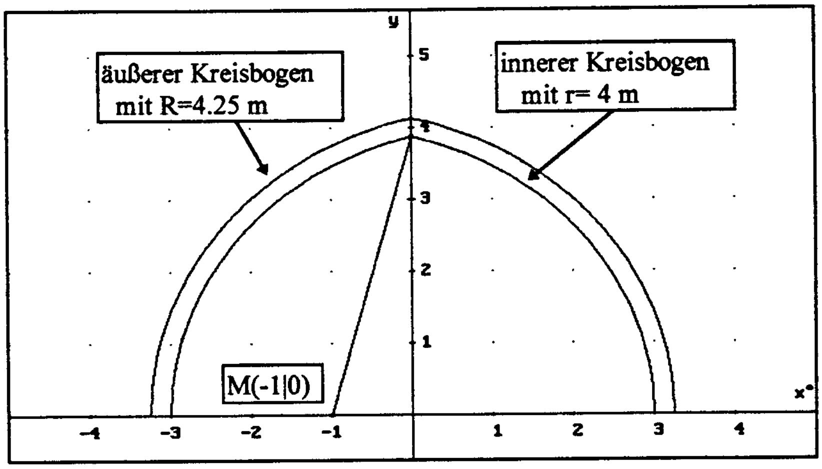
Berechnung arabischer Kuppeln

Im 15. Jahrhundert beschrieb der arabische Mathematiker und Astronom Ghiyah al-Din Jamshid al-Kashi Methoden zur Berechnung aller Details islamischer Architektur. Im Folgenden sei eine Moscheekuppel gegeben, deren äußere und innere Begrenzung durch Kreisbögen konstruiert wurde, die um die vertikale Achse rotieren. Mit den angegebenen Abmessungen erhielt al-Kashi folgende Ergebnisse im Sexagesimalsystem:

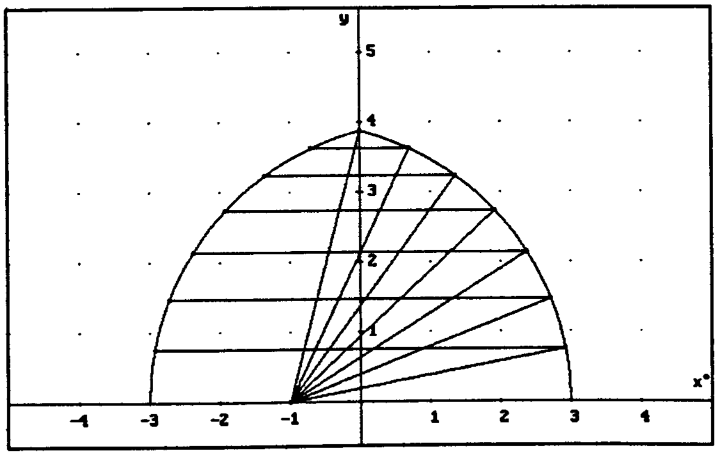
Äußeres Volumen 83° 8' 31'', inneres Volumen 66° 10' 48''

(1) Überprüfen Sie das Ergebnis mit den Methoden der Integralrechnung.

(2) Die Innenseite der Kuppel soll 0.1 mm dick mit Gold ausgelegt werden.
Gold hat ein spezifisches Gewicht von 19.3 g/cm^3.
100 g Gold kosten heutzutage ca. 1900 DM.

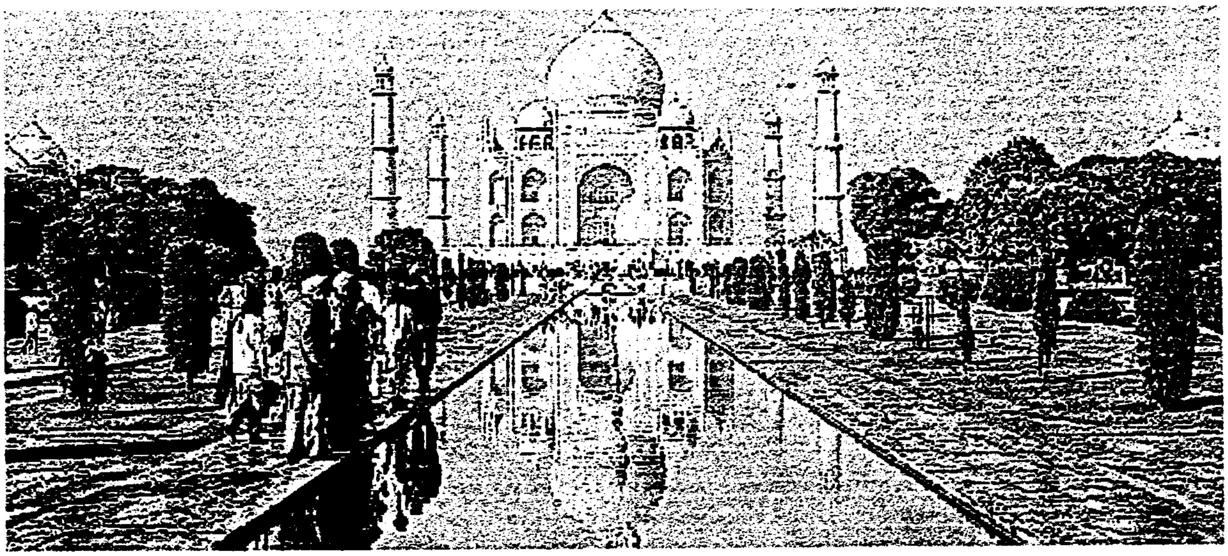


Zur Volumenberechnung unterteilte al-Kashi die Kuppel in mehrere Scheiben und ersetzte die Kreisbögen durch Strecken. Er berechnete das Volumen der aufeinander gesetzten Kegelstümpfe.
In der folgenden Zeichnung ist der Innenraum der Kuppel in 7 Scheiben geteilt, die durch Teilung des Kreisbogens in 7 gleich lange Stücke entstanden.



(3) Ermitteln Sie das Gesamtvolumen der Kegelstümpfe bei einer Unterteilung in 7 bzw. 8 Scheiben, und vergleichen Sie die Ergebnisse.

(4) Analysieren Sie die Genauigkeit dieses Verfahrens.



Fachdidaktische Aspekte

Der Aufgabenkomplex bezieht sich auf geschichtlich interessante Berechnungen des späten Mittelalters. Im arabischen Bereich wurden Moscheekuppeln aus Kreisbögen konstruiert, und deren Volumina und Oberflächen konnten mit den bekannten Formeln der räumlichen Geometrie näherungsweise berechnet werden. Die damals verwendeten Methoden sind nachvollziehbar, und die Ergebnisse sind vergleichbar mit den Ergebnissen der modernen Integralrechnung.
In diesem Zusammenhang verbinden sich die Gebiete Analytische Geometrie und Analysis.
Die Schüler erfahren einerseits den kulturgeschichtlichen Aspekt der Mathematik, andererseits aber auch den Zusammenhang spezifischer Methoden. Sie müssen ihre Kenntnisse der Stereometrie aktivieren, um dann die Stärke des CALCULUS ausnutzen zu können.

Voraussetzung für die Bearbeitung dieser Aufgaben sind folgende Kenntnisse:

- Geometrische Beziehungen bei Kreis und Kugel
- Näherungsverfahren, Simpson-Methode
- Integralrechnung bei trigonometrischen Funktionen
- Volumen- und Oberflächenberechnung bei Rotation um die y-Achse
- Bogenintegral

Da die Berechnungen heutzutage sehr aufwendig erscheinen, ist ein Hilfsmittel von entscheidendem Vorteil bei der Bearbeitung, denn ohne Helfer könnten diese Aufgaben nicht gestellt werden. Prinzipiell sind die Aufgaben auch mit einem programmierbaren Grafikrechner zu lösen, doch der TI-92 bietet durch Computeralgebra bessere Übersicht über die Fehlerfortpflanzung der Rechenwege.
DERIVE - bzw. der TI-92 - dienen nur als Rechenknecht. Das Problem muss genau durchdacht werden; es ist eine mathematische Strategie gefordert, die zu einem rechnerbezogenen Konzept führt.
Durch die graphische Darstellung ist dann auch die Möglichkeit gegeben, die eigenen Überlegungen anhand der Zeichnung zu überprüfen.
Wenn der Rechenaufwand durch ein CAS verringert wird, entsteht Raum, über Mathematik nachzudenken, Methoden zu vergleichen, Abschätzungen vorzunehmen und die Bedeutung mathematischer Verfahren in Vergangenheit und Gegenwart zu erkennen.

Die dargestellte Aufgabe ist in vieler Hinsicht variierbar, und damit für Übungs- und Klausuraufgaben geeignet. Die Formen der Kuppeln können verändert werden, andere Unterteilungsprinzipien können gewählt und mit der Methode al-Kashis verglichen werden, oder man überlegt, wie al-Kashi wohl die Oberfläche der Kuppelinnenseite berechnet hat.....

Literatur:

[1]Y. DOLD-SAMPLONIUS:
Vestigia Mathematica, Studies in medieval and early modern mathematics, Amsterdam/Atlanta, 1993 ISBN 90-5183-536-1

Allgemeine Lösungsskizze der Kuppelaufgabe

(1) Berechnung des Kuppelvolumens:

Das Volumen des Mauerwerks kann man als Differenz zwischen Außen- und Innenvolumen berechnen. V_1 und V_2 werden jeweils dadurch bestimmt, dass man die entsprechenden Kreisbögen um die y-Achse rotieren lässt.

Formel: $V = \pi \int_0^{y_0} x^2\, dy$ mit $y_0 = \sqrt{r^2 - 1}$

Innerer Kreisbogen: $(x+1)^2 + y^2 = 16$

aufgelöst nach x : $x = \sqrt{16 - y^2} - 1$

$$V_2 = \pi \int_0^{\sqrt{15}} \left(\sqrt{16 - y^2} - 1\right)^2 dy$$

Dieses Integral lässt sich zwar geschlossen lösen, doch der rechnerische Aufwand vertieft nicht das mathematische Verständnis.

Lösung mit dem Rechner ergibt: $V_1 = 84.93\ [m^3]$ für das äußere Volumen
$V_2 = 67.58\ [m^3]$ für das innere Volumen

(2) Berechnung der Goldmenge

1. Weg:

Das benötigte Goldvolumen lässt sich ebenfalls als Differenz berechnen. Dabei muss allerdings die Genauigkeit berücksichtigt werden, da V_3 für den Radius $r = 4m - 0.1\ mm = 3.9999\ m$ berechnet wird.

$V_2 - V_3 = 0.00642\ [m^3]$

Es werden also 6.42 dm^3 Gold gebraucht, das sind ca. 124 kg Gold, die heutzutage etwa 2.35 Millionen DM kosten.

2. Weg:

Man ermittelt die Oberfläche der Kuppelinnenseite.

Formel: $\boxed{O = 2\pi \int_0^{y_0} f(y)\sqrt{1 + (f'(y))^2}\, dy}$ mit $x = f(y)$

Mit $x = f(y) = \sqrt{16 - y^2} - 1$ erhält man die Oberfläche von 64.21 m^2.

(3) Unterteilung der Kuppel in 7 Scheiben

Formel: $\boxed{V = \frac{\pi}{3} h\left[r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right]}$ für das Kegelstumpfvolumen

Überlegung:

Die Radien der Kegelstümpfe sind die x-Werte der Unterteilungspunkte auf dem Kreisbogen.
Die Höhen der Kegelstümpfe sind die Differenzen zweier y-Werte dieser Punkte.
Der Winkel $\alpha = \cos^{-1}\frac{1}{4} \approx 75.52^0$ wird in 7 gleiche Teilwinkel zerlegt.

$$\tfrac{1}{7}\alpha = \tfrac{1}{7}\cos^{-1} 0.25 \approx 10.79^0$$

Mit dem Radius 4 ergeben sich also die x- und y-Werte der Unterteilungpunkte:

$$x_i = 4\cdot\cos\left(\tfrac{i}{7}\alpha\right) - 1 \quad i = 0,\cdots,7$$
$$y_i = 4\cdot\sin\left(\tfrac{i}{7}\alpha\right) \quad i = 0,\cdots,7$$
$$r_i = x_i \qquad h_i = y_{i+1} - y_i$$

Nun sollte man Überlegungen anstellen, wie man den Rechner so einsetzt, dass man die Berechnungen mehrfach durchführen kann, ohne viel Neues einzutippen.

Beispiel mit DERIVE (PC):

$b := a\cos 0.25$ ist der Winkel ∢

$r := vector\left(4\cos\tfrac{i}{7}b - 1, i, 0, 7\right)$ ergibt die 8 benötigten Radien

$h := vector\left(4\left(\sin\tfrac{i+1}{7}b - \sin\tfrac{i}{7}b\right), i, 0, 6\right)$ ergibt die 7 Höhen der Kegelstümpfe

$vector\left(\tfrac{\pi}{3}\cdot h_n\left(r_n^2 + r_n r_{n+1} + r_{n+1}^2\right), n, 1, 7\right)$ liefert die 7 Kegelstumpfvolumina, wobei h_n bzw. r_n das n-te Element des Vectors h bzw. r ist, und mit **h sub n** eingegeben wird.

Ergebnis: $V_7 = 66.83\ [m^3]$ $V_8 = 67.00\ [m^3]$

(4) Analyse der Genauigkeit

Zur Berechnung des Kuppelvolumens ist das Näherungsverfahren von al-Kashi gut geeignet, wobei eine Unterteilung in 7 Scheiben völlig ausreichend ist. Die Werte sind zwar aufgrund des Verfahrens zu klein, der Fehler wird aber unbedeutend, wenn das Volumen als Differenz berechnet wird. Man kann natürlich davon ausgehen, dass in der Praxis die Eingabedaten auch nur Näherungswerte sind, deren Schwankungen sich im Bereich 10^{-2} befinden, daher ist eine feinere Unterteilung mit exakteren Ergebnissen nicht notwendig.
Aus den Ergebnissen der Aufgabe (3) lässt sich schließen, dass al-Kashi die Kuppel in nur 5 oder 6 Scheiben unterteilt hat, denn sein Wert, der im Dezimalsystem 66.18 entspricht, ist geringer als V_7 und V_6.

Zur Berechnung der Goldmenge ist der Weg der Volumendifferenz mit al-Kashis Näherungsverfahren nicht geeignet. Hier muss die Oberfläche der Kuppelinnenseite mit der Zerlegung in Kegelstümpfe berechnet werden.

Bearbeitung mit TI-92

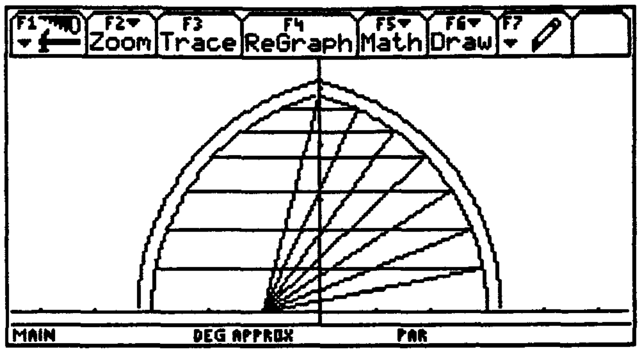
Grafische Darstellung mit TI-92

Einstellung: MODE: FUNCTION DEGREE

- Define $kreis1(x) = \sqrt{16-(x+1)^2}$
- Define $kreis2(x) = \sqrt{16-(x-1)^2}$
- Define $kreis3(x) = \sqrt{4.25^2-(x+1)^2}$
- Define $kreis4(x) = \sqrt{4.25^2-(x-1)^2}$

- Graph kreis1(x) | 0<x and x<3
- Graph kreis2(x) | -3<x and x<0
- Graph kreis3(x) | 0<x and x<3.25
- Graph kreis4(x) | -3.25<x and x<0

- $\cos^{-1}(0.25) \rightarrow b$
- For n, 1, 6 : Line - 4cos(n•b/7)+1, 4sin(n•b/7), 4cos(n•b/7) -1, 4sin(n•b/7) : EndFor
- For n, 1, 7 : Line -1, 0, 4cos(n•b/7) -1, 4sin(n•b/7) : EndFor



Wenn man sich daran stört, dass die unteren Bereiche der Kreisbögen nicht gezeichnet werden, kann man auch die parametrisierte Darstellung wählen und die Gleichungen über das y= Menü eingeben.

Einstellung: MODE : PARAMETRIC

- xt1= 4cos(t) -1 | 0<t and t<75.5
- yt1= 4sin(t)
- xt2= 4cos(t)+1 | 105.5<t and t<180
- yt2= 4sin(t)

  usw.

Die waagerechten Linien und die Unterteilungsradien kann man wie oben angegeben mit der „For-Schleife" der Zeichnung hinzufügen.

Algebraische Berechnungen mit TI-92

Einstellung: MODE : DEGREE APPROXIMATE

Volumenberechnungen:

- $\pi \int\left(\left(\sqrt{16-y^2}-1\right)^2, y, 0, \sqrt{15}\right)$ 67.5850
- $\pi \int\left(\left(\sqrt{4.25^2-y^2}-1\right)^2, y, 0, \sqrt{4.25^2-1}\right)$ 84.9325
- $\pi \int\left(\left(\sqrt{3.9999^2-y^2}-1\right)^2, y, 0, \sqrt{3.9999^2-1}\right)$ 67.5785

Obwohl nur 4 Nachkommastellen angezeigt werden, rechnet der TI-92 intern mit 12 Nachkommastellen. Wenn man die Ergebnisse mit ENTER in die Eingabezeile kopiert, erscheinen sie mit 12 Nachkommastellen, und die Differenz kann entsprechend genau berechnet werden.

Oberfläche der Kuppelinnenseite:

- Define $z(y) = \sqrt{16 - y^2} - 1$
- $\boldsymbol{d}$ (z(y), y) $\qquad \dfrac{-y}{\sqrt{16-y^2}}$
- $2\pi \int\left(z(y) \cdot \sqrt{1 + \left(d\left(z(y), y\right)\right)^2}, y, 0, \sqrt{15}\right)$ $\qquad$ 64.2108

Unterteilung der Kuppel in 7 Scheiben:

- $\cos^{-1} 0.25 \quad \rightarrow$ b
- For n, 0, 7 : 4 cos(n•b/7) -1 $\rightarrow$ r [n+1] : EndFor
- For n, 0, 6 : 4 (sin((n+1)b/7) - sin(n•b/7)) $\rightarrow$ h [n+1] : EndFor
- For i, 1, 7 : π/3• h[i] • (r[i]^2 + r[i]• r[i+1] + r[i+1]^2) $\rightarrow$ v[i] : EndFor
- sum (v) $\qquad$ 66.8287

r, h und v sind jeweils Listen.
r hat 8 Elemente, h und v haben jeweils 7 Elemente.
r[n] ist das n-te Element der Liste r.
Da es kein 0-tes Element gibt, muss in der zweiten Zeile also auf r[n+1] gespeichert werden.

Wiederholt man die Rechnungen mit einer anderen Unterteilung, so muss man erst mit dem Befehl ▪ DelVar r, h, v die Belegung der Listen löschen!!!