aus (ii) auf, in denen nach Bedingungen an *Systeme* gesucht wird.

2. Bedingungen an Axiomensysteme. Um diese Fragen zu beantworten schwächen wir sie zuerst ab und fragen nicht nach Bedingungen an Relationsurteile und attribute, sondern nach Bedingungen an inhaltliche und formale Axiome. Die pure Aneinanderreihung beliebiger Einzelaxiome ist ja *nicht hinreichend* für die Bildung eines Axiomensystems. So ergibt etwa – parallel zu (1.10) – die Konjunktion von V1 und O1 zwar ein (komplexes) Urteil, nicht aber *ein* (komplexes) Axiom; sie bilden zusammen nicht *ein* Axiomensystem. Die in Satz 3.1 genannte itembezogene Einteilung von Axiomen ermöglicht es, Bedingungen zu gewinnen, unter denen eine Sammlung von Axiomen ein Axiomensystem ergibt.[2]

[1] Ob umgekehrt auch jede axiomatisierbare inhaltliche mathematische Theorie Bedingung (5.2) erfüllen muß, kann hier offen bleiben.

[2] Eine solche Untersuchung wird von Hilbert nicht einmal in Andeutungen geführt. Sie dürfte auch in Bezug auf seine semantische Auffassung formaler Axiome schwerlich möglich sein.

2.a. Zur Stämmigkeit von Axiomensystemen. Danach können wir nämlich Axiomensysteme zunächst rein äußerlich gliedern allein aufgrund der Anzahl der in den Einzelaxiomen auftretenden Beziehungen; treten darin Relationsurteile über insgesamt k verschiedene Relationen auf, nennen wir es „k-stämmig". Im einfachsten Fall kommt nur eine einzige Relation vor:

Satz 5.4: Jede Sammlung von Axiomen über eine einzige Relation ist ein inhaltliches Axiomensystem (über diese Relation)

Jedes solche System ist 1-stämmig. Ein Beispiel eines 1-stämmigen Axiomensystems wird geliefert durch jede beliebige Auswahl aus den Axiomen von (2.8) oder aus denen von (2.9).

Eine SAmmlung von Einzelaxiomen über mehrere *verschiedene* Relationen ist ja i.a. *kein* Axiomensystem. Aus Satz 3.1 entnehmen wir aber, dass in einem System mindestens ein mehrfüßiges Axiom über mehrere Relationen den Zusammenhang der Axiome über Einzelrelationen sichert:

Satz 5.5: Die Axiome eines inhaltlichen Axiomensystems sind bei $k \geq 2$ beteiligten Relationen R_i (mit $1 \leq i \leq k$) einzuteilen in k+1 nichtleere Mengen,von denen
(5.3) die i-te Menge nur Axiome über die Relation R_i,
die (k+1)-te nur *mehrfüßige* Axiome über die beteiligten Relationen enthält.

Danach besteht (für k>1) jedes k-stämmige inhaltliche Axiomensystem aus k 1-stämmigen Systemen über je verschiedene Relationen und einer Sammlung mehrfüßiger Axiome über diese Relationen.

Das Hilbertsche Axiomensystem (2.8)ff der ebenen Geometrie sowie geeignete Auswahlen daraus wie etwa V3,O4,O5 liefern Beispiele 2-stämmiger Axiomensysteme.

2.b. Mengen von Axiomen als Axiomensysteme. Aus Satz 5.4 ist somit eine notwendige Bedingung an *inhaltliche* Axiomensysteme zu gewinnen:

Satz 5.6: (i) Eine Menge 1-stelliger inhaltlicher Axiome ist nur dann ein Axiomensystem, wenn sie dasselbe Item haben; es ist dann 1-stämmig.
(ii) Eine Menge mehrstelliger inhaltlicher Axiome ist *kein* Axiomensystem.
(iii) Eine Menge 1- und mehrstelliger inhaltlicher Axiome ist nur dann ein Axiomensystem, wenn sie vollständig aufteilbar ist in 1-stämmige Axiomensysteme und eine Menge mehrstelliger Axiome.

Mit Satz 3.5 folgt daraus die entsprechende Bedingung für *formale* Systeme:

Satz 5.7: (i) Eine Menge 1-stelliger formaler Axiome ist nur dann ein Axiomensystem, wenn sie soziabel sind; es ist dann 1-stämmig.
(ii) Eine Menge mehrstelliger formaler Axiome ist *kein* Axiomensystem.
(iii) Eine Menge 1- und mehrstelliger formaler Axiome ist nur dann ein Axiomensystem, wenn sie vollständig aufteilbar ist in 1-stämmige Axiomensysteme und eine Menge mehrstelliger Axiome.

Weil nach Satz 3.5 jeder Menge inhaltlicher genau eine Menge formaler Axiome entspricht, ist somit jedes inhaltliche Axiomensystem eindeutig formalisierbar:

Satz 5.8: Jedem inhaltlichen Axiomensystem entspricht genau ein formales.

Die Umkehrung gilt natürlich nicht; verschiedenen inhaltlichen Systemen kann dasselbe formale zugeordnet sein.

3. Mengen von Relationsattributen als formale Axiomensysteme. Nachdem somit in § 5.1. Bedingungen an Relationsurteile bzw. attribute für den Status eines Axioms und in § 5.2. Bedingungen an Mengen von Axiomen für den Status eines Axiomensystems genannt wurden, können wir nun diese Ergebnisse verbinden und Bedingungen an Mengen von Relationsurteilen bzw. attributen für den Status eines Axiomensystems nennen. Wegen Satz 5.3 genügt es, sich dabei auf Attribute zu beschränken und nur Bedingungen an *formale* Axiomensysteme zu stellen:

Satz 5.9: (i) Eine Menge von Relationseigenschaften ist nur dann ein Axiomensystem, wenn sie soziabel sind; es ist dann 1-stämmig.
(ii) Eine Menge mehrstelliger Relationsattribute ist *kein* Axiomensystem.
(iii) Eine Menge 1- und mehrstelliger Relationsattribute ist nur dann ein Axiomensystem, wenn sie vollständig aufteilbar ist in 1-stämmige Axiomensysteme und eine Menge von Relationenrelationen.

3.a. Profile und Komplexe. Um einen Überblick über die in Satz 5.9 genannten Mengen zu bekommen und die dort genannten notwendigen Bedingungen an Relationsattribute zu *hinreichenden* verschärfen zu können, zeichnen wir nun dafür relevante Mengen von Attributen aus:

Eine Menge von Attributen heißt ein „Profil“, wenn sie bei der Zerlegung eines einzigen Attributes anfallen, d.h. umgekehrt zu einem einzigen Attribut zu verbinden sind.[1] Den einfachsten Typ von Profilen bildet eine Menge zueinander soziabler Attribute; jede solche Menge nennen wir einen „Komplex“ selbst dann, wenn sie nur ein einziges Attribut enthält. Beispiele von Profilen sind etwa:

(5.4)	ist rot (x),	ist schwer (x).	
(5.5)	ist verwandt mit (x_1,x_2),	ist älter als (x_1,x_2),	
(5.6)	ist verwandt mit (x_1,x_2),	ist älter als (x_1,x_2),	ist rot (x_1), ist kalt (x_1).
(5.7)	ist verwandt mit (x_1,x_2),	ist groß (x_1),	ist rot (x_1), ist kalt (x_1),
		ist blau (x_2),	ist schwer (x_2).

(5.8) Add(x_1,x_2,x_3), $>$(x_2,x_1), ist teilbar durch(x_2,x_3), $<$(17,x_1), $\neq$(0,x_2), ist prim(x_3).

Jedes Profil ist danach in eine Minimalzahl von Komplexen, d.h. Attributen mit gleichem Itembereich, aufzuteilen, so (5.4) f je in einen, (5.6) in zwei, (5.7) in drei und (5.8) in sechs Komplexe.

Kein Profil bildet dagegen die Menge von Attributen

$>$(x_2,x_1), ist teilbar durch(x_2,x_3), $<$(17,x_1), $\neq$(0,x_2), ist prim(x_3).

Daraus wird ersichtlich die folgende Variablenbedingung:

Lemma 5.10: Die Individuenvariablen (der Attribute) eines Profils treten sämtlich bereits in mindestens einem einzigen Attribut des Profils auf.

Jedes solche Attribut nennen wir „Rahmenattribut“ des Profils. Es selbst ist zwar i.a. nicht eindeutig bestimmt, wohl aber seine *Stelligkeit*; ein Profil heißt „k-stämmig“, wenn es ein k-stelliges Rahmenattribut hat. Das Profil (5.4) ist 1-stämmig, die Profile (5.5)ff sind je 2-stämmig, denn die Rahmenattribute ´ist verwandt mit(x_1,x_2)`, ´ist älter als($x_1$,$x_2$)` sind je 2-stellig. Das Profil (5.8) ist 3-stämmig, da das Rahmenattribut ´+(x_1,x_2,x_3)` 3-stellig ist.

3.b. Systeme und Strukturen. Ein Profil, in dem jedes *Argument* eines Attributes auch *Item* eines (1-stelligen) Attributes dieses Profils ist, nennen wir ein „System“.[2] Beispiele von Systemen sind die Profile (5.4) und (5.6)ff, nicht aber (5.5). Wir werden im folgenden *nur* Systeme untersuchen.

Ein System von *Relationsattributen* heißt eine „Struktur“. Es enthält nur Relationseigenschaften und Relationenrelationen. Damit gilt aufgrund von Satz 5.9

Satz 5.11: Jedes formale Axiomensystem der Mathematik ist eine Struktur.

Das Axiomensystem (3.9)f, (3.12) bildet offenbar ein System von Relationsattributen mit der Relationenrelation ´ist flächendicht(r_1,r_2)` als Rahmenatttribut. Es folgt

Satz 5.12: Das formale Axiomensystem der ebenen Geometrie ist eine 2-stämmige Struktur.

[1] Beispiele solcher Verbindungen liefern die Junktionen, wie etwa die Konjunktion oder die Implikation. Sie sind Relationen (relativ) höherer Stufe. Allgemein können wir solche Verbindungen an dieser Stelle nicht erörtern.

[2] Diese Verwendung des Terminus „System“ ist verträglich mit der Hilberts in (1.2). So ergibt z.B. die Vereinigung von Systemen i.a. *kein* System.

Diesem Beispiel entnehmen wir, dass *jede* Struktur geeignet ist, ein formales Axiomen*system* zu sein. Mit Satz 5.11 ergibt sich dann

Theorem 5.13: Genau die Strukturen sind (potentiell) formale mathematische Axiomensysteme.

Formale Axiomensysteme müssen also nicht Axiomatisierungen vorgegebener Theorien sein, sondern sie und die zugehörigen Theorien sind einzig von Attributen und deren Verflechtung zu Strukturen abhängig.[1] Daraus folgt, dass Strukturen – vom „Teilstruktur“-Verhältnis abgesehen – als solche gleichrangig sind. Keine Struktur ist vor einer anderen ausgezeichnet. Gleiches gilt dann auch für mathematische Axiomensysteme und Theorien:

Theorem 5.14: Sämtliche axiomatisierbaren mathematischen Theorien sind – abgesehen von Teiltheorien – gleichrangig.

Insbesondere sind danach die Arithmetik oder die Mengenlehre keine Basistheorien.

4. Zur Widerspruchsfreiheit formaler Systeme. Nachdem formale mathematische Systeme als *Strukturen* begrifflich gefaßt sind, können wir nun für sie qualifizierende Bewertungen einführen und dabei insbesondere den Begriff der Widerspruchsfreiheit von Axiomensystemen klären. Er nimmt bei Hilbert eine zentrale Stellung ein:

> „Wir sind genötigt, die Widerspruchsfreiheit von theoretischen Systemen losgelöst von der Betrachtung der Tatsächlichkeiten zu untersuchen, und damit befinden wir uns bereits auf dem Standpunkt der formalen Axiomatik.“[S.3]

Doch verwendet er dabei einen Widerspruchsbegriff, der auf der Deduktion beruht und den wir daher nicht übernehmen. Statt dessen können wir wegen Satz 5.11 Fragen nach der Bewertung von Axiomensystemen als Fragen nach der Bewertung von Strukturen, Komplexen usw. begreifen.

4.a. Zur Einteilung von Komplexen. Als Menge soziabler Attribute ist jeder Komplex auf einen „<u>einfachen</u>“ Komplex, d.h. einen aus einfachen Attributen zu reduzieren und dieser mittels der Pertinenz, der Kontrarietät und der Unterordnung zu qualifizieren: Ein einfacher Komplex heißt „<u>abhängig</u>“, wenn er mehrere zueinander pertinente Attribute enthält, sonst „<u>unabhängig</u>“. Ist ein Komplex abhängig, sind nach Lemma 4.3 mindestens zwei seiner Attribute konträr oder einander untergeordnet. Wir nennen einen einfachen Komplex

„<u>widersprüchlich</u>“, wenn mindestens zwei seiner Attribute konträr zueinander sind,
„<u>widerspruchsfrei</u>“, wenn zwischen seinen Attributen keine Kontrarietät auftritt,
„<u>hierarchisch</u>“, wenn mindestens ein Attribut einem andern untergeordnet ist,
„<u>hierarchiefrei</u>“, wenn zwischen seinen Attributen keine Unterordnung auftritt.

Damit ergibt sich

Satz 5.15: Genau die unabhängigen Komplexe sind widerspruchs- und hierarchiefrei, die abhängigen sind widersprüchlich und/oder hierarchisch.

Wir nennen einen einfachen Komplex „<u>kategorisch</u>“, wenn er aus *jeder* Pertinenzklasse seiner Soziabilitätsklasse mindestens ein Attribut enthält; ist er zudem noch unabhängig, nennen wir ihn „<u>rein kategorisch</u>“. Damit ergibt sich als Verknüpfung des „Satzes vom Widerspruch“ und des verallgemeinerten „Satzes vom ausgeschlossenen Dritten“[2]

Lemma 5.16: (Kontrarietätstheorem) Der Komplex von Attributen eines existierenden Items ist stets rein kategorisch.

[1] Auf die jetzt möglichen Untersuchungen von „Teilstrukturen“ und „Teilaxiomensystemen“ und deren Bedingungen verzichten wir hier, obwohl insbesondere eine Theorie „atomarer“ Strukturen für die Untersuchung komplexer Theorien sehr erhellend wäre.

[2] Das Kontrarietätstheorem wird bewiesen in M.H., Kon S.92 ff.

4.b. Zur Einteilung von Profilen und Systemen. Da die Komplexe bzgl. der Pertinenz, Kontrarietät und Unterordnung ohne Einfluß aufeinander sind, ist nun die Bewertung von *Profilen* und damit insbesondere von Systemen auf die von *Komplexen* zurückzuführen; wir nennen ein Profil

(5.9) „abhängig“, wenn einer seiner einfachen Komplexe abhängig ist,
„unabhängig“, wenn jeder seiner einfachen Komplexe unabhängig ist,
„widersprüchlich“, wenn einer seiner einfachen Komplexe widersprüchlich ist,
„widerspruchsfrei“, wenn jeder seiner einfachen Komplexe widerspruchsfrei ist,
„hierarchisch“, wenn einer seiner einfachen Komplexe hierarchisch ist,
„hierarchiefrei“, wenn jeder seiner einfachen Komplexe hierarchiefrei ist,
„(rein) kategorisch“, wenn jeder seiner einfachen Komplexe (rein) kategorisch ist.[1]

Damit ist ein Profil widersprüchlich genau dann, wenn einer seiner Komplexe konträre Attribute enthält. Für Strukturen als spezielle Profile folgt also

Satz 5.17: Eine Struktur ist widersprüchlich genau dann, wenn einer ihrer Komplexe konträre Attribute enthält.

Die Widerspruchsfreiheit einer Struktur ist daher nach Satz 5.15 überraschenderweise aus ihrer Unabhängigkeit nachzuweisen.

4.c. Zur Qualifizierung mathematischer Axiomensysteme. Diese Ergebnisse gelten nun insbesondere für formale mathematische Axiomensysteme, die ja Systeme von Relationsattributen sind. So zerfällt das Axiomensystem der ebenen Geometrie in drei Komplexe, die unter (4.5)ff zusammengefaßt sind.

Wie in (5.9) ist nun ein formales mathematisches Axiomensystem
„abhängig“, wenn einer seiner einfachen Komplexe abhängig ist,
„unabhängig“, wenn jeder seiner einfachen Komplexe unabhängig ist,
usw.

Damit ergibt sich aus Satz 5.17

Theorem 5.18: Ein formales mathematisches Axiomensystem ist widersprüchlich genau dann, wenn einer seiner einfachen Komplexe konträre Axiome enthält.

Die Frage der Widerspruchsfreiheit eines formalen Axiomensystems (etwa der ebenen Geometrie) ist damit auf die der Widerspruchsfreiheit seiner Komplexe (etwa von (4.5), (4.6) und (4.7)) zurückgeführt. Diese wiederum sind widerspruchsfrei z.B. nach Satz 5.15, wenn sie unabhängig sind, nach Satz 5.16, wenn ihre Extension nicht leer ist.

Den *Modellen* eines formalen Axiomensystems im Hilbertschen Sinne entsprechen damit die Elemente der *Extension* in unserem Sinne; ein System muß weder ein Modell haben, noch eine nichtleere Extension. Den Zusammenhang zwischen beiden Auffassungen können wir hier nicht darlegen, da wir auf dazu Theorien der Semantik und der Deduktion eingehen müßten, was den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

[1] Im Hilbertschen Sinne heißt ein System „kategorisch“, wenn alle seine Modelle *isomorph* sind. Die Kategorizität wird dort also semantisch definiert.

§ 6 Beispiele mathematischer Axiomensysteme

Schließen wollen wir mit einigen Beispielen von Strukturen und damit nach Theorem 5.13 von formalen Axiomen*systemen* der Mathematik. Wir stellen sie wieder zweifach dar, zum einen in PL^{In} und zum andern in der deutlicher funktionalen Weise, die ihren Attribut-Status hervorhebt. Die Relationseigenschaften gliedern wir zunächst nach Stelligkeit ihrer Items, der Relationen, dann nach maximalen Zahl verschiedener Argumentbereiche dieser Relationen und schließlich nach der "Bündigkeit", d.h. der Zahl der zur Darstellung in PL^{In} nötigen (gebundenen) Variablen.

1. 1-stämmige Strukturen liefern die unkompliziertesten Axiomensysteme. Jede Auswahl von Relationseigenschaften einer Relation bildet ja eine solche Struktur. Wir machen daher im folgenden die Beispiele von Eigenschaften 2- bzw. 3-stelliger Relationen zunächst an einzelnen Relationen fest, deren Attribute sie sind. Damit ist zugleich gesichert, dass sie zueinander soziabel sind.

1.a. Relationseigenschaften 3-stelliger Relationen – und nach Lemma 2.3 nur solche – werden getragen nicht nur von den Relationen ´zwischen` und ´auf einer Gerade liegen` (auf den Punkten der Ebene), sondern z.B. auch von der Addition und der Multiplikation (auf den ganzen Zahlen Z). Die Bedingung (5.2) ist damit jeweils erfüllt.

Einfache Relationseigenschaften 3-stelliger Relationen sind – neben (4.5)f – z.B.

3-bündig:

$g_1(r)$: (x)(y)(Ez) r(x,y,z) ist linksbitotal(r)

$g_2(r)$: (y)(z)(Ex) r(x,y,z) ist rechtsbitotal(r)

(6.1) $g_3(r)$: (x)(z)(Ey) r(x,y,z) ist außentotal(r)

4-bündig:

$g_4(r)$: (x)(y)(u)(v) [r(x,y,u) $\wedge$ r(x,y,v)] $\rightarrow$ u=v ist rechtseindeutig$_3$(r)

2-bündig:

$g_5(r)$: (Ey)(x) r(y,x,x) ist (links-)teilduplikativ(r)

3-bündig:

(6.2) $g_6(r)$: (x)(y)(z) r(x,y,z) $\rightarrow$ r(y,x,z) ist (links-)kommutativ(r)

6-bündig:

$g_7(r)$: (x)(y)(z)(u)(v)(w) [r(x,y,u) $\wedge$ r(y,z,v)] $\rightarrow$ [r(u,z,w) $\leftrightarrow$ r(x,v,w)] ist assoziativ(r)[1]

Jede Auswahl dieser Eigenschaften liefert nun eine 1-stämmige Struktur und damit gemäß Theorem 5.13 ein formales Axiomensystem. So bilden g_1,g_4,g_7 die Struktur einer „Halbgruppe", g_1–g_4,g_6,g_7 die Struktur einer „kommutativen Gruppe“. Denn durch Konjunktion der einfachen ergeben sich komplexe Eigenschaften wie

ist eine verknüpfung(r) := ist linksbitotal und rechtseindeutig(r)
ist eine halbgruppe(r) := ist eine verknüpfung und assoziativ(r)
ist eine gruppe(r) := ist eine halbgruppe und außentotal und rechtsbitotal(r)
ist eine kommutative gruppe(r) := ist eine gruppe und (links-)kommutativ(r).

Die Anwendung dieser Eigenschaften etwa auf die Addition auf Z liefert jeweils ein Relationsurteil und damit nach Satz 5.1 ein *inhaltliches* Axiom. Beispiele sind

g_1(Add): (x)y)(Ez) Add(x,y,z) Die Addition (auf Z) ist linksbitotal.

g_6(Add): (x)(y)(z) Add(x,y,z) $\rightarrow$ Add(y,x,z) Die Addition (auf Z) ist linkskommutativ.

ist eine gruppe(Add) Die Addition (auf Z) ist eine Gruppe. usw.[2]

Dabei ist etwa die Struktur einer Gruppe nach Satz 5.16 widerspruchsfrei, falls die Addition auf Z zu ihrer Extension gehört.

---

[1] Die übliche Darstellungsweise der Assoziativität (x)(y)(z) (x·(y·z)) = ((x·y)·z), wie sie zu finden ist etwa in Scholz und Hasenjäger, GmL, S.254, setzt die Rechtseindeutigkeit voraus; eine Relation kann aber assoziativ sein, ohne rechtseindeutig zu sein.

[2] Von diesen Urteilen werden von verschiedenen Autoren verschiedene als Axiome zu einem inhaltlichen Axiomensystem der Gruppentheorie kombiniert, so G1-G5 von v. d. Waerden, Alg S.13 f.

Der Itembereich o.g. Relationseigenschaften umfaßt *nur* 3-stellige, aber *nicht in jedem Fall sämtliche* 3-stellige Relationen. Einige Eigenschaften – die unter (6.2) – stellen nämlich Bedingungen an die Argumentbereiche ihrer Items. So fordert g_6 denselben Argumentbereich für die erste und zweite, g_5 für die zweite und dritte, und g_7 für alle drei Stellen. Jede Struktur, die die Assoziativität enthält, ist also ausschließlich auf Relationen mit *nur einem Argumentbereich* anwendbar.[1] Die o.g. vier Beispielsrelationen erfüllen diese Bedingung. Es ergeben sich Relationsurteile wie ´Die Multiplikation (auf Z) ist eine Halbgruppe`, ´zwischen (auf Punkten der Ebene) ist eine kommutative Gruppe` und ´auf einer Geraden liegen (auf Punkten der Ebene) ist eine Gruppe`.[2] Damit gilt

Satz 6.1: Die Theorien der Gruppe, Halbgruppe etc. sind je 1-stämmig über 3-stelligen Relationen mit nur einem Argumentbereich.

1.b. Relationseigenschaften 2-stelliger Relationen (und nach Lemma 2.3 nur solche) sind anwendbar z.B. auf die Kleiner-Relation <, die Teil-Relation $\subset$, die Nachfolgerrelation Nf und die Eigentums-Relation. Bis auf die letztgenannte sind dies Items Beispiele von Relationen mit nur einem Argumentbereich.

Auf jede 2-stellige Relation anwendbar sind z.B. die folgenden Eigenschaften:

2-bündig:

$f_1(r)$: $(x)(Ey)\ r(x,y)$ ist linkstotal(r)
(6.3) $f_2(r)$: $(y)(Ex)\ r(x,y)$ ist rechtstotal(r)
$f_3(r)$: $(Ex)(y)\ r(x,y)$ ist linksuniert (r)
$f_4(r)$: $(Ey)(x)\ r(x,y)$ ist rechtsuniert (r)

3-bündig:

(6.4) $f_5(r)$: $(x)(y)(z)\ [r(x,y) \wedge r(x,z)] \rightarrow y=z$ ist rechtseindeutig_2(r)
$f_6(r)$: $(x)(y)(z)\ [r(x,z) \wedge r(y,z)] \rightarrow x=y$ ist linkseindeutig_2(r)

Diese Eigenschaften sind somit anwendbar insbesondere auf 2-stellige Relationen deren zwei Argumentbereiche verschieden sind. Dagegen sind die folgenden Beispiele von Relationseigenschaften anwendbar nur auf Relationen, deren zwei Argumentbereiche übereinstimmen, die also nur *einen* Argumentbereich haben. Solche Relationseigenschaften *2-stelliger* Relationen sind z.B.

1-bündig:

(6.5) $f_7(r)$: $(x)\ r(x,x)$ ist reflexiv(r)

2-bündig:

$f_8(r)$: $(x)(y)\ r(x,y) \mid x=y$ ist irreflexiv(r)
$f_9(r)$: $(x)(y)\ r(x,y) \vee r(y,x) \vee x=y$ ist konnex(r)
(6.6) $f_{10}(r)$: $(x)(y)\ r(x,y) \rightarrow r(y,x)$ ist symmetrisch(r)
$f_{11}(r)$: $(x)(y)\ r(x,y) \mid r(y,x)$ ist asymmetrisch(r)
$f_{12}(r)$: $(x)(y)\ [r(x,y) \wedge r(y,x)] \rightarrow x=y$ ist identitiv(r)

3-bündig:

$f_{13}(r)$: $(Ey)(x)(z)\ r(x,y) \mid r(y,z)$ ist teilfinit(r)
(6.7) $f_{14}(r)$: $(x)(y)(z)\ [r(x,y) \wedge r(y,z)] \rightarrow r(x,z)$ ist transitiv(r)
$f_{15}(r)$: $(x)(y)(z)\ [r(x,y) \wedge r(y,z)] \mid r(x,z)$ ist atransitiv(r)

6-bündig:

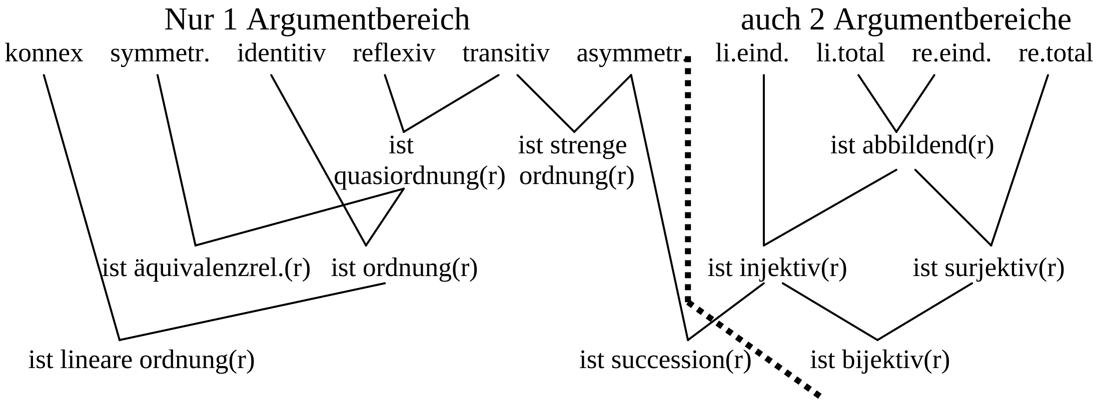
(6.8) $f_{16}(r)$: $(u)(v)(w)(x)(y)(z)\ \{[r(u,v) \mid r(v,w)] \wedge [r(x,y) \mid r(y,z)]\} \rightarrow v=y$ ist finiseindeutig(r)

Jede Auswahl dieser Eigenschaften liefert wieder eine 1-stämmige Struktur und damit ein *formales* Axiomensystem. Durch Junktionen erhält man daraus *komplexe* Relationseigenschaften. So ergeben sich etwa durch die (teils mehrfache) Konjunktion folgende komplexe Relationseigenschaften 2-stelliger Relationen:

[1] Sie muß allerdings nicht zutreffen.
[2] Welche dieser Urteile wahr sind, kann hier offen bleiben.

ist abbildend$_2$(r):= ist linkstotal(r) und ist rechtseindeutig(r)
ist surjektiv(r):= ist abbildend$_2$(r) und ist rechtstotal(r)
ist injektiv(r):= ist ist abbildend$_2$(r) und ist linkseindeutig(r)
ist bijektiv(r):= ist injektiv(r) und ist surjektiv(r)
ist eine succession(r):= ist injektiv(r) und ist asymmetrisch(r)
ist eine succession mit eindeutigem nichtsuccessor(r):=
ist eine succession(r) und teilfinit(r) und finiseindeutig(r)
ist eine strenge ordnung(r):= ist transitiv(r) und asymmetrisch(r)
ist eine quasiordnung(r):= ist transitiv(r) und reflexiv(r)
ist eine äquivalenzrelation(r):= ist eine quasiordnung(r) und symmetrisch(r)
ist eine ordnung(r):= ist eine quasiordnung(r) und identitiv(r)
ist eine lineare ordnung:= ist eine ordnung(r) und konnex(r)

Daraus ergibt sich bzgl. der Unterordnung folgende Hierarchie von Eigenschaften 2-stelliger Relationen:



Die aus den Anwendungen (auf Relationen aus dem Itembereich) erwachsenden Urteile müssen aber nicht alle wahr sein. Als wahr gelten z.B. die Urteile

´< ist asymmetrisch`, ´< ist transitiv`, ´< ist konnex`.

Dagegen gilt für die Teil-Relation $\subset$[-,-] mit den Rollen „Teil“ und „Ganzes“ zwar

´$\subset$ ist asymmetrisch` und ´$\subset$ ist transitiv`, nicht aber ´$\subset$ ist konnex` als wahr.

Für die Nachfolgerrelation Nf[-,-] mit den Rollen „Vorgänger“ und „Nachfolger“ gilt

´Nf ist asymmetrisch` und ´Nf ist atransitiv` als wahr
und daher ´Nf ist konnex` als nicht wahr.

Davon betrachten wir an dieser Stelle genauer Urteile über die Nachfolgerrelation Nf[-,-] (auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$) mit den Rollen „Vorgänger“ und „Nachfolger“. Solche Beispiele von Urteilen und so von *inhaltlichen* Axiomen sind:

f_1(Nf): (x)(Ey) Nf(x,y) — Die Nachfolgerrelation ist linkstotal.
(6.9) f_5(Nf): (x)(y)(z) [Nf(x,y) $\wedge$ Nf(x,z)] $\rightarrow$ y=z — Die Nachfolgerrelation ist rechtseindeutig$_2$.
f_6(Nf): (x)(y)(z) [Nf(x,z) $\wedge$ Nf(y,z)] $\rightarrow$ x=y — Die Nachfolgerrelation ist linkseindeutig$_2$.
f_{11}(Nf): (x)(y) Nf(x,y) $\mid$ Nf(y,x) — Die Nachfolgerrelationist asymmetrisch.
(6.10) f_{13}(Nf): (Ey)(x)(z) Nf(x,y) $\mid$ Nf(y,z) — Die Nachfolgerrelation ist teilfinit.
f_{16}(Nf): (u)(v)(w)(x)(y)(z) {[Nf(u,v) $\mid$ Nf(v,w)$\wedge$[Nf(x,y) $\mid$ Nf(y,z)]}$\rightarrow$ v=y
Die Nachfolgerrelation ist finiseindeutig.

(6.11) Die Nachfolgerrelation Nf ist eine Succession mit eindeutigem Nichtsuccessor.

Zum Vergleich führen wir die ersten vier „Peano-Axiome“ an:

P1: 0 ist eine natürliche Zahl.
P2: Ist a eine natürliche Zahl, dann auch der Nachfolger von a.
P3: Sind a und b natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger, dann sind a und b gleich.
P4: Nachfolger einer natürlichen Zahl sind stets von 0 verschieden.

Die „Peano-Axiome“ sind je Urteile. Sie können daher keine formalen, sondern nur „inhaltliche Axiome" sein. P2 etwa entspricht dem Konjugat von f_1(Nf) und f_5(Nf); P3 entspricht f_6(Nf). Dagegen enthalten P1 und P4 je eine Individuenkonstante, die 0. P1 ist ein 1-füßiges Urteil über diese Konstante und somit kein Relationsurteil. P4 ist ein generelles Urteil über den 1-stelligen Begriff ´ist nicht Nachfolger von 0`, wie aus folgender Darstellung in PL^{Sub} deutlich wird:

P4´: $(X) \neg Nf(X,0)$

und ist daher ebenfalls kein (singuläres) Relationsurteil. Somit gilt nach Satz 2.7

Folgerung 6.2: Die „Peano-Axiome" P1 und P4 sind keine Axiome der Mathematik.

Sie sind also für ein zu P1-P4 äquivalentes Axiomensystem durch singuläre Urteile über Nf zu ersetzen. Beispiele solcher Urteile sind etwa mit (6.10) gegeben. Damit ergäbe sich (6.11) als ein inhaltliches Axiomensystem der Nachfolgerrelation auf ${}^{|}$N.

Auf die Qualifizierung und insbesondere die Widerspruchsfreiheit der genannten Axiomensysteme gehen wir hier nicht ein.[1] Anders als Hilbert gemäß (1.3) wohl meinte, muß durch ein Axiomensystem eine Beziehung aber nicht *vollständig* beschrieben werden,[2] ein Axiomensystem muß also *nicht* kategorisch sein.

2. Mehrstämmige Strukturen. Auf der Basis 1-stämmiger Strukturen sind nun synthetisierend mehrstämmige Strukturen einzuführen. Mit wachsender Stämmigkeit nimmt natürlich die Zahl der möglichen Strukturen rapide zu. Durch Beispiele 2-stämmiger Strukturen über nur einem Argumentbereich stellen wir hier nur die einfachsten solcher Strukturen und damit Axiomensysteme vor. Sie ergeben sich, wenn man *zwei* 1-stämmige Strukturen um (mindestens) eine geeignete Relationen*relation* ergänzt. Erweitert man z.B. die Relationseigenschaften

(6.12) ist eine kommutative gruppe (r_1) und ist eine halbgruppe (r_2)

um die beiden Relationenrelationen

$dl(r_1,r_2)$: $(x)(y)(z)(u)(v)(w)(t)\ [r_1(x,y,z) \wedge r_2(t,x,u) \wedge r_2(t,y,v)] \rightarrow [r_2(t,z,w) \leftrightarrow r_1(u,v,w)]$

(6.13) ist (links-)distributiv (r_1,r_2)

$dr(r_1,r_2)$: $(x)(y)(z)(u)(v)(w)(t)\ [r_1(x,y,z) \wedge r_2(x,t,u) \wedge r_2(y,t,v)] \rightarrow [r_2(z,t,w) \leftrightarrow r_1(u,v,w)]$

ist (rechts-)distributiv (r_1,r_2)

ergibt sich eine 2-stämmige Struktur, die eines „Körpers(r_1,r_2)". Der Itembereich umfaßt nur Bitupel 3-stelliger Relationen mit einem Argumentbereich, der, wie $dl(r_1,r_2)$ und $dr(r_1,r_2)$ erzwingen, derselbe sein muß. (6.12)f ist daher das Axiomensystem eines Körpers:

Satz 6.2: Die Theorien der Ringe, Körper Verbände etc. sind je 2-stämmig über zwei 3-stellige Relationen mit ein und demselben Argumentbereich.

Beispiele 1- bzw. mehrstämmiger Strukturen über Relationen mit *verschiedenen* Argumentbereichen dürfen wir hier übergehen.

Die bekannten *algebraischen* Axiomensysteme entsprechen also den Anforderungen des hier skizzierten Ansatzes. Ob aber sämtliche üblicherweise verwendeten „Axiomensysteme" im Bereich der Mathematik die genannten Bedingungen insbesondere aus (5.3) erfüllen, darf nach den Erfahrungen mit Hilberts „Axiomen" der Geometrie bezweifelt werden. An anderer Stelle werden wir etwa Axiomensysteme der Mengenlehre kritisch untersuchen.

[1] Hierzu nur eine kurze Bemerkung bzgl. des Peano-„Axiomensystems": Es ist, falls es kategorisch ist, d.h. falls alle seine Modelle isomorph sind, nicht unabhängig.

[2] Vgl. auch Hilbert, HP S.36f: Bei der Untersuchung der Grundlagen einer Wissenschaft „hat man ein System von Axiomen aufzustellen, welche eine genaue und *vollständige Beschreibung derjenigen Beziehungen* enthalten, die zwischen den elementaren Begriffen jener Wissenschaft stattfindet."

§ 7 Zusammenfassung und Weiterungen

1. Ergebnis. Auf der Basis der Hilbert-These (1.16), nach der inhaltliche Axiome Urteile über *Beziehungen* sind, ergibt sich die Möglichkeit, das Verhältnis zwischen inhaltlichen und formalen Axiomen entgegen herrschender Lehre nicht als semantisches, sondern als logisches Verhältnis zu sehen; es ist nicht ein *Interpretations*-, sondern ein *Attributions*verhältnis: Die einfachen *inhaltlichen* Axiome der Mathematik sind singuläre Urteile über Relationen (Theorem 2.11), die *formalen* Axiome Relationsattribute (Theorem 3.4), d.h. Attribute nur von Relationen (Satz 2.7).

Diese auf die *Attribution* gegründete Auffassung der Axiome bietet nun zahlreiche Vorzüge. Sie ermöglicht nämlich, allgemeine Ergebnisse einer grundlegenden Theorie der Logik, der Theorie der Attribution und damit der Attribute, auf die formalen Axiome anzuwenden. So liefert sie zunächst Kriterien für inhaltliche und formale Axiome. Danach kann jedes Relationsattribut ein formales, jedes Urteil damit ein inhaltliches Axiom der Mathematik sein. (Satz 5.1 f)

Sodann erlaubt sie, durch Verbindung von Relationsattributen zu „Strukturen“ zu zeigen, dass genau die *Strukturen* formale Axiomensysteme sind und so auch für formale Axiomensysteme ein Kriterium anzugeben. Schließlich sind so Probleme der Widerspruchsfreiheit u.ä. von *Axiomensystemen* auf die der Kontrarietät u.ä. von *Attributen* zurückzuführen. Damit erhält der *Bourbaki*-Ansatz der Mathematik eine systematische Begründung.

Zudem ist dadurch die omnipräsente Stellung der Mathematik in der Welt erklärt: Nicht in Formeln und ihrer Interpretation besteht das Wesen der Mathematik, sondern in deren Voraussetzung, dem Vorhandensein von Strukturen, die eine solche isomorphe, d.h. strukturerhaltende Interpretation ermöglichen. Wo immer in der Welt – und somit insbesondere in der Sprache – Relationen auftreten, treten auch Relations*eigenschaften* und damit Strukturen auf; jede Relation trägt ja mindestens eine Eigenschaft. Die *inhaltliche* Mathematik untersucht die Strukturen gewisser einzelner Relationen und kann dabei deren (gegenständliche) *Argumente* übergehen. Die *formale* Mathematik untersucht den Aufbau und das Verhältnis der Strukturen und kann dabei die sie tragenden *Relationen* übergehen.

Von den durch diese Untersuchungen aufgeworfenen Fragen wollen wir hier zwei erwähnen. Erstens sind die Überlegungen offenbar auf jede (inhaltliche) Theorie zu verallgemeinern, deren Axiome *singulär* sind; die Attribute dieser inhaltlichen Axiome bilden dann ein *formales* Axiomensystem.

Zweitens stellt sich die Frage, wie Abhängigkeitsverhältnisse und insbesondere Beweise für solchermaßen aufgefaßte formale Axiome möglich sind, da doch Attribute nicht als Argumente von Deduktionsregeln gelten. Auf diese Frage, die den Übergang zur Beweistheorie berührt, wollen wir kurz eingehen:

2. Formale Beweise als Deduktion zwischen *Attributen*. Schlüsse und Beweise (als eine Abfolge von Schlüssen) sind stets nur zwischen gleichartigen Einheiten möglich. Sie führen etwa von Urteilen zu Urteilen,

(7.1) von Aussagen zu Aussagen,
von Formeln zu Formeln.

Dabei kann man Einheiten, die am Beginn eines Beweises stehen, von denen am Ende unterscheiden; erstere haben die Funktion eines Axioms, letztere die eines Theorems. Diese funktionale Charakterisierung befreit von der traditionellen Bindung an Wahrheitswerte; danach hatten Axiome und Theoreme ja *wahr* zu sein. Mit dem Hilbertschen Ansatz einer formalen Axiomatik, in der Beweise „Ableitungen“

von Formel zu Formel sind, ist diese Bindung aufgehoben: Formeln können ja (als solche) weder wahr noch falsch sein.

Wenn somit Axiome und Theoreme nicht mehr an Wahrheitswerte gebunden sind, ist es von daher nicht ausgeschlossen, dass in Fortsetzung von (7.1) Schlüsse und Beweise auch von Attributen zu Attributen und
von Prädikaten zu Prädikaten
möglich sind, falls für sie ein einem Beweis entsprechender Abhängigkeitsbegriff gefunden werden kann; die o.g. Grundbedingung der Gleichartigkeit ist dabei ja erfüllt.

Für *einfache* Begriffe und damit für *einfache* Attribute liegt mit der „Unterordnung" ein solches Abhängigkeitsverhältnis bereits vor: So ist etwa der Begriff ´karminrot` dem Begriff ´rot` und der Begriff ´irreflexiv` dem Begriff ´asymmetrisch` untergeordnet. Als Folge dieser direkten logischen Beziehung zwischen den Begriffen, die nicht an das Auftreten von *Items* gebunden ist, ergibt sich auch eine Beziehung zwischen ihren Extensionen als Attributen: Die Extension des untergeordneten Attributes ist stets in der des übergeordneten enthalten; jedes Item, das unter das untergeordnete Attribut fällt, fällt auch unter das übergeordnete. So ist z.B. jede Relation, die irreflexiv ist, auch asymmetrisch.

Ein solcher Extensionszusammenhang ist nun von *einfachen* auf zueinander *soziable* und somit z.B. auf komplexe Attribute auszuweiten. Eine Beziehung zwischen Extensionen ist aber keine reine *Begriffs*beziehung mehr, sondern setzt *Urteile* und Beziehungen zwischen diesen voraus. Wir versuchen deshalb, *Beziehungen zwischen Urteilen* zu nutzen zur Definition von *Beziehungen zwischen Attributen*.

Dies ist möglich, insofern jedes Attribut (vermöge der Attribution) zusammen mit einem Item ein Urteil bestimmt. Nun ziehen wir Schlußregeln und damit Ableitungen ausschließlich zwischen solchen Urteilen heran, die zwar verschiedene Attribute, aber dasselbe Item haben. Die in den Urteilen auftretenden Attribute sind also sämtlich zueinander soziabel. Damit kann man auf zueinander soziablen *Attributen* eine eine 2-stellige[1] Relation ´aus (-) folgt (-)` einführen, deren Extension zurückzuführen ist auf die einer Ableitungsrelation zwischen *Urteilen*:

´aus f folgt g` ist gültig ⇔ ´aus f(a) folgt g(a)` ist gültig für beliebiges a (aus dem Itembereich von f und g).

Damit ist unser Ziel erreicht: Auch zwischen *Attributen* ist eine Ableitung möglich.
Analog sind Herleitungsregeln und damit Herleitungen zwischen Sätzen mit demselben Subjekt heranzuziehen zur Einführung eines Herleitungsbegriffes zwischen *Prädikaten*:

Die Herleitung $\vdash$ ist eine 2-stellige Relation zwischen Prädikaten, deren Anwendungsbereich dieselben Subjekte umfaßt.[2]

Ihre Extension kann man zurückführen auf die der Relation zwischen Sätzen:

$f \vdash g$ ist gültig ⇔ $f(a) \vdash g(a)$ ist gültig für beliebige Subjekte a (aus dem Anwend dungsbereich von f und g).[3]

Solche allein auf die Attribute bzw. Prädikate bezogene Beweise bzw. Herleitungen nennen wir „formal". Damit entsprechen die auf formale Axiome gestützten *formalen* Beweise genau den auf inhaltliche Axiome gestützten „inhaltlichen" Beweisen.[4]

[1] Sie ist nicht zu verwechseln mit der Implikation, die wie auch die Konjunktion eine Junktion und damit 3-stellig ist.

[2] Dabei ist zu bedenken, dass Prädikate auch mehrstellig sein können, da ihre Subjekte keine (1-stelligen) Individuenkonstanten sein müssen (vgl. (1.12)).

[3] Wie leicht zu prüfen ist, betreffen die Schlußregeln der Prädikatenlogik (1.Stufe) ausschließlich solche Sätze mit demselben Subjekt.
Damit ist z.B. das Deduktionstheorem auch auf Herleitungen zwischen *Prädikaten* zu erweitern.

[4] Rudimentär findet sich ein solcher Ansatz bereits bei A. Tarski, EmL, S.130f.

Denn in einen *inhaltlichen* Beweis gehen die thematisierten Relationen wie etwa die Relation ´zwischen` oder die Addition (oder gar deren Anwendungsbereiche) gar nicht spezifisch ein. Er betrifft ausschließlich die *Attribute* dieser Relationen, und diese Abhängigkeit allein der Attribute voneinander wird durch einen *formalen* Beweis offengelegt.

Verwendete Literatur:

Bachmann, Heinz,
WmG Der Weg der mathematischen Grundlagenforschung, Bern/Frankfurt am Main/New York 1983
Becker, Oscar,
GdM Grundlagen der Mathematik, Freiburg/München ²1964
Frege, Gottlob,
GdA Die Grundlagen der Arithmetik, Stuttgart 1987
LdM Logik in der Mathematik, in *Schriften zur Logik und Sprachphilosophie* aus dem Nachlaß, hrsg. von Gottfried Gabriel, Hamburg 1971
Vn Die Verneinung, in Beitr. zur Philos. des deutschen Idealismus 1
BuG Über Begriff und Gegenstand, in Vjschrift für wissensch. Philosophie 16
Bw wissenschaftl. Briefwechsel mit D.Hilbert, E.Husserl, B.Russell, hrsg. von Gottfried Gabriel, Friedrich Kambartel und Christian Thiel, Hamburg 1980
WiF Was ist eine Funktion?, in Festschrift für Ludwig Boltzmann, 1904. Nachdruck in: G.Frege, *Funktion,Begriff,Bedeutung*, hrsg. v. G. Patzig, Göttingen 1975, S.81–90.
Hermes, Hans,
EmL Einführung in die mathematische Logik, Stuttgart 1963
Hilbert, David,
⁴GdG Grundlagen der Geometrie, Leipzig/Berlin ⁴1913
GdG Grundlagen der Geometrie, Stuttgart ¹²1977
HP Die Hilbertschen Probleme, Leipzig ²1979
Hilbert, David und Bernays, Paul,
GdM Grundlagen der Mathematik, Berlin/Heidelberg/New York ²1968
Hohelüchter, Martin,
Kon Kontrarietät, Münster 1988
EfK Ein formales Kategoriensystem, Münster 2006
Meschkowski, Herbert,
PnM Problemgeschichte der neueren Mathematik, Manheim/Wien/Zürich 1978
Oeing-Hanhoff, L. Artikel *Axiom II* im Hist. Wörterb. der Philosophie I, Basel 1971
Scholz, Heinrich und Hasenjäger, Gisbert,
GmL Grundzüge der mathematischen Logik, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961
Tarski, Alfred,
EmL Einführung in die mathematische Logik, Göttingen ²1966
von der Waerden, B.L.,
Alg Algebra, Berlin Heidelberg/NewYork ⁷1966