Martin Hohelüchter

Grundlagen einer Segmenttheorie

Zur Bindung von Analyse und Synthese an Relationen

Einleitung. Analyse und Synthese sind heute zentrale Techniken der naturwissenschaftlich geprägten Welt. In vielen Bereichen der Wissenschaft werden sie fraglos angewandt. Doch häufig sind sie und ihre vorgeblichen Ergebnisse sehr fragwürdig, denn eine Praxis kann nicht (allein) aufgrund ihrer Ergebnisse beurteilt werden, sondern ein fundiertes Urteil über solche Verfahren ist nur möglich auf der Basis einer stringenten Theorie der Analyse bzw. der Synthese. In einer solchen Theorie sind primär nicht Tatsachenbehauptungen aufzustellen, sondern tragfähige gedankliche Konstruktionen zu entwickeln, die erst solche Behauptungen ermöglichen. Durch vorgebliche Fakten ist eine derartige Konstruktion daher weder zu stützen noch anzugreifen. Einwände sind deshalb nur gegen die immanente Schlüssigkeit einer Konstruktion und (sekundär) aufgrund der Verfehlung ihres Zieles zu erheben. Anhand einer Theorie der Analyse bzw. Synthese sind dann verwendete Verfahren nicht nur zu kritisieren, sondern auch gangbare Alternativen aufzuweisen.

Traditionell werden Analyse und Synthese zwar im Zusammenhang miteinander gesehen, aber getrennt voneinander behandelt. Der Begriff ´Analyse` wird heute inflationär für fast jede wissenschaftliche Untersuchung gebraucht. Ursprünglich steht er für eine bestimmte *Methode*, Einsichten zu gewinnen. Nach dieser erstmals von Aristoteles thematisierten Methode[1] soll jeweils Kompliziertes auf Einfaches zurückgeführt werden, ein Zustand auf seine Bedingungen u.ä. mehr. Descartes sieht in dieser analytischen Reduktion und der anschließenden synthetischen Rekonstruktion sogar eine Bedingung *jeder* Erkenntnis.[2] Dieses Vorgehen beherrscht seither in vielerlei Formen das Denken der Neuzeit. Die wohl wichtigste dieser Formen ist die Auffassung der Analyse als *Zerlegung*:

(0.1) Analyse ist die Rückführung eines Gegebenen auf die Bestandteile, aus denen es zusammengesetzt ist,

wie sie von Aristoteles charakterisiert wird.[3] Diese Auffassung werden wir unseren Überlegungen zugrundelegen. Dabei stellt sich die Frage, in welchen Gebieten solche Analysen möglich sind und zu welchen kleinsten Bestandteilen sie (evtl.) führen. Descartes etwa analysiert ausschließlich Urteile und führt sie auf Grundwahrheiten zurück; Leibniz hält bereits sämtliche Gegenstände der traditionellen Logik, d.h. sämtliche Schlüsse, Urteile und Begriffe für analysierbar.[4] Da aber z.B. die Zerlegung eines Schlusses in anderer Weise erfolgen muß als die eines Begriffes, ergibt sich zum zweiten die Frage, welches dieser Gebiete und damit welche Art der Zerlegung vorrangig ist. So nimmt etwa bei Leibniz die Analyse der *Begriffe* die erste Stelle ein,[5] bei Kant die „transzendentale Analytik", unter der er die „*Zergliederung des Verstandesvermögens* selbst" versteht,[6] während in der sog. „analytischen Philosophie" die Analyse der *Sprache* im Vordergrund steht.[7]

Unsere Überlegungen zielen nun weder darauf ab, das Gebiet dessen, was der Zerlegung zugänglich ist, neu zu fassen, noch darauf, im Sinne der zweiten Frage ein weiteres vorgeblich fundamentales Zerlegungsgebiet vorzuschlagen. Ziel ist es vielmehr, ohne die überkommenen Zerlegungsansätze zu kritisieren, die *Bedingung der Möglichkeit* jeder solchen Zerlegung herauszuarbeiten und somit das Problem zu lösen, unter welchem Verständnis Analyse als Rückführung eines Ganzen auf seine Bestandteile, d.h. als *logische* Zerlegung überhaupt möglich ist.

Unabhängig von diesem Analyse- wird in der Tradition das Synthese-Problem, die Frage nach der Möglichkeit der *Zusammensetzung* eines Ganzen aus seinen Bestandteilen, behandelt. Von dieser Seite her geht bereits Plato im *Parmenides* die Frage der Beziehung eines Ganzen zu seinen Teilen an.[8] Auch die aristotelische Charakterisierung (0.1) gründet ja die Analyse auf die Synthese, d.h. die Zerlegung auf die Zusammensetzung. Doch gelingt es, wie wir in § 1 zeigen werden, weder dort noch in den zahlreichen späteren Versuchen, die *Synthese* begrifflich zu fassen.

Daher werden wir uns zunächst nicht dem Synthese-, sondern allein dem Analyse-Problem zuwenden. Dabei wird sich in § 2 zeigen, dass jede Zerlegung anhand einer

---

[1] In den beiden von ihm *Analytiken* genannten Schriften analysiert Aristoteles Schlüsse und Beweise.

[2] Descartes übertrug in den *Meditationen* die Vorgehensweise der Geometrie, wie sie von Pappus (MaC*) aufgefaßt wurde, auf die Philosophie. Zu den Anfängen des *mathematischen* Analysebegriffs vgl. etwa Hintikka (MoA).

[3] Zitiert nach E. Zeller, PdG II/2 S. 186.

[4] Leibniz, G.W., PhS S. 57

[5] Aus den analytisch gefundenen Grundbegriffen soll dann die „synthetische Methode" die „scientia generalis" liefern. Vgl. dazu z.B. Russell, B., EPL

[6] Kant, I., KrV B 90 f

[7] Vgl. etwa Carnap, R., LFP Kap.I und Savigny, Eike v., PnS

* Zu den Abkürzungen sei auf das Literaturverzeichnis verwiesen.

[8] Plato, Par 128 ff

Relation begriffen werden kann. Der Begriff der *Zerlegung* ist daher auf der Basis gewisser Relationen zu fixieren; bzgl. solcher „Zerlegungsrelationen“ zerfällt ein Ganzes vollständig in „Segmente“. Diese sind dabei je *Teile* dieses Ganzen.

In § 3 werden dann mit Hilfe einer an Frege orientierten Attributionstheorie solche zerlegungsrelevanten *Relationen* durch formale Mittel ausgezeichnet, und zwar sowohl in bezug auf die Gestalt ihrer Argumente (§ 3) als auch in bezug auf ihre spezifischen Eigenschaften (§ 4). Indem dann ein Ganzes und seine Bestandteile nicht als Einheiten, sondern als *Rollen* dieser Relationen gesehen werden, sind damit aus demselben Gedanken sowohl das Analyse- als auch das Synthese-Problem zu lösen. Am Beispiel der Analyse einfacher Aussagen wird dann in § 5 die Leistungsfähigkeit unseres Ansatzes demonstriert.

§ 1 Zur Unhaltbarkeit bisheriger Lösungen des Synthese-Problems

1. Das Synthese-Problem. In der Tradition werden das Problem der Analyse und das der Synthese zwar als Umkehrungen voneinander gesehen, aber nicht als gleichrangig behandelt. Dabei wird aber nicht der Analyse Vorrang vor der Synthese eingeräumt, sondern sie gilt umgekehrt gemäß (0.1) lediglich als ein Rückgängigmachen einer vorherigen Synthese. Exemplarisch ist die Behandlung des Synthese-Problems darzustellen am Beispiel einfacher Sätze wie ´Sokrates lacht`, die aus zwei Bestandteilen bestehen. Denn gerade in bezug auf solche einfachen singuläre Sätze sind im Laufe der Jahrhunderte zahlreiche Lösungen vorgeschlagen worden. Diese sind danach zu unterscheiden, ob sie zur Bildung eines Satzes aus seinen beiden Teilen spezielle i.a. externe Mittel heranziehen oder nicht. In der Tradition wurden seit der aristotelischen Ersten Analytik fast ausschließlich Methoden der ersten, in der Moderne Methoden der zweiten Art verwandt.

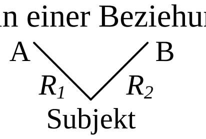
Traditionelle Lösungsansätze suchen zwei Ausdrücke als *eine* Aussage, d.h. als eine Einheit, zu begreifen, indem sie sie als Argumente in geeignete 2-stellige Relationen stellen, die entweder eine *direkte* oder eine *indirekte* Beziehung, d.h. eine Beziehung *zueinander* oder *zu einem Dritten* eröffnen. Jede Relation fassen wir dabei auf als ein mehrstelliges Attribut, d.h. als ein Attribut mit einer konstanten Anzahl $k \geq 2$ unterscheidbarer „(Argument)stellen“ oder „Rollen“. Jedes solche Attribut ist anwendbar auf mindestens ein „Item“ dazu, d.h. ein k-Tupel aus k Einheiten, von denen jede genau eine der k Argumentstellen einnimmt und somit die entsprechende Rolle trägt. Jede Einheit, die (innerhalb eines k-Tupels) eine Argumentstelle einer Relation einnimmt, heißt „Argument“ dieser Stelle der Relation. Dabei muß jedes Argument den Status einer Einheit vor dem des Argumentes haben; eine Relation kann nur *bereits vorliegende* Einheiten in Beziehung zueinander setzen. Somit gilt

Satz 1.1 : Jedes Argument muß (zuvor) eine Einheit, eine Einheit dagegen kein Argument sein.

Moderne Lösungsansätze versuchen seit Frege die Bildung eines Satzes aus seinen beiden Teilen allein auf die Teile und ihre Gestalt zu stützen und somit ohne solche 2-stelligen Verbindungsrelationen auszukommen. Im folgenden werden wir anhand repräsentativer Ansätze aufzeigen, dass sowohl die traditionellen als auch die modernen Versionen, die Teile eines Satzes zu einer Einheit zu verbinden, unhaltbar sind.

2. Die *indirekte* Verbindung von Teilen. In den auf eine *indirekte* Beziehung basierenden Theorien bilden zwei Ausdrücke A und B dann eine Aussage, wenn sie in einer 2-stelligen Relation *zu einem Dritten*, dem „Subjekt“ der Aussage stehen, A in einer Relation R_1, B in einer Beziehung R_2. Es ergibt sich somit jeweils die Figur

(1.1)



Den Prototyp dieses Ansatzes liefert die Theorie der Aussage, die Aristoteles in seiner Schrift *De Interpretatione* formuliert.[1] Er unterscheidet da zunächst zwei disjunkte Klassen von Ausdrücken, Nomina (ονοματα) und Verben (ρηματα).[2] Ein Nomen bedeutet stets etwas, steht somit dazu in einer sog. „Nominalbeziehung“ *Nom*; ein Verb „gibt immer etwas zu verstehen, was von einem anderen gilt, was nämlich in oder an einem Subjekte ist,“[3] steht somit zu einem Subjekt in einer sog. „Prädikationsbeziehung“ *Präd*. Ein Name und ein Verb bilden nach dieser Theorie genau dann einen Satz (λογος), wenn die Bedeutung des Namens und ein Subjekt des Verbs identisch sind, das Verb also von der Bedeutung des Nomens prädiziert wird[4] und somit als Ausformung von (1.1) die folgende Figur vorliegt:

Nomen Prädikat
Nom *Präd*
Subjekt

Es gibt zahlreiche Modifikationen dieses Ansatzes. Sie reichen von Leibniz über J. St. Mill (´Sokrates` „denotiert“, ´lacht` „konnotiert“) bis zu Quine.[5] Dabei wird i.a. die Nominalbeziehung zwischen Nomen und Subjekt beibehalten, abgewandelt werden lediglich das Verständnis der Beziehung R_2 und die Bedingungen, die für das Vorliegen einer Aussage erfüllt sein müssen.

In solchen Theorien wird zwar berücksichtigt, dass nicht zwei *beliebige* Ausdrücke zusammen eine Aussage bilden, sondern dass dafür zusätzliche Bedingungen oder Hilfsmittel heranzuziehen sind. Doch ist, ohne die Eignung der verwendeten Mittel im Einzelnen zu diskutieren, festzustellen, dass sie das eigentliche Problem überspringen, bzw. als schon gelöst voraussetzen müssen. Denn ihr Verfahren ist wohl geeignet, zu definieren, unter welchen Bedingungen eine bereits vorliegende Einheit eine *Aussage* ist; es ist aber ungeeignet, zu sichern, *dass* eine solche Einheit *vorliegt*. Diese Ansätze täuschen also eine Lösung des Synthese-Problems vor, indem sie Lösung eines nachgeordneten Problems anbieten.

3. Die *direkte* Verbindung von Teilen. Auch für die *direkte* Verbindung zweier Einheiten zu einer neuen durch eine (jeweils spezielle) Relation liefert Aristoteles die erste explizite Theorie.[6] In seiner Kategorienschrift stützt er die Verbindung zweier Ausdrücke zu einer Aussage nicht auf andere Relationen, sondern führt *originäre* Relationen dafür ein. Er schlägt nämlich bzgl. der Prädikation *zwei direkte* Verbindungsrelationen vor, die Beziehungen ´ist in etwas` und ´wird ausgesagt von etwas`,[7] wobei erstere die Bildung von z.B. ´Sokrates ist weiß`, letztere die von `Sokrates ist ein Mensch` erlauben soll. Auch die scholastischen Verfahren folgen diesem Vorbild, sie kommen aber mit einer einzigen Verbindungsrelation aus, der *Kopula*.

In diesen Theorien soll das Synthese-Problem Problem somit jeweils durch die Einführung einer 2-stelligen Relation gelöst werden. Um aus zwei Ausdrücken *eine Aussage* zu gewinnen, begreifen sie diese Ausdrücke als Argumente dieser Relation. Da-

[1] Aristoteles, Int Kap. 2 ff
[2] Darin stimmt er mit Plato (a.a.O. Sop, 261c – 262d) überein.
[3] Aristoteles, Int Kap.3
[4] „Eine Rede ist eine einfache Aussage, wenn sie einem Subjekt etwas zu- oder abspricht.“(Int 17a20f)
[5] Quine, a.a.O., WuG S.165:„Semantisch ist die Unterscheidung zwischen singulären und allgemeinen Termini etwa die, dass der singuläre Terminus genau einen Gegenstand benennt bzw. benennen soll, [...] während der allgemeine Terminus auf jeden einzelnen von beliebig vielen Gegenständen zutrifft.“
[6] Sie ist orientiert am platonischen *Teilhabe-Verfahren*, wie es u.a. im Dialog ´Parmenides` vorgestellt wird. Danach stehen Dinge in Beziehung zu Ideen. Dieses Verfahren setzt voraus, dass „gewisse selbständige Ideen einerseits und die an ihnen Anteil habenden Dinge andrerseits voneinander zu trennen“ sind. (Plato, Par 130 b) Durch die Relation des „Teilhabens“ (μετεχειν) sollen sie in Verbindung zueinander stehen.
[7] Aristoteles, Kat Kap.2

durch verschieben sie das Synthese-Problem auf das Problem, wie eine Relation mit ihren Argumenten zu verbinden sei. Falls diese Verbindung wiederum mittels einer 2-stelligen Relation erfolgen soll, ergibt sich dafür aber wieder die gleiche Schwierigkeit. Weil dieses Argument perpetuierbar ist, liegt ein infiniter Regress vor, der bekannt ist als „Bradleyscher Regress“. Denselben grundsätzlichen Einwand hat unabhängig davon auch Frege erhoben.[1] Wird etwa, wie er darlegt, die Relation zwischen a und b aufgefaßt als „Fallen eines Gegenstandes [a] unter einen Begriff [b], haben wir bei der Relation [des darunter Fallens] dieselben Schwierigkeiten, die wir beim Begriff vermeiden wollten.“[2]

Dieser Regress ist sehr weitreichend. Zunächst ist er, wie auch die Fregesche Argumentation zeigt,[3] nicht beschränkt auf die Verbindung von *Ausdrücken*, sondern tritt unabhängig voneinander auch bzgl. der *Zeichen*, bzgl. ihres *Sinns* und bzgl. ihrer *Bedeutung* auf,[4] ja er ergibt sich bei jedem Versuch einer Vereinigung von zwei Bestandteilen zu einem Ganzen mittels einer 2-stelligen Relation.

Weiter tritt er nicht nur bei *2-stelligen* Relationen auf, sondern bei Relationen jeder Stelligkeit: Jeder Versuch, k Einheiten $a_1,...,a_k$ durch eine k-stellige Relation R^k so zu verbinden, dass eine neue Einheit Ergebnis dieser Verbindung ist, setzt eine weitere Relation voraus, die die Einheit R^k an die Einheiten $a_1,...,a_k$ anbindet. Anders als etwa bei der Nachfolger-Relation ist es demnach ausgeschlossen, das Synthese-Problem durch Dezision zu lösen. Während dort nämlich eine Relation *vorgegeben* ist, von deren Argumenten dann eines als Anfangseinheit *gesetzt* werden kann, besteht hier gerade umgekehrt jeweils die Schwierigkeit im Fehlen einer solchen für die Verbindung notwendigen Relation. Wenn aus k Einheiten mittels einer k-stelligen Relation eine (k+1)-te Einheit hervorgehen soll, ist also der Regress unvermeidlich.

Diese Schwierigkeiten liegen aber nicht in der *Einführung*, sondern in einem falschen Verständnis von Relationen begründet. Dieses begreift gewisse Relationen als *Produktions*mittel. Diese sollen nämlich nach diesem Verständnis Einheiten nicht nur in Verbindung miteinander bringen, d.h. in Beziehung zueinander setzen, sondern zudem eine Einheit als Verbindungs*ergebnis* liefern. Die zu verbindenden Einheiten sollen also nicht nur Argumente einer Relation sein, sondern zudem zusammen mit ihr eine neue Einheit bilden, die aber *nicht* Argument der Relation ist. Dieser Ansatz sieht zwar das Synthese-Problem, und er setzt gewisse Mittel, nämlich Relationen zu seiner Lösung ein; er verlangt aber von ihnen etwas, was sie nicht leisten können. Diese Überforderung zeigt sich im Regress.

Schließlich ist dieser Regress nicht auf die Fälle beschränkt, in denen als Verbindungsmittel *Relationen* dienen sollen, sondern er tritt stets auf, wenn k Einheiten mittels einer wie auch immer gearteten (k+1)-ten zu einer neuen Einheit vereinigt werden sollen.[5] Damit hat er eine Konsequenz, die Frege selbst nicht genannt hat: Er

[1] Dieser Regress tritt nur auf unter der Annahme, die Verbindung zwischen einer Relation und ihren (potentiellen) Argumenten werde erneut durch eine Relation geleistet. Frege sieht diesen Annahmecharakter und zieht daraus – zu Recht – die Folgerung, dass die Annahme zu verwerfen sei. Bradley dagegen sieht den Annahmecharakter nicht, sondern faßt die Annahme als Faktum auf und meint so u.a. die „Irrealität“ von Relationen nachweisen zu können, ein Versuch, der auch aus anderen Gründen scheitern muß, wie Horstmann (OuR S. 128 f) überzeugend aufgezeigt hat.

[2] Frege, BuG, S. 204 f. Er führt diesen Einwand aber nicht weiter aus.

[3] In seinem Brief vom 28.7.1902 an B. Russell schreibt Frege: „Der Zerlegung des Satzes entspricht eine Zerlegung des Gedankens [als seines Sinnes] und dieser wieder etwas im Gebiet der Bedeutungen, und dies möchte ich eine logische Urthatsache nennen.“ (Bw S. 72)

[4] Bzgl. der Sinnebene behandelt Frege diese Frage in seiner „Einleitung in die Logik“ (EiL S.77 f). Dort *zerlegt* er den Gedanken, d.h. den Sinn eines Satzes in zwei ungleichartige Teile, „von denen keiner ein Gedanke ist.“

[5] Der Bradley Regress ist somit zu unterscheiden vom sog. Regress des „dritten Menschen“ (Plato, Par, 232), der als Argument spezifisch gegen *Ideen* dient.

schließt jede Einheitsbildung durch Hinzufügen einer Einheit aus, mag diese bzgl. der Teile immanent oder transzendent sein.

4. Der klassentheoretische Ansatz. Die moderne Logik hat darauf reagieren und eine neue Antwort auf das Synthese-Problem finden müssen. Relationen galten dabei aufgrund des o.g. Regresses als ungeeignet. Auf sie wird daher in modernen Ansätzen verzichtet. Als ersten solchen Ansatz prüfen wir denjenigen, der mit den geringsten Hilfsmitteln auszukommen vorgibt, indem er unter Verzicht auf jedes Mittel und jede Bedingung eine Einheit durch bloßes Zusammenfassen ihrer Bestandteile zu einer „*Klasse*“ gewinnen will. Ein einfacher Satz wäre danach eine Klasse (homogener) Einheiten. Diese Auffassung kann man z.B. in Wittgensteins „Tractatus“[1] vertreten sehen. Danach sind die Teile des Satzes sämtlich Namen.(3.202)[2] Sie bilden einen einfachen Satz ausschließlich durch ihre „Konfiguration“.[3]

Dieser auf der Klassentheorie fußende Ansatz hängt ab zum einen von der Haltbarkeit dieser Theorie, zum andern von deren Anwendbarkeit auf das Synthese-Problem. Zumindest letztere ist jedoch zweifelhaft. Sie ist nur dann gegeben, wenn die Zusammenfassung von Einheiten zu einer Klasse stets eine Einheit ergibt, wenn also jede Klasse *als solche* eine Einheit ist, d.h. wenn der *Einheits*status einer Klasse – falls sie ihn besitzt – gerade auf ihrem *Klassen*status beruht.

Im üblichen Verständnis von Klassen wird ihr Einheitsstatus jedoch nicht *begründet*, sondern *postuliert*. So gilt z.B. jede Extension bedingungslos als eine Einheit.[4] Ein prominenter Vertreter dieser bequemen Ansicht ist W. Quine. Er sieht in Klassen von vornherein gewisse „Dinge“.[5] Diese Auffassung ignoriert also das Synthese-Problem statt es zu lösen.[6] Doch kollidiert die Annahme, Klassen seien Einheiten, mit der Grundannahme der Klassentheorie, jede Klasse sei durch die in ihr enthaltenen Elemente charakterisierbar.[7] Faßte man nämlich unter dieser Annahme Klassen als Einheiten auf, dann wären sie Einheiten, für die eine *Relation* zu ihren Elementen wesentlich wäre. Wie an anderer Stelle bewiesen wurde,[8] wäre ´Klasse` dann aber lediglich eine *Rolle* (neben der des ´Elements`) in dieser Relation des ´Enthaltenseins`. Statt dass der Status der Einheit aus dem der Klasse *folgt*, ist er damit *unvereinbar*.

Nun könnte zwar eine Einheit als Argument, d.h. als Inhaber dieser Rolle auftreten, doch müßte sie nach Satz 1.1 den Status einer Einheit bereits *vor* dem eines Argumentes haben. Demnach kann eine Relation – wie eine zwischen Klasse und Element – den Einheitsstatus ihrer Argumente nicht *erbringen*, sondern *muß ihn voraussetzen*. Damit ist wohl der Erkenntnis nach ein *Rückschluß*, nicht aber dem Grunde nach eine *Folgerung* vom Status des Arguments auf den der Einheit möglich. Gerade

---

[1] Wittgenstein, Tip S.22 f

[2] Diese sind „nicht weiter zu zergliedern“. (3.26)

[3] Diese „entspricht der Konfiguration der Gegenstände in der Sachlage“). (3.21) Der Status einer Konfiguration wird von Wittgenstein nicht näher erläutert.

[4] Ein Beispiel dafür liefert die Fregesche Konzeption von Zahlen. Er definiert nämlich „Die Anzahl, welche dem Begriff F zukommt, [als] den Umfang [d.h. Extension] des Begriffes «gleichzahlig dem Begriff F»“. (GdA § 68, S.100) Jede so definierte Anzahl begreift er ohne Bedenken als Gegenstand, d.h. als eine Einheit.

[5] Quine, MuL S.1

[6] Daher kann man auch die gerade bei Vertretern einer sog. «pragmatischen Kalkültheorie» zu findende Ansicht, durch Nebeneinanderstellen geeigneter Wörter entstünden Sätze, übergehen, da sie das Problem nicht einmal sehen. Bereits Aristoteles hat ja bemerkt (Int 17ª13-15), dass eine Abfolge von Wörtern noch nicht eine Einheit liefert.

[7] Erst diese Annahme ermöglicht nämlich den Satz

„Klassen sind identisch, wenn ihre Elemente identisch sind“,

den Quine als Identitätskriterium heranzieht um damit seiner These «no entity without identity» zu genügen, nach der jedes Ding einem Identitätskriterium genügen muß.

[8] M.H., fMT. Dort wird gezeigt, daß nur ´Menge` eine Rolle ist, Klassen aber keine Einheiten sind.

ein Grund für den Einheitsstatus sollte aber doch aufgezeigt werden. Der klassentheoretische Ansatz kann ihn also nicht liefern. Er ist daher zur Lösung des Synthese-Problems untauglich.

5. Die Fregesche Prädikationstheorie. Frege zieht eine andere Konsequenz aus dem Regress, den er sogar im Zentrum seiner Logik, bei der Verbindung von Begriff und Gegenstand, sieht und dort zu beheben versucht. In seinem Ansatz werden Begriff und Gegenstand nicht durch *Mittel*, sondern allein vermöge ihrer spezifisch voneinander verschiedenen Art aneinander gebunden. Dazu stellt er zwei Typen von Einheiten einander gegenüber, die *absolut* verschieden seien, „Funktionen" und „Gegenstände".[1] Erstere charakterisiert er als „mit Leerstellen" bzw. „ungesättigt", letztere als „ohne Leerstellen" bzw. „gesättigt".[2] Dies liefert eine *vollständige* Disjunktion; jede Einheit ist *entweder* eine Funktion oder ein *Gegenstand*. Auf dieser Disjunktion basiert seine Theorie der Attribution. Denn insofern jede Funktion eine Leerstelle hat, kann sie nach Frege durch etwas ergänzt werden. Das, *wodurch* sie ergänzt wird, nennt er ´Argument`, das, *wozu* sie ergänzt wird, ´*Wert* (der Funktion)` (für dieses Argument).[3] An Argumente und Werte stellt Frege nun zwei Forderungen, nämlich

(1.2) Nur *Gegenstände* können Argumente oder Wert einer Funktion (1.Stufe) sein.

(1.3) *Jeder* Gegenstand ist *Argument jeder* Funktion (erster Stufe).[4]

Danach sind Funktionen nicht durch ihre Argumente, sondern nur durch ihre Werte zu unterscheiden und somit auch *nur* durch ihre *Werte* zu gliedern. Mit dem Ziel einer solchen Gliederung führt Frege zwei besondere Gegenstände ein, die „Wahrheitswerte" W und F. Damit definiert er „Begriffe" als „Funktionen, deren Wert für jedes Argument ein Wahrheitswert ist."[5] Der ungesättigte *Begriff* ´rot` z.B. wird durch den Gegenstand ´Paul` vervollständigt zum Gegenstand W oder F.[6] Dieses Fregesche Konzept ist aber aus mehreren Gründen verfehlt, wie an anderer Stelle für die drei zentralen Punkte Sättigung, Argument und Wert dargelegt wurde:[7]

Erstens liefert keine vollständige Disjunktion als solche eine *Verbindung* zwischen Einheiten. Diese Verbindung kommt im vorliegenden Falle erst dann zustande, wenn die Funktion „sättigbar" und der Gegenstand „sättigend", d.h. Argument ist.[8] Diese *relativen* Eigenschaften „sättigbar" und „sättigend" ergeben sich aber aus den *absoluten* „ungesättigt" und „gesättigt" nicht.[9] Frege nimmt sie also in Anspruch, ohne

---

[1] Ihnen entsprechen innerhalb der Zeichen „Ausdrücke von Funktionen" und „Zeichen von Gegenständen". (Was ist eine Funktion? S.665)

[2] Frege, G., FuB S.6, S.18

[3] Damit ist die Sättigung einer Funktion durch einen Gegenstand nicht belastet mit Existenz- oder Wahrheitsbedingungen. Auch der „Wertverlauf" (FuB S.23) einer Funktion ist daher unabhängig von diesen Fragen. Erst für *Begriffe*, d.h. für Funktionen, deren Wert ein Wahrheitswert (s.u.) ist, ist der „Umfang eines Begriffes" zu bilden als Klasse der Gegenstände, deren Wert ´W` ist. Der Begriffsumfang und erst recht das darauf basierende „Fallen eines Gegenstandes unter einen Begriff" – als Enthaltensein eines Gegenstandes in einem Begriffsumfang – sind also sekundär, obwohl Frege in dieser Beziehung „die logische Grundbeziehung" sieht. (AsuB S.25)

[4] Frege, G., FuB S.20

[5] Frege, G., FuB S.15. Wegen (1.3) ist damit insbesondere jeder *Gegenstand* Argument jedes *Begriffs*.

[6] Zur Fregeschen Analogie zwischen Ausdrücken und ihrer Bedeutung siehe seinen Brief an E. Husserl vom 24.5. 1891 (Bw S.35).

[7] M.H., EfK

[8] Daher muß Frege unter allen Umständen sichern, dass *jeder* Gegenstand Argument *jeder* Funktion erster Stufe ist. Er kann den Argumentbereich einer Funktion nicht auf gewisse Gegenstände einschränken, ohne seinen Ansatz zu zerstören. Damit verschließt er sich die Möglichkeit, durch eingeengte Argumentbereiche *Sinnbedingungen* einzuführen. Zur Lage eines Argumentbereichs echt innerhalb der Gegenstände vgl. Freges „Erweiterung dessen, was als Argument auftreten kann." (FuB S.29)

[9] Dies ist die bekannte Doppelfunktion der Substanz, einerseits Gegenstand (d.h. absolut), andrerseits Substrat (d.h. relativ) zu sein, in neuem Gewande.

sie verfügbar zu haben. Er *benötigt* für die Verbindung von Einheiten statt der 2 *absoluten*, die 3 *relativen* Eigenschaften „sättigbar", „sättigend" im Sinne von Argument, und „gesättigt" im Sinne von Wert sein. Die von ihm herausgestellten *absoluten* Charakterisierungen sind also für die *Verbindung* zwischen Funktion und Gegenstand nicht nur unzureichend, sondern sogar irrelevant.[1] Dieser Einwand gilt damit für jede Verbindung von Einheiten, die nur auf deren *absoluter* Charakterisierung basiert.[2]

Zweitens ist es nach Frege für jedes *Argument* als solches wesentlich, „mit jeder Funktion zusammen einen Gegenstand zu bilden".[3] Da jedoch eine Funktion i.a. *mehrere* Leerstellen hat, führt die Einsetzung eines Argumentes i.a. nur zu einer *Teil*sättigung und nicht zu der intendierten Totalsättigung, d.h. nicht zu einem „gesättigten" Wert; es „ergeben sich nämlich durch *teilweise Sättigung* aus Funktionen mit zwei Argumenten Funktionen mit einem Argumente."[4] Eine *total gesättigte* Einheit ergibt sich aus einer Funktion mit k Variablen erst nach Einsetzung von k Argumenten. Vervollständigt wird eine Funktion also nicht, wie Frege meint, durch *ein* Argument, d.h. einen *Einzel*gegenstand, sondern durch ein *k-Tupel* von Gegenständen.[5] Somit gilt entgegen Frege a) nicht *jedes* Argument sättigt, und b) nicht *nur* Argumente sättigen. Argumentstatus und Sättigung sind also entgegen Frege unabhängig voneinander. Die Sättigung betrifft stets die ganze Funktion, nicht einzelne Argumente.

Zum dritten ist die implizite Fregesche Annahme, bei Sättigung einer Funktion durch ein Argument träte stets nur ein *einziger* Wert auf, i.a. nicht erfüllt. So tritt z.B. als Wert der Fregeschen Beispielsfunktion ´$^2\sqrt{x}$` neben 2 auch –2 auf.[6] Um die Eindeutigkeit zu erhalten, muß man sie also an Funktionen als zusätzliche Bedingung stellen. Doch ist sie mit dem Fregeschen Ansatz nicht zu begreifen. Denn sie setzt die Trennung zwischen der Argument*stelle* des Wertes und dem *Wert* selbst voraus, die Frege aber nicht vornehmen darf, da er sonst die Sättigung relational begreifen müßte.[7] Danach ist auch die Fregesche Definitionsweise des Begriffs ´Begriff`, die ja auf *Werte* zurückgreift, unmöglich. Die Fregesche (Synthese-)Theorie ist also unhaltbar. Auch durch einen Ansatz, der auf einer absoluten Charakterisierung der Bestandteile eines Ganzen beruht, ist also das Synthese-Problem nicht lösbar.

Da sich somit alle Versionen der *Generierungs*-These, nach der aus vorgegebenen Teilen in irgendeiner Weise ein neues Ganzes zu gewinnen ist, als ungeeignet zur Lösung des Synthese-Problems erwiesen haben, ergibt sich, dass diese These unhaltbar ist. Damit sind auch alle Theorien unhaltbar, die die Generierungsthese voraussetzen. Dazu gehören etwa sämtliche Theorien des *Konstruktivismus*, insofern sie aus gegebenen Einheiten durch ein effektives Konstruktionsverfahren weitere Einheiten *erzeugen* zu können meinen. Das Synthese-Problem muß daher auf andere Weise gelöst werden.

---

[1] Andernfalls wäre die Fregesche Definition von „Funktionen zweiter Stufe" als „Funktionen, deren Argumente Funktionen [1.Stufe] sind und sein müssen," (FuB S.26 f) unmöglich. Diese seine Definition von Funktionen höherer Stufe beruht also darauf, dass sein ihr zugrundeliegender Ansatz einer Verbindung von Funktion und Gegenstand unhaltbar ist.

[2] Die Art dieser Charakterisierung ist also sekundär. Sekundär sind damit auch Einwände gegen die *Fregesche* Art der Abgrenzung von Funktion und Gegenstand. wie sie etwa von M. Black (in FoF) und W. Marshall (in FTFO) erhoben werden.

[3] Frege, G., FuB S.6

[4] Frege, G., LiM, S.150

[5] Am Schluß von FuB spricht Frege diese Frage zwar an, ohne aber ihre Brisanz zu erkennen.

[6] Frege, G., FuB S.12

[7] Daher findet sich bei Frege auch nicht der Aspekt der *Stelligkeit* einer Funktion, die von der Anzahl der *verschiedenen* Argumente *un*abhängig ist. Er unterscheidet ja Funktionen nicht nach der Zahl ihrer Argument*stellen*, sondern nach der Zahl ihrer verschiedenen *Argumente*. So ist nach Frege ´x+y` eine Funktion mit *zwei*, ´x+x` eine mit *einem* Argument.

§ 2 Analyse als Zerlegung

1. Zerlegungprinzipien. Dazu gehen wir nun statt des Synthese- zuerst das Analyse-Problem an. Zunächst präzisieren wir dafür das oben in (0.1) umrissene aristotelische rein extensionale, d.h. nur auf die Teile bezogene Verständnis von ´Analyse`: Wir untersuchen ausschließlich eine ´Analyse`, die der folgenden Bedingung genügt:

(2F1) Eine Analyse einer Einheit A führt nur dann zu den Bestandteilen A_i ($1 \leq i \leq n$ und $n \geq 2$), wenn *jeder* dieser Bestandteile *Teil* vom Ganzen A ist.

Bei jeder Analyse einer Einheit A zerfällt A also vollständig in Teile, d.h. in Teile und nichts als Teile von A. Jede so verstandenen Analyse nennen wir eine „(logische) Zerlegung“. Sie erlaubt es nun, das in (0.1) angesprochene rein extensionale Analyse-Verständnis *begrifflich* zu fassen.

Zunächst ist die Analyse durch diese Präzisierung an die *Mereologie*, dh. die Theorie der Teil-Ganzes-Beziehungen gebunden. So ergibt sich mit Satz 1.1 bereits

Satz 2.1 : Jeder bei einer Zerlegung auftretende Bestandteil ist eine Einheit.

Ein Zerbrechen einer Einheit in ein oder mehrere „Fragmente“, die Einheiten sind, und einen Rest, der *keine* Einheit ist, ist demnach a fortiori keine Zerlegung. In diesem Sinne sind etwa die semantischen Einheiten ´Ei`, ´Eis` und ´Reis` Fragmente der semantischen Einheit ´Reise`. Ebenso wie bei der Synthese ist also auch bei der Analyse primär zu sichern, dass als ihr Ergebnis nur *Einheiten* auftreten können. Dies ist mit Satz 2.1 gelungen. Sowohl Analyse als auch Synthese finden also ausschließlich zwischen logischen Einheiten statt. Zur weiteren Klärung des Begriffs der Analyse als *Zerlegung* betrachten wir zuerst einige exemplarische Zerlegungen.

Die *vollständige Disjunktion* einer Menge in Teilmengen liefert das vielleicht einfachste Beispiel einer Zerlegung; eine Menge M wird aufgeteilt in k nichtleere paarweise disjunkte Teilmengen M_i. Eine Menge {a,b,c,d} wäre so z.B. zerlegbar u.a.

(2.2) (i) in die Mengen {a,b} und {c,d},
(ii) in die Mengen {c} und {a,b,d},
(iii) in die Mengen {a}, {b,d} und {c}.

Eine Menge ist also je nach Anzahl der *Teilmengen* evtl. vielfach zerlegbar.

Weitere Beispiele bieten die Zerlegungen einer natürlichen Zahl. So ist etwa die Zahl ´12` zu zerlegen

(2.3) einerseits (i) in die Zahlen ´2` und ´5`,
(ii) in die Zahlen ´3` und ´4`
(iii) in die Zahlen ´2`, ´2` und ´3` (Primzahlzerlegung);

(2.4) andrerseits u.a. (i) in die Zahlen ´3` und ´9`,
(ii) in die Zahlen ´6` und ´6`,
(iii) in die Zahlen ´2`, ´4` und ´6`.

Wie die Beispiele zeigen, hat jede Zerlegung eine Bedingung zu erfüllen, die zuerst bei Euklid[1] und dann auch bei Plato im *Parmenides* auftritt.[2] Danach muß jeder Bestandteil *kleiner* sein als das Ganze. Doch ist diese *kleiner*-Relation nicht allgemein formulierbar. Wir schwächen sie daher ab und schärfen sie zur Forderung

(2F5) Bei jeder Zerlegung ist jedes Teil verschieden vom Ganzen.

Bei einer *Zerlegung* ist also das Ganze *nicht* als ein spezielles Teil seiner selbst aufzufassen. Eine Einheit ist demnach zwar i.a. nicht eindeutig, d.h. nur auf eine einzige Weise zerlegbar, jede Zerlegung führt aber erstens zu *mehreren* Einheiten, die zweitens je von ihr verschieden sind:

Satz 2.2 : In jeder Zerlegung wird *eine* Einheit auf *mehrere andere* reduziert.[3]

---

[1] Euklid, „Axiom“ 7 aus der ersten Buch der „Elemente“

[2] Plato, Par 131

[3] Diese müssen, wie die Beispiele zeigen, *nicht voneinander* verschieden sein.

Die in (2F1) genannte notwendige Bedingung, nach der jede Zerlegung einer Einheit zu Teilen dieser Einheit führt, ist aber nicht hinreichend; nicht jede beliebige Ansammlung von *Teilen* einer Einheit liefert eine Zerlegung dieser Einheit. So zerfällt das Zeichen, d.h. die semantische Einheit ´Mannschaft` offenbar vollständig in die beiden Zeichen ´Mann` und ´Schaft`; trotzdem liegt keine Analyse, d.h. keine logische Zerlegung vor. In ähnlicher Weise ergeben

(2.6) die Zahlen ´2`,´3`,´5`,´9` oder auch

(2.7) die Zahlen ´4`, ´6`

keine Zerlegung der Zahl ´12`, obgleich jede von ihnen Teil von ´12` ist. Die Angabe von Teilen, in die eine Einheit (vorgeblich) zerfällt, und sei sie noch so suggestiv liefert noch keine Zerlegung dieser Einheit. Um zu Zerlegungen zu gelangen, müssen wir daher über die rein extensionalen Untersuchungen hinausgehen.

2. Zur Identität von Zerlegungen. Dazu gehen wir nun umgekehrt aus von Zerlegungen. Gemäß Satz 2.2 kann man sie danach einteilen, in *wie viele* Teile sie zerlegen. Durch die Vorgabe der *Anzahl* der Teile werden aber i.a. nicht die Teile selbst bestimmt, denn wie aus den Beispielen hervorgeht, kann z.B. dieselbe Einheit auf mehrere Weisen in *zwei* Teile zerlegbar sein. Da für die Zerlegung einer Einheit gerade deren Ergebnis, d.h. die sich bei der Zerlegung ergebenden Bestandteile relevant sind, ist z.B. die Zerlegung von ´12` in ´2` und ´6` verschieden von der in ´3` und ´4`. Damit gilt

Satz 2.3 : (1. Identitätsbedingung) Zerlegungen einer Einheit sind identisch höchtens dann, wenn sie diese in dieselben Bestandteile zerlegen.

Diese notwendige Bedingung ist aber nicht hinreichend; eine Zerlegung einer Einheit ist durch diese Einheit und seine Bestandteile i.a. *nicht* eindeutig bestimmt. Dies wird deutlich, wenn man zerlegbare von unzerlegbaren Einheiten abzugrenzen versucht. Dabei zeigt sich etwa bei der Suche nach unzerlegbaren natürlichen Zahlen, dass der Begriff der Zerlegbarkeit und damit der der Zerlegung noch nicht klar ist. Denn die Zahl ´2` z.B. ist sowohl unzerlegbar (als Primzahl) als auch zerlegbar (in ´1` und ´1`). Da der Satz vom Widerspruch ausschließt, dass dies bzgl. desselben Aspekts möglich ist, müssen *mehrere* Zerlegungsbegriffe auf die Zahl ´2` anwendbar sein; bzgl. des einen ist ´2` unzerlegbar, bzgl. des anderen zerlegbar. Daraus folgt

Satz 2.4 : Jede (potentielle) Zerlegung einer Einheit in zwei Teile erfolgt unter einem bestimmten Aspekt.

Eine Einheit ist aber i.a. nicht nur bzgl. eines *einzigen* Aspektes zerlegbar. So wird etwa die Zahl ´12` in (2.3) unter einem anderen Aspekt zerlegt als in (2.4). Daher gilt

Satz 2.5 : Dieselbe Einheit kann unter mehreren Aspekten zerlegbar sein.

Insbesondere kann dieselbe Einheit sogar unter verschiedenen Aspekten in *dieselben* Bestandteile zerfallen. So ist etwa die Zahl ´4` unter zwei verschiedenen Aspekten in die dieselben Bestandteile ´2` und ´2` zerlegbar. Demnach gilt

Satz 2.6 : (2. Identitätsbedingung) Zerlegungen einer Einheit sind identisch höchstens dann, wenn sie zu unter *demselben* Aspekt erfolgen.

Auch diese Bedingung ist aber nicht hinreichend. Denn Zerlegungen derselben Einheit in zwei Teile können unter demselben Aspekt erfolgen und dennoch verschieden sein. So ist z.B. in (1.3) ´12` unter demselben Aspekt sowohl in ´2` und ´6` als auch ´3` und ´4` zerlegbar. Nach Satz 2.3 sind diese Zerlegungen verschieden. Da der Aspekt einer Zerlegung aber alle neben dem Ganzen und seinen Bestandteilen relevanten Bestimmungsparameter abdeckt, sind die beiden *einzeln* notwendigen Identitätsbedingungen zusammen hinreichend:

Theorem 2.7 : Zerlegungen einer Einheit sind identisch genau dann, wenn sie

(i) unter demselben Aspekt erfolgen und

(ii) in dieselben Bestandteile zerlegen.

3. Zerlegungsaspekte. Weil Bestandteile stets an eine Zerlegung und damit nach Satz 2.4 an einen Aspekt gebunden sind, können sie nicht absolut, d.h. als solche ohne einen Aspekt auftreten. Selbst *unzerlegbare* Einheiten, d.h. Einheiten ohne Bestandteile, setzen einen Aspekt voraus, da die Frage nach der Zerlegbarkeit ja nur in bezug auf Aspekte zu stellen ist. Wir versuchen daher zuerst, den Charakter solcher Aspekte zu ermitteln.

Dazu betrachten wir die o.g. Beispielszerlegungen in zwei Teile. Nach Satz 2.4 liegt ihnen je ein Aspekt zugrunde. Der Aspekt ist aber nicht an eine einzige Zerlegung gebunden, sondern es ist z.B. ´12` unter demselben Aspekt in ´6` und ´2` zerlegbar wie ´6` in ´3` und ´2`. Somit gilt

Satz 2.8 : Verschiedene Einheiten können unter demselben Aspekt zerlegbar sein.

In den Beispielen (2.2) sind dies etwa die Mengen, in (2.3) f die natürlichen Zahlen. Damit sind

zum einen verschiedene Einheiten unter demselben Aspekt, (Satz 2.8)
zum andern dieselbe Einheit unter verschiedenen Aspekten (Satz 2.5)

in Bestandteile zerlegbar. Dieses Schema ist das der Attribution:

Zum einen können verschiedene Einheiten unter dasselbe Attribut,
zum andern dieselbe Einheit unter verschiedene Attribute fallen.

Daher werden wir im folgenden den Aspekt einer Zerlegung stets als ein Attribut aufzufassen versuchen. Demnach sind Zerlegungen, die unter demselben *Aspekt* erfolgen, als Zerlegungen unter demselben *Attribut* zu sehen. Getragen wird jedes solche Attribut zum einen von der zu zerlegenden Einheit. Zum zweiten muß es nach Satz 2.3 aber auch die bei einer Zerlegung anfallenden k Bestandteile erfassen. Da bei jeder Zerlegung mindestens zwei Bestandteile auftreten, muß das Attribut daher jeweils das eines (k+1)-Tupels von Einheiten mit $k \geq 2$ und daher in jedem Fall eine (mindestens 3-stellige) Relation sein. Jeden Aspekt, unter dem eine Zerlegung erfolgen kann, können wir deshalb nicht nur als ein Attribut, sondern genauer als eine Relation auffassen. Dies führt uns zu der folgenden

(2.8) **These :** Jede Zerlegung einer Einheit ist begreifbar vermöge einer *Relation* (zwischen der Einheit und ihren Zerlegungsbestandteilen).

Nun muß natürlich nicht *jede* Relation geeignet sein, einer Zerlegung zugrundezuliegen; jede Relation aber, bzgl. derer eine Zerlegung möglich ist, nennen wir eine „Zerlegungsrelation“.

Da wir unsere Untersuchungen auf die Analyse als *Zerlegung* beschränken und die Zerlegung nach dieser These an *Relationen* zu binden ist, ergibt sich für die weiteren Überlegungen ein erster Rahmen: Das Problem der Analyse liegt innerhalb der Theorie der Relationen und muß somit dort gelöst werden können.[1] Wir versuchen daher eine Theorie der Analyse als Theorie von Zerlegungsrelationen zu entwerfen.

§ 3 Zerlegungsrelationen als Attribute

1. Zerlegung als Relation zwischen vorliegenden Einheiten. Dazu erläutern wir kurz die Attribution und die Eigenart von Relationen bzgl. der Attribution:[2] Jedes Attribut ist auf mindestens eine Einheit, ein Item zu ihm, anwendbar und bestimmt mit ihm zusammen eindeutig einen „(Sach)verhalt“; ein Attribut, ein Item und ein Ver-

[1] Dabei werden wir nach demselben Verfahren vorgehen, das wir für eine spezielle Relation, die Kontrarietät, an anderer Stelle (s. M.H., Kon) angewandt haben.
[2] Ausführlicher wird diese an Frege orientierte Theorie der Attribution erklärt in M.H., EfK

halt sind aneinander gebunden und treten nur gemeinsam auf. Die Klasse der Items eines Attributes ist der „Itembereich“ dieses Attributes.[1]

Relationen sind *mehrstellige* Attribute, d.h. Attribute mit k Argumentstellen, deren Items k-Tupel sind. Die Klasse von Einheiten, die Argument der i-ten Stelle ist, heißt „Argumentbereich“ dieser Stelle der Relation. Jede der k Stellen einer k-stelligen Relation hat also einen eigenen Argumentbereich. Jede Einheit kann in verschiedenen Argumentbereichen derselben oder verschiedener Relationen liegen.[2] Liegt sie aber in zwei Bereichen, dann stimmen diese überein, denn es gilt eine strikte Alternative

Lemma 3.1 : Zwei Argumentbereiche sind entweder gleich oder disjunkt.[3]

Für die Argumente gleicher Argumentbereiche gilt darüber hinaus

Lemma 3.2 : Tritt eine Kombination von Argumenten desselben Argumentbereichs in einem Item auf, dann jede Kombination von Argumenten dieses Bereichs.

Da jede Relation, insofern sie ein Attribut ist, auf mindestens eine Einheit anwendbar ist,[4] ist der Itembereich einer Relation niemals leer. Ihre Extension kann dagegen durchaus leer sein. Sie umfaßt ja genau diejenigen Items, die tatsächlich in dieser Relation zueinander stehen, d.h. mit dieser Relation als Attribut jeweils eine *Tatsache* bilden. Danach gilt

Lemma 3.3 : Die Extension (jeder Relation) ist in deren Itembereich enthalten.

Da mit einem Argumentbereich auch der Itembereich einer Relation leer wäre, folgt

Lemma 3.4 : Kein Argumentbereich einer Relation ist leer.

Insofern jede Zerlegungsrelation ein Attribut ist, ist neben ihrer Stelligkeit auch ihr Itembereich anzugeben. Er besteht nach Definition aus Items, die je Tupel von Argumenten dieser Relation sind. Als Argumente speziell von *Zerlegungsrelationen* treten nun sämtliche Einheiten auf, die Ganzes oder Bestandteile eines Ganzen sind. Sie müssen aber nicht Argumente ein und derselben Relation sein, denn ein Bestandteil bzgl. einer Relation R_1 mag bzgl. R_1 unzerlegbar, bzgl. einer anderen Relation R_2 aber weiter zerlegbar sein. Jedes Teil ist aber Argument mindestens *einer* Zerlegungsrelation. Wir dürfen daher unsere allgemeinen Untersuchungen auf eine beliebige *einzelne* Zerlegungsrelation beschränken.

Da die Stelligkeit jeder Relation eine endliche Konstante ist, zerlegt jede Zerlegungsrelation bei jeder Anwendung in dieselbe Anzahl von Bestandteilen.

Satz 3.5 : Bei jeder Zerlegung treten nur endlich viele Bestandteile auf.

Zerlegt sie in k Bestandteile, stellt sie eine Beziehung her zwischen der zu zerlegenden Einheit und den k davon verschiedenen Bestandteilen, ist also (k+1)-stellig. Weil bei jeder Zerlegung mindestens zwei Bestandteile auftreten, folgt

Satz 3.6 : Jede Zerlegungsrelation ist mindestens 3-stellig.

Die Rolle der zu zerlegenden Einheit nennen wir darin stets die des „Totals“ und weisen sie o.E. stets der letzten Argumentstelle der betreffenden Relation zu. Die Rollen der anderen k Argumente der Relation heißen „Segmente“; genauer nennen wir die Rolle des Segmentes in der i-ten Argumentstelle die des „i-ten Segmentes“, den Argumentbereich dieser Stelle den „(i-ten) Segmentbereich“. Damit folgt

Satz 3.7 : Genau die Totale (einer Zerlegungsrelation) sind potentiell zerlegbar.

---

[1] Mit Frege kann den Itembereich eines Attributes, der die Einheiten umfaßt, die mit ihm zusammen einen Sachverhalt bilden, unterscheiden von seiner „Extension“, die die Einheiten umfaßt, die mit ihm zusammen eine „Tatsache“, d.h. einen bestehenden Sachverhalt bilden.

[2] Doch muß man – im Gegensatz etwa zu Frege (FuB a.a.O. S 20) – nicht *jeden* Gegenstand als Argument jeder Relation zulassen.

[3] Dies ergibt sich z.B. daraus, dass als *Argumentbereiche* (k-stelliger Relationen) nur *Itembereiche* (1-stelliger Begriffe) in Frage kommen und dass Itembereiche von Begriffen entweder gleich oder disjunkt sind, da nur dann eine Komplexbildung wie etwa die Konjunktion von Begriffen möglich ist.

Zu weiteren Erläuterungen der *Soziabilität* von Begriffen siehe M.H., Kon.

[4] Vgl. dazu M.H., EfK

Demnach bildet jedes Total einer Zerlegungsrelation mit (mindestens) je einem Argument aus den anderen Argumentbereichen dieser Relation als (k+1)-Tupel ein *Item* der Relation, denn nach Lemma 3.4 ist ja keiner der Argumentbereiche leer. Als Argumente innerhalb eines Items sind die k+1 Einheiten damit gleichrangig. Innerhalb einer Relation hat ja keine Rolle als solche einen Vorzug vor einer anderen. Mit dieser Einsicht ist für das Verhältnis eines Ganzen zu seinen Bestandteilen eine entscheidende Wende vollzogen: vom ´*entweder – oder*` zum ´*sowohl – als auch*`. Anders als z.B. Plato im ´Parmenides` annimmt, schließt das Vorkommen eines Ganzen das seiner Bestandteile nicht aus, sondern sie implizieren einander. Denn insofern sie Rollen derselben Relation einnehmen, können sie nur gemeinsam auftreten:

Theorem 3.8 : Ein Ganzes und seine Bestandteile unter einer Zerlegung treten (als solche) nur gemeinsam auf.

In bezug auf Zerlegungsrelationen sind demnach die Analyse und ihre Umkehrung, die Synthese, nur als Leserichtungen und nicht als Prozesse zu betrachten; ein Ganzes wird weder durch die Analyse *zerstört* noch durch die Synthese *produziert*. Damit ist das Synthese-Problem – in dem Sinne wie es in § 1 gelöst werden sollte – als Scheinproblem aufgezeigt. Es bestand ja in der scheinbaren Notwendigkeit, auf irgendeine Weise zwei Einheiten zu verbinden, um *dadurch* eine dritte zu *gewinnen*. Nach Theorem 3.8 und Satz 1.1 besteht diese Notwendigkeit jedoch nicht; die Inhalte jeder Rolle einer Zerlegungsrelation und somit auch die der Rolle des Totals müssen als Einheiten *vorausgesetzt* werden. Jede Relation kann nur *bereits vorliegende* Einheiten in Beziehung zueinander setzen.

2. Zur Gliederung der Zerlegungsrelationen. Nun untersuchen wir, *welche* der Relationen Zerlegungsrelationen sind. Dabei geben wir Bedingungen an, die jede Zerlegungsrelation erfüllen muß. Zuerst wenden wir uns dabei ihrem *Itembereich* zu; jedes Attribut und somit auch jede Relation hat ja genau einen Itembereich. Wir betrachten also zunächst allgemein die Gestalt der Itembereiche von Zerlegungsrelationen.

Weil jede Einheit geignet ist, die Rolle des Totals oder eines Segments zu übernehmen, und somit jede Einheit Argument einer Stelle irgendeiner Zerlegungsrelation sein kann, ist die Gestalt der Itembereiche von Zerlegungsrelationen nicht *inhaltlich* durch Bedingungen an einzelne Argumentbereiche, sondern nur *formal*, d.h. durch Bedingungen an das *Verhältnis* ihrer Argumentbereiche anzugeben. Wir werden die Zerlegungsrelationen daher in bezug auf dieses Verhältnis gliedern.

Dabei berücksichtigen wir zunächst die Forderung (2F5): Ist für eine Zerlegungsrelation der Durchschnitt des Argumentbereichs des Totals mit denen der Segmente leer, nennen wir die Relation eine „Sprungrelation“, ist er nicht leer, eine „Schrittrelation“. Danach erfüllt jede Sprungrelation für beliebige Argumentbereiche die Forderung (2F5). Für Schrittrelationen dagegen folgt nach Lemma 3.1 :

Satz 3.9 : Bei jeder Schrittrelation stimmt der Argumentbereich des Totals mit dem mindestens eines Segments überein.

Für sie muß also Forderung (2F5) durch geeignete Beschränkung ihres Itembereiches erfüllt werden. Dazu unterscheiden wir Zerlegungsrelationen danach, ob der Durchschnitt ihrer *Segmentbereiche* leer ist oder nicht. Im ersten Fall nennen wir die Relation eine „Spalt-, im zweiten eine „Spreizrelation“. Wieder mit Lemma 3.1 folgt

Satz 3.10 : Bei jeder Spreizrelation stimmen ihre Segmentbereiche überein.

Aufgrund der Gestalt ihrer *Argumentbereiche* ergibt sich also folgendes 4-Felder-Schema sämtlicher Zerlegungsrelationen:

(3.1)

	Spreizrelationen	Spaltrelationen
Schritt-relationen	(T,...,T,T)	(A_1,...,T,T)

Sprung- relationen $(A_1,..., A_1,T)$ $(A_1,...,A_k,T)$

Nun kann eine Einheit, wie in (2.3)f gesehen, durchaus Total *mehrerer* Zerlegungsrelationen sein. Prinzipiell kann auch jedes *Segment* (einer Relation) zudem Total (einer weiteren Relation) sein. Ist erstere dabei eine *Sprung*relation, dann muß die zweite nach Definition von ihr verschieden sein. Ist erstere eine *Schritt*relation, *können* beide Relationen gleich sein. In diesem Fall ist die Relation „iterierbar". Schrittrelationen lassen also eine schrittweise Zerlegung unter demselben Aspekt zu:

Satz 3.11 : *Jede* Schritt- und *keine* Sprungrelation ist iterierbar.

Jede Iteration kann aber ein Ende haben; ist eine Einheit bzgl. einer Schrittrelation zwar ein Total, jedoch nicht zerlegbar, d.h. nicht Total in einer Tatsache, dann heißt sie ein „Individuum". Jede Einheit, die bzgl. *keiner* einzigen Schrittrelation mehr zerlegbar, d.h. bzgl. *jeder* (auf sie anwendbaren) Schrittrelation ein Individuum ist, heißt ein „Atom". Atome sind aber nicht notwendig unzerlegbar, sondern es gilt

Satz 3.12 : Atome sind höchstens durch Sprungrelationen zerlegbar.[1]

Die Segmente eines Atomes (bzgl. einer Sprungrelation) sind jedoch nach Definition ausschließlich Einheiten, die keine Totale (bzgl. dieser Relation) sind; eine Sprungrelation ist also stets transzendierend,[2] d.h. es gilt

Satz 3.13 : Jede Zerlegung bzgl. einer Sprungrelation führt zu Segmenten, die bzgl. dieser Relation weder zerlegbar noch unzerlegbar sind.

Damit kann jede Analyse in einzelne Zerlegungsschritte aufgelöst werden. Für diese ergibt sich eine durch *Sprung*relationen induzierte Terrassierung; auf jeder Ebene ist eine (evtl.) iterierte Zerlegung durch *Schritt*relationen möglich. Die Frage, ob bzw. welche Atome *generell unzerlegbar* sind, ist nicht zu beantworten. Sie ist aber auch unerheblich, da durch eine Zerlegung Einheiten nicht erzeugt, sondern nur in eine Relation gebracht werden.

3. Beispiele von Zerlegungsrelationen Die durch (2F5) erzwungenen Itembereichsbeschränkungen werden wir nun anhand exemplarischer Zerlegungsrelationen erläutern. Solche Beispiele sind aus den in (2.2)ff genannten Beispielen von *Zerlegungen* zu gewinnen. Nach Satz 2.4 und (2.6) erfolgt ja jede Zerlegung bzgl. genau einer Relation. Demnach haben wir nun die jeweils zugrundeliegenden Zerlegungsrelationen anzugeben, denn jedes Beispiel einer Zerlegung kann nur als solches gelten, wenn die zugrundeliegende *Zerlegungsrelation* angegeben wird.

Die Zerlegungen in (2.4) erfolgen je unter dem Aspekt der Addition „+",
die in (2.3) unter dem Aspekt der Multiplikation „·",
die in (2.2) unter dem Aspekt der mengentheoretischen Vereinigung[3] „$\cup$".

Jede dieser Relationen ist eine Schritt- und eine Spreizrelation, d.h. eine „Binnenrelation"; die Addition, die Multiplikation und die Vereinigung sind je 3-stellige Binnenrelationen. Das Total der Addition heißt „Summe", jedes Segment „Summand", das Total der Multiplikation heißt „Produkt", jedes Segment „Faktor".

Jede Binnenrelation hat ja nur *einen* Argumentbereich. Der jeweilige Argumentbereich der genannten Beispielsbinnenrelationen steht noch aus. Es ist dies nicht (notwendig) der maximale Bereich, auf dem die jeweiligen Relationen definiert sind.

(a) So ist für die Addition auf den natürlichen Zahlen *einschließlich* der ´0` die Forderung (2F5) nicht erfüllt, denn es gilt ja 0+0=0. Somit gilt lediglich

---

[1] Doch kann natürlich auch ein *Nicht-Individuum* Total einer Sprungrelation sein.

[2] Diese Verschiedenartigkeit bzgl. der Teilbarkeit gewisser Einheiten hebt bereits B. Pascal hervor z.B. mit seiner Gegenüberstellung von „unteilbar" und „ausgedehnt" (vgG a.a.O. S.80ff), wenngleich er sie nicht der jeweiligen Teilung(srelation), sondern den Einheiten selbst zuschreibt.

[3] Sie ist ja wie z.B. die Konjunktion eine 2-stellige Operation und damit eine 3-stellige Relation.

Bemerkung 3.14 : Die Addition ist eine 3-stellige Binnenrelationen auf $\mathbb{N}_0$.

Danach sind ´+(1,8,3)`, ´+(3,4,12)`, ´+(0,12,12)`, ´+(3,9,12)` und ´+(6,6,12)` je zwar (Sach)verhalte mit der Addition als Attribut. Nur die *drei* letzten dieser Verhalte sind aber Tatsachen. Nur die *zwei* letzten sind Zerlegungen. Sie entsprechen den in den Beispielen (2.4) (i),(ii) dargelegten Zerlegungen der Zahl ´12`. Die Addition ist aber iterierbar; so ist ´6` zerlegbar in ´2` und ´4`. Insgesamt ist ´12` damit gemäß (2.4) (iii) zerlegbar u.a. in ´2`, ´4` und ´6`. Durch weitere Zerlegung ergibt sich

Folgerung 3.15 : Nur *eine* natürliche Zahl ist bzgl. der Addition ein Individuum, die Zahl ´1`.

Einerseits ermöglicht die Iterierbarkeit der Zerlegung einer Einheit bzgl. einer k-stelligen Relation nun, dass diese Einheit (bzgl. dieser Relation) in k und mehr Teile zerlegbar ist, andrerseits setzt sie der Zerlegung auch Grenzen:

Satz 3.16 : Jede Zerlegung einer Einheit bzgl. einer Relation führt ausschließlich zu Teilen, die zusammen als Segmente (bei evtl. iterierter Anwendung) bzgl. dieser Relation die Einheit als Total ergeben.

(b) In gleicher Weise ist für die Multiplikation auf den natürlichen Zahlen *einschließlich* der ´0` und der ´1` wegen n·1=n und n·0=0 die Forderung (2F5) nicht erfüllt. Somit gilt lediglich

Bemerkung 3.17 : Die Multiplikation ist eine 3-stellige Binnenrelationen auf $\mathbb{N}_1$.[1]

Danach sind ´·(3,9,12)`, ´·(12,1,12)`, ´·(2,6,12)` und ´·(3,4,12)` zwar Sachverhalte mit der Multiplikation als Attribut. Nur die *drei* letzten dieser Verhalte sind aber Tatsachen, nur die *zwei* letzten Zerlegungen. Sie entsprechen den in (2.3)(i),(ii) dargelegten Zerlegungen der Zahl ´12`. Weiter ist die Addition iterierbar; so ist die Zahl ´6` zerlegbar in ´2` und ´3`. Insgesamt ist die Zahl ´12` damit bzgl. der Multiplikation gemäß (2.3)(iii) zerlegbar u.a. in ´2`, ´3` und ´6`. Jede natürliche Zahl, die bzgl. der Multiplikation ein Individuum ist, heißt eine „Primzahl“.

(c) Auch für die uneingeschränkte *Vereinigung* von Mengen ist wegen M∪M=M oder auch M∪∅=M Forderung (2F5) nicht erfüllt. Sie ist daher i.a. *keine* Zerlegungsrelation. Schränken wir aber den Itembereich der Vereinigung von Mengen auf zueinander disjunkte *Teilmengen* $A_i \neq \emptyset$ einer Menge M ein, ist (2F5) erfüllt. Wir nennen die so definierte 3-stellige Relation „Mengenaddition“. Dafür gilt dann

Bemerkung 3.18 : Die Mengenaddition ist eine 3-stellige Binnenrelation.

Danach sind {a,b}∪{c,d}={a,b,d}, {a,b,d}∪{c,d}={a,b,c,d}, {a,b}∪{c,d}={a,b,c,d} und {c}∪{a,b,d}={a,b,c,d}zwar Verhalte mit der Mengenaddition als Attribut. *Tatsachen* sind aber nur die letzten *drei*, *Zerlegungen* gar nur die letzten *zwei* davon. Sie entsprechen den Zerlegungen der Menge {a,b,c,d} aus den Beispielen (2.2) (i),(ii).

Zudem ist die Mengenaddition iterierbar; so gilt etwa {a,b}∪{d}={a,b,d}, sodaß die Menge {a,b,c,d} insgesamt entsprechend (2.2) (iii) zerlegbar ist u.a. in die drei Mengen {c},{a,b} und {d}. *Individuen* bzgl. der Mengenaddition sind genau die 1-elementigen Teilmengen.

Alle diese Relationen sind Binnen- und damit Schritt- und *Spreiz*relationen. Ein Beispiel einer Schritt- und *Spalt*relation ist jede *äußere Verknüpfung*, so etwa die Relation ´Ms(-,-,-)`, durch die wie z.B. in Ms(**a**,s,**b**) ein Vektor **a** mit einer Zahl s multipliziert wird, sodass sich ein Vektor **b** ergibt, oder auch die Relation ´Mod(-,-,-)`, die Attribute zu Attributen modifiziert, wie z.B. in Mod(ist ein Geiger,gut,ist ein guter Geiger).

Bei *Schritt*relationen ist nach Definition stets mindestens ein Segment gleichartig mit dem Total. Bei *Sprung*relationen ist dies nicht der Fall; sie mögen daher zunächst

[1] $\mathbb{N}_0$ bzw. $\mathbb{N}_1$ sind dabei die natürlichen Zahlen ohne die Zahl ´0` bzw. ohne die Zahlen ´0` und ´1`.

irritieren. Ein Beispiel einer Sprung- und *Spreiz*relation ist die „skalare Multiplikation“ in der Geometrie.[1] Danach ist ein Vektor ein Segment einer reellen Zahl.

Ein Beispiel einer Sprung- und *Spalt*relation ist die *Prädikation*. Sie werden wir ausführlicher in § 5 behandeln.

§ 4 *Eigenschaften* von Zerlegungsrelationen.

1. Relationseigenschaften. Eine Besonderheit von Relationen ist es, dass jede von ihnen nicht nur die Rolle eines *Attributes* innehat, sondern auch die eines *Items*, sie trägt nämlich auch gewisse Attribute, ihre „Relationseigenschaften“.[2] Diese beschreiben das Verhältnis der Argumente innerhalb eines Items zueinander. Daher gilt

Lemma 4.1 : Jede Relationseigenschaft ist nur auf Relationen einer bestimmten Stelligkeit anwendbar.

Formulierbar ist jede solche Relationseigenschaft in der Sprache des Prädikatenkalküls 1.Stufe PK I.[3] Beispiele solcher Eigenschaften sind etwa

$(x)(y).r(x,y)\rightarrow r(y,x)$ ´ist symmetrisch(r)` und

$(x)(y)(z).\ [r(x,y)\wedge r(y,z)] \rightarrow r(x,z)$ ´ist transitiv(r)`.

Diese sind im Gegensatz zu *komplexen* Eigenschaften wie etwa ´rot∨schwer(x)` und ´symmetrisch ∧ transitiv(r)` je einfach. Jede komplexe Eigenschaft ist auf einfache gleicher Stelligkeit reduzierbar.[4] Die einfachen zerfallen in Klassen zueinander pertinenter Attribute. Die Attribute einer Pertinenzklasse – etwa die der Farben – sind entweder einander untergeordnet oder zueinander konträr. Nach dem Kontrarietätstheorem trägt jedes Item aus jeder Pertinenzklasse darauf anwendbarer Attribute (bis auf Unterordnung) genau ein Attribut.[5]

Bei der Suche nach Attributen von *Zerlegungsrelationen* können wir uns daher auf einfache Attribute beschränken. Nach Lemma 4.1 muß diese Suche für Relationen jeder fixen Stelligkeit separat erfolgen. Da Zerlegungsrelationen mindestens 3-stellig sind, fallen Eigenschaften wie die Symmetrie und die Transitivität, die nur *2-stelligen* Relationen zukommen können, als ihre möglichen Attribute bereits aus. Wir beschränken hier unsere Untersuchungen exemplarisch auf Eigenschaften *3-stelliger* Zerlegungsrelationen.

2. Zur Definition von ´Zerlegungsrelation`. Zunächst suchen wir nach *Merkmalen* von Zerlegungsrelationen, d.h. nach Eigenschaften, die *jeder* Zerlegungsrelation notwendig zukommen. Da die Argumentbereiche einer Zerlegungsrelation gemäß (3.1) sowohl gleich als auch verschieden sein können, kommen dafür nur Eigenschaften in Frage, die Gleichheit *und* Verschiedenheit der Argumentbereiche zulassen. Eine solche Eigenschaft wird in der Forderung (2F5) genannt. In PK I ist sie formulierbar als

(4.1) $(x)(y)(z).\ r(x,y,z) \mid (x=z \vee y=z)$[6] ´ist rechtsdisjunkt(r)`

Weitere weiteres Merkmal ist die Eindeutigkeit. Denn erstens zerfallen (bzgl. derselben Relation) verschiedene Totale stets in verschiedene Segmente, sodass durch die Segmente das Total eindeutig bestimmt ist, d.h. auf jede Zerlegungsrelation trifft zu

(4.2) $(x)(y)(z)(z').\ [r(x)(y)(z)\wedge r(x,y,z')] \rightarrow z=z'$ ist „rechtseindeutig(r)“

[1] Dabei werden zwei *Vektoren* **a** und **b**, die einen Winkel δ einschließen, zu einer reellen *Zahl* s verbunden. Bestimmt ist diese Zahl als $s = |a|\cdot|b|\cdot\cos\delta$. Umgekehrt ist jede reelle Zahl s also bzgl. der skalaren Multiplikation (nicht eindeutig) in zwei Vektoren zerlegbar.

[2] Zur Erläuterung siehe M.H., EfA. Borbaki-Ansatz

[3] Ausführlich thematisiert haben wir die Relationsattribute in M.H., FAA

[4] Auch die (aussagenlogischen) Junktionen sind je Zerlegungsrelationen und zwar Binnenrelationen.

[5] Diese Ergebnisse werden in M.H., Kon aufgezeigt.

[6] ´|` steht dabei für den sog. „Shefferschen Strich“.

Zweitens ist bei jeder Zerlegung bzgl. einer (k+1)-stelligen Zerlegungsrelation durch das Total und k-1 Segmente das k-te Segment eindeutig bestimmt, d.h. auf jede Zerlegungsrelation trifft zu

(4.3) $(x)(y)(y')(z).\ [r(x)(y)(z) \wedge r(x,y',z)] \rightarrow y=y'$ ist „zentraleindeutig(r)“ und

(4.4) $(x)(x')(y)(z).\ [r(x)(y)(u) \wedge r(x',y,z)] \rightarrow x=x'$ ist „linkseindeutig“(r)“

Damit gilt

Satz 4.2 : Jede Zerlegungsrelation ist in jeder Stelle eindeutig.[1]

Eine weitere mögliche Eigenschaft von Zerlegungsrelationen ist die Totalität. Sie ist jedoch für sie nicht charakteristisch und damit kein Merkmal; eine Zerlegungsrelation muß bzgl. keiner Stelle *total* sein. Es *muß* also *nicht* auf *jede* Zerlegungsrelation zutreffen

(4.5) $(y)(z)(\exists x).\ r(x)(y)(z)$ ist „rechtsbitotal(r)“ oder

(4.6) $(x)(z)(\exists y).\ r(x)(y)(z)$ ist „außenbitotal(r)“ oder

(4.7) $(x)(y)(\exists z).\ r(x)(y)(z)$ ist „linksbitotal(r)“.

Denn mit (4.5) f träfe andernfalls auf *Schritt*relationen und damit insbesondere auf Binnenrelationen zu

$(y)(\exists x).\ r(x)(y)(y)$ bzw. $(x)(\exists y).\ r(x)(y)(x)$;

damit ergäbe sich ein Widerspruch zu (4.1).

Es ist also bzgl. einer fixen Zerlegungsrelation i.a. *nicht* jedes Segment auch Segment jedes Totals. Weiter muß nach Lemma 3.2 zwar für *Schritt*-, nicht aber für *Sprung*relationen jedes mögliche Tupel von Argumenten überhaupt ein Item der Relation sein. Damit ist eine Sprungrelation a fortiori nicht notwendig linksbitotal. Zwei vorgegebene Segmente (bzgl. einer Zerlegungsrelation) müssen also nicht Segmente desselben Totals sein. Insgesamt folgt somit

Satz 4.3 : Eine Zerlegungsrelation *muß* bzgl. keiner Stelle total sein.

Damit kann man durch die Merkmale von Zerlegungsrelationen den Begriff *Zerlegungsrelation* als komplexe Relationseigenschaft definieren:[2]

(4.8) ´ist eine (3-stellige) Zerlegungsrelation(r)`

:= ´ist rechtsdisjunkt $\wedge$ rechts- $\wedge$ links- $\wedge$ zentraleindeutig(r)`.

3. Akzidentelle Eigenschaften von Zerlegungsrelationen. Wenn die Totalität auch keine wesentliche Eigenschaft von Zerlegungsrelationen ist, akzidentell kann sie etwa für *Sprung*relationen in jeder Stelle zutreffen. So gilt z.B.

Bemerkung 4.4 : Die skalare Multiplikation ist in jeder Stelle total.

Für *Schritt*relationen kann dagegen wegen (4.1) Totalität höchstens als Links-bitotalität zutreffen. In diesem Fall ist die 3-stellige Zerlegungsrelation eine Verknüpfung[3]. So sind z.B. die Addition auf N_0, die Multiplikation auf N_1 und die Mengenaddition je Verknüpfungen. Zudem sind sie je kommutativ und assoziativ tragen damit die Struktur einer „kommutativen Halbgruppe“.

Doch kann eine Verknüpfung nur dann eine Zerlegungsrelation sein, wenn bzgl. ihrer kein neutrales Element auftritt, d.h. wenn auf sie die Relationseigenschaft

$(\exists y)(x).\ r(x,y,x)$ ist „linksteilduplikativ(r)“

nicht zutrifft, denn diese Eigenschaft ist offenbar konträr zur Eigenschaft (4.1).

Damit können wir einen kleinen Einblick geben, wie die Struktur der (3-stelligen) Zerlegungsrelationen innerhalb der Strukturen 3-stelliger Relationen gelegen ist:

m *A* ist rechtsdisjunkt(r)

[1] Jedoch ist eine Zerlegungsrelation i.a. nicht *bieindeutig*. So ist z.B. die Multiplikation nicht links-bieindeutig, denn die Zahl ´12` z.B. ist bzgl. ihrer sowohl in ´2` und ´6` als auch in ´3` und ´4` zerlegbar. Durch das Total sind also ihre beiden Segmente nicht eindeutig bestimmt.

[2] Weitere Merkmale wollen wir nicht ausschließen, sodass diese Definition evtl. noch einzuengen ist.

[3] ´ist eine Verknüpfung (r) ` ist ja definiert als ´ist linksbitotal $\wedge$ rechtseindeutig (r)`.

e *r* ist zentraleindeutig(r)
h *g* ist eine Zerlegungsrelation(r)
r *.* ist linkseindeutig(r)
e *b* ist rechtseindeutig(r)
r *e* ist eine Verknüpfung(r)
e *r.* ist linksbitotal(r)
----------------- ist eine komm. Halbgruppe(r)
e *A* ist assoziativ(r)
i *r.* ist linkskommutativ(r)
n *b.* ist linksteilduplikativ(r)

4. Zerlegungs- und Teil-Ganzes-Relationen. Die Zerlegungsrelationen als (mindestens) *3-stellige* Relationen erlauben nun auch eine tiefere Einsicht in die *2-stelligen* Teil-Ganzes-Beziehungen. Zunächst liefert ja offensichtlich jede Verkürzung einer (k+1)-stelligen Zerlegungsrelation auf eine 2-stellige Relation, die nur die Rolle des Totals und die eines (beliebigen) Segmentes beibehält, eine Teil-Ganzes-Relation, d.h. es gilt

Satz 4.5 : Jedes Segment ist Teil.

Wir vertreten nun zudem die Umkehrung dieses Satzes mit der

Definition : Eine Teil-Ganzes-Beziehung ist eine Verkürzung einer Zerlegungsrelation auf zwei Rollen, die des Totals und die eines Segmentes.

Damit wird die bisher als undefinierbare Basis-Relation geltende Teil-Ganzes-Relation von Zerlegungsrelationen abhängig und dadurch bedeutend klarer. Sie ist nämlich nicht mehr fast beliebig anzunehmen, sondern in die Konstruktion von Zerlegungsrelationen eingebunden; und der Status eines Segmentes ist – aufgrund seiner Bindung an (mindestens) *zwei* andere Rollen – bedeutend rigider als der eines – nur an *eine* andere Rolle gebundenen – Teiles. Daraus ergibt sich mit Satz 4.5 die Mereologie als Einschränkung der Segmenttheorie:

Theorem 4.6 : Genau die Segmente (bzgl. einer Zerlegungsrelation) sind Teile.

Damit sind Probleme der Mereologie außerhalb ihrer, nämlich in der Segmenttheorie zu lösen. Bisher ist es nämlich z.B. unklar, ob bzw. unter welchen Bedingungen eine Teilbeziehung transitiv ist. Jede Zustimmung oder Ablehnung erfolgt rein intuitiv; die Mereologie erlaubte weder eine Begründung noch eine Widerlegung dieser Annahme. Mit der o.g. Definition dagegen zeigt sich, dass diese Eigenschaft einer allgemeinen vagen Teil-Relation gar nicht zukommen kann, weil die Voraussetzung dafür, die Übereinstimmung der Argumentbereiche, für *Sprung*relationen nicht vorliegt. Weil ein Segment eines Segments eines Totals also i.a. nicht Segment dieses Totals ist, gilt demnach

Bemerkung 4.7 : Ein Teil eines Teiles einer Einheit ist i.a. kein Teil dieser Einheit.

Transitiv kann also nur einer Teil-Ganzes-Relation T(-,-) sein, die aus einer *Schritt*-relation hervorgeht. Dabei gilt für eine Relation T die Transitivität, d.h.

$$(x)(y)(z).\ (T(x,y) \wedge T(y,z)) \rightarrow T(x,z),$$

wenn für die ihr entsprechende 3-stellige Zerlegungsrelation Z gilt

$$(x)(u)(y)(v)(z)(\exists w).\ (Z(x,u,y) \wedge Z(y,v,z)) \rightarrow Z(x,w,z).$$

Diese Eigenschaft hat die Zerlegungsrelation Z offenbar genau dann, wenn sie assoziativ ist. Somit ergibt sich

Satz 4.8 : Eine (2-stellige) Teilrelation ist transitiv genau dann, wenn ihre (3-stellige) Mutterrelation assoziativ ist.

In gleicher Weise ist auch die Frage zu behandeln, unter welchen Bedingungen *eine* Zerlegung einer Einheit bzgl. einer (3+n)-stelligen Zerlegungsrelation ersetzt werden kann durch *mehrere* Zerlegungen bzgl. Zerlegungsrelationen geringerer Stelligkeit

§ 5 Zur Analyse einfacher Aussagen

1. *Aussage*zerlegung als *Satz*zerlegung. Die Stärke der soeben im Ansatz entworfenen Analyse-Theorie wollen wir nun an einem Beispiel demonstrieren. Dazu bietet sich das das Problem der Analyse einfacher Aussagen an, das bis heute innerhalb der logischen Fragen einen zentralen Platz einnimmt. Dabei soll primär nicht die *Lösung* dieses Problems im Focus stehen, sondern der *Weg*, der zu dieser Lösung führt.

Zunächst ist dafür zu sichern, dass einfache Aussagen überhaupt einer Analyse zugänglich sind. Diese Voraussetzung ist aber erfüllt, da sie – wie in § 2.3 gesehen – Argumente der Konjunktion, d.h. einer Binnen-Erhalt-Relation und damit gemäß Satz 2.9 analysierbar sind.

Bzgl. der Konjunktion sind sie jedoch nicht weiter zerlegbar und somit Individuen. Innerhalb sämtlicher Aussagen sind *einfache* Aussagen nämlich dadurch charakterisierbar, dass sie bzgl. jeder Schrittrelation unzerlegbar und daher sogar Atome sind.[1] Andrerseits muß jede einfache Aussage, um überhaupt wahrheitsfähig zu sein, weiter zerlegbar sein.[2] Eine solche Zerlegung muß also nach Satz 2.5, wenn sie überhaupt aufgrund einer 3-stelligen Relation erfolgen soll, dann bzgl. einer Sprungrelation möglich sein. Wir versuchen nun, eine solche Sprungrelation anzugeben.

Dabei ist zuerst der *Status* von Aussagen zu berücksichtigen. Da ihnen je ein Wahrheitswert zuzuordnen ist und jede solche Zuordnung eine Interpretation voraussetzt, sind sie zum einen je Zeichen, zum andern müssen Einheiten, die einer Interpretation unterliegen sollen, zuvor einen syntaktischen Status haben. Als syntaktische Einheiten heißen sie „<u>Ausdrücke</u>“. Ausdrücke, die interpretiert Aussagen sind, heißen „<u>Aussagesätze</u>“, kurz „<u>Sätze</u>“.[3] Dieselbe Einheit tritt also in zwei Rollen verschiedener Relatationen auf. Zum einen ist sie „<u>Interpretandum</u>“ und zwar Aussage, d.i. eine Rolle einer 2-stelligen Interpretationsbeziehung, zum andern ist sie Ausdruck und zwar Satz, d.i. eine Rolle in einer syntaktischen Beziehung, die wir klären wollen. Aussagen sind also semantische Einheiten, Sätze nicht.

Für die Zerlegbarkeit eines Zeichens ist aber die Semantik nicht wesentlich. Sie wäre es nämlich nur dann, wenn ein Zeichen in Zeichen zerlegbar wäre, ohne dass die unterliegenden Ausdrücke in entsprechende Ausdrücke zerlegbar wären. Das ist aber unmöglich, da ein Zeichen nur eine Einheit ist, insofern ihm ein Ausdruck, d.h. bereits eine Einheit zugrundeliegt.

Auch die Zerlegung einer Aussage ist damit nicht wesentlich auf die Semantik bezogen, sondern bezieht sich auf den zugrundeliegenden Satz. Sie ist somit als *syntaktische* Operation zu begreifen; Aussagen sind danach nicht als solche, d.h. aufgrund ihrer semantischen Rolle, zu zerlegen, sondern nur, insofern ihre Träger zudem Sätze sind, d.h. Inhaber einer syntaktischen Rolle sind. Damit gilt

Satz 5.1 : Zerlegbar ist primär nicht eine Aussage, sondern ein Satz.

Den eigentlichen Gegenstand einer Zerlegung bilden also nicht Aussagen, sondern Sätze. Für *komplexe* Sätze sind solche Zerlegungen zu einfachen Sätzen geläufig; sie erfolgen nämlich z.B. in bezug auf logische Junktionen wie ´und` oder ´wenn – dann`, wie die Sprachen des Aussagenkalküls zeigen.[4] Für *einfache* Sätze ist eine solche Zerlegung nun zu suchen. Da Zerlegungen nur in bezug auf Zerlegungsrela-

---

[1] Auf diese Weise werden *einfache* Aussagen aufgrund von Spreizrelationen als spezielle Aussagen begriffen, wie Primzahlen aufgrund der Multiplikation als spezielle natürliche Zahlen begriffen werden.

[2] Dass „Falschheit und Wahrheit an Verbindung und Trennung geknüpft ist“, hat bereits Aristoteles (Int 16[a]12-13) festgestellt. Gemeinhin gilt die Wahrheitsfähigkeit ja sogar als *definierend* für eine Aussage.

[3] Offenbar können diese Definitionen, da zirkulär, nur vorläufig sein.

[4] Diese bilden ja die Basis für wahrheitswertfreie Herleitungskalküle.

tionen möglich sind, besteht somit das Problem der Analyse einfacher Sätze nach Satz 3.4 darin, eine Zerlegungsrelation anzugeben, deren Totale einfache Sätze sind.

2. Die Prädikation. Dazu sind zunächst die oben angestellten Überlegungen von Aussagen auf Sätze zu übertragen, da sie gemäß Satz 5.1 primär dafür gelten. Insbesondere sind primär nicht einfache Aussagen *Atome*, sondern einfache *Sätze*. Weiter ist es nicht erst für einfache Aussagen, sondern bereits für einfache Sätze wesentlich, zerlegbar zu sein. Andrerseits müssen nach Lemma 2.1 Einheiten als solche nicht zerlegbar sein. Demnach sind einfache Sätze ausschließlich als solche zerlegbar, nicht aber schon, insofern sie *Einheiten* sind. In gleicher Weise ist z.B. die Zahl ´12` als solche nicht zerlegbar. Zerlegbar ist sie nur, insofern sie ein Produkt, eine Summe o.ä. ist. Also ist ´einfacher Satz` ebenso wie ´Summe` und ´Produkt` nicht als absoluter Begriff, sondern als Total bzgl. einer bestimmten Relation zu begreifen. Damit ergibt sich

Satz 5.2 : Einfache Sätze sind als solche bzgl. genau einer Relation zerlegbar.

Wir setzen diese Relation als 3-stellig an und nennen sie „<u>Prädikation</u>". Sie ist somit eine Zerlegungsrelation. Da sie auf einfache Sätze anwendbar ist und diese Atome sind, gilt nach Satz 3.4

Satz 5.3 : Die Prädikation ist eine Sprungrelation.

Jedes Argument ihrer ersten Stelle nennen wir ein „<u>Prädikat</u>", jedes ihrer zweiten ein „<u>Subjekt</u>", jedes ihrer dritten einen „<u>einfachen (Aussage)satz</u>". Jeder einfache Satz ist demnach (bzgl. der Prädikation) zerlegbar in Subjekt und Prädikat. Bei seiner Zerlegung fallen also stets genau diese zwei „<u>Satzteile</u>" an.[1] Daraus folgt

Theorem 5.4 : ´Einfacher Satz`, ´Subjekt` und ´Prädikat` sind keine (absoluten) Begriffe, sondern *Rollen* (der Prädikation).[2]

Insbesondere wird danach *´einfacher Satz`* nicht auf einen Begriff des Satzes gestützt, sondern direkt als (Total, d.h. als) Rolle einer Relation aufgefaßt.[3] Da die Prädikation nach Satz 5.2 die einzige Relation ist, bzgl. der einfache Sätze zerlegbar sind, muß sie bei der Zerlegung eines einfachen Satzes nicht eigens erwähnt werden.

Nun ist das Verhältnis der Argumentbereiche der Prädikation zu untersuchen. Deren Unterscheidung basiert ja auf der Unterscheidung der Rollen der Prädikation. Damit ist von vornherein jede Theorie verfehlt, die diese Unterscheidung nicht leisten kann und etwa ´einfachen Satz` und ´Subjekt` gleichsetzt.[4] Daher ist z.B. der Ansatz Freges abzulehnen, der, wie in § 1.5 gezeigt, Sätze und Subjekte, d.h. in seinem Bild «gesättigte» und «sättigende» Einheiten nicht unterscheiden kann.

Wenn aber in der Tradition ein Satz von Subjekt und Prädikat unterschieden, und gar behauptet wird, dass Sätze weder Subjekte noch Prädikate sein können, dann ohne Angabe logischer Gründe. Diese Gründe ergeben sich nun aus dem Status der Prädikation; da sie nach Satz 5.3 eine Sprungrelation ist, folgt nämlich zunächst

Satz 5.5 : Ein einfacher Satz kann weder Subjekt noch Prädikat sein.[5]

---

[1] Die Gestalt dieser Satzteile ist dabei noch offen. So müssen z.B. Prädikate weder Atome sein, noch müssen sie 1-stellige Begriffe sein.

[2] Da nach Satz 4.2 jede Zerlegungsrelation bzgl. jeder ihrer Argumentstellen eindeutig ist, bestimmen Subjekt und Prädikat je eindeutig einen einfachen Satz, ein einfacher Satz und ein Subjekt ein Prädikat, ein einfacher Satz und ein Prädikat ein Subjekt.

[3] Dann ist umgekehrt *´Satz`* auf *´einfacher Satz`* zu stützen.

[4] Dies entspricht der verhängnisvollen Gleichsetzung von Sachverhalt und Gegenstand.

[5] Damit erhält diese These eine nichtempirische Begründung. Üblicherweise wird sie lediglich als Tatsachenbehauptung formuliert. So behauptet z.B. auch Quine ohne Begründung, dass „Termini" – als Subjekte und Prädikate – den „Sätzen" gegenüberstehen, wobei „Termini niemals Sätze sind." Denn „[einfache] Teilsätze [sind] in noch kleinere Teile, aus denen sie zusammengesetzt sind – nicht mehr Sätze, sondern Termini –, zu zerlegen." (Quine, GdL, S.99) Nicht gutheißen müssen wir dazu sein

Während diese erste Frage somit leicht zu beantworten ist, war die Frage, ob ein Prädikat auch Subjekt sein kann, d.h. ob die Prädikation ein Spreiz- oder Spaltrelation ist, seit jeher Gegenstand ausufernder Diskussionen. Ihr gilt die folgende Untersuchung.

3. Die Prädikationsthesen. Im Zentrum dieser Diskussionen standen wie Geach herausgearbeitet hat,[1] stets zwei Prädiktionsthesen einander gegenüber, die von Plato[2] aufgestellte

(5.1) **Zwei-Klassen-These:** Jeder einfache Satz ist zerlegbar in zwei verschiedenartige Teile, in onoma und rhema, wobei kein onoma ein rhema ist.

und die von Aristoteles seit der 1.Analytik vertretene

(5.2) **Austauschbarkeitsthese**[3]**:** Jedes Prädikat kann auch Subjekt, jedes Subjekt auch Prädikat sein.

Nach der platonischen These sind in jedem einfachen Satz genau zwei Klassen mit je einem Exemplar, nach der aristotelischen These genau eine Klasse mit zwei Exemplaren (horoi) vertreten. Es kommen also entweder zwei diskunkte oder nur eine einzige Klasse von Einheiten vor. Wie die Einheiten jeweils charakterisiert sind, ist sekundär, wenn sie nur absolut, d.h. ohne Bezug aufeinander charakterisiert werden.

Die platonische These, die in der Schrift ´De interpretatione` auch noch von Aristoteles vertreten wurde, fand seit seiner Wende zur These (5.2) bis zum Ende des 19.Jahrhunderts keine maßgeblichen Anhänger mehr. Diese Wende war durch seine Entdeckung des Syllogismus motiviert. Nur These (5.2) schien nämlich die Möglichkeit zu bieten, einfache Sätze wie ´Löwen sind Tiere` und ´Tiere sind Lebewesen`, die ein Syllogismus beide voraussetzen muß, nebeneinander zu bilden. Deshalb und wohl auch wegen der Autorität Aristoteles´ dominierte diese auf (5.2) basierende Auffassung in verschiedenen Modifikationen bis Frege. Erst dieser verfocht in seinem – oben in § 1.5 skizzierten – neuartigen Ansatz wieder die These (5.1), indem er *Begriff* und *Gegenstand* absolut einander gegenüberstellte.[4] Argumente gegen die These (3.2) waren nämlich seit langem bekannt, sie konnten aber erst wirksam werden, als eine revidierte Auffassung von Sätzen der Form ´Löwen sind Tiere`[5] das Motiv für das Festhalten an dieser These entkräftete.

Damit scheint das Urteil über die Thesen (5.1) und (5.2) festzustehen. So sieht z.B. Geach in der aristotelischen Wende zur These (5.2) „die Ursünde in der Theorie der Attribution“[6]. Die Rückwendung zur Zwei-Klassen-These korrigiert danach diesen Fehler. Dementsprechend gehen alle exponierten modernen Prädikationstheorien von dieser These aus. Sie wird z.B. sowohl von Frege wie von Quine vertreten, wenngleich sie Subjekte und Prädikate auf unterschiedliche Weise charakterisieren. Frege verwendet dazu eine Dichotomie zwischen «gesättigten» und «ungesättigten» Einheiten, Quine eine zwischen allgemeinen und singulären Termini. Bei ihm „verknüpft

---

dort genanntes Kriterium: “Die Eigentümlichkeit eines Terminus ist es, auf einige Gegenstände – oder einen oder keinen – zuzutreffen und auf den Rest nicht.“

[1] Geach, Peter, HCL, S. 44 ff

[2] Plato, Sop 261c – 262 d, Kra a.a.O. 425 a

[3] „Jeder Term, der in einer Proposition prädikativ auftritt, kann zu einem Subjekt-Term in einer anderen Prädikation [...] werden. Ich werde dies «Aristoteles´ Austauschbarkeitsthese» nennen.“ (Geach, P., HCL, S. 47)

[4] Auch er unterscheidet ja wie Plato zwei Klassen von Einheiten, in die jeder einfache Satz zerfällt, wobei er allerdings jede Einheit der einen mit jeder der ananderen zu kombinieren gestattet. Frege, G., a.a.O. FuB S. 20

[5] So wird z.B. dieser Satz nicht wie bei Aristoteles als singulärer, sondern als genereller Satz aufgefaßt der die Gestalt hat: ´(x). (x ist Löwe $\rightarrow$ x ist Tier)`.

[6] Geach, P., HCL, S.44

die Prädikation einen *allgemeinen Terminus* und einen *singulären Terminus*, um einen Satz zu bilden.“.[1]

Doch beruht diese Verurteilung der These (5.2) zugunsten der These (5.1) auf einem oberflächlichen rein klassentheoretischen der beiden Thesen, der ihren Kern verkennt. Während sich nämlich die platonische These in der bloßen Klasseneinteilung erschöpft, kommt in der aristotelischen der Aspekt der *Reihenfolge* hinzu: Bei Plato bilden *zwei ungeordnete Einheiten*, bei Aristoteles ein *geordnetes Paar* einen einfachen Satz. Denn für Syllogismen ist es ja wichtig, zwischen Sätzen wie ´Löwen sind Tiere` und ´Tiere sind Löwen` unterscheiden zu können. Die bloße Klasseneinteilung der platonischen These (5.1) kann aber diese Unterscheidung nicht liefern. Aristoteles sah sich daher aufgrund seiner (falschen) Theorie über die in Syllogismen auftretenden Sätze genötigt, dieselbe Einheit – im o.g. Beispiel ´Tiere` – nicht in zwei *Klassen*, sondern in zwei *Funktionen* auftreten zu lassen: Sie müssen sowohl als Subjekte wie als Prädikate fungieren können. Somit muß er implizit Subjekt und Prädikat nicht als Klassen, sondern als Rollen (einer Relation) auffassen, wenn er dies auch nicht thematisiert hat. Indem er sich von der These (5.1) zu These (5.2) wandte, vollzog er also primär nicht eine Wende von einer zwei- zu einer Ein-Klassen-These, sondern von einer Klassen- zu einer Relationsthese, und damit von einer *absoluten* zu einer *relativen* Charakterisierung von Subjekt und Prädikat. Sekundär stellt er demnach mit (5.2) – anders als Plato – eine These nicht über Klassen, sondern über die Besetzung von Rollen auf.

Aristoteles hat aber das Revolutionäre seines *relationalen* Ansatzes nicht erkannt. Er hat nur dessen Vorteile in Anspruch genommen, seine tiefen Voraussetzungen aber nicht begriffen. Dazu hätte er nämlich explizit zwischen Rollen und ihren Inhabern unterscheiden müssen. Doch hat er lediglich Rollen voneinander unterschieden, eine Rolle als solche aber nicht erfaßt und somit insbesondere die Frage ihrer möglichen Argumente nicht gesehen.[2]

Auch seine Kritiker bis hin zu Geach übersehen diese fundamentale Umorientierung. Ihre Verurteilung der aristotelischen These legt fälschlich auch diese wie der platonischen These eine Klassenauffassung zugrunde und ist somit unhaltbar. Um die beiden Thesen miteinander vergleichen zu können, muß also auch die platonische (5.1) relational begriffen und demnach ersetzt werden[3] durch die

(5.3) **Ausschließungsthese:** Kein Subjekt kann ein Prädikat sein.

4. Zum Charakter der Prädikationsthesen. Die Thesen (5.2) und (5.3) nehmen beide auf dieselben Rollen Bezug, die des Subjektes und die des Prädikates. Sie beziehen sich also beide auf dieselbe Relation, die Prädikation. Offen ist jedoch noch, woran sie Bedingungen stellen, an deren *Itembereich* oder an deren *Extension*. Beide Thesen müssen allerdings in gleicher Weise begriffen werden, um in einem Gegensatz zu stehen. Zu fragen ist also, ob sie Bedingungen dafür angeben, welche Einheiten Subjekte und Prädikate zueinander sein *können*, oder dafür, welche es *sind*.[4]

---

[1] Denn die „Prädikation ist die grundlegende Verknüpfung, in der allgemeine und singuläre Termini ihre kontrastierenden Rollen finden: «Mama ist eine Frau» oder schematisch ausgedrückt, «a ist F», wobei «a» für einen singulären und «F» für einen allgemeinen Terminus steht.“ (Quine, WuG, S.174) Singuläre und allgemeine Termini werden dazu durch ihre *semantisch* unterschiedlichen Aufgaben charakterisiert. (WuG, S.165) Ein syntaktischer Unterschied soll also mit einem semantischen begründet werden, eine recht fragwürdige Abfolge.

[2] Einheit und Argument (einer Rolle) fallen bei ihm undifferenziert in eins. Daher glaubt er Einheiten – und nicht nur Argumente – durch ihre Rolle bestimmen zu können.

[3] Weder die Prädikationstheorie von Frege noch die von Quine gestatten eine solche Revision. Beide gehen nämlich wesentlich davon aus, dass die Prädikation *keine* Relation ist, ungeachtet dessen, dass Quine in ihr eine „Verknüpfung“ sieht.

[4] Diese Unterscheidung wird ja in der Tradition nicht gemacht.

Im ersten Fall geben beide Thesen gemäß den Überlegungen aus § 3.2 Antwort auf die Frage nach dem Verhältnis der *Segmentbereiche* der (Prädikation). Die Austauschbarkeitsthese (5.2) begreift sie dann als identisch, die Ausschließungsthese (5.3) als disjunkt; erstere sieht in der Prädikation also eine Spreiz-, letztere eine Spaltrelation. Mit den beiden Thesen werden danach in diesem ersten Falle zwei Sinne der Prädikation expliziert. Da die Disjunktion der Zerlegungen in Spreiz- und Spaltrelationen vollständig ist, folgt

Satz 5.6 : Die Prädikation ist entweder eine Spreiz- oder eine Spaltrelation.

Keine dieser beiden Auffassungen ist als solche unhaltbar. Die Frage, welche von ihnen *richtig* ist, ist an dieser Stelle sinnlos, da sie ein fixes Verständnis der Prädikation voraussetzt, während doch ein solches Verständnis durch diese Überlegungen erst noch gewonnen werden soll. Primär ist hier also nicht eine Tatsachen-, sondern eine Konstruktionsdiskussion zu führen. Welche der beiden Auffassungen angenommen wird, ist somit in einem größeren Zusammenhang, etwa aufgrund ihrer Voraussetzungen oder der mit ihnen verbundenen Weiterungen zu entscheiden.

Solche Weiterungen bietet z.B. die von Geach aufgenommene traditionelle Kritik an der Austauschbarkeitsthese (5.2). Sie geht nämlich (implizit) vom zweiten Fall, d.h. nicht von der item-, sondern von der extensionsbezogenen Sicht aus. Einen typischen Einwand aus dieser Sicht liefert etwa

Lemma 5.7 : Nicht jedes Subjekt *ist* in Prädikat.[1]

Da nach Lemma 3.2 der Itembereich eine Relation ihrer Extension vorangeht, muß allerdings auch jedes *extensions*bezogene Verständnis der beiden Prädikationsthesen zuvor den Itembereich und damit die Argumentbereiche der Prädikation fixieren. Wer also die Thesen (5.2) und (5.3) *extensional* auffaßt, muß nach Satz 5.6 auch *item*bezogen eine der beiden Thesen akzeptieren. Mehr noch, es gilt

Satz 5.8 : Ein *extensionsbezogenes* Verständnis beider Prädikationsthesen setzt voraus, dass *itembezogen* die *Austauschbarkeitsthese* gilt, d.h. dass die Prädikation eine Spreizrelation ist.

Denn zum einen wird die *extensionale Austauschbarkeitsthese* (5.2) *itembezogen* nicht von (3.3), sondern nur von der Austauschbarkeitsthese (5.2) ermöglicht. Zum andern ist aber auch die *extensionale Ausschließungsthese* (5.3) mit der itembezogenen Austauschbarkeitsthese vereinbar, insofern dann einerseits die (nichtleeren) Argumentbereiche von Subjekt und Prädikat übereinstimmen (These (5.2)), andrerseits kein Subjekt tatsächlich ein Prädikat ist (These (5.3)).

Damit ist die aristotelische Austauschbarkeitsthese rehabilitiert. Die Unterscheidung zwischen Itembereich und Extension eröffnet nämlich die Möglichkeit, ihr (itembezogen) zugleich mit der platonischen Ausschließungsthese (extensional) zustimmen zu können. Wir können diese Überlegungen hier nicht vertiefen.

5. Items und Eigenschaften der Prädikation. Auch die Frage, welche Einheiten Argumente der einzelnen Stellen der Prädikation sind, ob also z.B. ´ist größer als Paul` ein Satzteil ist, werden wir hier nicht behandeln. Daher kann auch die Frage, welche Einheiten zusammen als Argumentetripel ein Item der Prädikation bilden, ob also z.B. das Tripel (íst größer als Paul`, ´Karl`,´Karl ist größer als Paul`) ein Item der Prädikation ist, hier nicht beantwortet werden. Diese Fragen erfordern weitergehende Überlegungen und werden an anderer Stelle angegangen werden.

[1] So ist z.B. ´Sokrates` nicht negierbar und damit kein Prädikat, denn jedes Prädikat ist negierbar. Aus diesen Einwänden folgt aber – anders als Geach meint – nicht die Ausschließungsthese (5.3). Denn bezogen auf die Extension schöpfen die beiden Thesen (5.2)f nicht alle möglichen Fälle aus. Zwischen den beiden durch sie charakterisierten Extremen sind noch viele andere Fälle möglich. So könnten einige Einheiten sowohl Subjekt als auch Prädikat sein.

Wohl aber können wir Eigenschaften der Prädikation angeben. Gesucht sind also Eigenschaften, die über die allgemeinen Eigenschaften von Spreizrelationen hinausgehen. Wir beschränken uns dabei auf Beispiele von Bedingungen an das Verhätnis einzelner Subjekte und Prädikate zueinander. Eine erste solche Bedingung besagt, dass Subjekt und Prädikat eines einfachen Satzes stets verschieden sind.[1] Diese Eigenschaft ist in der Sprache PK I formulierbar als

(5.4) $(x)(y)(z).\ \text{Präd}(x,y,z) \mid x=y.$

Ein Prädikat ist somit nie Prädikat seiner selbst.[2]

Weiter ist ein Prädikat g eines Prädikates f eines Subjektes a nicht Prädikat von a, d.h. in PK I

(5.5) $(x)(y)(z)(u)(v)(w).\ [\text{Präd}(x,y,z)\wedge\text{Präd}(u,x,v)] \mid \text{Präd}(u,y,w)$

Eine weitere derartige Bedingung wurde in Lemma 5.7 genannt. Danach ist nicht jedes Subjekt ein Prädikat. Sie ist in PK I formulierbar als

(5.6) $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(u)(v).\ \text{Präd}(x,y,z) \mid \text{Präd}(y,u,v)$

Über (5.4) hinaus geht die Bedingung,dass Prädikate desselben Subjekts nicht *zueinander* im Verhältnis von Subjekt und Prädikat stehen können.[3] Sie ist in PK I formulierbar als

(5.7) $(x)(y)(u)(v)(w)(t).\ [\text{Präd}(x,u,v)\wedge\text{Präd}(y,u,w)] \mid \text{Präd}(x,y,t)$

Mit weiteren Eigenschaften mag die Prädikation noch genauer zu charakterisieren sein. Jede (Zerlegungs)relation ist ja auf diese Weise vollständig beschreibbar.[4] Damit ist für weitere Untersuchungen der Prädikation ein Weg gewiesen. Wir wollen ihn aber hier nicht fortsetzen.

Ergebnis. Jede Analyse zerlegt eine Einheit vollständig in Einheiten, jede Synthese setzt eine Einheit ohne Rest aus gegebenen Einheiten zusammen. Daher werden Analyse und Synthese traditionell als Umkehrungen voneinander gesehen. Doch gelten sie nicht als gleichrangig oder gleichartig: Die Analyse wird – prototypisch schon bei Aristoteles in (0.1) – rein extensional betrachtet, denn als Analyse einer Einheit A gilt bereits die Angabe ihrer (bei einer Zerlegung auftretenden) Bestandteile. Für eine Synthese dagegen gilt ein rein extensionales Vorgehen nicht als ausreichend; die Angabe von Einheiten reicht nicht hin, um aus ihnen als vorgeblichen Bestandteilen ein Ganzes zu bilden, sondern es muß noch ein Mittel bzw. eine Bedingung genannt werden, wodurch die Bildung dieses Ganzen gesichert wird. Denn andernfalls wäre – wie in § 1.4 versucht – jedes Agglomerat von Einheiten ein Ganzes. Diese traditionellen Ansätze sind aber, wie in § 1 am Beispiel einfacher Sätze gezeigt, sämtlich ungenügend, gerade weil sie von der Asymmetrie zwischen Analyse und Synthese ausgehen und meinen in der Synthese aus geeigneten Einheiten ein neues Ganzes *hervorbringen* zu müssen. Diese *Generierungsthese*, die den (potentiellen) Teilen eine Priorität vor dem (zu produzierenden) Ganzen einräumt, ist prinzipiell unhaltbar. Sie führt zum Bradleyschen Regress, oder ihr mißlingt die Einheitsbildung.

Wie in der Analyse kann also auch in der Synthese keine Einheit *produziert* werden, sondern für beide Verfahren müssen die beteiligten Einheiten bereits vorliegen. Eine Analyse bzw. eine Synthese bringt sie lediglich (als Ganzes und seine Bestandteile) in *Beziehung* zueinander. Jede solche Beziehung begreifen wir als eine Relation. Zunächst muß demnach für jede Analyse bzw. jede Synthese überhaupt eine solche Relation angegeben werden; die pure Angabe eines Ganzen und seinen Teilen reicht

[1] Vgl. z.B. Geach, P., HCL S.45

[2] Diese Bedingung wird bereits im platonischen Parmenides genannt.

[3] Diese Eigenschaft entspricht der aristotelischen «Akzidens-Akzidens-Bedingung» bzgl. der Attribution. Aristoteles, Met IV, Kap 4 (1007^b2-3)

[4] Siehe dazu M.H., FAA

dafür nicht. Weiter muß die Relation demnach – anders als in den bisherigen Versuchen mit *2-stelligen* Relationen – mindestens *3-stellig* sein; wir nennen sie eine *Zerlegungsrelation*. Damit muß jede Analyse und jede Synthese bzgl. einer solchen Relation erfolgen. Das zu zerlegende Ganze und seine Bestandteile besetzen dann die Rollen in diesen Relationen, nämlich die des *Totals* und die der *Segmente*. Diese Bindung von Analyse und Synthese an Relationen hat zwei gravierende Folgen: Insofern Total und Segment nämlich je Rollen derselben Relation sind, treten sie erstens nur gemeinsam auf (Theorem 3.8) und sind zweitens als solche gleichrangig.

Danach ermöglicht jede Zerlegungsrelation sowohl eine Analyse als auch eine Synthese. So ist etwa auf der Basis der Multiplikation der Sachverhalt ´·(2,6,12)` sowohl als Ergebnis der Synthese der Zahlen ´2` und ´6` zu sehen, als auch als Ergebnis der Analyse der Zahl ´12` in der (nicht eindeutigen) Division. Analyse und Synthese sind also lediglich als verschiedene Bestimmungsrichtungen aufzufassen.

Weiter ist aufgrund der Bindung an Relationen begreifbar, dass bzgl. *verschiedener* Relationen dieselbe Einheit in verschiedene Einheiten zerlegbar ist (z.B. im Falle ´·(2,6,12)` und ´+(2,10,12)`) und dieselben Einheiten die Bestandteile verschiedener Ganzer sind (z.B. im Falle ´·(2,6,12)` und ´+(2,6,8)`).

Als Relationen sind Zerlegungsrelationen nun zunächst nach ihrer Stelligkeit einzuteilen. Weiter sind sie als Relationen sowohl Attribute zu gewissen Items als auch Items zu gewissen Attributen. Damit sind sie unter beiden Gesichtspunkten zu charakterisieren: Als *Attribute* können wir sie – da wir die Attribution nicht extensional, sondern intensional betrachten, also nicht von Tatsachen, sondern von Sachverhalten ausgehen – untergliedern nach dem Verhältnis der Argumentbereiche ihrer Rollen Dabei ist unabhängig vom Inhalt der Argumentbereiche – gemäß (3.1) – eine doppelte Gliederung möglich, zum einen danach, ob der Argumentbereich des Totals disjunkt ist zu dem der Segmente (*Sprungrelationen*) oder nicht (*Schrittrelationen*), zum andern ob die Argumentbereiche der Segmente gleich sind (*Spreizrelationen*) oder nicht (*Spaltrelationen*). Als *Items* tragen sie je für sie wesentliche Attribute. Durch diese Merkmale können wir daher gemäß (4.8) den Begriff ´ist eine Zerlegungsrelation` als komplexen Begriff aus einfachen Relationseigenschaften definieren.

Endlich ist es möglich, die Teil-Ganzes-Relationen als (auf zwei Rollen) verkürzte Zerlegungsrelationen zu definieren und damit die Mereologie als Grenzfall der Segmenttheorie zu begreifen.

Abschließend haben wir (in § 5) die Differenzierungsmöglichkeiten unseres Ansatzes am Beispiel der Prädikation ausführlich demonstriert und damit die in Verruf geratene aristotelische Austauschbarkeitsthese (5.2), nach der jedes Subjekt auch Prädikat, jedes Prädikat auch Subjekt sein kann, rehabilitieren können.

Die Prädikation ist aber nur eine unter unübersehbar vielen Zerlegungsrelationen. Die durch sie ermöglichten Zerlegungen haben keinen Vorrang vor Zerlegungen, die auf anderen Zerlegungsrelationen gründen. Jede hat durch ihre Argumentbereiche eine gewisse Reichweite. Insofern sie aber in ein formales Kategoriensystem eingeordnet werden können,[1] sind die Zerlegungsrelationen und somit die auf ihnen fußenden Zerlegungen jedoch zu gliedern. Damit stellt sich nun die Eingangsfrage nach einer fundamentalen Analyse in anderer Weise, nämlich als Frage nach einer Zerlegungsrelation, deren Argumentbereiche sämtliche Einheiten umfassen. Eine solche Relation würde dann die Voraussetzung schaffen für die von Leibniz intendierte *scientia generalis*.

Verwendete Literatur:

[1] Ein solches Kategoriensystem wird entworfen in M.H., EfK.

Aristoteles,

App Analytica Priora et Posteriora, ed. W.D.Ross und L.Minio-Paluello. Oxford 1964

Int De Interpretatione, Aristotelis Categoriae et Liber de Interpretatione, ed. L.Minio-Paluello. Oxford 1948

Kat Kategorienschrift, Aristotelis Categoriae et Liber de Interpretatione, ed. L.Minio-Paluello. Oxford 1948

Met Metaphysik, Aristotle's Metaphysics, a revised text with introduction and commentary by W.D. Ross. Oxford 1970

Black, Max,

FoF Frege on Functions, in: *Problems of analysis. Philosophical Essays* by M.Black, Ithaca 1954, 229-254, 297-298, Abgedr. in: Klemke, E.D. (Hrsg.): *Essays on Frege*, Urbana, Chicago, London 1968, S. 223-248

Bradley, Francis Herbert

AaR Appearence and Reality. A metaphysical Essay. Oxford 1968

Carnap, Rudolf,

LFP Logical Foundations of Probality, Chicago ^{2}1962

Descartes, René,

M Meditationen über die erste Philosophie, Übers. Gerhart Schmidt. Stuttgart 1971

Euklid,

E Die Elemente, Buch I-XIII, übers. und hg. v. Clemens Thaer. Darmstadt ^{8}1991

Frege, Gottlob,

AsuB Ausführungen über Sinn und Bedeutung, in: G:Frege, *Schriften zur Logik und Sprachphilosophie*, aus dem Nachl. hrsg. v. G.Gabriel. Hamburg 1971, S.25-34

BuG Über Begriff und Gegenstand, in Vjschr. f. wissensch. Philosophie 16, 1892. Nachdr. in G.Frege, *Funktion,Begriff,Bedeutung*, hrsg. von G.Patzig, Göttingen 1975, S.66-80

Bw Gottlob Freges Briefwechsel mit D.Hilbert, E.Husserl, R.Russell, sowie ausgewählte Einzelbriefe Freges. Hamburg 1980

EiL Einleitung in die Logik, in: G:Frege, *Schriften zur Logik und Sprachphilosophie*, aus dem Nachl. hrsg. v. G.Gabriel. Hamburg 1971, S.74-91

FuB Funktion und Begriff, Vortrag, gehalten in der Sitzung vom 9.1.1891 der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft. Nachdr. in: G.Frege, *Funktion,Begriff,Bedeutung*, hrsg. von G.Patzig, Göttingen 1975, S.18-39

G Der Gedanke, in: Beitr. zur Philosophie des deutschen Idealismus 2 1918-1919,S.58-77. Nachdr. in G.Frege, *Logische Untersuchungen*, hrsg. von G.Patzig. Göttingen ^{2}1976

GdA Die Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884, Nachdruck Stuttgart 1987

LiM Logik in der Mathematik, in: G.Frege, *Schriften zur Logik und Sprachphilosophie*, aus dem Nachl. hrsg. v. G.Gabriel. Hamburg 1971, S.92-165

SuB Über Sinn und Bedeutung, in Ztschr. f. philos. Kritik, NF 100, 1892. Nachdr. in: G.Frege, *Funktion,Begriff,Bedeutung*, hrsg. von G.Patzig, Göttingen 1975, S.40-65

WiF Was ist eine Funktion?, in Festschr. Ludwig Boltzmann gewidmet zum 60.Geburtstag, 1904, S.656-666. Nachdr. in: G.Frege, *Funktion,Begriff,Bedeutung*, hrsg. von G.Patzig, Göttingen 1975, S.81-90

Geach, Peter,

HCL History of the Corrptions of Logic, in: Logic Matters S. 44 ff

Graeser, Andreas,

PdA Die Philosophie der Antike 2. München 1983

Hintikka, Jaakko and Remes, Unto,

MoA The Method of analysis. in: Boston Studies in the philosophy of science, Dordrecht 1974

Hohelüchter, Martin,

EfK Entwurf eines formalen Kategoriensystems. Münster 2006

FAA Formale Axiome als Attribute. Münster 2007

fMT Formale Mengenlehre und Topologie. Münster 2007

Kon Kontrarietät. Münster 1988

Kant, Immanuel,

KrV Kritik der reinen Vernunft, hrsg. von R. Schmidt, Hamburg 1976

Leibniz, Gottfried Wilhelm,
PhS Die Philosophischen Schriften, hrsg. von C.I. Gerhardt, Bd. I Berlin 1875
Marshall, William,
FTFO Frege's Theory of Functions and Objects, in: The Philosophical Review 62, 1953, 374-390. Abgedr. in; Klemke, E.D. (Hrsg.): *Essays on Frege*, Urbana, Chicago, London 1968, S.249-267
Pappus,
MaC Pappi Alexandrini mathematicae collectiones, Venedig 1589, zit. bei: N.W. Gilbert, Renaissance Concepts of Method, N.Y. 1960, S.82
Pascal, Blaise,
vgG Vom geometrischen Geist und von der Kunst zu überzeugen. in: Schriften, hrsg. von E. Wasmuth, Heidelberg 1963
Plato,
Kra Kratylos. Leipzig ^{2}1922
Par Parmenides. Leipzig ^{2}1922
Sop Sophistes. Leipzig ^{2}1922
Quine, Willard van Orman,
GdL Grundzüge der Logik. Frankfurt/M. ^{2}1978
WuG Wort und Gegenstand. Stuttgart 1980
Russell, Bertrand,
EPL A critical Exposition of the Philosophy of Leibniz, London ^{4}1951
Savigny, Eike von,
PnS Die Philosophie der normalen Sprache. Frankfurt/M. 1969
Wittgenstein, Ludwig,
Tlp Tractatus logico-philosophicus, Frankfurt/M. ^{15}1980
Zeller, Eduard,
PdG Die Philosophie der Griechen II/2 (1963)