Sibylle Stachniss-Carp
Hubert Weller

Wie kommen die Pyramiden auf den Bildschirm? - oder Raumgeometrie mit Rechnereinsatz

Pädagogische Gesichtspunkte

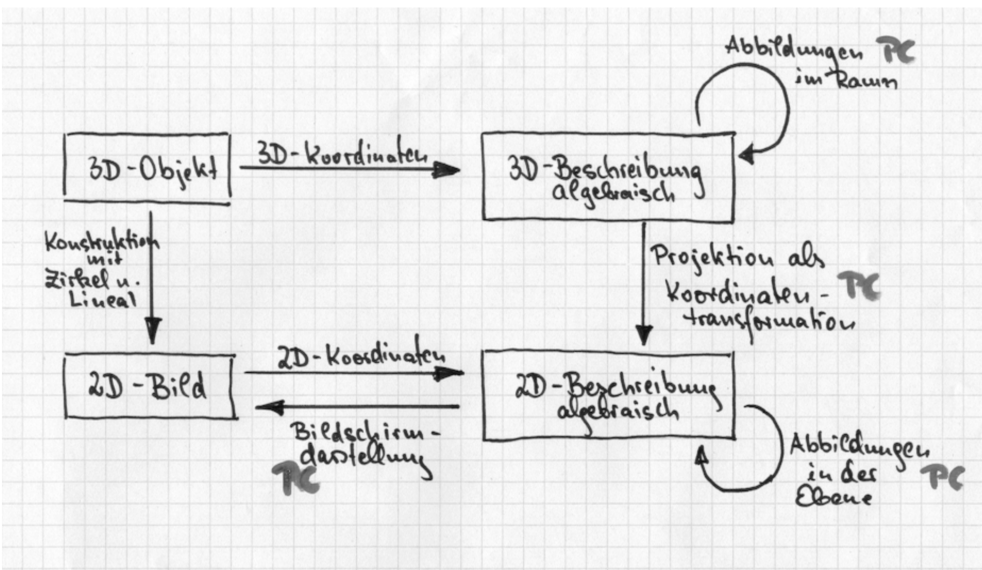
Aufgabenstellung	Darstellung	Dokumentation
(teil-)offen angeleitet	graphisch algebraisch	Zeichnungen Hardcopy Punktlisten Protokolle

Technologie

Tabellen-kalkulation	Graphischer Taschenrechner	Computeralgebra-system	Dynamische Geometriesoft-ware
	X	X	

Ziele und Beschreibung der Einheit

- Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens
- Platonische und Archimedische Körper kennen lernen
- Mathematische Grundlagen der Computergraphik erarbeiten
- (Paralleles) Arbeiten auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen



Rolle der Technologie

- Werkzeug zum Rechnen mit Matrizen
- Medium zur Visualisierung (Erzeugung von Bildern)
- Medium zum entdeckenden Lernen

Notwendige Vorkenntnisse

- Das Rechnen mit Matrizen bzw. der Matrixbegriff sollten bekannt sein.
- Grundkenntnisse im Umgang mit CAS

Dauer der Einheit

4 bis 10 Unterrichtsstunden. Die Dauer der Einheit ist abhängig von den Vorkenntnissen (Rechnen mit Matrizen, räumliche Koordinaten, Darstellung mit Zirkel und Lineal, ...) und den Zielen bzw. den weiterführenden Fragestellungen.

Unterrichtsorganisation

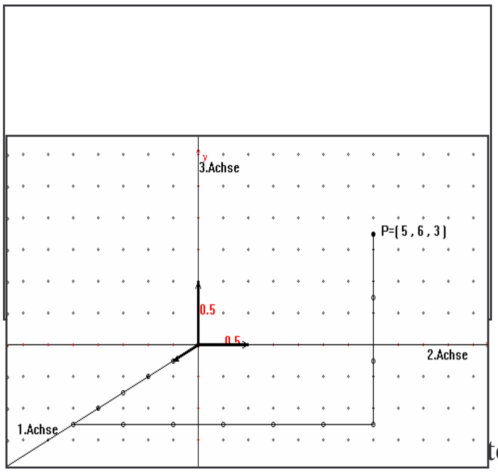
- Die Schülerinnen und Schüler sollten in kleinen Gruppen (2-3) arbeiten.
- Nach jeder Partnerarbeitsphase ist ein Plenumsphase notwendig, damit eine gemeinsame Arbeitsgrundlage geschaffen werden kann.
- Die Körper sollten als reale Modelle mitgebracht (besser noch selber hergestellt) werden. (Unterrichtsprinzip ist hier: *Lernen mit möglichst vielen Sinnen*)
- Zeichnungen mit Lineal auf dem Kästchenpapier müssen die theoretischen Überlegungen bei jeder Aufgabe ergänzen. Dies sollte auf keinen Fall unterlassen werden!
- Die Darstellung von Archimedischen Körpern (Aufgabe 5) eignet sich gut zur Differenzierung, für AGs, den Projektbereich oder als zusätzliche Schüleraufgabe.

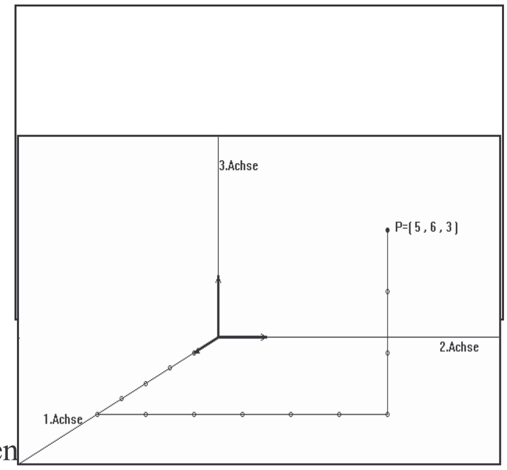
Aufgabenstellung

Aufgabe 1: Der griechische Geschichtsschreiber **Herodot** (484 – 425 v. Chr.) hat in seinem Werk über die antike Geschichte geschrieben, dass die **große Pyramide in Gise** so konstruiert ist, dass der Flächeninhalt jeder Seitenfläche gleich dem Flächeninhalt eines Quadrates ist, dessen Seitenlängen der Pyramidenhöhe entspricht.

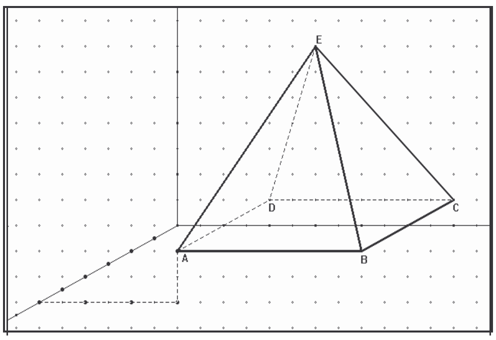
1. Baue eine solche Pyramide.
2. Was hat das Verhältnis der Pyramidenhöhe zur Grundseite mit der **Zahl π** zu tun?
3. Zeichne ein maßstabgerechtes Schrägbild dieser Pyramide.

Aufgabe 2: **Darstellung einer Pyramide auf dem Bildschirm**
Für die weitere Arbeit wollen wir zum leichteren Zeichnen der geometrischen Objekte das karierte Papier nutzen (die Punkte können durch Abzählen an den Kästchen eingezeichnet werden):





ten
beiden anderen?



Im Koordinatensystem ist eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche gegeben (Kantenlänge 4, Höhe 3.5). Der Eckpunkt A hat die Koordinaten
A = [6 , 3 , 1].

1. Bestimme die Koordinaten der übrigen
   Eckpunkte.
2. Zeichne die Pyramide.
3. Um diese Pyramide auf ein Blatt Papier zu zeichnen haben wir die 3D-Koordinaten auf 2D-Koordinaten transformiert. Diese „neuen“ Koordinaten kann man sofort ablesen, wenn man ein x/y-Koordinatensystem über die Zeichnung legt. Zum Beispiel gilt für den oben gezeichneten Punkt P :
   [5 , 6 , 3] → [3.5 , 1.75]

Entsprechend wird der Pyramidenpunkt A transformiert:
[6 , 3 , 1] → [0 , -0.5]
Bestimme zu allen Eckpunkten der Pyramide die zugehörigen 2D-Punkte.
Wie heißen die 2D-Koordinaten zu [150 , 200 , 75] ?
Suche Regeln zur Berechnung der Koordinaten.

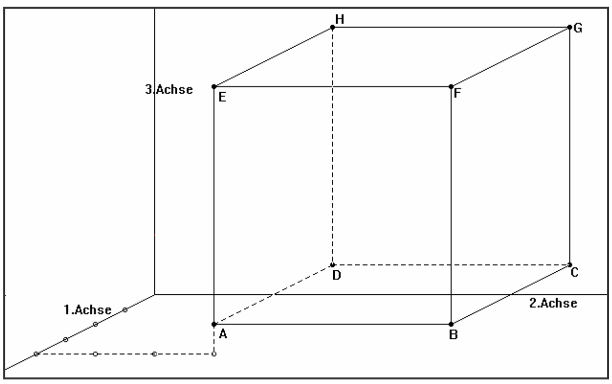
4. Die oben gefundenen Transformationsgleichungen (oder Abbildungsgleichungen) können in Matrizenschreibweise dargestellt werden.

$$[x_1, x_2, x_3] * \begin{bmatrix} -0.5 & -0.25 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\, x , y \,]$$

Die mittlere Matrix heißt Projektionsmatrix.
Zur Übung: Berechne das Bild der Pyramidenspitze E über Matrizenmultiplikation und überprüfe das Ergebnis an der Zeichnung.

5. Unsere Pyramide kann jetzt auf dem Bildschirm dargestellt werden. Dazu mußt du folgende Schritte durchführen (die Technischen Hinweise sollten beachtet werden):
- Gib die 3D-Eckpunkte in den Rechner ein.
- Je zwei aufeinanderfolgende Punkte werden später durch einen Streckenzug verbunden. Es muss also eine Punktliste in sinnvoller Reihenfolge erstellt werden, so dass ein geschlossener Streckenzug entsteht („zeichnen ohne den Stift abzusetzen“). Die Liste wird unter „pyra“ abgespeichert.
- Gib die Projektionsmatrix ein und speichere sie unter „proj“.
- Was liefert das Matrizenprodukt pyra∗proj ?
- Verbinde die berechneten Punkte in der gegebenen Reihenfolge (siehe Technische Hinweise).

Aufgabe 3: Im Koordinatensystem ist ein Würfel der Kantenlänge 4 dargestellt. Der Eckpunkt A hat die Koordinaten A = [4 , 3 , 0.5]



1. Bestimme die Koordinaten der anderen Eckpunkte.
2. Wenn man die **Mittelpunkte der Seiten*flächen*** (Koordinaten?) mit den benachbarten Mittelpunkten verbindet, entsteht ein schöner, regelmäßiger Körper. Zeichne!
3. Stelle diesen Körper auf dem Bildschirm dar.

Aufgabe 4: Die in der letzten Aufgabe dargestellten Körper sind **Platonische Körper**, das sind Körper, deren Begrenzungsflächen aus regelmäßigen Vielecken der gleichen Art bestehen.

1. Zeige, dass es genau fünf Stück davon gibt.(Hinweis: Betrachte die Winkel der Flächen in einer (Raum-)Ecke)
2. Stelle sie auf dem Bildschirm dar.

Aufgabe 5: Wenn du bei dem Würfel in Aufgabe 3 die **Mittelpunkte der Kanten** nimmst und jeweils benachbarte Kantenmittelpunkte miteinander verbindest („die Ecken des Würfels werden abgeschnitten“), dann entsteht ein Körper, dessen Begrenzungsflächen aus regelmäßigen Vielecken unterschiedlicher Art (hier Quadrate und gleichseitige Dreiecke) besteht. Solche Körper heißen **Archimedische Körper**, es gibt insgesamt 13 verschiedene davon (auch der Fußball gehört dazu!!).
Stelle einen weiteren Archimedischen Körper auf dem Bildschirm dar.

Lösungsvorschläge

LAufgabe 1: Zunächst muss das Verhältnis der Pyramidenhöhe h zur Grundseite a berechnet werden.

$$h = a \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{8} + \frac{1}{8}\right)}$$

$$\frac{a}{h} = \sqrt{(2 \cdot \sqrt{5} - 2)}$$

$$\frac{a}{h} = 1.57230$$

Das Verhältnis liefert einen ziemlich guten Näherungswert von $\frac{\pi}{2}$!

LAufgabe 2: **Teil 3**

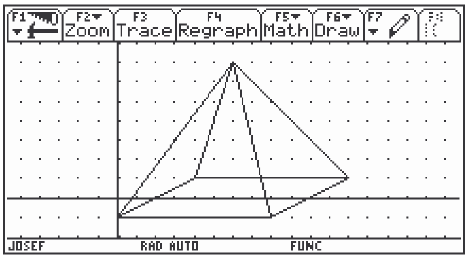
So findet man die 2D-Koordinaten von [5 , 6 , 3] : Die erste Koordinate erhält man, indem man vom Ursprung aus 5 mal 1 Kästchen (= 0.5cm) nach links, danach 6 mal 2 Kästchen (=1cm) nach rechts geht. Die zweite Koordinate erhält man, indem man vom Ursprung aus 5 mal ½ Kästchen (=0.25cm) nach unten, danach 3 mal 2 Kästchen (=1cm) nach oben geht.

$$\begin{bmatrix}-0.5\cdot 150+1\cdot 200 & -0.25\cdot 150+1\cdot 75\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}125 & 37.5\end{bmatrix}$$

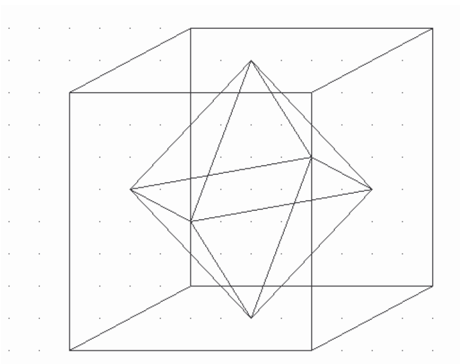
Teil 4:

```
■[4  5  4.5]→e                [4  5  4.5]
■e·proj                         [3.  3.5]
e*proj
```

Teil 5: pyra*proj liefert die Liste der2D- Punkte, die gezeichnet werden kann.



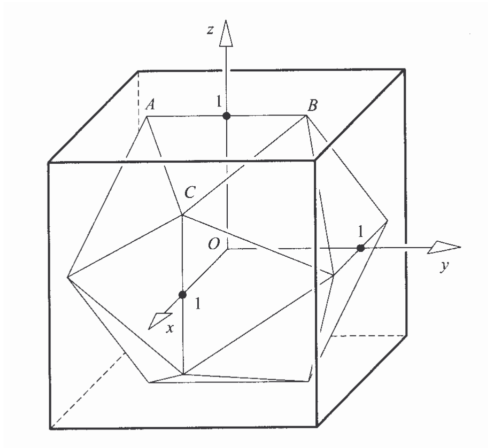
LAufgabe 3:

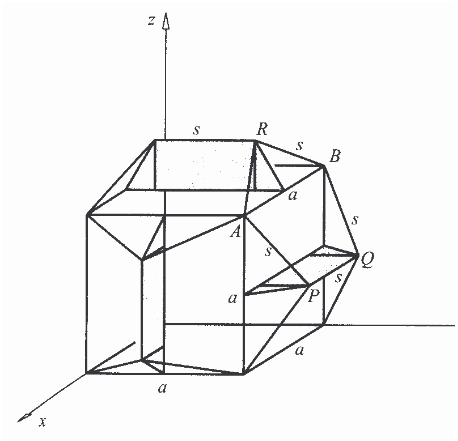


LAufgabe 4: In einer Raumecke

- stoßen mindestens 3 Flächen aneinander,
- ist die Winkelsumme der angrenzenden Flächenwinkel kleiner als 360°

So lässt sich mit den Winkeln der regelmäßigen Flächen begründen, dass es nur fünf Platonische Körper geben kann.
Bei der Berechnung der Koordinaten von Ikosaeder und Dodekaeder ist es hilfreich, wenn man die Körper aus einem Würfel aufbaut:





In einem Würfel der Kantenlänge 2 (Ursprung im Mittelpunkt) hat jeder Punkt des Ikosaeders den gleichen Abstand t zur nächsten Achse. Z.B: ist C = [1 , 0 , t].
Die Kante BC hat die gleiche Länge wie die Kante AB. Damit lässt sich t berechnen.

Auf den Würfel (mit z.B. a=1) werden Walmdächer (Höhe h und Firstlänge s) aufgesetzt. So können die Koordinaten der Punkte ermittelt werden:
A=[1,1,1] , R=[0.5 , 1-(1-s)/2 , 1+h].
Mit den Bedingungen AR=s und RQ=1 lassen sich s und h berechnen.

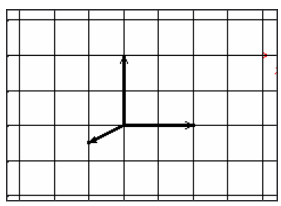
Zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 6: **Projektionen**

Die mit der Matrix **proj** beschriebene Art der Darstellung nennt man Kavalierprojektion, ein Begriff aus dem mittelalterlichen Militärwesen. In der Praxis sind auch andere Projektionsarten üblich, z. B. benutzt man die Militärprojektion häufig in der Architektur, auch isometrische und dimetrische Projektionen werden verwendet.

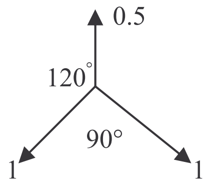
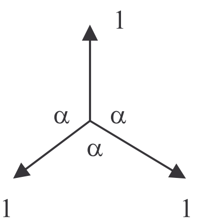
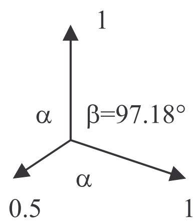
1. Betrachte noch einmal die Kavalierprojektion und bestimme die Bilder der 3-dimensionalen Einheitsvektoren

[1 , 0 , 0] → [? , ?]
[0 , 1 , 0] → [? , ?]
[0 , 0 , 1] → [? , ?]



Was fällt dir auf?

2. Bestimme mit Hilfe der folgenden Abbildungen die Projektionsmatrizen für Militärprojektion, isometrische und dimetrische Projektion.

		
Miltärprojektion	Isometrie	Dimetrie

3. Wähle einen beliebigen Körper und stelle ihn in verschiedenen Projektionen dar.
Beschreibe die Besonderheiten der jeweiligen Darstellung.
Welche Projektion könnte für welchen Zweck geeignet sein?

Aufgabe 7: **Drehungen im Raum**
(Voraussetzungen: Abbildungen in der Ebene mit 2 x 2- Matrizen, insbesondere die Abbildungsmatrix $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, siehe T^3-Materialien)

1. Drehe die in Aufgabe 2 beschriebene Pyramide um die x_3-Achse.
2. Wenn man Einzelbilder im Rechner abspeichert und anschließend nacheinander abruft entsteht ein „Film“.
Stelle einen „Film“ her. („Thema“ kann frei gewählt werden.)

Weitere Lösungshinweise

LAufgabe 6: 1.: Die Bilder der Einheitsvektoren stehen in den **Zeilen** der Projektionsmatrix.
2.: Wir bestimmen die jeweiligen Bilder der Einheitsvektoren und setzten diese zur Projektionsmatrix zusammen:

Militärprojektion

$$\begin{pmatrix} -\cos(30°) & -\sin(30°) \\ \cos(60°) & -\sin(60°) \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \to \text{mi},$$

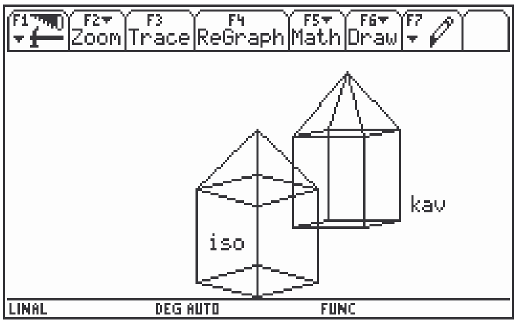
Isometrische Projektion

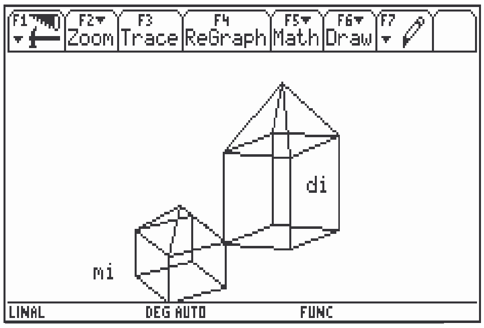
$$\begin{pmatrix} -\cos(30°) & -\sin(30°) \\ \cos(30°) & -\sin(30°) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \text{iso},$$

Dimetrische Projektion

$$\begin{pmatrix} -0.5\cos(41,4°) & -0.5\sin(41,4°) \\ \cos(7,2°) & -\sin(7,2°) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \mathrm{di}$$

Hier ein Turm in den vier Projektionsarten (Schülerarbeit).





LAufgabe 7: Bei der Aufstellung der Drehmatrix sollte man die Schüler experimentieren lassen. Wichtig sind auch Überlegungen zur Reihenfolge der Abbildungen. Die Drehmatrix

lautet: $\mathrm{dreh}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Literaturhinweise

Elschenbroich, H.J./Meiners, J.C.
Computergraphik und Darstellende Geometrie im Unterricht der Linearen Algebra, Dümmler, Bonn, 1994
Kroll/Reiffert/Vaupel
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra - Grund- und Leistungskurs, Dümmler, Bonn, 1997

Weller, H.
Analytische Geometrie des Raumes mit Derive – Platonische und Archimedische Körper als roter Faden In: Hischer, H.(Hrsg.) Computer und Geometrie – Neue Chance für den Geometrieunterricht? S.142-151Franzbecker, Hildesheim, 1997

Weller, H.
Lineare Abbildungen und die Darstellung von 3D-Objekten mit dem TI92

In: Amelung, U. (Hrsg.): Der TI92 im Mathematikunterricht – Tagungsdokumentation, S. 139 – 149, Münster, 1999

Weller, H.
Darstellung von Objekten mit dem TI92, TI-Nachrichten Ausgabe 1/00 S.8-9, München, 2000

Wittmann, E.C.
Elementargeometrie und Wirklichkeit – Einführung in geometrisches Denken, Vieweg, Braunschweig, 1987

Technische Hinweise für TI 92/89:

Was willst du erreichen?	*Wie du das machst!*
Eine Matrix definieren	▪ [⁻.5 ⁻.25; 1 0; 0 1] → proj [⁻.5 ⁻.25; 1 0; 0 1] **[⁻0.5,⁻0.25;1,0;0,1]→proj**
Einen einzelnen Punkt als Zeile definieren	▪[4 5 4.5] → e [4 5 4.5] **[4,5,4.5]→e** JOSEF RAD AUTO FUNC 2/30
3D-Eckpunkte definieren, mit denen die Punktliste erstellt werden kann.	Zur Definition **geschweifte** Klammern verwenden! ▪ {6 3 1} → a {6 3 1} ▪ {6 7 1} → b {6 7 1} ▪ {2 7 1} → c {2 7 1} ▪ {2 3 1} → d {2 3 1} ▪ {4 5 3.5} → e {4 5 3.5} **{4,5,3.5}→e**
Die Punktliste definieren, mit der der Körper gezeichnet werden kann.	Auch hier geschweifte Klammern verwenden F1 · F2 Algebra · F3 Calc · F4 Other · F5 PrgmIO · F6 Clean Up 6 7 1 4 5 3.5 6 3 1 6 7 1 2 7 1 4 5 3.5 2 3 1 **{b,e,a,b,c,e,d,c,d,a}→pyra** JOSEF RAD AUTO FUNC 8/30
Eine Liste von 2D-Punkten in der angegebenen Reihenfolge miteinander verbinden.	Das Programm „matplot“ wird im Programmeditor geschrieben: F1 · F2 Control · F3 I/O · F4 Var · F5 Find… · F6 Mode :matplot(m) :Prgm :Local k :For k,1,rowDim(m)-1 :Line m[k,1],m[k,2],m[k+1,1],m[k+1,2],1 :EndFor :EndPrgm und vom Home-Editor aus aufgerufen: ▪ matplot(pyra·proj) Done **matplot(pyra*proj)** Im Grafikbildschirm mit ***F2 Zoom 5:ZoomSqr*** den Maßstab auf beiden Achsen anpassen!
Die 2D-Achsen und die Gitterpunkte ausschalten	Im Grafikbildschirm mit ***F1*** und ***9:Format*** werden die Einstellungen verändert. **Grid ..... OFF** **Axes..... OFF** Danach wieder vom Home-Editor aus zeichnen.

Eine Animation erstellen	Einzelbilder erzeugen und abspeichern, z.B. *pyra1,pyra2,..*(durchnummerieren)
	`F1 F2▾ Control F3▾ I/O F4▾ Var F5 Find… F6▾ Mode`
	`:pyrafilm()`
	`:Prgm`
	`:`
	`:CyclePic "pyra",4,0.5,10.-1`
	`:`
	`:EndPrgm`
	Die Bedeutung der Parameter (durch Komma getrennt)
	4: Anzahl der Bilder
	0.5: Wartezeit in Sekunden
	10: Anzahl der Zyklen
	-1: Richtung vorwärts/rückwärts
	(1: Richtung vorwärts umlaufend)
	Aufgerufen wird das Programm mit dem Namen (einschließlich Klammer) von der Eingabezeile des Home-Screens mit **pyrafilm()**.
	Mit ***ON*** kann man das Programm jederzeit unterbrechen.

Technische Hinweise für DERIVE:

Was willst du erreichen?	*Wie du das machst!*
Eine Matrix definieren	
Einen einzelnen Punkt als Zeile definieren	$\mathrm{proj} := \begin{bmatrix} -0.5 & -0.25 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ `e := [4, 5, 4.5]`

Die Punktliste definieren, mit der der Körper gezeichnet werden kann.	`a := [6, 3, 1]`
	`b := [6, 7, 1]`
	`c := [2, 7, 1]`
	`d := [2, 3, 1]`
	`pyra := [b, e, a, b, c, e, d, c, d, a]`

Eine Liste von 2D-Punkten in der angegebenen Reihenfolge miteinander verbinden.	`pyra·proj` Im Algebra-Fenster wird der Ausdruck vereinfacht, dann in das 2D-Grafik-Fenster wechseln. In ***Extras Gitter*** das ***Intervall*** so einstellen, dass das Gitter quadratisch wird. In ***Extras Punkte Verbinden : Ja*** und ***Größe : Klein*** wählen. In ***Extras Farbe*** die automatische Farbänderung ausschalten und die gewünschte Farbe wählen. Danach kann die Pyramide gezeichnet werden.
Die 2D-Achsen und die Gitterpunkte ausschalten	Im 2D-Grafik-Fenster In ***Extras Achsen*** und ***Extras Gitter*** werden die Einstellungen vorgenommen.

Eine Animation erstellen	Im Algebra-Fenster mit ***Definieren Algebra Status Vereinfachen*** das Winkelmaß auf Degree einstellen
	`Angle := Degree`
	$\mathrm{DREH}(\alpha) := \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	`VECTOR((pyra·DREH(α))·proj, α, 0, 180, 30)`
	Vereinfachen und im 2D-Grafik-Fenster zeichnen.