Münster J. of Math. **2** (2009), 253–264
urn:nbn:de:hbz:6-10569451172

Münster Journal of Mathematics

Die universelle unbeschränkte Derivation

Michael Puschnigg

(Communicated by Siegfried Echterhoff)

Joachim Cuntz zum 60. Geburtstag

Abstract. We introduce and study the universal unbounded derivation of a Fréchet algebra with fixed dense domain of definition. As an application we construct new examples of holomorphically closed subalgebras of the reduced C^*-algebra of a nonabelian free group. Every trace on the group ring which is supported in finitely many conjugacy classes extends to a bounded trace on these algebras.

1. Einleitung

Die Suche nach glatten Unteralgebren von C^*-Algebren ist ein wichtiges Problem der Nichtkommutativen Geometrie. Dabei nennen wir eine dichte Unteralgebra einer Banachalgebra glatt, falls die Spektren ihrer gemeinsamen Elemente in beiden Algebren übereinstimmen. Typische Beispiele liefern etwa die Unteralgebra $\mathcal{C}^\infty(M)$ der glatten Funktionen in der C^*-Algebra $\mathcal{C}(M)$ aller stetigen Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit M und die Unteralgebra $\ell^1(\mathcal{H})$ der Spurklasse-Operatoren in der C^*-Algebra $\mathcal{K}(H)$ aller kompakten Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. In dieser Arbeit benutzen wir eine universelle Konstruktion, um neue Beispiele glatter Unteralgebren von C^*-Algebren diskreter Gruppen zu konstruieren.

Die meisten bekannten Beispiele glatter Unteralgebren von C^*-Algebren werden als Abschlüsse von Graphen unbeschränkter, dicht definierter Derivationen auf der betrachteten Algebra realisiert. Die dabei verwendeten Derivationen ergeben sich aus der Geometrie und Analysis der konkreten Situation. Hier beschreiten wir einen anderen Weg und betrachten für eine Fréchetalgebra A die universelle unbeschränkte Derivation d^A_S mit fixiertem, dichtem Definitionsbereich $S \subset A$. Diese existiert immer, sie ist aber nur in geeigneten Fällen leicht zu handhaben. Die universelle Derivation ist in der Regel nicht abschließbar, was aber für Anwendungen in der Nichtkommutativen Geometrie irrelevant ist. Wir erhalten immerhin ein hinreichendes, kohomologisches Kriterium für die Abschließbarkeit der universellen unbeschränkten Derivation. Dieses ergibt sich aus dem Kotangentialkomplex [2, 2.9], muß aber mit großer Sorgfalt abgeleitet werden, da im Fall unbeschränkter Derivationen homologische Algebra mit "fast exakten" Folgen betrieben werden muß.

Durch Iteration wird die universelle Glättung $\mathcal{C}^\infty(S, A)$ von A bezüglich S als Komplettierung des Graphen aller Potenzen der universellen Derivation d_S^A konstruiert. Der Kern des kanonischen Homomorphismus $\iota : \mathcal{C}^\infty(S, A) \to A$ ist topologisch nilpotent und sein Bild ist eine dichte, unter holomorphem Funktionalkalkül abgeschlossene Unteralgebra von A. Insbesondere sind die von ι induzierten Abbildungen auf der K-Theorie Isomorphismen. All dies folgt aus bekannten, in [1] ausführlich behandelten Prinzipien.

Hauptgegenstand dieses Aufsatzes ist ein konkretes Beispiel: die universelle unbeschränkte Derivation mit Definitionsbereich $\mathbb{C}[F_2]$ auf der reduzierten C^*-Algebra $C_r^*(F_2)$ der freien nichtabelschen Gruppe mit zwei Erzeugern. Der Gruppenring $\mathbb{C}[F_2]$ ist quasifrei im Sinn von Cuntz und Quillen [2, 3.3], was die universelle Derivation explizit beschreibbar macht. Andererseits ist die Algebra $C_r^*(F_2)$ weit davon entfernt, nuklear zu sein, was dafür sorgt, daß der Abschluß $\mathcal{C}^1(\mathbb{C}[F_2], C_r^*(F_2))$ des Gruppenrings unter der Graphennorm der universellen Derivation eine sehr kleine glatte Unteralgebra von $C_r^*(F_2)$ ist. Wir zeigen in unserem Hauptsatz, daß sich jede Spur auf $\mathbb{C}[F_2]$ mit Träger in nur endlich vielen Konjugationsklassen von F_2 zu einer beschränkten Spur auf $\mathcal{C}^1(\mathbb{C}[F_2], C_r^*(F_2))$ fortsetzen läßt. Das ist bei keiner der bisher bekannten glatten Unteralgebren von $C_r^*(F_2)$ der Fall und hat interessante Konsequenzen, die an anderer Stelle näher besprochen werden sollen.

Es bleibt noch hinzuzufügen, daß das eben genannte Ergebnis auch für beliebige wort-hyperbolische Gruppen Gültigkeit besitzt. Da die in diesem Aufsatz benutzte Beweisidee aber nicht auf den allgemeineren Fall übertragbar ist, bleibt die Behandlung desselben einer weiteren Arbeit vorbehalten.

Im Herbst 2008 feierte Joachim Cuntz seinen 60. Geburtstag. Seine Ideen und Arbeiten zur Nichtkommutativen Geometrie haben meine eigene Entwicklung als Mathematiker stark beeinflußt. Ich widme ihm diese Arbeit in Freundschaft und Dankbarkeit.

2. Die universelle unbeschränkte Derivation

Bevor wir uns dem eigentlichen Gegenstand dieser Note zuwenden, möchten wir an einige Begriffsbildungen erinnern. Sei A eine Fréchetalgebra. Ein Fréchetraum und A-Linksmodul M heißt Fréchet-A-Linksmodul, falls die Modulmultiplikation $A \times M \to M$ beschränkt ist. Die Begriffe eines Fréchet-Rechts- bzw. Fréchet-Bimoduls werden analog definiert. Wir nehmen im folgenden alle $\mathbb{C}$- bzw. A-linearen Abbildungen zwischen Fréchetträumen, Moduln und Algebren als stetig (beschränkt) an. Für Fréchetträume V, W ist die Menge $\mathcal{L}(V, W)$ der stetigen (beschränkten) linearen Abbildungen von V nach W in natürlicher Weise selbst ein Fréchetraum. Ist M (bzw. N) ein Fréchet-Rechts- (bzw. Fréchet-Linksmodul) so heißt eine Abbildung $\varphi : M \times N \to V$ in einen

Fréchetraum V A-bilinear, falls sie stetig (beschränkt), sowie $\mathbb{C}$-bilinear ist und darüber hinaus $\varphi(ma, n) = \varphi(m, an)$ für alle $m \in M$, $n \in N$, $a \in A$ gilt. Es existiert ein (bis auf Isomorphie eindeutiger) Fréchetraum $M\widehat{\otimes}_A N$, der in natürlicher Weise der Bedingung

$$Mor_{A-bilin}(M \times N, V) \cong \mathcal{L}(M\widehat{\otimes}_A N, V), \tag{2.1}$$

für jeden Fréchetraum V genügt. Der Raum $M\widehat{\otimes}_A N$ heißt das projektive Tensorprodukt von M und N über A. Das projektive Tensorprodukt über $\mathbb{C}$ wird mit $\widehat{\otimes}$ bezeichnet.

Nun können wir uns Derivationen zuwenden. Wir erinnern daran, daß eine beschränkte Derivation auf einer unitalen Fréchetalgebra A mit Werten in dem Fréchet-A-Bimodul M eine beschränkte lineare Abbildung $D : A \to M$ ist, die der Leibniz-Regel

$$D(aa') = D(a)a' + aD(a'),\ \forall a, a' \in A \tag{2.2}$$

genügt. Die Menge $Der(A, M)$ der beschränkten Derivationen auf A mit Werten in M ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von $\mathcal{L}(A, M)$ und daher selbst ein Fréchetraum.

Der A-Bimodul $\Omega^1 A$ der Differentiale wird durch die natürliche Erweiterung

$$0 \longrightarrow \Omega^1 A \longrightarrow A\widehat{\otimes}A \xrightarrow{\ m\ } A \longrightarrow 0$$

von Fréchet-A-Bimoduln definiert. Sie ist kontrahierbar als Erweiterung von Fréchet-A-Linksmoduln: eine kontrahierende Homotopie wird durch $s_0 : A \to A\widehat{\otimes}A$, $a \mapsto a \otimes 1$ und $s_1 : A\widehat{\otimes}A \to \Omega^1 A$, $a \otimes a' \mapsto a \otimes a' - aa' \otimes 1$ gegeben. Wir zitieren den wohlbekannten

Satz 2.1. *Sei A eine Fréchetalgebra.*

i) *Die Abbildung*

$$d^A : A \to \Omega^1 A,\ a \mapsto a \otimes 1 - 1 \otimes a \tag{2.4}$$

ist eine beschränkte Derivation auf A.

ii) *Sie ist universell in dem Sinn, daß für jeden Fréchet-A-Bimodul M die kanonische Abbildung*

$$Hom_{A-Bimod}(\Omega^1 A, M) \xrightarrow{\ \cong\ } Der(A, M),\ \varphi \longmapsto \varphi \circ d^A \tag{2.5}$$

ein Isomorphismus ist.

Im folgenden fixieren wir einen beschränkten Homomorphismus $S \to A$ von Fréchetalgebren mit dichtem Bild. Wir fassen Fréchet-A-Bimoduln vermöge dieses Homomorphismus auch als Fréchet-S-Bimoduln auf.

Definition 2.2. Eine unbeschränkte Derivation auf A mit Definitionsbereich S ist eine beschränkte Derivation auf S mit Werten in einem Fréchet-A-Bimodul.

Die Menge $Der_S(A, M)$ der unbeschränkten Derivationen auf A mit Definitionsbereich S und Werten in dem Fréchet-A-Bimodul M ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von $\mathcal{L}(S, M)$ und daher selbst ein Fréchetraum.

Satz 2.3. *Sei A eine Fréchetalgebra.*

i) *Die Abbildung*

$$d_S^A : S \to A\widehat{\otimes}_S\Omega^1 S\widehat{\otimes}_S A,\ \ s \mapsto 1 \otimes ds \otimes 1 \tag{2.6}$$

ist eine unbeschränkte Derivation auf A mit Definitionsbereich S.

ii) *Sie ist universell in dem Sinn, daß für jeden Fréchet-A-Bimodul M die kanonische Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} Hom_{A-Bimod}(A\widehat{\otimes}_S\Omega^1 S\widehat{\otimes}_S A, M) & \xrightarrow{\cong} & Der_S(A, M), \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ d_S^A \end{array} \tag{2.7}$$

ein Isomorphismus ist.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Kette natürlicher Isomorphismen

$$Der_S(A, M) \cong Hom_{S-Bimod}(\Omega^1 S, M) \cong Hom_{A-Bimod}(A\widehat{\otimes}_S\Omega^1 S\widehat{\otimes}_S A, M).$$

Man erkennt, daß $Der_A(A, M) = Der(A, M)$ und daß die natürliche Vergißabbildung $Der(A, M) \to Der_S(A, M)$ einen kanonischen beschränkten A-Bimodulhomomorphismus

$$j : A\widehat{\otimes}_S\Omega^1 S\widehat{\otimes}_S A \to \Omega^1 A \tag{2.8}$$

induziert.

Die Nützlichkeit der obigen Begriffsbildung hängt ganz davon ab, inwieweit man die Struktur des Bimoduls $A\widehat{\otimes}_S\Omega^1 S\widehat{\otimes}_S A$ bestimmen kann.

Wir wenden uns jetzt der Frage zu, unter welchen Bedingungen die universelle unbeschränkte Derivation d_S^A abschließbar ist.

3. Der Kotangentialkomplex und die Abschliessbarkeit der universellen Derivation

Zunächst müssen die kategoriellen Eigenschaften des projektiven Tensorprodukts genauer untersucht werden. Wir reformulieren hierzu einige bekannte Begriffsbildungen aus der homologischen Algebra im Kontext topologischer Vektorräume.

Wir nennen einen Kettenkomplex

$$\mathcal{C}_\bullet :\ \ldots \longrightarrow C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \longrightarrow \ldots,\ i \in \mathbb{Z}$$

von Fréchеträumen *fast exakt*, falls

$$Ker(\partial_i) = \overline{Im(\partial_{i+1})} \tag{3.1}$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt. Die *reduzierte Homologie* eines Komplexes $\mathcal{C}_*$ ist der graduierte Vektorraum mit homogenen Komponenten

$$\overline{H}_i(\mathcal{C}_\bullet) = Ker(\partial_i)/\overline{Im(\partial_{i+1})},\ i \in \mathbb{Z}. \tag{3.2}$$

Jede Komponente ist in natürlicher Weise ein Fréchetraum.

Lemma 3.1. *Sei*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine linear kontrahierbare Erweiterung von Fréchet-A-Rechtsmoduln. Dann ist für jeden Fréchet-A-Linksmodul N die Sequenz

$$M'\widehat{\otimes}_A N \longrightarrow M\widehat{\otimes}_A N \longrightarrow M''\widehat{\otimes}_A N \longrightarrow 0 \tag{3.3}$$

fast exakt.

Beweis: Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M'\widehat{\otimes}N & \longrightarrow & M\widehat{\otimes}N & \longrightarrow & M''\widehat{\otimes}N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi''} & & \\ & & M'\widehat{\otimes}_A N & \longrightarrow & M\widehat{\otimes}_A N & \longrightarrow & M''\widehat{\otimes}_A N & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Die vertikalen Abbildungen sind surjektiv und die obere Zeile spaltet nach Voraussetzung. Das Lemma ergibt sich dann aus einer einfachen Diagrammjagd. □

Ein Fréchet-A-Linksmodul heißt frei, falls er zu einem Modul der Form $A\widehat{\otimes}V$, V ein Fréchetraum, isomorph ist. Er heißt projektiv, falls er zu einem direkten Summanden eines freien Moduls isomorph ist. Eine projektive Auflösung eines Fréchet-A-Linksmoduls M ist ein linear kontrahierbarer Komplex

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow P_0 \longleftarrow P_1 \longleftarrow \ldots,$$

bei dem $P_0, P_1, \ldots$ projektive Fréchet-A-Moduln sind. Die entsprechenden Begriffe für Fréchet-Rechts- oder Bimoduln werden analog eingeführt. Man kann in der üblichen Weise zeigen, daß jeder Fréchet-A-Modul eine projektive Auflösung besitzt und daß je zwei projektive Auflösungen eines gegebenen Moduls kettenhomotopie-äquivalent sind. Dies ergibt sich daraus, daß jeder Homomorphismus von Fréchet-A-Moduln zu einer Kettenabbildung von gegebenen projektiven Auflösungen fortgesetzt werden kann und diese Fortsetzung bis auf Kettenhomotopie eindeutig bestimmt ist.

Definition 3.2. Sei (M, N) ein Paar von Fréchet-A-(Rechts-Links)-Moduln. Sei $(P_\bullet, Q_\bullet) \to (M, N)$ eine projektive Auflösung von (M, N). Die Fréchet-räume

$$\overline{Tor}^A_*(M, N) = \overline{H}_*(P_\bullet\widehat{\otimes}_A Q_\bullet) \tag{3.4}$$

werden als die Tor-Räume des Paares (M, N) über A bezeichnet. Sie hängen nicht von der Wahl der projektiven Auflösung ab und definieren kovariante Bifunktoren auf geeigneten Kategorien von Fréchetmoduln.

Wir geben die funktoriellen Eigenschaften nicht im Detail an, da sie im folgenden nicht von Bedeutung sind.

Proposition 3.3. *Sei*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine linear kontrahierbare Erweiterung von Fréchet-A-Rechtsmoduln (Fréchet-(A', A)-Bimoduln). Sei M projektiv und sei N ein Fréchet-A-Linksmodul (Fréchet-(A, A'')-Bimodul). Dann existiert eine natürliche, fast exakte Sequenz

$$0 \to \overline{Tor}_1^A(M'', N) \to M' \widehat{\otimes}_A N \to M \widehat{\otimes}_A N \to M'' \widehat{\otimes}_A N \to 0 \tag{3.5}$$

von Frécheträumen (Fréchet-(A', A'')-Bimoduln). Für $n > 1$ existieren kanonische Isomorphismen

$$\overline{Tor}_n^A(M'', N) \xrightarrow{\cong} \overline{Tor}_{n-1}^A(M', N) \tag{3.6}$$

von Frécheträumen (Fréchet-(A', A'')-Bimoduln).

Beweis: Ist dieses Ergebnis auch vollkommen “plausibel”, so ist im Umgang mit fast exakten Sequenzen doch Vorsicht geboten, da die meisten bekannten elementaren Resultate aus der homologischen Algebra für sie keine Gültigkeit mehr besitzen.

Seien $P_\bullet \to M', Q_\bullet \to M''$ projektive Auflösungen von M' und M''. Dann existiert bekanntermaßen ein projektive Auflösung $R_\bullet \to M$ von M mit folgenden Eigenschaften:
i) Es existiert ein kommutatives Diagramm von Auflösungen mit linear kontrahierbaren Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P_\bullet & \xrightarrow{i_\bullet} & R_\bullet & \xrightarrow{p_\bullet} & Q_\bullet & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

ii) In jedem Grad spaltet die obere Zeile des Diagramms als Erweiterung von Fréchet-A-Moduln. In der Tat haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P_n & \xrightarrow{i_n} & R_n & \xrightarrow{p_n} & Q_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & P_n & \xrightarrow{i'} & P_n \oplus Q_n & \xrightarrow{p'} & Q_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

von Erweiterungen von Fréchet-A-moduln für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Wenden wir darauf den Funktor $-\widehat{\otimes}_A N$ an, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & P_1\widehat{\otimes}_A N & \longrightarrow & R_1\widehat{\otimes}_A N & \longrightarrow & Q_1\widehat{\otimes}_A N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & P_0\widehat{\otimes}_A N & \longrightarrow & R_0\widehat{\otimes}_A N & \longrightarrow & Q_0\widehat{\otimes}_A N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & M'\widehat{\otimes}_A N & \xrightarrow{i'} & M\widehat{\otimes}_A N & \xrightarrow{p'} & M''\widehat{\otimes}_A N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

mit folgenden Eigenschaften:
i) Alle Zeilen mit Ausnahme der untersten spalten als Erweiterungen von Fréchet-Räumen. Die unterste Zeile ist fast exakt.
ii) Da M ein projektiver Fréchet-A-Modul ist, ist die mittlere Spalte linear kontrahierbar.
iii) Die linke und rechte Spalte sind exakt in niedrigstem Grad und fast exakt in zweitniedrigstem Grad.

Die Behauptung ergibt sich daraus durch eine längliche aber offensichtliche Diagrammjagd. □

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist der

Satz 3.4. *(Kotangentialkomplex* [2]*) Sei $S \to A$ ein Homomorphismus von Fréchetalgebren mit dichtem Bild. Dann existiert eine kanonische, fast exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \overline{Tor}_1^S(A,A) \longrightarrow A\widehat{\otimes}_S\Omega^1 S\widehat{\otimes}_S A \longrightarrow \Omega^1 A \longrightarrow 0 \tag{3.7}$$

von Frécheträumen.

Beweis: Betrachten wir die kanonische Erweiterung

$$0 \longrightarrow \Omega^1 S \longrightarrow S\widehat{\otimes}S \xrightarrow{m} S \longrightarrow 0$$

von Fréchet-S-Bimoduln. Sie ist kontrahierbar als Erweiterung von Fréchet-S-Linksmoduln und geht daher unter dem Funktor $A\widehat{\otimes}_S-$ in die linear kontrahierbare Erweiterung

$$0 \longrightarrow A\widehat{\otimes}_S\Omega^1 S \longrightarrow A\widehat{\otimes}S \xrightarrow{m} A \longrightarrow 0$$

von Fréchet-A-Linksmoduln über. Beachte, daß $A\widehat{\otimes}S$ frei und daher projektiv als Fréchet-S-Rechtsmodul ist. Wenden wir den Funktor $-\widehat{\otimes}_S A$ auf die gegebene Erweiterung an, so erhalten wir nach 3.3 die fast exakte Folge

$$0 \to Tor_1^S(A,A) \to A\widehat{\otimes}_S\Omega^1 S\widehat{\otimes}_S A \to A\widehat{\otimes}A \stackrel{m}{\to} A \to 0.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar das gesuchte Ergebnis. □

Eine Konsequenz dieses Resultats ist das

Korollar 3.5. *Sei $S \to A$ ein Homomorphismus von Fréchetalgebren mit dichtem Bild. Gilt $\overline{Tor}_1^S(A, A) = 0$, so ist die universelle unbeschränkte Derivation von A mit Definitionsbereich S abschließbar.*

Beweis: Sei (α_n) eine Folge in S, die der Bedingung $\lim_{n\to\infty}(\alpha_n, d_S^A(\alpha_n)) = (0, \beta) \in A \times A\widehat{\otimes}_S\Omega^1 S\widehat{\otimes}_S A$ genügt. Sei $j : A\widehat{\otimes}_S\Omega^1 S\widehat{\otimes}_S A \longrightarrow \Omega^1 A$ die kanonische Abbildung. Es gilt dann $j(\beta) = j(\lim_{n\to\infty} d_S^A(\alpha_n)) = \lim_{n\to\infty} d_A(\alpha_n) = d_A(\lim_{n\to\infty}\alpha_n) = d_A(0) = 0$, da d_A stetig auf A ist. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist j injektiv und es folgt $\beta = 0$. Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung. □

4. Die universelle Glättung bezüglich einer dichten Unteralgebra

Sei $S \to A$ ein Homomorphismus von Fréchetalgebren mit dichtem Bild und sei $d_S^A : S \to A\widehat{\otimes}_S\Omega^1 S\widehat{\otimes}_S A$ die universelle unbeschränkte Derivation von A mit Definitionsbereich S. Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}^1(S, A)$ den Abschluß des Graphen von d_S^A in der Fréchetalgebra $A \ltimes A\widehat{\otimes}_S\Omega^1 S\widehat{\otimes}_S A$ mit Multiplikation $(a, \omega)\cdot(a', \omega') = (aa', a\omega' + \omega a')$. Da d_S^A eine Derivation ist, wird $\mathcal{C}^1(S, A)$ zu einer Fréchetunteralgebra derselben. Die Projektion $\iota_1 : \mathcal{C}^1(S, A) \to A$ ist ein Homomorphismus von Fréchetalgebren mit dichtem Bild und sein Kern $\mathcal{I} = Ker(\iota_1)$ ist ein Ideal vom Quadrat Null: $\mathcal{I}^2 = 0$. Dieser Kern verschwindet genau dann, wenn die universelle Derivation d_S^A abschließbar ist. Schließlich ist die Abbildung $S \to \mathcal{C}^1(S, A), s \mapsto (s, 1 \otimes ds \otimes 1)$ ein Homomorphismus von Fréchetalgebren mit dichtem Bild. Dies erlaubt es die Konstruktion zu iterieren und man erhält ein projektives System

(4.1)
$$\longrightarrow \mathcal{C}^n(S, A) \xrightarrow{\iota_n} \mathcal{C}^{n-1}(S, A) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{C}^1(S, A) \xrightarrow{\iota_1} A$$

von S-Fréchetalgebren wobei

$$\mathcal{C}^n(S, A) = \mathcal{C}^1(S, \mathcal{C}^{n-1}(S, A)) \tag{4.2}$$

ist und die Strukturabbildungen Homomorphismen von S-Fréchet-Algebren sind. Des weiteren besitzt der kanonischen Homomorphismus $S \to \mathcal{C}^n(S, A)$ ein dichtes Bild. Durch Übergang zum projektiven Limes erhalten wir schließlich die S-Fréchetalgebra

$$\mathcal{C}^\infty(S, A) = \lim_{\overleftarrow{n}} \mathcal{C}^n(S, A) \tag{4.3}$$

Sie wird als die universelle Glättung von A bezüglich S bezeichnet. Es gilt die

Proposition 4.1. *(Siehe* [1]*) Sei $S \to A$ ein Homomorphismus von Fréchetalgebren mit dichtem Bild. Sei $\mathcal{C}^\infty(S, A)$ die universelle Glättung von A bezüglich S und sei*

$$\iota : \mathcal{C}^\infty(S, A) \to A \tag{4.4}$$

der kanonische Homomorphismus.

Dann gilt

i) *Ist A zulässig im Sinn von* [4, 1-3]*, so auch $\mathcal{C}^n(S, A)$, $n \geq 1$, und $\mathcal{C}^\infty(S, A)$.*
ii) *Der Kern des kanonischen Homomorphismus ι ist ein topologisch nilpotentes Ideal in $\mathcal{C}^\infty(S, A)$.*
iii) *Das Bild des kanonischen Homomorphismus ι ist eine dichte, unter holomorphem Funktionalkalkül abgeschlossene Unteralgebra von A.*
iv) *Der kanonische Homomorphismus ι induziert Isomorphismen in topologischer K-Theorie und, falls A die Approximationseigenschaft von Grothendieck besitzt, auch in (bivarianter) lokaler zyklischer Kohomologie.*

Beweis: Behauptung i) ist im wesentlichen mit [4, 7.4] identisch. Sei $I = Ker\, \iota$. Da der Kern von $\iota_n : \mathcal{C}^n(S, A) \to \mathcal{C}^{n-1}(S, A)$ ein Ideal vom Quadrat Null ist, muß das Bild von I^{2^n} in $\mathcal{C}^n(S, A)$ verschwinden. Daraus ergibt sich unmittelbar die Aussage ii). Insbesondere stimmt das Spektrum eines Elements von $\mathcal{C}^\infty(S, A)$ mit dem Spektrum seines Bildes in A unter dem kanonischen Homomorphismus ι überein. Dies impliziert iii) und die erste Aussage in iv) (siehe [1]). Die zweite Aussage in iv) ergibt sich schließlich aus [4, 7.1] oder [5], 5.15. □

5. Ein Beispiel

Sei F_2 die freie Gruppe mit den zwei kanonischen Erzeugern s, t. Die Gruppenalgebra $\mathbb{C}[F_2]$ ist dann quasifrei im Sinn von Cuntz und Quillen [2, 5.3] und $\Omega^1\mathbb{C}[F_2]$ ist frei als $\mathbb{C}[F_2]$-Bimodul [2, 3.3]. In der Tat ist

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_1^2 \mathbb{C}[F_2] \otimes \mathbb{C}[F_2] & \xrightarrow{\cong} & \Omega^1\mathbb{C}[F_2] \\ a^0 \otimes a^1 \oplus b^0 \otimes b^1 & \longmapsto & a^0 du_s a^1 + b^0 du_t b^1 \end{array} \tag{5.1}$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{C}[F_2]$-Bimoduln. Die analoge Behauptung gilt auch für den Bimodul der Differentiale über der zulässigen Fréchetalgebra $\ell^1_{RD}(F_2)$ mit definierenden Seminormen $||\sum a_g u_g||_k = \sum (1 + l(g))^k |a_g|$, $k \in \mathbb{N}$. (Hier bezeichnet l die kanonische Wortmetrik auf F_2.) Wir betrachten nun die universelle unbeschränkte Derivation auf der reduzierten Gruppen-C^*-Algebra $C^*_r(F_2)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{C}[F_2]$. Diese scheint a priori nicht in unseren Rahmen zu passen, da $\mathbb{C}[F_2]$ keine Fréchetalgebra ist. Der Einwand hat aber keinen Bestand, da sich jede Derivation auf $\mathbb{C}[F_2]$ mit Werten in einem $C^*_r(F_2)$-Bimodul zu einer beschränkten Derivation auf der Fréchetalgebra $\ell^1_{RD}(F_2)$ fortsetzen läßt. Insbesondere ist also $\mathcal{C}^1(\mathbb{C}[F_2], C^*_r(F_2)) = \mathcal{C}^1(\ell^1_{RD}(F_2), C^*_r(F_2))$.

Lemma 5.1. *Die universelle unbeschränkte Derivation* $d(\mathbb{C}[F_2], C_r^*(F_2))$ *auf* $C_r^*(F_2)$ *mit Definitionsbereich* $\mathbb{C}[F_2]$ *ist abschließbar. Insbesondere ist* $\mathcal{C}^1(\mathbb{C}[F_2], C_r^*(F_2))$ *eine Unteralgebra von* $C_r^*(F_2)$ *und* $d(\mathbb{C}[F_2], C_r^*(F_2))$ *läßt sich zu einer beschränkten Derivation*

$$(5.2)\quad \delta : \mathcal{C}^1(\mathbb{C}[F_2], C_r^*(F_2)) \ \to\ C_r^*(F_2) \otimes_{\mathbb{C}[F_2]} \Omega^1\mathbb{C}[F_2] \otimes_{\mathbb{C}[F_2]} C_r^*(F_2) = \Omega'(F_2)$$

fortsetzen.

Beweis: Sei (α_n) eine Folge in $\mathbb{C}[F_2]$, für die

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n, d(\mathbb{C}[F_2], C_r^*(F_2))(\alpha_n)) = (0, \beta) \in C_r^*(F_2) \times \Omega'(F_2)$$

gilt. Nach [3, 1.8] existiert ein Netz (φ_α) von Funktionen mit endlichen Träger auf F_2 , so daß die zugehörigen (punktweisen) Multiplikationsoperatoren M_{φ_α} auf $C_r^*(F_2)$ die Bedingungen

$$||M_{\varphi_\alpha}|| \leq 1,\ \forall\alpha,\ \text{und} \lim_{\overrightarrow{\alpha}} M_{\varphi_\alpha} x = x,\ \forall x \in C_r^*(F_2),$$

erfüllen. Sei M'_{φ_α} der beschränkte Operator auf $\Omega'(F_2)$, der unter der Identifizierung (5.1) dem Operator $M_{\varphi_\alpha} \widehat{\otimes} M_{\varphi_\alpha}$ auf $\bigoplus_1^2 C_r^*(F_2) \widehat{\otimes} C_r^*(F_2)$ entspricht. Man sieht dann leicht, daß

$$\lim_{\overrightarrow{n}} M'_{\varphi_\alpha}(d(\mathbb{C}[F_2], C_r^*(F_2))(\alpha_n)) = M'_{\varphi_\alpha}(\beta) = 0,\ \forall\alpha,$$

und daher $\beta = \lim_{\overrightarrow{\alpha}} M'_{\varphi_\alpha}(\beta) = 0$ ist, woraus die Behauptung folgt. □

Ziel dieser Arbeit ist der folgende Satz, der die Existenz einer sehr "kleinen" holomorph abgeschlossenen Unteralgebra in $C_r^*(F_2)$ behauptet. Ein entsprechendes Resultat gilt auch für beliebige wort-hyperbolische Gruppen. Da es aber mit anderen Methoden gewonnen wird, bleibt seine Darstellung einer weiteren Arbeit vorbehalten.

Satz 5.2. *Sei* $\mathbb{C}[F_2]$ *der komplexe Gruppenring der freien Gruppe mit zwei Erzeugern. Sei* $C_r^*(F_2)$ *die reduzierte Gruppen-*C^**-Algebra von* F_2 *und sei* $\mathcal{C}^1(\mathbb{C}[F_2], C_r^*(F_2))$ *die zu der universellen unbeschränkten Derivation mit Definitionsbereich* $\mathbb{C}[F_2]$ *assoziierte Unteralgebra. Für jede Konjugationsklasse* $\langle x\rangle \subset F_2$ *bezeichne* $\tau_{\langle x\rangle}$ *die durch die charakteristische Funktion von* $\langle x\rangle$ *definierte Spur auf* $\mathbb{C}[F_2]$. *Dann gilt*

i) *Die zulässige Fréchetalgebra* $\mathcal{C}^1(\mathbb{C}[F_2], C_r^*(F_2))$ *ist dicht und abgeschlossen unter holomorphem Funktionalkalkül in* $C_r^*(F_2)$.
ii) *Für jede Konjugationsklasse* $\langle x\rangle$ *in* F_2 *läßt sich das Funktional* $\tau_{\langle x\rangle}$ *zu einer beschränkten Spur auf* $\mathcal{C}^1(\mathbb{C}[F_2], C_r^*(F_2))$ *fortsetzen.*

Beweis: Die universelle unbeschränkte Derivation auf $C_r^*(F_2)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{C}[F_2]$ nimmt Werte in dem freien Bimodul $\Omega'(F_2)$ (5.2) an. Eine Basis desselben wird nach (5.1) durch

$$\begin{array}{lccc} (5.3) & \bigoplus_1^2 C_r^*(F_2)\widehat{\otimes} C_r^*(F_2) & \xrightarrow{\cong} & \Omega'(F_2) \\ & a^0 \otimes a^1 \oplus b^0 \otimes b^1 & \longmapsto & a^0 du_s a^1 + b^0 du_t b^1 \end{array}$$

gegeben. Im folgenden werden wir ohne weitere Erwähnung von dieser Identifizierung Gebrauch machen.

Sei nun $\langle x\rangle \neq 1$ eine Konjugationsklasse in F_2 (unsere Behauptung ist im Fall $\langle x\rangle = 1$ evident). Mit $Mult(\langle x\rangle)$ bezeichnen wir die größte natürliche Zahl n, für die ein (und damit jedes) Element von $\langle x\rangle$ eine n-te Potenz in F_2 ist. Wir fixieren ein Element g minimaler Wortlänge in $\langle x\rangle$. Nach eventueller Umbenennung der Erzeuger $\{s, t, s^{-1}, t^{-1}\}$ dürfen wir annehmen, daß das minimale Wort für g mit dem Buchstaben s endet. Wir betrachten nun die beschränkte Abbildung

$$\begin{array}{llccc} (5.4) & \mu_g : & \Omega'(F_2) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & a^0 du_s a^1 + b^0 du_t b^1 & \longmapsto & \langle \xi_g, \pi_{reg}(a^1 a^0 u_s)\xi_e\rangle. \end{array}$$

Die Komposition

$$\mu_g \circ \delta : \mathcal{C}^1(\mathbb{C}[F_2], C_r^*(F_2)) \xrightarrow{\delta} \Omega'(F_2) \xrightarrow{\mu_g} \mathbb{C} \tag{5.5}$$

definiert ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathcal{C}^1(\mathbb{C}[F_2], C_r^*(F_2))$. Wir behaupten, daß seine Einschränkung auf den Gruppenring $\mathbb{C}[F_2]$ der Identität

$$\mu_g \circ \delta = Mult(\langle x\rangle) \cdot \tau_{\langle x\rangle} \tag{5.6}$$

genügt, woraus sich unmittelbar der Satz ergibt. Dazu betrachten wir ein Element der Form $u_h \in \mathbb{C}[F_2]$, $h \in F_2$. Man sieht leicht, daß $\mu_x(u_h) = 0$, falls h nicht zu x konjugiert ist. Sei also $h \in \langle x\rangle$. Wir wählen ein Element minimaler Wortlänge $v \in F_2$, so daß das reduzierte Wort für $g' = v^{-1}hv$ eine zyklische Permutation des reduzierten Wortes für g ist. Dann ergibt sich $(\mu_g \circ \delta)(u_h) = \mu_g(du_{vg'v^{-1}}) = \mu_g(du_v u_{g'v^{-1}}) + \mu_g(u_v du_{g'} u_{v^{-1}}) + \mu_g(u_{vg'} du_{v^{-1}})$. Schreibt man $du_v u_{g'v^{-1}} = a_0 du_s a_1 + b_0 du_t b_1$ so ist $a_1 a_0 u_s = \sum \lambda_{h'} u_{h'}$, wobei die Wortlänge der Elemente $h' \in F_2$ größer als die Wortlänge von g ist. Daher gilt $\mu_g(du_v u_{g'v^{-1}}) = 0$ und aus denselben Gründen findet man $\mu_g(u_{vg'} du_{v^{-1}}) = 0$. Also ist $(\mu_g \circ \delta)(u_h) = \mu_g(u_v du_{g'} u_{v^{-1}}) = \mu_g(du_{g'})$. Der letztere Ausdruck stimmt aber mit der Anzahl zyklischer Permutationen des reduzierten Wortes für g' überein, die das reduzierte Wort für g liefern. Dies ist genau die Multiplizität der Konjugationsklasse $\langle x\rangle$ und Gleichung (5.6) ist bewiesen. $\square$

References

[1] B. Blackadar and J. Cuntz, Differential Banach algebra norms and smooth subalgebras of C^*-algebras, J. Operator Theory **26** (1991), no. 2, 255–282. MR1225517 (94f:46094)

[2] J. Cuntz and D. Quillen, Algebra extensions and nonsingularity, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 2, 251–289. MR1303029 (96c:19002)

[3] U. Haagerup, An example of a nonnuclear C^*-algebra, which has the metric approximation property, Invent. Math. **50** (1978/79), no. 3, 279–293. MR0520930 (80j:46094)
[4] M. Puschnigg, *Asymptotic cyclic cohomology*, Lecture Notes in Math., 1642, Springer, Berlin, 1996. MR1482804 (99e:46098)
[5] M. Puschnigg, Diffeotopy functors of ind-algebras and local cyclic cohomology, Doc. Math. **8** (2003), 143–245 (electronic). MR2029166 (2004k:46128)

Received February 2, 2009; accepted February 17, 2009

Michael Puschnigg
Institut de Mathématiques de Luminy, UMR 6206 du CNRS
Université de la Méditerranée, 163, Avenue de Luminy, 13288 Marseille, Cedex 9, France
E-mail: puschnig@iml.univ-mrs.fr