Zum "Modularen Arbeiten" mit dem TI-92

Erfahrungen und Tips für Lehrerfortbildungsveranstaltungen

1. Zielsetzung

Modulares Denken, Arbeiten oder Konstruieren stellt eine wesentliche Methode mathematischen Arbeitens dar. Allgemein formuliert versteht man unter "modularem Arbeiten" das Verwenden von bereits Bekanntem oder Erledigtem für neue Aktivitäten. In diesem Sinne ist modulares Arbeiten z.B. die Verwendung eines bereits bewiesenen mathematischen Satzes für den Beweis oder die Herleitung eines neuen Satzes. Module verdichten und konzentrieren also geschaffenes Wissen und machen es für die weitere Benutzung bequem verfügbar. Letztlich wird hier das "Divide et impera!" auf mathematisches Arbeiten übertragen.

Im folgenden sollen einige Beispiele angegeben werden, welche die Effektivität und den Nutzen modularen Arbeitens beim Umgang mit formelverarbeitenden Systemen oder Geometrieprogrammen verdeutlichen sollen. Die Beispiele setzen ein sehr elementares Verständnis modularen Denkens voraus und haben sich in zahlreichen Lehrerfortbildungsver- anstaltungen bewährt. Sie dienen zum einen dem Zweck, den Kolleginnen und Kollegen die Idee des modularen Arbeitens bewußt zu machen und zum anderen dienen sie während der Veranstaltungen als "Präsenzaufgaben", mit Hilfe derer die Teilnehmer (nach einer gemein samen Einführung in die Handhabung des TI-92) selbständigen Umgang und typische Arbeitstechniken mit dem Gerät praktizieren und einüben können.

2. Modulares Arbeiten im Home-Screen

Nicht nur wegen des unbequemen Algebra-Editors bei Derive und beim TI92 ist es sinnvoll, komplexere algebraische Ausdrücke nicht auf einmal zu erstellen, sondern zunächst Teilterme einzugeben und diese dann am Ende zusammenzusetzen. Dies

- erleichtert zum einen die allgemeine Übersicht,
- erleichtert die Korrektur von Eingabefehlern und
- vermeidet Syntaxfehler (fehlende Klammern!).

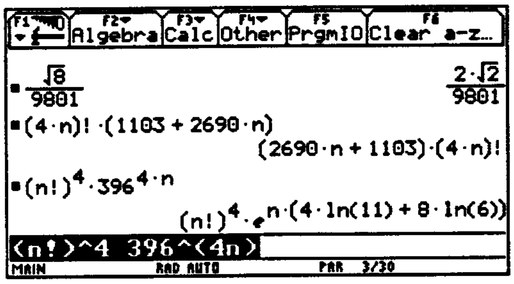
Meine Erfahrung zeigt, daß es nicht überflüssig ist, dies in den Fortbildungsveranstaltungen den Kollegen (und immer wieder mir selbst) bewußt zu machen. Ein hinreichend komplexes und (trotzdem noch) interessantes Beispiel erscheint mir dazu eine "Formel" zu sein, die zur näherungsweisen Berechnung von π dient. Die Formel wurde von Ramanujan (vgl. Anhang) gegeben und erst wesentlich später von den Gebrüdern Borwein als richtig bewiesen. Ramanujan beteuerte immer wieder, diese und zahlreiche andere derartige Reihenentwicklungen würden ihm im Schlaf von einer Göttin eingegeben. (In meinen Veranstaltungen nutze ich derartige Anmerkungen zur Auflockerung, weil ich festgestellt habe, daß die Kollegen an solchen Anekdoten oder historischen Beiträgen sehr interessiert sind.)

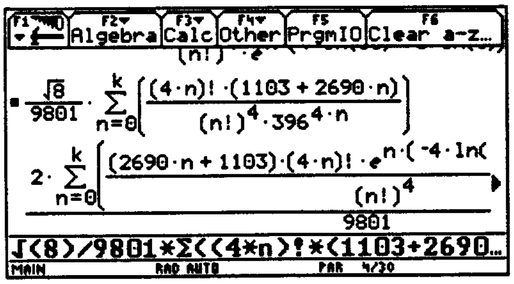
Der "Monsterausdruck" zur Berechnung von π lautet:

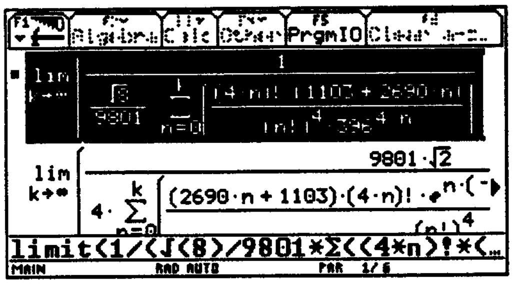
$$\pi = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{k}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4\,396^{4n}}}$$

Aus mathematischer Sicht ist bemerkenswert, daß beginnend von k=0 jeder Zuwachs von k um 1, etwa acht zusätzliche Ziffern von π liefert (bereits mit k=0 erhält man π auf 8 Stellen genau).
Würde man versuchen, den Term im linearen Editor von Derive einzugeben, sähe er etwa so aus:
lim(1/(sqrt(8)/9801 sum (((4n)! (1103 + 26390 n))/((n!)^4 396^(4n)),n,0,k)),k,0,inf)
(wahrscheinlich habe ich mich aber um die eine oder andere Klammer verzählt).

Modular aufgebaut gliedert man den gesamten Term in Einzelfaktoren, Zähler, Nenner usw. und baut schließ- lich den Gesamtterm schrittweise auf. Hilfreich ist dabei die Möglichkeit, erstellte Terme mit dem Cursor anzusteuern und in die Editorzeile zu kopieren (die technischen Details setze ich bei dem Adressatenkreis als bekannt voraus).
Damit ergibt sich ein Vorgehen, wie es in nebenstehenden Screen shots zu sehen ist.







Zudem dient dieses Beispiel in meinen Veranstaltungen dazu, verschiedene technische Kenntnisse zum TI92 zu demonstrieren. Im wesentlichen versuche ich hierbei "Hilfe zur Selbsthilfe" zu geben. Ein wichtiges Hilfsmittel ist das "2nd Catalog" Menü. Die Suche nach dem Fakultätsymbol "!" bietet den Anlaß zu einem ersten Navigieren in dieser Befehlsliste. Anschließend können sich die Teilnehmer im allgemeinen die Syntax des Summensymbols "Σ" selbst erarbeiten und anwenden (hinzuweisen ist hier auf die Syntaxhilfen, die in der linken unteren Bildschirmecke gegeben werden).
Weiterhin bietet die Formel Anlaß, die Beschränktheit der Möglichkeiten des TI92 zu zeigen. In der oben dargestellten Form ist der Term für den TI92 (und auch für Derive) nicht berechenbar. Die naheliegende Möglichkeit, die Grenzwertbildung wegzulassen und eine Zahlenfolge für wachsendes k zu berechnen, liefert dann bei Derive den gewünschten Erfolg: Man kann wirklich erkennen (durch einen Vergleich (Division oder Subtraktion) mit

π und genügend vielen angezeigten Ziffern), wie mit wachsendem k die Anzahl der gültigen Ziffern in den Formelausdrücken wächst. Allerdings scheitert dieses Vorgehen beim TI92 schon für k=1, da die Formel 16 gültige Ziffern liefert, der Rechner aber prinzipiell maximal 12 Ziffern anzeigt.
Wesentliche Rechtfertigung für die Einbeziehung dieses "Monsterterms" in meine Veranstaltungen ist aber

1. die Möglichkeit, den schrittweisen, modularen Aufbau algebraischer Terme bewußt zu machen - ein Vorgehen, das sich bei allen formelverarbeitenden Systemen als günstig erweist und

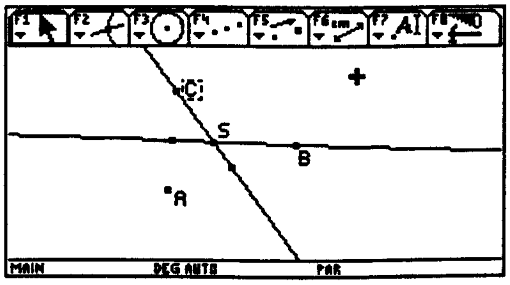
2. die Erfahrung, daß dieser komplizierte Term viele Fragen der Teilnehmer provoziert, die es - zwar nicht sehr systematisch, dafür aber - problembezogen ermöglichen, die technischen Details des Geräts zu thematisieren und zu erklären und

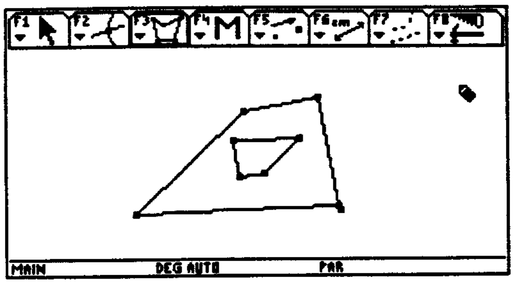
3. die Beobachtung, daß dieses zahlentheoretische Problem in Verbindung mit einigen Anekdoten zu Ramanujan und "Zahlengenies" im allgemeinen auf die Teilnehmer motivierend und auflockernd zugleich wirkt.
Im allgemeinen benötige ich zur Bearbeitung inklusive aller "Ausflüge" technischer, mathe matischer und historischer Art etwa eine Dreiviertelstunde. Wegen des Auflockerungscharakters versuche ich, die Behandlung möglichst in die Mitte eines vierstündigen Veranstaltungsblocks zu legen.

3. Modulares Arbeiten in der Geometrieapplikation

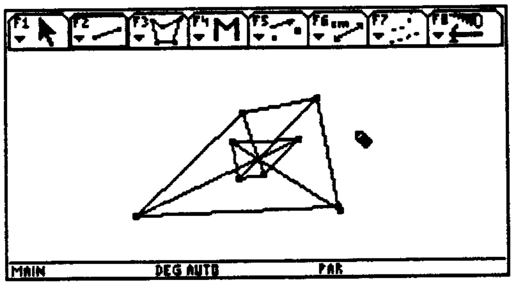
Die klassische Anwendung modularen Arbeitens bei Geometrieprogrammen ist die Konstruktion des Höhen-, Umkreismittel- und Schwerpunkts eines Dreiecks und die anschließen- de Entdeckung, daß diese Punkte auf einer gemeinsamen Geraden, der ersten Eulergeraden liegen. Die Module (für den Geometrieteil spreche ich im folgenden von Makros), die hierzu erstellt werden, dienen der einfachen Konstruktion der einzelnen merkwürdigen Dreiecks- punkte. Da sich zahlreiche Veröffentlichungen bereits mit der Eulergeraden beschäftigen, sei hier auf eine ausführliche Behandlung verzichtet.
Module eignen sich vor allem, wenn ein und diesselbe Konstruktion mehrfach wiederholt oder iteriert wird.
Folgende Aufgabe bietet sich zum Erstellen und Anwenden von Makros an und ermöglicht einige interessante Enteckungen und Phänomene, welche meiner Erfahrung nach den meisten Teilnehmern von Fortbildungskursen überraschend und interessant erscheinen.
Ein Viereck ABCD wird durch die beiden Diagonalen in die Teildreiecke ABC, BCD, CDA und DAC zerlegt. Für jedes Teildreieck konstruiert man dessen Schwerpunkt. Welche Figur bilden diese vier Schwerpunkte?

Zur Konstruktion bietet sich die Erstellung eines Makros "SP" für den Schwerpunkt eines Dreiecks an, wie dies in nebenstehender Grafik angedeutet ist.
(Auf die Darstellung der umständlichen Makroerstellung beim TI92, bei der man dreimal das Makromenü aufrufen muß, sei hier verzichtet.)





Wendet man nun das erstellte Makro auf die Teildrei- ecke eines gegebenen Vierecks an, so erhält man ein kleineres Viereck, das (insbesondere im Zugmodus) die Vermutung nahelegt, es sei dem ursprünglich gegebe- nen ähnlich. Hier bietet sich die Möglichkeit, die Funktionen zum Messen und Vergleichen von Strec- kenlängen und Winkelmaßen zu thematisieren, um die Vermutung zu verifizieren.



Ein ebenso erstaunliches und überraschendes Phänomen ergibt sich, wenn man die einander entsprechenden Eckpunkte des alten und des neuen Vierecks verbindet: Die vier Geraden (oder Strecken) schneiden sich in einem einzigen Punkt. Und dieser Punkt ist zusätzlich sowohl der Schwerpunkt des alten, wie auch des neuen Vierecks (was allerdings erst noch zu beweisen ist). Die letzten Beobachtungen geben auch einen Hinweis auf eine mögliche Lösung der obigen Ähnlichkeitsvermutung. Wie sich zeigen läßt (vgl. etwa Weth, Th, Arbeitsbuch Geolog, Dümmler, 1995) ergibt sich das neue, kleinere Dreieck aus dem alten durch eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor $-\frac{1}{3}$; Streckzentrum ist der gemeinsame Schnittpunkt der vier Strecken in obiger Abbildung.

Da sich die Teilnehmer erfahrungsgemäß sehr stark im Arbeitstempo unterscheiden, sind "Pufferaufgaben" zur Differenzierung sehr nützlich sind. Hier bieten sich etwa an:
Zu welchen Phänomenen gelangt man, wenn man statt des Schwerpunkts in obiger Aufgabe den Höhenschnittpunkt, den Umkreismittelpunkt oder den Inkreismittelpunkt der Teildreiecke verwendet?
Für die Bearbeitung der genannten Geometrieaufgabe muß man einschließlich der Erklärung von Makrokonstruktionen und der Überprüfing der Phänome (Namensgebung, Messungen, Zugmodus,...) etwa eine bis eineinhalb Zeitstunden vorsehen - also etwa die Zeit, die sich zwischen zwei Pausen in einer Fortbildungsveranstaltung ergibt.

4. Anhang

Der folgende Text stammt aus dem WWW von der Adresse:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk:80/~history/Mathematicians/Ramanujan.html

Srinivasa Aiyangar Ramanujan

Born: 22 Dec 1887 in Erode, Tamil Nadu state, India Died: 26 April 1920 in Kumbakonam, Tamil Nadu state, India

Ramanujan was one of India's greatest mathematical geniu- ses. He made substantial contributions to the analytical theory of numbers and worked on elliptic functions, continu- ed fractions, and infinite series.
Ramanujan, although self-taught in mathematics, was given a fellowship to the University of Madras in 1903 but the following year he lost it because he devoted all his time to mathematics and neglected his other subjects. He married in 1909.
After publication of a brilliant research paper on Jacob Bernoulli's numbers in 1911 in the Journal of the Indian Mathematical Society his gained recognition for his work.
After his papers were sent to several English mathematicians his genius was recognised immediately by G H Hardy. In 1914 Hardy brought Ramanujan to Trinity College, Cambridge, to begin an extraordinary collaboration. He sailed from India on 17 March 1914.
Ramanujan worked out the Riemann series, the elliptic integrals, hypergeometric series and functional equations of the zeta function. On the other hand he had only a vague idea of what constitutes a mathematical proof. Despite many brilliant results, some of his theorems on prime numbers were completely wrong.
Ramanujan independently discovered results of Gauss, Kummer and others on hypergeome- tric series. Ramanujan's own work on partial sums and products of hypergeometric series have led to major development in the topic.
He fell ill in 1917 and spent some time in nursing homes. After a slight improvement in his health, he sailed to India on 27 February 1919 but he died there the following year.
Ramanujan left a number of unpublished notebooks filled with theorems that mathematicians have continued to study. G N Watson, Mason Professor of Pure Mathematics at Birmingham from 1918 to 1951 published 14 papers under the general title Theorems stated by Ramanu- jan and in all he published nearly 30 papers which were inspired by Ramanujan's work. Hardy passed on to Watson the large number of manuscripts of Ramanujan that he had, both written before 1914 and some written in Ramanujan's last year in India before his death.
The picture above is taken from a stamp issued by the Indian Post Office to celebrate the 75th anniversary of his birth.

Interessante Lektüren zu Ramanujan sind:

[1] R Kanigel, The man who knew infinity : A life of the genius Ramanujan (New York, 1991) (in deutsch unter dem Titel "Der das Unendliche kannte" erschienen)
[2] J M Borwein and P B Borwein, Ramanujan and pi, Scientific American 258 (2) (1988) 66-73.