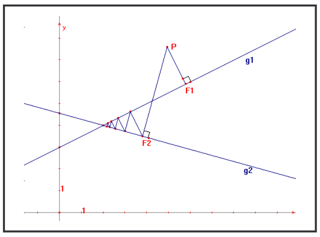
Heinz Rainer Geyer

Das Kaczmarz - Verfahren



Pädagogische Gesichtspunkte

Aufgabenstellung	Darstellung	Dokumentation
teilweise geführt teilweise offen	graphisch algebraisch	Zeichnungen Hardcopy Protokolle

Technologie

Tabellen-kalkulation	Graphischer Taschenrechner	Computeralgebra-system	Dynamische Geometriesoft-ware
		X	X

Ziele und Beschreibung der Einheit

- Lineares Gleichungssystem als Koordinatengleichungen von (Hyper-)Ebenen interpretieren
- Ein (neues) iteratives Lösungs-Verfahren kennen lernen
- Die Methoden der Linearen Algebra in neuen Zusammenhängen anwenden

Rolle der Technologie

- Notwendiges Werkzeug zur praktischen Durchführung des Verfahrens

Notwendige Vorkenntnisse

- Aus der Mittelstufe werden benötigt:
  geometrische Grundkonstruktionen: wie Lot fällen
  analytische Kenntnisse: wie Steigung orthogonaler Geraden und Schnitt von zwei Geraden
- Aus der Linearen Algebra müssen bekannt sein:
  Koordinatengleichung einer Ebene, Normalenvektor,
  Abstand Punkt-Ebene

Dauer der Einheit

- ca. 4 Unterrichtsstunden

Unterrichtsorganisation

- in Einzelarbeit oder Partnerarbeit zu bearbeiten
- vor der Bearbeitung von Aufgabe 3 empfiehlt sich eine Zusammenfassung und Sicherung der bisherigen Ergebnisse

Aufgabenstellung

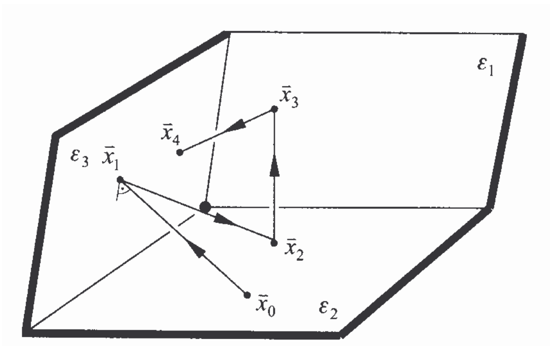
Aufgabe 1: Zeichne die Geraden g1: $2y - x = 6$ und g2: $4y + x = 18$ in ein passendes Koordinatensystem.
Wähle einen beliebigen Punkt P im Koordinatensystem und führe das folgende *graphische Verfahren* durch:

- Fälle von P aus das Lot auf eine der beiden Geraden
- vom Lotfußpunkt fälle ein neues Lot auf die andere Gerade
- setze das Verfahren fort.

Welchen Sinn hat das angegebene Verfahren?
Wann ist das Verfahren zu beenden?
Welchen Vorteil kann es haben, wenn man im 1.Verfahrensschritt die Gerade mit dem größten Abstand zu P wählt?

Aufgabe 2: Beschreibe das Verfahren mit analytischen Methoden, d.h. berechne die Koordinaten der ersten 2 Fußpunkte für P(4/8).
Verallgemeinere das Verfahren, indem du ausgehend vom Punkt P(xp/yp) den Fußpunkt F(xf/yf) auf einer Geraden $ay + bx = c$ bestimmst.

Information: 1939 veröffentlichte Stefan Kaczmarz seinen Artikel: *Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen*, in dem er die Grundlagen eines iterativen Verfahrens durch orthogonale Projektion beschrieb, das zwar nur langsam konvergiert, aber bei lösbaren Gleichungssystemen immer eine Lösung findet. Mit Hilfe von Computern wird dieses Verfahren heute vor allem bei sehr großen Gleichungssystemen, z.b. bei der Computertomographie erfolgreich eingesetzt.



Das KACZMARZ-VERFAHREN:

Jede Zeile eines linearen Gleichungssystems (GLS) wird als Koordinatengleichung einer Ebene betrachtet. Dann ergibt sich der Normalenvektor aus den Koeffizienten dieser Zeile.
Seien $\vec{n}_k$ die Zeilenvektoren des GLS und b_k die zugehörigen Zahlen der rechten Seite des GLS.
Für den Näherungsvektor $\vec{x}_n$ berechnet man den Abstand zur k-ten Ebene durch $d_k = \frac{1}{|\vec{n}_k|}(b_k - \vec{x}_n \cdot \vec{n}_k)$.
Die Gleichung mit dem größten Wert aller d_k liefert den Index zur Berechnung des nächsten Iterationspunktes:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \frac{1}{|\vec{n}_k|^2}(b_k - \vec{x}_n \cdot \vec{n}_k)\vec{n}_k = \vec{x}_n + \frac{1}{|\vec{n}_k|} d_k \vec{n}_k$$

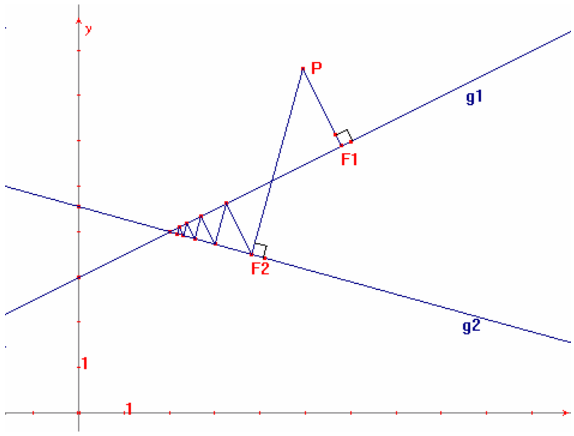
Aufgabe 3: Berechne die ersten 2 Näherungslösungen für das GLS

$$\left| \begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & -4 \end{array} \right|$$

Verwende den Startvektor $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: In den technischen Hinweisen sind die Funktionen kacz1( ) und kacz2( ) angegeben, mit denen die notwendigen Schritte zum Finden weiterer Näherungen zusammengefasst werden können.
Verwende die Funktionen, um die Lösung des GLS aus Aufgabe 3 zu bestimmen.
Erprobe das Verfahren an weiteren Aufgaben.

Lösungsvorschläge

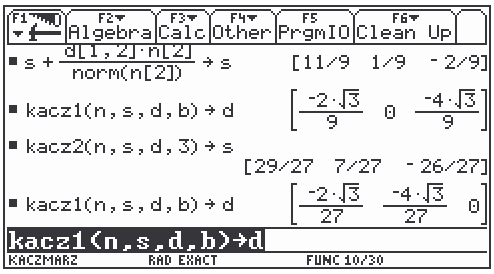


Aufgabe 1:
Die Graphik wurde mit Cabri - Géomètre erstellt. Punkt P ist dynamisch zur bewegen, die Lote sind durch ein Makro definiert und bleiben erhalten.

Aufgabe 2:
Die Steigung von g1 ist $m_1 = \frac{1}{2}$, also hat die Lotgerade auf g1 die Steigung $m_1' = -2$ und die Gleichung des Lotes ist $y - 8 = -2(x-4) \Rightarrow y = -2x + 16$.
Der Schnittpunkt von Lot und g1 liegt bei F1(5.2/5.6)

Aufgabe 3:
Siehe hierzu in den technischen Hinweisen die Vorgehensweise mit dem TI-92

Aufgabe 4:
Die Funktionen werden wechselnd aufgerufen. Die Komponente mit dem größten Abstandswert in d wird in kacz2 eingetragen und damit der neue Iterationspunkt s berechnet.
Durch die Zuweisungen und den fast gleichen Variablensatz der Funktionen ist Auswertung sehr einfach zu handhaben.



Didaktisch-methodische Hinweise

Die Aufgaben 1 und 2 sollten auch in einem Kurs der Linearen Algebra behandelt werden. Mit der Verwendung einer Dynamischen Geometriesoftware kann die Methode im Zweidimensionalen einprägsam visualisiert werden und so die oft fehlende Anschauung im $\mathbb{R}^3$ ergänzen.

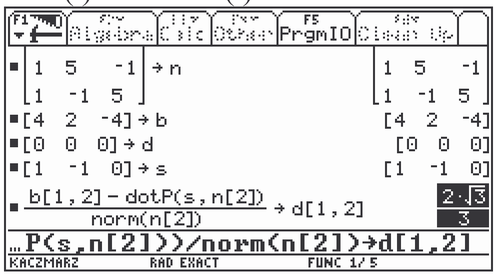
Zusätzliche Aufgaben

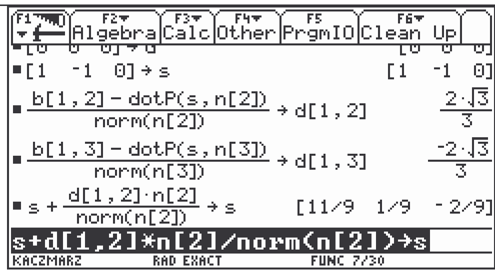
- Anwendung des Kaczmarz-Verfahren auf höherdimensionale Räume bzw. unterdimensionierte Gleichungssysteme
- Vergleich mit dem Iterationsverfahren nach Jacobi

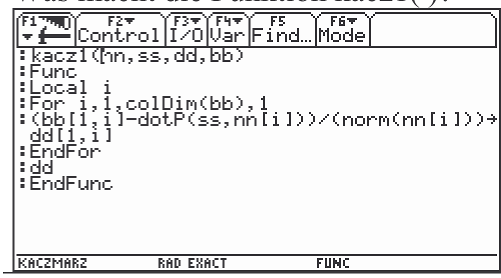
Literaturhinweise

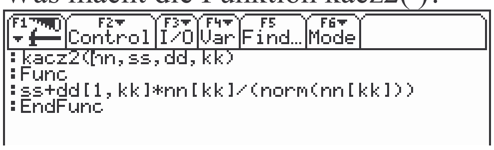
Kroll/Reiffert/Vaupel Analytische Geometrie/ Lineare Algebra, Dümmler 1997

Technische Hinweise: TI-92

<table>
<tr><th>Was willst du erreichen?</th><th>Wie du das machst!</th></tr>
<tr><td>Ein Gleichungssystem eingeben</td><td>Zunächst gibt man die Koeffizienten-matrix ein und benennt sie,
[5,1,1;1,5,-1;1,-1,5]->n
dann den Spalten-Vektor der rechten Seite [4,2,-4]->b</td></tr>
<tr><td>Skalarprodukt und Betrag bilden</td><td>Die Funktionen hierzu heißen
dotP( ) und norm( )


Beachte die Indizierung
n[2] ist die 2.Zeile der Matrix n
b[1,2] die 2.Komponente der 1.Zeile des einzeiligen Vektors b
auch ein Vektor wird intern als Matrix behandelt</td></tr>
<tr><td>Abstände und Iterationspunkte bestimmen</td><td>

Hier ist die direkte Umsetzung der Formeln für Abstand d und Projektionspunkt s dargestellt</td></tr>
<tr><td>Was macht die Funktion kacz1( )?

</td><td>Die Eingabevariablen sind:
nn die Koeffizientenmatrix
ss der Startpunkt der Iteration
dd der Vektor der Abstände
bb der Vektor der rechten Glg-Seite

neu berechnet wird der Vektor d der Abstände</td></tr>
<tr><td>Was macht die Funktion kacz2( )?

</td><td>Die Eingabevariablen wie vorher
kk der Index mit dem größten Abstandswert

neu berechnet wird der nächste Iterationspunkt</td></tr>
</table>