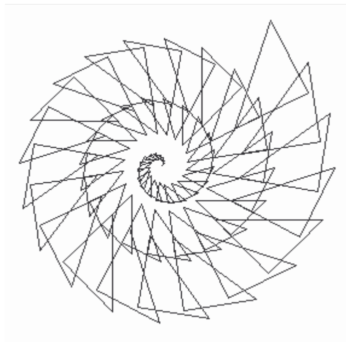
Sibylle Stachniss-Carp
Hubert Weller



Als die Bilder laufen lernten...
oder
Lineare Abbildungen mit Matrizen

Pädagogische Gesichtspunkte

Aufgabenstellung	Darstellung	Dokumentation
graphisch algebraisch	(teil-)offen angeleitet	Zeichnungen Hardcopy Punktlisten Protokolle

Technologie

Tabellen-kalkulation	Graphischer Taschenrechner	Computeralgebra-system	Dynamische Geometriesoft-ware
	X	X	X

Ziele und Beschreibung der Einheit

- Mathematische Grundlagen der Computer-Grafik erarbeiten
- Algebraische Beschreibung geometrischer Abbildungen und Untersuchung ihrer charakteristischen Eigenschaften
- Matrizen als geeignetes Werkzeug zur Beschreibung von Abbildungen nutzen
- Dynamische Aspekte bei der Visualisierung von Abbildungen erfahren
- Exemplarisch Eigenwerte und Eigenvektoren kennen lernen
- Homogene Koordinaten kennen lernen

Rolle der Technologie

- Werkzeug zum Rechnen mit Matrizen
- Medium zur Visualisierung (Erzeugung von Bildern)
- Medium zum entdeckenden Lernen

Notwendige Vorkenntnisse

- Das Rechnen mit Matrizen bzw. der Matrixbegriff sollten bekannt sein, dies ist aber nicht unbedingt notwendig.

- Grundkenntnisse im Umgang mit CAS

Dauer der Einheit

4 bis 10 Unterrichtsstunden. Die Dauer der Einheit ist abhängig von den Vorkenntnissen (Rechnen mit Matrizen) und den Zielen bzw. den weiterführenden Fragestellungen (Fragestellungen zu Fixpunkten, Fixgeraden, Eigenwerte, Eigenvektoren, homogene Koordinaten).

Unterrichtsorganisation

- Die Schülerinnen und Schüler sollten in kleinen Gruppen (2-3) arbeiten.
- Nach jeder Partnerarbeitsphase ist ein Plenumsphase notwendig, damit eine gemeinsame Arbeitsgrundlage geschaffen werden kann.
- Zeichnungen mit Papier und Bleistift (auf Kästchenpapier) sollten die algebraische Behandlung und die Darstellung auf dem Bildschirm unterstützen.
- Die zusätzlichen Aufgaben eignen sich gut zur Differenzierung, für AGs, den Projektbereich oder als zusätzliche Schüleraufgabe.
- Die Unterrichtseinheit bietet Möglichkeiten, der Kreativität der Schüler im Hinblick auf das Erzeugen von besonders schönen Bildern oder das Finden von interessanten Abbildungsmatrizen Raum zu geben. Ästhetische Aspekte werden hier in besonderer Weise angesprochen.

Aufgabenstellung

Aufgabe 1: Im Sommer beleben Pflastermaler die Innenstädte. Wer sie genauer beobachtet stellt fest, dass sie ihre Gemälde oft mit Hilfe eines Quadratgitters auf die quadratischen Platten des Pflasters übertragen.

Arbeitsblatt 1:

- Übertrage in ähnlicher Weise die vorgegebene Figur – hier ein **F** - in verschiedene Parallelogrammgitter.
- Wie verändern sich jeweils die Koordinaten? Suche eine Rechenregel zur Ermittlung der „neuen“ Koordinaten aus den „alten“ im ursprünglichen Koordinatensystem.

Aufgabe 2: In Aufgabe 1 haben wir gelernt, dass eine solche Abbildung (die Übertragung in ein affines Koordinatensystem) durch eine Matrix beschrieben werden kann: Das Bild eines Punktes erhält man, indem man den Punkt mit der Matrix multipliziert. Die Zusammenhänge zwischen den Matrizen und den zugehörigen Abbildungen werden wir nun studieren.

Zunächst untersuchen wir Matrizen der Form $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ mit $a, b \in \Re$

Welche elementargeometrischen Abbildungen werden durch diese Matrizen beschrieben?

Fasse die Ergebnisse in einem Poster zusammen.

Aufgabe 3: Wir wollen jetzt die durch eine Matrix beschriebene Abbildung noch anschaulicher machen, indem wir einen „Film“ herstellen.

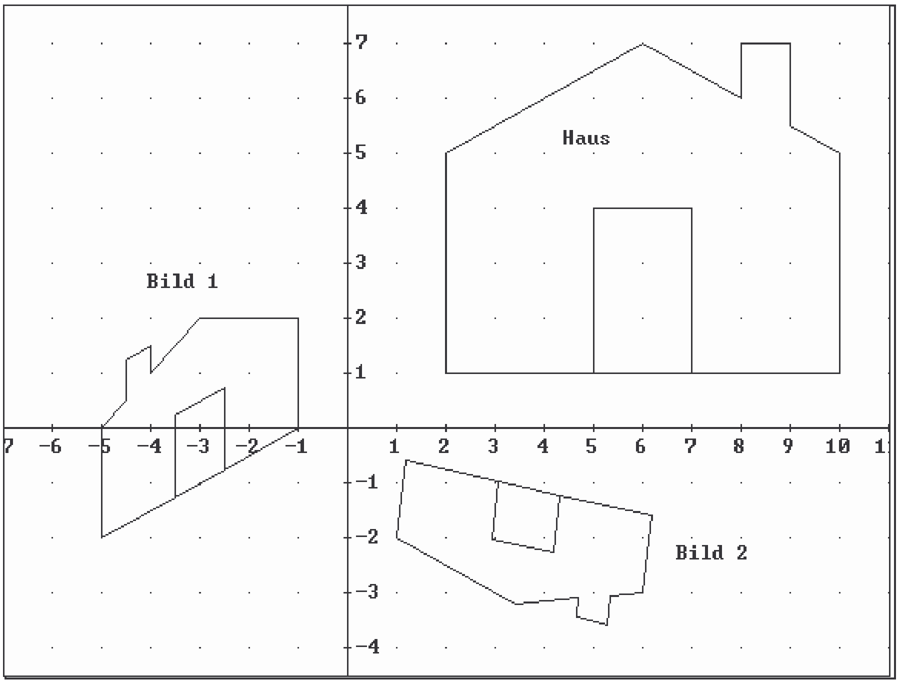
- Erzeuge mit der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$ eine Reihe von Bildern und veranschauliche so die geometrische Abbildung, die zur Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ gehört. (Zunächst musst du dir eine Figur ausdenken, die abgebildet werden soll. Was erhält man für k = 0 ?)
- Stelle weitere „Filme“ her, die den Zusammenhang zwischen Matrix und zugehöriger geometrischer Abbildung veranschaulichen.

Aufgabe 4: „Hilfe, welche Matrix steckt dahinter?“

- Das Haus (Abb. folgende Seite) ist mit zwei verschiedenen Matrizen abgebildet worden.

Bestimme die Matrix $\mathbf{A_1}$,die das **Bild 1** erzeugt (und $\mathbf{A_2}$ **,** die **Bild 2** erzeugt.)

- Bestimme die Matrix, die eine Spiegelung an der Geraden **y = m·x** beschreibt



Aufgabe 5: Wir wollen den mathematischen Hintergrund unserer Abbildungen noch etwas vertiefen.

- Wähle eine beliebige Abbildung bzw. die zugehörige Matrix und überlege:
  - Wohin wird der Nullpunkt abgebildet?
  - Was haben die Bilder der Einheitsvektoren mit der Matrix zu tun?

  Formuliere die Beobachtung, überprüfe deine Vermutungen an weiteren Abbildungen und begründe allgemein.

- Welche Matrizen gehören zu den dir bekannten elementargeometrischen Abbildungen?
  Ordne in einer Tabelle den bekannten Abbildungen (Streckung, Spiegelung an beiden Achsen, Drehung, Punktspiegelung, ...) die entsprechenden Matrizen zu.

Aufgabe 6: Das in der Aufgabe 4 dargestellte Haus wird in dieser Aufgabe benutzt.

- Definiere das Haus als Punktliste und stelle es auf deinem Rechner dar.
- Führe zunächst eine Abbildung mit der Matrix
  $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ durch und anschließend (mit dem Bild) die mit der Matrix $B = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$. Durch welche Matrix C lässt sich die Ersatzabbildung beschreiben?

- Spiegele das Haus an der Geraden mit der Gleichung $y = 3 \cdot x$ und anschließend das Bild an der Geraden mit der Gleichung $y = -x$. Durch welche Matrix wird die Ersatzabbildung beschrieben? Welche Vermutung hast du hinsichtlich der Art der Ersatzabbildung?
- Welchen Zusammenhang siehst du jeweils zwischen den drei Abbildungsmatrizen? Formuliere das Ergebnis allgemein und begründe es mit den Rechenregeln für Matrizen.

.

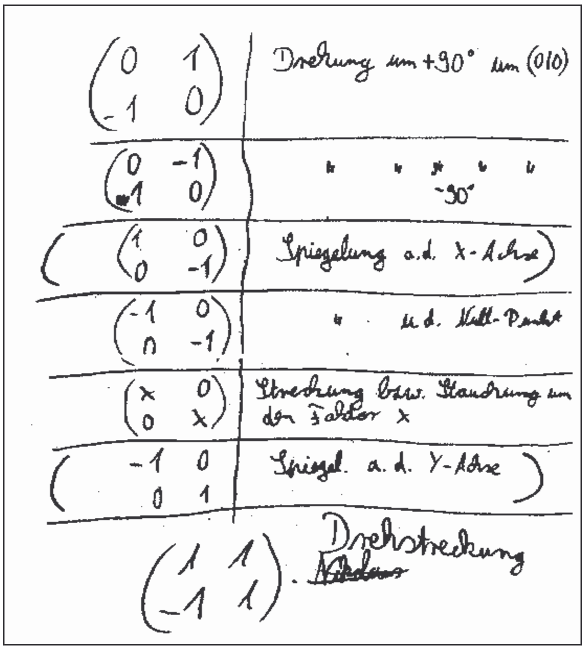
Lösungsvorschläge

LAufgabe 1: Durch Vergleich von „alten“ und „neuen“ Koordinaten z.B. der rechten oberen Ecke des „F“ lassen sich Abbildungsgleichungen ermitteln und in Matrizenform bringen. Wesentlich ist das Ergebnis: *„Bei einer solchen Abbildung lässt sich der Bildpunkt durch Multiplikation mit einer Matrix berechnen.“* (Achtung: Durch die Zeilenschreibweise kann es zu Verwechslungen mit der transponierten Matrix kommen!)

Gewünschte Form: $[x^*, y^*] = [x, y] \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

LAufgabe 2: Ergebnis: Es handelt sich um Drehstreckungen, wobei auch einige elemetargeometrische Abbildungen wie Streckung, Drehung, Punktspiegelung erfasst sind.
Beispiel einer Schülerarbeit:



$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	Drehung um +90° um (0|0)
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	" " " " " -90°
($\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	Spiegelung a.d. X-Achse)
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	" a.d. Null-Punkt
$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$	Streckung bzw. Stauchung um den Faktor x
($\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	Spiegel. a.d. Y-Achse)

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ · Drehstreckung ~~Nkdas~~

LAufgabe 3: siehe Technische Hinweise

LAufgabe 4: 1. Die Koordinaten von je zwei Paaren Punkt/Bildpunkt werden benutzt, um die Komponenten der Abbildungsmatrix zu berechnen. (<u>Dabei Punkte mit ganzzahligen Koordinaten auswählen</u>!) Das entstehende Gleichungssystem löst der Rechner.

Lösung:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot a + 5 \cdot c = -1 & 2 \cdot b + 5 \cdot d = 2 \\ 10 \cdot a + 5 \cdot c = -5 & 10 \cdot b + 5 \cdot d = 0 \end{bmatrix}$$

$$[2 \cdot a + 5 \cdot c = -1,\ 2 \cdot b + 5 \cdot d = 2,\ 10 \cdot a + 5 \cdot c = -5,\ 10 \cdot b + 5 \cdot d = 0]$$

$$\left[a = -\frac{1}{2} \quad b = -\frac{1}{4} \quad c = 0 \quad d = \frac{1}{2} \right]$$

$$a1 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Entsprechend erhält man $A_2 = \begin{bmatrix} 0.625 & -0.125 \\ -0.05 & -0.35 \end{bmatrix}$

2. Die Matrix für eine Geradenspiegelung kann ermittelt werden aus

$\begin{bmatrix} 1 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -m & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & -1 \end{bmatrix}$

also **spieg**(m) = $\dfrac{1}{m^2+1} \begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{bmatrix}$

LAufgabe 5: 1. Diese Ergebnisse müssen festgehalten werden:

- Der Nullpunkt ist **immer** Fixpunkt.
- Die Bilder der Einheitsvektoren stehen in den Zeilen der Abbildungsmatrix

Wenn man die Bilder der Einheitsvektoren kennt, kennt man auch die Matrix einer Abbildung.

2. Besonders wichtig ist die Matrix für eine Drehung:

$$D(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

LAufgabe 6: Im ersten Fall ist $C = \begin{bmatrix} 0.5 & 2.25 \\ -2 & -1.5 \end{bmatrix}$ im zweiten Fall

$$C = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ -0.8 & -0.6 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: *Die Matrix der Ersatzabbildung (bei **Hintereinander-ausführung**) erhält man durch **Multiplikation der Matrizen**.*
Die allgemeine Begründung ergibt sich aus dem Assoziativgesetz für die Matrizenmultiplikation.
Die Ersatzabbildung der beiden Spiegelungen ist eine Drehung um den Nullpunkt. Für den Drehwinkel gilt: $\cos^{-1}(-0.6)\approx 127°$

Didaktisch-methodische Hinweise

- Als Einstieg in diese Unterrichtseinheit bietet sich die Demonstration eines „Filmes“ (siehe Aufgabe 3) – wenn man mit dem TI92/TI89 arbeitet – oder das beigefügte Blatt „Wie können solche Bilder erzeugt werden?“ – wenn man mit DERIVE und CABRI arbeitet – an.
- Auf eine sinnvolle und nachvollziehbare Dokumentation der Schülerarbeiten muss geachtet werden.

Zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 7: Eine Drehung um den Winkel α gefolgt von einer Drehung um einen Winkel β ist insgesamt eine Drehung um den Winkel $\alpha+\beta$. Informiere dich mit einer Formelsammlung über die ***Additionstheoreme***. Nutze die Ergebnisse der Aufgabe 6 und begründe die Additionstheoreme mit den entsprechenden Matrizen.

Aufgabe 8: Wir wollen nun die Struktur der durch Matrizen definierten Abbildungen noch etwas besser kennen lernen und beschäftigen uns mit einem Beispiel:

Gegeben sei die durch $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ definierte Abbildung.

- Hat diese Abbildung außer dem Punkt $\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$ weitere Fixpunkte, d.h. gibt es Punkte $\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}$ mit $\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\cdot A=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}$??
- Gibt es Vektoren, die auf Vektoren der gleichen Richtung abgebildet werden, d.h. gibt es $\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}$ mit $\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\cdot A=k\cdot\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}$?? Für welche Werte von k ist das möglich?

Gib anhand der Ergebnisse eine Erklärung für den Unterschied der Begriffe ***Fixpunktgerade*** und ***Fixgerade*** und erläutere den Begriff ***Affinspiegelung*** an diesem Beispiel.

Aufgabe 9: Viele der elementargeometrischen Abbildungen können wir mit 2x2-Matrizen bearbeiten, nämlich alle, die den *Nullpunkt als Fixpunkt* besitzen (vergl. Aufgabe 5). Probleme bereiten uns jedoch Verschiebungen, Spiegelungen an Achsen, die nicht durch (0|0) verlaufen und Drehungen um andere Drehzentren. Es wäre wünschenswert, auch diese mit dem mächtigen Werkzeug „Matrizen" beschreiben zu können, zumal die Matrizenmultiplikation in jedem CAS verfügbar ist.

Dazu arbeiten wir mit einem Trick – mit ***homogenen Koordinaten***. Unsere 2D-Arbeitsebene wird dabei in den 3D-Raum eingebettet.

Dies geschieht folgendermaßen: Wir hängen einfach an jeden Punkt unserer Punktliste eine 1 als dritte Koordinate, d.h.

$$\text{aus} \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \quad \text{wird} \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{bmatrix}$$

und unsere Abbildungsmatrix **A** wird erweitert zu

$$\mathbf{A_{3D}} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wenn wir nun eine Verschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$ durchführen wollen, wählen wir als Abbildungsmatrix

$$\mathbf{V}(\text{v1,v2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{v1} & \text{v2} & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Verschiebe das Haus aus Aufgabe 4 um 11 Einheiten nach links und 2 Einheiten nach oben.
2. Wir wollen untersuchen, durch welche Ersatzabbildung die Hintereinanderausführung einer Drehung um den Nullpunkt um 45° und einer Drehung um das Drehzentrum [6,0] um 120° beschrieben wird.
   - Wähle zunächst eine geeignete Figur und führe beide Abbildungen mit einem DGS-Konstruktionsprogramm durch. Welche Vermutung hast du hinsichtlich der Art der Abbildung?
   - Bearbeite das Problem mit Matrizen. Hat die Abbildung einen Fixpunkt? Kannst du die Vermutung hinsichtlich der Art der Abbildung bestätigen?

Weitere Lösungshinweise

LAufgabe 7: Ein Vergleich des Matrizenprodukts $D(\alpha)\cdot D(\beta)$ mit $D(\alpha+\beta)$ liefert das Ergebnis.

Laufgabe 8:

$[x_1\ \ x_2]\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix} = [x_1\ \ x_2]$

$2x_2 = x_1$ und $x_1 - x_2 = x_2$

$\left|\begin{matrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 0\end{matrix}\right| \to \left|\begin{matrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right|$

$\Rightarrow x_1 = 2x_2$

Für alle $r \in \mathbb{R}$ $[2r, r]$ ist Fixpunkt

$[x_1\ \ x_2]\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix} = k\cdot[x_1\ \ x_2]$

$2x_2 = k\cdot x_1$ und $x_1 - x_2 = k\cdot x_2$

$\left|\begin{matrix}-k & 2 & 0\\ 1 & -1-k & 0\end{matrix}\right| \to \left|\begin{matrix}-1 & \frac{2}{k} & 0\\ 0 & \underbrace{\frac{2}{k}-1-k}_{=0} & 0\end{matrix}\right|$

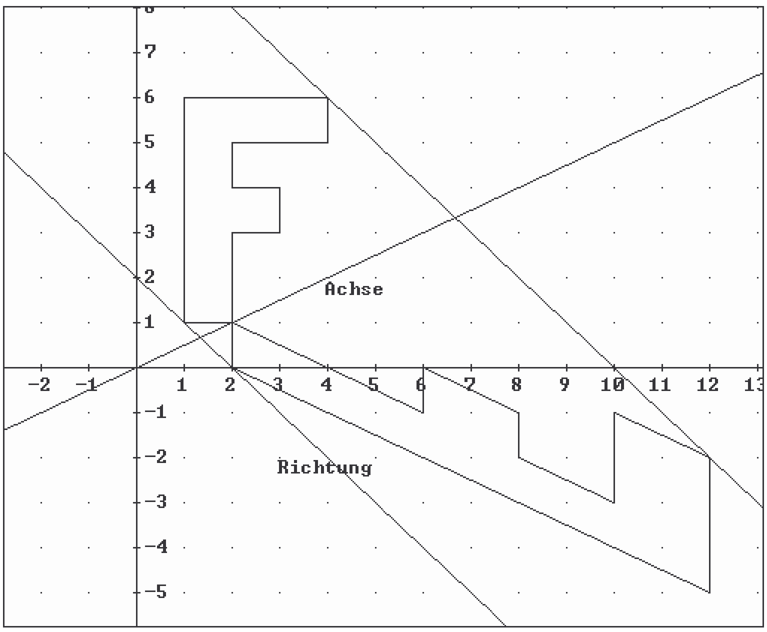
LGS hat Lösung, wenn

$\frac{2}{k} - 1 - k = 0 \quad |\cdot k$

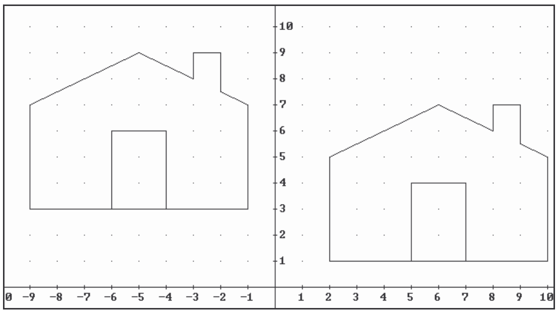
$2 - k - k^2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{k = 1}$ oder $\boxed{k = -2}$

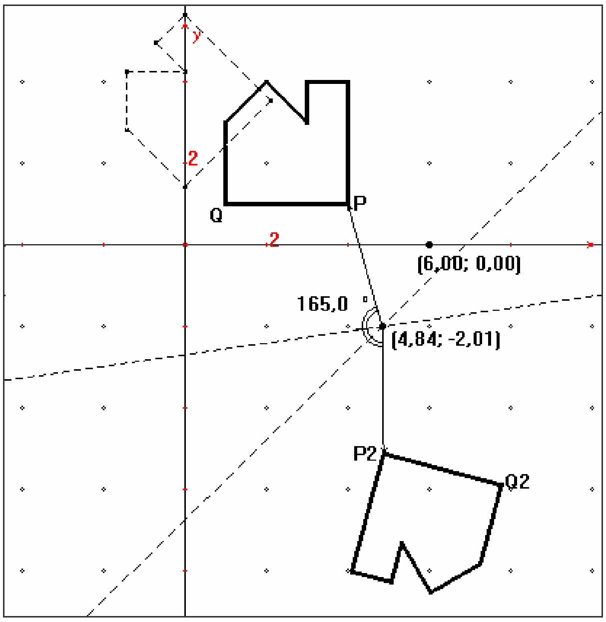
Der ***Eigenwert*** k = 1 liefert die ***Fixpunktgerade*** $r\cdot[2 \quad 1]$ (die ***„Achse“*** der Affinspiegelung) und der Eigenwert k = -2 liefert die ***Fixgerade*** $r\cdot[1 \quad -1]$ (die ***„Richtung“*** der Affinspiegelung). An einem konkreten Beispiel kann dies visualisiert werden.



LAufgabe 9: 1. In der Ebene wird die gegebene Figur wie bisher gezeichnet, danach wird an jeden Punkt der Punkliste die 1 als 3.Koordinate angehängt und die Figur wird durch Multiplikation mit V(-11,2) verschoben. Zum Zeichnen werden in der Punktliste jeweils nur die erste und die zweite Koordinate benötigt.



2.Die Abbildungen werden zunächst geometrisch konstruiert (DGS). Das Drehzentrum für die „Ersatz"-Abbildung ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Verbindungsstecken von Orginal- zu Bildpunkt.

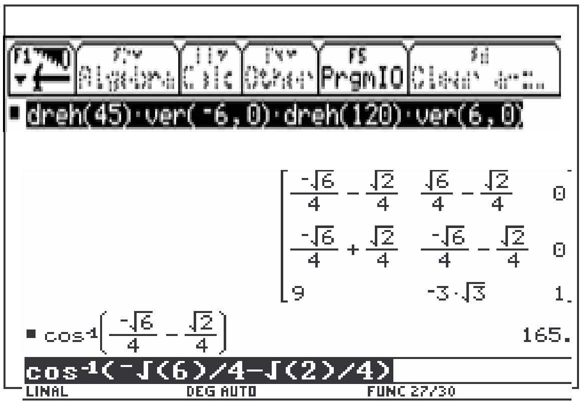


Rechnerisch gehen wir folgendermaßen vor: Bei der Punktliste **ha** wird jeweils die 3. Koordinate 1 ergänzt, dann unter dem Namen **haho** abgespeichert.
Die Matrix **dreh**(α) wird eingegeben:

$$\mathbf{dreh}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die gesuchte Abbildung berechnet sich aus:
haho · **dreh**(45) ·**V**(-6,0) · **dreh**(120) · **V**(6,0)

Nach der Drehung um den Nullpunkt wird das Zentrum in den Nullpunkt verschoben, gedreht und anschließend wieder zurück verschoben.



Die Bestimmung des Drehzentrums (Welcher Punkt ist ein Fixpunkt bei dieser Abbildung? Ein Gleichungssystem muss gelöst werden) ergibt [4.84, -2.01].
Den Drehwinkel von 165° berechnet man über das erste Element der neuen Matrix.

Literaturhinweise

Elschenbroich, H. J. /Meiners, J.C.
Computergraphik und Darstellende Geometrie im Unterricht der Linearen Algebra, Dümmler, Bonn, 1994

Kroll/Reiffert/Vaupel
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra - Grund- und Leistungskurs Dümmler, Bonn, 1997

Weller, H.
Analytische Geometrie des Raumes mit Derive – Platonische und Archimedische Körper als roter Faden, in: Hischer, H. (Hrsg.): Computer und Geometrie – Neue Chance für den Geometrieunterricht? S.142-151, Franzbecker, Hildesheim, 1997

Weller, H.
Lineare Abbildungen und die Darstellung von 3D-Objekten mit dem TI92, in: Amelung, U. (Hrsg): Der TI92 im Mathematikunterricht – Tagungsdokumentation, S. 139 – 149, Münster, 1999

Weller, H.
Darstellung von Objekten mit dem TI92, TI-Nachrichten Ausgabe 1/00 S.8-9, München, 2000

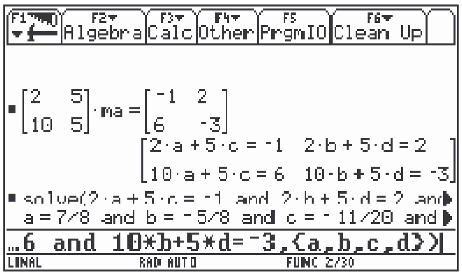
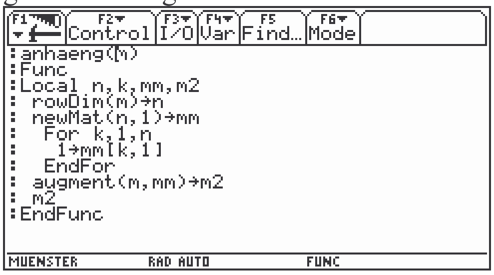
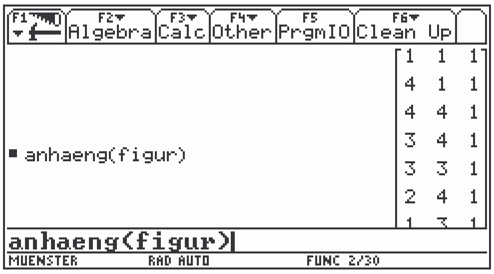
Wittmann, E. C.
Elementargeometrie und Wirklichkeit – Einführung in geometrisches Denken, Vieweg, Braunschweig, 1987

Technische Hinweise für DERIVE:

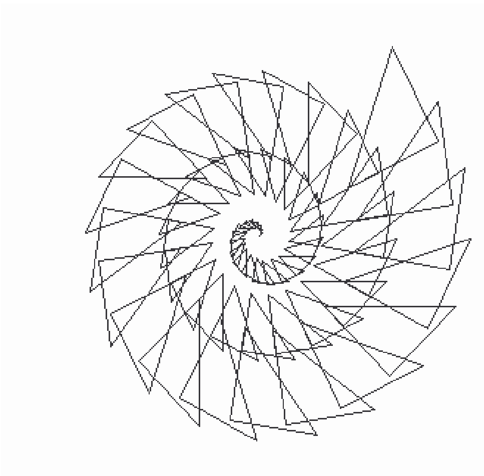
Was willst du erreichen?	*Wie du das machst!*
Eine Matrix definieren	
Die Punkliste definieren, mit der die Figur gezeichnet werden kann.	p6 := [9, 7] p7 := [10, 5] p8 := [10, 0] figur := [p1, p2, p3, p4, p5, p6, p7, p8, p1]
Eine Liste von Punkten in der angegebenen Reihenfolge miteinander verbinden.	Vom Algebra-Fenster in das 2D-Grafik-Fenster wechseln. In ***Extras Gitter*** das ***Intervall*** so einstellen, dass das Gitter quadratisch wird. In ***Extras Punkte Verbinden : Ja*** und ***Größe : Klein*** wählen. In ***Extras Farbe*** die automatische Farbänderung ausschalten und die gewünschte Farbe wählen. Danach kann die Figur gezeichnet werden.
Einen „Film“ herstellen	Im Algebra-Fenster **VECTOR(figur·A(k), k, 0, 2, 0.2)** vereinfachen und dann im 2D-Grafik-Fenster zeichnen
Ein LGS erstellen und lösen	Im Algebra-Fenster $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \cdot a + 5 \cdot c = -1 & 2 \cdot b + 5 \cdot d = 2 \\ 10 \cdot a + 5 \cdot c = -5 & 10 \cdot b + 5 \cdot d = 0 \end{bmatrix}$ $\text{APPEND} \begin{bmatrix} 2 \cdot a + 5 \cdot c = -1 & 2 \cdot b + 5 \cdot d = 2 \\ 10 \cdot a + 5 \cdot c = -5 & 10 \cdot b + 5 \cdot d = 0 \end{bmatrix}$ $[2 \cdot a + 5 \cdot c = -1, 2 \cdot b + 5 \cdot d = 2, 10 \cdot a + 5 \cdot c = -5, 10 \cdot b + 5 \cdot d = 0]$ Gelöst wird das LGS über den Button in der Kopfzeile
Eine 1 als 3.Koordinate in jeder Zeile einer Matrix anhängen, bzw. die 3.Koordinate in jeder Zeile „abschneiden“	 $\text{D2NACHD3}(m) := \text{VECTOR}(\text{APPEND}([m_{k,1}, m_{k,2}], [1]), k, 1, \text{DIMENSION}(m))$ $\text{D3NACHD2}(m) := \text{VECTOR}([m_{k,1}, m_{k,2}], k, 1, \text{DIMENSION}(m))$
Gradmaß in Bogenmaß umrechnen und umgekehrt	Anhängen von ° bzw. teilen durch ° $45 \cdot ° = \frac{\pi}{4}$ $\frac{0.523598}{°} = 30$
Die Matrix der Gesamtabbildung bestimmen	**dreh(45·°)·V(-6,0)·dreh(120·°)·V(6,0)** Vereinfachen liefert die gewünschte Matrix

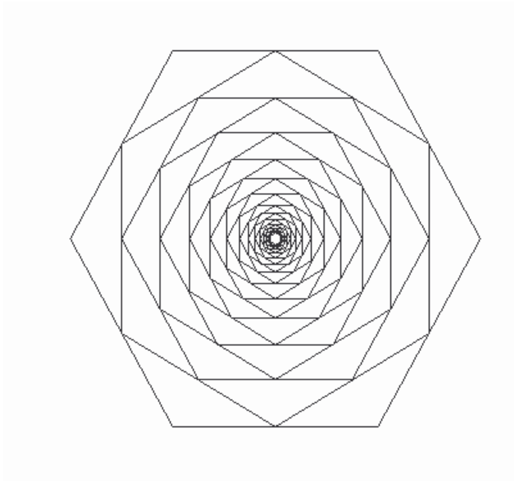
Technische Hinweise für TI 92/89:

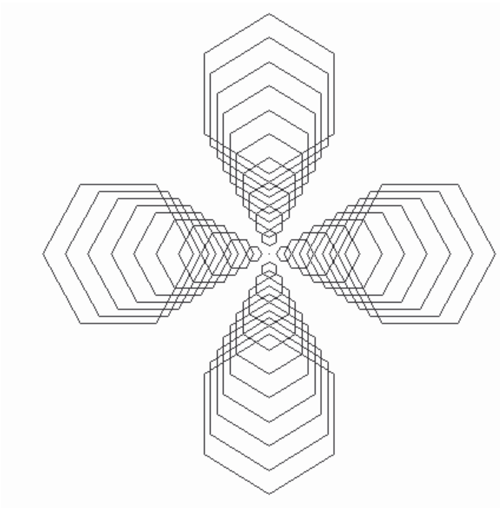
Was willst du erreichen?	*Wie du das machst!*
Eine Matrix definieren	■ Define ma(k) = $\begin{bmatrix}1 & k\\ ^-k & 1\end{bmatrix}$ Done
Die Punktliste definieren, mit der die Figur gezeichnet werden kann	■ {1 2} → p1 {1 2} ■ {6 4} → p2 {6 4} ■ {8 ⁻1} → p3 {8 ⁻1} {p1,p2,p3,p1}→figur LINAL RAD AUTO FUNC 4/30 Achtung: Geschweifte Klammern verwenden!
Eine Liste von Punkten in der angegebenen Reihenfolge verbinden	Das Programm „**matplot**“ wird im Programmeditor geschrieben: F1 F2▾ Control F3▾ I/O F4▾ Var F5 Find… F6▾ Mode :matplot(m) :Prgm :Local k :For k,1,rowDim(m)-1 :Line m[k,1],m[k,2],m[k+1,1],m[k+1,2],1 :EndFor : :EndPrgm und vom Home-Editor aus aufrufen ***matplot(figur)*** Im Grafikbildschirm mit ***F2 Zoom 5: ZoomSqr*** den Maßstab auf beiden Achsen anpassen!
Einen „Film“ herstellen	Zunächst wird eine Reihe von Bildern erzeugt und einzeln abgespeichert, z.B. ***pyra1,pyra2,..***(durchnummerieren) F1 F2▾ Control F3▾ I/O F4▾ Var F5 Find… F6▾ Mode :pyrafilm() :Prgm : :CyclePic "pyra",4,0.5,10.⁻1 : :EndPrgm Die Bedeutung der Parameter (durch Komma getrennt) 4: Anzahl der Bilder 0.5: Wartezeit in Sekunden 10: Anzahl der Zyklen -1: Richtung vorwärts/rückwärts (1: Richtung vorwärts umlaufend) Aufgerufen wird das Programm mit dem Namen (einschließlich Klammer) von der Eingabezeile des Home-Screens mit **pyrafilm()**. Mit ***ON*** kann man das Programm jederzeit unterbrechen.

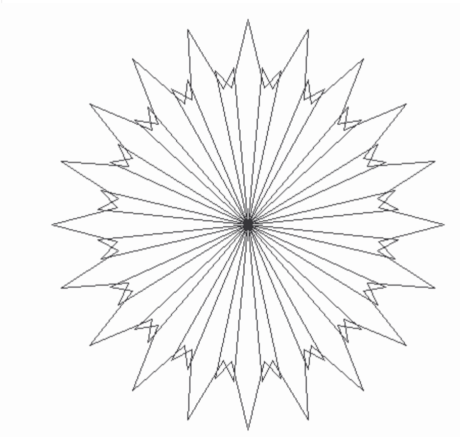
Ein LGS erstellen und lösen	 Die einzelnen Gleichungen werden mit dem Solve-Befehl bearbeitet, dabei mit ***and*** verknüpft
Eine 1 als 3. Koordinate in jeder Zeile einer Matrix anhängen	Die Funktion „anhaeng“ wird im Programmeditor geschrieben:  im Algebra-Fenster aufgerufen und das Ergebnis kann unter neuem Namen abgespeichert werden: 
Die Matrix der Gesamtabbildung bestimmen	**dreh(45)·V(-6,0)·dreh(120)·V(6,0)** liefert die gewünschte Matrix

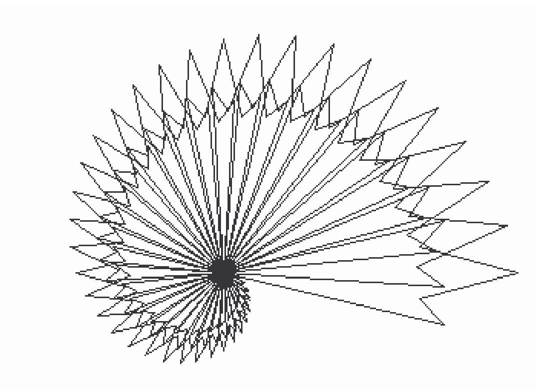
Wie können solche Bilder erzeugt werden??

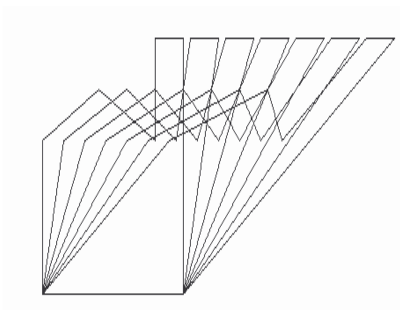






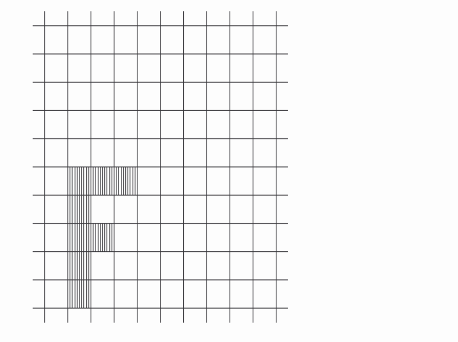


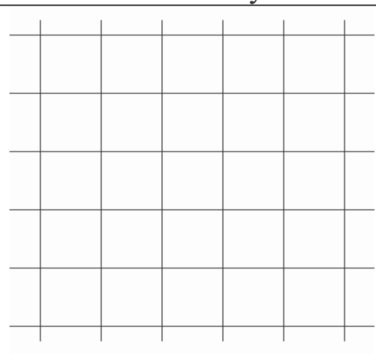




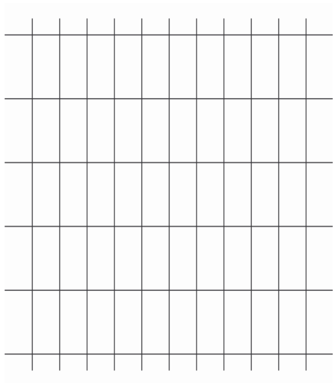
Arbeitsblatt 1:

1. Aufgabe: Übertrage das „F“ in die anderen Koordinatensysteme

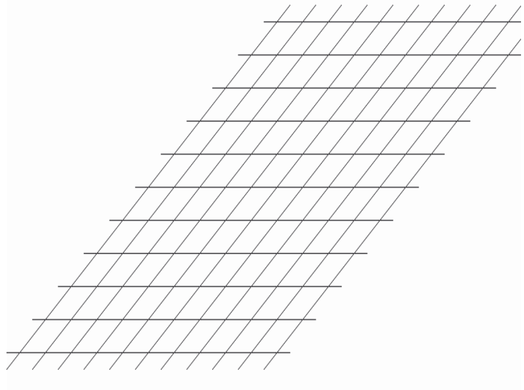




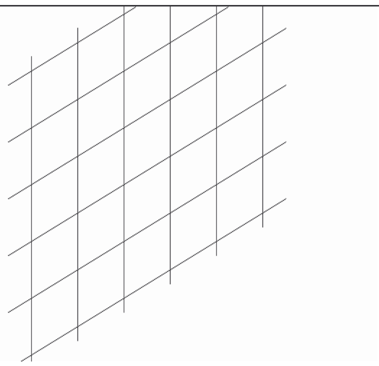
a)



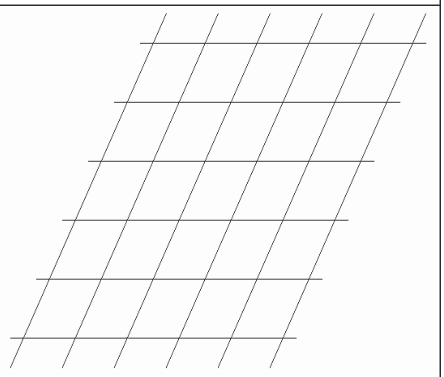
b)



c)



d)



e)

2. Aufgabe: Nach welchen Rechenregeln werden die Punkte übertragen?