

WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Jens Schüttler

**Selbstorganisierte Labyrinth und Spiralen
in einem nichtlinearen optischen System**

2007

Experimentelle Physik

**Selbstorganisierte Labyrinth und Spiralen
in einem nichtlinearen optischen System**

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Jens Schüttler
aus Hannover

– 2007 –

Dekan:	Prof. Dr. J. P. Wessels
Erster Gutachter:	Prof. Dr. W. Lange
Zweite Gutachterin:	Prof. Dr. C. Denz
Tag der mündlichen Prüfung:	23. März 2007
Tag der Promotion:	23. März 2007

Kurzfassung

In dieser Arbeit werden Labyrinthmuster und Spiralen experimentell und theoretisch untersucht, die selbstorganisiert in einem nichtlinearen optischen Modellsystem auftreten. Es handelt sich dabei um eine Anordnung, in der ein Laserstrahl ein nichtlineares Medium durchläuft und das transmittierte Licht von einem Spiegel in das Medium zurückgekoppelt wird. Durch die Rückkopplung können in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung spontan Strukturen entstehen. Dieses System, die sogenannte Einspiegelanordnung mit Natriumdampf als nichtlinearem Medium, hat sich in der Vergangenheit bereits vielfach bewährt. Es hat nahezu alle typischen Musterbildungsphänomene in zwei Raumdimensionen hervorgebracht und zu deren Erklärung beigetragen. Die in dieser Arbeit verwendete Variante der Einspiegelanordnung zeigt eine symmetriebrechende Polarisationsinstabilität mit zwei gleichberechtigten stabilen Zuständen, zwischen denen sich Fronten ausbilden können.

Labyrinth sind zweidimensional ausgedehnte Strukturen ohne Symmetrie oder Fernordnung, besitzen jedoch eine charakteristische räumliche Längenskala und eine gewisse Nahordnung. Sie entstehen als universelles Phänomen in einer Vielzahl verschiedener physikalischer Systeme, meist als Folge einer transversalen Modulationsinstabilität von Fronten. Es wird nun gezeigt, dass in der Einspiegelanordnung mit Natriumdampf ebenfalls Labyrinth entstehen, die die gleichen universellen Eigenschaften besitzen.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit ist neben dem experimentellen Nachweis von Labyrinthstrukturen die Charakterisierung der Frontdynamik bei verschiedenen Parametern. Es zeigt sich, dass die Labyrinth durch eine krümmungsgetriebene Dynamik der Polarisationsfronten entstehen. In Abhängigkeit von der Intensität des Laserstrahls führt diese Dynamik zu kontrahierenden bzw. expandierenden Polarisationsdomänen. Im Falle expandierender Domänen werden nach einer transienten Phase Labyrinth beobachtet, deren charakteristische Längenskala auf eine kurzreichweitige Interaktion benachbarter Fronten zurückgeführt wird. Die entstehenden Labyrinth können im Detail sehr verschiedene Gestalt besitzen und im weiteren Sinne als metastabile Zustände interpretiert werden. Zwischen diesen sich nur gering unterscheidenden Zuständen kann eine langsame, rauschinduzierte Dynamik stattfinden.

Die Dynamik der Fronten wird stark von einer periodischen Modulationsinstabilität beeinflusst, die im betrachteten System zu einer hexagonalen Strukturierung der durch die Fronten verbundenen Zustände führt. Diese Wechselwirkung beruht darauf, dass die Fronten oszillatorische Ausläufer besitzen, die die gleiche Längenskala wie die Hexagone aufweisen. Es kommt zu einem Einrasten der Fronten an Konstituenten des hexagonalen Musters oder an den Ausläufern benachbarter Fronten.

Es wird nachgewiesen, dass ein statisches äußeres Magnetfeld die Frontdynamik sowohl quantitativ als auch qualitativ beeinflusst. Weiterhin stellt sich heraus, dass die Labyrinthstruktur nur dann beobachtet werden kann, wenn die beteiligten Zustände des bistabilen Systems in guter Näherung äquivalent sind.

Ein zweiter Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Untersuchung von Spiralmustern, die in Anwesenheit eines externen Magnetfeldes auftreten. Diese raumzeitlichen Strukturen weisen eine diskrete Rotationssymmetrie auf und rotieren um ein Organisationszentrum. Im hier behandelten System treten in den Spiralen darüber hinaus raumzeitliche Defekte auf, die auf die räumliche Variation eines Kontrollparameters zurückgeführt werden können. In numerischen Simulationen werden ohne den Einfluss dieser räumlichen Inhomogenität ausgedehnte Muster aus mehreren Spiralen gefunden.

Ein Zusammenhang zwischen Labyrinth- und Spiralmustern wird in der Literatur für eine Reihe verschiedener musterbildender Systeme beschrieben. Im Gegensatz zu dem üblicherweise diskutierten Mechanismus – einem Übergang von stationären Isingfronten zu bewegten Blochfronten – entstehen die in der vorliegenden Arbeit beobachteten Spiralen als Folge einer Hopf-Instabilität, was durch eine lineare Stabilitätsanalyse des theoretischen Modells belegt wird.

Abstract

In this work labyrinthine and spiral patterns, which emerge self-organized in a nonlinear optical system, are investigated experimentally and theoretically. The experiment consists of an arrangement, in which a laser beam passes a nonlinear medium, and the transmitted light is fed back into the medium by a mirror. Because of this feedback, structures can emerge spontaneously in the plane perpendicular to the beam axis. This system, the single mirror feedback scheme with sodium vapor as the nonlinear medium, has proven its worth many times in the past. It produced nearly all typical phenomena of pattern formation in two spatial dimensions and contributed well to their explanation. The variant of the single mirror feedback scheme used in this work exhibits a symmetry breaking polarization instability with two equivalent stable states, and fronts connecting these states can develop.

Labyrinths are extended two-dimensional structures without any symmetry or long-range order, but they contain a characteristic spatial length scale and a certain short-range order. They appear as a universal phenomenon in a variety of different physical systems, and mostly emerge as a consequence of a transverse modulational instability of fronts. It is shown that labyrinthine patterns with the same universal characteristics can also be observed in the single mirror feedback scheme with sodium vapor.

Aside from the experimental proof of the existence of labyrinthine structures, the main focus of this work is the characterization of front dynamics at different parameters. It turns out that the labyrinths arise from the curvature-driven dynamics of polarization fronts. This dynamics leads to contracting or expanding polarization domains, depending on the intensity of the laser beam. In the case of expanding domains, labyrinths are observed after a transient phase. Their characteristic length scale is determined by a short-range interaction of neighboring fronts. The resulting labyrinthine patterns can have many different shapes in detail and can be roughly interpreted as metastable states, between which a slow, noise induced dynamics takes place.

The front dynamics in the system under investigation is strongly influenced by a periodic modulational instability leading to a hexagonal structuring of the states connected by the fronts. The interaction with the underlying pattern is caused by oscillatory tails of

the fronts, which have the same length scale as the hexagons. As a result, the fronts lock at constituents of the hexagonal pattern or at oscillatory tails of neighboring fronts.

It is proven that a static external magnetic field influences the front dynamics quantitatively as well as qualitatively. Furthermore, it turns out that labyrinths are only observed, if the involved states of the bistable system are equivalent in a near approximation.

A second matter of this work is an investigation of spiral patterns appearing in the presence of an external magnetic field. These spatio-temporal structures have a discrete rotational symmetry and rotate around their symmetry center. Apart from that, in the system treated here the spirals exhibit spatio-temporal defects arising from a spatial variation of the control parameter. As a result of numerical simulations without this spatial inhomogeneity, extended patterns consisting of several spirals are found.

In literature, a connection between labyrinthine and spiral patterns is mentioned for various pattern forming systems. In contrast to the mechanism discussed usually – a transition from stationary Ising-fronts to moving Bloch-fronts – the spirals observed in this work originate from a Hopf instability, which is proven by means of a linear stability analysis of the theoretical model.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Labyrinth und Spiralen in strukturbildenden Systemen	5
2.1	Labyrinthmuster	5
2.1.1	Definition und Abgrenzung zu anderen Strukturen	6
2.1.2	Experimentelle Beobachtung von Labyrinth	7
2.1.3	Frontdynamik in bistabilen Systemen	11
2.2	Spiralen	14
2.3	Motivation dieser Arbeit	17
2.4	Die Einspiegelanordnung mit Natriumdampf	18
2.4.1	Natriumdampf als nichtlineares Medium	21
2.4.2	Einspiegelanordnung mit $\lambda/8$ -Plättchen	24
3	Experimenteller Aufbau	29
3.1	Übersicht	29
3.2	Präparation des Laserstrahls	31
3.3	Natriumzelle mit Rückkopplung	32
3.4	Analyse des transmittierten Lichts	34
4	Experimentelle Ergebnisse	37
4.1	Homogener stationärer Zustand	39
4.2	Labyrinthmuster	41
4.2.1	Zeitverhalten	41
4.2.2	Längenskalen	43
4.2.3	Existenzbereich der Labyrinth	45
4.2.4	Instabilität von Fronten	50
4.3	Raumzeitlich oszillierende Strukturen	51
4.3.1	Lokale Messung der Oszillationsfrequenzen	52
4.3.2	Beobachtung von Spiralen und „Targetmustern“	55

5	Theoretische Analyse und Interpretation der Ergebnisse	59
5.1	Modellgleichungen für das $\lambda/8$ -System	59
5.1.1	Materialgleichungen und Wirkung des Magnetfeldes	60
5.1.2	Wirkung des nichtlinearen Mediums	62
5.1.3	Lineare Propagation und Beeinflussung der Polarisierung	63
5.2	Lineare Stabilitätsanalyse	64
5.2.1	Allgemeine Beschreibung der Methodik	65
5.2.2	Stationäre homogene Lösung	66
5.2.3	Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse	69
5.3	Numerische Simulationen und Vergleich mit dem Experiment	75
5.3.1	Durchführung der Simulationen	76
5.3.2	Untersuchung der Frontdynamik	76
5.3.3	Längenskalen der Labyrinth	93
5.3.4	Existenzbereich der Labyrinth	99
5.3.5	Spiralen	103
6	Zusammenfassung	111
A	Details zur linearen Stabilitätsanalyse	115
B	Details zu den numerischen Simulationen	117
B.1	Kurzdarstellung des Algorithmus	117
B.2	Erzeugung der Anfangsbedingungen	118
B.3	Verfahren zur Bestimmung der Frontlänge	120

Kapitel 1

Einleitung

Nichtlineare Systeme, die sich fernab vom thermischen Gleichgewicht befinden, haben oft die interessante Eigenschaft, dass sich spontan selbstorganisierte Strukturen in einer Beobachtungsgröße ausbilden. Diese Strukturierung kann im Raum und/oder in der Zeit stattfinden und ist ein universelles Phänomen, das in einer Vielzahl von sehr verschiedenen physikalischen, chemischen oder biologischen Systemen beobachtet wird [CH93]. Der Wunsch, diese Selbststrukturierung verstehen und kontrollieren zu können, hat dazu geführt, dass sich die Selbstorganisation zu einem zentralen und nach wie vor sehr aktuellen Forschungsgegenstand der nichtlinearen Physik entwickelt hat.

Die Bandbreite der auftretenden Strukturen reicht von „einfachen“ periodischen Mustern mit ausgeprägter Symmetrie, die im Falle zweidimensionaler räumlicher Selbstorganisation auch als Turing-Muster [Tur52] bezeichnet werden, über komplexere Strukturen wie z. B. Quasimuster [Ben85], bis hin zu irregulären oder chaotischen Zuständen [NP93], sowie lokalisierten Strukturen [Rie99], die auch als dissipative Solitonen bezeichnet werden.

Ein Bindeglied zwischen räumlich periodischen und irregulären Strukturen stellen *Labyrinthmuster* dar. Sie besitzen eine charakteristische räumliche Längenskala, jedoch keine ausgeprägte Symmetrie oder Fernordnung [LBRT⁺02] und erinnern an die Irrgärten und Labyrinth, die seit der Antike die Menschheit faszinieren [Ker83]. Im Vergleich zu anderen typischen selbstorganisierten Mustern findet man in der Natur nur wenige Beispiele für selbstorganisierte Labyrinth, wenngleich in Zellkulturen [GTP⁺04] oder bei der Vegetation in Wüstengegenden [HMSZ01] ähnliche Formen beobachtet werden können und Vorschläge existieren, die Gestalt der Großhirnrinde ebenfalls als selbstorganisiertes Labyrinth aufzufassen [Car02].

Labyrinthmuster werden jedoch in einer großen Zahl physikalischer und chemischer Laborsysteme beobachtet. Dazu gehören Experimente zur magnetische Domänenbildung in ferrimagnetischen Filmen [HMD74, MS79, SW92c], ferromagnetischen Schichten [HKK72],

Ferrofluiden [RZS83] und Typ-I-Supraleitern [Fab58, HK74]; sowie Reaktions-Diffusions-Systeme [LMOS93, LS95, POS97], Flüssigkristallfilme [PGV⁺05] und unter mechanische Spannung gesetzte Metallfilme [BBE⁺98]. In planaren Gasentladungssystemen, die mit Wechsellspannung getrieben werden, sind in jüngster Zeit ebenfalls labyrinthartige Muster beobachtet worden [Zan03, SGLP07, Sto07].

In der nichtlinearen Optik – einem Gebiet, in dem selbstorganisierte Strukturbildung ebenfalls einen Forschungsschwerpunkt darstellt – wurden erst in einem experimentellen System, dem entarteten Vierwellenmischen in einem Resonator, Labyrinthmuster entdeckt [TSW98, WVS⁺99]. Dem stehen eine Reihe von theoretischen Vorhersagen für andere optische Systeme gegenüber [GMT00, LL00, IMS01, Rom04], in denen allerdings bislang der experimentelle Nachweis ausgeblieben ist.

Den meisten dieser Systeme ist gemein, dass sie zwei (annähernd) gleichberechtigte stabile Zustände besitzen, zwischen denen sich Fronten ausbilden können, die als „Wände“ der Labyrinth in Erscheinung treten. In der Literatur werden verschiedene Mechanismen diskutiert, die in den unterschiedlichen Experimenten für die Ausbildung der Labyrinthstrukturen verantwortlich sind. Für Systeme, für die sich kein (verallgemeinertes) Potential definieren lässt, ist der gängige Ansatz eine krümmungsgetriebene Frontdynamik [GMP96, TZWW99, WVS⁺99, GMT00, GCOM04, MML04, Rom04] bzw. die (phänomenologische) Einführung einer negativen Elastizität der Fronten [RZS83, BW89, LGJ92, SW92c, ATV99].

Im Gegensatz zu den Labyrinth, die sich als zeitlich (fast) stationäre Strukturen darstellen, sind *Spiralen* das wohl prominenteste Beispiel für eine Selbstorganisation sowohl im Raum als auch in der Zeit. Sie besitzen eine ganzzahlige Rotationssymmetrie um ein Organisationszentrum und weisen eine radiale Bewegung auf, die sich aus der raumzeitlichen Oszillation der Beobachtungsgröße ergibt. Spiralen können unterschiedliche Chiralität und verschieden viele „Arme“ aufweisen, wobei der Sonderfall mit einer Armzahl von null auch als *Targetmuster* bezeichnet wird.

Solche Spiralen und Targetmuster werden ebenfalls in einer großen Zahl verschiedener Systeme beobachtet; zu den bekanntesten zählen Reaktions-Diffusionssysteme wie die Belousov-Zhabotinskii-Reaktion [FB85, CH93] sowie Experimente aus dem Bereich der Hydrodynamik [CH93, Get98] und der nichtlinearen Optik [AVI88, Lug92, Res05, LEKGEM05, HLA06]. In Zusammenhang mit Labyrinth sind Spiralen deshalb besonders interessant, weil diese beiden durchaus verschiedenen Strukturtypen häufig in ein und demselben System bei verschiedenen Parametern auftreten [LMOS93, HM94, PCT97, Rot98, BHMT00, MHML06].

In dieser Arbeit wird ein nichtlineares optisches Modellsystem untersucht, in dem ein linear polarisierter Laserstrahl in eine Zelle mit Natriumdampf, der als nichtlineares Medium dient, eingestrahlt und das transmittierte Licht über einen Spiegel wieder in die Zelle zurückgekoppelt wird. Ein $\lambda/8$ -Plättchen verändert während der Rückkopplung die Polarisationsseigenschaften des Lichts, was bei geeigneter Wahl der Parameter zu einer symmetriebrechenden Instabilität führt, in der zwei gleichberechtigte stabile Polarisationszustände existieren. Zwischen diesen bilden sich Fronten aus, deren raumzeitliche Dynamik einen Kernpunkt der Untersuchungen darstellen wird.

Es handelt sich bei diesem Modellsystem um eine Variante der sogenannten *Einspiegelanordnung*, die von d’Alessandro und Firth vorgeschlagen wurde [DF91] und sich unter Verwendung verschiedener nichtlinearer Medien als Modellsystem der Strukturbildung in der nichtlinearen Optik vielfach bewährt hat [Hon93, TBWS93, TNT93, PRA93, GMP94, AL94, DSS⁺98]. Speziell die Einspiegelanordnung mit Natriumdampf hat in der Vergangenheit viele Ergebnisse geliefert, die zur Erklärung verschiedenster typischer Musterbildungsphänomene beigetragen haben [AL94, Ack96, Gah96, LA98, LAA⁺99, Aum99, Sch01, GW02, Hun06, Pes07]. Sie zeichnet sich besonders dadurch aus, dass für sie ein mikroskopisches Modell existiert, was einerseits die experimentellen Ergebnisse in sehr guter Übereinstimmung reproduziert, andererseits aber einfach genug ist, um umfangreiche numerische und semianalytische Untersuchungen zu ermöglichen.

In dieser Arbeit vorangegangenen Experimenten an diesem System [Pes07] wurden neuartige irreguläre Strukturen beobachtet, deren Herkunft bislang unklar ist [Pes05]. Die Motivation der vorliegenden Arbeit ist in erster Linie eine Klärung der Herkunft und eine experimentelle Untersuchung der Eigenschaften dieser Strukturen. Ausgehend von der Frage, ob es sich dabei um Labyrinth handelt, liegt ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit auf der theoretischen Analyse der Musterbildungsprozesse und der Untersuchung der Frontdynamik anhand numerischer Simulationen. Darüber hinaus beschäftigen sich weitere experimentelle und numerische Untersuchungen mit dem Auftreten und den Eigenschaften von Spiralen in benachbarten Parameterbereichen.

Kapitel 2

Labyrinth und Spiralen in strukturbildenden Systemen

Labyrinth – vielfältig verschlungene Wege in Gebäuden, Gärten oder Ornamenten – faszinieren seit der Antike die Menschheit. Sie wurden bereits in der griechischen Mythologie erwähnt und seither als Symbol mit vielfältigen Deutungen benutzt [Ker83]. In der heutigen Zeit stehen Labyrinth meist als Sinnbild für Rätsel und trotz einer gewissen Ordnung unübersichtliche Situationen. Die Herkunft des Wortes wird gängigerweise auf das vorgriechische Wort *labrys* = Doppelaxt (der Palast von Knossos wird als das „Haus der Doppelaxt“ bezeichnet) zurückgeführt [Bro90]; diese weit verbreitete Deutung ist jedoch höchst umstritten [Ker83].

Zwei Grundtypen von Labyrinth werden im Allgemeinen unterschieden: Einer davon ist das *unverzweigte* oder *unikursale* Labyrinth, bei dem es nur genau einen Weg in bzw. durch das Labyrinth gibt. Bereits aus der Antike sind eine Reihe von Verfahren überliefert, Labyrinth mit dieser topologischen Eigenschaft zu konstruieren [Ker83]. Das *verzweigte* Labyrinth dagegen besitzt ein ganzes Netzwerk mehrerer Wege, die sich auch kreuzen, Schleifen bilden oder in Sackgassen enden können. Solche Labyrinth werden auch als *Irrgärten* bezeichnet und dienen seit der Renaissance vorwiegend zum Zeitvertreib und der Erholung.

2.1 Labyrinthmuster

In der Physik strukturbildender Systeme haben Labyrinth in der jüngsten Zeit großes Interesse auf sich gezogen, weil sie unter bestimmten Voraussetzungen *selbstorganisiert* entstehen können. Der gegenwärtige Stand der Forschung auf diesem Gebiet wird in den folgenden Abschnitten dargelegt. Dabei wird im Weiteren ausschließlich von *zweidimensionalen* Strukturen die Rede sein.

2.1.1 Definition und Abgrenzung zu anderen Strukturen

Wegen ihrer Ähnlichkeit zu den klassischen Labyrinth wird in den letzten Jahren ein besonderer Typ von räumlich ausgedehnten Strukturen als *Labyrinthmuster* bezeichnet, der sich durch die folgenden Eigenschaften auszeichnet:

- Die Labyrinth besitzen eine charakteristische Längenskala und eine oft streifenförmige Nahordnung, die sich üblicherweise als lokal periodische Modulation einer Beobachtungsgröße in einer räumlichen Dimension darstellt.
- Es existiert keine Fernordnung, d. h. eine Aussage über die Gestalt des Musters über die charakteristische Längenskala hinaus ist nicht möglich.
- Labyrinthmuster besitzen keine ausgeprägten räumlichen Symmetrien, sondern weisen eine eher als „glasartig“¹ zu bezeichnende Struktur auf.

Entsprechend diesen Eigenschaften werden Labyrinthmuster auch als „(räumlich) chaotische Strukturen“ bezeichnet und als Spezialfall sogenannter „chaotischer Kristalle“ behandelt [LBRT⁺02]. Im Unterschied zu den von Newell und Pomeau beschriebenen *turbulenten Kristallen* [NP93] zeichnen sich Labyrinth durch eine lokale Beschreibbarkeit mit einem einzelnen räumlichen Wellenvektor aus, während turbulente Kristalle auch lokal eine unendliche Zahl von Fouriermoden beinhalten [LBRT⁺02]. Dennoch zeigen beide Typen von Strukturen ein ähnliches, „pulvriges“ Spektrum.

Die analytische Behandlung von Labyrinthmustern ist wegen der oben angeführten Eigenschaften im Allgemeinen nicht möglich, einen Zugang zur näheren Charakterisierung über die auftretenden Längenskalen hinaus kann jedoch eine statistische Behandlung eröffnen [GHK98, JG98, LBRT⁺02].

Bis Mitte der 1990er Jahre und auch in Teilen der neueren Literatur werden Labyrinth auch als *ungeordnete Streifenmuster (disordered roll patterns)* bezeichnet. Le Berre *et al.* bemühen sich um eine Abgrenzung der Begrifflichkeiten und begründen dies wie folgt: „*Labyrinths can certainly not be described as roll domains with a slowly varying amplitude and orientation, because the local orientation of the nodal lines of the field changes with a typical length scale of the order of the wavelength, so that they are fundamentally disordered.*“ [LBRT⁺02] Die Autoren sehen jedoch Labyrinth als Grenzfall solcher Domänen aus Streifenmustern an.

Eine weitere begriffliche Abgrenzung ist dem Effekt des „(*viscous*) *fingering*“ gegenüber vorzunehmen. Bei diesem Phänomen, das auch als Saffman-Taylor-Instabilität bekannt ist, wird die Grenzschicht zwischen zwei unterschiedlich viskosen Flüssigkeiten

¹ Labyrinthmuster in der Ebene werden wegen ihrer Eigenschaften auch als „zweidimensionale Gläser“ bezeichnet [LGJ92, RRR02, DM06].

modulationsinstabil, wenn die weniger viskose Flüssigkeit die andere verdrängt [ST58]. Diese Instabilität wird auch in anderen physikalischen Systemen beobachtet², und die Instabilitäten, die zur Bildung von Labyrinthen führen (vgl. Abschnitt 2.1.3), werden gelegentlich ebenfalls als „*fingering*“ bezeichnet (z. B. in [GMP96]). Die entstehenden Strukturen beim *viscous fingering* haben jedoch wenig mit den Labyrinthen gemein, vor allem fehlt bei ihnen eine einzelne charakteristische räumliche Längenskala – sie werden im Gegenteil wegen der vielen vorkommenden räumlichen Längenskalen auch als Fraktale bezeichnet [Kin87].

2.1.2 Experimentelle Beobachtung von Labyrinthen

Magnetische Domänen

Die am längsten und ausführlichsten untersuchten Systeme, in denen selbstorganisierte Labyrinthmuster auftreten, sind dünne Schichten verschiedener magnetischer Materialien. Malozemoff *et al.* berichten vom Auftreten labyrinthartiger magnetischer Domänenstrukturen in einer dünnen ferrimagnetischen Schicht, wenn ein magnetisches Feld parallel zur Ebene der Schicht aus der magnetischen Sättigung reduziert wird. In Abhängigkeit von der Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes *senkrecht* zur Schicht („*bias field*“) bilden sich in der Magnetisierung der Schicht hexagonale Muster („*bubbles*“) oder labyrinthförmig angeordnete Domänen entgegengesetzter Magnetisierung [HMD74, MS79, SW92c]. Abhängig von Richtung und Betrag des senkrechten Magnetfeldes wird dabei eine Magnetisierungsrichtung bevorzugt; die zugehörigen Domänen nehmen eine größere Fläche ein und die Streifensegmente des präferierten Zustandes sind breiter als die des benachteiligten. Die Autoren bezeichnen die auftretenden Strukturen nicht als Labyrinth, sondern als „(*disordered*) *stripe patterns*“ und gehen auf die genauen Eigenschaften dieser Strukturen – abgesehen von der charakteristischen Längenskala – und die Dynamik ihrer Entstehung nicht näher ein.

Erst spätere Arbeiten beschäftigen sich intensiver mit den spezifischen Eigenschaften dieser neuartigen Strukturen, die in ähnlicher Form auch bei der Vakuumdeposition ferromagnetischer Schichten [HKK72], in Ferrofluiden [RZS83, Ros85], Langmuir-Filmen [SS90, SC93] und Typ-I-Supraleitern [Fab58, HK74, CGJO05] auftreten. Der Mechanismus ist in all diesen Systemen sehr ähnlich und wird als eine Balance zwischen kurzreichweitigen attraktiven und langreichweitigen repulsiven Wechselwirkungen zwischen den Domänen erklärt, die positive bzw. negative Beiträge zur „Elastizität“ der Fronten bzw. der streifenförmigen Domänen liefern [LGJ92, SW92c, IGNK02]. Es existiert ein kritisches *bias field* (s. o.), oberhalb dessen die Fronten sich zusammenziehen, während bei geringe-

² z. B. bei der Ausbreitung von Flammenfronten [ZOM98] und in Reaktions-Diffusionssystemen [DH99]

ren Werten eine „negative Elastizität“ zu einer transversalen Modulationsinstabilität und zur Ausbildung von Labyrinthmustern führt [BW89]. Langer *et al.* beschreiben diesen Prozess als Minimierung eines Energiefunktional, das viele metastabile lokale Minima (entsprechend den verschiedenen Formen, die die Labyrinthmuster annehmen können) besitzt [LGJ92].

Einen ausführlicheren Überblick über die Bildung von Labyrinth in magnetischen Systemen geben z. B. Seul und Wolfe in [SW92a, SW92b].

Reaktions-Diffusionssysteme

Auch in Reaktions-Diffusionssystemen werden Labyrinthmuster beobachtet. Das prominenteste Beispiel dieser Klasse bildet zweifellos die Belousov-Zhabotinskii-Reaktion (BZR) [Zha64]. Diese Reaktion (Bromination von Malonsäure in einem sauren Medium) ist im Detail sehr kompliziert, jedoch existieren verhältnismäßig einfache mathematische Modelle, die die für die Strukturbildung wesentlichen Prozesse gut beschreiben. Aus diesem Grund hat sich die BZR zu einem Paradebeispiel chemischer strukturbildender Systeme entwickelt und ist dementsprechend gut untersucht.

Bei guter Durchmischung der Reagenzien treten zunächst nur räumlich homogene Effekte, wie Oszillationen, Erregbarkeit und die Bistabilität zwischen Zuständen mit unterschiedlicher Konzentration bestimmter Komponenten auf. Wird die Reaktion jedoch in einer dünnen Schicht durchgeführt, in der lediglich die Diffusion eine räumliche Kopplung vermittelt, treten raumzeitliche Oszillationen auf, die sich typischerweise als Spiralen darstellen (vgl. Abschnitt 2.2, [FB85, CH93, KS94]).

Wird die Reaktion darüber hinaus periodisch getrieben³, so findet ein Übergang von Spiralmustern zur Ausbildung ausgedehnter Labyrinth statt [POS97, MML04]. Diese Labyrinth entstehen als Muster stehender Wellen durch eine resonante Wechselwirkung des periodischen Treibers mit der intrinsischen Oszillationsfrequenz der Reaktion in einem Frequenzverhältnis von 2:1 [YHM⁺02].

Bereits früher wurden auch in anderen Reaktions-Diffusions-Systemen ohne periodisches Treiben Labyrinthstrukturen beobachtet und ihre Entstehung aus einer transversalen Frontinstabilität untersucht [LMOS93, LS95, GMP96, MO96].

Granulare Materie

Für Systeme, in denen granulare Materie vertikal geschüttelt wird (vgl. [UMS96] und Abschnitt 2.2), wurden labyrinthartige Strukturen zwar vorhergesagt bzw. in numerischen Simulationen gefunden [Rot98, ATV99], aber meines Wissens nach bisher nicht experimentell nachgewiesen. In den Modellrechnungen finden sich ähnlich wie in der periodisch

³ z. B. durch periodisch variierende Beleuchtung bei einer photosensitiven Variante der BZR [GBB83]

getriebenen BZR (s. o.) Labyrinth aus Domänen, die mit der halben Anregungsfrequenz des Systems oszillieren und sich in der Phase der Oszillation um π unterscheiden. Ihre Entstehung wird wiederum auf eine transversale Modulationsinstabilität der Domänengrenzen zurückgeführt, die mit einer „negativen Elastizität“ erklärt wird [ATV99, BAC⁺00]. Diese Frontinstabilität unterliegt einer Sättigung, die die Labyrinthmuster stabilisiert, oder aber zu stabilen, transversal modulierten Fronten („decorated“ fronts) führt, die auch experimentell beobachtet wurden [ABK⁺99].

Labyrinthartige Muster wurden auch in Experimenten zur Winderosion granularer Materie gefunden, sobald die Windrichtung gegenüber der anfänglichen Richtung um 90° gedreht wird [Goo91]. Caps und Vandewalle stellten in einer theoretischen Untersuchung dieses Systems fest, dass sich die Anzahl der Defekte in den *ripple*-Strukturen mit der Zeit t nach einem Skalengesetz ($\propto 1/t^2$) entwickelt, wenn die Windrichtung konstant bleibt; bei einem Wechsel der Windrichtung um 90° verlangsamt sich die Abnahme der Defektdichte auf ein Skalengesetz mit $1/t$ [CV01]. Es handelt sich jedoch bei diesen Strukturen – im Gegensatz zu jenen in bistabilen Systemen – um *transiente* Strukturen, die im Langzeitlimes wieder in ein paralleles Streifenmuster übergehen. Zudem erscheint fraglich, ob diese Strukturen überhaupt als Labyrinth im Sinne der Definition von Le Berre *et al.* zu bezeichnen sind, oder ob es sich dabei eher um eine Sonderform turbulenter Kristalle handelt.

Strukturen, die den bisher beschriebenen Labyrinthmustern sehr ähnlich sehen, jedoch ebenfalls nur transient in Erscheinung treten, beobachtet man auch in der Rayleigh-Bénard-Konvektion [HG87]. Dort entstehen bei schneller Erhöhung des Kontrollparameters zunächst labyrinthförmig angeordnete Konvektionsrollen, die jedoch mit der Zeit in große Domänen von Rollenmustern verschiedener Orientierung übergehen, die jeweils nur noch wenige Defekte aufweisen und sich lokal durch einen einzelnen transversalen Wellenvektor beschreiben lassen.

Mechanische Instabilität dünner Schichten

Ganz andere Mechanismen als die bisher diskutierten findet man in Systemen, in denen Labyrinth als „*wrinkles*“ (Falten) in der Oberflächenstruktur von dünnen Schichten auftreten, die sich bei schneller Abkühlung zusammenziehen (z. B. [BBE⁺98]) oder anderweitig in der lateralen Ebene unter Spannung gesetzt werden.⁴ Der grundlegende Mechanismus ist vergleichbar mit dem Einknicken vertikal belasteter Stäbe (Euler-Instabilität, „*buckling*“ [Jon06]) und lässt sich im Prinzip mit einer energetischen Betrachtung gut erklären, bei der die Labyrinthmuster einen Gleichgewichtszustand bilden. Die transiente

⁴ Obwohl die Strukturen durch die entstehenden „Berge“ und „Täler“ genaugenommen dreidimensional sind, lässt sich dieses Phänomen ebenfalls als Strukturbildung in zwei Dimensionen betrachten, wobei die dritte Raumrichtung die Beobachtungsgröße darstellt.

Dynamik und die Auswahl bestimmter Muster oder Eigenschaften ist dagegen noch wenig verstanden und Gegenstand aktueller Forschung [HI06].

Ein ähnliches Phänomen wird auch in dünnen Schichten bestimmter Flüssigkristalle beobachtet, die unter eine kritische Temperatur abgekühlt werden [PGV⁺05]: Hier tritt die Labyrinthstruktur als Modulation der Schichtdicke zu Tage und wird damit erklärt, dass die Oberflächenschichten eine geringere Dichte besitzen als das darunter befindliche Volumenmaterial und eine (lokal) periodische Modulation der Schichtdicke die energetisch günstigste Konfiguration darstellt.

Optische Systeme

Obwohl für eine Reihe optischer Experimente die Entstehung von Labyrinthen unter bestimmten Bedingungen vorhergesagt wird (s. u.), ist ein experimenteller Nachweis bis jetzt nur in einem System gelungen: Taranenko und Weiss berichten von einer transversalen Modulationsinstabilität von Fronten zwischen Domänen unterschiedlicher Phase beim entarteten Vierwellenmischen in einem Resonator (*degenerate four-wave-mixing oscillator*, DFWMO), die zu Labyrinthstrukturen führt [TSW98, WVS⁺99]. In diesem Experiment ist die Phase des Lichtfeldes – im Gegensatz zu vielen anderen optischen Experimenten – nicht frei, sondern kann nur zwei diskrete Werte annehmen, die jeweils stabile, homogene Zustände darstellen und sich um π unterscheiden. Der Ordnungsparameter ist also nicht das komplexwertige Lichtfeld, sondern eine reelle Größe: Oberhalb einer Schwelle bilden sich in diesem System spontan Domänen verschiedener Phase aus, die durch dunkle (Ising-)Fronten voneinander getrennt sind.

Der betrachtete Kontrollparameter des Experiments ist die Verstimmung des Resonators: Für niedrige Verstimmungen verhalten sich die Domänengrenzen wie elastische Bänder, ziehen sich also zusammen und führen so zum Verschwinden endlich ausgedehnter Domänen. Bei steigender Verstimmung werden zunächst in einem Regime langsamer Dynamik stabile, lokalisierte Strukturen beobachtet, die aus schrumpfenden Domänen entstehen und die durch Wechselwirkung zweier gegenüberliegender Fronten über oszillatorische Ausläufer stabilisiert werden [TZWW99]. Eine weitere Erhöhung der Verstimmung führt schließlich zu einem „antielastischen“ [TSW98] Verhalten der Domänenwände, d. h. die Länge der Front(en) wächst mit der Zeit und es bilden sich Labyrinthmuster aus. Dieses Verhalten der Frontdynamik in Abhängigkeit von der Verstimmung wurde auch theoretisch in [SSM98] diskutiert.

Zu einem vergleichbaren Ergebnis kommen auch Gallego *et al.* bei numerischen Untersuchungen eines Resonators mit einem Kerr-Medium [GMT00]. Dort wird die Bildung von Labyrinthen auf eine krümmungsgetriebene Modulationsinstabilität von Fronten zwischen Domänen unterschiedlicher Polarisierung zurückgeführt. Der Kontrollparameter für

das Verhalten der Frontdynamik ist dort die eingestrahlte Intensität: für geringe Intensitäten zeigen die Domänengrenzen ein „anti-elastisches“ Verhalten und bilden Labyrinth aus, während für steigende Intensität zunächst wiederum lokalisierte Strukturen entstehen können und bei weiterer Erhöhung ein „*coarsening*“-Regime folgt, in dem die Fronten sich zusammenziehen und kleinskalige Modulationen somit verschwinden.

Eine Reihe von theoretischen Arbeiten beschäftigen sich darüber hinaus mit Modellen für konzeptionell ähnliche Experimente (darunter das Zweiwellenmischen in einem Ringresonator [Rom04], der entartete optisch-parametrische Oszillator (DOPO) [LBRT00] und parametrische Oszillatoren mit einem zusätzlichen Polarisationsfreiheitsgrad [IMS01]) und sagen für diese Systeme ebenfalls die Existenz von Labyrinthmustern vorher.

Ein weiteres optisches System, das für die Reichhaltigkeit transversaler Musterbildungsphänomene bekannt ist, ist das sogenannte *liquid-crystal light valve* mit optischer Rückkopplung [AVI88]. Hierbei handelt es sich um ein elektro-optisches Hybridsystem, bei dem ein Flüssigkristall die Phase des eingestrahlten Lichts beeinflusst. Die Rückkopplung geschieht dabei über eine photoleitende Schicht, die abhängig von der auf sie treffenden Intensität die über den Flüssigkristall abfallende Spannung räumlich variiert. In diesem System wurde eine Reihe von verschiedenen Strukturen beobachtet [Res05]; Labyrinth sind jedoch – obwohl theoretisch vorhergesagt [LL00] – bisher nicht darunter.

2.1.3 Frontdynamik in bistabilen Systemen

In vielen der in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Fälle entstehen Labyrinth in bistabilen Systemen, bei denen ein „anti-elastisches“ Verhalten für eine Modulationsinstabilität einer ursprünglich geraden die stabilen Zustände verbindenden Front und infolgedessen für die Ausbildung der Labyrinth ursächlich ist [RZS83, BW89, LGJ92, SW92c, ATV99]. Die mechanische Analogie einer „Elastizität“ der Front lässt sich in einigen Fällen⁵ mit der Minimierung eines Energiefunktional begründen, in dissipativen Systemen wird diese Betrachtungsweise jedoch in der Regel scheitern bzw. nur eine phänomenologische Erklärung liefern können.

Für die Bewegung von Fronten in solchen Systemen kommen im Wesentlichen drei Mechanismen in Frage:

- *Asymmetrie der beteiligten Zustände:* In einem bistabilen System kann einer der beiden beteiligten Zustände bevorzugt sein. In diesem Fall werden Domänen dieses Zustandes auf Kosten des anderen Zustandes wachsen [Kra81, CEK05], solange nicht andere Mechanismen dieses Wachstum bremsen oder verhindern.

⁵ namentlich in Systemen, in denen sich ein (verallgemeinertes) Potential definierten lässt

- *Intrinsische Bewegung:* Auch bei völliger Äquivalenz der beteiligten Zustände kann die Front selbst eine gebrochene Symmetrie aufweisen. Solche sogenannten *Blochfronten* bewegen sich in Nichtgleichgewichtssystemen in eine Richtung und mit einer Geschwindigkeit, die durch ihre Gestalt gegeben ist, die sich mit einem „chiralen Ordnungsparameter“ charakterisieren lässt [CLHL90].

Symmetrische (*Ising-*)Fronten zeigen dagegen keine solche intrinsische Bewegung, sie bleiben im Falle der Gleichberechtigung beider Zustände – zumindest bei Betrachtung nur einer räumlichen Dimension – in Ruhe.

- *Krümmungsgetriebene Dynamik:* In Systemen mit mehr als einer räumlichen Dimension sind Fronten, die zwei stabile Zustände verbinden, im Allgemeinen gekrümmt. Der zusätzliche räumliche Freiheitsgrad verursacht in vielen Fällen eine Bewegung von Fronten, die in einer räumlichen Dimension ruhen würden.

Eine solche krümmungsgetriebene Frontdynamik wird in vielen Fällen für die Entstehung von Labyrinthen verantwortlich gemacht [LGJ92, GMP96, TZWW99, WVS⁺99, GMT00, GCOM04, MML04, Rom04] und soll deshalb im Folgenden näher betrachtet werden.

Die meisten der bisher genannten Systeme weisen – zumindest in dem Parameterbereich, in dem Labyrinth entstehen – keine intrinsische Bevorzugung eines der stabilen Zustände auf, und die Fronten sind in der Regel vom Ising-Typ. In diesen Fällen trägt hauptsächlich die Frontkrümmung zur Dynamik der Domänengrenzen bei.⁶ Im Allgemeinen sind die Zusammenhänge zwischen der lokalen Krümmung und der resultierenden Frontgeschwindigkeit relativ kompliziert (z. B. [GMP96, HM98, HYE⁺06]), in vielen Fällen [LGJ92, GMT00, GCOM01, GCOM04, MML04] hängt jedoch die lokale Geschwindigkeit v_{\perp} in Richtung der Frontnormalen linear von der lokalen Krümmung $\kappa = 1/R$ der Front ab, wobei R den lokalen Krümmungsradius beschreibt:

$$v_{\perp} = -\frac{\gamma_c}{R}, \quad (2.1)$$

Der Koeffizient dieser krümmungsgetriebenen Frontdynamik γ_c ist im Allgemeinen parameterabhängig: Positive Werte verursachen eine Kontraktion der Domänenwand (Abbildung 2.1 a), d. h. topologisch geschlossene Fronten kontrahieren und verschwinden, unendlich (oder bis zu einem durch Randbedingungen fixierten Ort) ausgedehnte Fronten werden zunehmend begradigt. Negative Werte von γ_c verursachen dagegen eine Expansion geschlossener Domänen (Abbildung 2.1 b) bzw. das Anwachsen einer transversalen Modulation der Front.

⁶ Eine (vor allem kurzreichweitige) Interaktion mehrerer Fronten kann diese Dynamik allerdings beeinflussen.

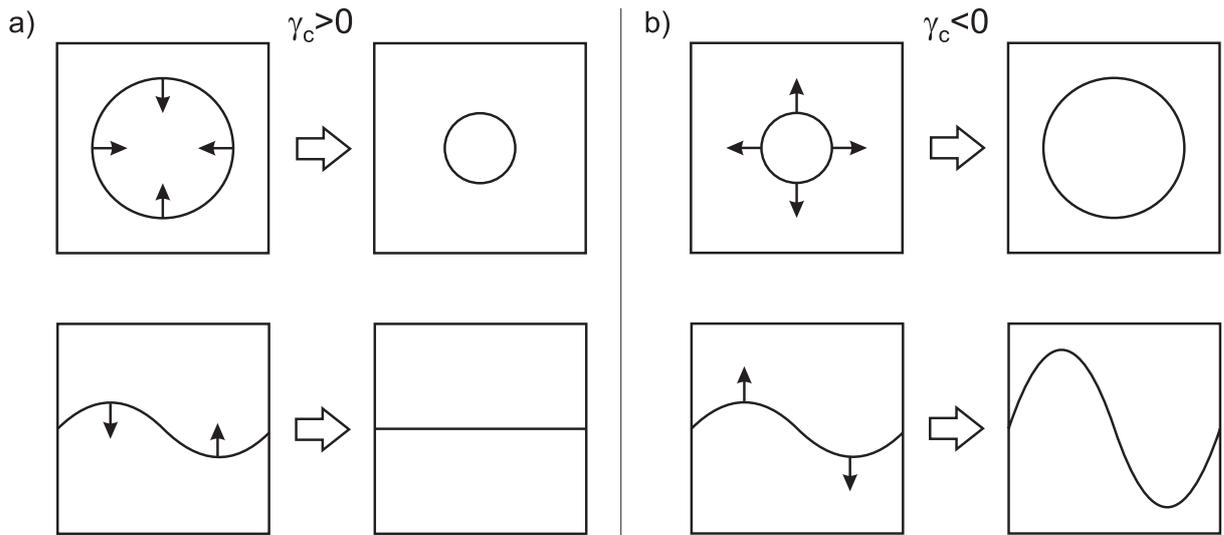


Abbildung 2.1: Krümmungsgetriebene Dynamik von runden Domänen (oben) und ausgedehnten Fronten (unten). a) $\gamma_c > 0$, Kontraktion; b) $\gamma_c < 0$, Expansion.

Im Spezialfall kreisförmiger Domänen, bei denen sich zwar der Radius, nicht aber die Form mit der Zeit ändert, lässt sich die Zeitentwicklung des Domänenradius exakt angeben:

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\frac{\gamma_c}{R} \quad (2.2)$$

Für Systeme, bei denen die beiden Zustände nicht äquivalent sind, lässt sich allgemeiner schreiben:

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\frac{\gamma_c}{R} + \gamma_i \quad (2.3)$$

Der Koeffizient γ_i beschreibt dabei die Geschwindigkeit einer geraden Front aufgrund einer asymmetrischen Präparation des Systems, bei der ein Polarisationszustand gegenüber dem anderen bevorzugt ist.

Für das in dieser Arbeit behandelte System, die Einspiegelanordnung mit Natriumdampf als nichtlinearem Medium und $\lambda/8$ -Plättchen, wurde in [Pes07] die krümmungsgetriebene Frontdynamik im Hinblick auf die Entstehung von räumlich lokalisierten Strukturen ausführlich untersucht. Im dort untersuchten Parameterbereich (unterhalb der Schwelle zur hexagonalen Musterbildung) wurden nur positive γ_c gefunden; es hat sich in den Untersuchungen allerdings herausgestellt, dass der Betrag dieses Koeffizienten mit steigender Eingangsintensität stark abnimmt. Diese Abnahme ist nicht-asymptotisch, so dass für höhere Intensitäten ein Nulldurchgang von γ_c zu erwarten ist.

2.2 Spiralen

Neben geometrisch einfachen, stationären Turing-Strukturen mit ausgeprägter Symmetrie (z. B. Streifen, Quadrate und Hexagone) zählen *Spiralen* zu den am besten untersuchten Strukturen auf dem Gebiet der Selbstorganisation. Es handelt sich dabei um nicht nur im Raum, sondern auch in der Zeit oszillierende Strukturen, die sich um ein Organisationszentrum entwickeln und eine radiale Bewegung auf dieses zu oder von ihm weg aufweisen.

Da es zu selbstorganisierten Spiralen inzwischen eine fast unüberschaubare Fülle an Arbeiten gibt und die Spiralen in der vorliegenden Arbeit eine eher untergeordnete Rolle spielen, werden im Folgenden nur die wichtigsten Grundlagen skizziert. Ein ausführlicherer Überblick über das Themengebiet findet sich z. B. in [Hun06] und der dort angegebenen Literatur.

Belousov-Zhabotinskii-Reaktion

Eines der ersten Laborexperimente, in denen Spiralmuster gefunden wurden, ist die bereits erwähnte Belousov-Zhabotinskii-Reaktion (BZR) [Zha64] in einer dünnen, also quasi-zweidimensionalen Schicht [FB85]. In diesem Experiment entstehen Spiralen als räumliche Änderung in der Konzentration bestimmter Reaktanden sowohl spontan an minimalen Inhomogenitäten als auch als Resultat einer willkürlichen Störung [CH93, Mül96]. Weitere Störungen können dazu führen, dass die Spiralmuster aufbrechen und paarweise gegenläufige Spiralen entstehen, die durch die ursprüngliche Welle miteinander verbunden sind (vgl. [Win72]). Auf diese Weise entstehen Muster, bei denen oft eine Reihe von Spiralzentren auf dem betrachteten Grundgebiet existieren können, deren Ausläufer das gesamte Grundgebiet ausfüllen. Solche Strukturen werden im Folgenden auch als *ausgedehnte Spiralmuster* bezeichnet.

Hydrodynamische Systeme

Ein zweites „Paradebeispiel“ musterbildender Systeme stellt die Rayleigh-Bénard-Konvektion dar [CH93, Get98]. In diesem System bestehen Strukturen aus Konvektionsrollen, die sich aufgrund eines Temperaturgradienten zwischen zwei horizontalen Platten ausbilden, zwischen denen eine dünne Flüssigkeitsschicht eingeschlossen ist. Abhängig von den Randbedingungen und den experimentellen Parametern können hierbei ebenfalls Spiralen mit unterschiedlich vielen Armen und sogenannte *Targetmuster* entstehen [BBAC91, CH93, HEA94, Get98, BPA00]. Letztere sind Strukturen aus konzentrischen

Ringen, die sich vom Organisationszentrum aus radial nach außen⁷ bewegen. Solche Targetmuster lassen sich auch als „nullarmige“ Spiralen interpretieren.

Ähnliche Strukturen wie die in der Rayleigh-Bénard-Konvektion werden auch im sogenannten Faraday-Experiment beobachtet, in dem eine horizontal ausgedehnte Flüssigkeitsschicht vertikal geschüttelt (also periodisch auf und ab bewegt) wird [EF94, KKRT96]. Wiederum werden Spiralen unterschiedlicher Armzahl und Chiralität beobachtet, in diesem System ist die radiale Bewegung jedoch zum Spiralzentrum hin gerichtet. Sehr eng verwandt mit dem Faraday-Experiment ist ein System, in dem statt einer Flüssigkeit eine dünne Schicht granularer Materie vertikal bewegt wird. Neben der wohl bekanntesten Struktur, die in diesem System gefunden wurde, dem lokalisierten *Oszillon* [UMS96], beobachtet man auch hier Spiralen, Targetmuster und raumzeitlich irreguläre Zustände (*spiral defect chaos*, s. u.) [UMS98, JKP00, BLSS01].

Optische Systeme

Vergleichbare Muster wie die zuvor geschilderten wurden auch in optischen Systemen gefunden, allerdings ist die Zahl der Arbeiten auf diesem Gebiet noch sehr gering.

In optischen Systemen ist im Allgemeinen das komplexwertige elektromagnetische Feld die Beobachtungsgröße. Eine räumliche Strukturierung kann daher sowohl in der Intensität als auch in der Phase des Lichtfeldes auftreten. Ein bekanntes Beispiel für Strukturen in der Phase sind die sogenannten „*optical vortices*“, bei denen die Intensitätsverteilung azimuthal unstrukturiert ist, dafür jedoch die Phase des elektromagnetischen Feldes auf einem Pfad um das Zentrum herum um ein Vielfaches von 2π variiert. Solche Strukturen wurden in [CGR89] vorhergesagt und haben seitdem ein großes Interesse auf sich gezogen (z. B. [Lug92, Wei92, ABR99, WVS⁺99, VS99]). Sie unterscheiden sich jedoch grundlegend von den anderen in diesem Abschnitt beschriebenen Strukturen⁸ und seien daher nur der Vollständigkeit halber erwähnt. Die Spiralen, die im Kontext dieser Arbeit von Interesse sind, werden hingegen in der Intensität des Lichtfeldes beobachtet.

Die erste Entdeckung von solchen Intensitäts-Spiralen in einem optischen System wurde von Akhmanov *et al.* beschrieben. Sie untersuchten ein nichtlineares Interferometer mit einem elektro-optischen Hybridsystem (LCLV, siehe Abschnitt 2.1.2) als nichtlineares Medium, bei dem als Besonderheit das rückgekoppelte Feld räumlich skaliert, verschoben

⁷ In den meisten Experimenten wird eine auswärts gerichtete Bewegung beobachtet, die Richtung der Bewegung soll aber nicht im Sinne einer Definition verstanden werden: auch bei einer radialen Bewegung nach innen wird im Folgenden von Targetmustern die Rede sein.

⁸ „Optical vortices“ stellen Phasensingularitäten dar, bei denen sich auf einem Pfad um das Zentrum die *Beobachtungsgröße* auf eine Weise ändert, die sich als „Schraubenfläche“ veranschaulichen lässt. Bei den Spiralen im engeren Sinne ändert sich zwar bei einem azimuthalen Umlauf die Beobachtungsgröße bei *konstantem* Radius auch, vor allem aber lassen sich dort – anders als bei den zuvor genannten – Pfade um das Zentrum finden, bei denen die Beobachtungsgröße konstant bleibt und bei denen sich der *radiale Abstand* dieses Pfades vom Zentrum bei einem Umlauf ändert.

oder rotiert werden kann. Bei einer durch die Rückkopplung induzierten Brechung der Rotationssymmetrie wurden Spiralen beobachtet [AVI88, AVI+92], deren Eigenschaften wesentlich von der Manipulation des rückgekoppelten Feldes abhängen. In einem ähnlich aufgebauten System wurden später spiralförmige Strukturen gefunden, deren Längenskala radial nach außen zunimmt [Res05].

Den in den vorigen Abschnitten beschriebenen Spiralen in chemischen oder hydrodynamischen Systemen deutlich ähnlicher sind Strukturen, die in einem optisch gepumpten Halbleiterresonator [LECGEM05] beobachtet und für optisch parametrische Oszillatoren vorhergesagt wurden [LBS00, LBRTT05]. Sie besitzen eine klar definierte radiale Längenskala, und rotieren nicht aufgrund einer experimentell vorgegebenen azimuthalen Anisotropie, sondern zeigen eine spontane Symmetriebrechung bezüglich der Chiralität. Der optische Eindruck einer Rotation entsteht hier durch die radiale Bewegung.

Besonders erwähnenswert im Zusammenhang mit dem in der vorliegenden Arbeit behandelten System sind die Ergebnisse von Huneus *et al.*: Sie haben in einer Einspiegelanordnung mit Natriumdampf unter dem Einfluss eines Magnetfeldes ebenfalls Spiralen in der Intensität des Lichtfeldes beobachtet [Sch01, HSAL03, HLA06, Hun06]. Im Gegensatz zu dem in Abschnitt 2.4.2 vorgestellten System wurde dort mit einem zirkular polarisierten Eingangslichtfeld und ohne polarisationsändernde Elemente im Rückkoppelzweig gearbeitet. Bei geeigneten Parametern ergibt sich eine Hopf-Instabilität mit endlicher transversaler Wellenzahl, durch die sich in numerischen Simulationen mit Translations-symmetrie ein zeitlich oszillierendes, hexagonales Muster („winking hexagons“) ausbildet [LAL97]. Unter dem Einfluss des radialsymmetrischen, aber inhomogenen Strahlprofils im Experiment hingegen entstehen Spiralen mit verschiedener Armzahl und Targetmuster im Zentrum des Gaußschen Strahls. Die radiale Bewegungsrichtung der Spiralarms wird dabei von der Phasenfrontkrümmung des Strahlprofils bestimmt [HLA06]; zu einem vergleichbaren Ergebnis diesbezüglich kommen auch Larionova *et al.* in [LECGEM05].

Räumlich ausgedehnte Spiralmuster, wie sie in chemischen und hydrodynamischen Systemen vorkommen und auch in [LBS00, LBRTT05] vorhergesagt wurden, konnten in den Arbeiten von Huneus *et al.* nicht beobachtet werden. Lodahl, Bache und Saffman haben in numerischen Untersuchungen [LBS00] festgestellt, dass in dem von ihnen betrachteten System (ohne einen radialen Phasengradienten) ausgedehnte Spiralmuster nur dann auftreten, wenn das Band der instabilen Wellenzahlen der Hopf-Bifurkation bis $k = 0$ (dem homogenen Zustand) reicht. Für Hopf-Instabilitäten mit einem *endlichen* Wellenzahlband finden sich dort statt dessen Streifenmuster, die sich mit einer der raumzeitlichen Oszillation entsprechenden Geschwindigkeit fortbewegen.

Zusammenhang zwischen Labyrinthen und Spiralen

Die bisher beschriebenen Spiralstrukturen weisen ein im zeitlichen Mittel stationäres⁹ oder nur langsam bewegliches Spiralzentrum auf. Ein qualitativ anderer Zustand ist das sogenannte „*spiral defect chaos*“: Hierbei handelt es sich um einen raumzeitlich irregulären Zustand, bei dem eine Vielzahl von dicht benachbarten Spiralzentren zusammen mit Verzweigungen und Korngrenzen („Defekten“) existieren, die sich auf Raum- und Zeitskalen bewegen, die mit denen der radialen raumzeitlichen Entwicklung um das Zentrum vergleichbar sind [MBCA93, AS93, CT95, Get98, BPA00]. Die einzelnen Zentren können dabei spontan entstehen oder verschwinden bzw. die Zahl ihrer Arme verändern. Das Erscheinungsbild solcher raumzeitlich irregulären Zustände unterscheidet sich normalerweise deutlich von Labyrinthmustern, Schnappschüsse der Dynamik können jedoch Labyrinthen auch sehr ähnlich sehen [OF96]. Obwohl z. B. Reimann *et al.* solche Zustände als Labyrinth bezeichnen [RRR02], sind diese aufgrund ihrer Turbulenz keine Labyrinthmuster im Sinne der Definition aus Abschnitt 2.1.1.

Es ist allerdings bemerkenswert, dass in einigen Systemen, in denen Labyrinth beobachtet oder vorhergesagt wurden, bei Änderung eines Kontrollparameters auch Spiralen auftreten können [LMOS93, HM94, LS95, PCT97, Rot98, BHMT00, MHML06]. Dies wird in den zitierten Arbeiten auf einen *Nichtgleichgewichts-Ising-Bloch-Übergang* (NIB-Übergang) zurückgeführt, bei dem die Labyrinth im Ising-Regime als Folge einer Modulationsinstabilität auftreten und die Spiralen aufgrund der intrinsischen Bewegung von Blochfronten entstehen.

2.3 Motivation dieser Arbeit

In Abschnitt 2.1.2 ist gezeigt worden, dass Labyrinth in sehr verschiedenen physikalischen Systemen auftreten können und somit zu den universellen Strukturtypen aus dem Bereich der Selbstorganisation zu zählen sind. Die Einspiegelanordnung mit Natriumdampf als nichtlinearem Medium hat in der Vergangenheit nahezu alle grundlegenden Phänomene zweidimensionaler Strukturbildung¹⁰ hervorgebracht (vgl. Abschnitt 2.4.1). Dabei wurde regelmäßig eine hervorragende Übereinstimmung zwischen experimentellen und numerischen Ergebnissen festgestellt, und Analysen des theoretischen Modells haben viele Beiträge zum Verständnis der beobachteten Strukturen geliefert.

⁹ D. h. der das Zentrum definierende „Tip“ der Spirale bleibt ortsfest oder führt kreisförmige bzw. hypozykloide Bewegungen auf einer Längenskala aus, die vergleichbar mit dem radialen Abstand der Spiralarms ist.

¹⁰ darunter periodische Strukturen in Form von Streifen, Quadraten, Hexagonen, Quasimustern und Übergittern; transversal lokalisierte Strukturen (dissipative Solitonen) und Fronten, sowie Spiralen und Targetmuster

Labyrinth wurden in diesem System bislang noch nicht beobachtet, allerdings wurden im Zuge der Untersuchung von dissipativen Solitonen in der Einspiegelanordnung [Pes07] neuartige, räumlich irreguläre Strukturen gefunden, deren Herkunft zunächst unklar war [Pes05]. Aufgrund der eigentlichen Zielsetzung der Experimente sind die Eigenschaften dieser Strukturen in [Pes07] nicht näher untersucht worden.

Es hat sich herausgestellt, dass eine krümmungsgetriebene, transversale Modulationsinstabilität von Fronten in bistabilen Systemen mit zwei gleichberechtigten Zuständen ein weit verbreiteter Mechanismus für die Bildung von Labyrinthstrukturen ist. Die Einspiegelanordnung mit Natriumdampf und $\lambda/8$ -Plättchen, die im folgenden Abschnitt vorgestellt wird, erfüllt die wesentlichen Voraussetzungen für die Entstehung von Labyrinth auf diese Weise, so dass die Vermutung naheliegt, dass es sich bei den zuvor genannten – bis dahin unverstandenen – Strukturen um Labyrinthmuster oder Ausschnitte aus solchen handeln könnte. Sollte sich diese Vermutung bestätigen, so würde dies zum einen das Ungleichgewicht zwischen der großen Zahl von theoretischen Arbeiten zu Labyrinth in der nichtlinearen Optik und dem experimentellen Nachweis in lediglich einem einzelnen optischen System reduzieren; zum anderen würde mit dem experimentellen Nachweis von Labyrinth die Rolle der Einspiegelanordnung mit Natriumdampf als äußerst vielseitiges Werkzeug für die Forschung auf dem Gebiet der Selbstorganisation erneut bestätigt, und es ist zu erwarten, dass auch in diesem Fall numerische und semi-analytische Untersuchungen fundamentale Erkenntnisse liefern.

Das Ziel dieser Arbeit ist daher in erster Linie, die Herkunft der von [Pes05] beobachteten Strukturen zu klären und die Mechanismen ihrer Entstehung zu untersuchen. Zudem ist bekannt, dass die Einführung eines transversalen Magnetfeldes in diesem Experiment die Möglichkeit eröffnet, auch spiralförmige, raumzeitlich oszillierende Strukturen zu beobachten. Es ist somit naheliegend, das System auch auf einen potentiellen Übergang von Labyrinth zu Spiralen bzw. auf deren Existenz in benachbarten Regionen des Parameterraums hin zu untersuchen.

2.4 Die Einspiegelanordnung mit Natriumdampf

Die sogenannte *Einspiegelanordnung* (*single-mirror feedback scheme*), zuerst vorgeschlagen von Firth [Fir90], ist ein einfach aufgebautes Modellsystem zur Untersuchung transversaler Strukturbildungsphänomene in der nichtlinearen Optik.

Solche struktur- oder musterbildenden Prozesse in der Optik basieren auf dem Zusammenwirken einer Nichtlinearität bei der Wechselwirkung zwischen Licht und Materie und einer räumlichen Kopplung, die typischerweise durch Beugung realisiert wird. Eine allge-

meine Beschreibung solcher Systeme ist durch die *nichtlineare paraxiale Wellengleichung* [Boy92] gegeben:

$$\frac{\partial E(x, y, z)}{\partial z} = -\frac{i}{2k_0} \Delta_{\perp} E(x, y, z) - \frac{ik_0}{2} \chi(x, y, z, E) E(x, y, z) \quad (2.4)$$

$E(x, y, z)$ ist dabei die langsam variierende Einhüllende des elektrischen Feldes mit der Wellenzahl $k_0 = 2\pi/\lambda$, χ ist die nichtlineare komplexe Suszeptibilität des Mediums, und der transversale Laplace-Operator $\Delta_{\perp} = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ beschreibt die Beugung.

Das simultane Auftreten von Nichtlinearität und Beugung ist einerseits verantwortlich für die Bildung vielfältiger Strukturen, andererseits ergeben sich daraus gravierende Schwierigkeiten bei der theoretischen Behandlung. Die in Abbildung 2.2 gezeigte Einspiegelanordnung umgeht diese Problematik durch eine räumliche Trennung von nichtlinearer Wechselwirkung und der für die Beugung notwendigen Propagation des Lichtfeldes.

Hierbei wird das Lichtfeld – modelliert als ebene Welle – in ein „dünn“ nichtlineares Medium eingestrahlt. „Dünn“ bedeutet, dass die Länge L des nichtlinearen Mediums in Ausbreitungsrichtung so gering ist, dass Beugungseffekte auf dieser Distanz vernachlässigt werden können. Hinter dem Medium propagiert das Licht in einem linearen Medium (üblicherweise Luft oder Vakuum) über eine Distanz d zu einem ebenen Rückkoppelspiegel mit hoher Reflektivität, und wird von diesem in das nichtlineare Medium zurückgekoppelt. Unter der Voraussetzung $d \ll L$ kann daher angenommen werden, dass Beugung ausschließlich im linearen Medium stattfindet. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass Laufzeiteffekte vernachlässigbar sind, die Rückkopplung also instantan stattfindet. Dies ist dann in guter Näherung der Fall, wenn die intrinsischen Zeitskalen der nichtlinearen Prozesse groß gegenüber der Laufzeit des Lichts zum Spiegel und zurück sind.

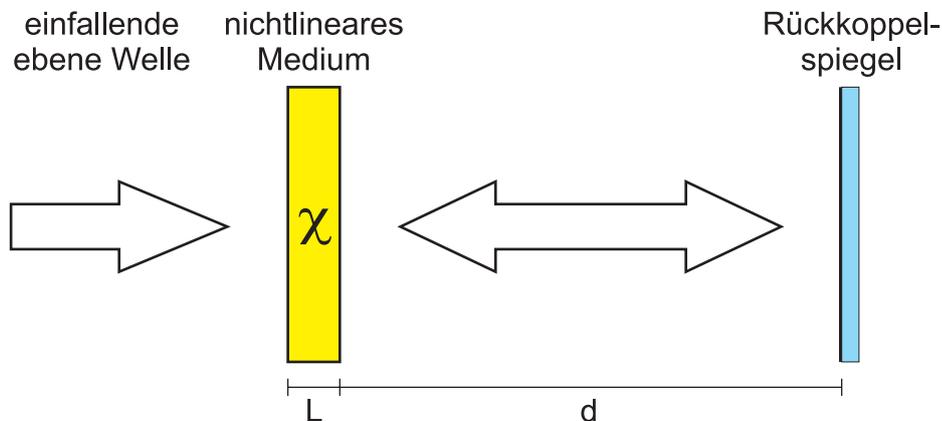


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung der Einspiegelanordnung.

Dieses Modellsystem erlaubt eine weitreichende analytische Behandlung [DF91, DF92] und relativ einfache experimentelle Realisierungen, wobei die Art der Nichtlinearität keineswegs auf den Kerr-Typ beschränkt ist. Die Einspiegelanordnung hat sich daher in den vergangenen Jahren zu einem Paradebeispiel auf dem Gebiet der optischen Strukturbildung entwickelt. Dabei werden verschiedene nichtlineare Medien genutzt, unter anderem Flüssigkristalle, photorefraktive Kristalle und atomare Dämpfe [Hon93, TBWS93, TNT93, PRA93, GMP94, AL94, DSS+98]. Jedes dieser Medien besitzt unterschiedliche Vorzüge, wie z. B. besonders niedrige Schwellintensitäten, in guter Näherung Kerr-artige Nichtlinearität oder experimentell günstige intrinsische Zeitskalen.

Längenskalen

Eine Erklärung, wie die durch Beugung hervorgerufene Kopplung zu einer Ausbildung von räumlich periodischen Strukturen führt, liefert der *Talbot-Effekt*, der schon seit dem 19. Jahrhundert bekannt ist [Tal36]. Er beschreibt das Phänomen, dass sich eine in Amplitude oder Phase transversal periodisch modulierte Feldverteilung während der Propagation in bestimmten Abständen entlang der Propagationsachse periodisch wiederholt. Die Periodizitätslänge (die sogenannte *Talbot-Länge* z_T) hängt dabei von der Wellenzahl $k = 2\pi/\Lambda$ der transversalen Modulation ab:

$$z_T = \frac{4\pi k_0}{k^2} \quad (2.5)$$

Darin beschreibt k_0 die (longitudinale) Wellenzahl des Lichts in Ausbreitungsrichtung. Wie in Abbildung 2.3 zu sehen ist, wird dabei nach je einem Viertel der Talbot-Länge eine anfängliche Amplituden- in eine Phasenmodulation umgewandelt und umgekehrt. Dabei entsprechen die jeweils um $z_T/2$ auseinanderliegenden Verteilungen einander bis auf eine Phasenverschiebung von π bezogen auf die transversale Wellenlänge der Modulation. Für welche transversalen Wellenlängen sich nun eine positive Rückkopplung ergeben kann, hängt vom Typ der Nichtlinearität des Mediums unter Einbeziehung eventuell vorhandener polarisationsändernder Elemente in der Rückkopplung ab.

In Abhängigkeit vom Verhalten der Suszeptibilität bei zunehmender Intensität des Lichts lassen sich dabei in diesem Zusammenhang vier grundlegende Typen von optischen Nichtlinearitäten unterscheiden: Wird das Medium mit steigender Intensität transparenter, so spricht man in Anlehnung an sättigbare Absorber von einer *absorptiv-sättigenden* Nichtlinearität. Der weniger verbreitete, umgekehrte Fall, bei dem die Absorption mit steigender Intensität zunimmt, wird *absorptiv-begrenzend* genannt. Darüber hinaus gibt es zwei Typen, bei denen die Intensität I den Brechungsindex n beeinflusst. Für den Fall eines linearen Zusammenhangs ist dieses Verhalten auch als Kerr-Nichtlinearität bekannt:

$$n(I) = n_0 + n_2 I. \quad (2.6)$$

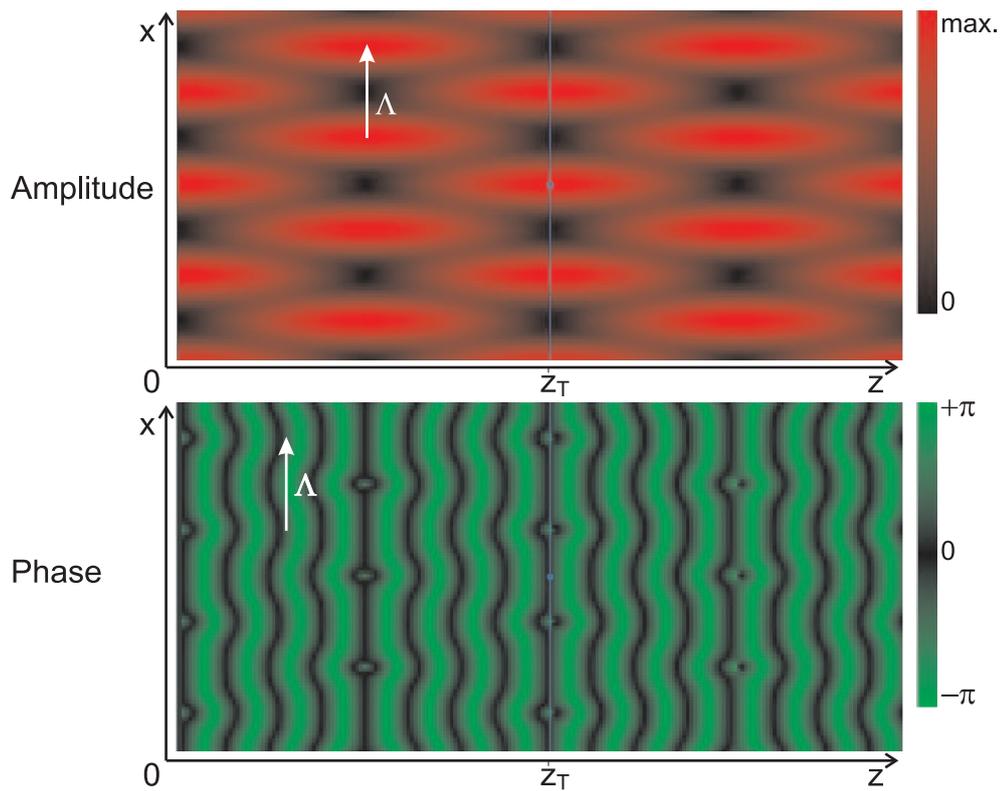


Abbildung 2.3: Darstellung des Talbot-Effektes

Abhängig vom Vorzeichen von n_2 spricht man hier von *dispersiv-fokussierender* oder *dispersiv-defokussierender* Nichtlinearität.

Je nachdem, welche Art der Nichtlinearität für das betrachtete System dominiert (im Allgemeinen werden Mischformen zu beobachten sein, bei denen sich sowohl die Absorption als auch der Brechungsindex intensitätsabhängig ändert), kann eine positive Rückkopplung einer infinitesimalen Störung entsprechender räumlicher Wellenlänge zu periodischen Strukturen hoher Amplitude führen.

2.4.1 Natriumdampf als nichtlineares Medium

Die in der vorliegenden Arbeit behandelte experimentelle Realisierung der Einspiegelanordnung beruht auf dem Prozess des *optischen Pumpens* von Natriumdampf in Verbindung mit einer polarisationsabhängigen Rückkopplung.

Die Verwendung von Natriumdampf als nichtlineares Medium bietet eine Reihe von Vorteilen sowohl auf der experimentellen Seite als auch hinsichtlich der theoretischen Beschreibung. So lassen sich atomare Dämpfe in hoher optischer Qualität präparieren und erlauben vielfältige Möglichkeiten, über Änderung externer Parameter wie Druck, Temperatur oder äußere Magnetfelder die optischen Eigenschaften und damit die Art der Nichtlinearität (vgl. voriger Abschnitt) zu beeinflussen.

Ferner lässt sich über die quantenmechanische Beschreibung der elektromagnetischen Übergänge einzelner Atome ein sehr gutes theoretisches Modell für die Licht-Materie-Wechselwirkung ableiten. Besonders bei Betrachtung der D_1 -Übergänge von Alkalimetallen lässt sich diese Beschreibung unter geeigneten Bedingungen¹¹ so weit vereinfachen, dass umfangreiche analytische und numerische Untersuchungen ermöglicht werden [MDLM86].

Diese Eigenschaften der Einspiegelanordnung mit Natriumdampf haben sich in vielen vorangegangenen Arbeiten zur transversalen Strukturbildung als äußerst vorteilhaft erwiesen und haben dafür gesorgt, dass eine große Zahl von Strukturbildungsphänomenen – oft mit universellem Charakter – in verschiedenen Varianten dieses Experiments beobachtet und anhand des Modells erklärt werden konnten [AL94, Ack96, Gah96, LA98, LAA⁺99, Aum99, Sch01, GW02, Hun06, Pes07].

Optisches Pumpen

Das sogenannte *optische Pumpen* von atomaren Dämpfen ist eine effiziente Methode zur Erzeugung nichtlinearer optischer Suszeptibilitäten [Kas57]. Der Mechanismus ist in Abbildung 2.4 dargestellt und wird im Folgenden erläutert:

Die Wechselwirkung zwischen Licht und Materie im vorliegenden experimentellen System (Natriumdampf in einer Stickstoff-Puffergasatmosphäre) lässt sich als homogen verbreiteter $J = 1/2 \rightarrow J' = 1/2$ -Übergang beschreiben. Der Grundzustand ($^2S_{1/2}$) und der angeregte Zustand ($^2P_{1/2}$) besitzen wegen des Gesamtdrehimpulses $J = J' = 1/2$ je zwei Zeeman-Unterstufen mit $m_J = -1/2$ und $m_J = +1/2$. In Abwesenheit eines optischen Feldes befinden sich alle Atome im Grundzustand und dessen Unterzustände (hier mit $|1\rangle$ und $|2\rangle$ bezeichnet) sind gleich besetzt. Bei Wahl der Ausbreitungsrichtung des Lichts als Quantisierungsachse kann σ_+ -polarisiertes Licht nur Atome, die sich im Zustand $|1\rangle$ befinden, in den Zustand $|4\rangle$ anregen. Ein Lichtfeld mit σ_- -Polarisation koppelt entsprechend die Zustände $|2\rangle$ und $|3\rangle$.

Die angeregten Zustände können nun jeweils in beide Unterniveaus des Grundzustandes zerfallen¹², so dass die Einstrahlung von σ_+ -Licht den Zustand $|1\rangle$ zu Gunsten von $|2\rangle$ mit einer effektiven Rate P_+ entvölkert. Gleiches gilt für den umgekehrten Fall der Einstrahlung von σ_- -Licht; die zugehörige Pumprate wird analog mit P_- bezeichnet.

¹¹ Insbesondere ist dies dann der Fall, wenn der Natriumdampf in einer Puffergasatmosphäre ausreichenden Drucks präpariert wird. In diesem Fall wird die Hyperfeinaufspaltung des atomaren Übergangs von der Druckverbreiterung überdeckt, was die Modellierung als homogen verbreiteten Übergang ermöglicht (vgl. [Mö192]).

¹² Ein schneller und vor allem strahlungsloser Zerfall wird durch die Wahl von Stickstoff als Puffergas erreicht, wobei inelastische Stöße mit demselben ein sogenanntes „*quenchen*“ bewirken [KCK67].

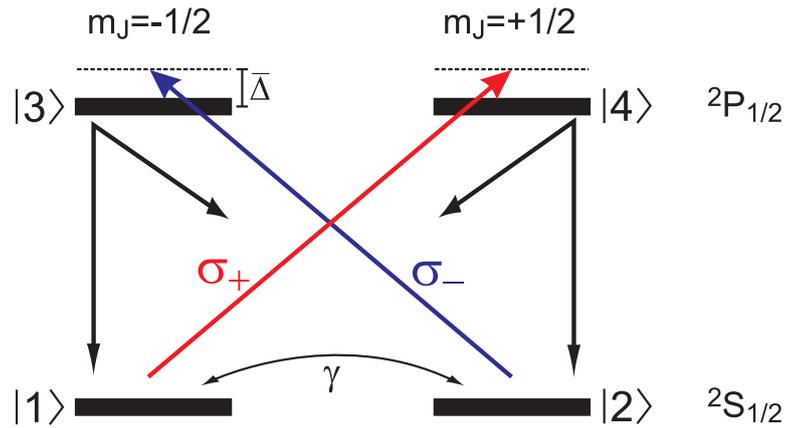


Abbildung 2.4: Kastler-Diagramm eines $J = 1/2 \rightarrow J' = 1/2$ -Übergangs. Erläuterungen im Text.

Es entsteht eine Besetzungszahldifferenz, die in normierter Form auch *Orientierung* (w) genannt wird.¹³ Die Rate γ , mit der durch Stöße mit den Puffergasatomen diese Orientierung wieder zerfällt, ist im Natriumdampf sehr klein, so dass bei entsprechender Pumprate nahezu alle Atome z. B. in den Zustand $|2\rangle$ befördert werden können. Mit zunehmender Orientierung wird das Medium auf dem betrachteten Pump-Übergang transparenter, wodurch der Pumpprozess schließlich gesättigt wird.

Die komplexe Suszeptibilität χ des Natriumdampfes hängt linear von w ab. Damit bestimmt die Orientierung die optischen Eigenschaften des Dampfes für die zirkularen Polarisationskomponenten σ_{\pm} :

$$\chi_{\pm}(w) = \chi_{lin}(1 \mp w), \quad (2.7)$$

wobei χ_{lin} die lineare dielektrische Suszeptibilität bezeichnet. Diese hängt unter anderem von der Verstimmung $\bar{\Delta}$ ab:

$$\chi_{lin} \propto -\frac{\bar{\Delta} + i}{\bar{\Delta}^2 + 1} \quad (2.8)$$

Da für den Absorptionskoeffizienten $\alpha \propto -\text{Im}(\chi)$ und für den Brechungsindex $n = \sqrt{1 + \text{Re}(\chi)}$ gilt, sieht man, dass für kleine Verstimmungen die Nichtlinearität (2.7) vorwiegend die Absorption beeinflusst und für große Verstimmungen hauptsächlich die dispersiven Eigenschaften. Gleichung (2.8) lässt damit einen weiteren großen Vorteil von optisch gepumptem Natriumdampf als nichtlineares Medium erkennen: Der Typ der Nichtlinearität ist mit Hilfe der Verstimmung einfach auszuwählen, wobei ein kontinuierlicher Übergang von absorptiver zu dispersiver Nichtlinearität und damit auch Mischformen möglich werden.

¹³ $w = 1$ (bzw. $w = -1$) entspricht in der Normierung einer vollständigen Umverteilung in den Zustand $|2\rangle$ (bzw. $|1\rangle$); $w = 0$ entspricht der Gleichbesetzung beider Zustände.

Experimentell wird vorwiegend im dispersiven Regime gearbeitet, da die beobachtbaren nichtlinearen Effekte dort stärker in Erscheinung treten. Polarisationsändernde Elemente im Rückkoppelzweig erlauben jedoch auch bei großer Verstimmung den Zugriff auf eine Nichtlinearität vom absorptiven Typ. In diesem Fall ist die Beobachtungsgröße nicht die Intensität des aus der Zelle austretenden Lichts, sondern dessen Polarisationszustand.

Einfluss eines externen magnetischen Feldes

Die Orientierung stellt ein Maß für die Ungleichbesetzung zweier Zustände mit entgegengesetztem magnetischen Moment dar und ist somit auch proportional zu einer makroskopischen Magnetisierung des Natriumdampfes entlang der Ausbreitungsrichtung des Lichts, die als Quantisierungsrichtung betrachtet wird (s. o.). Um die Wechselwirkung einer solchen mit äußeren Feldern beschreiben zu können, wird der sogenannte *Bloch-Vektor* \vec{m} eingeführt, der die Magnetisierung des Natriumdampfes beschreibt und dessen z -Komponente identisch ist mit der soeben eingeführten Orientierung.

Wird ein statisches, externes Magnetfeld \vec{B} angelegt, so führt der Blochvektor um dieses eine (im Allgemeinen gedämpfte) Präzessionsbewegung durch. Ist das äußere Magnetfeld (annähernd) parallel zu einer vorhandenen Magnetisierung des Mediums, so wirkt sich diese Präzession kaum auf die Orientierung aus. Schließen Blochvektor und der Richtungsvektor des Magnetfeldes aber einen von Null verschiedenen Winkel ein¹⁴, so tritt auch in der Projektion des Blochvektors auf die z -Achse eine Oszillation auf. Diese Oszillation der Orientierung wirkt wiederum auf die optischen Eigenschaften des Natriumdampfes, wodurch über die Rückkopplung des Lichtfeldes in das Medium die Präzessionsbewegung des Blochvektors entdämpft werden kann.

Eine solche *Hopf-Instabilität* ist in der Einspiegelanordnung mit Natriumdampf bereits beobachtet worden [MML83, MDLM86] und führt im transversal ausgedehnten System unter dem Einfluss des Gaußschen Strahls zu raumzeitlich oszillierenden Strukturen in Form von Spiralen und Targetmustern [Sch01, HSAL03, HLA06, Hun06].

2.4.2 Einspiegelanordnung mit $\lambda/8$ -Plättchen

Die Einstrahlung von linear polarisiertem Licht bewirkt wegen $P_+ = P_-$ effektiv keine Umverteilung der Niveaubesetzung, so dass ohne Rückkopplung keine Orientierung aufgebaut wird. Das in der vorliegenden Arbeit betrachtete Experiment besitzt jedoch ein $\lambda/8$ -Plättchen zwischen Natriumdampfzelle und Rückkoppelspiegel. Da das Licht dieses

¹⁴ Da die Magnetisierung durch das Lichtfeld nur in der z -Komponente aufgebaut wird, ist dies nur dann der Fall, wenn das externe Magnetfeld eine nichtverschwindende Komponente senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Lichts besitzt.

während der Propagation zum Spiegel und zurück zweimal passiert, wirkt es wie ein $\lambda/4$ -Plättchen, welches einen zirkular polarisierten Anteil im rückgekoppelten Feld erzeugt, wenn die Polarisationssebene des aus der Zelle austretenden Lichts nicht kollinear mit einer der optischen Achsen des Verzögerungsplättchens ist. Dieser zirkulare Anteil baut eine Orientierung auf, wodurch das Medium entsprechend den Überlegungen aus Abschnitt 2.4.1 zirkular doppelbrechend wird. Dies kann bei geeigneten Parametern zu einer Polarisationsinstabilität führen, deren Mechanismus im folgenden Abschnitt erläutert wird.

Mechanismus der Polarisationsinstabilität

Das in die Zelle eingestrahlte Licht besitzt eine lineare Polarisation parallel zur langsamen Achse des $\lambda/8$ -Plättchens. Ist $w = 0$, so bleibt die Polarisationssebene erhalten und die Polarisation wird auch während der Rückkopplung nicht beeinflusst. Ist aber $w \neq 0$, so wird die Polarisationssebene um einen Winkel ξ gedreht (Abbildung 2.5). Nach Durchgang durch das (effektive) $\lambda/4$ -Plättchen ist das Licht dann elliptisch polarisiert. Dies lässt sich auch beschreiben als eine Linearkombination von linear polarisiertem Licht parallel zur langsamen Achse des Wellenplättchens und einer zirkular polarisierten Komponente.

In Abbildung 2.5 ist beispielhaft angenommen, die Orientierung sei zunächst geringfügig größer als Null. Der zirkulare Anteil der Polarisation des rückgekoppelten Feldes ist also σ_+ -polarisiert und bewirkt damit ein weiteres Wachstum von w . Für einen Polarisationsdrehwinkel $\xi = \pm 45^\circ$ ist das rückgekoppelte Feld rein zirkular polarisiert und damit die Effizienz des optischen Pumpens maximal. Bei größeren Drehwinkeln nimmt die Effizienz der Rückkopplung wieder ab und es kommt zu einer Sättigung des oben beschriebenen Effekts.

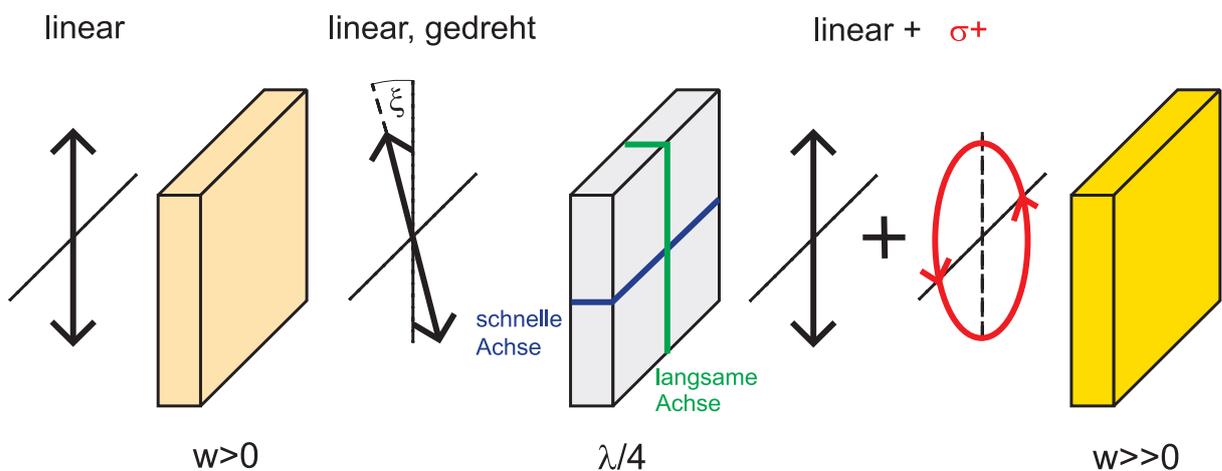


Abbildung 2.5: Mechanismus der Polarisationsinstabilität. Erläuterungen im Text.

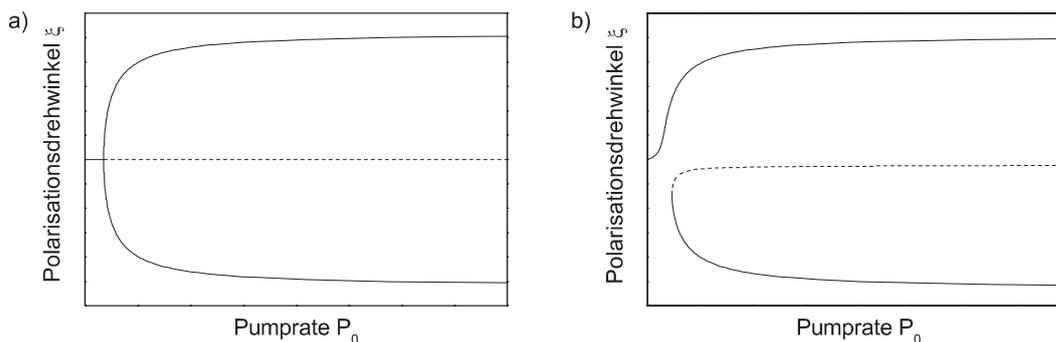


Abbildung 2.6: Polarisationsinstabilität: a) ungestörte Pitchfork-Bifurkation, b) gestörte Pitchfork-Bifurkation. Gestrichelt: instabile Zustände, durchgezogen: stabile Zustände.

Für eine anfängliche Orientierung $w < 0$ wird der zirkulare Anteil des rückgekoppelten Feldes σ_- -polarisiert sein, was ebenfalls zu einer Verstärkung führt. Die geschilderte Polarisationsinstabilität ist demnach symmetriebrechend. Trägt man den Drehwinkel ξ der Polarisations Ebene, der sich unmittelbar hinter dem Medium im stationären Zustand ergibt, gegen die Eingangspumprate P_0 auf, so erkennt man eine *Pitchfork-Bifurkation* (Abbildung 2.6 a). Das Bifurkationsverhalten dieser Instabilität lässt sich auf vielfältige Weise beeinflussen. Eine Rotation des $\lambda/8$ -Plättchens (bzw. der Polarisations Ebene des Eingangsstrahls) um einen Winkel Φ stört z. B. die anfängliche Symmetrie und führt auf eine sogenannte *gestörte Pitchfork-Bifurkation* (Abbildung 2.6 b). Ein transversales Magnetfeld kann am Bifurkationspunkt ein *subkritisches* Verhalten erzeugen (vgl. Abschnitt 5.2.2), was einen zentralen Untersuchungsgegenstand der vorliegenden Arbeit darstellt.

Eine zusätzliche longitudinale Magnetfeldkomponente erzeugt ähnlich wie ein rotierendes Wellenplättchen eine Asymmetrie der stationären Zustände. Ein solches „schiefes“ Magnetfeld führt auf ein komplexes Bifurkationsverhalten mit im Allgemeinen gebrochener Symmetrie (vgl. Abbildung 5.1 d) und subkritischem Bifurkationsverhalten, was das Auftreten einer Vielzahl von Phänomenen ermöglicht.

Oberhalb einer kritischen Pumprate ist das System bistabil, d. h. es existieren zwei stabile stationäre Polarisationszustände. Sowohl für die ungestörte als auch für die gestörte Pitchfork-Bifurkation wurde dieses System von Pesch *et al.* detailliert experimentell untersucht und die Existenz von Polarisationsfronten und stabilen lokalisierten Strukturen nachgewiesen [PGWAL04, PGWAL05, Pes07].

Sekundäre Bifurkation zu Hexagonen

Die obigen Betrachtungen zur Polarisationsinstabilität gelten zunächst nur lokal bzw. für homogene Polarisationszustände. Interessanter sind jedoch Effekte in der Ebene senkrecht zur Ausbreitung des Lichts (*transversale Ebene*) durch die räumliche Kopplung. Die

Möglichkeit einer solchen selbstorganisierten, transversalen Strukturierung ist auch in dem hier betrachteten System aufgrund des weiter oben bereits geschilderten Talbot-Effektes gegeben.

Die Nichtlinearität, die zu der im vorigen Abschnitt dargestellten Polarisationsinstabilität führt, lässt sich bezüglich der auftretenden Längenskalen (verallgemeinernd) als insgesamt vom absorptiv-sättigenden Typ betrachten.¹⁵ Für diesen Typ tritt eine positive Rückkopplung dann auf, wenn die Propagationslänge ein ganzzahliges Vielfaches der Talbot-Länge ist:

$$2d = b \cdot z_T(k) \quad \text{mit} \quad b \in \mathbb{N}_0 \quad (2.9)$$

Einsetzen von Gleichung (2.5) in (2.9) liefert die transversalen Wellenlängen, bei denen eine infinitesimale periodische Störung zu einer makroskopischen Modulation anwachsen kann:

$$k_{sat,b} = \sqrt{b \cdot \frac{2\pi k_0}{d}} \quad \text{mit} \quad b \in \mathbb{N}_0 \quad (2.10)$$

Wichtig zu bemerken ist in diesem Zusammenhang, dass natürlich auch die zuvor allgemeiner geschilderte homogene Instabilität für den Fall $b = 0$ als Grenzfall in dieser Formel enthalten ist.

Für Instabilitäten, die vom bereits gesättigten Zustand ausgehen, oder für ein um 90° rotiertes $\lambda/8$ -Plättchen ist analog dazu der *absorptiv-begrenzende* Fall zu betrachten. Hier ergeben sich analog die kritischen Wellenzahlen

$$k_{lim,b} = \sqrt{\left(b + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2\pi k_0}{d}} \quad \text{mit} \quad b \in \mathbb{N}_0. \quad (2.11)$$

In der Einspiegelanordnung mit $\lambda/8$ -Plättchen wurde eine sekundäre Bifurkation des im absorptiv-sättigenden Fall stabilen Astes zu hexagonalen Turing-Mustern¹⁶ mit der Wellenzahl k_{lim} experimentell von [GWKL⁺00] beobachtet.

¹⁵ Diese Verallgemeinerung lässt sich damit rechtfertigen, dass das Vorhandensein einer zirkularen Polarisationskomponente im rückgekoppelten Feld ein weiteres Anwachsen (der Intensität) ebendieser Komponente bewirkt. Dieses Verhalten gleicht qualitativ jenem bei einem sättigbaren Absorber, bei dem die mit steigender Intensität zunehmende Transparenz des Mediums ebenfalls für ein Wachstum der transmittierten Intensität sorgt (vgl. Seite 20).

¹⁶ Der Terminus „Turing-Muster“ (vgl. [Tur52]) wird im Folgenden für zeitlich stationäre, räumliche Modulationen in der *Amplitude* der Orientierung verwendet, insbesondere für die im betrachteten System auftretenden Muster mit hexagonaler Symmetrie. Die Bezeichnung dieser Strukturen als Turing-Strukturen dient der sprachlichen Abgrenzung zu anderen Modulationsinstabilitäten, die in dieser Arbeit behandelt werden; vor allem um einer Verwechslung mit der *transversalen* Modulationsinstabilität von Fronten entgegenzuwirken, die im weiteren Verlauf von zentralem Interesse sein wird.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Einspiegelanordnung mit Natriumdampf und $\lambda/8$ -Plättchen alle wesentlichen Voraussetzungen bietet, um Fronten zwischen zwei gleichberechtigten Polarisationszuständen, eine transversale Modulationsinstabilität solcher Fronten, Labyrinthmuster sowie Spiralen beobachten zu können: Sie zeigt eine symmetriebrechende Pitchfork-Bifurkation des Polarisationszustandes bei Erhöhung der Eingangsleistung und bietet bei genügend großem Strahlradius die für die Ausbildung transversaler Strukturen notwendigen räumlichen Freiheitsgrade. Zudem lässt die Einführung eines transversalen Magnetfeldes auch in der Zeit periodisch oszillierende Lösungen zu.

Die Existenz von Polarisationsfronten in diesem System wurde bereits in [Pes07] nachgewiesen und deren Dynamik im Parameterbereich unterhalb der Schwelle zur hexagonalen Musterbildung untersucht. Weiterhin sind im Zuge dieser Experimente in Anwesenheit eines magnetischen Feldes erstmalig die Strukturen beobachtet worden (vgl. Abschnitt 2.3), die den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit bilden. An diese Ergebnisse anknüpfend ist somit eine Untersuchung der Frontdynamik bei höheren Eingangsleistungen und unter Einbeziehung des Magnetfeldes als zusätzlichem Kontrollparameter ein wesentliches Ziel der Experimente in dieser Arbeit.

Kapitel 3

Experimenteller Aufbau

Bei der experimentellen Realisierung des in Abschnitt 2.4.2 schematisch vorgestellten Modellsystems kommt der Homogenität des Pumpstrahls, der Präparation der Eingangspolarisation und der Beeinflussung der Polarisierung während der Rückkopplung, sowie der Kontrolle des äußeren Magnetfeldes eine besondere Bedeutung zu. Darüber hinaus ist es wünschenswert, eine Vielzahl weiterer Parameter möglichst gut kontrollieren und in weiten Grenzen variieren zu können. Daraus ergeben sich eine Reihe von Anforderungen an den experimentellen Aufbau, der in den folgenden Abschnitten vorgestellt wird.

Der verwendete Versuchsaufbau ist in weiten Teilen mit jenem identisch, der in [Pes07] beschrieben wurde. Die einzigen wesentlichen Unterschiede bestehen darin, dass dort zusätzlich zum Pumpstrahl noch ein schaltbarer Zündstrahl mit wählbarer Polarisierung verwendet wurde (der in der vorliegenden Arbeit entfällt), und dass Betrag und Richtung des äußeren Magnetfeldes als zusätzlicher Kontrollparameter im Rahmen dieser Arbeit eine wesentliche Rolle spielen werden.

3.1 Übersicht

Der experimentelle Aufbau gliedert sich – wie in Abbildung 3.1 gezeigt – im Wesentlichen in drei Teile, an die entsprechend der Zielsetzung des Experiments bestimmte Anforderungen gestellt werden:

- *Strahlpräparation:*

Für die Untersuchung von Musterbildungsprozessen in Natriumdampf ist eine genaue Kontrolle der Frequenz und Leistung des Eingangsstrahls erforderlich. Über die Laserfrequenz ist die Verstimmung gegenüber der Natrium-D₁-Linie zugänglich, die die Charakteristik der Nichtlinearität entscheidend beeinflusst. Die Leistung ist proportional zur Pumprate, dem wesentlichen Kontrollparameter des Experiments.

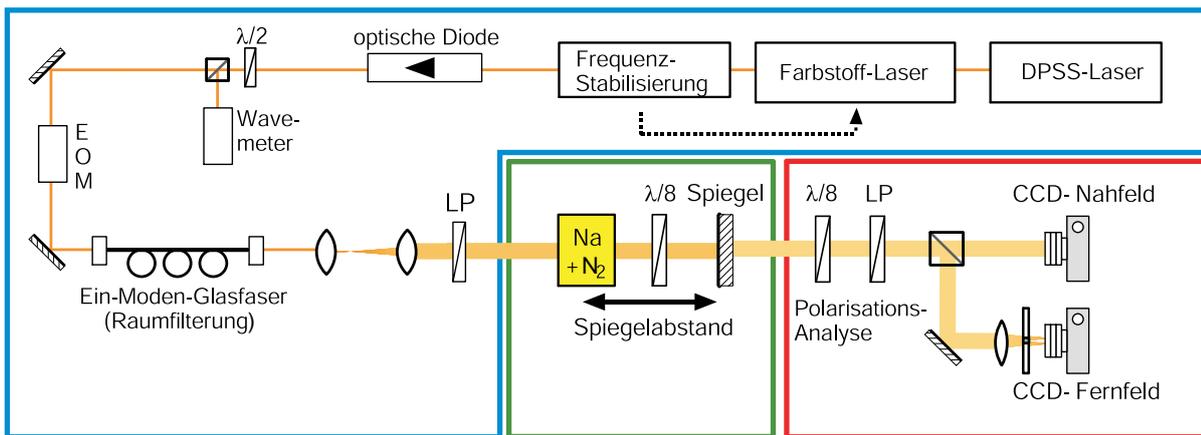


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus. Blau umrandet: Strahlpräparation; grün umrandet: Einspiegelanordnung; rot umrandet: Strahlanalyse. LP = Linearpolarisator, EOM = elektro-optischer Modulator, CCD = *charge-coupled device* (Kamera).

Labyrinth treten – wie im vorigen Kapitel erläutert – in Systemen auf, die zwei *gleichberechtigte* stabile Zustände besitzen. Die in Abschnitt 2.4.2 geschilderte Polarisationsinstabilität weist in der Theorie eine Pitchfork-Bifurkation auf, die diese Bedingung erfüllt, jedoch strukturell instabil ist [Str94]. Um im Experiment eine Bevorzugung eines Polarisationszustandes zu vermeiden, bedarf es einer in sehr guter Näherung linearen Polarisation des eingestrahnten Lichts. Weiterhin kommt der Erhaltung der Polarisations-eigenschaften beim Durchgang des Lichts durch optische Elemente¹ eine entscheidende Bedeutung zu.

Ein möglichst homogenes Strahlprofil ist aus ähnlichen Überlegungen ein wichtiger Faktor: Strukturbildende Prozesse in dissipativen Systemen gehen mit dem Bruch vorhandener räumlicher Symmetrien einher und können in vielen Fällen nicht beobachtet werden, wenn bereits durch die Präparation Anisotropien bestehen. Die im Modell angenommene ebene Welle als Eingangsstrahl ist experimentell nicht realisierbar, jedoch ist ein möglichst rotationssymmetrischer Gaußscher Strahl eine gute und bewährte Annäherung an diese Forderung.

- *Einspiegelanordnung:*

In der experimentellen Realisierung der in Abschnitt 2.4 vorgestellten Einspiegelanordnung wird Natriumdampf in einer Stickstoff-Puffergasatmosphäre als nichtlineares Medium verwendet. Dazu wird Natrium in einer beheizbaren Zelle verdampft. Die Temperatur in der Zelle sowie der Puffergasdruck haben Einfluss auf die Diffu-

¹ mit Ausnahme des $\lambda/8$ -Plättchens als explizit polarisationsänderndem Element

sion, die Teilchenzahldichte und die (druckverbreiterte) homogene Linienbreite der Na-D₁-Resonanz. Der Rückkoppelspiegel ist teildurchlässig, so dass der transmittierte Teil des Lichts zur Analyse der Vorgänge in der Einspiegelanordnung genutzt werden kann.

- *Strahlanalyse:*

Der Schwerpunkt der Analyse liegt auf der polarisationsauflösenden Beobachtung der transversalen Struktur des Strahls nach Durchgang durch die Einspiegelanordnung. Hierzu werden das Nah- und Fernfeld des vom Natriumdampf transmittierten Lichts durch einen Linearpolarisator auf Kameras abgebildet. Zusätzlich (in der Abbildung nicht gezeigt) besteht die Möglichkeit, mit einem Detektor die lokale Intensität eines kleinen Teils des Strahls zeitaufgelöst zu betrachten.

3.2 Präparation des Laserstrahls

Als Lichtquelle wird ein Farbstofflaser² verwendet, der von einem DPSS-Laser³ gepumpt wird. Die Frequenz des Farbstofflasers ist in der Umgebung der atomaren Resonanz der Na-D₁-Linie bei Leistungen von 800-900 mW kontinuierlich abstimmbare und wird mit einer Stabilisierungseinheit⁴ auf ± 5 MHz stabilisiert. Eine optische Diode, bestehend aus einem Faraday-Rotator und zwei Linearpolarisatoren, verhindert die Rückkopplung in das Lasersystem. Mit Hilfe eines $\lambda/2$ -Plättchens und eines polarisierenden Strahlteilers werden etwa 4–5 % der Laserleistung über eine Glasfaser in ein Scanning-Michelson-Interferometer („Wavemeter“) eingekoppelt, mit dem die Frequenz des Lasers mit einer Genauigkeit von 200 MHz [Ohl87] relativ zu einem Helium-Neon-Referenzlaser bestimmt werden kann. Durch Vergleich mit der Lage der Na-D₁-Resonanz kann eine absolute Genauigkeit von ± 1 GHz erzielt werden. Die Messungen wurden mit um typischerweise $\Delta = 10 \dots 18$ GHz gegenüber der D₁-Resonanz blauverstimmt Licht durchgeführt.

Die Intensität des Lichts lässt sich mit einem elektro-optischen Modulator (EOM)⁵ in Verbindung mit einem Linearpolarisator regeln. Hierzu wird mit einem Fotodetektor unmittelbar vor der Natriumdampfzelle die Laserleistung gemessen. Die Detektorspannung wird über einen PID-Regelkreis auf den EOM zurückgekoppelt. Dadurch wird eine Stabilisierung der Leistung gegenüber kurzzeitigen Fluktuationen gewährleistet, und die Intensität des in die Dampfung eingestrahlt Lichts lässt sich durch Variation der Referenzspannung des Regelkreises ohne Eingriff am Laser kontinuierlich variieren.

² SPECTRA-PHYSICS 380D, Farbstoffringlaser mit Farbstoff Rhodamin 6G

³ SPECTRA-PHYSICS MILLENNIA Xs, Nd:YVO₄, frequenzverdoppelt 532 nm

⁴ SPECTRA-PHYSICS STABILOK 389, aktive Wellenlängenstabilisierung mit Referenzetalon

⁵ GSÄNGER LM0202P

Um ein möglichst rotationssymmetrisches transversales Intensitätsprofil zu erhalten, wird der Laserstrahl mit einem Mikroskopobjektiv in eine Ein-Moden-Glasfaser eingekoppelt. Die Ausbreitung des Lichts in einer solchen Glasfaser lässt sich innerhalb des spezifizierten Frequenzbereichs durch eine *fundamentale Fasermode* beschreiben, welche einem Gaußschen Strahl sehr ähnlich ist [Neu88]. Nicht rotationssymmetrische Moden werden unter diesen Bedingungen unterdrückt. Einige Schleifen der Faser werden mit definiertem Krümmungsradius auf ein sogenanntes Polarisations-Stellglied⁶ gewickelt. Dies erlaubt durch spannungsinduzierte Doppelbrechung eine beliebige Änderung des Polarisationszustands des aus der Faser austretenden Lichts [Lef80, URE80]. Hierdurch werden Leistungsverluste vermieden, die bei Durchgang des Lichts mit undefiniertem Polarisationszustand durch den nachfolgenden Linearpolarisator (s. u.) entstehen könnten.

Nach der Auskopplung aus der Glasfaser wird der Strahl mit einem Fernrohr auf einen Radius von 1,9 mm aufgeweitet, wobei die Strahltaile auf das Zentrum der Natriumzelle justiert wird (vgl. [Rud01]). Ein Linearpolarisator mit einem Unterdrückungsverhältnis von $< 1:10^6$ legt unmittelbar vor der Natriumzelle die Polarisationssebene des Lichts endgültig fest. Nach Durchlaufen aller optischen Elemente der Strahlpräparation steht beim Eintritt des Lichts in die Zelle eine maximale Pumpleistung von maximal etwa $P_L = 300 \text{ mW}$ zur Verfügung.

3.3 Natriumzelle mit Rückkopplung

Das Ziel ist es, den atomaren Natriumdampf in einem engen Raumbereich mit homogener Teilchenzahldichte zu präparieren. Dies erfolgt in der Natriumdamp fzelle, die im Folgenden als *Natriumzelle* bezeichnet wird. Diese Zelle besteht aus einem wassergekühlten Messinggehäuse mit zwei vakuumdicht verschraubbaren Fenstern, zwischen denen ein Duran-Glasrohr liegt. In die Mitte des Glasrohrs wird ein Tantal-Schiffchen geschoben, auf welchem ein kleines Stück festes Natrium liegt (skizziert in Abbildung 3.2). Der mittlere Bereich des Glasrohrs wird von einem heizbaren Kupferblock umschlossen. Die äußeren Bereiche werden über das Gehäuse gekühlt, um eine Verschmutzung der Zellenfenster mit kondensierendem Natrium zu verhindern und gleichzeitig die Länge der Wechselwirkungszone auf etwa 15 mm zu beschränken (vgl. [Ack96]). Für den Betrieb wird die Natriumzelle zunächst bis auf einen Restdruck von ca. 10^{-3} Pa evakuiert, anschließend mit reinem Stickstoff mit einem Druck von $p \approx 300 \text{ hPa}$ befüllt und der Kupferblock auf $T \approx 300 \dots 360 \text{ }^\circ\text{C}$ aufgeheizt. Durch Sublimation des Natriums erhält man temperaturabhängig Teilchenzahldichten von etwa $N \approx 10^{19} \dots 10^{20} \text{ m}^{-3}$ [Aum99].

⁶ nähere Angaben dazu siehe z. B. [Ack96]

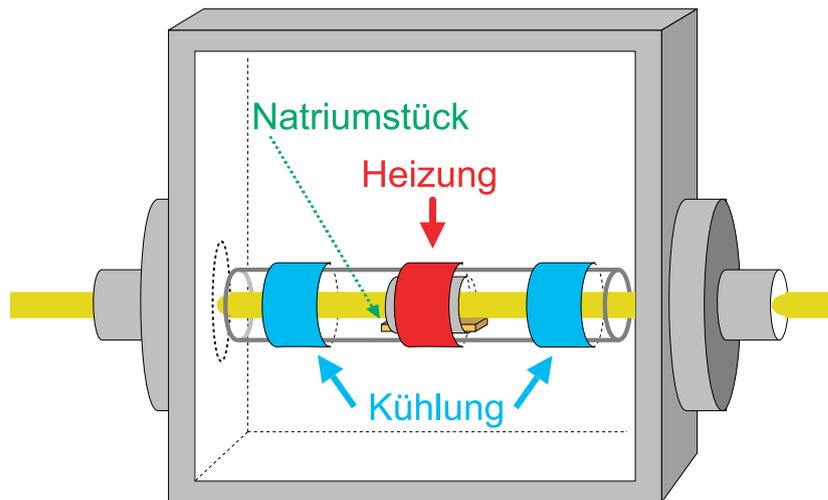


Abbildung 3.2: Schemazeichnung der Natriumdampfzelle.

Die Natriumzelle steht im Zentrum dreier orthogonal angeordneter Helmholtzspulenpaare. Mit ihnen wird zum einen das Erdmagnetfeld am Ort der Zelle kompensiert, zum anderen kann ein statisches Magnetfeld mit beliebiger Raumrichtung und einem Betrag von bis zu etwa $25 \mu\text{T}$ bei einer relativen Einstellgenauigkeit von $0,05 \mu\text{T}$ erzeugt werden.⁷ Die absolute Genauigkeit des Magnetfeldes wird durch die Möglichkeiten zur Bestimmung des Nullfeldes am Ort der Zelle sowie durch das Vorhandensein nicht-statischer Streufelder begrenzt. Die Messgenauigkeit des statischen Nullfeldes kann auf etwa $0,3 \mu\text{T}$ abgeschätzt werden, die (periodischen) Störungen durch Streufelder haben eine Amplitude von $< 0,3 \mu\text{T}$ [Sch06].

Für die Angabe von Richtungen wird folgende Nomenklatur festgelegt: Die z -Achse bezeichnet die Ausbreitungsrichtung des Eingangsstrahls. Magnetfelder bzw. -komponenten entlang dieser Achse werden auch als „*longitudinale Felder*“ bezeichnet. Die y -Achse zeigt vertikal nach oben, und die x -Achse liegt parallel zur Tischebene; ihre Ausrichtung ergibt sich aus der Definition des Koordinatensystems als rechtshändiges Dreibein. Magnetfelder in x - oder y -Richtung werden im Folgenden auch „*transversale Felder*“ genannt.

Im Abstand d (typisch: $d \approx 120 \text{ mm}$) hinter dem Zentrum der Natriumzelle steht der Rückkoppelspiegel mit einer Reflektivität von 99%. Die Rückseite des Spiegels ist für die verwendete Wellenlänge antireflexbedampft, ein Keilwinkel von 2° zwischen Vorder- und Rückseite des Spiegels verhindert zusätzlich Interferenzen. Der Spiegel ist auf einer

⁷ Die erzielbaren Magnetfelder und deren Einstellgenauigkeiten hängen im Wesentlichen von den Eigenschaften der verwendeten Stromquellen ab. In diesem Experiment wurden Stromquellen mit einem Maximalstrom von $I_{max} = \pm 50 \text{ mA}$ und einer Einstellgenauigkeit von $\Delta I = 0,1 \text{ mA}$, umschaltbar auf $I_{max} = \pm 500 \text{ mA}$ bei $\Delta I = 1 \text{ mA}$, verwendet. Für die Spulenkonstanten gilt: $B_x = 0,49 \text{ mT/A}$, $B_y = 0,57 \text{ mT/A}$, $B_z = 0,64 \text{ mT/A}$.

Dreipunkthalterung montiert, die mit geregelten Piezotranslatoren⁸ ausgestattet ist und so eine präzise und stabile Verkipfung des Spiegels um die x - und y -Achse erlaubt.

Zwischen Zelle und Spiegel befindet sich ein $\lambda/8$ -Plättchen, das vom Licht auf dem Weg zum Spiegel und zurück zweimal durchlaufen wird. Die Rotation des $\lambda/8$ -Plättchens um die z -Achse kann mit Hilfe einer Drehfassung auf $0,1^\circ$ genau eingestellt werden. Der Winkel $\Phi = 0^\circ$ wird dabei so definiert, dass die langsame Achse des Wellenplättchens parallel zur Polarisationsachse des in die Zelle eingestrahlten Lichts ist (vgl. Abschnitt 2.4.2). Diese Nullstellung kann mit einer absoluten Genauigkeit von $\leq 1^\circ$ in einer Hilfsanordnung mit gekreuzten Polarisatoren gemessen werden.

3.4 Analyse des transmittierten Lichts

In Abbildung 3.3 ist der Aufbau zur Analyse des transmittierten Lichts detailliert dargestellt. Das vom Rückkoppelspiegel transmittierte Licht passiert zunächst ein zweites $\lambda/8$ -Plättchen, das so justiert wird, dass es die Wirkung des im Rückkoppelarm stehenden $\lambda/8$ -Plättchens kompensiert. So wird derselbe Polarisationszustand hergestellt, der unmittelbar nach Durchgang durch den Natriumdampf herrscht. Mit dem folgenden Linearpolarisator LP wird eine wählbare Polarisationssebene für die weitere Analyse ausgewählt; der Drehwinkel des Linearpolarisators bezogen auf die Eingangspolarisation wird im Folgenden mit Θ bezeichnet. Je nach Zielsetzung der konkreten Messung kann die Wahl dieses Winkels sehr unterschiedlich ausfallen. So kann es z. B. für eine kontrastreiche Darstellung der transversalen Polarisationsverteilung sinnvoll sein, die Polarisationssebene des eingestrahlten Lichts (*Hintergrundstrahl*) zu unterdrücken bzw. maximal zu transmittieren. Dabei geht allerdings die Information verloren, welche Bereiche des Natriumdampfes eine positive bzw. negative Orientierung besitzen. Um diese Information zu erhalten, wird der Linearpolarisator so justiert, dass einer der beiden stationären Polarisationszustände im bistabilen Bereich unterdrückt oder aber maximal transmittiert wird.

Nach Durchgang durch den Linearpolarisator wird das *Nahfeld*, d. h. die Intensitätsverteilung unmittelbar hinter der Natriumdampfzelle, auf die Kameras CCD1 und CCD2 sowie den Detektor D1 abgebildet. Das Signal der Kamera CCD1⁹ wird in Echtzeit auf einem Videomonitor dargestellt und erlaubt so einen schnellen Überblick z. B. bei der Justierung von Komponenten. Die Kamera CCD2¹⁰ besitzt eine räumliche Auflösung von 1024×1024 Pixeln und einen Dynamikumfang von 12 Bit und erlaubt so die Aufnahme auch kleinskaliger Strukturen geringer Modulationstiefe. Der Detektor D1 ist mit einer Lochblende ($\varnothing = 600 \mu\text{m}$) ausgestattet und einer XY-Verschiebeeinheit gehaltert. So kann

⁸ PIEZOSYSTEM JENA GmbH, Kontrolleinheit ENV 40 / ER 1; Stellbereich der Piezoaktuatoren $15 \mu\text{m}$.

⁹ IMAGINGSOURCE DMM 8003/C

¹⁰ VDS VOSSKÜHLER CCD-1300LN

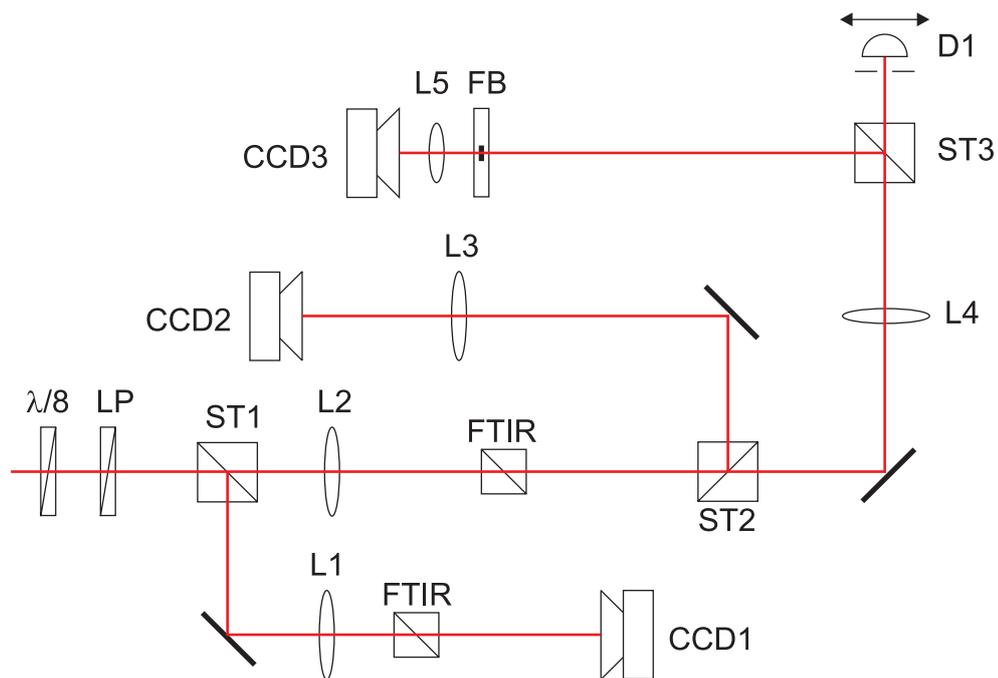


Abbildung 3.3: Detailskizze des Aufbaus zur Strahlanalyse. LP = Linearpolarisator, ST = Strahlteiler, FTIR = variabler Strahlteiler, FB = Fourierfilter. Nähere Erläuterungen im Text.

die lokale Intensität einzelner Strahlbereiche zeitaufgelöst betrachtet werden. Die Linse L4 bildet die hintere Brennebene der Linse L2, die der optischen Fouriertransformierten der Feldverteilung hinter der Natriumzelle (*Fernfeld*) entspricht, auf die Kamera CCD3¹¹ ab. Da im Fernfeld die höheren Raumfrequenzen von Interesse sind, die niedrigen Raumfrequenzen aber überwiegen, wird vor der Fernfeldkamera eine punktförmige Blende (FB) platziert, die das Zentrum des Strahls blockiert. Um den Dynamikumfang der Kameras optimal zu nutzen, wird die Intensität des auf sie fallenden Lichts mit Graufiltern und Strahlteilern variabler Transmission (FTIR = *frustrated total internal reflection*) angepasst. Um eine gleichzeitige Aufnahme von Nah- und Fernfeld zu gewährleisten, sind die Kameras CCD2 und CCD3 synchronisiert.

Die Kamera CCD3 verfügt über einen Bildverstärker und erlaubt Verschlusszeiten bis hinunter zu 5 ns. Für die Beobachtung von Prozessen auf kurzen Zeitskalen (siehe Abschnitt 4.3.2) wird sie deshalb an Stelle der Kamera CCD2 eingesetzt. Sind diese Prozesse periodisch, so erlaubt das sogenannte *Videosampling*-Verfahren eine Art „Zeitlupenaufnahme“ [MB95, MSA⁺99]. Dazu wird mit Hilfe des Detektors D1, der hinter einer verschiebbaren Lochblende angebracht ist, ein periodisches Triggersignal aus einem geeigneten Teil der Intensitätsverteilung gewonnen. Die Kamera wird auf dieses Signal mit

¹¹ PROXITRONIC Nanocam HF4 S 5N (512 × 512 Pixel, 8 Bit)

einer von Bild zu Bild ansteigenden Verzögerungszeit getriggert, wobei die Verschlusszeit klein gegenüber der Periodizität des Signals ist. Das in [MB95] beschriebene Verfahren wird in abgewandelter Form angewendet: statt des im zitierten Artikel beschriebenen Elektronik-Moduls übernimmt hierbei ein PC die Ablaufsteuerung. Für die Messung lokaler Zeitreihen wird das Signal des Detektors D1 mit einem Digitaloszilloskop¹² aufgenommen und ausgewertet. Die Bilder der Kameras CCD2 und CCD3 werden mittels eines *Framegrabbers*¹³ an ein Computersystem übertragen und dort für die spätere Auswertung gespeichert.

Um die Abbildungsgeometrie überprüfen und den Pixelbildern natürliche Größen zuzuordnen zu können, wurde an die Stelle der Natriumzelle eine Referenzfolie mit einem Gitter bekannter Periode gestellt und so die Größe der Pixel bezogen auf die aufgenommene Feldverteilung kalibriert.

Die in den Bildunterschriften in Kapitel 4 verwendeten Bezeichnungen der experimentellen Parameter sind in der folgenden Tabelle der Übersicht halber zusammengefasst:

P_L	Pumpleistung
B_x	transversales Magnetfeld
B_z	longitudinales Magnetfeld
Δ	Verstimmung gegenüber der Na-D ₁ -Resonanz
p	Puffergasdruck
T	Zellentemperatur
d	Spiegelabstand
Φ	Drehwinkel des $\lambda/8$ -Plättchens
Θ	Drehwinkel des Linearpolarisators

Tabelle 3.1: Bezeichnung der experimentellen Parameter

¹² LECROY Waverunner LT 344L

¹³ NATIONAL INSTRUMENTS IMAQ PCI-1408

Kapitel 4

Experimentelle Ergebnisse

Die in Abschnitt 2.4.2 geschilderte Polarisationsinstabilität in der Einspiegelanordnung mit Natriumdampf als nichtlinearem Medium und $\lambda/8$ -Plättchen im Rückkoppelzweig zeigt bereits ohne ein äußeres statisches Magnetfeld eine Vielfalt interessanter Strukturbildungsphänomene, wie die Arbeiten von [GWKL⁺00, PGWAL04, PGWAL05, Pes07] zeigen. Zu ihnen gehören Fronten zwischen zwei stabilen Polarisationszuständen, Muster mit hexagonaler, triangulärer und rhombenförmiger Symmetrie, eine diskrete Familie dissipativer Solitonen sowie Cluster solcher Solitonen und deren Koexistenz mit Polarisationsfronten.

Da Messungen im magnetischen Nullfeld schwierig durchzuführen und anfällig gegen Störungen – vor allem durch periodische Streufelder – sind, wurden die Experimente in den oben zitierten Arbeiten mit einem longitudinalen Magnetfeld durchgeführt, das groß gegenüber Störfeldern ist, die nach Kompensation des Erdmagnetfeldes verbleiben können. Ein rein longitudinales Magnetfeld hat unter den im Modell getroffenen Annahmen (vgl. Kapitel 5) keinen Einfluss auf den Pumpprozess, so dass eine Präparation mit $B_z \gg B_{x,y}$ in guter Näherung dem Fehlen eines magnetischen Feldes ($\vec{B} = 0$) entspricht (vgl. [Aum99]). Im Experiment wird jedoch durch das im Vergleich große statische longitudinale Feld der Einfluss der zeitlich variierenden Störungen deutlich reduziert. Der lineare Faraday-Effekt als Folge der durch das longitudinale Magnetfeld verursachten Zeeman-Aufspaltung kann dabei im Vergleich zu der relativ großen Gesamtverstimmung Δ vernachlässigt werden.

Die theoretische Analyse des Bifurkationsverhaltens zeigt jedoch, dass die Einführung eines nicht verschwindenden transversalen Magnetfeldes die Beobachtung weiterer interessanter Phänomene verspricht. Prinzipiell sollte jedes statische Feld, das groß gegenüber der Amplitude der Störungen ist, zur Unterdrückung von Auswirkungen derselben geeignet sein. Vor allem ein rein transversales Feld erscheint für weitere Untersuchungen interessant, weil im Fall $B_z = 0$ (bzw. $B_x \gg B_z$) die Zustandsgröße des Systems von einem Skalar zu einem dreikomponentigen Vektor übergeht, die Symmetrie der Gleichun-

gen jedoch erhalten bleibt. Da ein transversales Feld die im zeitlichen Mittel erzielbare Orientierung reduziert und somit effektiv dämpfend auf den Pumpprozess wirkt (vgl. Abschnitt 5.2.2), sind bei sehr starken Feldern wegen der begrenzten Laserleistung keine transversalen Strukturbildungsphänomene mehr zu erwarten.

In der Tat findet man im Parameterbereich nicht zu großer Magnetfelder in transversaler Richtung neuartige Muster, die in der Einspiegelanordnung mit Natriumdampf bisher nicht eingehend untersucht wurden (vgl. Abschnitt 2.3). Einige Beispiele, die bei unterschiedlichen Parametern aufgenommen wurden, sind in Abbildung 4.1 gezeigt. Es handelt sich dabei um mäandrierende Strukturen, die sich über einen großen Bereich des Gaußschen Strahls erstrecken und eine charakteristische transversale Längenskala aufweisen, jedoch keine ausgeprägte Symmetrie besitzen. Sie koexistieren mit in [PGWAL05] beschriebenen lokalisierten Strukturen (*LS*, dissipative Solitonen) und weisen zum Teil lokal Ähnlichkeiten mit Clustern solcher *LS* auf (Abbildung 4.1 a); andere Strukturen sind jedoch von (meist gekrümmten) Fronten zwischen zwei Polarisationszuständen geprägt, die sich fast über den gesamten Strahlradius erstrecken.

Es wird sich im Verlauf dieser Arbeit herausstellen, dass es sich bei den zuvor beschriebenen Mustern um Ausschnitte aus ausgedehnten Labyrinthmustern handelt, die mit dem Gaußschen Strahlprofil interagieren und durch dieses begrenzt werden. Daher werden diese Mäanderstrukturen im Folgenden bereits als „Labyrinthmuster“ bezeichnet.

Der Existenzbereich der Labyrinthmuster erstreckt sich um das magnetische Nullfeld entlang der B_x -Achse im Parameterraum bis zu Flussdichten von einigen μT , solange Parameter, die eine Asymmetrie bezüglich der Polarisationsinstabilität hervorrufen, nahezu Null sind ($B_z \approx 0, \Phi \approx 0$). Für die Situation $B_x = 0, B_z \neq 0$, die im theoretischen Modell dem Fall $\vec{B} = 0$ gleichkommt, werden ebenfalls Labyrinthmuster beobachtet. Auf die Parameterabhängigkeiten wird in Abschnitt 4.2.3 näher eingegangen. Aus den oben genannten Gründen wird in allen anderen Abschnitten – sofern nicht explizit anders angegeben – von der symmetrischen Situation ausgegangen und $B_z = 0, \Phi = 0$ vorausgesetzt.

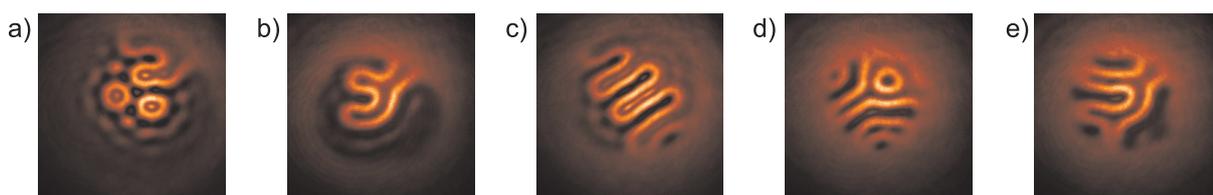


Abbildung 4.1: Beispiele für Labyrinthmuster, aufgenommen bei verschiedenen Parametern.

4.1 Homogener stationärer Zustand

Um die transversalen Strukturen besser verstehen zu können, soll zunächst die Polarisationsinstabilität ohne Berücksichtigung räumlicher Freiheitsgrade näher charakterisiert werden. Wie bereits in Abschnitt 2.4.2 angesprochen, erwartet man ohne äußeres Magnetfeld und bei bezüglich der Polarisation symmetrischen Bedingungen (d. h. insbesondere eine exakt lineare Eingangspolarisation parallel zur langsamen Achse des $\lambda/8$ -Plättchens) eine Pitchfork-Bifurkation des Drehwinkels ξ der Polarisationsebene. Dieses Bifurkationsverhalten wurde in [YOKO84, GWKL⁺00] für das hier behandelte System experimentell nachgewiesen und auch die Störung der Pitchfork-Bifurkation bei nicht symmetrischer Stellung des Wellenplättchens wurde eingehend untersucht [Pes07].

Für ein rein transversales äußeres Magnetfeld ist ein subkritisches Verhalten am Bifurkationspunkt, einhergehend mit einer Erhöhung der kritischen Eingangsleistung, zu erwarten (vgl. Abschnitt 5.2.2, vor allem Abbildung 5.1). Um dies zu untersuchen, wurde die Intensität des transmittierten Lichts im Strahlzentrum mit einem Fotodetektor gemessen und mit Hilfe des Linearpolarisators der Drehwinkel der Polarisation beim Durchgang durch das nichtlineare Medium bestimmt. Dazu wurde in Abhängigkeit von der Eingangsleistung der Linearpolarisator jeweils auf maximale Unterdrückung des transmittierten Lichtfeldes justiert und so der Drehwinkel ξ bestimmt.

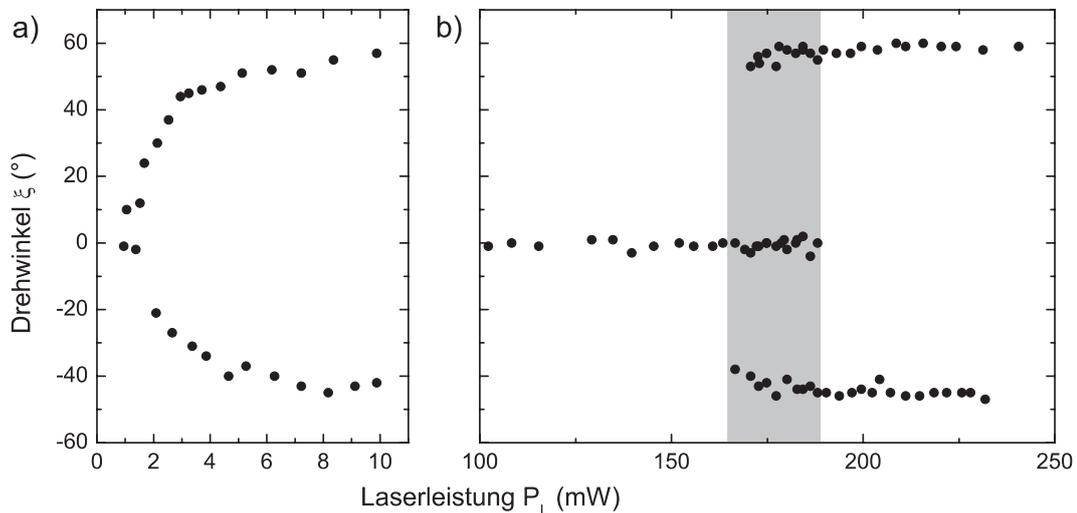


Abbildung 4.2: Stationärer homogener Zustand: Drehwinkel der Polarisation in Abhängigkeit von der Eingangsleistung. a) $B_x = 0 \mu\text{T}$, b) $B_x = 1 \mu\text{T}$. Sonstige Parameter¹: $\Delta = 11,2 \text{ GHz}$, $T = 344 \text{ }^\circ\text{C}$, $p = 300 \text{ hPa}$, $d = 120 \text{ mm}$. Grau hinterlegt: Koexistenz dreier Polarisationszustände.

¹ Zur Bezeichnung der in den Abbildungen angegebenen Parameter siehe Tabelle auf Seite 36.

Abbildung 4.2 zeigt das Ergebnis dieser Messung bei $B_x = 0$ (a) und mit angelegtem transversalen Magnetfeld (b). Im transversalen Nullfeld zeigt sich das klassische Pitchfork-Szenario mit zwei annähernd symmetrischen Ästen oberhalb des Bifurkationspunktes. Der instabile Zustand bei $\xi = 0^\circ$ ist experimentell nicht zugänglich. Eine Erhöhung des transversalen Magnetfeldes verschiebt den Bifurkationspunkt signifikant zu höheren Pumpraten, und es wird deutlich, dass ein Bereich existiert (in der Abbildung grau hinterlegt), in dem drei verschiedene Polarisationszustände koexistieren.

Eine ähnliche optische Tristabilität verschieden polarisierter Zustände wurde für einen mit Natriumdampf gefüllten Resonator von [KYO81a] vorhergesagt und von [CGPS82, Gia85] auch experimentell belegt. Obwohl sich das dort beschriebene System von dem in dieser Arbeit betrachteten in einigen wesentlichen Punkten unterscheidet, sind doch gewisse Analogien festzustellen. So wird z. B. auch in den zitierten Arbeiten das Auftreten der Tristabilität auf eine subkritische, symmetriebrechende Bifurkation des Polarisationszustandes aufgrund konkurrierender Pumpprozesse für σ_+ - und σ_- -Licht zurückgeführt. Die stabilen Polarisationszustände sind dort elliptisch (σ_+ - bzw. σ_- -dominant) oder linear polarisiert, was im in dieser Arbeit behandelten System gerade den Polarisationszuständen des rückgekoppelten Feldes entspricht. Ein transversales Magnetfeld wird jedoch in den zitierten Arbeiten nicht betrachtet.

Die in Abbildung 4.2a gezeigte Tristabilität wird allerdings nur bei relativ kleinen transversalen Magnetfeldern beobachtet ($B_x \lesssim 2 \mu\text{T}$); bei größeren B_x findet man statt des stabilen Astes mit $\xi = 0$ zeitlich oszillierende Zustände. Das Bifurkationsverhalten bleibt jedoch in diesem Parameterbereich subkritisch und die Äste mit $\xi \neq 0$ sind auch dort stabil. Die zeitliche Oszillation kann auf eine Hopf-Instabilität zurückgeführt werden, die in Abschnitt 4.3 näher betrachtet wird. Eine Tristabilität wird nach der linearen Stabilitätsanalyse auch für kleine transversale Felder nicht erwartet. Ein möglicher Grund dafür, dass im Experiment dennoch drei stabile Zustände unterhalb eines kritischen Magnetfeldes auftreten, kann zum einen der Einfluss des Gaußschen Strahlprofils sein. Numerische Simulationen im Gaußschen Strahl zeigen qualitativ, dass bei sehr kleinen Magnetfeldern die Schwelle zur Hopf-Instabilität gegenüber den Erwartungen aus der linearen Stabilitätsanalyse stark ansteigt. Zum anderen wurde in Arbeiten zu magnetisch induziertem „*self-pulsing*“ in einem natriumdampfgefüllten Resonator [KYO81b, MML83] berichtet, dass auch dort das transversale Magnetfeld einen kritischen Wert überschreiten muss, um einen Übergang von tristabilem zu zeitlich oszillierendem Verhalten beobachten zu können.

Da die beobachtete Tristabilität für das Auftreten der in dieser Arbeit behandelten transversalen Strukturen jedoch nicht von zentraler Bedeutung ist, wird auf diesen Punkt im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen.

4.2 Labyrinthmuster

In diesem Abschnitt werden experimentelle Ergebnisse dargestellt, die die Eigenschaften der zu Beginn dieses Kapitels exemplarisch gezeigten Labyrinthstrukturen näher charakterisieren. Von besonderem Interesse sind dabei vor allem das Zeitverhalten, die auftretenden Längenskalen und die Abhängigkeit des Auftretens der Labyrinthstruktur von den experimentellen Parametern.

4.2.1 Zeitverhalten

Die Labyrinthmuster erscheinen in der Regel bei Betrachtung mit einer Videofrequenz von 25 Bildern pro Sekunde instationär, d. h. sie verändern sehr schnell ihre Gestalt. Dabei bleiben jedoch charakteristische Merkmale – wie etwa die dominierende Längenskala und die durchschnittliche „Bedeckung“ des Gaußschen Strahls – konstant und trotz der rapiden Änderung im Videobild erkennbar. Es kommt jedoch auch vor, dass die Strukturen sich auf Zeitskalen von bis zu einigen Sekunden kaum verändern. Da die längste intrinsische Zeitskala des experimentellen Systems mit angelegtem transversalem Magnetfeld durch dessen Larmorfrequenz (einige 10 kHz) gegeben ist und nur wenige Mikrosekunden beträgt, ist die Struktur in diesem Falle als „stabil“ zu betrachten. Eine typische zeitliche Entwicklung bei konstanten Parametern für diesen Fall ist in Abbildung 4.3 gezeigt. Es handelt sich dabei um Schnappschüsse der Systemdynamik, die unsynchronisiert in einem zeitlichen Abstand von etwa 0,5 s aufgenommen wurden.

Hier ist deutlich zu sehen, dass sich die Strukturen teilweise auf längeren Zeitabschnitten nur wenig verändern (z. B. dritte Zeile), während andererseits zu manchen Zeitpunkten sprunghafte Zustandsänderungen auftreten. Im Allgemeinen führen aber von Bild zu Bild nur geringfügige Änderungen kontinuierlich zu gänzlich verschiedenen Strukturen, wenn man Zeitskalen von einigen Sekunden betrachtet.

Bei Messungen mit $B_x \approx 0$ wird bei Betrachtung der lokalen Intensitätsverteilung deutlich, dass die Dynamik des Systems von einer 50 Hz-Komponente überlagert wird, die auf Streufelder aus dem Wechselstromnetz bzw. daran betriebenen Laborgeräten zurückzuführen ist. In diesem Parameterbereich werden auch sprunghafte Änderungen der beobachteten Muster häufiger, so dass davon auszugehen ist, dass schon kleine äußere Einflüsse das raumzeitliche Verhalten der Labyrinthstrukturen empfindlich stören. Zum anderen wurde beobachtet, dass die Labyrinthstrukturen immer wieder an kleinen, aber unvermeidlichen Inhomogenitäten im Strahl oder an den Zellenfenstern „einrasten“ bzw. dort bevorzugt bestimmte Eigenschaften – z. B. eine besonders starke Krümmung der Front – aufweisen. Im vorliegenden experimentellen System ist aus diesen Gründen eine endgülti-



Abbildung 4.3: Entwicklung der Labyrinthstrukturen auf großen Zeitskalen bei konstanten Kontrollparametern. Reihenfolge der Bilder: Zeilenweise von links nach rechts, Zeitschritt $\Delta t \approx 0,5$ s. Parameter: $B_x = 1,8 \mu\text{T}$, $B_z = 0 \mu\text{T}$, $\Delta = 13,0$ GHz, $T = 338^\circ\text{C}$, $p = 300$ hPa, $\Phi = 0^\circ$.

ge Aussage zur Frage, ob die beobachteten Labyrinthstrukturen zeitlich stationär sind, nicht zu treffen.

Da sich jedoch – insbesondere bei durch ein transversales Magnetfeld verringertem Einfluss von Störfeldern – Labyrinthstrukturen sehr verschiedener Erscheinung über Sekunden kaum verändern, ist davon auszugehen, dass es sich bei den Labyrinthstrukturen um sogenannte „*nearly frozen states*“ handelt [GMT00, GCOM04, MML04]. Diese Annahme wird in Kapitel 5 durch den Vergleich mit numerischen Simulationen, in denen äußere Störeinflüsse nicht vorkommen, näher begründet.

4.2.2 Längenskalen

Die Labyrinthmuster weisen eine charakteristische Längenskala auf, die durch den minimalen Abstand gegeben ist, den zwei Frontabschnitte zueinander einnehmen können. Dieser Abstand, der auch den minimalen Krümmungsradius entlang des Verlaufs einer Front definiert, tritt in den beobachteten Strukturen sehr häufig auf, da die Labyrinthstruktur zu großen Anteilen aus je zwei stückweise (annähernd) parallel verlaufenden Fronten in eben diesem Abstand bestehen.

In Abbildung 4.4 ist zum Vergleich die Längenskala Λ_{hex} der gut verstandenen hexagonalen Turing-Muster (a) in bei identischem Spiegelabstand ($d = 12$ cm) aufgenommene Bilder von Labyrinth (b+c) eingezeichnet. Die Auswertung mehrerer Bilder aus derselben Messreihe, die ebenfalls Hexagone zeigen, ergibt eine Periodizitätslänge von $\Lambda_{hex} = 0,377$ mm, entsprechend einer Musterwellenzahl von $k_{hex} = 16,633$ rad/mm. Dies entspricht sehr gut der Erwartung aus Gleichung (2.11) mit $b = 0$, wonach $k_{lim,0} = 16,711$ rad/mm.

Auf den ersten Blick scheinen die typischen Frontabstände der Labyrinthstruktur in der Größenordnung von Λ_{hex} zu liegen, bei genauerer Betrachtung sind jedoch die Frontabstände regelmäßig etwas kleiner als die hexagonale Längenskala, was insbesondere der Vergleichsmaßstab $2\Lambda_{hex}$ in b) verdeutlicht. Im Mittel mehrerer Bilder ergibt sich für $d = 12$ cm ein typischer Frontabstand von 0,35 mm. Weiterhin ist zu beachten, dass die tatsächliche Längenskala der Labyrinthstruktur – wenn man den üblichen Konventionen folgt, die auf (zumindest lokale) Periodizitätslängen einer Modulation der Orientierung abstellen – durch den *doppelten* Abstand der Fronten gegeben ist, was durch die folgenden Erläuterungen begründet wird:

Bei der quantitativen Bestimmung der Längenskalen aus experimentellen Daten ergibt sich das Problem, dass die Orientierung als Observable nicht direkt messbar ist. Zwar lässt die Polarisationsverteilung Rückschlüsse auf die Orientierung zu, jedoch ist bei einer Stellung des Linearpolarisators, die jeweils einen der stabilen Polarisationszustände unter-

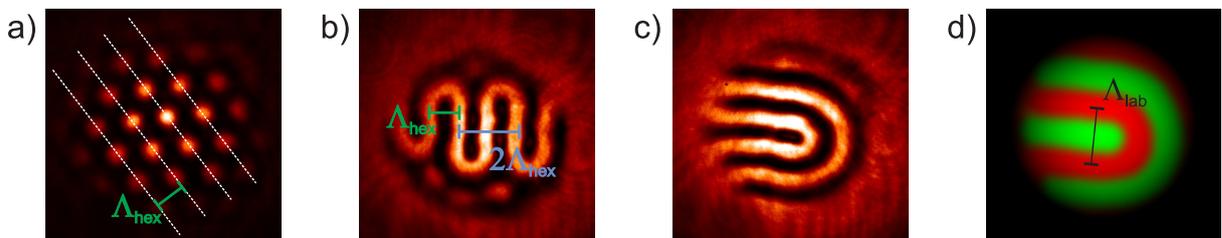


Abbildung 4.4: Längenskalen verschiedener Strukturen bei gleichem Spiegelabstand ($d = 12$ cm): a) Hexagonale Turing-Muster, b) + c) Labyrinth, d) Veranschaulichung der Orientierungsverteilung aus c) (grün = positive Orientierung, rot = negative Orientierung). Erläuterungen im Text.

drückt bzw. maximal transmittiert, was eine gute Unterscheidbarkeit der beiden Zustände gewährleistet, der Ort eines Nulldurchgangs der Orientierung nicht bestimmbar. Andererseits erlaubt zwar die Betrachtung der Polarisationssebene des Eingangsstrahls eine präzisere Bestimmung des Ortes einer Front und ein deutlich besseres Kontrastverhältnis in der Intensitätsverteilung, liefert jedoch keine Aussagen mehr darüber, welche Polarisationszustände auf beiden Seiten der Front angenommen werden.

Da sich jedoch aus topologischen Gesichtspunkten zumindest Rückschlüsse auf die Gleichheit oder einen Wechsel des Vorzeichens der Polarisation zwischen zwei Bildbereichen ziehen lassen, ist diese Polarisationssebene für die Analyse der Längenskalen als die am besten geeignete anzusehen. Bei Betrachtung so aufgenommener Bilder entsteht vordergründig der Eindruck einer Periodizitätslänge in der Größenordnung von Λ_{hex} . In Abbildung 4.4 d) ist eine Rekonstruktion der Orientierungsverteilung aus c) bezüglich des Vorzeichens schematisch dargestellt, wobei das absolute Vorzeichen der Orientierung willkürlich festgelegt wurde. Rot gefärbte Bereiche stehen für eine negative, grün gefärbte für eine positive Orientierung. In dieser Darstellung wird noch einmal deutlich, dass die charakteristische Längenskala $\Lambda_{lab} = 2\pi/k_{lab}$ mit rund 0,70 mm deutlich größer ist als die Periodizitätslänge der Hexagone.

Es treten seltener auch Strukturen auf, die zwischen den Fronten weitere helle Linien in der Intensitätsverteilung besitzen, die im Folgenden als „Zwischenmaxima“ bezeichnet werden. Diese Linien besitzen eine etwas geringere Intensität als die zu den Fronten gehörigen Linien und enden in der Nähe einer starken Krümmung der Front. Zwei Beispiele solcher Strukturen sind in Abbildung 4.5 a) und b) zu sehen. An den nicht geschlossenen oder durch den Rand des Strahls begrenzten Linien hoher Intensität kann aus topologischen Gründen das Vorzeichen der Orientierung nicht wechseln (siehe Rekonstruktion in Abbildung 4.5 d), so dass die eigentlichen Fronten in diesem Fall größere Abstände besitzen. Bei wachsendem Abstand zwischen zwei Fronten gehen die linienförmigen Zwischenmaxima zu tendenziell hexagonal strukturierten Bereichen über, bei denen jedoch der Einfluss der benachbarten Front für eine stark gestörte Symmetrie sorgt.

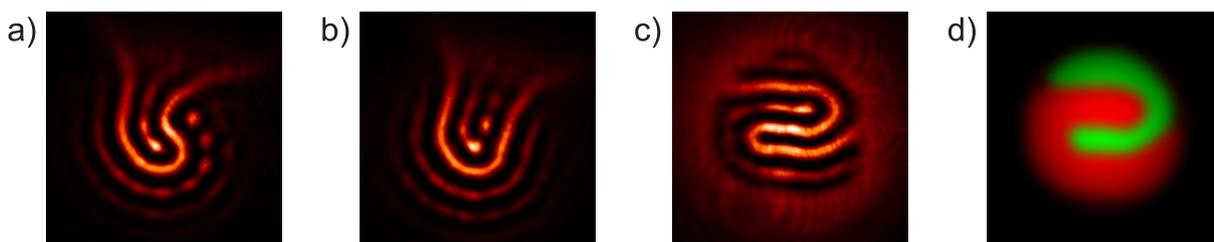


Abbildung 4.5: Labyrinthstrukturen mit unterschiedlichen Frontabständen: a) Frontabstand $\approx \Lambda_{lab}$, b) Frontabstand $\approx \Lambda_{lab} + \Lambda_{hex}$, c) Koexistenz verschiedenener Abstände, d) Veranschaulichung der Orientierungsverteilung aus c). Erläuterungen im Text.

Bei nur einem oder zwei Zwischenmaxima bzw. in der Nähe der Front variiert die charakteristische Längenskala der Abstände zwischen einer Front und einem Zwischenmaximum bzw. zwischen zwei Zwischenmaxima; typischerweise beobachtet man Werte im Bereich von Λ_{hex} bis $\Lambda_{lab}/2$. Wie in Abbildung 4.5 b) zu erkennen ist, treten aber zwischen Konstituenten von Mustern unter dem Einfluss benachbarter Fronten auch geringere Abstände auf.

Bild c) zeigt, dass in einem Labyrinth auch Fronten mit verschiedenem Abstand zueinander, also mit und ohne bzw. mit unterschiedlich vielen Zwischenmaxima, koexistieren können. Bei den beobachteten Strukturen mit Zwischenmaxima in der Intensitätsverteilung reicht jedoch in der Regel das Aspektverhältnis im Gaußschen Strahl nicht zur Bildung von ausgedehnten Labyrinth aus, vielmehr werden in diesen Fällen meist nur einzelne „Finger“ wie in Abbildung 4.5 a) + b) gezeigt, beobachtet.

Im Gaußschen Strahl stehen durch das begrenzte Aspektverhältnis immer nur wenige Konstituenten zur Verfügung, und es gelingt nur in den seltensten Fällen, eine gerade Linie in einem Bild zu finden, die mehrere Fronten nacheinander orthogonal schneidet. Eine Vermessung der Bilder kann unter diesen Bedingungen nur exemplarischen Charakter besitzen; die Aussagen dieses Abschnitts sind daher nur als erste Anhaltspunkte für eine genauere Untersuchung anhand numerischer Simulationen zu verstehen.

Bezüglich der Parameterabhängigkeiten lässt sich jedoch festhalten, dass (erwartungsgemäß) nur der Spiegelabstand die auftretenden Längenskalen beeinflusst; eine Änderung anderer Parameter – etwa der Pumpleistung oder des Magnetfeldes – hat keinen erkennbaren Einfluss auf die transversalen Strukturgrößen.

4.2.3 Existenzbereich der Labyrinth

In diesem Abschnitt soll der Einfluss von Parametern näher untersucht werden, die die Symmetrieeigenschaften der Pitchforkbifurkation bezüglich der beteiligten Polarisationszustände beeinflussen, namentlich das (longitudinale) Magnetfeld und die Ausrichtung des $\lambda/8$ -Plättchens relativ zur Polarisations Ebene des Eingangsstrahls.

Einfluss des Magnetfeldes

Für die Existenz der Labyrinthstrukturen ist – wie bereits einleitend erwähnt – das externe magnetische Feld einer der bestimmenden Parameter. Deshalb wird nun auf die Abhängigkeit der beobachteten Muster von der magnetischen Flussdichte in longitudinaler und transversaler Richtung näher eingegangen.

Um diese zu bestimmen, wurde bei gleichbleibenden sonstigen Parametern das Magnetfeld systematisch variiert, zu jedem Parametersatz ein Bild genommen und so die in

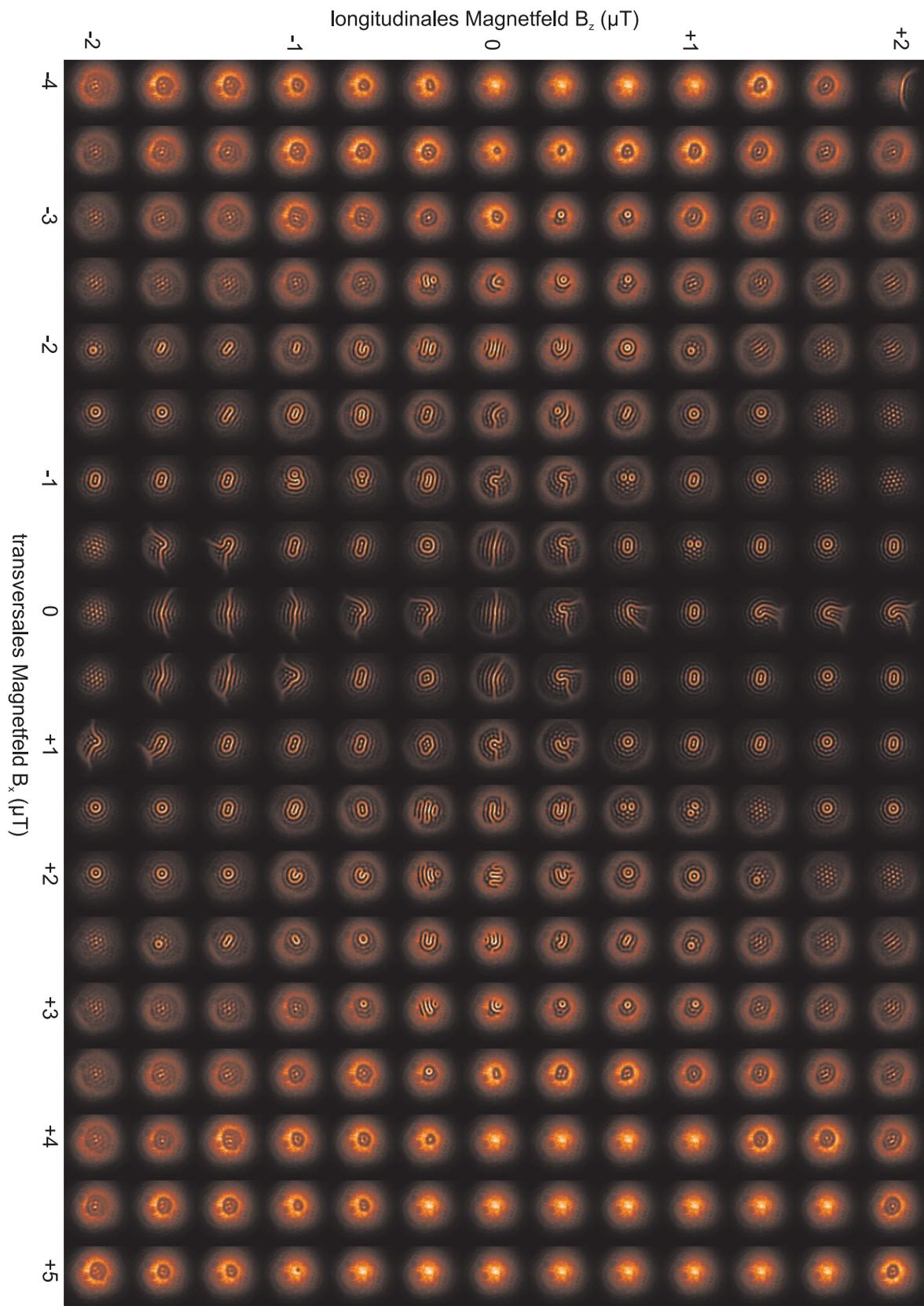


Abbildung 4.6: Existenzbereich der Labyrinthmuster: Magnetfeldkarte. Parameter: $P_L = 280 \text{ mW}$, $\Delta = 12,8 \text{ GHz}$, $T = 328 \text{ }^\circ\text{C}$, $p = 300 \text{ hPa}$, $d = 120 \text{ mm}$, $\Phi = 0^\circ$, $\Theta = 0^\circ$.

Abbildung 4.6 gezeigte Karte erstellt. Um dabei Hystereseeffekte zu vermeiden, wurde zwischen je zwei Bildern das Magnetfeld auf einen Wert weit außerhalb des zu vermessenden Bereichs zurückgesetzt und jeder Punkt in der Karte von dort aus angesprungen. Das genaue Verfahren bei dieser Messmethode ist in [Sch06] näher beschrieben.

Da in den Übergangsbereichen zwischen verschiedenen Mustertypen in der Regel eine Bi- oder Multistabilität der in den angrenzenden Parameterbereichen beobachtbaren Strukturen vorherrscht, gibt Abbildung 4.6 an einzelnen Positionen nicht unbedingt die beim jeweiligen Magnetfeld am häufigsten auftretende Struktur wieder. Insbesondere treten typischerweise dort, wo in der gezeigten Karte gerade oder mehrfach gekrümmte Fronten zu sehen sind (z. B. bei $B_x = 0, B_z < 0$), in anderen Messreihen auch Labyrinth auf. In Abbildung 4.7 sind daher die typischen Existenzbereiche schematisch aufgetragen, wie sie sich bei mehrfacher Wiederholung eines identischen Magnetfeldscans darstellen.

Labyrinthmuster finden sich in Abbildung 4.6 in einem Bereich, der sich für transversale Felder von etwa $B_x \approx -2 \dots + 3 \mu\text{T}$ erstreckt und auf Abweichungen von etwa $0,3 \mu\text{T}$ um das longitudinale Nullfeld beschränkt ist. Außerdem finden sich Labyrinth ebenfalls entlang der Achse $B_x = 0$ und für $B_z \approx -2 \mu\text{T}$ auch noch bei gering von Null verschiedenem transversalem Feld. Dieser Befund ist darauf zurückzuführen, dass – wie eingangs erwähnt – das longitudinale Feld nur dann eine nennenswerte Wirkung auf das optische Pumpen hat, wenn gleichzeitig ein transversales Feld anliegt. Der Fall $B_z \gg B_x$ entspricht demnach der Situation bei $\vec{B} = 0$. Außerhalb des dargestellten Magnetfeldbereichs, insbesondere für in anderen Arbeiten verwendete wesentlich größere longitudinale Felder, wurden keine Labyrinth beobachtet. Dies kann darauf zurückzuführen sein, dass bei der Erzeugung größerer longitudinaler Magnetfelder bei nicht exakt paralleler Strahlführung bezüglich der Spulengeometrie oder durch den Einfluss von Metallteilen in der Nähe der Helmholtzspulen auch parasitäre transversale Felder entstehen können, die die Symmetrie der beteiligten Polarisationszustände stören.

Bei manueller Parametervariation zeigt sich, dass die Labyrinth für den Fall $B_z = 0, B_x \neq 0$ wesentlich häufiger zu beobachten sind und sich leichter präparieren lassen als entlang der B_z -Achse ($B_x = 0, B_z \neq 0$). Dieser Befund lässt sich durch eine Reduktion der Schwelle zur Bildung von Labyrinth bezüglich der Pumpleistung unter dem Einfluss eines transversalen Magnetfeldes erklären. Auf dieses Phänomen wird in Abschnitt 5.3.2 im Zusammenhang mit numerischen Simulationen näher eingegangen.

Entlang der B_x -Achse ($B_z = 0$) nimmt der Radius des Bereichs im Gaußschen Strahl, über den sich die Labyrinth ausdehnen, mit steigendem transversalem Feld ab, was auf die Erhöhung der Schwelle zur Bistabilität zurückzuführen ist, da die Labyrinth sich aus Fronten zwischen zwei stabilen Zuständen zusammensetzen und so eine Bistabilität notwendige Voraussetzung für deren Existenz ist. Der äußere Bereich des Strahls, in dem

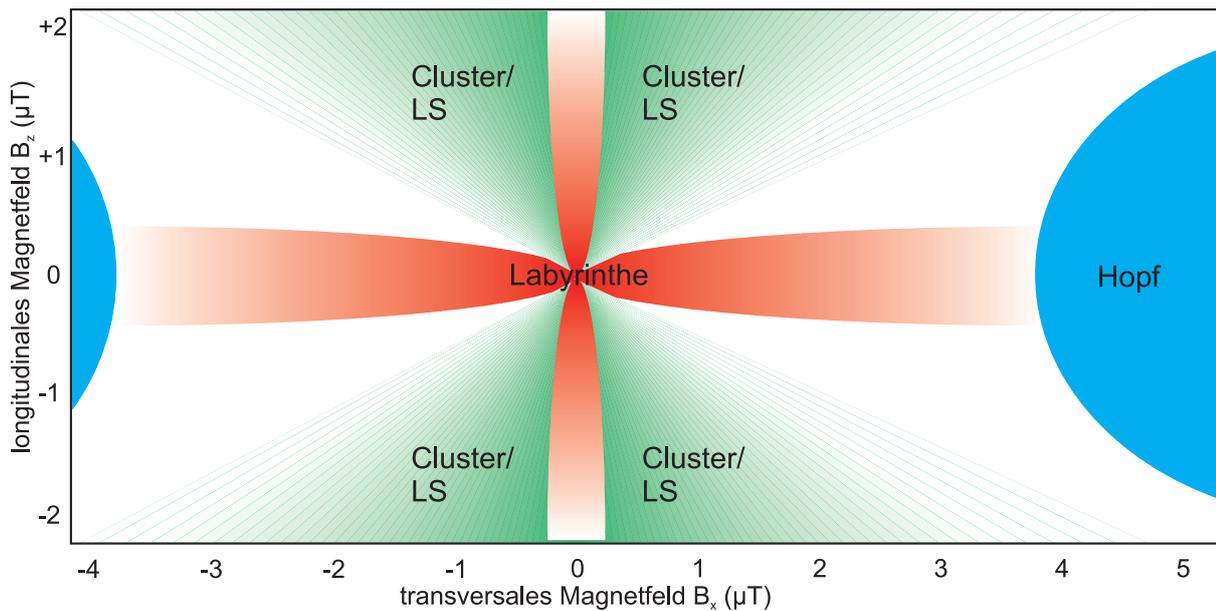


Abbildung 4.7: Schematische Darstellung der Existenzbereiche bei Variation des Magnetfeldes. Der dargestellte Bereich entspricht dem in Abbildung 4.6.

diese Schwelle unterschritten wird, ist der Strahl unstrukturiert, wobei der Übergang zwischen Labyrinth und unstrukturierter Bereich aufgrund des subkritischen Bifurkationsverhaltens relativ scharf definiert ist. Auffällig ist, dass die Fronten, aus denen sich die Labyrinth zusammensetzen, am Übergang zum unstrukturierten Bereich annähernd senkrecht auf der gedachten Begrenzungslinie stehen.

Bei weiterer Erhöhung ist in den Bildern ein über den gesamten Strahlradius unstrukturierter Bereich zu sehen. In diesem Bereich findet sich bei Betrachtung mit höherer Zeitaufösung eine Oszillation, die auf die bereits in Abschnitt 2.4.1 erwähnte Hopf-Instabilität zurückgeführt werden kann. Auf diesen Parameterbereich wird in Abschnitt 4.3 näher eingegangen.

Für von Null verschiedene longitudinale Felder findet sich entlang der B_x -Achse ein immer wiederkehrendes Szenario: Für kleine transversale Felder beobachtet man zunächst lokalisierte Strukturen (LS), wie sie in [PGWAL05] als dissipative Solitonen beschrieben werden, Cluster solcher LS sowie *lokalisierte Muster* [Pes07]. Die beobachteten lokalisierten Strukturen bzw. Muster treten in diesem Parameterbereich spontan auf, wohingegen sie in den zitierten Arbeiten nur durch Präparation mittels eines Zündstrahls beobachtet werden konnten.

Bei Erhöhung des transversalen Feldes folgen etwa ab $|B_x| \gtrsim |B_z|$ typischerweise hexagonale Muster. Der Polarisationszustand, auf dem sich diese Muster ausbilden bzw. die LS existieren, ist dabei vom Vorzeichen des longitudinalen Feldes abhängig. Dies entspricht der Erwartung aus dem Bifurkationsverhalten des homogenen Zustandes, bei der

wegen der durch das longitudinale Feld induzierten Asymmetrie gerade bei niedrigen Pumpraten einer der beiden homogen stabilen Zustände deutlich gegenüber dem anderen bevorzugt ist. Dass die Auswahl des Polarisationszustandes in der hier verwendeten Abbildung nicht zu erkennen ist, liegt an der Stellung des Linearpolarisators parallel zu der Eingangspolarisation. Diese wurde hier so gewählt, um die Fronten mit bestmöglichem Kontrast darzustellen und um zu gewährleisten, dass alle im untersuchten Parameterbereich auftretenden Strukturen vom Dynamikumfang der Kamera ohne Nachjustierung der Abschwächung erfasst werden können.

Auch hier wird die transversale Ausdehnung der Muster im Gaußschen Strahl mit steigendem transversalen Feld geringer; die Strukturen werden von einem unstrukturierten Bereich umgeben und zeigen zunehmend Wechselwirkungseffekte mit der runden Begrenzung, die durch den Strahlradius definiert wird, bei dem die Intensität des Pumpstrahls die Schwelle zur Musterbildung überschreitet. Nähert sich dieser Radius der charakteristischen Längenskala der Hexagone an, so wird die Symmetrie der Muster deutlich gestört und es finden sich zum Teil nur noch wenige einzelne Musterkonstituenten im Strahlzentrum. Der Übergang von LS-Clustern zu den Turing-Mustern vollzieht sich fließend, und der Übergangsbereich verschiebt sich bei Erhöhung des longitudinalen Feldes zu höheren Beträgen des transversalen Feldes.

Einfluss des $\lambda/8$ -Plättchens

Die Karte in Abbildung 4.6 wurde bei symmetrischer Stellung des $\lambda/8$ -Plättchens ($\Phi = 0$) aufgenommen. Bei $\Phi \neq 0$ wird wiederum ein Polarisationszustand bevorzugt, und der Existenzbereich der Labyrinth verschiebt sich für positive Drehwinkel von Φ in Richtung negativer B_z und umgekehrt. Im Hinblick auf transversale Felder schrumpft der Existenzbereich dabei dramatisch; bei Winkeln von $|\Phi| \gtrsim 2^\circ$ werden bereits keine Labyrinth mehr beobachtet. Diese Ergebnisse lassen die Schlussfolgerung zu, dass Labyrinth nur dann auftreten, wenn die beteiligten Polarisationszustände annähernd gleichberechtigt sind.

Die Ähnlichkeit zwischen Labyrinth und LS-Clustern sowie deren Nachbarschaft im Parameterraum deuten darauf hin, dass die zugrunde liegenden Prozesse verwandt sind. In [Pes07] wird die Bildung lokalisierter Strukturen in diesem System auf eine Interaktion der krümmungsgetriebenen Frontdynamik geschlossener Polarisations-Domänen mit der durch die Bevorzugung eines Polarisationszustandes hervorgerufene Expansion bzw. Kontraktion solcher Domänen zurückgeführt. Der Zusammenhang zwischen der Frontdynamik und der Bildung von Labyrinthstrukturen wird im folgenden Abschnitt experimentell in Ansätzen untersucht und bildet einen zentralen Teil der numerischen Untersuchungen in Kapitel 5.

4.2.4 Instabilität von Fronten

In der Literatur wird die Entstehung von Labyrinthmustern vielfach mit einer transversalen Modulationsinstabilität von Fronten begründet (vgl. Kapitel 2). Ein Nachweis dieses Mechanismus' ist im vorliegenden experimentellen System jedoch schwierig, da einerseits präparierte Fronten aufgrund des Phasengradienten im Gaußschen Strahl schnell aus dem Strahl driften und andererseits die Zeitskalen, auf denen sich eine solche Modulationsinstabilität erwartungsgemäß entwickeln würde, zu klein sind, um diese Dynamik mit herkömmlichen Videokameras auflösen zu können.

Um die Destabilisierung gerader Fronten experimentell nachzuweisen, wurde daher bewusst ein Szenario gewählt, in dem präparierte Fronten im Strahl lokal stationär und damit besser beobachtbar bleiben. Das ist z. B. dann der Fall, wenn ein schiefes Magnetfeld angelegt wird, wodurch einer der beiden Polarisationszustände bevorzugt wird. Dies lässt sich durch eine geringe Rotation des $\lambda/8$ -Plättchens für eine bestimmte Pumprate kompensieren; für höhere oder niedrigere Pumpraten wird nach wie vor jeweils einer der beiden homogenen Zustände leicht bevorzugt. Auf diese Weise lässt sich eine Front etwas außerhalb des Strahlzentrums fixieren, wobei die azimuthale Ausrichtung aufgrund von geringen Inhomogenitäten im Strahlprofil meist gleich bleibt.

Eine so präparierte Front ist in Abbildung 4.8 a) dargestellt. Erhöht man die Eingangsleistung, so krümmt sich die Front – beginnend im Strahlzentrum – zunehmend (b–d) und zeigt schließlich bereits eine deutlich von der Ursprungsfront verschiedene Struktur (e). Bei den gezeigten Bildern handelt es sich um stationäre Zustände, die auf ein Einrasten der Frontbewegung an den unterliegenden Turing-Strukturen zurückzuführen sind. Die notwendigen Kompromisse bei der Präparation der Fronten bringen es mit sich, dass diese Ergebnisse nur eine geringe Aussagekraft über die Destabilisierung der Fronten besitzen. Es zeigt sich allerdings in numerischen Simulationen, dass das Verhalten gerader Fronten im Gaußschen Strahl auch bei symmetrischer Präparation qualitativ identisch ist (vgl. Abschnitt 5.3.2).

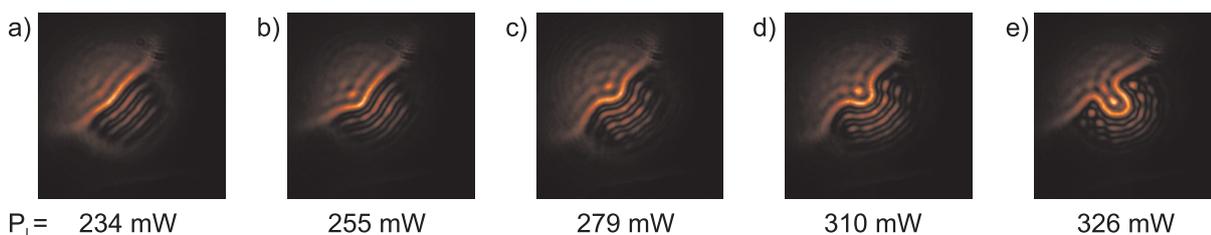


Abbildung 4.8: Destabilisierung einer geraden Front bei Erhöhung der Pumpleistung P_L . Parameter: $\Delta = 12$ GHz, $T = 308$ °C, $p = 300$ hPa, $d = 120$ mm, $B_x = 0,5$ μ T, $B_z = 1,0$ μ T, $\Phi = 9^\circ$, $\Theta = -10^\circ$. Erläuterungen im Text.

4.3 Raumzeitlich oszillierende Strukturen

An den Existenzbereich der Labyrinthmuster schließt sich in Richtung höherer transversaler Magnetfelder bzw. geringerer Laserleistungen ein Bereich an, in dem die in Abschnitt 2.4.1 bereits erwähnte Hopf-Instabilität beobachtet werden kann. Diese Instabilität äußert sich lokal in zeitlich periodischen Oszillationen des Polarisationsdrehwinkels. Ist ein hinreichend großer Bereich des Strahls Hopf-instabil², so treten auch periodisch oszillierende, transversal ausgedehnte Muster (Spiralen und sogenannte *Targetmuster*) auf.

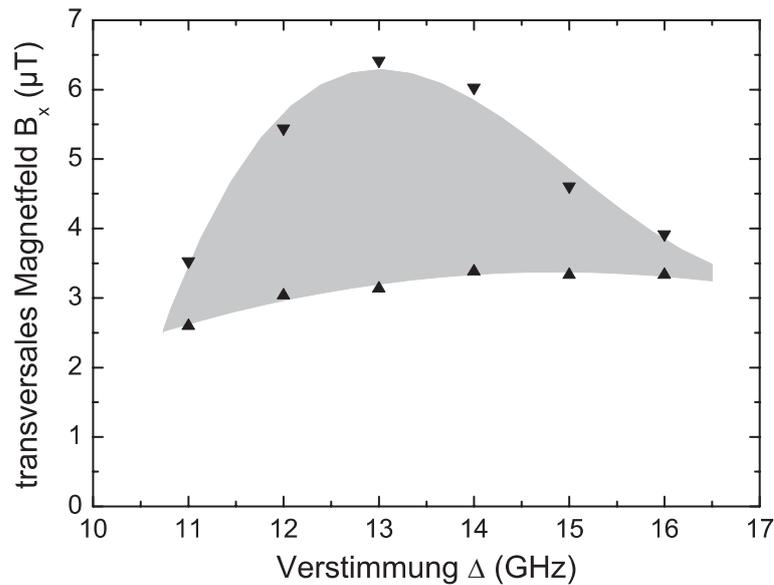


Abbildung 4.9: Existenzbereich der Hopf-Instabilität in Abhängigkeit von der Verstimmung. Die graue Fläche dient lediglich zur visuellen Orientierung. Parameter: $P_L = 250 \text{ mW}$, $T = 327 \text{ °C}$, $p = 300 \text{ hPa}$, $d = 120 \text{ mm}$, $\Phi = 0^\circ$, $\Theta = -60^\circ$.

In Abbildung 4.9 ist der im Experiment zugängliche Existenzbereich der Hopf-Instabilität bei der maximal verfügbaren Laserleistung³ in Abhängigkeit von Verstimmung und transversalem Magnetfeld gezeigt. Lokale Polarisationsoszillationen konnten für Verstimmungen von $\Delta \approx 11 \dots 17 \text{ GHz}$ nachgewiesen werden.

Der Existenzbereich beginnt bei etwa $2,5 \dots 3 \mu\text{T}$, wobei die minimale Magnetfeldstärke mit der Verstimmung leicht ansteigt. Unterhalb dieser Grenze, also für geringere transversale Magnetfeldstärken, wird keine Oszillation mehr beobachtet. Dort finden sich bei kleinen Verstimmungen vorwiegend unstrukturierte Zustände, zu höheren Verstimmungen hin dominieren die im vorigen Abschnitt beschriebenen Labyrinthmuster.

² Hier ist zu beachten, dass die lokale Intensität und damit die Pumprate über den Radius des Strahlprofils nicht konstant ist.

³ Prinzipiell lassen sich auch höhere Laserleistungen erreichen (vgl. Kapitel 3). Allerdings ist bei erhöhten Anforderungen an die Güte der Intensitätsstabilisierung und bei einer großen Variation der Verstimmung – wie in diesem Fall – die über den gesamten Parameterbereich konstant verfügbare Leistung auf etwa 250 mW begrenzt.

Die obere Grenze des Existenzbereichs variiert von etwa $3,5\ \mu\text{T}$ an den Rändern bis zu $6,4\ \mu\text{T}$ bei einer Verstimmung von $13\ \text{GHz}$. Bei größeren Magnetfeldern finden sich stationäre, unstrukturierte Zustände, bei denen die Polarisationsrichtung beim Durchgang durch die Natriumzelle unverändert bleibt.

4.3.1 Lokale Messung der Oszillationsfrequenzen

Zur Charakterisierung der Hopf-Instabilität wurden zunächst Messungen der lokalen Oszillationsfrequenz durchgeführt. Dazu wird die von der Zelle transmittierte Intensitätsverteilung auf eine Ebene abgebildet, in der sich ein transversal verschiebbarer Detektor (D1, vgl. Abschnitt 3.4) befindet. Vor dem Detektor ist eine Lochblende mit einem Durchmesser von $600\ \mu\text{m}$ angebracht, die gemeinsam mit dem Detektor verschoben wird. Der Strahlradius in der Bildebene beträgt $3,12\ \text{mm}$, so dass der Detektor eine Fläche von etwa 1% des Strahlprofils aufnimmt.

Der Linearpolarisator wird dabei so justiert, dass die gemessene Oszillationsamplitude maximal wird. Dies ist typischerweise bei Winkeln von $|\Theta| \approx 60^\circ$ der Fall. Bei einer Einstellung des Linearpolarisators parallel bzw. senkrecht zur Polarisationssebene des einfallenden Lichts wird bei sonst gleichen Parametern die doppelte Oszillationsfrequenz bei deutlich kleinerer Amplitude detektiert, da Polarisationsdrehungen in beide Richtungen gleichermaßen die auf den Detektor treffende Intensität beeinflussen. Für andere Winkel erkennt man im Allgemeinen asymmetrische Oszillationsformen.

Abbildung 4.10 zeigt eine typische Zeitreihe der lokalen Intensitätsoszillation. Der Linearpolarisator ist – wie oben geschildert – auf die maximale Oszillationsamplitude justiert ($\Theta = -56^\circ$). Man erkennt eine in guter Näherung sinusförmige Oszillation mit konstanter Frequenz. Leichte Abweichungen in der Amplitude sind auf geringe Parameterfluktuationen (vor allem periodische Störungen des Magnetfeldes durch $50\ \text{Hz}$ -Streufelder sowie kleinamplitudige Regelschwankungen der Laserleistung) zurückzuführen.

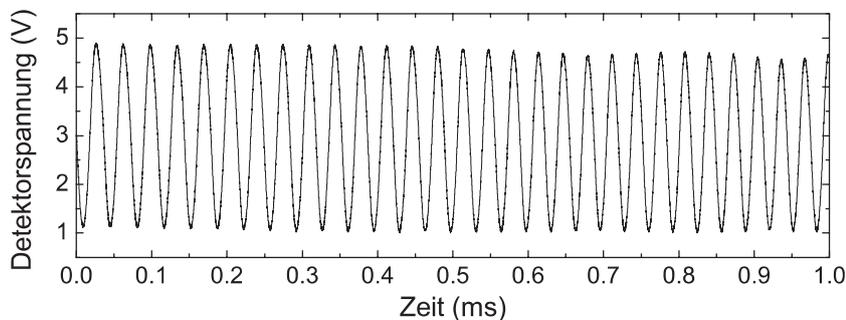


Abbildung 4.10: Beispiel einer Zeitreihe der lokalen Oszillation. Parameter: $\Theta = -56^\circ$, $B_z = 0$, $B_x = 3,7\ \mu\text{T}$, $P_L = 320\ \text{mW}$, $\Delta = 12,3\ \text{GHz}$, $T = 336\ ^\circ\text{C}$, $p = 301\ \text{hPa}$, $d = 120\ \text{mm}$, $\Phi = 0^\circ$.

Für die im Folgenden beschriebenen Messungen der Parameterabhängigkeiten wurden für jeden Parametersatz etwa 100 Zeitreihen über je ca. 20–30 Oszillationsperioden aufgenommen. Frequenz und Amplitude der Oszillation wurden für jede Zeitreihe mittels eingebauter Analysefunktionen des Oszilloskops ausgewertet und anschließend über die Zeitreihen gemittelt. Der Gleichspannungsanteil wurde bei der Messung unterdrückt, um für weitere Messungen (s. u.) ein von der absoluten Amplitude unabhängiges Triggersignal zu erhalten.

Einfluss des Magnetfeldes

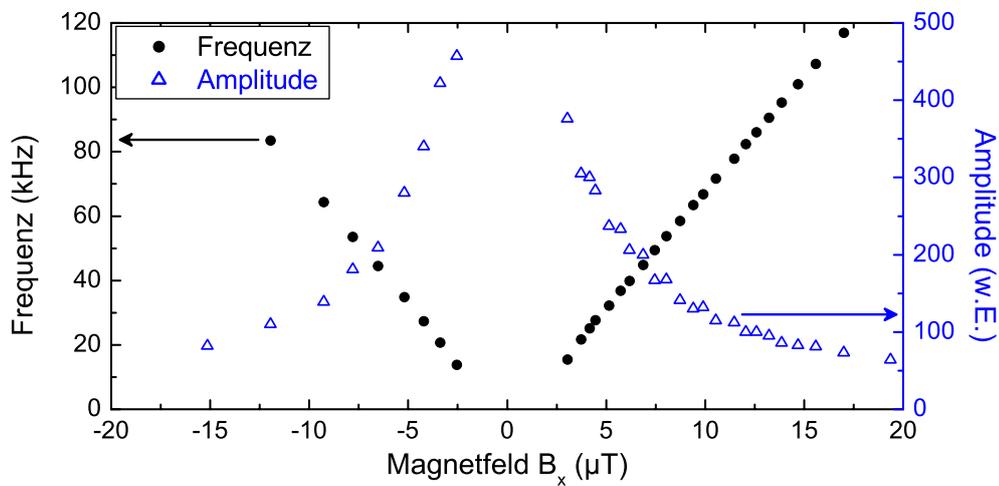


Abbildung 4.11: Oszillationsfrequenz und -amplitude in Abhängigkeit vom transversalen Magnetfeld. Parameter: $B_z = 0$, $P_L = 240$ mW, $\Delta = 13,8$ GHz, $T = 330$ °C, $p = 300$ hPa, $\Phi = 0^\circ$, $\Theta = -60^\circ$.

Abbildung 4.11 zeigt die Abhängigkeit der Hopf-Frequenz vom äußeren transversalen Magnetfeld bei konstanter Verstimmung und gleichbleibender Laserleistung. Gemessen wurde dabei die Intensität hinter dem Linearpolarisator im Strahlzentrum.

Die gemessene Oszillationsfrequenz steigt in sehr guter Näherung linear mit dem äußeren Magnetfeld an, wobei die Frequenz mit $7,27$ kHz/ μ T zunimmt. Die Amplitude der Oszillation verhält sich dabei in guter Näherung reziprok zur Frequenz. Im Bereich $|B_x| \lesssim 2,5$ μ T ist keine lokale Oszillation erkennbar; dort werden statt dessen zeitlich stationäre Labyrinthmuster beobachtet. In [YOKO84] wird für die Einspiegelanordnung mit Natriumdampf und $\lambda/8$ -Plättchen in Übereinstimmung mit der linearen Stabilitätsanalyse in Abschnitt 5.2.3 eine Oszillation mit einer Frequenz vorhergesagt, die für kleine transversale Magnetfelder signifikant kleiner ist als die Larmorfrequenz $\Omega_x = \frac{\mu_B g}{\hbar} B_x$ (vgl. Abschnitt 5.1) und sich dieser für größere Magnetfelder asymptotisch annähert. Die Abweichung der Oszillationsfrequenz kann in der oben geschilderten Messung nicht reproduziert werden, allerdings steht das asymptotische Verhalten der Frequenz bei Variation des

Magnetfeldes in guter Übereinstimmung mit dem theoretisch erwarteten Zusammenhang $f \rightarrow \Omega_x/2\pi = 6,998 \text{ kHz}/\mu\text{T} \cdot B_x$.

Einfluss der Laserleistung

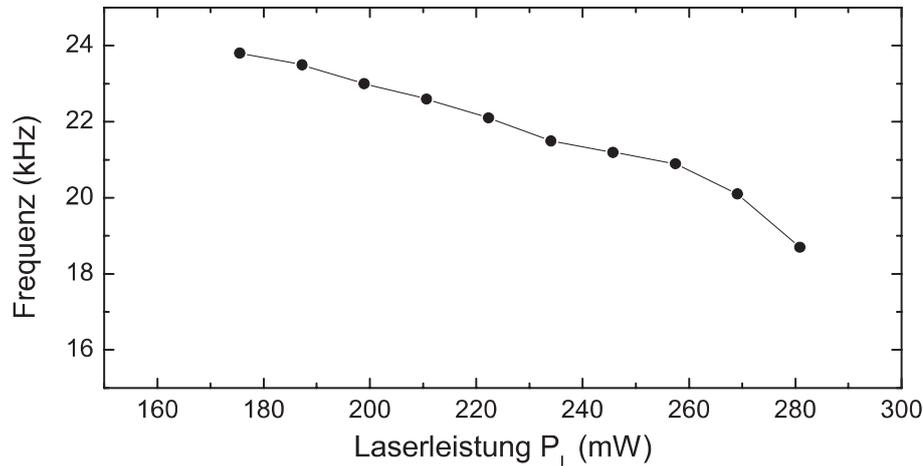


Abbildung 4.12: Oszillationsfrequenz im Strahlzentrum in Abhängigkeit von der Laserleistung. $B_x = 3,9 \mu\text{T}$, $B_z = 0$, sonstige Parameter wie in Abbildung 4.11.

Betrachtet man die Abhängigkeit der lokalen Oszillationsfrequenz von der Leistung des Eingangsstrahls bei gleichbleibendem transversalen Magnetfeld (Abbildung 4.12), so fällt zunächst auf, dass nur etwa im oberen Drittel der zur Verfügung stehenden Eingangsleistung (hier: $P_L \approx 180 \dots 280 \text{ mW}$) überhaupt Oszillationen beobachtet werden. Die Oszillationsfrequenz nimmt in diesem Bereich mit steigender Eingangsleistung monoton ab, wobei der Zusammenhang für Leistungen von $P_L \approx 180 \dots 260 \text{ mW}$ näherungsweise linear ist und zum oberen Rand des Existenzbereichs der Oszillationen ein größeres Gefälle aufweist. Diese Abhängigkeit deckt sich qualitativ mit den Aussagen der linearen Stabilitätsanalyse (vgl. Abschnitt 5.2.3) und Experimenten zu selbsterregten Oszillationen in einem mit Natriumdampf gefüllten Resonator [MDLM86].

Für Pumpleistungen oberhalb $P_L \approx 280 \text{ mW}$ wurden für die angegebenen Parameter keine Oszillationen mehr beobachtet; es schließen sich stationäre Muster bzw. Labyrinth an (vgl. Abschnitt 4.2).

Einfluss des Strahlprofils

Da die Pumprate wegen des gaußförmigen Strahlprofils radial nach außen abnimmt, ist zu erwarten, dass die zuvor bestimmte Abhängigkeit der Oszillationsfrequenz von der Laserleistung sich auch in einer radialen Änderung der Frequenz niederschlägt. Es stellt sich heraus, dass diese Abhängigkeit zwar vorhanden, eine quantitative Bestimmung jedoch

schwierig ist, weil außerhalb des Strahlzentrums die lokal gemessene Oszillationsfrequenz bei gleichbleibenden Parametern stark schwankt. Der Grund für diese Schwankungen ist in räumlichen Synchronisationseffekten zu suchen, auf die in Abschnitt 5.3.5 näher eingegangen wird.

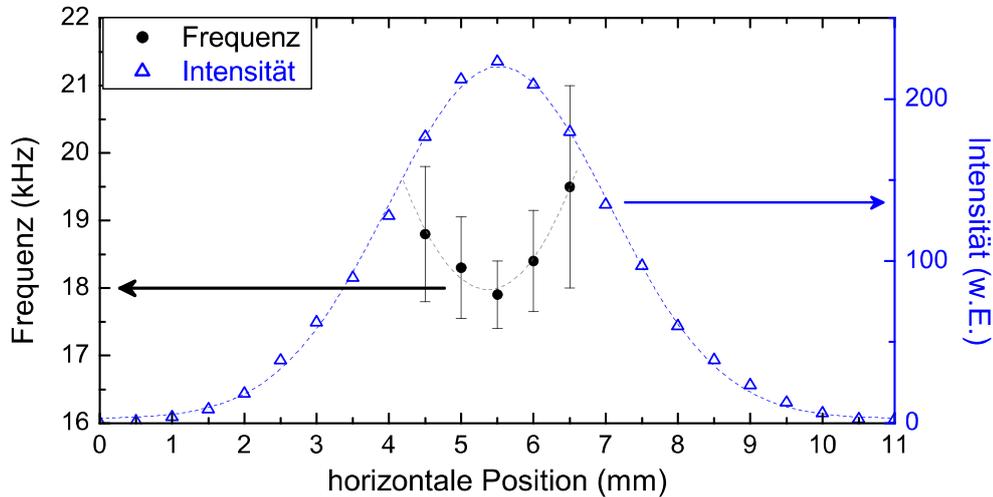


Abbildung 4.13: Oszillationsfrequenz in Abhängigkeit vom Strahlprofil. Blau: gemessenes Intensitätsprofil am Ort des Detektors (gestrichelte Linie: Gauß-Fit), schwarz: zeitlich gemittelte Oszillationsfrequenz (gestrichelte Linie: Parabelfit zur Führung des Auges). Parameter: $P_L = 280$ mW, $B_x = 4,0$ μ T, $\Delta = 11,8$ GHz, $T = 337$ °C, $p = 301$ hPa, $\Phi = 0^\circ$, $\Theta = -56^\circ$.

Abbildung 4.13 zeigt das Ergebnis einer Messung bei maximaler Laserleistung, bei der die zeitlich gemittelte Oszillationsfrequenz bei verschiedenen Strahlradien bestimmt wurde. In blauer Farbe ist dabei das am Ort des Detektors gemessene (polarisationsunabhängige) Intensitätsprofil des Gaußschen Strahls zum Vergleich gezeigt. Wie nach dem Befund des vorigen Abschnitts zu erwarten, werden Oszillationen nur bis zu Radien beobachtet, bei denen die Intensität des Pumpstrahls um maximal etwa ein Drittel abgefallen ist. Die gemessenen mittleren Frequenzen zeigen qualitativ die gleiche Abhängigkeit von der lokalen Intensität wie im vorigen Abschnitt, eine quantitative Übereinstimmung ist jedoch wegen der großen Schwankungsbreite und wegen gegenüber Abbildung 4.12 abweichender Parameter weder festzustellen noch zu erwarten.

4.3.2 Beobachtung von Spiralen und „Targetmustern“

In einem großen Teil des Existenzbereichs lokal nachweisbarer periodischer Oszillationen ist eine transversale Strukturierung der Intensitätsverteilung nicht erkennbar. Für Parameter, bei denen ein hinreichend großer Strahlbereich Hopf-instabil, das Strahlzentrum jedoch noch nicht bistabil bzw. gegen andere Muster instabil ist, treten dagegen transversal ausgedehnte, zeitlich oszillierende Strukturen in Form von Spiralen und Targetmustern

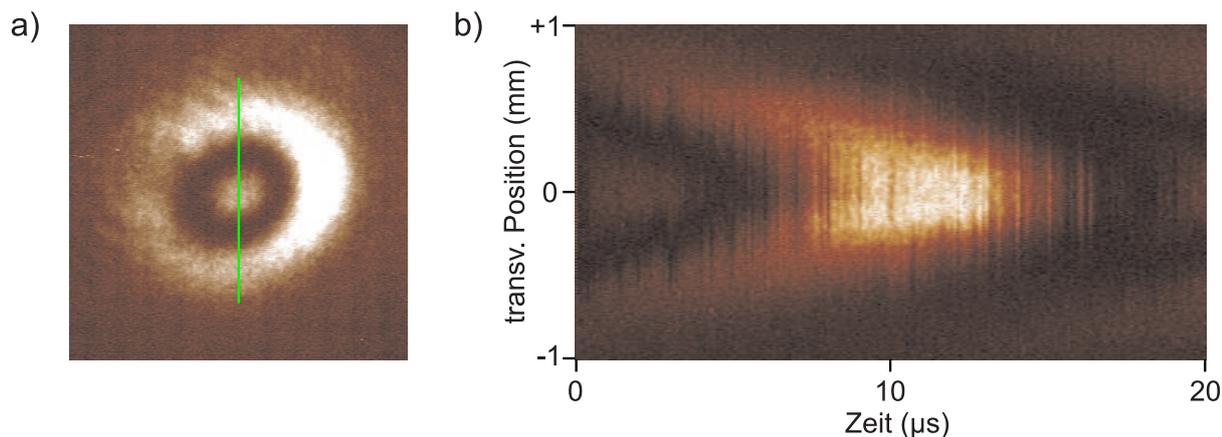


Abbildung 4.14: Raumzeitliche Entwicklung eines Targetmusters. a) Überlagerung von fünf Einzelbildern (Erläuterung im Text), Bildausschnitt: $3 \times 3 \text{ mm}^2$. b) Raum-Zeit-Diagramm des in a) markierten Strahlbereichs. Parameter: $P_L = 280 \text{ mW}$, $\Delta = 13,7 \text{ GHz}$, $B_x = -7,8 \mu\text{T}$, $B_z = 0 \mu\text{T}$, $T = 328 \text{ }^\circ\text{C}$, $p = 300 \text{ hPa}$, $d = 120 \text{ mm}$, $\Phi = 0^\circ$, $\Theta = -95^\circ$.

auf. Letztere sind durch konzentrische Ringe in der Intensitätsverteilung gekennzeichnet, die sich radial in Richtung des Strahlzentrums bewegen.

Die zeitliche Dynamik dieser Muster läuft wegen der typischen Oszillationsfrequenzen im Bereich mehrerer kHz zu schnell ab, um sie mit herkömmlichen Videokameras mit Bildwiederholraten zwischen 25 und 50 Hz auflösen zu können. Daher wurden mit dem Videosampling-Verfahren (siehe Abschnitt 3.4) mit variabler Verzögerungszeit gegenüber dem Nulldurchgang eines aus der lokalen Oszillation (s. o.) gewonnenen Triggersignals Bilder mit einer Verschlusszeit von 500 ns aufgenommen. Zur Erhöhung des Signal-Rausch-Verhältnisses wurden für jeden Zeitpunkt fünf Bilder aufgenommen und für die weitere Auswertung überlagert.

Bei dieser Messmethode spielt die Einstellung des Linearpolarisators eine besondere Rolle. Da für die Detektion des Triggersignals und die Aufnahme der Bilder stets dieselbe Polarisationssebene durch den Linearpolarisator ausgewählt wird⁴, muss ein Kompromiss zwischen ausreichender Aussteuerung der Kamera (vor allem bei sehr kurzen Belichtungszeiten), genügendem Kontrast der transversalen Struktur und der Qualität des Triggersignals gefunden werden.

Abbildung 4.14 zeigt ein Targetmuster bei $B_x = -7,8 \mu\text{T}$ und dessen raumzeitliche Entwicklung. Dazu wurden nach dem oben geschilderten Verfahren 40×5 Bilder⁵ im

⁴ Eine präzise Analyse der Polarisationsverteilung ist nur dann möglich, wenn entweder der Linearpolarisator und das Kompensations- $\lambda/8$ -Plättchen die ersten optischen Elemente nach dem Rückkoppelspiegel sind, oder wenn an sämtliche optischen Komponenten im Analyseaufbau (insbesondere Strahlteiler) extrem hohe Anforderungen an die Erhaltung der Polarisation gestellt werden. Eine separate Auswahl der Polarisationssebenen für unterschiedliche Detektoren ist daher bei vertretbarem experimentellen Aufwand kaum zu realisieren.

⁵ d. h. jeweils fünf Bilder bei 40 verschiedenen Zeitverzögerungen

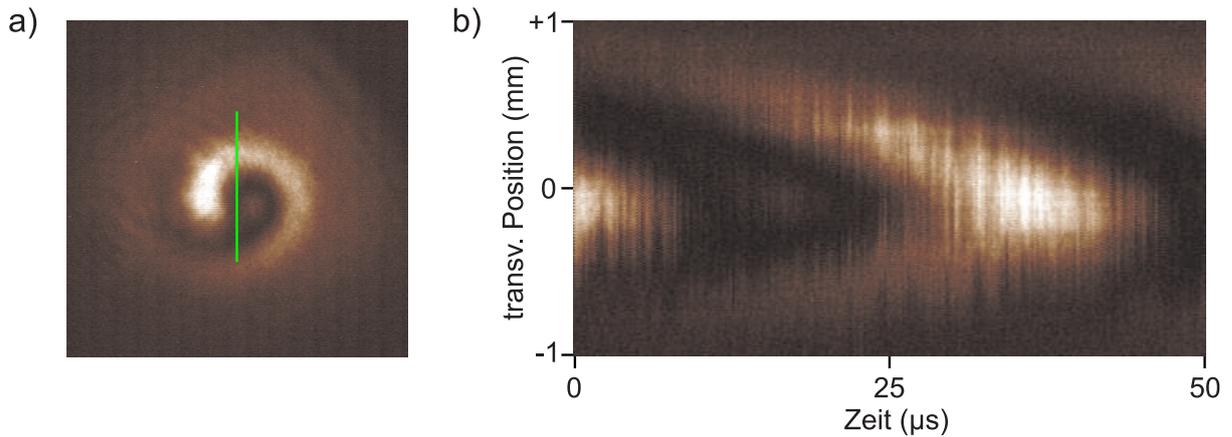


Abbildung 4.15: Raumzeitliche Entwicklung einer Spirale. a) Überlagerung von fünf Einzelbildern, Bildausschnitt: $4 \times 4 \text{ mm}^2$. b) Raum-Zeit-Diagramm des in a) markierten Strahlbereichs. $\Delta = 17,5 \text{ GHz}$, $B_x = -4,5 \mu\text{T}$, $B_z = 0 \mu\text{T}$, sonstige Parameter wie in Abbildung 4.14.

Abstand von 500 ns aufgenommen. Man erkennt eine – bis auf den Einfluss eines durch den keilförmigen Rückkoppelspiegel verursachten Gradienten – weitgehend radialsymmetrische Verteilung der Intensität aus konzentrischen Ringen.

Für die Darstellung der zeitlichen Entwicklung wurden aus den so erhaltenen Bildern Schnitte durch das Strahlzentrum gelegt (vgl. grüne Markierung in der Abbildung) und diese gegen die Verzögerungszeit aufgetragen (Abbildung 4.14 b). Die radiale Bewegung der Struktur ist nach innen gerichtet, wobei die Geschwindigkeit zum Strahlzentrum hin leicht zunimmt. Die lokale Oszillationsfrequenz liegt für die gewählten Parameter bei 50 kHz.

In Abbildung 4.15 ist analog dazu das raumzeitliche Verhalten einer Spirale dargestellt, die bei einem Magnetfeld von $B_x = -4,5 \mu\text{T}$ beobachtet wurde. Hier wurden 50×5 Bilder im Abstand von je $1 \mu\text{s}$ aufgenommen. Auch bei der Spirale ist die Bewegung nach innen gerichtet, die lokale Frequenz beträgt 27 kHz.

Die lokalen Oszillationsfrequenzen zeigen bei den Spiralen und Targetmustern qualitativ den gleichen Zusammenhang mit dem transversalen Magnetfeld, der auch für die transversal unstrukturierten Oszillationen in den vorigen Abschnitten bestimmt wurde, eine Abhängigkeit der lokalen Oszillationsfrequenz der Spiralen von der radialen Entfernung zum Strahlzentrum lässt sich allerdings nicht erkennen. Bei der Untersuchung der spiralarartigen Strukturen anhand numerischer Simulationen in Kapitel 5 wird sich herausstellen, dass dies auf eine räumliche Synchronisation der Oszillationsfrequenz zurückzuführen ist. Dieser Effekt bedingt auch das Auftreten konzentrischer Ringe im Strahlzentrum, die hier als „Targetmuster“ bezeichnet wurden, was sich bei genauerer Betrachtung als nicht ganz zutreffend erweist (vgl. Abschnitt 5.3.5).

Spiralen mit mehreren Armen oder unterschiedlicher Chiralität, wie sie in [HSAL03, Hun06] beschrieben werden, konnten nicht beobachtet werden. Die Vorzugsrichtung in der Chiralität kann auf Inhomogenitäten im Strahlprofil oder Anisotropien in der Rückkoppelung zurückgeführt werden. In numerischen Simulationen, bei denen sich eine vollständige Symmetrie – zumindest in Bezug auf die Chiralität – leicht herstellen lässt, entstehen sowohl rechts- als auch linkshändige Spiralen, die ebenfalls ausschließlich einen Spiralarm besitzen.

Der radiale Abstand der Spiralarme bzw. der Ringkonstituenten des Targetmusters lässt sich wegen des ungünstigen Aspektverhältnisses⁶ nicht exakt bestimmen, da dieser Abstand in der Größenordnung des Strahlradius liegt und somit in radialer Richtung jeweils nur ein Konstituent erkennbar ist. Auch die genaue Form der Spirale (radial-azimutaler Zusammenhang) lässt sich bei dem begrenzten Aspektverhältnis nicht ermitteln. Eine Änderung des Aspektverhältnisses ließe sich grundsätzlich durch einen größeren Strahlradius oder einen geringeren Spiegelabstand – der für kürzere transversale Musterwellenlängen sorgt – erreichen. Allerdings sinkt bei zunehmendem Strahlradius die Leistungsdichte und somit die Pumprate quadratisch ab, so dass dieses Vorgehen wegen der begrenzt zur Verfügung stehenden Laserleistung nicht zum Erfolg führt. Bei Verringerung des Spiegelabstandes steigt der dämpfende Einfluss der Diffusion auf alle Musterbildungsprozesse, wodurch die Schwellpumpraten ansteigen. Aus diesem Grund konnten bei kleineren Spiegelabständen keine Targetmuster oder Spiralen beobachtet werden.

Eine Bestimmung der transversalen Längenskalen anhand von Aufnahmen des Fernfeldes scheitert in diesem Falle ebenfalls, weil die relevanten Längenskalen der beobachteten Strukturen in der Größenordnung des Strahlradius liegen. Bei Betrachtung des Fernfeldes werden daher die Raumfrequenzanteile der Strukturen von der optischen Fouriertransformierten des Strahlprofils überdeckt. Aus den oben genannten Gründen werden für eine eingehendere Untersuchung der transversalen Eigenschaften der Spiralen und Targetmuster zusätzlich die Ergebnisse numerischer Simulationen herangezogen, in denen die genannten Beschränkungen leicht umgangen werden können.

⁶ d. h. dem Verhältnis der charakteristischen Längenskala der Strukturen zum Radius des Gaußschen Strahls

Kapitel 5

Theoretische Analyse und Interpretation der Ergebnisse

Ein hervorstechendes Merkmal der Einspiegelanordnung mit Natriumdampf ist ihre hervorragende Beschreibbarkeit mittels eines bereits vielfach bewährten theoretischen Modells. Eine theoretische Behandlung des untersuchten Systems ermöglicht in vielen Fällen weiter reichende Einblicke in die beobachteten Phänomene als das Experiment, weil unter anderem Zustandsgrößen betrachtet werden können, die experimentell nicht oder nur eingeschränkt zugänglich sind. Darüber hinaus lassen sich z. B. Randbedingungen wie das im Experiment zwangsläufig inhomogene Strahlprofil leicht umgehen und so deren Einfluss getrennt von den intrinsischen Mechanismen untersuchen.

In diesem Kapitel werden daher zunächst die wesentlichen Eigenschaften des verwendeten Modells und die daraus abgeleiteten Gleichungen vorgestellt. Anschließend werden mit Hilfe einer Analyse der linearisierten Bewegungsgleichungen sowie numerischer Simulationen durchgeführte Untersuchungen diskutiert und deren Ergebnisse im Zusammenhang mit den im Experiment gewonnenen Erkenntnissen interpretiert.

5.1 Modellgleichungen für das $\lambda/8$ -System

Im folgenden Abschnitt wird das theoretische Modell zur Beschreibung der Einspiegelanordnung mit Natriumdampf als nichtlinearem Medium und $\lambda/8$ -Plättchen im Rückkoppelzweig dargestellt. Dieses Modell basiert auf einer vereinfachten mikroskopischen Beschreibung der Licht-Materie-Wechselwirkung in einem als $J = 1/2 \rightarrow J' = 1/2$ -Übergang modellierten Zweiniveausystem unter Einbeziehung der Zeeman-Unterstufen¹ so-

¹ Zugunsten der Lesbarkeit des Textes wird dieses wegen der insgesamt vier betrachteten Zustände im Folgenden auch vereinfacht als „Vierniveausystem“ bezeichnet.

wie der Behandlung der linearen Propagation des Lichtfeldes mit Hilfe der paraxialen Wellengleichung.

Da dieses Modell bereits in einer Reihe von Arbeiten ausführlich beschrieben wurde, beschränkt sich die Darstellung hier auf die wesentlichen Bestandteile; für weiterführende Details sei auf die zitierte Literatur verwiesen.

5.1.1 Materialgleichungen und Wirkung des Magnetfeldes

Das Modell, was der theoretischen Beschreibung des optischen Pumpens von Natriumdampf in einer Puffergasatmosphäre zu Grunde liegt, wurde in [MDLM86, Möl92] mit Hilfe des Dichtematrixformalismus hergeleitet und hat sich seither in vielen Arbeiten zur Strukturbildung in Natriumdampf (unter anderem [Ack96, Gah96, Aum99, Sch01, GW02, Hun06]) hervorragend bewährt.

Die in der semiklassischen Herleitung gemachten Näherungen, die unter anderem in [Möl92, Ack96] genauer beschrieben und diskutiert werden, führen auf eine Bewegungsgleichung für einen Einheitsvektor \vec{m} , den sogenannten *Blochvektor*, der die lokale, makroskopische Magnetisierung des Natriumdampfes beschreibt. Wird als Quantisierungsachse die Ausbreitungsrichtung des Lichts entlang der z -Achse gewählt, ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{m} = D \nabla_{\perp}^2 \vec{m} - (\gamma + P_S) \vec{m} + \vec{\Omega}_{\text{eff}} \times \vec{m} + P_D \vec{e}_z \quad (5.1)$$

Der erste Term beschreibt die thermische Diffusion der Natriumatome in der Puffergasatmosphäre mit der Diffusionskonstante D .² Der zweite Term berücksichtigt die Grundzustandsrelaxation durch Stöße mit den Puffergasatomen mit einer effektiven Rate γ , sowie die Sättigung, die von der Gesamtintensität des eingestrahnten Lichts – hier berücksichtigt durch die Gesamtpumprate $P_S = P_+ + P_-$ – abhängt. Der nachfolgende Term beschreibt die Präzession des Blochvektors mit der Larmorfrequenz

$$\vec{\Omega} = \frac{\mu_B g}{\hbar} \vec{B}. \quad (5.2)$$

in einem effektiven äußeren Magnetfeld $\vec{\Omega}_{\text{eff}} = \vec{\Omega} - (\bar{\Delta}(P_+ - P_-))\vec{e}_z$, in dem die Wirkung des externen statischen Magnetfeldes und der *light-shift*-Effekt³ gemeinsam berücksichtigt werden. Darin bezeichnet μ_B das Bohrsche Magneton und $g = 0,5$ den Landé-Faktor unter Berücksichtigung der Hyperfeinkopplung.

² In dem als „dünn“ angenommenen Medium wird nur die Diffusion in der transversalen Ebene berücksichtigt. Der Operator $\nabla_{\perp}^2 := (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ beschreibt im Folgenden den transversalen Laplace-Operator Δ_{\perp} (vgl. Gleichung (2.4)). Diese Schreibweise wurde gewählt, um eine bessere Unterscheidbarkeit vom Symbol für die Verstimmung ($\bar{\Delta}$) zu gewährleisten.

³ Dieser Effekt [CT62] bewirkt bei Einstrahlung eines gegen die atomare Resonanz verstimmtten elektromagnetischen Feldes eine Niveaushiftung, die von der Pumprate P auf dem betrachteten Übergang und der (normierten) Verstimmung $\bar{\Delta}$ abhängt. Diese Niveaushiftung lässt sich als eine effektive longitudinale Magnetfeldkomponente zusätzlich zum externen Feld auffassen [AHL97].

Der letzte Ausdruck schließlich formuliert den eigentlichen Pumpprozess mit der Rate $P_D = P_+ - P_-$ (vgl. Abschnitt 2.4.1). Die Tatsache, dass das optische Pumpen unmittelbar nur auf die z -Komponente der Magnetisierung wirkt, wird durch den Einheitsvektor \vec{e}_z berücksichtigt.

Zum Verständnis der physikalischen Vorgänge und für die folgenden Herleitungen bietet es sich der Übersichtlichkeit halber an, statt dieser Vektorgleichung die skalaren Gleichungen der einzelnen Magnetisierungskomponenten $\vec{m} =: (u, v, w)^T$ zu betrachten:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= D\nabla_{\perp}^2 u - (\gamma + P_S)u & - (\Omega_z - \bar{\Delta}P_D)v \\ \dot{v} &= D\nabla_{\perp}^2 v - (\gamma + P_S)v & + (\Omega_z - \bar{\Delta}P_D)u & - \Omega_x w \\ \dot{w} &= D\nabla_{\perp}^2 w - (\gamma + P_S)w & & + \Omega_x v + P_D \end{aligned} \quad (5.3)$$

$\bar{\Delta}$ ist die auf die halbe homogene Linienbreite des druckverbreiterten D_1 -Übergangs normierte Verstimmung.⁴ Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird hier angenommen, dass ein transversales Magnetfeld immer in x -Richtung anliegt. Diese Annahme ist insofern berechtigt, als das Magnetfeld die einzige nicht um die z -Achse rotationssymmetrische Größe im Rahmen des hier vorgestellten Modells ist.⁵ Die daraus resultierende Folgerung $\Omega_y = 0$ vereinfacht die theoretische Analyse erheblich.

Die Magnetisierungskomponente entlang der z -Achse ($w \equiv m_z$) entspricht dem normierten Besetzungszahlunterschied. Sie wird auch *Orientierung* genannt und beeinflusst direkt die optischen Eigenschaften des Natriumdampfes (vgl. Abschnitt 2.4.1).

Die Pumpraten P_+ und P_- – und damit auch P_S und P_D – setzen sich jeweils zusammen aus den Pumpraten, die sich aus dem Eingangslichtfeld (P_{\pm}^i) und der vom Rückkoppelspiegel reflektierten Feldverteilung (P_{\pm}^R) ergeben. Für die *Eingangspumprate* P_0 gilt im Falle exakt linearer Polarisierung (was im Folgenden vorausgesetzt wird):

$$P_+^i = P_-^i =: \frac{1}{2}P_0 \quad (5.4)$$

Für den Eingangsstrahl ist also immer $P_D^i = 0$ und $P_S^i = P_0$. Um die aus dem reflektierten Feld resultierenden Pumpraten zu berechnen, wird zunächst der Einfluss des nichtlinearen Mediums auf das eingestrahlte Lichtfeld und danach in einem separaten Schritt die Wirkung des $\lambda/8$ -Plättchens und der freien Propagation berechnet. Dies ist – wie bereits in Abschnitt 2.4 erläutert – gerechtfertigt, weil der Vorteil der Einspiegelanordnung gerade darin liegt, Nichtlinearität und Beugung getrennt behandeln zu können.

⁴ Die Verstimmungen für beide zirkularen Polarisationskomponenten werden als gleich groß angenommen. Tatsächlich gibt es einen geringen Unterschied aufgrund der Zeeman-Aufspaltung (linearer Faraday-Effekt). Im Rahmen dieses Modells kann dies aber im Vergleich zu den betrachteten großen Beträgen der Gesamtverstimmung vernachlässigt werden.

⁵ Die absolute Polarisierungsebene des einfallenden Strahls und damit die relative Phase zwischen σ_+ - und σ_- -Licht spielt an dieser Stelle keine Rolle, da nur die intensitätsabhängigen Pumpraten betrachtet werden.

Aus den resultierenden Feldverteilungen können dann die Pumpraten für beide Polarisationen berechnet werden. Die Pumprate ist proportional zur Intensität $I_{\pm} = \frac{\epsilon_0}{2} |E_{\pm}|^2$ der betrachteten Komponente:

$$P_{\pm} = \frac{3}{16} \cdot \frac{\mu_e^2}{4\Gamma_2 \hbar^2 (\bar{\Delta}^2 + 1)} I_{\pm}. \quad (5.5)$$

Dabei bezeichnet $\mu_e = 1,72 \cdot 10^{-29}$ Cm [Kös85] das Dipolmatrixelement des Übergangs, Γ_2 die Zerfallsrate des angeregten Zustandes und $\bar{\Delta}$ die auf die halbe homogene Linienbreite normierte Verstimmung. Der Korrekturfaktor $3/16$ berücksichtigt die Reduktion der Pumpeffizienz beim realen Termschema der Na-D₁-Linie mit Hyperfeinstruktur gegenüber dem idealisierten Vierniveausystem aus Abbildung 2.4.

5.1.2 Wirkung des nichtlinearen Mediums

Die Verteilung des vom Natriumdampf transmittierten Lichtfeldes lässt sich anhand der Gleichung (2.4) unter Vernachlässigung der Beugung bestimmen:

$$\frac{\partial}{\partial z} E_{\pm} = -\frac{i}{2} k_0 \chi_{\pm} E_{\pm} \quad (5.6)$$

E_{\pm} bezeichnet dabei die Amplitude der elektrischen Felder für σ_{+} - bzw. σ_{-} -polarisiertes Licht in einem mit der optischen Frequenz $\omega_0 = ck_0$ rotierenden Bezugssystem („rotating wave approximation“), und χ_{\pm} entsprechend die komplexen optischen Suszeptibilitäten für beide zirkularen Polarisationskomponenten.⁶ Diese sind gegeben durch (vgl. Gleichung (2.7))

$$\chi_{\pm} = -\frac{N\mu_e^2}{2\hbar\epsilon_0\Gamma_2} \cdot \frac{\bar{\Delta} + i}{\bar{\Delta}^2 + 1} (1 \mp w) =: -\frac{2}{k_0} \alpha_0 (\bar{\Delta} + i) (1 \mp w) \quad (5.7)$$

Der hier eingeführte *Kleinsignalabsorptionskoeffizient* α_0 hängt unter anderem von der Teilchenzahldichte N ab:

$$\alpha_0 = \frac{Nk_0\mu_e^2}{4\epsilon_0\hbar\Gamma_2} \cdot \frac{1}{\bar{\Delta}^2 + 1} \quad (5.8)$$

Formale Integration der Gleichung (5.6) über die Länge L der Wechselwirkungszone („Dicke“ des Mediums) liefert die transmittierten Feldverteilungen E_{\pm}^T :

$$\begin{bmatrix} E_{+}^T \\ E_{-}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\alpha_0\bar{\Delta}L(1-w)} e^{-\alpha_0L(1-w)} \\ e^{i\alpha_0\bar{\Delta}L(1+w)} e^{-\alpha_0L(1+w)} \end{bmatrix} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \quad (5.9)$$

⁶ Im Folgenden werden bei verschiedenen Größen die Indizes + und - verwendet. Dies bezieht sich immer auf die zur σ_{+} - bzw. σ_{-} -Polarisation gehörigen Komponenten der betrachteten Größen.

In Gleichung (5.9) ist bereits berücksichtigt, dass das eingestrahelte Feld linear polarisiert sein soll und somit analog zu Gleichung (5.4) $E_+^i = E_-^i =: E_0/\sqrt{2}$ gilt.

„*pump-depletion*“-Korrektur

Durch die formale Integration wird die longitudinale Ortsabhängigkeit der Absorption ebenso wie die Beugung im Medium nicht berücksichtigt. In [Aum99] wurde – einem Vorschlag von [LBLR⁺95] folgend – für das hier verwendete Modell eine Modifikation hergeleitet, die die ortsabhängige Absorption des Pumpstrahls mittels einer longitudinal gemittelten Orientierung berücksichtigt.

Diese „*pump-depletion*“-Korrektur lässt sich jedoch nur auf den Spezialfall $\vec{\Omega} = 0$ anwenden. Diese Einschränkung ist auf den unterschiedlichen Charakter der Differentialgleichungen (5.3) zurückzuführen: Während im Fall $\vec{\Omega} = 0$ die transversalen Komponenten des Blochvektors $u = v = 0$ sind, und somit nur eine skalare Beobachtungsgröße existiert, muss im Falle $\vec{\Omega} \neq 0$ eine vektorielle Größe betrachtet werden. Bei einer separaten longitudinalen Mittelung der einzelnen Komponenten würde die Wechselwirkung zwischen den Komponenten unterschlagen, weswegen eine Übertragung der Modellkorrektur auf das System mit nichtverschwindendem transversalen Magnetfeld nicht ohne weiteres möglich ist. Es hat sich allerdings in vergangenen Arbeiten herausgestellt, dass sich diese Korrektur für die meisten Phänomene lediglich in einer besseren quantitativen Übereinstimmung der aus dem Experiment abgeleiteten Parameter bemerkbar macht. Aus diesem Grund wird auf eine detaillierte Darstellung an dieser Stelle verzichtet; die vollständigen Materialgleichungen für das $\lambda/8$ -System mit *pump-depletion*-Korrektur – jedoch ohne ein äußeres Magnetfeld – finden sich in [Pes07].

5.1.3 Lineare Propagation und Beeinflussung der Polarisation

Die Wirkung der Propagation des Lichtfeldes zum Spiegel mit der Reflektivität R und zurück lässt sich analog zum vorigen Abschnitt aus dem *linearen* Teil der Gleichung (2.4) herleiten:

$$\frac{\partial}{\partial z} E_{\pm} = -\frac{i}{2k_0} \nabla_{\perp}^2 E_{\pm} \quad (5.10)$$

Hier liefert die formale Integration über die gesamte Propagationsdistanz $2d$ die Wirkung der Beugung auf die reflektierten Felder E_{\pm}^R . Sie lässt sich gemeinsam mit dem Einfluss des $\lambda/8$ -Plättchens mit Hilfe von Jones-Matrizen in einer geschlossenen Gleichung beschreiben. Dabei ist zu berücksichtigen, dass das $\lambda/8$ -Plättchen wegen des zweifachen Durchgangs des Lichts als $\lambda/4$ -Plättchen wirkt (vgl. Abschnitt 2.4.2).

Man erhält das reflektierte Feld E^R aus dem transmittierten Feld E^T durch

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_+^R \\ E_-^R \end{bmatrix} &= \sqrt{R} \cdot e^{-i\frac{d}{k_0}\nabla_{\perp}^2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & i \\ 1 & i \end{bmatrix}}_{IV} \underbrace{\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{III} \\ &\cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \Phi & -\sin \Phi \\ \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix}}_{II} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -i & -i \end{bmatrix}}_I \begin{bmatrix} E_+^T \\ E_-^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.11)$$

mit den Jones-Matrizen:

I Transformation der Polarisationskomponenten von der zirkularen in die lineare Basis

II Rotation der Polarisationssebene um Φ (entspricht einer Rotation des $\lambda/4$ -Plättchens relativ zur Polarisationssebene des eingestrahnten Lichts)⁷

III Wirkung des $\lambda/4$ -Plättchens

IV Rücktransformation in die zirkuläre Basis.

Die Pumpraten P_{\pm}^R , die sich aus dem reflektierten Feld ergeben, lassen sich nun anhand der Gleichungen (5.9) und (5.11) unter Verwendung von (5.5) berechnen:

$$P_{\pm}^R = \frac{P_0}{2} R e^{-2\alpha_0 L} [\cosh(2\alpha_0 L w) \pm \sin(2\alpha_0 L \bar{\Delta} w + 2\Phi)] \quad (5.12)$$

Für die z. B. in Gleichung (5.3) benötigten Pumpraten P_S und P_D ergibt sich

$$P_S^R = P_0 R e^{-2\alpha_0 L} \cosh(2\alpha_0 L w) \quad (5.13)$$

$$P_D^R = P_0 R e^{-2\alpha_0 L} \sin(2\alpha_0 L \bar{\Delta} w + 2\Phi) \quad (5.14)$$

5.2 Lineare Stabilitätsanalyse

Um grundlegende Einblicke in die Mechanismen der Strukturbildung zu erhalten, wird das zuvor modellierte System mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse untersucht. Dies ist eine Standardmethode der analytischen Untersuchung strukturbildender nichtlinearer Systeme [Man90].

⁷ Die übliche Darstellung einer Rotation in der Matrizenalgebra würde genau genommen noch eine zweite (zu II inverse) Rotationsmatrix zwischen III und IV beinhalten. In diesem Fall ist diese zweite Matrix aus physikalischen Gründen entbehrlich, weil die Matrix IV unmittelbar wieder in die zirkuläre Basis zurücktransformiert, die unabhängig von Φ ist. Darüber hinaus lässt sich die Äquivalenz von Gleichung (5.11) mit der Variante unter Einbeziehung der zweiten Rotationsmatrix auch mathematisch exakt zeigen [Bab06].

5.2.1 Allgemeine Beschreibung der Methodik

Es wird vorausgesetzt, dass sich das System mit einer partiellen nichtlinearen Differentialgleichung der Form

$$\dot{\phi} = \nabla_{\perp}^2 \phi + f(\phi), \quad f \text{ nichtlinear} \quad (5.15)$$

beschreiben lässt.⁸ Es werden zunächst homogene, stationäre Lösungen ϕ_0 gesucht, für die alle zeitlichen und räumlichen Ableitungen verschwinden:

$$f(\phi_0) = 0 \quad (5.16)$$

Die Gleichung (5.15) wird nun mit dem Ansatz $\phi = \phi_0 + \delta\phi$ um ϕ_0 entwickelt. Bricht man die Entwicklung nach dem linearen Term ab, so erhält man für die zeitliche Entwicklung der infinitesimalen Störung $\delta\phi$ die linearisierte Bewegungsgleichung

$$\dot{\delta\phi} = \nabla_{\perp}^2 \delta\phi + f'(\phi_0)\delta\phi \quad (5.17)$$

Für ein mehrkomponentiges System, wie es hier betrachtet wird, entspricht f' der *Jacobimatrix* von f , die im Folgenden auch als \mathcal{J} bezeichnet wird.

Entsprechend den Überlegungen aus Abschnitt 2.4 bietet es sich an, die Stabilität des Systems gegen Störungen in Form von transversalen *Fourier-Moden*, also räumlich periodischen Oszillationen mit der Wellenzahl k zu untersuchen. Für die Störung $\delta\phi$ wird also angesetzt

$$\delta\phi = e^{\eta t - i\vec{k}_{\perp} \cdot \vec{r}_{\perp}} \quad (5.18)$$

mit $k = |\vec{k}_{\perp}|$, $\vec{r}_{\perp} = (x, y)^T$. Der Exponent der zeitlichen Entwicklung η ist für ein mehrkomponentiges System im Allgemeinen eine komplexe Größe. Der Realteil $\kappa := \text{Re}(\eta)$ ist ein Wachstumskoeffizient, dessen Vorzeichen Auskunft darüber gibt, ob eine Störung mit entsprechender Wellenzahl anwachsen ($\kappa > 0$) oder aussterben wird ($\kappa < 0$). Falls der Imaginärteil von η von Null verschieden ist, so ist die Zeitentwicklung nicht auf ein Anwachsen oder Abfallen einer ansonsten stationären Störung begrenzt, sondern κ beschreibt in diesem Fall das Wachstum einer mit der Frequenz $\omega := \text{Im}(\eta)$ auch *zeitlich* oszillierenden Störung.

Setzt man den Ansatz (5.18) in Gleichung (5.17) ein, so führt dies für den mehrkomponentigen Fall auf ein Eigenwertproblem:

$$\eta \cdot \delta\phi = -k^2 \cdot \delta\phi + \mathcal{J}\delta\phi =: \tilde{\mathcal{J}}(k)\delta\phi, \quad (5.19)$$

worin mit $\tilde{\mathcal{J}}(k)$ eine verallgemeinerte Jacobimatrix definiert ist, die den Term $-k^2$ in den Hauptdiagonalelementen bereits enthält.

⁸ Die Struktur der Gleichung kann tatsächlich noch allgemeiner formuliert werden, so können z. B. andere räumliche Ableitungen angesetzt werden. Für die Darstellung der Methodik ist an dieser Stelle jedoch die Beschränkung auf die angegebene, speziellere Form ausreichend.

5.2.2 Stationäre homogene Lösung

Um die homogene, stationäre Lösung \vec{m}_h zu finden, wird gemäß dem vorigen Abschnitt zunächst $\frac{\partial}{\partial t}\vec{m}_h = 0$ gesetzt. Ferner wird das System als transversal unendlich ausgedehnt betrachtet und alle Diffusionsterme werden vernachlässigt (Homogenität von \vec{m}_h)

$$\begin{aligned} 0 &= -(\gamma + P_S^h)u_h && - (\Omega_z - \bar{\Delta}P_D^h)v_h \\ 0 &= -(\gamma + P_S^h)v_h && + (\Omega_z - \bar{\Delta}P_D^h)u_h && - \Omega_x w_h \\ 0 &= -(\gamma + P_S^h)w_h && && + \Omega_x v_h + P_D^h \end{aligned} \quad (5.20)$$

Die Gleichgewichts-Pumpraten P_D^h und P_S^h hängen entsprechend der Gleichungen (5.13, 5.14) ihrerseits von w_h ab. Schrittweise Substitution von u_h und v_h sowie formales Einsetzen der Pumpraten führt schließlich auf eine implizite Gleichung für die stationäre, homogene Lösung der Orientierung:

$$w_h = \frac{P_D^h(w_h, \Phi)}{\gamma + P_S^h(w_h)} - \frac{\Omega_x^2 w_h}{[\Omega_z - \bar{\Delta}P_D^h(w_h, \Phi)]^2 + [\gamma + P_S^h(w_h)]^2} \quad (5.21)$$

mit

$$P_D^h(w_h, \Phi) = P_0 R e^{-2\alpha_0 L} \sin(2\alpha_0 L \bar{\Delta} w_h + 2\Phi) \quad (5.22)$$

$$P_S^h(w_h) = P_0 R e^{-2\alpha_0 L} \cosh(2\alpha_0 L w_h) + P_0 \quad (5.23)$$

Diese Gleichung wird mit Hilfe des Newton-Verfahrens numerisch ausgewertet; die transversalen Magnetisierungskomponenten der homogenen Lösung u_h und v_h werden anschließend durch Rückwärtssubstitution gewonnen.

In Abbildung 5.1 sind die homogenen, stationären Lösungen der Orientierung in Abhängigkeit von der Eingangspumprate für verschiedene Parameter gezeigt. Der symmetrische Fall ohne äußeres Magnetfeld und mit parallel zur Eingangspolarisation ausgerichtetem $\lambda/8$ -Plättchen ist in a) dargestellt. Man erkennt die bereits erwähnte, ungestörte Pitchfork-Bifurkation. Der Bifurkationspunkt liegt bei einer sehr niedrigen Pumprate, die in der Größenordnung der Stoßrelaxationsrate γ liegt.

In b) ist das $\lambda/8$ -Plättchen gegenüber a) um einen Winkel von $\Phi = 2^\circ$ gedreht. Dies äußert sich in einer Asymmetrie, die darauf beruht, dass bereits für $w = 0$ durch das $\lambda/8$ -Plättchen ein zirkularer Polarisationsanteil im rückgekoppelten Feld erzeugt wird. Dies führt zu einem Anwachsen der Orientierung in positiver Richtung und damit zu einem strukturell bevorzugten Lösungsweig mit $w_h > 0$.

Die Diagramme c) und d) zeigen die Situation für $\Phi = 0$ und $\vec{\Omega} \neq 0$. Zu beachten ist dabei die von a) und b) verschiedene Skalierung der P_0 -Achse. Ein rein transversales Magnetfeld (c: $\Omega_z = 0$) verschiebt den Bifurkationspunkt zu höheren Pumpraten⁹ und es

⁹ Anschaulich lässt sich die Erhöhung der Schwellpumpraten in Anwesenheit eines transversalen Magnetfeldes damit erklären, dass durch die Präzession des Blochvektors eine Umverteilung der Besetzung

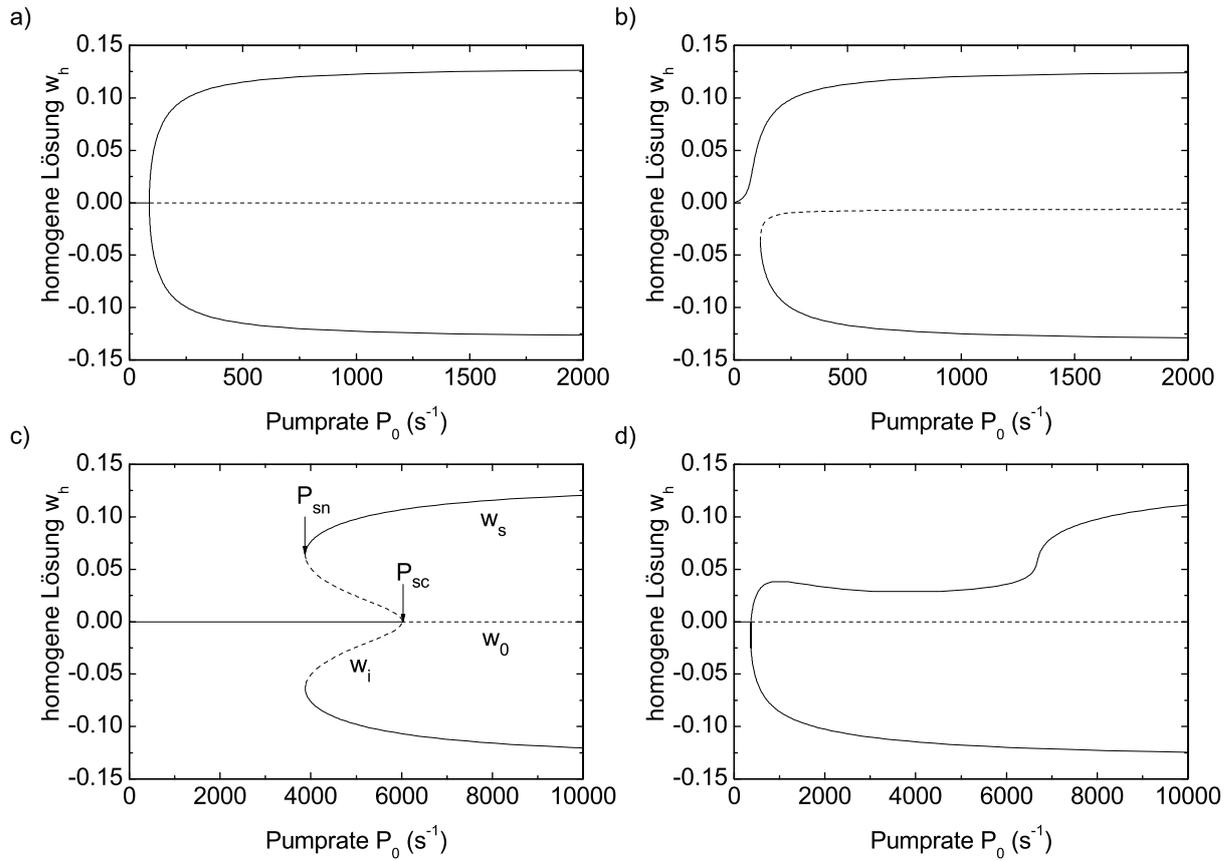


Abbildung 5.1: Homogene Lösung in Abhängigkeit von der Pumprate. Gestrichelt: instabile Lösungen, durchgezogen: stabile Lösungen, Kreise: Hopf-Instabilität. a) $\Omega_x = \Omega_z = 0$, $\Phi = 0$, b) $\Omega_x = \Omega_z = 0$, $\Phi = 2^\circ$, c) $\Omega_x = 10^4$ rad/s, $\Omega_z = 0$, $\Phi = 0$, d) $\Omega_x = \Omega_z = 10^4$ rad/s, $\Phi = 0$. Sonstige Parameter: $\bar{\Delta} = 10,8$, $R = 99,5\%$, $\gamma = 200$ s $^{-1}$, $\Gamma_2 = 9,72 \cdot 10^9$ s $^{-1}$, $N = 7,21 \cdot 10^{19}$ m $^{-3}$, $D = 268$ mm 2 /s.

findet bei $\Omega_x \approx \gamma$ ein Übergang von superkritischem zu subkritischem Bifurkationsverhalten statt. Die Größenordnung der kritischen Pumprate P_{sc} wird dabei im Fall $\Omega_x \gg \gamma$ durch das Magnetfeld bestimmt. Für $P_0 > P_{sn}$ existieren wiederum zwei symmetrische, stabile Zustände, die mit dem Zustand mit $w_h = 0$ über einen instabilen stationären Zustand verbunden sind. Das Auftreten dieser Zustände kann als Sattel-Knoten-Bifurkation bei P_{sn} interpretiert werden.

Der Zustand $w_h = 0$ wird im Bereich $\gamma \lesssim P_0 \lesssim P_{sc}$ instabil gegen oszillatorische Störungen (*Hopf-Instabilität*). Die stabilen Grenzzyklen der oszillatorischen Lösungen sind nicht eingezeichnet, da sich diese nicht als Lösung der Gleichung (5.21) finden lassen. Für eine genauere Analyse der Hopf-Instabilität unter Einbeziehung räumlicher Freiheitsgrade sei auf Abschnitt 5.2.3 verwiesen.

stattfindet und die im zeitlichen Mittel durch das optische Pumpen erzielbare Orientierung dadurch sinkt. In Bezug auf die stationären Zustände entspricht dies effektiv einer Reduktion der Pumpeffizienz.

Eine von b) deutlich verschiedene Asymmetrie der Bifurkation erzeugt schließlich ein „schiefes“ Magnetfeld, wie in d) dargestellt. Anhand der Gleichungen (5.3) sieht man, dass eine longitudinale Magnetfeldkomponente lediglich auf die Magnetisierungskomponenten u und v wirkt, die ihrerseits nur durch ein transversales Magnetfeld erzeugt werden können. Demnach lässt sich im Rahmen des hier betrachteten Modells im Falle $\Omega_x = 0$ das longitudinale Magnetfeld beliebig wählen, was im Experiment zur Unterdrückung von Störeinflüssen genutzt werden kann (vgl. Kapitel 3 und 4).

Im Bereich von $P_0 \approx 1200 \dots 4000 \text{ s}^{-1}$ ist $\partial w_h / \partial P_0$ auf dem oberen Ast negativ. Dies ist auf den in Abschnitt 5.1.1 bereits angesprochenen *light-shift*-Effekt zurückzuführen. Das longitudinale Magnetfeld hebt die Entartung der Zeeman-Unterniveaus des Grundzustandes auf und „verschiebt“ die Unterzustände energetisch in unterschiedliche Richtungen. Der *light-shift*-Effekt wirkt nun auf einem der beiden Pumpübergänge in die entgegengesetzte Richtung, und es kommt bei einer nichtverschwindenden Pumprate zu einer Niveaufkreuzung. Da bei energetisch gleichen Unterniveaus der Abbau der zeitlich gemittelten Orientierung über die Larmor-Präzession (s. o.) am effektivsten ist, existiert bei dieser Pumprate ein lokales Minimum in der Pumpratenabhängigkeit der stationären Orientierung.

Wie in Kapitel 4 geschildert, ist für die folgenden Betrachtungen hauptsächlich der symmetrische Fall mit $\Omega_z = 0$ und $\Phi = 0$ interessant (entsprechend Abbildungen 5.1 a+c). Nimmt man diesen Spezialfall an, so vereinfacht sich (5.21) zu

$$w_h = \frac{P_D^h(w_h)}{\gamma + P_S^h(w_h)} - \frac{\Omega_x^2 w_h}{[\bar{\Delta} P_D^h(w_h, \Phi)]^2 + [\gamma + P_S^h(w_h)]^2} \quad (5.24)$$

mit

$$P_D^h(w_h) = P_0 R e^{-2\alpha_0 L} \sin(2\alpha_0 L \bar{\Delta} w_h) \quad (5.25)$$

Bezogen auf die Berechnung der homogenen, stationären Lösung (5.24) allein bringt die Reduktion auf den symmetrischen Fall noch keine gravierende Vereinfachung mit sich. Die weitere Analyse wird damit jedoch erheblich erleichtert. Da dennoch die Darstellung der exakten Formeln für die Berechnung der Wachstumskoeffizienten viel Raum einnimmt, sei für deren Herleitung auf Anhang A verwiesen.

In den folgenden Abschnitten wird Stabilität verschiedener Zustände gegen räumlich periodische Störungen untersucht, ausgehend von den verschiedenen Lösungen der Gleichung (5.24). Die Untersuchung beschränkt sich dabei im betrachteten (bezüglich des Bifurkationsverhaltens) symmetrischen Fall auf den Bereich mit $w_h \geq 0$, wobei die Ergebnisse auf die Situation $w_h \rightarrow -w_h$ direkt übertragbar sind. Um die zu verschiedenen Ästen (verschiedenen Lösungen von (5.24)) gehörigen Fälle sprachlich voneinander abzugrenzen, wird im Folgenden der Fall $w_h = 0$ auch als „Null-Ast“ bzw. w_0 bezeichnet.

Von den beiden weiteren positiven Lösungen ist – wie in Abbildung 5.1 c ersichtlich – eine Lösung homogen, d. h. bereits für Störungen mit $k = 0$, instabil; diese Äste sollen als „(homogen) instabiler Ast“ (w_i) bzw. „(homogen) stabiler Ast“ (w_s) bezeichnet werden.

Die Lösung w_0 stellt eine triviale Lösung von Gleichung (5.24) dar und existiert über den gesamten Parameterbereich unter der zuvor getroffenen Annahme $\Omega_z = 0, \Phi = 0$. Für die Lösungsäste w_i und w_s ist die lineare Stabilitätsanalyse auf den Pumpratenbereich beschränkt, in dem entsprechende stationäre, homogene Lösungen existieren.

5.2.3 Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse

Einen Überblick über mögliche Instabilitäten des untersuchten Systems bei verschiedenen Parametern bietet die Suche nach Punkten marginaler Stabilität mit $\kappa = 0$ im Parameterraum. Die Verbindung dieser Punkte liefert die Begrenzung der Instabilitätsbereiche, in deren Inneren der Wachstumskoeffizient κ positiv ist.

Instabilitäten ohne äußeres Magnetfeld

Es bietet sich an, zunächst die einfachste denkbare Situation mit $\vec{B} = 0$ zu betrachten, was eine erste Untersuchung hinsichtlich der an der Musterbildung beteiligten Längenskalen und den zu erwartenden minimalen Schwellen ermöglicht. In diesem Fall existiert der Lösungsast w_i nicht, daher kann eine Stabilitätsanalyse für diesen Zustand entfallen.

Für die existenten Lösungsäste w_0 und w_s finden sich bezüglich der Eingangspumprate P_0 nach oben offene Instabilitätsbereiche (siehe Abbildung 5.2). Oberhalb der eingezeichneten Grenzen marginaler Stabilität ist der jeweils betrachtete homogene Zustand linear

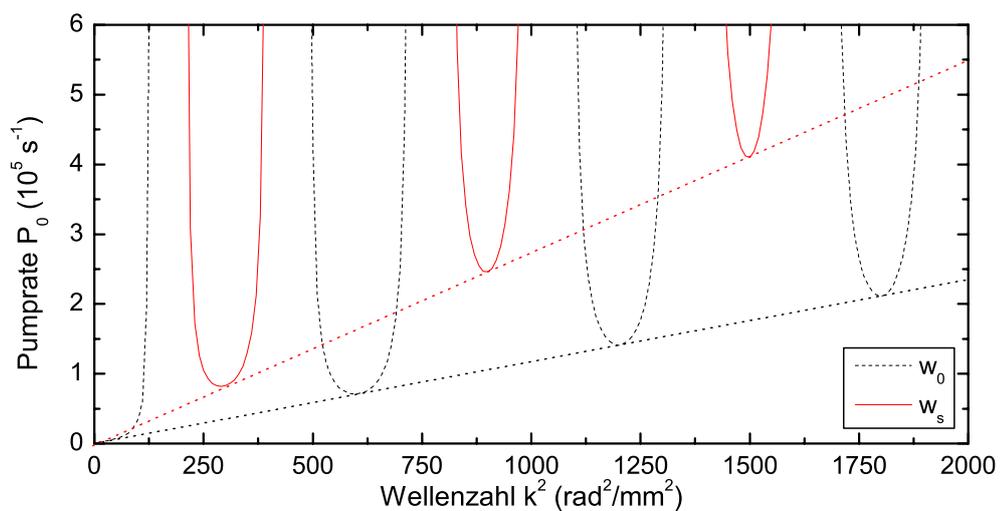


Abbildung 5.2: Linear instabile Bereiche für $\vec{B} = 0$. Rot: Stabilität des homogen stabilen Zustandes, gestrichelt: Stabilität des Null-Astes. Parameter: $d = 112 \text{ mm}$, $\bar{\Delta} = 10,8$, $\gamma = 1,5 \text{ s}^{-1}$, $\Gamma_2 = 9,72 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$, $D = 268 \text{ mm}^2/\text{s}$, $N = 7,21 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$.

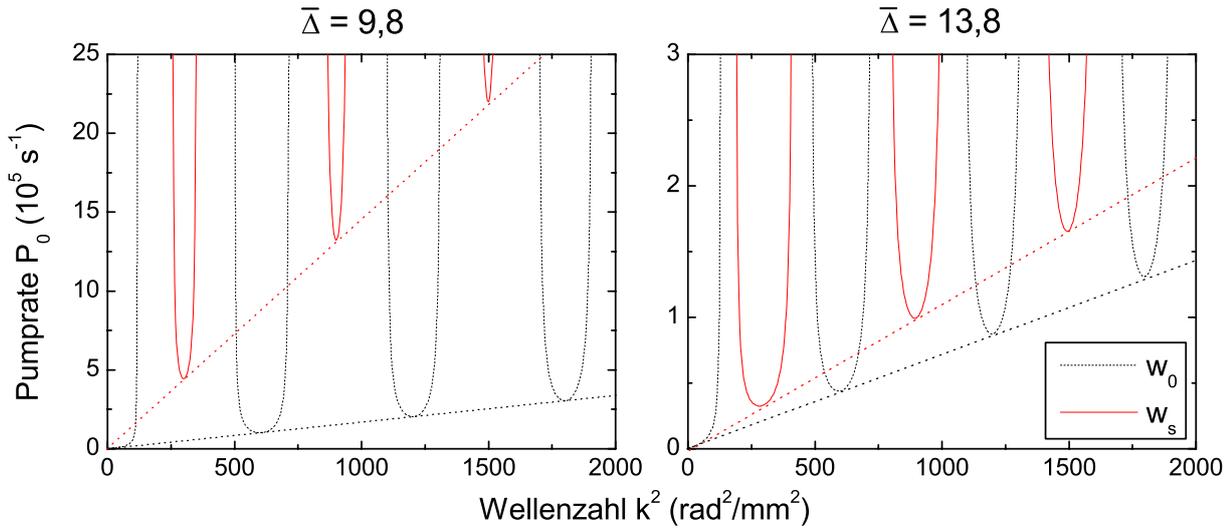


Abbildung 5.3: Einfluss der Verstimmung auf die Instabilitätsbereiche. Links: $\bar{\Delta} = 9,8$, rechts: $\bar{\Delta} = 13,8$. Sonstige Parameter wie in Abbildung 5.2.

instabil gegen Störungen mit der Wellenzahl k . Die Wellenzahlen, bei denen die Minima der Bereiche in Bezug auf P_0 liegen, werden auch *kritische Wellenzahlen* (k_c) genannt und entsprechen den erwarteten Längenskalen aus Abschnitt 2.4. Dabei zeigt der Zustand w_0 Instabilitäten bei den Längenskalen $k_{sat,b}$, die der absorptiv sättigenden Nichtlinearität zuzuordnen sind. Die Modulationsinstabilitäten des homogen stabilen Astes sind mit der absorptiv begrenzenden Längenskala $k_{lim,b}$ verknüpft. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der homogene Zustand sich bereits unter dem Einfluss der Sättigung einstellt und eine Auslenkung der Polarisationsdrehung aus dem homogen stabilen Zustand mit $w_h \neq 0$ heraus einer Nichtlinearität vom absorptiv begrenzenden Typ entspricht.

Bei Auftragung der Eingangspumprate P_0 gegen das Quadrat der Wellenzahl k^2 liegen die Minima der Instabilitätsbereiche zu jedem der betrachteten Zustände jeweils auf einer Geraden¹⁰, deren Steigung mit verschiedenen Parametern verknüpft ist, vor allem aber proportional mit der Diffusionskonstante D anwächst. Das Verhältnis der beiden Geradensteigungen wird maßgeblich durch die Verstimmung beeinflusst (Abbildung 5.3): Bei Verringerung der Verstimmung steigen die Schwellpumpraten zur Instabilität des homogen stabilen Zustandes deutlich stärker an als die für w_0 . Gleichzeitig werden die instabilen Wellenzahlbänder immer schmaler, und schon bei einer Reduktion der Verstimmung auf $\bar{\Delta} = 9$ liegen sämtliche Instabilitätsbereiche des homogen stabilen Lösungsastes jenseits von Pumpraten, die im Vergleich mit dem Experiment als realistisch anzusehen wären. Da die bei gleicher Lichtintensität erzielte Pumprate mit steigender Verstimmung abnimmt,

¹⁰ Der Instabilitätsbereich 0. Ordnung für den Fall w_0 beginnt nicht exakt bei $P_0 = 0$, sondern seine Schwelle liegt in der Größenordnung der Stoßrelaxationsrate γ (vgl. Abschnitt 5.2.2), die allerdings um etwa fünf Größenordnungen unterhalb der hier betrachteten Werte von P_0 liegt.

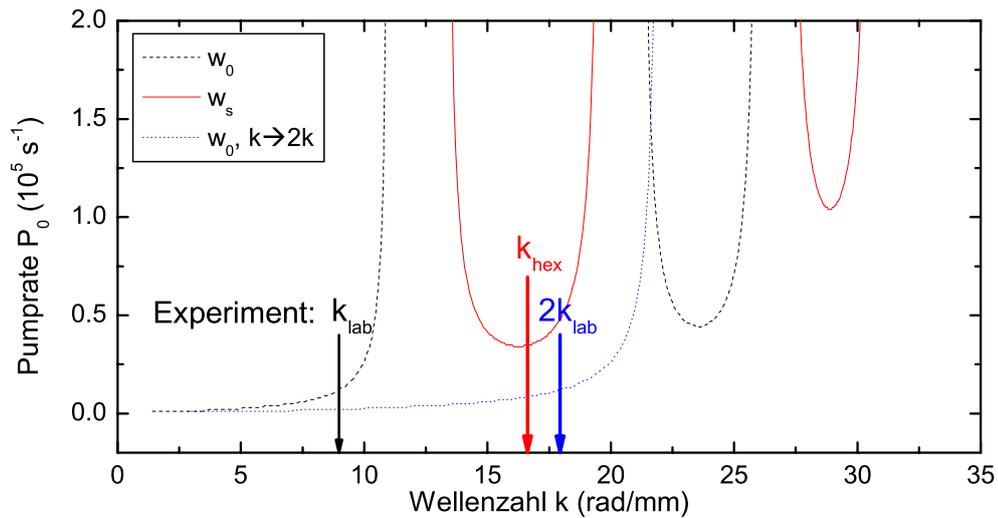


Abbildung 5.4: Längenskalen der ersten Instabilitätsbereiche im Vergleich zu experimentellen Ergebnissen. Parameter: $d = 12$ cm, $\bar{\Delta} = 13$, $\gamma = 1,5$ s $^{-1}$, $\Gamma_2 = 9,72 \cdot 10^9$ s $^{-1}$, $D = 268$ mm 2 /s, $N = 7,21 \cdot 10^{19}$ m $^{-3}$. Sonstige Parameter wie in Abbildung 5.2.

liegen im Übrigen auch bei größerer Verstimmung die Instabilitätsbereiche höherer Ordnung ($b \geq 2$, vgl. Gleichungen (2.10, 2.11)) außerhalb des im Experiment zugänglichen Bereichs, weshalb sich die folgenden Untersuchungen auf den Bereich $k^2 < 1000$ rad 2 /mm 2 beschränken werden.

In Abbildung 5.4 sind die Instabilitätsbereiche niedriger Ordnung ($b = 0, 1$) linear gegen den Betrag des Wellenvektors k aufgetragen. Es stellt sich heraus, dass bereits bei sehr kleinen Pumpraten ein ganzes Wellenzahlband instabil wird, was sich von $k = 0$ bis etwa $k \approx 11$ rad/mm bei höheren Pumpraten erstreckt. Diese Instabilität geht vom Zustand $w = 0$ aus, was die Aussagekraft der linearen Stabilitätsanalyse in diesem Parameterbereich einschränkt, da wegen der Pitchfork-Bifurkation des homogenen Zustandes und der niedrigen Schwelle dieser Bifurkation bei Abwesenheit eines transversalen Feldes eine Strukturbildung mit $k \neq 0$ ausgehend vom Zustand $w = 0$ im Experiment sehr unwahrscheinlich ist. Zum Verständnis der beteiligten Prozesse kann jedoch die Betrachtung auch dieser Instabilität beitragen.

Vergleicht man die sich aus der linearen Stabilitätsanalyse ergebenden potentiell instabilen Längenskalen mit experimentellen Ergebnissen, so stellt man fest, dass die charakteristische Längenskala der Labyrinth k_{lab} am Rand des ersten Instabilitätsbereichs von w_0 liegt, so dass ein Einfluss dieser Instabilität auf die Bildung von Labyrinthen nicht auszuschließen ist. Die Längenskala der im Experiment gefundenen Hexagone (k_{hex}) liegt erwartungsgemäß nahe bei der kritischen Wellenzahl des ersten Instabilitätsbereichs von w_s .

Interessant ist die Feststellung, dass auch die erste Harmonische von k_{lab} noch in den Bereich der Modulationsinstabilität von w_s fällt. In Abbildung 5.4 ist daher zur Orientierung noch der Bereich eingezeichnet, der jeweils zur doppelten Wellenzahl der Begrenzung des ersten Bereichs gehört: dieser schließt den Instabilitätsbereich für w_s vollständig ein.

Wirkung des Magnetfeldes

Die Einführung eines transversalen Magnetfeldes hat im Vergleich zum Fall $\vec{\Omega} = 0$ ein ungleich komplexeres Stabilitätsdiagramm zur Folge. Dies liegt zum einen daran, dass ein weiterer stationärer Zustand (w_i) zu betrachten ist, zum anderen ist dies im Auftreten der bereits erwähnten Hopf-Instabilität begründet. Abbildung 5.5 zeigt das komplette Stabilitätsdiagramm für $\Omega_x = 3 \cdot 10^5$ rad/s; die restlichen Parameter sind gegenüber Abbildung 5.4 unverändert. Der Übersichtlichkeit halber wurde das Diagramm aufgeteilt, da sich ansonsten die Instabilitätsbereiche der beteiligten Zustände teilweise überdecken würden.

Die instabilen Bereiche des Nullzustandes w_0 (Abbildung 5.5 b) zeigen bezüglich der kritischen Wellenzahlen und der Breite des instabilen Wellenzahlbandes in guter Näherung die gleichen Eigenschaften wie in Abwesenheit eines magnetischen Feldes. Die Schwellen für die stationäre Modulationsinstabilität sind jedoch signifikant zu höheren Pumpraten verschoben, und die Instabilitäten 0. und 1. Ordnung besitzen beinahe identische Schwellpumpraten, die im gezeigten Beispiel etwas unterhalb des Bifurkationspunktes P_{sc} liegen. Die kritischen Pumpraten für das Auftreten der subkritischen Bifurkation P_{sc} bzw. der stabilen Lösungen P_{sn} sind zur Orientierung in die Stabilitätsdiagramme eingezeichnet (vgl. Abbildung 5.5 c).

Für Pumpraten unterhalb der Schwelle zur stationären Modulationsinstabilität schließt sich ein Bereich mit einer Hopf-Instabilität an, der bezogen auf die potentiell instabilen Wellenzahlen annähernd die gleiche Breite besitzt. Wie bereits zuvor erwähnt, liegt die kritische Pumprate für diese Instabilität größenordnungsmäßig bei der Stoßrelaxationsrate γ , die im Vergleich mit den sonstigen Zeitkonstanten vernachlässigbar klein ist (im gezeigten Beispiel wurde $\gamma = 1,5 \text{ s}^{-1}$ angenommen). Für Pumpraten nahe der Schwelle ist die Hopf-Frequenz durch die Larmor-Frequenz des transversalen Feldes gegeben (Abbildung 5.5 a) und nimmt mit steigender Pumprate monoton ab. An der Schwelle zur stationären Modulationsinstabilität wird der Eigenwert η der Jacobimatrix rein reell, d. h. die Hopf-Instabilität ist auf den gezeigten Bereich begrenzt. Oberhalb der kritischen Wellenzahl der stationären Instabilität ist nur noch ein Band von endlichen (von Null verschiedenen) Wellenzahlen Hopf-instabil, und der Existenzbereich der Hopf-Instabilität geht über die Pumprate P_{sc} deutlich hinaus.

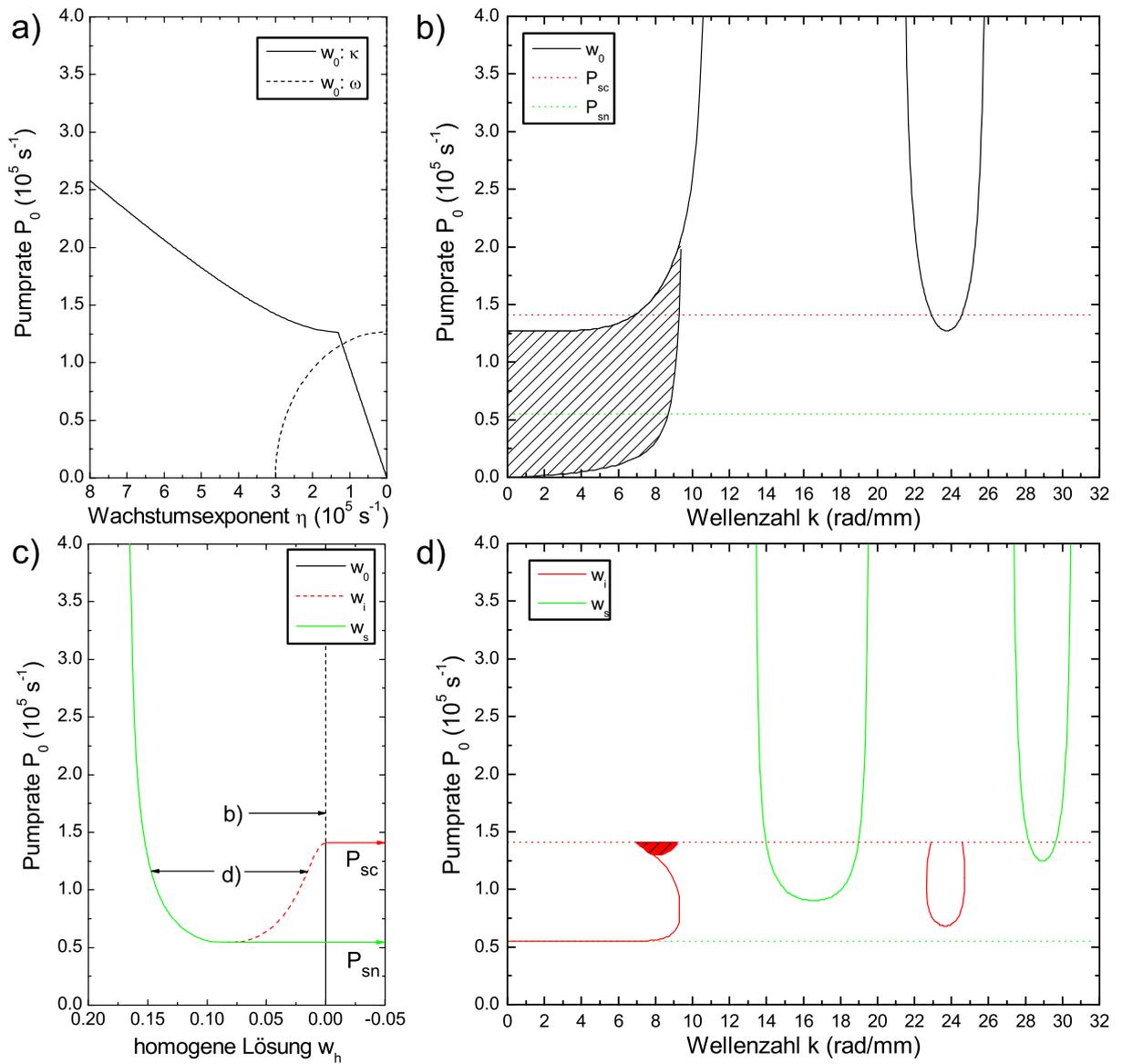


Abbildung 5.5: Lineare Stabilitätsanalyse mit transversalem Magnetfeld: a) Wachstumskoeffizient (durchgezogen) und Larmorfrequenz (gestrichelt) für w_0 bei $k = 0$, b) Instabilitäten für w_0 , c) homogene, stationäre Zustände: w_0 (schwarz), w_s (grün), w_i (rot), d) Instabilitäten für w_i, w_s . Schraffierte Bereiche: Hopf-Instabilitäten. Transversales Magnetfeld: $\Omega_x = 3 \cdot 10^5$ rad/s, sonstige Parameter wie in Abbildung 5.4. Erläuterungen im Text.

Bezüglich der Instabilitätsbereiche des Zustandes w_s ergeben sich gegenüber dem Fall ohne äußeres Magnetfeld bis auf eine Erhöhung der Schwellen keine signifikanten Änderungen. Sowohl die kritische Wellenzahl als auch die asymptotische Breite der Bereiche bezüglich der Wellenzahl bleiben bei Erhöhung des transversalen Magnetfeldes im Wesentlichen unverändert (Abbildung 5.5 d).

Der Zustand w_i existiert nur für Pumpraten mit $P_{sn} < P_0 < P_{sc}$ und zeigt in diesem Bereich stationäre Modulationsinstabilitäten, deren Eigenschaften hinsichtlich der beteiligten Wellenzahlen mit der Instabilität des Nullzustandes vergleichbar sind.

Darüber hinaus findet sich in dem Wellenzahlbereich, in dem w_0 auch oberhalb von P_{sc} Hopf-instabil ist, ebenfalls eine Hopf-Instabilität bei w_i . Die Instabilitäten dieses Zustandes sind hier nur der Vollständigkeit halber angeführt, weil der homogene Zustand w_i experimentell nicht präparierbar ist und somit kein physikalisch sinnvolles Szenario existiert, in dem die Instabilität des Zustandes w_i gegenüber Störungen eine Rolle spielen könnte.

Wird das transversale Magnetfeld bei konstanter Pumprate $P_0 \gg \gamma$ erhöht, so liegt für $\Omega_x = 0$ die Pumprate oberhalb der Schwelle $P_{crit,0}$ zur stationären Instabilität von w_0 . Bei einer Variation des Magnetfeldes steigt diese Schwelle an und bei $P_{crit,0}(\Omega_x) = P_0$ existiert eine Bifurkation zur Hopf-Instabilität bezüglich Ω_x als Kontrollparameter. In Abbildung 5.6 ist dieses Verhalten anhand des Wachstumskoeffizienten η zu erkennen: für $P_{crit,0}(\Omega_x) > P_0$ wird η komplexwertig. Der Imaginärteil, der der Hopffrequenz entspricht, nähert sich von $\omega = 0$ am Bifurkationspunkt asymptotisch der Larmorfrequenz Ω_x an. Dies entspricht qualitativ der Vorhersage von [YOKO84] für die Einspiegelanordnung mit Natriumdampf und $\lambda/8$ -Plättchen.

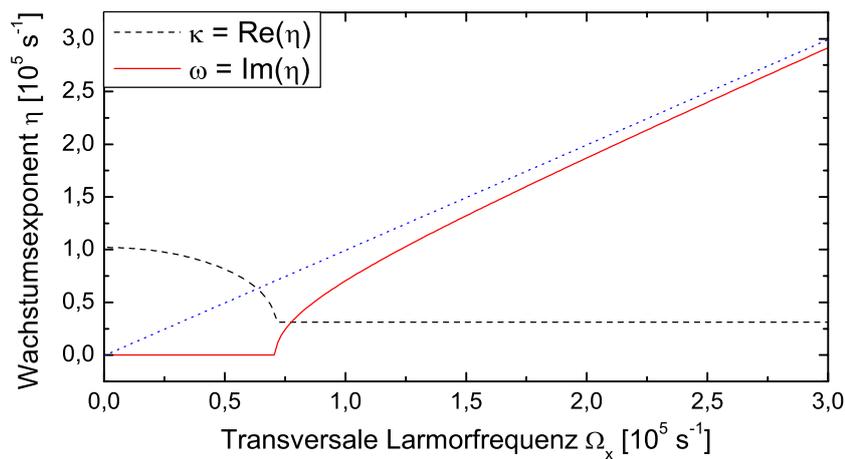


Abbildung 5.6: Hopf-Frequenz (rot) in Abhängigkeit vom transversalen Magnetfeld. Schwarz gestrichelt: linearer Wachstumskoeffizient κ , blau gestrichelt: Larmorfrequenz Ω_x des transversalen Magnetfeldes. $P_0 = 3 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, $D = 200 \text{ mm}^2/\text{s}$, $d = 11,2 \text{ cm}$, sonstige Parameter wie in Abbildung 5.4.

5.3 Numerische Simulationen und Vergleich mit dem Experiment

Im vorangegangenen Abschnitt wurde mit Hilfe linearisierter Bewegungsgleichungen das Verhalten des nichtlinearen Systems semi-analytisch untersucht. Diese Betrachtung erlaubt zwar eine wenig rechenzeitintensive Analyse weiter Parameterbereiche, ist jedoch in ihrer Aussagekraft auf Verhalten des Systems nah an Bifurkationspunkten beschränkt und erlaubt aufgrund der eingehenden Näherungen keine genaue Analyse der raumzeitlichen Dynamik bei Parametern, bei denen sich die Verteilung der Magnetisierung weit vom homogenen Zustand entfernt. Daher wird im Folgenden auf numerische Simulationen eingegangen, die auf der zeitlichen Integration der vollständigen, nichtlinearen Bewegungsgleichungen aus Abschnitt 5.1 beruhen. Dieses Vorgehen verspricht weitere, tiefe Einblicke in die Mechanismen der Strukturbildungsprozesse.

Systeme, bei denen mehrere, sich gegenseitig beeinflussende physikalische Prozesse (z. B. wie hier eine Nichtlinearität und Beugung) gleichzeitig wirken, werden numerisch oft mit sogenannten *split-step*-Verfahren analysiert [Agr01]. Dabei werden die Wirkungen dieser Prozesse in jedem Iterationsschritt nacheinander getrennt voneinander berechnet. Bei hinreichend feiner Zeitdiskretisierung ist dies eine gute Näherung für die Untersuchung eines realen kontinuierlichen Systems. Die Einspiegelanordnung hat nun die besondere Eigenschaft, dass sie in gewisser Hinsicht die experimentelle Realisierung eines solchen *split-step*-Algorithmus darstellt, da Nichtlinearität und Beugung auch in realiter nicht simultan wirken.

Die Kombination dieser Eigenschaft mit dem gut verstandenen mikroskopischen Modell führt bei der Einspiegelanordnung mit Natriumdampf als nichtlinearem Medium regelmäßig zu erstaunlich guten Übereinstimmungen numerischer Rechnungen mit experimentellen Ergebnissen. Dabei erlauben die Ergebnisse der Rechnungen detailliertere Einblicke in die physikalischen Prozesse als das Experiment, weil Zustandsgrößen beobachtbar werden, die experimentell nicht oder nur bedingt zugänglich sind, und weil die Präparation bestimmter Parameter präziser und weitgehend ohne Einschränkungen (etwa durch eine im Experiment begrenzte Laserleistung) möglich ist. Außerdem lassen sich in den Simulationen auch verschiedene transversale Randbedingungen realisieren: So erlauben einerseits Simulationen mit einem gaußförmigen Pumpprofil unmittelbar Vergleiche mit der experimentellen Situation, andererseits stellen alternativ dazu Simulationen mit transversal periodischen Randbedingungen und einer homogenen Pumpverteilung eine gute Annäherung an die im analytischen Modell und in der linearen Stabilitätsanalyse angenommene, unendlich ausgedehnte ebene Welle dar.

5.3.1 Durchführung der Simulationen

Alle ortsabhängigen Größen, insbesondere die elektromagnetischen Felder bzw. die daraus resultierenden Pumpraten und der Blochvektor, werden in den Simulationen auf einem quadratischen Gitter mit $N \times N$ Stützstellen diskretisiert. N ist dabei wegen der an vielen Stellen verwendeten schnellen Fourier-Transformation (FFT, *Fast Fourier Transform*) eine Potenz von 2, typischerweise $N = 256$ oder $N = 128$, gelegentlich auch $N = 64$.

In jedem zeitlichen Iterationsschritt werden zunächst zu den elektromagnetischen Feldern aus dem vorangegangenen Iterationsschritt die Pumpraten bestimmt (Gleichung (5.5)). Zur Berechnung der Evolutionsgleichungen (5.3) werden diese dann mit einem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung [PFTV92] numerisch integriert und so die Wirkung der Pumpfelder auf das Medium berechnet. Danach wird mit Hilfe von Gleichung (5.9) die transmittierte Feldverteilung bestimmt und die Propagation anschließend mit einem Spektralalgorithmus ausgehend von Gleichung (5.11) berücksichtigt.

Bei den Rechnungen werden zwei verschiedene Randbedingungen alternativ verwendet: Zum einen werden Rechnungen mit einem gaußförmigen Pump-Profil durchgeführt, um mit der experimentellen Situation vergleichbare Ergebnisse zu erhalten und den Einfluss des Strahlprofils auf die Strukturbildungsprozesse untersuchen zu können. Zum anderen kommen periodische Randbedingungen zum Einsatz, die zusammen mit einem transversal homogenen Pumpfeld bei hinreichend großem Grundgebiet die Situation einer unendlich ausgedehnten ebenen Welle als Einganglichtfeld in guter Näherung reproduzieren. Aus diesem Grund werden im Folgenden solche Rechnungen auch als „Simulationen mit ebener Welle“ bezeichnet. Einige Untersuchungen für den Fall $\vec{\Omega} = 0$ wurden anhand numerischer Simulationen mit dem erweiterten *pump-depletion*-Modell (vgl. Abschnitt 5.1.2, [Aum99]) durchgeführt. In diesen Fällen wird explizit auf die Verwendung der modifizierten Materialgleichungen hingewiesen.

Details zur Umsetzung des Verfahrens und zur Vorgabe von Anfangsbedingungen finden sich in Anhang B. Die verwendeten Parameter sind jeweils bei den Abbildungen angegeben; die folgenden Parameter wurden gleichbleibend verwendet: Länge der Zelle $L = 15$ mm, Spiegelreflektivität $R = 99,5\%$.

5.3.2 Untersuchung der Frontdynamik

Wie in Abschnitt 2.1 geschildert, wird in der Literatur die Entstehung von Labyrinthen in bistabilen strukturbildenden Systemen häufig mit einer transversalen Modulationsinstabilität von Fronten zwischen den beteiligten stabilen Zuständen des Systems erklärt. Es liegt also nahe, die Frontdynamik im in dieser Arbeit behandelten experimentellen System bei verschiedenen Parametern anhand numerischer Simulationen zu untersuchen.

Dies ist umso wichtiger, weil aus den in Abschnitt 4.2 dargelegten Gründen eine experimentelle Untersuchung dieser Dynamik aufgrund der beteiligten Zeitskalen nur in wenigen Spezialfällen (s. u.) möglich ist.

Klassifikation der Front als Ising-Front

Bei der Untersuchung der Frontdynamik in einem räumlich ausgedehnten System stellt sich zunächst die Frage, ob eine Bewegung der Front bereits bei Reduktion auf nur eine räumliche Dimension auftreten kann (symmetriebrechende *Bloch-Front*), oder ob erst die Erweiterung auf zwei transversale räumliche Freiheitsgrade eine Frontbewegung ermöglicht.

Die Frage nach der Charakterisierung der im vorliegenden System vorkommenden Fronten als Ising- oder Blochfronten ist experimentell nicht beantwortbar, da die Orientierung als direkte Beobachtungsgröße nicht erfassbar ist. Zwar kann unter ganz bestimmten Voraussetzungen (über lange Zeiten stabile oder sich periodisch reproduzierende Strukturen) die Orientierung über eine räumlich aufgelöste Messung der Stokes-Parameter indirekt gewonnen werden [Pes07], ein Zugriff auf die transversalen Komponenten u, v des Blochvektors ist aber nur in numerischen Simulationen möglich. Diese werden jedoch benötigt, da nur die Symmetrieeigenschaften *aller* Bewegungsgrößen des Systems Auskunft über den Typ der Front geben können.

Für den Fall $\vec{\Omega} = 0$ ist offenkundig, dass die vorkommenden Fronten nur vom Ising-Typ sein können, da die Zustandsgröße des Systems in diesem Fall auf eine skalare Größe reduziert wird. Für $\Omega_x \neq 0$ ist die Form einer geraden, stationären Front (Profil entlang der Frontnormalen) in Abbildung 5.7 für alle Komponenten des Blochvektors dargestellt. Bezüglich des Nulldurchgangs der Orientierung (dessen Ortskoordinate im Folgenden als „Ort der Front“ bezeichnet wird) sind dabei die Komponenten v und w punktsymmetrisch, die Komponente u spiegelsymmetrisch. Insbesondere bleibt u über den gesamten Frontverlauf von Null verschieden.

Üblicherweise wird zur Unterscheidung zwischen Ising- und Blochfronten auf einen vollständigen Nulldurchgang des betrachteten Ordnungsparameters abgestellt, d. h. alle Komponenten der Zustandsgröße besitzen bei einer Ising-Front einen Nulldurchgang am selben Ort [CLHL90]. Nach dieser Definition wäre die Front aus Abbildung 5.7 als Bloch-Front zu klassifizieren. Allerdings wird dieses Kriterium vornehmlich auf Systeme angewandt, deren beschreibende Größen Vektoren in der komplexen Ebene darstellen (z. B. Amplitude und Phase eines elektromagnetischen Feldes), und ist streng genommen auch nur auf solche Systeme direkt anwendbar. Die Übertragbarkeit auf das vorliegende dreikomponentige System ist damit nur einschränkt gegeben. Weiterhin ist anzumerken, dass u am Ort der Front im Vergleich zu ihrer Umgebung stark absinkt und nur gering

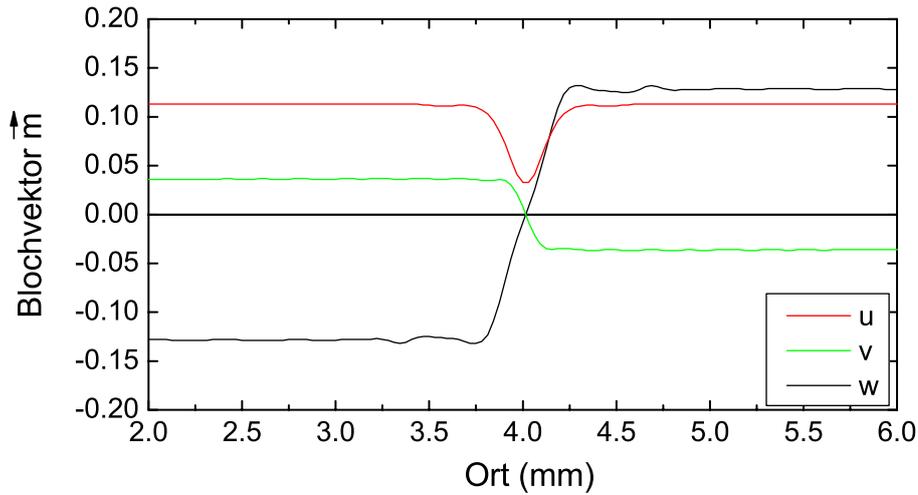


Abbildung 5.7: Form einer stationären Front: Komponenten des Blochvektors

von Null verschieden ist. Solche Fronten werden trotz des Versagens des obigen Kriteriums auch als „near Ising“-Fronten bezeichnet [LPEM⁺04].

Michaelis *et al.* haben hingegen ein universelles Kriterium formuliert, das auf Symmetrieeigenschaften der an der Front beteiligten Zustände und der zugrunde liegenden Gleichungen beruht [MPL⁺01]. Nach diesem Kriterium soll eine Front dann als Ising-Front bezeichnet werden, wenn eine Symmetrieoperation $\mathcal{Z}\mathcal{P}_0$ die Front wieder in sich selbst überführt, wobei \mathcal{P}_0 die Spiegelung der Ortskoordinate um die Position der Front bezeichnet und \mathcal{Z} eine den Bewegungsgleichungen der Observablen inhärente Inversions-symmetrie beschreibt.

Für den symmetrischen Fall $\Omega_z = 0, \Phi = 0$ werden die Gleichungen (5.3) unter dem Symmetrieoperator

$$\mathcal{Z} : (u, v, w[, P_D]) \longrightarrow (u, -v, -w[, -P_D]) \quad (5.26)$$

in sich selbst überführt. Die Symmetrie bezüglich P_D ist nur der Übersichtlichkeit halber mit angegeben, da diese aus $P_D(-w, \Phi = 0) = -P_D(w, \Phi = 0)$ (vgl. Gleichung (5.14)) folgt. Auch für die durch die Front verbundenen homogenen Zustände nach Gleichung (5.24) ist diese Symmetrie einschlägig. Da u unter Anwendung von \mathcal{Z} nicht invertiert und die anderen Komponenten die schon beschriebene Punktsymmetrie aufweisen, ist die in Abbildung 5.7 dargestellte Front nach dieser Definition offenkundig vom Ising-Typ. Für die Anwendbarkeit dieser Definition spricht auch, dass u den Gleichungen (5.3) zufolge im Fall $v = w = 0$ (was am Ort der Front gegeben ist) nicht getrieben wird. Dementsprechend wird das nicht vollständige Verschwinden von u lediglich von der Diffusion verursacht.

Die Gestalt der Front ändert sich bei Variation der Parameter, die zu einer Modulationsinstabilität führen, lediglich quantitativ im Hinblick auf die Steilheit. Die Symmetrieeigenschaften der Komponenten des Blochvektors bleiben jedoch – zumindest in einer

Umgebung des Nulldurchgangs der Orientierung, die sich jeweils bis zum erstmaligen Passieren des homogenen Zustandes erstreckt – erhalten. Unterschiede ergeben sich bei höheren Pumpraten in der Gestalt der oszillatorischen Ausläufer der Front, die allerdings bei diesen Parametern bereits mit der einsetzenden bzw. voll ausgebildeten hexagonalen Musterbildung auf den beteiligten Zuständen wechselwirken, wodurch eine Aussage bezüglich der Fronteigenschaften erschwert bzw. unmöglich gemacht wird.

Im folgenden Abschnitt wird deutlich werden, dass selbst für den Fall $\Omega_x = 0$, der nur eine skalare Beobachtungsgröße besitzt und somit strukturell keine Blochfronten aufweisen kann, gerade Fronten für genügend hohe Pumpraten instabil werden. Es kann also gefolgert werden, dass die Modulationsinstabilität gerader Fronten im vorliegenden System nicht auf einen Ising-Bloch-Übergang zurückzuführen ist, der eine transversal symmetriebrechende Bewegung der Fronten verursachen würde. Dies deckt sich im Übrigen mit der Aussage, dass bei einer theoretischen Analyse des Modells im symmetrischen Fall keine Hinweise auf einen solchen Übergang gefunden wurden [Bab06].

In der Literatur wird der Übergang von Labyrinthen zu Spiralen in Systemen, in denen diese beiden Strukturtypen auftreten, in vielen Fällen mit einer Ising-Bloch-Bifurkation in Verbindung gebracht. Unter diesem Gesichtspunkt sei darauf hingewiesen, dass die Bildung von Spiralen im vorliegenden System (vgl. Abschnitt 5.3.5) in einem Parameterbereich auftritt, in dem das System keine Bistabilität mehr aufweist, und somit auch keine (Bloch-)Fronten existieren können.

Krümmungsgetriebene Frontdynamik

Ein weit verbreiteter Ansatz für die Erklärung einer Modulationsinstabilität gerader Fronten in der Literatur ist eine krümmungsgetriebene Dynamik (vgl. Abschnitte 2.1 und 2.1.3). In den folgenden Abschnitten wird daher der Einfluss verschiedener Parameter – vornehmlich der Pumprate und des transversalen Magnetfeldes – auf die Frontdynamik in zwei räumlichen Dimensionen für die Einspiegelanordnung mit Natriumdampf und $\lambda/8$ -Plättchen anhand numerischer Simulationen untersucht.

Die Frontdynamik in diesem System wurde für Parameter *unterhalb* der Schwelle zur Musterbildung in [Pes07] ausführlich untersucht. Dabei wurde festgestellt, dass sich in diesem Parameterbereich der Radius R kreisrunder Polarisationsdomänen nach einem Skalengesetz mit $R \propto \sqrt{t}$ entwickelt, das der Gleichung (2.3) folgt. Der Koeffizient der krümmungsgetriebenen Dynamik γ_c konnte experimentell und in numerischen Untersuchungen bestimmt werden und es konnte gezeigt werden, dass im untersuchten Parameterbereich γ_c stets positiv ist, der Betrag jedoch mit steigender Pumprate abnimmt.¹¹ Die

¹¹ Für den in der vorliegenden Arbeit betrachteten Fall $\Phi = 0$, $\Omega_z = 0$ ist der Koeffizient $\gamma_i = 0$, d. h. eine gerade Front ruht.

zentrale Fragestellung dieser Arbeit im Hinblick auf die Entstehung der Labyrinthmuster knüpft an diese Ergebnisse an: Zu untersuchen war, ob bei einer Erhöhung der Pumprate über die Schwelle zur Musterbildung hinaus γ_c sein Vorzeichen wechselt und damit eine transversale Modulationsinstabilität von Fronten ermöglicht.

Für Parameter in der Nähe der musterbildenden (Turing-)Modulationsinstabilität wird jedoch die Dynamik der Fronten von der Interaktion der oszillatorischen Ausläufer der Fronten mit sich selbst und den Konstituenten der Turing-Muster überlagert (s. u.), so dass Gleichung (2.3) keine Anwendung mehr finden kann [Pes07]. Ferner gilt dieser Zusammenhang und die sich ergebende Zeitentwicklung des Radius nur für kreisförmige Domänen, so dass selbst eine numerische Bestimmung von γ_c nicht mehr auf einfache Weise möglich ist, sobald eine Domäne ihre Kreisform verliert.

Die Simulation der Zeitentwicklung einer runden Domäne fester Anfangsgröße bei verschiedenen Pumpraten zeigt jedoch, dass die Form der Front zu höheren Pumpraten hin immer komplexer wird. Hierfür wurden Simulationen bei verschiedenen Pumpraten durchgeführt, bei denen jeweils zu Beginn eine runde Domäne mit stets gleichem Radius „gezündet“ wurde.¹² Für Pumpraten unterhalb der Schwelle zur Musterbildung schrumpft eine runde Domäne unter Beibehaltung ihrer kreisrunden Form (Abbildung 5.8 a), und es sind nur in der unmittelbaren Umgebung der Front oszillatorische Ausläufer derselben zu erkennen. Bei Erhöhung der Pumprate über die Schwelle zur Musterbildung bilden sich hexagonale Strukturen, die sich über den gesamten Bereich der Domäne und des Hintergrundzustandes erstrecken (b). Die Domänen kontrahieren nach wie vor, der Verlauf der Front verliert aber seine ursprüngliche Rotationssymmetrie. Bei weiterer Erhöhung der Pumprate bleibt die Domäne in ihrer Größe in etwa konstant (c), und es zeigen sich konkave Bereiche der Front (d), die sich schließlich zu ausgedehnten Labyrinthmustern entwickeln (e).

Um trotz dieses komplexen Verhaltens ein quantitatives Maß für die Analyse der zeitlichen Entwicklung zu erhalten, die auch einer weitgehend automatisierten Auswertung großer Datenmengen zugänglich ist, wird im Folgenden die Gesamtlänge der Front(en) auf dem ganzen Grundgebiet betrachtet. Dieses Vorgehen wird in ähnlicher Form auch in [TZWW99] verwendet, dort wird allerdings jeweils nur die zu einer einzelnen Domäne gehörige Frontlänge ausgewertet. Der Algorithmus, mit dem die Frontlänge aus den Simulationsdaten bestimmt wurde, ist in Anhang B.3 detailliert beschrieben. Für die gleichen Parameter wie in Abbildung 5.8 sind in Abbildung 5.9 die so ermittelten Längen gegen die Zeit aufgetragen.

¹² Zu den verschiedenen in dieser Arbeit verwendeten Verfahren zur Vorgabe von Anfangsbedingungen in den numerischen Simulationen gibt Anhang B.2 genauere Auskunft. Dort wird auch eine Begriffsdefinition für die Bezeichnungen der verschiedenen Verfahren im Text gegeben.

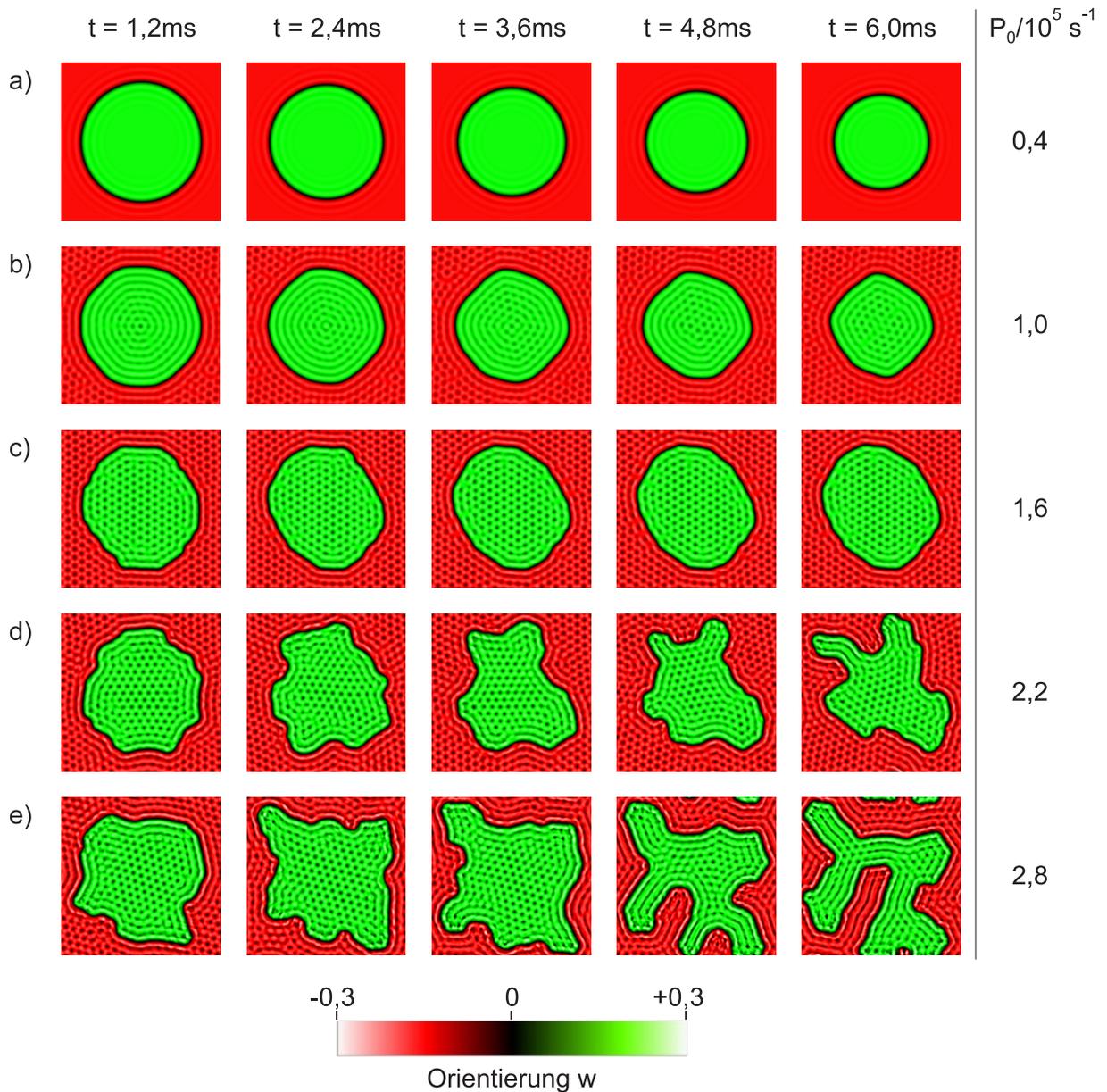


Abbildung 5.8: Frontdynamik runder Domänen in Simulationen mit ebener Welle: Schnappschüsse der Zeitentwicklung bei verschiedenen Pumpraten. a) $P_0 = 0,4 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$, b) $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$, c) $P_0 = 1,6 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$, d) $P_0 = 2,2 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$, e) $P_0 = 2,8 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$. Sonstige Parameter: $d = 11,2 \text{ cm}$, $\vec{\Omega} = 0$, $\bar{\Delta} = 10,8$, $D = 268 \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1}$, $\gamma = 1,5 \text{ s}^{-1}$, $\Gamma_2 = 9,72 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$, $N = 7,21 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-1}$. Radius der vorgegebenen Domäne: $3,125 \text{ mm}$, Grundgebiet: $8 \times 8 \text{ mm}^2 \hat{=} 256 \times 256$ Gitterpunkte.

Bei geringen Pumpraten, die weit entfernt von der Schwelle zur Musterbildung sind, ist die Zeitentwicklung in guter Näherung durch den schon bekannten Zusammenhang $l_F \propto R \propto \sqrt{t}$ gegeben (gut zu erkennen in Abbildung 5.9 g+h), da für kreisrunde Domänen ein linearer Zusammenhang zwischen dem Radius der Domäne und Länge der Front gegeben ist. Es wird jedoch deutlich, dass oberhalb der Schwelle zur Musterbildung (Abbildung 5.9 b) dieser einfache Zusammenhang nicht mehr erfüllt ist. Die oszillatorischen Ausläufer der Front wechselwirken mit den Konstituenten des hexagonalen Musters im Innern und außerhalb der Domäne und es kommt zu einer „schubweisen“ Kontraktion der Domäne, die auch in einem stabilen Zustand mit konstantem Radius münden kann [Pes07] (vgl. Abbildung 5.9 i). Die Wechselwirkung zweier Fronten über ihre oszillatorischen Ausläufer wird auch als „locking“ bezeichnet (z. B. [Rom04, Pes07]), und auch die Interaktion einer Front mit der unterliegenden Musterbildung lässt sich als ein ähnliches Phänomen interpretieren [Pom86]. Daher wird der Begriff „locking“ im Folgenden für diese Art von durch die oszillatorischen Ausläufer der Fronten vermittelte Wechselwirkung verwendet.

Bei weiterer Erhöhung der Pumprate (c) kommt die Kontraktion schließlich zunächst zum Stillstand (vgl. Abbildung 5.8 c), und für noch höhere Pumpraten wird eine Expansion der Front beobachtet. Hier zeigt sich auch, dass die Länge der Front ein geeigneteres Maß für die zu untersuchende Fragestellung ist als beispielsweise die Fläche oder der Radius einer Domäne, denn die Fläche ändert sich beim Übergang von einer runden Domäne zum Labyrinth oft nicht (vgl. Abbildung 5.8 d), und ein Radius lässt bei einer nicht kreisförmigen Domäne nicht definieren.

Die Einführung eines transversalen Magnetfeldes (Abbildung 5.9 g–l) ändert das qualitative Verhalten der Frontdynamik nur in einem wesentlichen Punkt: Der Übergang von kontrahierenden zu expandierenden Fronten vollzieht sich abrupt, und ein Stillstand der Dynamik wird nur noch vereinzelt beobachtet (s. u.). Quantitativ ändert sich das Verhalten jedoch merklich. Sowohl die Kontraktion als auch eine Expansion verlaufen mit einem äußeren Feld schneller und die Schwelle zur Musterbildung wächst an, expandierende Fronten werden jedoch schon bei geringeren Pumpraten beobachtet als im Falle $\Omega_x = 0$.

Um die Parameterabhängigkeiten eingehend zu untersuchen, bietet es sich an, statt der vollständigen zeitlichen Entwicklung der Frontlänge jeweils nur eine einzelne Kenngröße für jeden Parametersatz zu betrachten. Da die Zeitentwicklung für Pumpraten oberhalb der Musterbildung keiner einfachen Gesetzmäßigkeit mehr folgt, wird im Folgenden die mittlere zeitliche Änderung der Frontlänge dl_F/dt über einen kurzen Zeitraum zu Beginn der Simulation als Kriterium herangezogen, in dem sich die Form der Front noch nicht grundlegend geändert hat. Damit ist eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse verschiedener Rechnungen auch dann gegeben, wenn sich auf längeren Zeitskalen die Frontlänge quali-

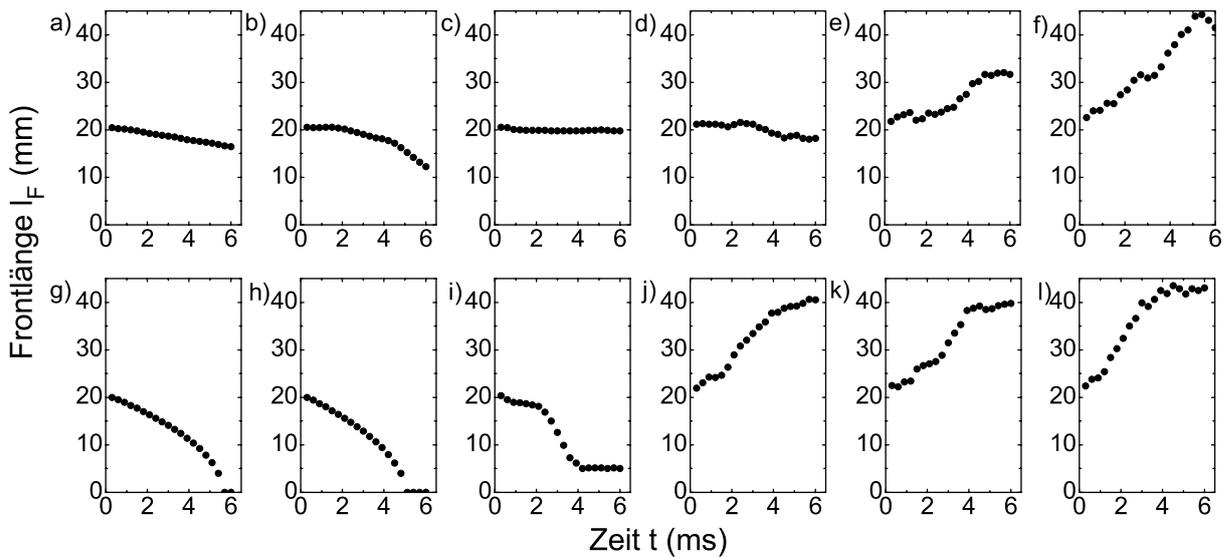


Abbildung 5.9: Zeitliche Entwicklung der Frontlängen l_F in Abhängigkeit von Pump-rate und Magnetfeld. Obere Reihe: $\Omega_x = 0$, untere Reihe: $\Omega_x = 1,5 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$. a+g) $P_0 = 0,8 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$, b+h) $P_0 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$, c+i) $P_0 = 1,6 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$, d+j) $P_0 = 2,0 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$, e+k) $P_0 = 2,4 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$, f+l) $P_0 = 2,8 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$, sonstige Parameter wie in Abbildung 5.8. Erläuterungen im Text.

tativ anders entwickelt. Aus den oben gezeigten Ergebnissen lässt sich schließen, dass die Frontlänge sich über einen Zeitraum von 1 ms nach Beginn der Rechnung in ausreichend guter Näherung nur linear ändert, andererseits dieser Zeitraum aber lang genug ist, um eine beginnende Kontraktion oder Expansion der Front sicher zu detektieren (vgl. Abbildungen 5.8 d+e). Über diesen Zeitraum wurden daher bei einer großen Zahl von Parametersätzen Simulationen durchgeführt, die Frontlänge mit einer Zeitaufösung von $0,3 \mu\text{s}$ bestimmt und anschließend die Kenngröße dl_F/dt mittels linearer Regression ausgewertet.

Um eine hohe Auflösung bei der Variation der Parameter zu erzielen, war es notwendig, die räumliche Diskretisierung aus Rechenzeitgründen auf 64×64 Gitterpunkten zu reduzieren. Dies lässt sich damit rechtfertigen, dass die exakte Form der Front und die innere Struktur der Domänen in diesem Fall nicht von Interesse sind. Zusätzlich wurde durch stichprobenartige Vergleichsrechnungen mit höherer Auflösung in allen Parameterbereichen die Validität der Ergebnisse hinsichtlich dl_F/dt überprüft.

In Abbildung 5.10 sind die Expansions- bzw. Kontraktionsraten aus den oben genannten Simulationen in Abhängigkeit von der Pumprate bei verschiedenen Magnetfeldern aufgetragen. In a) und c) sind zusätzlich exemplarisch die Ergebnisse aus den Validierungsrechnungen mit höherer räumlicher Auflösung zum Vergleich gezeigt. Einige Eckdaten aus der linearen Stabilitätsanalyse sind zur Orientierung in die Diagramme eingetragen (gestrichelte Linien): Die Bifurkationspunkte P_{sn} (grün) und P_{sc} (rot), wie in

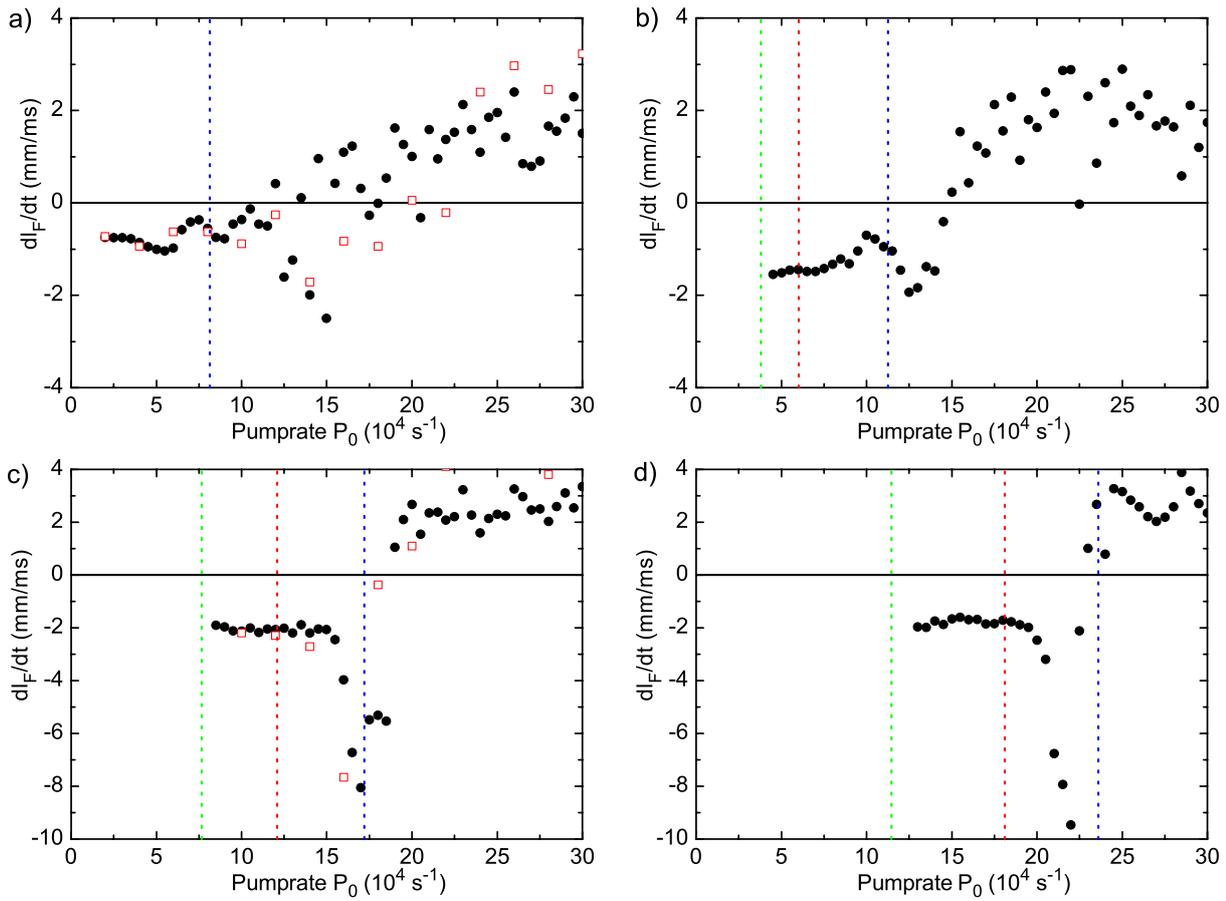


Abbildung 5.10: Frontdynamik runder Domänen in Simulationen mit ebener Welle: Änderungsrate der Frontlängen dl_F/dt in Abhängigkeit von Pumprate und Magnetfeld. a) $\Omega_x = 0$, b) $\Omega_x = 1 \cdot 10^5$ rad/s, c) $\Omega_x = 2 \cdot 10^5$ rad/s, d) $\Omega_x = 3 \cdot 10^5$ rad/s. Radius der vorgegebenen Domäne: 3,125 mm. (●) Grundgebiet: 8×8 mm² $\hat{=}$ 64×64 Gitterpunkte, (□) Vergleichsrechnungen mit 256×256 Gitterpunkten. Parameter wie in Abbildung 5.8. Erläuterungen im Text.

Abbildung 5.1 c) definiert, sowie die kritische Pumprate $P_{crit,s}$ des ersten Instabilitätsbereichs von w_s (Schwelle zur Turing-Musterbildung, blau).

Deutlich unterhalb der Schwelle zur Musterbildung ist dl_F/dt stets negativ, was einer Kontraktion der Domäne entspricht. In der Umgebung von $P_{crit,s}$ ist eine Beschleunigung der Kontraktion zu beobachten, die bei starken Magnetfeldern deutlich ausgeprägt ist (c+d). Bei vergleichsweise geringem transversalem Feld (a+b) streuen die ermittelten Kontraktions- bzw. Expansionsraten oberhalb von $P_{crit,s}$ stark, was auf das „locking“ der Fronten an den Konstituenten der unterliegenden Musterbildung zurückzuführen ist. Insgesamt ist aber dennoch auch bei geringen Flussdichten des transversalen Feldes ein deutlicher Trend zu einem Domänenwachstum bei Erhöhung der Pumprate sichtbar.

Für höhere Magnetfelder geht die Streuung der ermittelten Werte deutlich zurück und es existiert ein gut definierter Übergang von kontrahierenden zu expandierenden

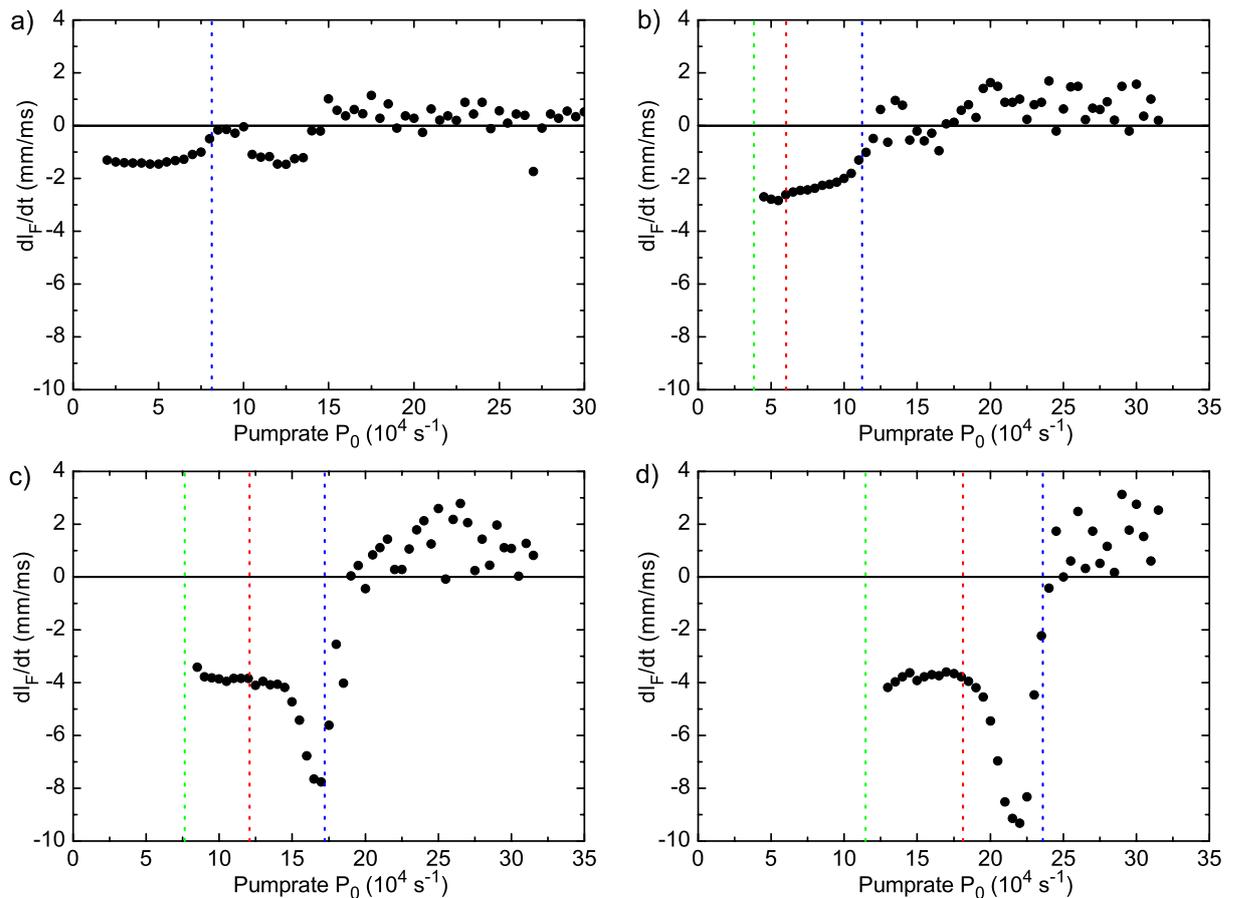


Abbildung 5.11: Frontdynamik runder Domänen in Simulationen mit ebener Welle: Änderungsraten der Frontlängen dl_F/dt in Abhängigkeit von Pumprate und Magnetfeld. a) $\Omega_x = 0$, b) $\Omega_x = 1 \cdot 10^5$ rad/s, c) $\Omega_x = 2 \cdot 10^5$ rad/s, d) $\Omega_x = 3 \cdot 10^5$ rad/s. Radius der vorgegebenen Domäne: 1,875 mm, Grundgebiet: $8 \times 8 \text{ mm}^2 \hat{=} 64 \times 64$ Gitterpunkte. Sonstige Parameter wie in Abbildung 5.8. Erläuterungen im Text.

Domänen, der in der Nähe der Schwelle zur Musterbildung liegt. Ob zwischen diesem Verhalten und der Tatsache, dass bei Erhöhung des transversalen Magnetfeldes die Bifurkation zur Bistabilität der homogenen, stationären Zustände subkritisch wird (vgl. Abschnitt 5.2.2), ein Zusammenhang besteht, ist bislang ungeklärt.

Um festzustellen, ob der Radius der Anfangsdomäne einen Einfluss auf das oben geschilderte Verhalten der Zeitentwicklung hat, wurden die Simulationen für verschiedene Radien der ursprünglich gezündeten Domäne wiederholt. Laut [Pes07] hängt der Koeffizient γ_c für den symmetrisch präparierten Fall $\Phi = 0^\circ$ (langsame Achse des $\lambda/8$ -Plättchens parallel zur Eingangspolarisation, vgl. Abschnitt 3.3) unterhalb der Schwelle zur Musterbildung nicht vom Anfangsradius ab. Allerdings sind auch bei gleichem γ_c aufgrund der Beziehung $v_\perp = -\gamma_c/R$ unterschiedliche Kontraktionsraten dl_F/dt zu erwarten, sobald der Radius der Initialdomäne variiert wird.

Abbildung 5.11 zeigt die Kontraktions- und Expansionsraten für eine Domäne mit einem um 40% geringeren Radius, aber sonst gleichen Parametern im Vergleich zu Abbildung 5.10. Wie erwartet, ergeben sich unterhalb der Schwelle zur Musterbildung durchgängig größere Kontraktionsraten als in Abbildung 5.10, allerdings werden in dem Bereich mit beschleunigter Dynamik knapp unterhalb $P_{crit,s}$ in guter Näherung die gleichen Werte gefunden wie zuvor.

Die Streuung der Werte ist im Bereich kontrahierender Domänen deutlich geringer, und insbesondere die Verlangsamung der Dynamik in der Nähe der Schwelle zur Musterbildung für $\Omega_x = 0$, wie sie in [Pes07] beschrieben wurde, entspricht in guter Näherung dem dort für eine Domäne vergleichbaren Radius' beschriebenen Verhalten und bestätigt somit die Vergleichbarkeit der Ergebnisse (in qualitativer Hinsicht) bezüglich der Frontdynamik trotz der in Abschnitt 5.1.2 beschriebenen Unterschiede in der Modellierung des Systems. Bezüglich des qualitativen Verhaltens und der Abhängigkeit von der Pumprate ist jedoch gegenüber Domänen mit größerem Anfangsradius keine Änderung festzustellen.

Die Dynamik runder Domänen erlaubt bereits einige Erkenntnisse über die Mechanismen der Entstehung von Labyrinthen. Allerdings sind diese Erkenntnisse nur begrenzt auf die Situation bei einer geraden Ausgangsfront übertragbar. Dies hängt unter anderem damit zusammen, dass im Falle einer Kontraktion die Dynamik einer runden Domäne – sofern sie nicht durch Musterbildung gebremst wird – in ihrer Geschwindigkeit mit der Zeit zunimmt, weil die Bewegung der Front zu immer kleiner werdenden lokalen Krümmungsradien führt. Eine Expansion wird bei genügend großem Aspektverhältnis (d. h. solange die Domäne nicht mit den Randbedingungen wechselwirkt) immer langsamer werden.

Bei einer geraden (oder nur leicht modulierten) Front „unendlicher“ Länge¹³ muss im Gegensatz dazu eine Expansion zwangsläufig mit einer *stärkeren* lokalen Krümmung einhergehen, und eine Kontraktion führt analog dazu zu einer Zunahme der lokalen Krümmungsradien, was letztlich zu einer asymptotischen Verlangsamung der Dynamik führt (vgl. dazu Abbildung 2.1).

Es ist also zu erwarten, dass zumindest quantitativ andere Ergebnisse erzielt werden, wenn statt einer runden Domäne eine gerade Front betrachtet wird. Um auch im Kontraktionsregime noch quantitative Aussagen aus der zeitlichen Entwicklung der Frontlänge entnehmen zu können, wurden Simulationen durchgeführt, die mit einer transversal leicht modulierten Front als Anfangsbedingung gestartet wurden (Abbildung 5.12 a).

Qualitativ zeigt sich auch in diesem Fall wieder das gleiche Verhalten wie bei runden Domänen: Für geringe Pumpraten bewegen sich die Fronten entlang der Frontnormalen derart, dass die Gesamtlänge der Front abnimmt (Kontraktion) und die Modulation asymptotisch verschwindet (Abbildung 5.12 b). Oberhalb der Schwelle zur Musterbildung

¹³ bzw. einer unter periodischen Randbedingungen nicht geschlossenen Front

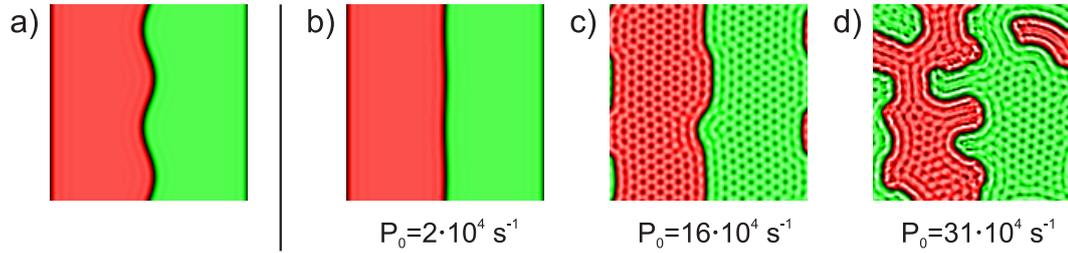


Abbildung 5.12: Dynamik transversal modulierter Fronten: Schnappschüsse der Entwicklung im magnetischen Nullfeld nach 3 ms simulierter Zeit. a) Anfangsbedingung, b) $P_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, c) $P_0 = 16 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, d) $P_0 = 31 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$. Grundgebiet: $8 \times 8 \text{ mm}^2 \hat{=} 128 \times 128$ Gitterpunkte. Sonstige Parameter und Farbskala wie in Abbildung 5.8.

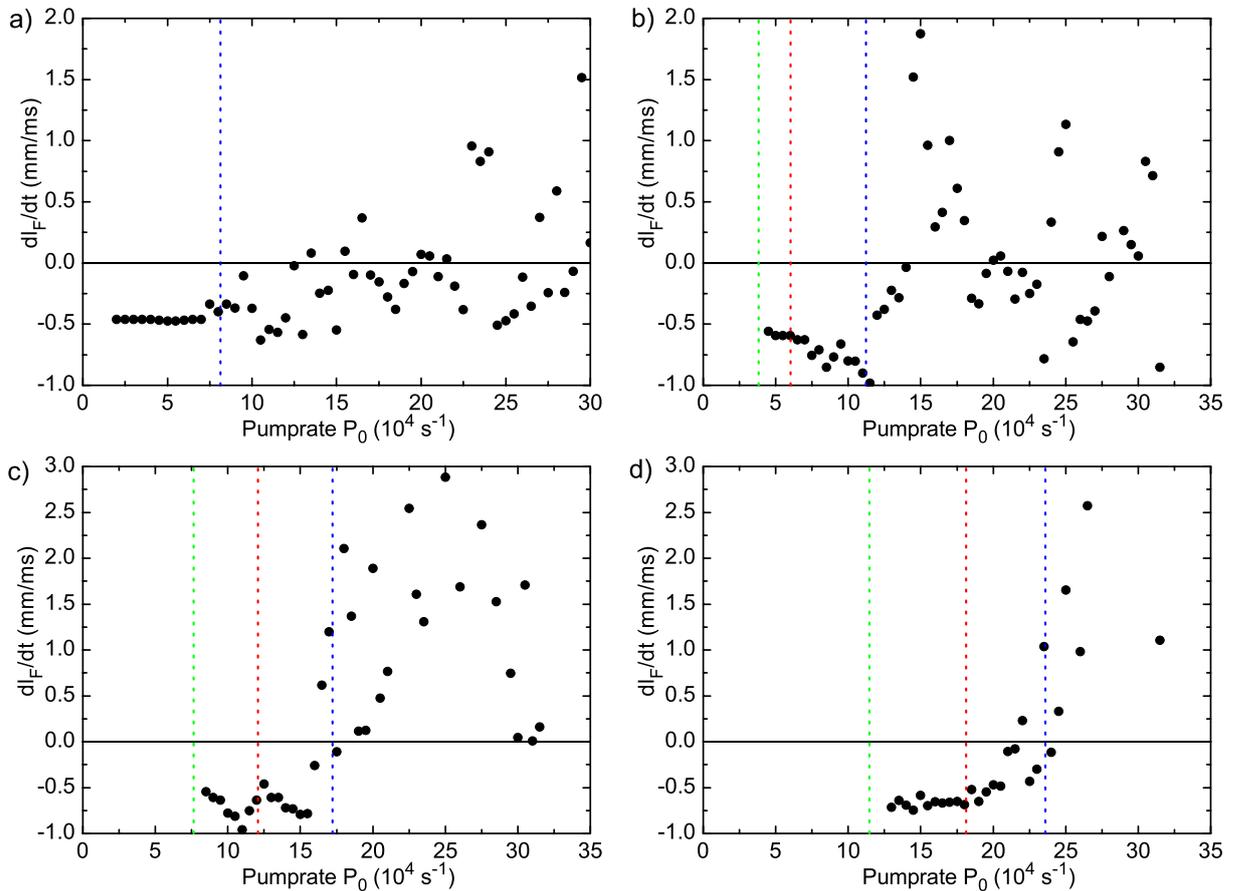


Abbildung 5.13: Frontdynamik transversal modulierter Fronten in Simulationen mit ebener Welle: Änderungsraten der Frontlängen dl_F/dt in Abhängigkeit von Pumprate und Magnetfeld. a) $\Omega_x = 0$, b) $\Omega_x = 1 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$, c) $\Omega_x = 2 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$, d) $\Omega_x = 3 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$. Grundgebiet: $8 \times 8 \text{ mm}^2 \hat{=} 128 \times 128$ Gitterpunkte. Sonstige Parameter wie in Abbildung 5.8. Erläuterungen im Text.

bleibt die anfängliche Modulation erhalten, wobei der Frontverlauf durch die unterliegende Musterbildung in seiner Form jedoch beeinflusst wird (c). Bei weiterer Erhöhung der Pumprate expandiert die Front, wodurch die lokalen Krümmungsradien im Mittel immer kleiner werden und sich schließlich im Langzeitlimites wiederum Labyrinthmuster ausbilden (d).

Das quantitative Verhalten modulierter Fronten ist in der gleichen Weise wie zuvor für runde Domänen (vgl. Abbildungen 5.10, 5.11) ermittelt worden; die Ergebnisse sind in Abbildung 5.13 dargestellt. Ausgangspunkt der Rechnungen war dabei die in Abbildung 5.12 a) gezeigte Orientierungsverteilung.

Zunächst ist zu erkennen, dass die zum Teil erheblichen Unterschiede in der Geschwindigkeit der Frontdynamik, die bei runden Fronten in der Nähe der Schwelle zur Musterbildung zu finden sind, bei annähernd geraden Fronten nicht auftreten. Die Streuung der ermittelten Werte oberhalb der Schwelle zur Musterbildung ist jedoch für modulierte Fronten – auch im Falle relativ starker transversaler Magnetfelder – deutlich größer als bei den runden Domänen. Dennoch zeigt sich qualitativ eine weitgehende Übereinstimmung mit den zuvor beschriebenen Ergebnissen: Oberhalb der Schwelle zur Musterbildung existiert eine deutliche Tendenz zu expandierenden Fronten, es werden mit steigender Pumprate vermehrt auch positive dl_F/dt beobachtet, und der Übergang von der Kontraktion zur Expansion wird mit zunehmendem transversalen Magnetfeld immer schärfer definiert und liegt jeweils in der Umgebung der Schwelle zur Musterbildung.

Langzeitverhalten

Wegen der starken Änderung des Verlaufs und damit der Krümmung der Fronten im Falle einer Expansion ist, wie bereits zuvor geschildert, als quantitatives Maß zum Vergleich verschiedener Parameter bzw. Anfangsbedingungen nur die Änderung der Frontlänge in einem relativ kurzen Zeitbereich nach Beginn der Simulationen geeignet, in dem sich zwar die Länge messbar ändert, die Form der Front bzw. Domäne jedoch noch keine gravierende Änderung zeigt. Betrachtet man jedoch das Verhalten auf längeren Zeitskalen, so wird deutlich, dass eine anfängliche Expansion der Front nicht zwangsläufig auch zur Ausbildung ausgedehnter Labyrinthmuster führt.¹⁴ Vielmehr wird bei nur geringen Expansionsraten die Ausdehnung der Front in weiten Parameterbereichen nach kurzer Zeit (einige ms) durch „locking“ an den Musterkonstituenten wieder gestoppt (vgl. auch Zeitverhalten in Abbildung 5.9 e). In diesen Fällen ergeben sich im Langzeitlimites stationäre Verteilungen, die der in Abbildung 5.12 c) dargestellten ähneln.

Für vergleichsweise kleine Ω_x existiert ein breiter Pumpratenbereich, in dem das o. g. „locking“ auftritt (in Abbildung 5.14 grau hinterlegt); die Schwelle zur Bildung von Laby-

¹⁴ vgl. dazu auch [ATV99, BAC⁺00]

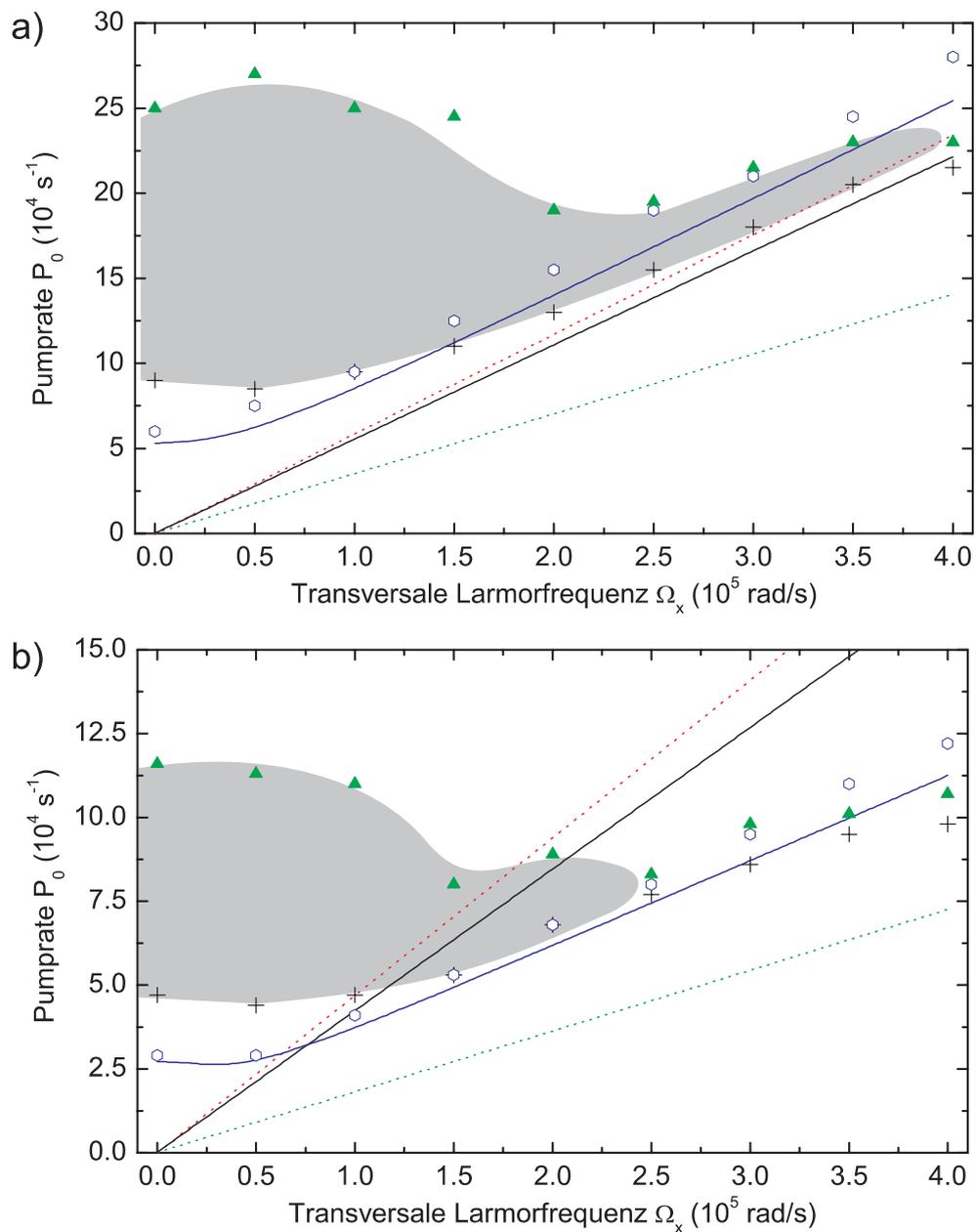


Abbildung 5.14: Schwellpumpraten für die Bildung von Turing-Mustern (\circ), Expansion gerader Fronten (+) und Bildung von Labyrinth (\blacktriangle) im Vergleich zu Ergebnissen der linearen Stabilitätsanalyse (Gestrichelte Linien: Bifurkationspunkte der stationären homogenen Lösung P_{sn} (grün) und P_{sc} (rot); durchgezogene Linien: kritische Pumprate der stationären Modulationsinstabilität von w_0 (schwarz) und w_s (blau)). Grau schattiert: „locking“-Bereich. a) $\Delta = 11$, b) $\Delta = 13$. Sonstige Parameter: $d = 112 \text{ mm}$, $D = 200 \text{ mm}^2/\text{s}$, $\gamma = 1,5 \text{ s}^{-1}$, $\Gamma_2 = 9,72 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$, $N = 7,21 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$, Grundgebiet $8 \times 8 \text{ mm}^2 \hat{=} 128 \times 128$ Gitterpunkte. Erläuterungen im Text.

rinthen liegt um ein Mehrfaches oberhalb der Schwelle für eine Expansion der Front. Für höhere transversale Felder fallen die Schwellpumpraten für eine Frontexpansion und die Bildung ausgedehnter Labyrinth in guter Näherung zusammen. In Abbildung 5.14 sind diese Schwellpumpraten für verschiedene Parameter dargestellt; zum Vergleich sind einige Eckdaten aus der linearen Stabilitätsanalyse sowie die aus den numerischen Simulationen ermittelten Schwellen zur Musterbildung mit angegeben. Als Schwelle für die Frontexpansion wurde dabei jeweils der Punkt angenommen, bei dem bei Erhöhung der Pumprate erstmalig eine positive Frontlängenänderung dl_F/dt (bei Mittelung über 1 ms) gefunden wurde. Die Schwelle zur Labyrinthbildung wird dadurch definiert, dass bei Erhöhung der Pumprate erstmalig die Expansion nicht durch „locking“ gestoppt wird.¹⁵

Für die Parameter aus Abbildung 5.14 nähern sich die Schwellen zur Frontexpansion und zur Labyrinthbildung bei transversalen Magnetfeldern von etwa $\Omega_x \approx 2 \cdot 10^5$ rad/s stark an. Bis zu diesem Punkt sinkt die Schwelle zur Labyrinthbildung ab, oberhalb steigt sie, wie auch die Schwelle zur Frontexpansion, wieder an. Insgesamt ergibt sich so eine minimale Schwelle zur Ausbildung ausgedehnter Labyrinthmuster bei einem endlichen, von Null verschiedenen transversalen Magnetfeld. Dies begründet den experimentellen Befund, dass bei konstanter Pumpleistung und Variation des Magnetfeldes in transversaler wie auch longitudinaler Richtung die Labyrinth bevorzugt bei $B_z \approx 0, |B_x| \gg 0$ beobachtet werden (vgl. Abschnitt 4.2.3).

Auch die Labyrinth erreichen im Langzeitlimit nach Abklingen einer transienten Dynamik einen weitgehend stationären Zustand, der sich im weiteren Verlauf nur noch langsam und geringfügig ändert. Wie schon in Kapitel 4 angedeutet, lassen sich solche Strukturen als (*nearly*) *frozen states* interpretieren [GMT00, GCOM04, MML04]. Dabei kommt die intrinsische Dynamik zum Stillstand, sobald das gesamte Grundgebiet mit Fronten derart bedeckt ist, dass jeder Frontabschnitt auf einer charakteristischen Längenskala mit einer benachbarten Front wechselwirkt. Dieses Verhalten wird in der Literatur für verschiedene Systeme beschrieben, in denen Labyrinth auftreten (vgl. Kapitel 2). Im vorliegenden System lässt sich das „Einfrieren“ der Labyrinth wiederum auf ein „locking“-Phänomen zurückführen – im Gegensatz zu dem weiter oben beschriebenen Verhalten kommt hier jedoch nicht eine Wechselwirkung zwischen den oszillatorischen Ausläufern einer Front mit den Konstituenten hexagonaler Strukturen zum Tragen, sondern eine gegenseitige Wechselwirkung zweier Fronten. Dies ist vergleichbar mit dem Mechanismus, der im Bereich kontrahierender Domänen zur Bildung stabiler Konfigurationen (dissipative Solitonen, [PGWAL05, Pes07]) führt. Im Falle der Labyrinth existiert jedoch eine Vielzahl von möglichen Konfigurationen, die sich nur geringfügig voneinan-

¹⁵ Dies wird dann angenommen, wenn nach Ablauf der maximal simulierten Zeit (hier: 5 ms) die Front eine transversale Modulationstiefe von mindestens der halben Kantenlänge des Grundgebietes aufweist.

der unterscheiden (vgl. [LGJ92]), so dass eine rauschinduzierte Dynamik auf sehr langen Zeitskalen (vgl. Abschnitt 4.2) möglich bleibt.

Nach der Ausbildung solcher *frozen states* können diese näherungsweise formstabilen Strukturen bei Simulationen mit ebener Welle mit einer konstanten Geschwindigkeit von bis zu einigen 100 $\mu\text{m}/\text{ms}$ driften. In Simulationen mit Gaußschem Strahl äußert sich dieses Verhalten aufgrund des rotationssymmetrischen Strahlprofils in einer Rotation des Labyrinthausschnitts um das Strahlzentrum. Betrag und Richtung der Winkelgeschwindigkeit sind dabei nicht durch Symmetrien des entstandenen Labyrinthmusters oder durch die Wahl bestimmter Parameter festgelegt, sondern hängen von den Anfangsbedingungen und dem Verlauf der transienten Dynamik ab. Im Gaußschen Strahl bilden sich in großen Parameterbereichen typischerweise S-förmige Fronten aus (siehe Abbildung 5.15 f), die bei konstanten Parametern und Anfangsbedingungen identische Gestalt haben, jedoch unter dem Einfluss zufälligen Rauschens zu Beginn der Simulation¹⁶ mit unterschiedlichem Drehsinn und verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten rotieren. Für periodische Randbedingungen wird dieses Phänomen auch als „*scrolling*“ bezeichnet und in [SGFO05] als universelles Verhalten musterbildender Systeme beschrieben und insbesondere für Labyrinthmuster diskutiert.

Zusammenhang mit der musterbildenden Instabilität

Bereits in den Abbildungen 5.10, 5.11 und 5.13 wurde deutlich, dass der Übergang von kontrahierenden zu expandierenden Fronten stets in der Umgebung der Schwelle zur Musterbildung stattfindet. Bei einer Variation der Verstimmung (Abbildung 5.14 a: $\bar{\Delta} = 11$, b: $\bar{\Delta} = 13$) zeigt sich, dass zwar die kritischen Pumpraten der Instabilitäten von w_0 und w_s mit Ω_x je nach Verstimmung unterschiedlich stark ansteigen, die Expansion von Fronten jedoch in beiden Fällen ungefähr der Schwelle zur Musterbildung folgt. Bei großer Verstimmung (Abbildung 5.14 b) können sowohl eine beginnende transversale Modulationsinstabilität der Front als auch Labyrinth sogar bereits unterhalb der kritischen Pumprate der Amplituden-Modulationsinstabilität des Zustands w_0 auftreten, in dessen instabiles Wellenzahlband die charakteristische Längenskala der Labyrinth k_{lab} fällt. Dies steht nicht im Widerspruch zur linearen Stabilitätsanalyse, da diese von einem (hier instabilen) homogenen Zustand ausgeht, während die hier durchgeführten Simulationen eine Front zwischen zwei stabilen Zuständen als Anfangsbedingung haben. Es liegt jedoch die Vermutung nahe, dass die Anwesenheit der musterbildenden Instabilität von w_s für die Modulationsinstabilität der Fronten notwendig ist. Diese Interpretation wird dadurch gestützt, dass in Simulationen, bei denen durch Filterung im Fourierraum der Wellen-

¹⁶ relative Amplitude $\approx 1\%$, Dauer einige μs ; vgl. Anhang B.2

zahlbereich der musterbildenden Instabilität unterdrückt wurde, keine Labyrinth mehr entstanden.

Dass auch geringfügig unterhalb der Schwelle zur Musterbildung eine Frontexpansion auftreten kann, lässt sich im Rahmen der obigen Interpretation dadurch erklären, dass knapp unterhalb der Schwelle die oszillatorischen Ausläufer der Front als „Vorläufer“ der Amplituden-Modulationsinstabilität nur noch schwach gedämpft sind. Dadurch hat eine durch diese Ausläufer beeinflusste Wechselwirkung eine Reichweite von mehreren Λ_{hex} (Längenskala der hexagonalen Musterbildung, vgl. Abschnitt 4.2.2), und die unmittelbare Umgebung der Front hat bei nur schwach gedämpften oszillatorischen Ausläufern bereits die gleiche Gestalt bezüglich \vec{m} wie oberhalb der Schwelle zur Musterbildung.

Modulationsinstabilität gerader Fronten im Gaußschen Strahl

Der experimentelle Befund, dass sich bei einer einsetzenden Modulationsinstabilität einer geraden Front bei geringen Magnetfeldern stationäre Zustände einstellen (vgl. Abschnitt 4.2.4), lässt sich mit den Ergebnissen des vorigen Abschnittes gut erklären. Um zu zeigen, dass es sich bei den experimentellen Ergebnissen tatsächlich um eine Folge einer auf einem zunehmenden Strahlradius modulationsinstabilen Front handelt, werden im Folgenden numerische Simulationen im Gaußschen Strahl und einer geraden Front als Anfangsbedingung betrachtet. Im Gegensatz zum Experiment können hierbei auch vollkommen symmetrische Randbedingungen ($\Phi = 0, \Omega_z = 0$) untersucht werden, und auch die Front lässt sich so präparieren, dass sie zu Beginn der Simulation exakt durch das Strahlzentrum verläuft.

Abbildung 5.15 zeigt jeweils die stabilen Endkonfigurationen bei verschiedenen Pump-raten, die sich nach Zündung einer geraden Front ergeben. Man erkennt eine sehr gute qualitative Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden aus Abbildung 4.8: Bei vergleichsweise niedriger Pumprate bleibt die Front zunächst gerade (a), und bei Erhöhung der Eingangsleistung bilden sich vom Zentrum ausgehend lokal gekrümmte Bereiche der Front aus (b), die mit zunehmender Pumprate einerseits einen größeren Bereich im Strahl einnehmen, und zum anderen stärker gekrümmt sind sowie zunehmende komplexere Formen aufweisen (c–e). Ist die lokale Pumprate in einem genügend großen Bereich oberhalb der Schwelle zur Modulationsinstabilität, so bildet sich eine ausgeprägte Modulation der Front aus, die sich fast über den gesamten in Transmission sichtbaren Strahlradius erstreckt (f). Es ist gut zu erkennen, dass in der Umgebung der Front die oszillatorischen Ausläufer der Front mit der umgebenden Musterbildung wechselwirken, was letztlich zur Stabilisierung der Strukturen beiträgt (vgl. voriger Abschnitt). Die gezeigten Simulationen wurden bei $\vec{\Omega} = 0$ mit der *pump-depletion*-Korrektur durchgeführt, um eine bessere Vergleichbarkeit der sich ergebenden Verteilungen mit dem Experiment zu erreichen.

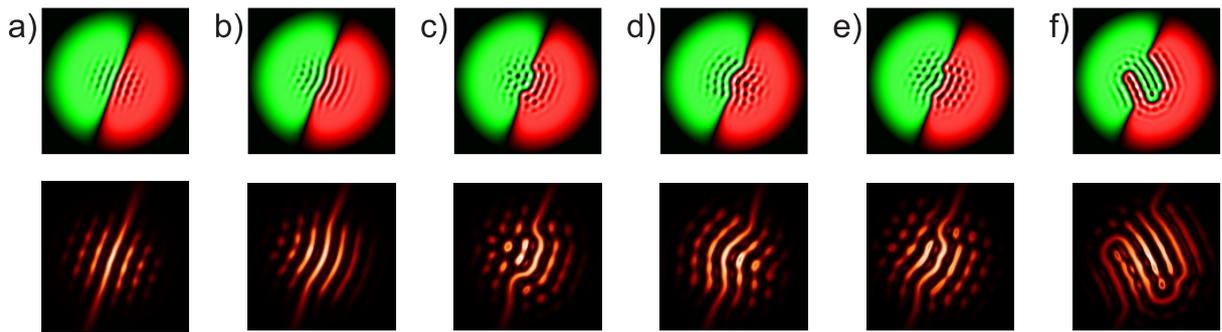


Abbildung 5.15: Modulationsinstabilität einer geraden Front in Simulationen mit Gaußschem Strahl. Stabile Konfigurationen in Abhängigkeit von der Pumprate: a) $P_0 = 7,5 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, b) $P_0 = 9 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, c) $P_0 = 10,5 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, d) $P_0 = 12 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, e) $P_0 = 13,5 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, f) $P_0 = 15 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$. Obere Reihe: Orientierungsverteilung (rot = negativ, grün = positiv), untere Reihe: transmittierte Intensität bei $\Theta = 0^\circ$ (vergrößert dargestellt). Parameter: $\bar{\Omega} = 0$, $\bar{\Delta} = 13$, $\gamma = 1,5 \text{ s}^{-1}$, $\Gamma_2 = 9,72 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$, $N = 7,21 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $D = 268 \text{ mm}^2/\text{s}$, $d = 120 \text{ mm}$, $w_0 = 1,89 \text{ mm}$. Grundgebiet: $8 \times 8 \text{ mm}^2 \hat{=} 256 \times 256$ Gitterpunkte. Rechnungen mit *pump-depletion*-Korrektur. Erläuterungen im Text.

Qualitativ identische Strukturen wie die oben gezeigten ergeben sich auch bei Rechnungen im Gaußschen Strahl, bei denen Labyrinth aus Simulationen mit ebener Welle bei identischen Parametern als Anfangsbedingung eingesetzt werden. Diese Tatsache sowie das qualitativ identische Verhalten bezüglich der transversalen Modulationsinstabilität von Fronten sowohl im Gaußschen Strahl als auch in der ebenen Welle lässt die Interpretation zu, dass es sich bei den im Experiment beobachteten Strukturen tatsächlich um Ausschnitte aus ausgedehnten Labyrinthmustern handelt, die den selben Ursprung haben wie die Strukturen, die in Simulationen mit periodischen Randbedingungen gefunden werden.

5.3.3 Längenskalen der Labyrinth

In vorangegangenen Arbeiten zur Strukturbildung in optischen Systemen, insbesondere der hier diskutierten Einspiegelanordnung mit Natriumdampf, wurden zur Auswertung der Längenskalen der sich ergebenden Strukturen unter anderem die Fouriertransformierten der Orientierungs- oder Intensitätsverteilungen herangezogen. Dies ist insofern günstig, als die Fouriertransformierte des von der Zelle transmittierten Lichtfeldes auch experimentell über das Fernfeld erfassbar ist, und sich bei räumlich periodischen Strukturen in der Fouriertransformierten in der Regel scharf definierte Maxima ausbilden, die eine direkte Bestimmung der beteiligten Wellenzahlen ermöglichen. Dies ist oft auch dann der Fall, wenn in der Verteilung im Ortsraum keine ausgeprägte Periodizität erkennbar ist (vgl. „Quasimuster“ [HGWA⁺99, AAGWL02, GWHAL03]).

Bei den Labyrinthmustern kann dieser Weg zur Bestimmung der Längenskalen nicht beschränkt werden, da eine räumliche Fernordnung fehlt und sich die Fouriertransformierten sowohl im Experiment als auch in numerischen Simulationen als breitbandige Verteilungen ohne scharf definierte lokale Maxima darstellen [LBRT⁺02].

Um dennoch die Längenskalen quantifizieren zu können, wurde eine Reihe von Bildern aus numerischen Simulationen ausgewertet, indem manuell Profile so durch die Orientierungsverteilungen gelegt wurden, dass jeweils eine Reihe von Fronten orthogonal geschnitten wurde. Verteilungen, die dies ermöglichen, sind nicht in großer Zahl zu finden, da im Regelfall die Fronten in den Labyrinthen nicht über längere Strecken parallel zueinander verlaufen. Die quantitative Auswertung der Längenskalen besitzt demnach nur exemplarischen Charakter. Ein Beispiel ist in Abbildung 5.16 gezeigt und wird im Folgenden diskutiert.

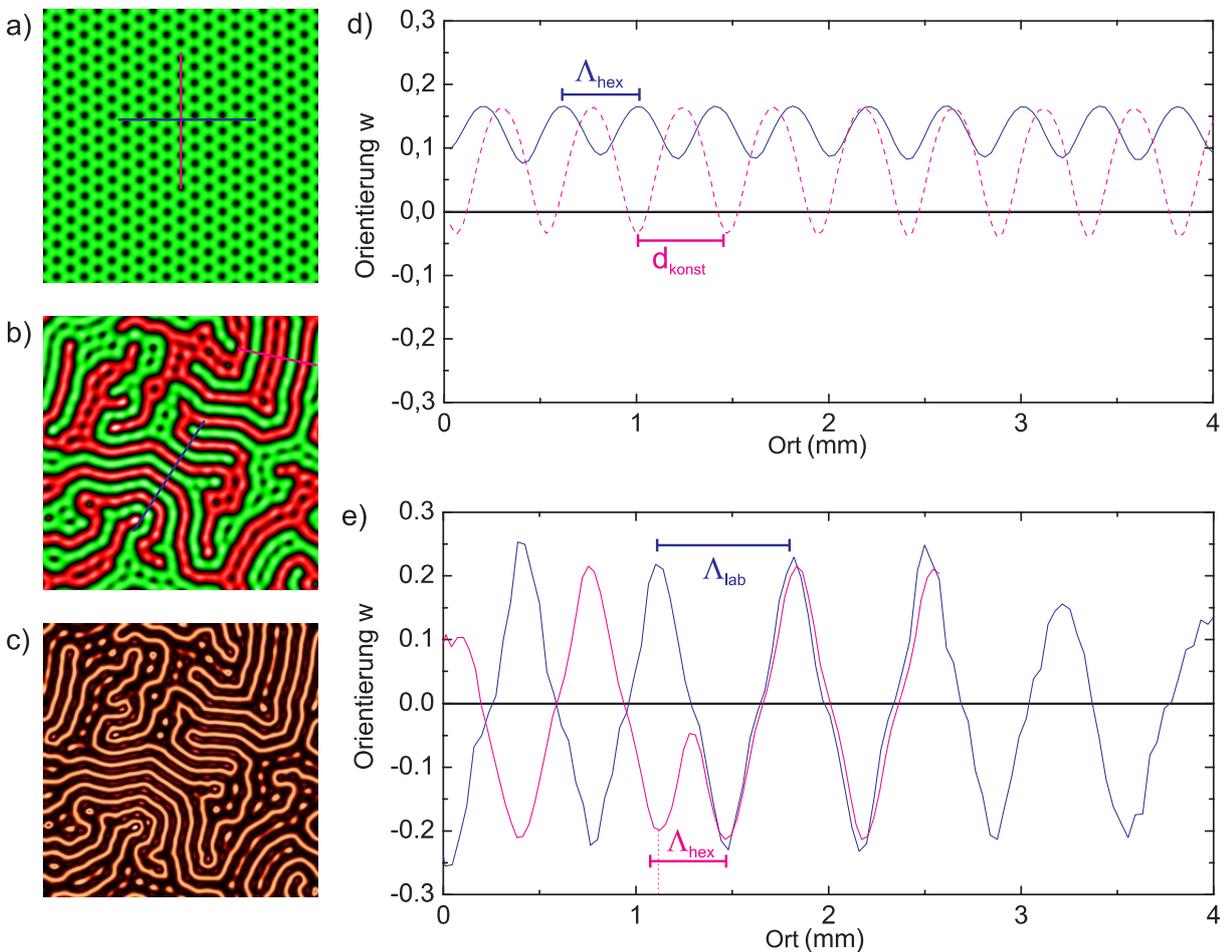


Abbildung 5.16: Längenskalen von Labyrinthmustern in Simulationen mit ebener Welle. a) Turing-Muster, b) Labyrinth, c) Intensität des transmittierten Lichts zu (b), d) Schnitte durch die Orientierungsverteilung (a), e) Schnitte durch die Orientierungsverteilung (b). $P_0 = 12 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, $\bar{\Delta} = 10$, $d = 120 \text{ mm}$, sonstige Parameter wie in Abbildung 5.15. Erläuterungen im Text.

Um die Längenskalen der Labyrinth mit einer gut verstandenen Längenskala vergleichen zu können, ist in Abbildung 5.16 a) zunächst ein hexagonales Muster gezeigt, das das Ergebnis einer Simulation bei den selben Parametern wie das weiter unten zu diskutierende Labyrinth, jedoch mit anderen Anfangsbedingungen, ist. Betrachtet man Schnitte durch diese Orientierungsverteilung entlang einer Reihe von Konstituenten (magenta) bzw. orthogonal dazu (blau, Abbildung 5.16 d), so erkennt man in beiden Fällen eine annähernd sinusförmige Modulation mit zwei verschiedenen charakteristischen Längenskalen, die über

$$d_{konst} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \Lambda_{hex} \quad (5.27)$$

miteinander verknüpft sind.¹⁷ Die Orientierung oszilliert räumlich um den stationären homogenen Zustand w_s , wobei im Zentrum der Musterkonstituenten jeweils in einem kleinen Bereich die Orientierung das Vorzeichen wechselt.

Bei den Labyrinthen dagegen (Abbildung 5.16 b; Schnitte entlang der in e) markierten Bereiche) oszilliert die Orientierung weitgehend symmetrisch um den Zustand $w = 0$, wobei die Periodizitätslänge eine charakteristische Längenskala $\Lambda_{lab} \approx 0,69$ mm definiert, was in guter Übereinstimmung mit dem experimentell bestimmten Wert $\Lambda_{lab,exp} \approx 0,70$ mm steht (vgl. Abschnitt 4.2.2). Die zugehörige Wellenzahl errechnet sich zu $k_{lab} \approx 9,1$ rad/mm und liegt damit wie auch der experimentelle Wert in dem Instabilitätsbereich nullter Ordnung des Zustandes w_0 aus der linearen Stabilitätsanalyse (vgl. Abschnitt 5.2.3). Es stellt sich heraus, dass $\Lambda_{lab} \approx \frac{3}{2} \cdot d_{konst}$; es ist allerdings fraglich, ob dieser Zusammenhang eine physikalische Ursache besitzt, da in [Pes07] für dissipative Solitonen in einer vergleichbaren Situation (Übergang der Orientierung von Oszillationen um die positive stationäre homogene Lösung zu Oszillationen um die negative Lösung) ein anderer Zusammenhang mit den Längenskalen der Turing-Musterbildung gefunden wurde.

Es existieren ebenso wie im Experiment Bereiche des Labyrinths, in dem die Orientierung zwischen zwei Nulldurchgängen eine räumliche Oszillation um den homogenen Zustand durchführt (magenta in Abbildung 5.16 e). Diese Oszillationen haben eine ringförmig kleinere Periodizitätslänge als die zu erwartende Oszillation mit Λ_{hex} . Die Abweichung von der hexagonalen Längenskala ist in den numerischen Simulationen mit periodischen Randbedingungen deutlicher ausgeprägt als in experimentellen und numerischen Ergebnissen im Gaußschen Strahl und führt typischerweise zu einer Verschiebung der nachfolgenden Front um gerade $\frac{1}{2} \cdot \Lambda_{lab}$. Dieser Zusammenhang lässt die Interpretation zu, dass auch beim Auftreten solcher Zwischenoszillationen eine Kompatibilität des

¹⁷ Dieser Zusammenhang ergibt sich aus der Geometrie des hexagonalen Musters, das aus der Überlagerung dreier sinusförmiger Modulationen mit Λ_{hex} entsteht, wobei die beteiligten Wellenvektoren paarweise jeweils einen Winkel von 120° einschließen, vgl. [Ack96].

gesamten Labyrinthmusters mit den periodischen Randbedingungen in der Simulation erhalten bleiben muss, wodurch die Längenskala der oszillatorischen Ausläufer der Front – die identisch mit Λ_{hex} ist, vgl. [Pes07] – in der Nähe von miteinander wechselwirkenden Fronten eine leichte Verschiebung erfahren kann. Dies steht nicht im Widerspruch zu den Ergebnissen der linearen Stabilitätsanalyse, da auch dort die Instabilitätsbereiche der Turing-Instabilitäten eine endliche Breite besitzen und somit oberhalb der kritischen Pumprate auch Modulationen der Orientierung mit von der kritischen Wellenzahl abweichenden Längenskalen entdämpft sind.

Insgesamt ergeben sich sowohl im Experiment als auch in den numerischen Simulationen Frontabstände mit

$$d_{front} \approx \frac{1}{2}\Lambda_{lab} + n \cdot \Lambda_{hex}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (5.28)$$

wobei die obige Beziehung aufgrund der Wechselwirkung mit den (periodischen oder durch den Gaußschen Strahl vermittelten) Randbedingungen und mit hexagonal strukturierten, aber teilweise in der Nähe der Front verzerrten Bereichen in der Regel nicht exakt gilt. Die diskreten Abstände der Fronten, die auf unterschiedlich viele Zwischenoszillationen der Orientierung zurückzuführen sind, legen den Vergleich mit der in [PGWAL05, Pes07] beschriebenen diskreten Familie dissipativer Solitonen nahe, die im gleichen experimentellen System bei ähnlichen Parametern beobachtet wurde.

Auch dort werden die auftretenden Längenskalen von der Wechselwirkung der die Solitonen begrenzenden Fronten über deren oszillierende Ausläufer definiert. Dies betrifft sowohl den Radius einzelner Solitonen als auch die typischen Abstände mehrerer Solitonen in Clustern und gebundenen Zuständen. In [Pes07] wird darüber hinaus das Auftreten einer weiteren diskreten Familie von Solitonen in numerischen Simulationen beschrieben¹⁸, bei denen im Gegensatz zu der in [PGWAL05] diskutierten Familie die Orientierung im „Innern“ der Solitonen nicht nur um den homogenen Zustand oszilliert, sondern auch das Vorzeichen wechselt und weitere Fronten bildet. Diese Strukturen wurden in der zitierten Arbeit nicht umfassend untersucht; die vorgestellten Ergebnisse zeigen jedoch bezüglich der Frontabstände und dem Verlauf der Orientierung entlang der Frontnormalen eine große Ähnlichkeit mit den in der vorliegenden Arbeit behandelten Labyrinthstrukturen.

Abbildung 5.16 c) zeigt zum Vergleich die Intensitätsverteilung des zu b) gehörigen transmittierten Lichtfeldes bei einer Stellung des Linearpolarisators von $\Theta = 0^\circ$. Hier wird zum einen deutlich, dass die im Experiment beobachteten Abstände der Fronten bzw. die augenscheinlich vorhandene Modulation der Intensität in Richtung der Frontnormalen nicht identisch mit der tatsächlichen Periodizitätslänge der Orientierungsverteilung sind. Vielmehr ist in der Intensitätsverteilung jeweils beim Nulldurchgang der Orientierung, also

¹⁸ Ein Exemplar dieser Familie wurde auch experimentell beobachtet.

nach jeweils $\Lambda_{lab}/2$, ein Maximum zu erkennen; zum anderen wird die große Ähnlichkeit von Ausschnitten dieser Intensitätsverteilung mit den mäandrierenden Mustern aus dem Experiment deutlich, die die Schlussfolgerung zulässt, dass es sich bei den experimentellen Strukturen tatsächlich um durch den Gaußschen Strahl begrenzte Ausschnitte aus solchen ausgedehnten Labyrinthmustern handelt.

Diese Interpretation wird unterstützt durch Simulationen im Gaußschen Strahl, bei denen Labyrinth aus Simulationen mit ebener Welle als Anfangsbedingungen gesetzt wurden. Die sich daraus ergebenden Strukturen gleichen qualitativ solchen, die bei Simulationen im Gaußschen Strahl aus Rauschen oder über eine Modulationsinstabilität einer geraden Front gefunden werden. Die quantifizierbaren Eigenschaften, insbesondere die Längenskalen, stimmen ebenfalls überein.

Einfluss der Eingangspumpleistung

Eine Änderung von Parametern – außer dem Spiegelabstand d – hat erwartungsgemäß auf die grundlegenden Längenskalen Λ_{hex} und Λ_{lab} keinen signifikanten Einfluss. Allerdings zeigt sich bei Erhöhung der Pumprate eine abnehmende Wahrscheinlichkeit, dass die Orientierung zwischen zwei Nulldurchgängen räumlich oszilliert. Abbildung 5.17 zeigt das typische Szenario bei Erhöhung der Pumprate über die Schwelle zur Modulationsinstabilität (c+d) und schließlich zur Labyrinthbildung (e) hinaus.

Bei Pumpraten, bei denen sich erstmals voll entwickelte Labyrinth ausbilden (e), werden zunächst überwiegend Frontabstände bei ganzzahligen Vielfachen von $\Lambda_{lab}/2$ (s. o.) beobachtet, die Orientierung führt dabei zwischen je zwei Fronten eine oder mehrere Oszil-

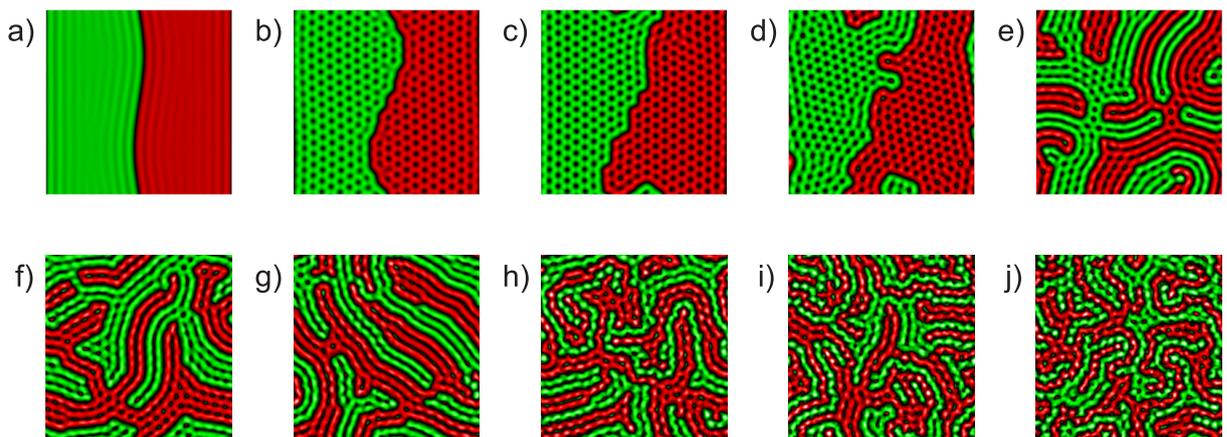


Abbildung 5.17: Frontabstände in Abhängigkeit von der Pumprate. a) $P_0 = 3 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, b) $P_0 = 4,5 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, c) $P_0 = 6 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, d) $P_0 = 7,5 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, e) $P_0 = 9 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, f) $P_0 = 10,5 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, g) $P_0 = 12 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, h) $P_0 = 13,5 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, i) $P_0 = 15 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, j) $P_0 = 16,5 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$. Grundgebiet: $8 \times 8 \text{ mm}^2 \hat{=} 256 \times 256$ Gitterpunkte. Sonstige Parameter wie in Abbildung 5.15, Rechnungen mit *pump-depletion*-Korrektur.

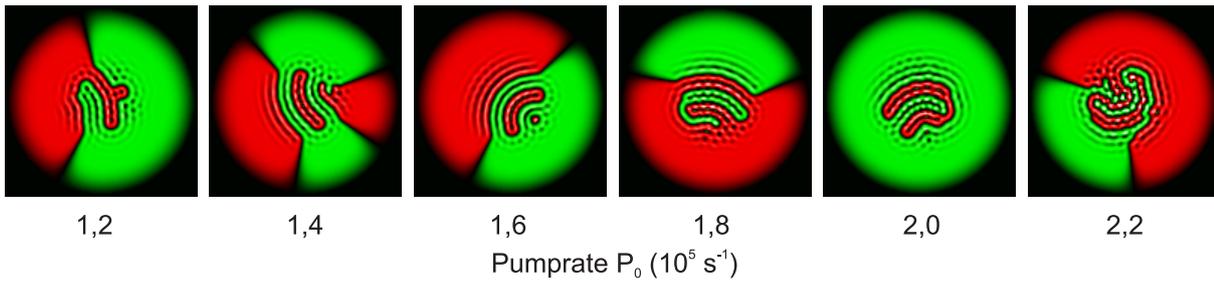


Abbildung 5.18: Frontabstände in Abhängigkeit von der Pumprate: Simulationen im Gaußschen Strahl. Grundgebiet: $8 \times 8 \text{ mm}^2 \hat{=} 128 \times 128$ Gitterpunkte. $d = 112 \text{ mm}$, $w_0 = 2,5 \text{ mm}$, sonstige Parameter wie in Abbildung 5.15. Rechnungen mit *pump-depletion*-Korrektur. Erläuterungen im Text.

lationen um den einen der stationären Zustände aus. Mit weiter steigender Pumpleistung wird die Anzahl der Zwischenoszillationen im Mittel immer geringer (f-i), und schließlich werden fast ausschließlich Labyrinth beobachtet, bei denen der Frontabstand bis auf wenige Ausnahmen etwa $\Lambda_{lab}/2$ beträgt (j).

Auf die typische Zeitentwicklung der Labyrinth hat die Pumprate ebenfalls einen deutlichen Einfluss. Bei geringen Pumpraten (e+f) bilden die Labyrinth nach kurzen Transienten die in Abschnitt 5.3.2 diskutierten *frozen states* aus. Mit steigender Pumprate werden diese Transienten immer länger, und für hohe Pumpraten (typischerweise in dem Regime, in dem keine Zwischenoszillationen mehr auftreten, z. B. i+j) bleiben die Strukturen über etliche Millisekunden simulierter Zeit in Bewegung und zeigen ein raumzeitlich irreguläres Verhalten, das auch in sehr langen Simulationen nicht zum Stillstand kommt. Es ist allerdings nicht auszuschließen, dass die anhaltende Dynamik bei hohen Pumpraten auf numerisches Rauschen aufgrund der räumlichen und zeitlichen Diskretisierung zurückzuführen ist, das bei steigender Pumprate und kleinskaligeren Strukturen zunehmend an Einfluss gewinnt.

Bei Simulationen im Gaußschen Strahl findet man qualitativ das gleiche Verhalten: Mit zunehmender Eingangspumprate werden die Strukturen tendenziell kleinskaliger, die Transienten werden länger bzw. die Dynamik kommt nicht mehr zum Stillstand (Abbildung 5.18). Hier ist jedoch zu berücksichtigen, dass die Pumprate radial abnimmt, so dass für die typischen Längenskalen jeweils nur der Bereich im Strahlzentrum maßgeblich ist.

Einfluss der Modellkorrektur

Der Einfluss der Pumprate auf die typischen Frontabstände in Labyrinth bei nicht-verschwindendem Magnetfeld ist nicht systematisch untersucht worden, weil Labyrinth ohne Zwischenoszillationen, wie sie in der obigen Abbildung und im Experiment zu sehen sind, nur in Simulationen mit *pump-depletion*-Korrektur beobachtet wurden. In Simula-

tionen ohne diese Korrektur zeigt sich qualitativ der gleiche Einfluss der Pumprate auf die sich typischerweise ergebenden Frontabstände. Allerdings treten in dem Modell ohne Korrektur keine Labyrinth ohne Zwischenoszillationen auf, d. h. der Frontabstand beträgt in diesen Simulationen jeweils mindestens $\approx \Lambda_{lab}$. Dies betrifft sowohl Simulationen mit periodischen Randbedingungen als auch solche mit Gaußschem Eingangsstrahl.

Bei mit dem Experiment vergleichbarem Aspektverhältnis bedeutet dies, dass in Simulationen mit Gaußschem Strahl nur relativ kleine Ausschnitte aus ausgedehnten Labyrinthmustern auftreten, die sich im Zusammenwirken mit den Randbedingungen üblicherweise als die in Abbildung 5.15 f) gezeigten S-förmigen Fronten darstellen. Dies ist bei der Interpretation der im folgenden Abschnitt gezeigten Magnetfeldkarten zu berücksichtigen.

5.3.4 Existenzbereich der Labyrinth

Bezüglich der Magnetfeldabhängigkeit der Auswahl verschiedener Mustertypen findet sich in numerischen Simulationen ein zur experimentellen Situation qualitativ identischer Befund: Labyrinth bzw. Finger werden bei symmetrischen Bedingungen, also bei rein transversalen oder rein longitudinalen Magnetfeldern beobachtet und treten für „schiefe“ Magnetfelder nur auf, falls $|\Omega_x| \gg |\Omega_z|$ oder $|\Omega_z| \gg |\Omega_x|$ (Abbildung 5.19, zugehörige Intensitätsverteilungen in Abbildung 5.21). Entlang der transversalen Magnetfeldachse nimmt der Radius des Bereichs im Gaußschen Strahl ab, in dem Labyrinth oder ausgedehnte Muster existieren.

Für transversale Magnetfelder, bei denen nur in einem Teil des Strahls die Schwelle der subkritischen Bifurkation überschritten wird (für den gezeigten Fall etwa $|\Omega_x| \gtrsim 125 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$), finden sich spiral- oder targetförmige Ausläufer in der Orientierungsverteilung, die (raum-)zeitlich oszillieren. Diese Ausläufer sind in den aus der momentanen Orientierung berechneten Intensitätsverteilungen (siehe Abbildung 5.21) der Simulationen im Vergleich zu den im Strahlzentrum auftretenden Intensitäten meist nur schwach ausgeprägt. Im Experiment wurden solche Hopf-instabilen Ausläufer beim Vorhandensein stationärer Muster im Strahlzentrum nicht eindeutig nachgewiesen, allerdings lässt der Vergleich zeitlich gemittelter Intensitätsverteilungen aus den Simulationen mit experimentellen Bildern den indirekten Schluss auf das Vorhandensein solcher Ausläufer auch im Experiment zu: Die spiralförmigen, zeitlich oszillierenden Ausläufer in der Orientierungsverteilung (Abbildung 5.20 a) erscheinen bei Betrachtung der über eine Oszillationsperiode gemittelten Intensitätsverteilung einer Simulation – so wie sie sich auch auf Videobildern im Experiment darstellen würde – als heller Ring um die stationäre Struktur im Zentrum (Abbildung 5.20 b). Experimentelle Bilder zeigen im Übergangsbereich zur Hopf-Instabilität ebenfalls häufig solche Ringstrukturen (Abbildung 5.20 c, vgl. auch Ab-

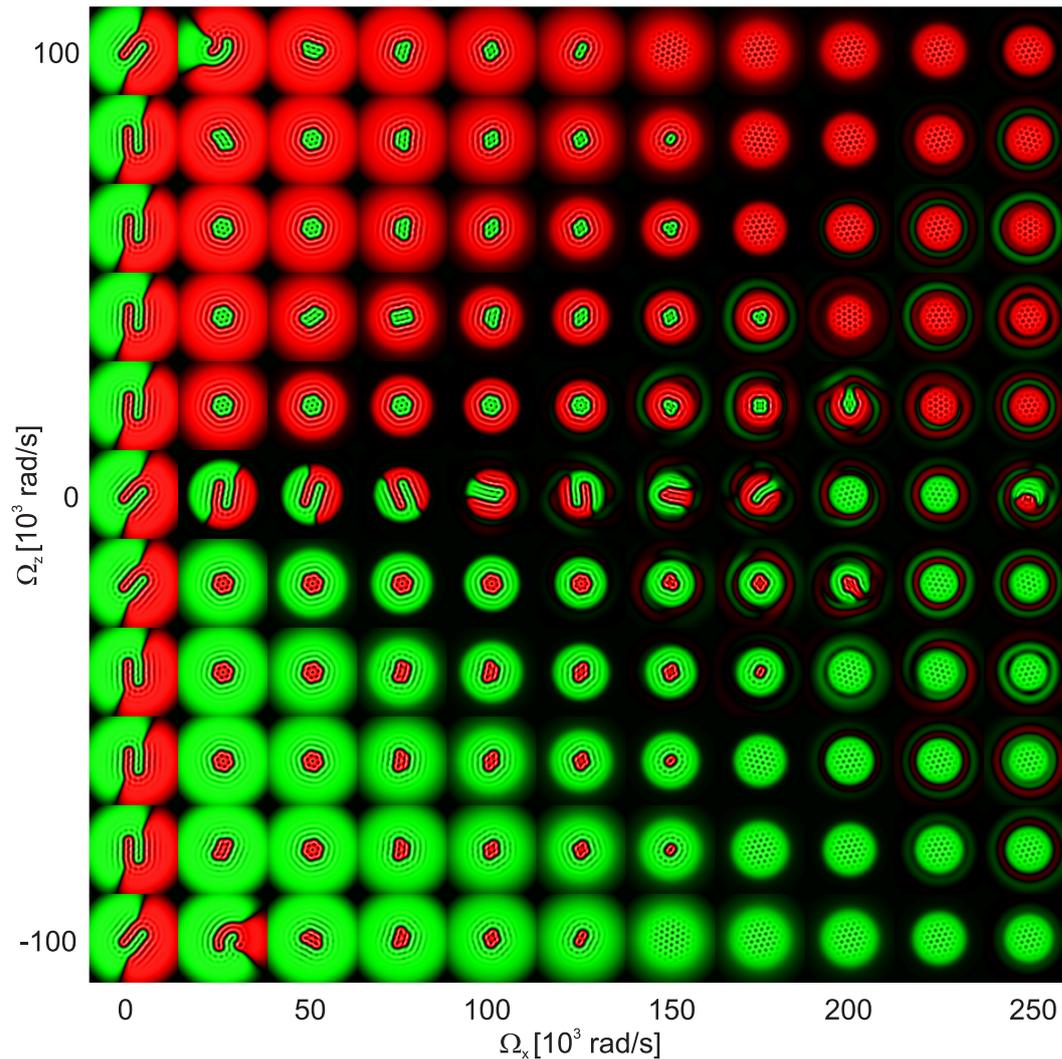


Abbildung 5.19: Magnetfeldkarte von Simulationen im Gaußschen Strahl: Orientierung (rot = negativ, grün = positiv). Parameter: $d = 112$ mm, $w_0 = 1,89$ mm, $\bar{\Delta} = 13$, $P_0 = 1,25 \cdot 10^5$ s $^{-1}$, $\gamma = 1,5$ s $^{-1}$, $\Gamma_2 = 9,72 \cdot 10^9$ s $^{-1}$, $D = 268$ mm 2 /s, $N = 7,21 \cdot 10^{19}$ m $^{-3}$, Grundgebiet 8×8 mm 2 .

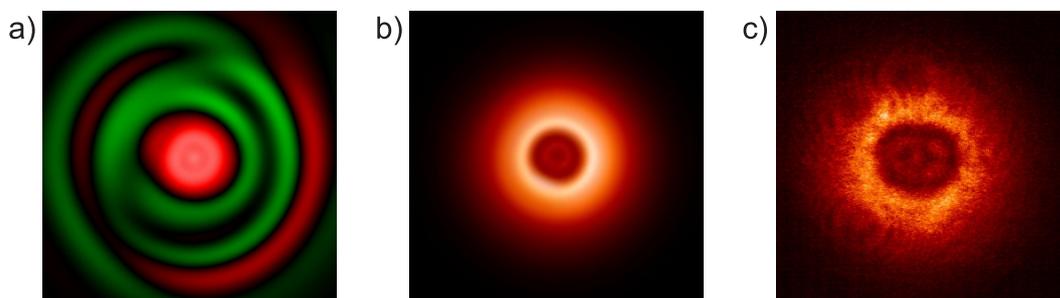


Abbildung 5.20: Erscheinungsbild zeitlich oszillierender Ausläufer einer stationären Struktur im Strahlzentrum: a) Orientierungsverteilung (Simulation), b) zeitlich gemittelte Intensitätsverteilung (Simulation), c) Experiment. Erläuterungen im Text.

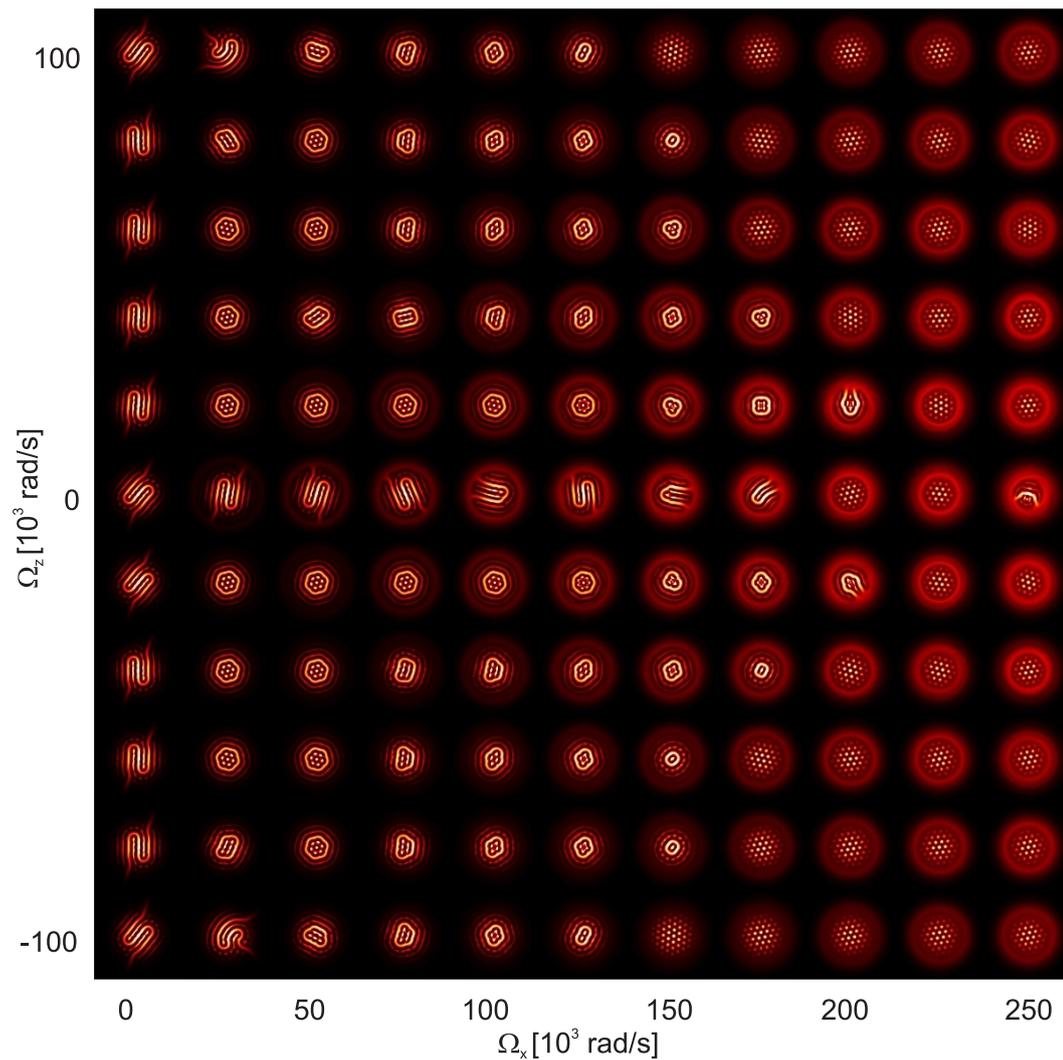


Abbildung 5.21: Magnetfeldkarte von Simulationen im Gaußschen Strahl: Intensität bei $\Theta = 0^\circ$. Parameter wie in Abbildung 5.19.

bildung 4.6), die damit als Indiz für die Existenz solcher zeitlich oszillierenden Ausläufer gedeutet werden können.

Auch die typischerweise bei Magnetfeldern, die sowohl transversale als auch longitudinale Komponenten ähnlicher Größenordnung enthalten, auftretenden Strukturen folgen der gleichen Parameterabhängigkeit wie im Experiment. Es werden lokalisierte Muster beobachtet, die zu größeren transversalen Feldern in ausgedehnte Turing-Strukturen übergehen. Im Gegensatz zu den Messungen lassen sich anhand der Simulationen jedoch weitergehende Aussagen über den jeweiligen Polarisationszustand treffen: Für positive longitudinale Felder beobachtet man typischerweise hexagonale Muster bei negativer Orientierung bzw. lokalisierte Muster mit positiver Orientierung auf negativem Untergrund. Für negative longitudinale Felder trifft dies mit umgekehrtem Vorzeichen ebenso zu. Auch hier ist bei Erhöhung des transversalen Feldes eine Abnahme der Ausdehnung der lokalisierten

Muster bzw. der Zahl der Konstituenten festzustellen, aus denen sich diese zusammensetzen. Der Grund dafür ist wiederum im Gaußschen Strahlprofil zu suchen: Der Bereich des Pumpstrahls, in dem annähernd gleichberechtigte stationäre Polarisationszustände existieren bzw. in dem für jeden dieser Zustände die Schwelle zur Modulationsinstabilität überschritten wird, hängt bei konstanter Pumprate im Zentrum des Gaußschen Strahls vom angelegten Magnetfeld ab. Da jedoch für den Fall eines schiefen Magnetfeldes mit $|\Omega_x| \approx |\Omega_z| \gg 0$ das Bifurkationsverhalten im Detail sehr kompliziert ist (vgl. Abbildung 5.1) und keine Labyrinthmuster oder Spiralen beobachtet werden, wird im Rahmen dieser Arbeit nicht näher auf diesen Punkt eingegangen.

Bei der in Abbildung 5.19 dargestellten Magnetfeldkarte wurden die Simulationen jeweils mit einer geraden, symmetrischen Front als Anfangsbedingung gestartet. Rechnungen, die von einer zufälligen Anfangsverteilung ausgehen, führen bezüglich der Parameterabhängigkeit auf ein vergleichbares Ergebnis, allerdings sind wegen der bei vielen Parametern vorherrschenden Multistabilität verschiedener Muster die jeweiligen Existenzbereiche nicht ohne weiteres voneinander abzugrenzen. Um diese Existenzbereiche systematisch zu untersuchen und miteinander vergleichen zu können, wurden die Simulationen bei gleichen Parametern für jeden vorkommenden Mustertyp als Anfangsbedingung wiederholt. Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind in Abbildung 5.22 für die hexagonalen Turing-Muster und die lokalisierten Muster schematisch dargestellt.

Hauptmerkmal aller hier gezeigten Existenzbereiche ist, dass für Parameter, in denen ein Polarisationszustand deutlich bevorzugt wird ($|\Omega_x| \approx |\Omega_z| \gg 0$), nur jeweils dieser Zustand als Hintergrund auftritt. Für positive longitudinale Felder finden sich so z. B.

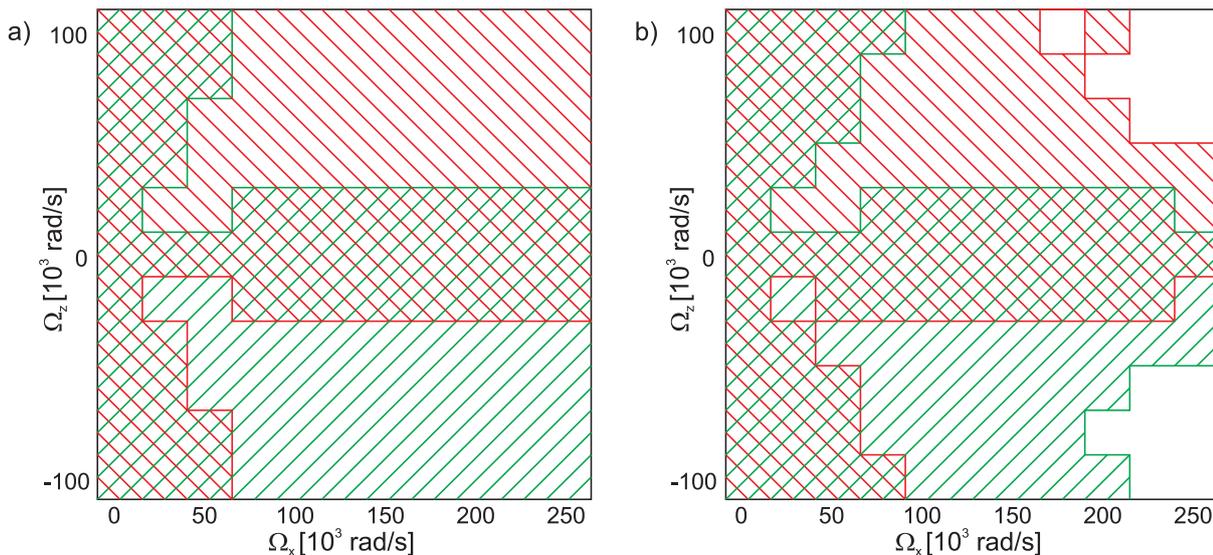


Abbildung 5.22: Existenzbereiche: a) hexagonale Turing-Muster, b) lokalisierte Strukturen / lokalisierte Muster. rot = Muster bzw. Hintergrund mit negativer Orientierung, grün = entsprechend für positive Orientierung. Erläuterungen im Text.

Hexagone auf dem negativen Polarisationszustand und lokalisierte positive Muster auf negativem Hintergrund. Entlang der Achsen rein transversaler bzw. longitudinaler Felder finden sich jeweils ausgedehnte und lokalisierte Muster auf beiden Polarisationszuständen. Dies ist auch noch in einem Bereich mit $|\Omega_x| \gg |\Omega_z|$ bzw. $|\Omega_x| \ll |\Omega_z|$ der Fall, in dem jeweils ein Polarisationszustand nur gering bevorzugt ist.

Der Bereich, in dem eine Multistabilität aller in Abbildung 5.22 untersuchten Strukturen zu beobachten ist, schließt den Existenzbereich der Labyrinth vollständig ein, es existiert kein Bereich, in dem ausschließlich Labyrinth zu finden wären.

5.3.5 Spiralen

In dem Parameterbereich, der sich in der linearen Stabilitätsanalyse als Hopf-instabil herausgestellt hat, finden sich auch in den numerischen Simulationen Spiralen und Targetmuster. Um deren Entstehung und grundlegende Eigenschaften zu verstehen, werden zunächst Simulationen mit homogener Eingangspumprate und periodischen Randbedingungen betrachtet (numerische Approximation einer ebenen Welle als Pumpverteilung). Für eine bessere Vergleichbarkeit mit den experimentellen Ergebnissen wird anschließend auf Simulationen im Gaußschen Strahl eingegangen.

Ebene Welle

In Simulationen mit periodischen Randbedingungen („ebene Welle“ als Pumpverteilung) werden bei sehr kleinen Pumpraten ($P_0 \ll P_{sc}$) zunächst räumlich homogene und zeitlich periodische Oszillationen der Orientierung beobachtet, die bei Erhöhung der Pumprate in ausgedehnte Spiralmuster übergehen. Bei Rechnungen, die von räumlich homogenen Anfangsbedingungen ausgehen, sind die Transienten beim Übergang zu diesen Spiralmustern jedoch sehr lang. Daher wurde zur Untersuchung der Parameterabhängigkeiten eine gerade „Front“¹⁹ als Startbedingung gewählt, die zwei Bereiche mit betragsmäßig gleicher Orientierung, jedoch umgekehrtem Vorzeichen derselben, miteinander verbindet.²⁰ Dieses Vorgehen verkürzt die Dauer der transienten Prozesse erheblich, liefert jedoch im Langzeitlimit qualitativ gleiche Ergebnisse. In Abbildung 5.23 ist das Szenario bei schrittweiser Erhöhung der Pumprate dargestellt, wobei bei jeder Parameteränderung das System zunächst wieder auf die zuvor geschilderten Anfangsbedingungen zurückgesetzt wurde.

Für die in Abbildung 5.23 gewählten Parameter oszillieren bei niedriger Pumprate die Bereiche, die zu Beginn der Rechnung auf positive bzw. negative Orientierung gesetzt

¹⁹ Diese Bezeichnung bezieht sich nur auf die Vorgabe der Anfangsbedingung – echte Fronten können in dem hier untersuchten Parameterbereich (unterhalb P_{sn}) nicht existieren, da die Schwelle zur Bistabilität noch nicht erreicht ist.

²⁰ vergleichbar mit der in Abbildung 5.23 b) gezeigten Orientierungsverteilung

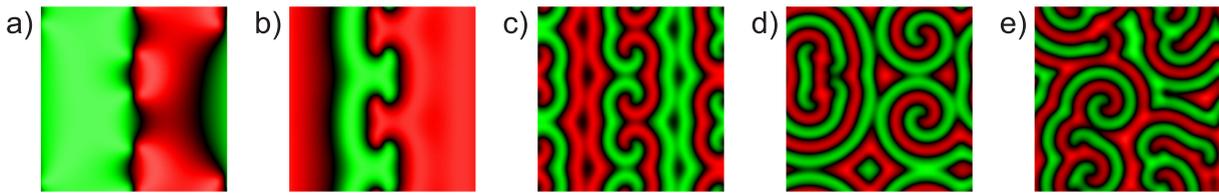


Abbildung 5.23: Spiralen aus numerischen Simulationen mit ebener Welle. a) $P_0 = 3 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, b) $P_0 = 5 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, c) $P_0 = 6,2 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, d) $P_0 = 6,6 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, e) $P_0 = 7 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$. Größe des Grundgebiets $8 \times 8 \text{ mm}^2$, $d = 11,2 \text{ cm}$, $\Omega_x = 3,5 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$, $\bar{\Delta} = 13$, $\gamma = 1,5 \text{ s}^{-1}$, $\Gamma_2 = 9,72 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$, $N = 7,21 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $D = 200 \text{ mm}^2/\text{s}$.

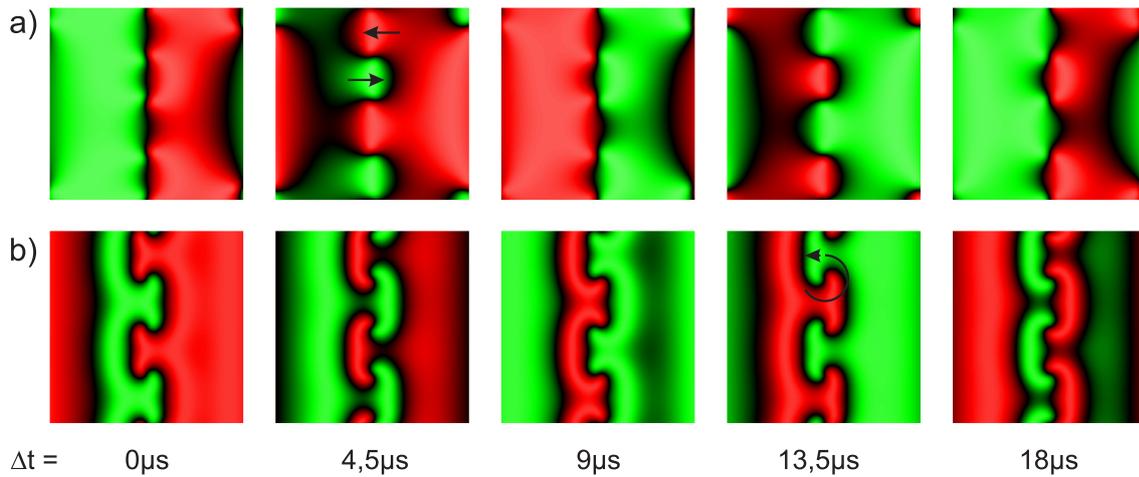


Abbildung 5.24: Zeitliche Entwicklung der Spiralen aus Abbildung 5.23. a) $P_0 = 3 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, b) $P_0 = 5 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$.

wurden, gegenphasig mit der Larmorfrequenz des transversalen Magnetfeldes. Entlang der ursprünglich vorgegebenen Front bilden sich Defekte, an denen die Orientierung nicht oszilliert (a); zwischen diesen Defekten oszilliert die Orientierung jedoch ebenfalls, wobei die Phase gegenüber den restlichen Bereichen des Grundgebiets um 90° verschoben ist. Die Zeitentwicklung dieses oszillatorischen Zustandes im eingeschwungenen Zustand ist in Abbildung 5.24 a) über etwa eine volle Periode gezeigt. Bei weiterer Erhöhung der Pumping-Rate sind die Defekte deutlicher als Spiralansätze mit einer lokalen Rotationssymmetrie zu erkennen (Abbildung 5.23 b), die in der zeitlichen Entwicklung auswärts zu rotieren scheinen (Abbildung 5.24 b). Die lokale Oszillationsfrequenz nimmt mit steigender Pumping-Rate erwartungsgemäß ab.

Bei Pumping-Raten oberhalb von $P_0 \approx 6 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ bildet sich eine klar dominierende Längenskala in der räumlichen Struktur aus (Abbildung 5.23 c). Die räumliche Wellenzahl liegt für den gewählten Spiegelabstand von $d = 11,2 \text{ cm}$ bei etwa $k_{\text{spiral}} \approx 5 \text{ rad/mm}$ und ist damit nicht direkt einer Talbot-Längenskala (vgl. Abschnitt 2.4) zuzuordnen. Sie liegt jedoch etwa mittig in dem Wellenzahlband, das nach der linearen Stabilitätsanalyse bei diesen Parametern Hopf-instabil ist (Abbildung 5.25).

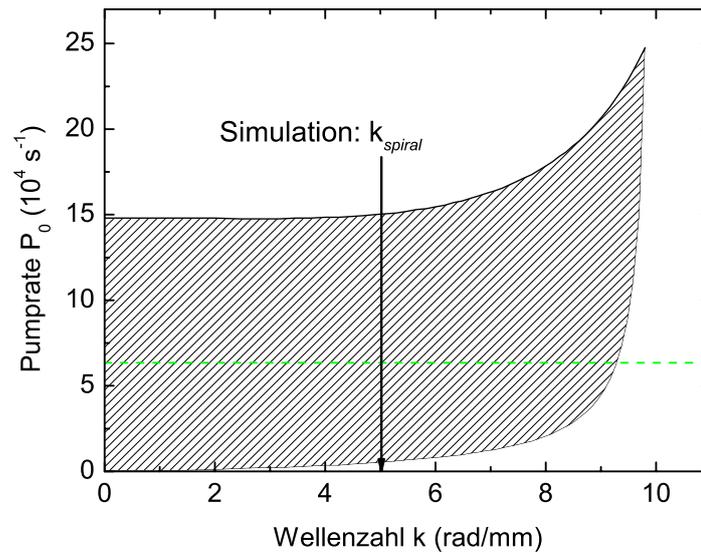


Abbildung 5.25: Lineare Stabilitätsanalyse zu den Spiralen aus Abbildung 5.23. Grau schraffiert: Hopf-Instabilität; grün gestrichelt: Schwelle zur Bistabilität P_{sn} .

Die charakteristische Längenskala der Spiralen ändert sich bei weiterer Erhöhung der Pumprate nicht wesentlich, allerdings nimmt auf einem Grundgebiet gleichbleibender Größe die Zahl der Spiralzentren ab und die Ausdehnung der ein einzelnes Zentrum umgebenden spiralförmigen Bereichs wächst. Man erkennt in Abbildung 5.23 d) noch einen deutlichen Einfluss der periodischen Randbedingungen auf die Symmetrie der Anordnung der einzelnen Spiralen auf dem Grundgebiet. Diese Symmetrie wird schließlich bei einer Pumprate von $P_0 \approx 7 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ (Abbildung 5.23 e) gebrochen und es werden Spiralen unterschiedlicher Ausdehnung und mit verschiedenen Abständen gleichzeitig beobachtet. Auch treten die Spiralzentren nicht mehr wie bei geringerer Pumprate notwendigerweise paarweise mit gegenläufiger Helizität auf, sondern es ergibt sich eine komplexe Struktur, die keine Fernordnung (bis auf die Periodizität des gesamten Grundgebiets) mehr aufweist. Die einzelnen Spiralzentren sind parameterunabhängig stets einarmig, höhere Armzahlen oder Targetmuster (Armzahl = 0) wurden nicht gefunden.

Solche ausgedehnten Spiralmuster werden typischerweise in strukturbildenden Reaktions-Diffusions-Systemen beobachtet, und wurden auch für optischen Systeme theoretisch vorhergesagt [LBS00, LBRTT05], wobei für diese Art räumlich ausgedehnter Spiralen die Notwendigkeit formuliert wurde, dass das Band der instabilen Wellenzahlen bis $k = 0$ reicht. Für Hopf-Instabilitäten, bei denen nur ein Band endlicher Wellenzahlen mit $k \neq 0$ instabil wird, entstehen in Abwesenheit weiterer äußerer Einflüsse (wie z. B. einen von außen eingprägten Phasengradienten [HLA06, Hun06]) driftende Streifenmuster [LBS00] oder sogenannte „winking hexagons“ [LAL97, HLA06].

Für noch höhere Pumpraten werden keine oszillierenden Muster mehr beobachtet, sondern die zu Beginn der Rechnung vorgegebene Front bleibt stabil. Dies ist darauf zurückzuführen, dass in diesem Parameterbereich das System bereits bistabil ist ($P_{sn} = 6,35 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, vgl. Abbildung 5.25) und die Anfangsbedingungen eine ähnliche Amplitude besitzen wie die Lösungen w_s . Aber auch für Simulationen aus Rauschen heraus werden für Pumpraten etwas oberhalb der Schwelle zur Bistabilität keine Spiralen mehr beobachtet, sondern die Orientierung nimmt entweder auf dem gesamten Grundgebiet den Zustand $\pm w_s$ an, oder es bilden sich spontan Fronten zwischen Domänen unterschiedlicher Orientierung. Bei welcher Pumprate genau der Übergang von Spiralen zu stabilen Fronten stattfindet, hängt geringfügig von den Anfangsbedingungen ab, der Übergang vollzieht sich jedoch stets für Pumpraten mit $P_{sn} < P_0 \ll P_{sc}$, also leicht oberhalb der Schwelle zur Bistabilität.

Dass bei einer Koexistenz der Hopf-Instabilität mit zwei stationären Zuständen bevorzugt letztere angenommen werden, kann mit einem „trapping“ der Oszillation erklärt werden. Betrachtet man das System lokal, also ohne Berücksichtigung der transversalen Ausdehnung, liegt die Amplitude der Hopf-Oszillation in der selben Größenordnung wie die Orientierung der homogenen, stationären Lösung, d. h. die Trajektorie des Systems im Phasenraum schneidet den Einzugsbereich der stationären Fixpunkte. Ein solches Verhalten wird auch in ähnlichen Systemen mit einer Koexistenz von zeitlich oszillierenden und stationären Lösungen beobachtet, z. B. in [MDLM86].

Gaußscher Strahl

In Abbildung 5.26 sind einige Beispiele für Spiralmuster aus Simulationen mit gaußschem Eingangsprofil bei unterschiedlichen Parametern gezeigt. In diesem Fall wurde nur die Pumprate variiert (von a) nach d) ansteigend), eine Änderung anderer Parameter führt aber nicht zu qualitativ anderen Strukturen als den hier exemplarisch gezeigten, und auch die Abfolge des Szenarios in Bezug auf die Pumprate ist immer identisch. Es ist jeweils ein Bildausschnitt von $8 \times 8 \text{ mm}^2$ dargestellt, der Strahlradius beträgt 2 mm. Die obere Reihe (a–d) zeigt die Orientierungsverteilung, die untere Reihe (e–h) die daraus resultierende Intensitätsverteilung, die sich bei einer Stellung des Linearpolarisators von $\Theta = 60^\circ$ ergeben würde.

Man erkennt in Abbildung 5.26 a) einen geschlossenen Ring im Zentrum der Orientierungsverteilung, der von spiralförmigen Ausläufern umgeben ist. Berücksichtigt man, dass im Außenbereich nicht nur die Modulationsamplitude der Orientierung abnimmt, sondern auch die Intensität des einfallenden Strahls geringer ist, so zeigt sich in der berechneten Intensitätsverteilung eine große Ähnlichkeit zu den im Experiment beobachteten Target-

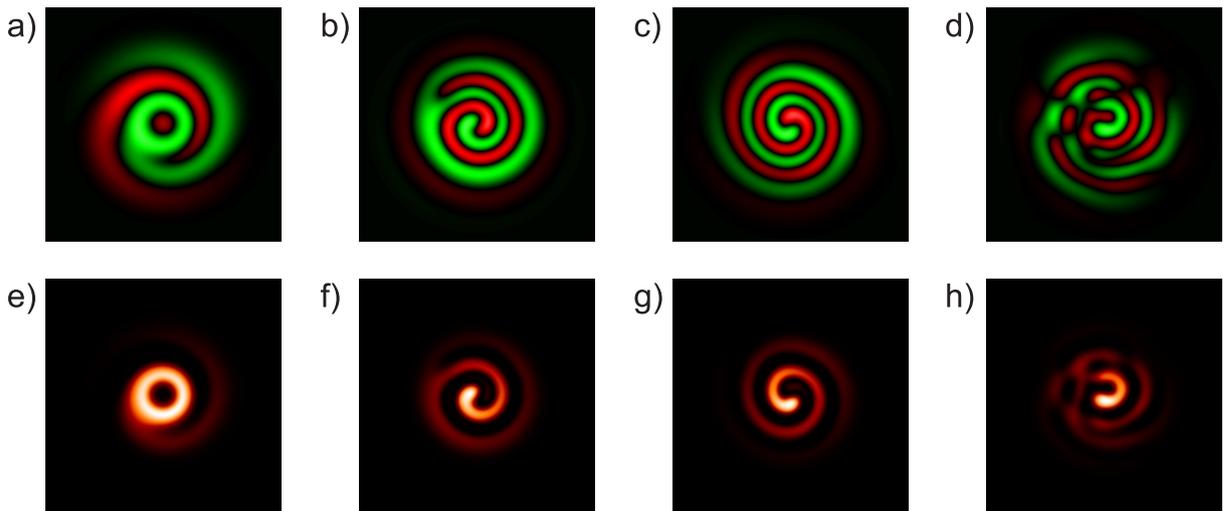


Abbildung 5.26: Beispiele von Spiralmustern aus numerischen Simulationen im Gaußschen Strahl. Obere Reihe: Orientierungsverteilung (grün = positiv, rot = negativ), untere Reihe: transmittierte Intensität, Linearpolarisator bei $\Theta = 60^\circ$. Transversales Magnetfeld: $\Omega_x = 3,5 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$, Pumpraten: a)+e) $P_0 = 1,8 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, b)+f) $P_0 = 4,6 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, c)+g) $P_0 = 4,6 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, d)+h) $P_0 = 7,4 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$. Sonstige Parameter: Strahlradius $w_0 = 2 \text{ mm}$, $d = 112 \text{ mm}$, $\bar{\Delta} = 13$, $\gamma = 1,5 \text{ s}^{-1}$, $\Gamma_2 = 9,72 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$, $N = 7,21 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $D = 200 \text{ mm}^2/\text{s}$.

mustern, da die spiralförmigen Ausläufer in der transmittierten Intensität kaum erkennbar sind.

Bei niedrigeren Magnetfeldern finden sich in den Simulationen mit gaußscher Pumpverteilung auch Strukturen, die den experimentell beobachteten Targetmustern noch ähnlicher sind (Abbildung 5.27). Dort ist im Zentrum die Intensitätsverteilung klar als ringförmig zu erkennen, allerdings befinden sich im äußeren Bereich des Strahls in der Orientierungsverteilung erkennbare Verzweigungen, die abermals spiralförmige Ausläufer erahnen lassen. Da Targetmuster in den Simulationen mit ebener Welle nicht auftreten und auch im Gaußschen Strahl nur in Verbindung mit Verzweigungen zu Spiral-Ausläufern beobachtet

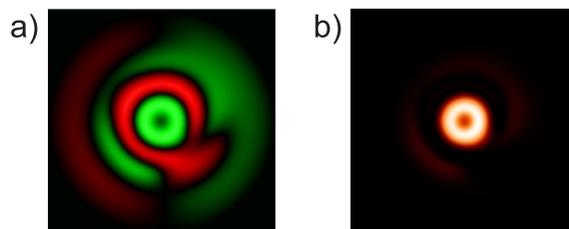


Abbildung 5.27: „Targetmuster“ aus numerischen Simulationen im Gaußschen Strahl. a) Orientierungsverteilung (grün = positiv, rot = negativ), b) transmittierte Intensität, Linearpolarisator bei $\Theta = 60^\circ$. Transversales Magnetfeld: $\Omega_x = 1,5 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$, Pumprate: $P_0 = 1,9 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$. Sonstige Parameter wie in Abbildung 5.26.

werden, ist davon auszugehen, dass die im Experiment gefundenen Targetmuster durch die Inhomogenität des Strahlprofils in Verbindung mit einer räumlichen Synchronisation, auf die weiter unten näher eingegangen wird, hervorgerufen werden.

Die Beispiele 5.26 b) und c) sind bei identischen Parametern aufgenommen und zeigen unterschiedliche Chiralität im Zentrum, wobei sich die Spiralstruktur in c) bis nach außen fortsetzt, während sich in b) außen ein geschlossener Ring – vergleichbar mit der Situation in a) – anschließt. Der Übergang von der Spirale zum Ring vollzieht sich in a) und b) jeweils durch eine Verzweigung, in deren Umgebung die Modulationsamplitude der Orientierung im Vergleich zur restlichen Struktur abnimmt. Die Häufigkeit solcher auch in [Hun06] beschriebenen *Defektstrukturen* nimmt mit ansteigender Pumprate zu, so dass sich bei höheren Pumpraten fast ausschließlich solche Strukturen finden wie in Abbildung 5.26 gezeigt. Dort ist im Einzelbild eine spiralförmige Strukturierung – wenn überhaupt – nur noch lokal erkennbar, und die durchschnittliche Modulationsamplitude ist wegen der großen Anzahl von Verzweigungen geringer als in ungestörten Spiralen. Unter Einbeziehung der zeitlichen Entwicklung (s. u.) sind diese Strukturen aber eindeutig als Spiralen mit Defekten zu identifizieren und damit klar von den in Abschnitten 4.2 und 5.3.3 beschriebenen Labyrinthmustern abzugrenzen.

Der räumliche Abstand benachbarter Spiralarme nimmt mit steigender Pumprate ab, allerdings wurden Spiralen mit mehreren Armen, wie sie in anderen Systemen (z. B. [BBAC91, Res05, HLA06]) beobachtet wurden, nicht gefunden. Einschränkend ist aber anzumerken, dass eine genaue Zuordnung der Armzahl bei höheren Pumpraten wegen der zahlreich auftretenden Defekte nicht möglich ist. Bei weiterer Erhöhung der Pumprate sind im Zentrum des Strahls bereits lokal stationäre Zustände anzutreffen, die von (meist verzweigten) Spiralstrukturen umgeben sind.

Alle beobachteten Spiralstrukturen zeigen wie im Experiment (vgl. Abschnitt 4.3.2) eine nach innen gerichtete radiale Bewegung, während in Simulationen mit ebener Welle die radiale Bewegung stets auswärts gerichtet ist (s. o.). Dieses Verhalten wurde für ein ähnliches System in [Hun06] ebenfalls beschrieben und ausgiebig untersucht. Als Ursache für die nach innen gerichtete Bewegung wurde dort der radiale Phasengradient durch die Selbstfokussierung des Laserstrahls im nichtlinearen Medium identifiziert [HLA06].

Zur Untersuchung des Einflusses des inhomogenen Strahlprofils auf die raumzeitliche Entwicklung wurde in Simulationen zunächst eine symmetrische Orientierungsverteilung mit kleiner Amplitude²¹ vorgegeben, und die Relaxation auf einen raumzeitlich periodisch oszillierenden Zustand abgewartet. Die Vorgabe der Orientierungsverteilung dient wiederum lediglich zu einer Verkürzung des transienten Verhaltens gegenüber Simulationen mit

²¹ „Front“, vergleichbar mit der Anfangsbedingung bei Simulationen mit ebener Welle im vorigen Abschnitt.

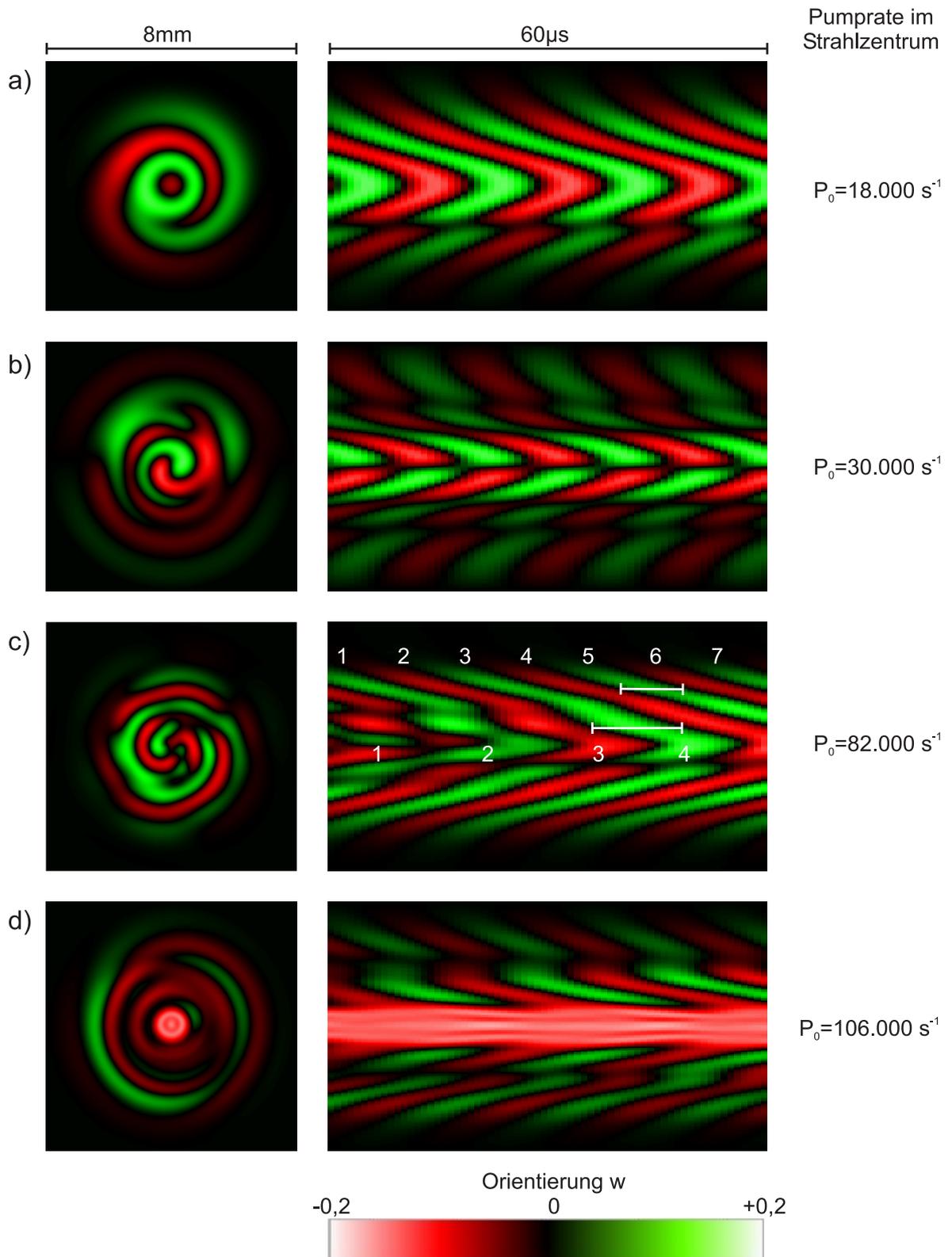


Abbildung 5.28: Raumzeitliche Entwicklung von Spiralen und Targetmustern in numerischen Simulationen bei Variation der Eingangspumprate. Zeitschritt pro Bild: $0,91 \mu\text{s}$. $\Omega_x = 3,5 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$, $\Omega_z = 0 \text{ rad/s}$. Sonstige Parameter wie in Abbildung 5.26. Erläuterungen im Text.

einer Zufallsverteilung der Orientierung, bei denen sich jedoch nach längeren Transienten gleichartige Zustände einstellen. Nach der Relaxation wurden Bilder der zeitlichen Entwicklung mit hoher zeitlicher Auflösung gespeichert und analog zum Vorgehen bei der Analyse der experimentellen Bilder in Abschnitt 4.3.2 ausgewertet, indem vertikale Schnitte durch das Strahlzentrum gegen die Zeit aufgetragen wurden (Abbildung 5.28, mittlere Spalte). In der linken Spalte sind jeweils die zweidimensionalen Verteilungen am Beginn der dargestellten zeitlichen Entwicklung gezeigt.

Die Beispiele verdeutlichen, dass die lokale Oszillationsfrequenz über das gaußförmige Strahlprofil zwar von der lokalen Pumprate abhängen (vgl. Markierungen in Abbildung 5.28 c), die räumliche Kopplung durch Diffusion und Beugung aber offenbar für eine Synchronisation der Oszillation innerhalb einer gewissen Umgebung sorgt. Dadurch oszillieren größere Strahlbereiche mit derselben Frequenz und Phase, solange die generischen lokalen Frequenzen in dieser Umgebung nicht zu stark variieren. Bei größeren Abweichungen treten die schon genannten Defekte auf, die auch in der raumzeitlichen Entwicklung klar zu erkennen sind.

Die jeweils höchste Frequenz tritt am äußeren Rand des Strahls auf und entspricht ungefähr der Larmorfrequenz des angelegten Magnetfeldes (hier $3,5 \cdot 10^5$ rad/s). Zum Strahlzentrum hin wird die Oszillationsfrequenz geringer, wie es wegen der radial ansteigenden Pumprate auch aus der linearen Stabilitätsanalyse zu erwarten ist.

In Abbildung 5.28 d ist die Pumprate im Strahlzentrum bereits so hoch, dass ein fast homogener, kreisförmiger Bereich mit positiver Orientierung nicht mehr oszilliert, sondern nur im Übergangsbereich zu den spiralförmigen Ausläufern von der Oszillation beeinflusst wird. Dieses Verhalten tritt dann auf, wenn ein hinreichend großer Bereich im Zentrum des Strahls die kritische Pumprate für die Existenz stabiler Polarisationszustände mit $w \neq 0$ überschreitet ($P_0 > P_{sn}$).

Kapitel 6

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde ein nichtlineares, optisches System mit einer symmetriebrechenden Polarisationsinstabilität im Hinblick auf die Entstehung transversaler Labyrinthstrukturen untersucht und der experimentelle Nachweis erbracht, dass solche Strukturen auch in der Einspiegelanordnung mit Natriumdampf beobachtet werden können. Die Eigenschaften dieser Strukturen und grundlegende Mechanismen ihrer Entstehung wurden anhand von Experimenten, numerischen Simulationen und einer semi-analytischen Behandlung der Modellgleichungen charakterisiert.

Das verwendete System, die Einspiegelanordnung mit Natriumdampf als nichtlinearem Medium und $\lambda/8$ -Plättchen in der Rückkopplung, zeigt bei Erhöhung der Eingangsleistung – dem wesentlichen Kontrollparameter des Experiments – eine Pitchfork-Bifurkation zu zwei gleichberechtigten Polarisationszuständen, die sich jeweils von der Eingangspolarisation unterscheiden. Die Einführung eines statischen transversalen Magnetfeldes, welches das nichtlineare Medium durchsetzt, erhöht die Schwelle zu dieser Polarisationsinstabilität signifikant, und es wird in Anwesenheit des transversalen Magnetfeldes ein subkritisches Bifurkationsverhalten beobachtet. Im transversal ausgedehnten System existiert oberhalb der Schwelle zur Bistabilität eine sekundäre Bifurkation zu hexagonal strukturierten Zuständen, bei denen die Polarisation räumlich periodisch um einen der Äste der Pitchfork-Bifurkation moduliert ist und deren räumliche Längenskala über den Talbot-Effekt durch den Abstand des Rückkoppelspiegels vom nichtlinearen Medium festgelegt ist [GWKL⁺00].

Oberhalb der Schwelle zur Bistabilität entstehen Fronten, die die beiden stabilen Polarisationszustände bzw. zwei hexagonal strukturierte Bereiche des Strahls miteinander verbinden. In numerischen Simulationen konnte gezeigt werden, dass diese Fronten bei relativ geringen Pumpleistungen ein „elastisches“ Verhalten zeigen, sich kreisförmige Domänen also zusammenziehen und transversal modulierte Fronten zunehmend begradigt werden. Im Einklang mit früheren Untersuchungen am gleichen System [Pes07] kann dieser Mecha-

nismus mit einer krümmungsgetriebenen Frontdynamik erklärt werden, bei der die Normalengeschwindigkeit der Front umgekehrt proportional zum lokalen Krümmungsradius der Front ist.

Bei Erhöhung der Pumpleistung wird diese Dynamik zunächst langsamer, und oberhalb der Schwelle zur hexagonalen Musterbildung kehrt sich die Richtung der Frontbewegung schließlich um: runde Domänen expandieren, und kleine transversale Modulationen gerader Fronten wachsen an. Durch die Wechselwirkung dieser Frontdynamik mit den Randbedingungen oder weiteren, in der Nähe befindlichen Fronten entstehen schließlich Labyrinthmuster, die zwar eine ausgeprägte Nahordnung mit einer charakteristischen Längenskala, jedoch keine Fernordnung und keine räumliche Symmetrie besitzen. Es konnte gezeigt werden, dass es sich bei den im Experiment beobachteten Strukturen um durch den Gaußschen Strahl begrenzte Ausschnitte aus ausgedehnten Labyrinthstrukturen handelt. Der Mechanismus der Entstehung dieser Strukturen lässt sich auch als „antielastisches“ Verhalten der Fronten deuten, welches auch in einer Reihe von Arbeiten zu anderen physikalischen Systemen, in denen Labyrinth beobachtet wurden, als Erklärung für deren Ausbildung aus ursprünglich geraden Fronten herangezogen wird [RZS83, BW89, LGJ92, SW92c, ATV99].

Der Übergang von kontrahierenden zu expandierenden Fronten bei Erhöhung der Eingangspumprate vollzieht sich in Abwesenheit eines transversalen Magnetfeldes weitgehend „stetig“, jedoch wird die Dynamik der Fronten oberhalb der Schwelle zur Musterbildung durch eine Wechselwirkung oszillatorischer Frontausläufer mit dem hexagonal strukturierten Untergrund stark beeinflusst, so dass in einem breiten Parameterbereich eine anfängliche Expansion der Front zum Stillstand kommt („locking“), bevor sich Labyrinthmuster ausbilden können. Wird jedoch ein transversales Magnetfeld angelegt, so kommt es bei Erhöhung der Pumprate über die Schwelle zur hexagonalen Musterbildung zu einer sprunghaften Änderung der Frontdynamik von einer Kontraktion hin zu einer Expansion. Die Schwellen zur Bistabilität und zur Musterbildung verschieben sich mit Erhöhung des transversalen Feldes zu höheren Pumpraten, die Breite des „locking“-Bereichs nimmt jedoch ab. Insgesamt ergibt sich so eine minimale Schwelle für die Entstehung von Labyrinth, die bei mittleren transversalen Magnetfeldern liegt.

Die voll ausgebildeten Labyrinth stellen sich nach Abklingen einer transienten Dynamik als „frozen states“ mit nur noch geringfügigen Änderungen auf vergleichsweise langen Zeitskalen dar. Dies ist wiederum auf die Wechselwirkung benachbarter Fronten über ihre oszillatorischen Ausläufer zurückzuführen, die die anfängliche Dynamik bei einer Ausbreitung der Struktur über das gesamte Grundgebiet schließlich stoppt. Die so entstandenen Labyrinth können eine Vielzahl sehr verschiedener Gestalten annehmen, zwischen denen eine langsame, rauschinduzierte Dynamik stattfindet. Die verschiedenen

Labyrinthzustände verhalten sich dabei in einer groben Verallgemeinerung ähnlich wie viele, dicht beieinanderliegende metastabile Zustände in einem Potentialsystem.

Bei Betrachtung der charakteristischen Längenskala der Labyrinth stellt sich heraus, dass diese zwar ebenfalls über den Spiegelabstand festgelegt wird, jedoch nicht identisch mit der für die hexagonalen Strukturen typischen Längenskala ist. Vielmehr zeigt ein Vergleich mit der Analyse der linearisierten Bewegungsgleichungen, dass die charakteristische transversale Wellenzahl der Labyrinth mit einer Modulationsinstabilität des *instabilen* Astes der Pitchfork-Bifurkation verknüpft ist. Zusammen mit der Wechselwirkung der oszillatorischen Frontausläufer, deren räumliche Periodizität der der Hexagone gleichkommt, ergeben sich insgesamt typische Frontabstände, die der halben fundamentalen Periodizitätslänge der Labyrinth plus einem ganzzahligen Vielfachen der hexagonalen Längenskala entsprechen. Welche Frontabstände im Rahmen dieser Bedingung konkret entstehen, hängt vor allem von der Eingangspumprate ab: Knapp oberhalb der Schwelle zur Bildung der Labyrinth beobachtet man zwischen je zwei Fronten typischerweise einige räumliche Oszillationen um den homogenen Zustand; bei steigender Pumprate nimmt die mittlere Zahl dieser Zwischenoszillationen jedoch ab und die Labyrinthstrukturen werden kleinskaliger.

Eine Untersuchung des Existenzbereichs der Labyrinth im Hinblick auf die Magnetfeldabhängigkeit hat ergeben, dass diese Strukturen nur für rein transversale oder rein longitudinale Magnetfelder entstehen, wobei die Schwelle zur Labyrinthbildung für transversale Felder in der Größenordnung einiger μT am geringsten ist. Für Magnetfelder, die sowohl longitudinale als auch transversale Komponenten enthalten, ist die Pitchfork-Bifurkation gestört und ein Polarisationszustand wird bevorzugt. Schon bei einer geringen Störung dieser Art werden keine Labyrinth mehr beobachtet.

Unterhalb der Schwelle zur Bistabilität und in Anwesenheit eines transversalen Magnetfeldes konnten auch (raum-)zeitlich oszillierende Zustände experimentell belegt und anhand theoretischer Überlegungen als Folge einer Hopf-Instabilität identifiziert werden. Ist ein hinreichend großer Bereich des Gaußschen Strahls Hopf-instabil, so beobachtet man einarmige Spiralen und Targetmuster, die eine zum Strahlzentrum gerichtete radiale Bewegung aufweisen. Dieser Befund ist insofern bemerkenswert, als Labyrinth und Spiralen in anderen Systemen durchaus häufiger nebeneinander vorkommen. Die Existenz der Spiralen wird jedoch in diesen Systemen nicht – wie hier gezeigt – auf eine Hopf-Instabilität, sondern auf einen Übergang von stationären Ising-Fronten zu Blochfronten mit einer intrinsischen Bewegung zurückgeführt [LMOS93, HM94, LS95, PCT97, Rot98, BHMT00, MHML06].

Die radial nach innen gerichtete Bewegung ist – ähnlich wie in [HLA06, Hun06] – auf einen Einfluss des Gaußschen Strahlprofils zurückzuführen, welches die Richtung der

radialen Bewegung über einen Phasengradienten vorgibt. In Simulationen mit homogenem Eingangslichtfeld entstehen räumlich ausgedehnte Spiralmuster, wie sie aus Reaktions-Diffusionssystemen bekannt sind, und bei denen die radiale Bewegung der Spiralarms vom Organisationszentrum nach außen gerichtet ist. Die Existenz solcher Muster lässt sich damit erklären, dass das Band der Hopf-instabilen Wellenzahlen bis zur Wellenzahl $k = 0$ reicht.

Die zeitliche Oszillationsfrequenz der Hopf-Instabilität hängt neben anderen Parametern von der Pumprate ab, so dass im Gaußschen Strahl die intrinsische, lokale Frequenz variiert. Dies führt bei den Spiralen zum Auftreten von Defekten, die zwischen Strahlbereichen mit unterschiedlicher Oszillationsfrequenz vermitteln. Innerhalb dieser Bereiche findet eine räumliche Synchronisation der Oszillation statt, die auch das Auftreten der Targetmuster im Gaußschen Strahl erklärt, welche in Simulationen mit ebener Welle nicht auftreten.

Spiralartige Strukturen entstehen auch als Ausläufer um ansonsten stationäre Strukturen wie Labyrinth, Fronten, hexagonal strukturierte oder homogene Bereiche im Strahlzentrum. Dies ist dann der Fall, wenn die über den Strahlradius variierende Pumprate sowohl (am Rand des Strahls) den Hopf-instabilen Bereich in einem hinreichend großen Strahlbereich umfasst, als auch (im Strahlzentrum) die Schwelle zur Bistabilität oder weiterer Instabilitäten überschreitet.

Die Beobachtung von Labyrinthmustern in der Einspiegelanordnung eröffnet den Weg zu weiteren Untersuchungen der Mechanismen, die zur Entstehung dieser Strukturen führen. Zwar ist das experimentelle System in seiner hier dargestellten Form wegen des ungünstigen Aspektverhältnisses hierfür nur bedingt geeignet, jedoch scheint die Einspiegelanordnung mit einer symmetriebrechenden Polarisationsinstabilität ein vielversprechender Kandidat für weitere Experimente zu sein.

Die Einspiegelanordnung mit Natriumdampf hat sich mit dem experimentellen Nachweis von Labyrinth zum wiederholten Male als äußerst flexibles Modellsystem der Strukturbildung in der nichtlinearen Optik herausgestellt. Mit Turing-Mustern wie Hexagonen, Streifen und Quadraten [AL94, Ack96, LA98, LAA⁺99], Quasimustern und Übergittern [Aum99, GW02], dissipativen Solitonen [Sch01, Pes07], sowie Spiralen [Hun06] und nun auch Labyrinth wurden in diesem System eine Vielzahl typischer zweidimensionaler, selbstorganisierter Strukturen gefunden, die in der theoretischen Literatur diskutiert werden und die als universelle Phänomene gelten. All diese Strukturen lassen sich mit einem einheitlichen, mikroskopischen Modell beschreiben, wie numerische Simulationen belegen, die in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen stehen. Da dieses konzeptionell einfache Modell grundsätzlich auch einer analytischen Behandlung offensteht, wären weiterführende theoretische Arbeiten auf diesem Gebiet sehr zu begrüßen.

Anhang A

Details zur linearen Stabilitätsanalyse

Wie in Abschnitt 5.2 bereits erläutert, führt die allgemeine Herleitung der Berechnung der komplexen Wachstumsexponenten η auf ein Eigenwertproblem zu einer generalisierten Jacobimatrix:

$$\eta \delta \vec{m} = \tilde{\mathcal{J}}(k) \delta \vec{m}. \quad (\text{A.1})$$

Für das in den Gleichungen (5.3) modellierte System ist dabei die erweiterte Jacobimatrix unter den Randbedingungen $\Omega_z = 0$, $\Phi = 0$ gegeben durch

$$\tilde{\mathcal{J}}(k) = \begin{pmatrix} -Dk^2 - P_0 - \gamma - \Xi & e^{-2L\alpha_0} P_0 R \bar{\Delta} \sin(2Lw_h \alpha_0 \bar{\Delta}) & j_{31} \\ -e^{-2L\alpha_0} P_0 R \bar{\Delta} \sin(2Lw_h \alpha_0 \bar{\Delta}) & -Dk^2 - P_0 - \gamma - \Xi & j_{32} \\ 0 & \Omega_x & j_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

mit

$$\begin{aligned} \Xi &= e^{-2L\alpha_0} P_0 R \cosh(2Lw_h \alpha_0) \\ j_{31} &= LP_0 R \alpha_0 \left(2e^{-2L\alpha_0} v_h \bar{\Delta} \cos(2Lw_h \alpha_0 \bar{\Delta}) \left[\bar{\Delta} \cos\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) + \sin\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + e^{-2L(1+w_h)\alpha_0} (-1 + e^{4Lw_h \alpha_0}) u_h \left[-\cos\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) + \bar{\Delta} \sin\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) \right] \right) \\ j_{32} &= -\Omega_x - 2e^{-2L\alpha_0} LP_0 R u_h \alpha_0 \bar{\Delta} \cos(2Lw_h \alpha_0 \bar{\Delta}) \left[\bar{\Delta} \cos\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) + \sin\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) \right] \\ &\quad + e^{-2L(1+w_h)\alpha_0} (-1 + e^{4Lw_h \alpha_0}) LP_0 R v_h \alpha_0 \left[-\cos\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) + \bar{\Delta} \sin\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) \right] \\ j_{33} &= -dk^2 - P_0 - \gamma - e^{-2L\alpha_0} P_0 R \cosh(2Lw_h \alpha_0) \\ &\quad + 2e^{-2L\alpha_0} LP_0 R \alpha_0 \cos(2Lw_h \alpha_0 \bar{\Delta}) \left[\bar{\Delta} \cos\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) + \sin\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) \right] \\ &\quad + e^{-2L(1+w_h)\alpha_0} (-1 + e^{4Lw_h \alpha_0}) LP_0 R w_h \alpha_0 \left[-\cos\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) + \bar{\Delta} \sin\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) \right] \end{aligned}$$

Lösungen dieses Eigenwertproblems sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(\tilde{\mathcal{J}} - \eta\hat{1})$. Weil $\tilde{\mathcal{J}}$ eine rein reelle 3×3 -Matrix ist, findet man entweder drei reelle, oder einen reellen und zwei komplex konjugierte Eigenwerte:

$$\eta_1 = \frac{1}{6} \left(-2^{2/3} F^{1/3} + \frac{2^{4/3} G}{F^{1/3}} + 2(B + Ew_h + 3\gamma_s) \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\eta_2 = \eta_3^* = \frac{1}{12} \left(2^{2/3} (1 - i\sqrt{3}) F^{1/3} - \frac{i2^{4/3} (-i + \sqrt{3}) G}{F^{1/3}} + 4(B + Ew_h + 3\gamma_s) \right) \quad (\text{A.4})$$

mit den abkürzenden Substitutionen¹

$$\begin{aligned} F &= -18A^2B - 18A^2Ew_h - 6B^2Ew_h - 6BD^2w_h^2 - 2E^3w_h^3 + 27AC\Omega_x + 9Dw_h\Omega_x^2 \\ &\quad - 2B^3 - 9BEv_h\Omega_x - 9E^2v_hw_h\Omega_x + 9B^2u_h\bar{\Delta}\Omega_x + 9BEu_hw_h\bar{\Delta}\Omega_x + 9B\Omega_x^2 \\ &\quad + \left[-4(-3A^2 + B^2 + 2BDw_h + D^2w_h^2 + 3Ev_h\Omega_x - 3Bu_h\bar{\Delta}\Omega_x - 3\Omega_x^2)^3 \right. \\ &\quad \left. + \left(18A^2(B + Ew_h) - 27AC\Omega_x + (B + Ew_h) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot (2B^2 + 4BEw_h + 2E^2w_h^2 + 9Ev_h\Omega_x - 9Bu_h\bar{\Delta}\Omega_x - 9\Omega_x^2) \right)^2 \right]^{1/2} \\ G &= 3A^2 - B^2 - 2BEw_h - E^2w_h^2 - 3Ev_h\Omega_x + 3Bu_h\bar{\Delta}\Omega_x + 3\Omega_x^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \gamma_s &= -Dk^2 - P_0 - \gamma - e^{-2L\alpha_0} P_0 R \cosh(2Lw_h\alpha_0) \\ A &= e^{-2L\alpha_0} P_0 R \bar{\Delta} \sin(2Lw_h\alpha_0\bar{\Delta}) \\ B &= 2e^{-2L\alpha_0} LP_0 R \alpha_0 \cos(2Lw_h\alpha_0\bar{\Delta}) \left[\bar{\Delta} \cos\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) + \sin\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) \right] \\ C &= LP_0 R \alpha_0 \left(2e^{-2L\alpha_0} v_h \bar{\Delta} \cos(2Lw_h\alpha_0\bar{\Delta}) \left[\bar{\Delta} \cos\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) + \sin\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + e^{-2L(1+w_h)\alpha_0} (-1 + e^{4Lw_h\alpha_0}) u_h \left[-\cos\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) + \bar{\Delta} \sin\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) \right] \right) \\ E &= e^{-2L(1+w_h)\alpha_0} (-1 + e^{4Lw_h\alpha_0}) LP_0 R \alpha_0 \left[-\cos\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) + \bar{\Delta} \sin\left(\frac{dk^2}{k_0}\right) \right], \end{aligned}$$

wobei $(u_h, v_h, w_h)^T$ die zuvor numerisch bestimmte homogene Lösung ist.

¹ B und E sind hier nicht zu verwechseln mit dem Magnetfeld \vec{B} und den Amplituden E_{\pm} der elektrischen Felder aus Kapitel 5. Die Symbole dienen hier nur als der Übersichtlichkeit halber eingeführte Substitutionen ohne physikalische Bedeutung.

Anhang B

Details zur Durchführung und Auswertung der numerischen Simulationen

B.1 Kurzdarstellung des Algorithmus

Der verwendete Algorithmus zur numerischen Simulation des vollständigen nichtlinearen Systems wurde in wesentlichen Teilen so übernommen, wie er in vorangegangenen Untersuchungen der Arbeitsgruppe an ähnlich aufgebauten Experimenten bereits erfolgreich angewendet wurde. Details zu spezifischen Problemen der numerischen Umsetzung, die hier nicht näher behandelt werden, sowie weiterführende Verweise finden sich z.B. in [Aum99, Sch01, GW02].

Kernpunkt des Algorithmus ist die numerische Integration der Gleichungen (5.3) im Ortsraum, die mit einem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung [PFTV92] realisiert wurde. Die Berechnung der Diffusion und der linearen Propagation erfolgt mit spektralen Verfahren im Fourierraum. Der mehrfache Wechsel zwischen diesen Räumen pro Iterationsschritt bringt es mit sich, dass die dadurch zahlreich auftretenden zweidimensionalen Fouriertransformationen den wesentlichen Anteil der Rechenzeit ausmachen. Da in dieser Arbeit große Bereiche des Parameterraums numerisch untersucht werden und die zum Teil sehr langsam ablaufenden transienten Prozesse eine hohe Anzahl von Iterationen erfordern, wurde im Vorfeld der Rechenzeitoptimierung besonderes Augenmerk gewidmet.

So werden etwa die transversalen Komponenten des Blochvektors u und v als Real- und Imaginärteil einer komplexen Größe gemeinsam behandelt, was den numerischen Aufwand der Fouriertransformationen insgesamt um etwa 30% gegenüber der getrennten Behandlung reduziert. Dieses Vorgehen ist physikalisch gerechtfertigt, da u und v sich im Rahmen der Herleitung des mikroskopischen Modells ohnehin als Real- und Imaginärteil derselben

physikalischen Größe – namentlich der Besetzungskohärenz der Zeeman-Unterniveaus des Grundzustandes (ρ_{12}) in der Dichtematrixformulierung [MDLM86] – präsentieren. Zudem beeinflussen sich Real- und Imaginärteil bei den im Fourierraum stattfindenden Rechnungen nicht, weil lediglich reelle, lineare Operatoren zum Einsatz kommen.

B.2 Erzeugung der Anfangsbedingungen

Bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten numerischen Simulationen kamen verschiedene Methoden zur Vorgabe von Anfangsbedingungen zum Einsatz, deren Bezeichnungen hier definiert und deren Eigenschaften näher erläutert werden sollen.

- **Simulationen aus Rauschen:**

Diese Methode entspricht Anschaltexperimenten, bei denen zunächst die gewünschten Parameter präpariert werden, dann der Eingangsstrahl für eine hinreichend große Zeit (mehrere Sekunden) geblockt und anschließend wieder freigegeben wird.

Hierbei wird zunächst auf dem gesamten Grundgebiet die Magnetisierung auf $u = v = w = 0$ gesetzt. Zu Beginn der Simulation wird dann für eine wählbare Zahl von Iterationen n_{It} die Orientierung w indirekt verrauscht. Eine direkte Addition oder Multiplikation eines Rauschfeldes könnte zu physikalisch unsinnigen Werten für die Magnetisierung führen ($|\vec{m}| > 1$), bei denen zusätzlich die Gefahr der numerischen Divergenz bestünde. Daher wird ein Rauschfeld $Z(x, y) \in [-1, +1]$ aus gleichverteilten Zufallszahlen erzeugt, das auf die rückgekoppelten Pumpraten wirkt:

$$P_{\pm}^R \rightarrow P_{\pm}^R \cdot (1 \mp a \cdot Z) \quad (\text{B.1})$$

Das Rauschfeld Z wird dabei jeweils nach wenigen Iterationen neu erzeugt und zeitlich und räumlich tiefpassgefiltert. Die relative Amplitude a liegt zu Beginn der Simulationen typischerweise in der Größenordnung 1% und wird dann über die Dauer n_{It} linear auf einen sehr kleinen Wert (üblicherweise $\approx 10^{-8}$) heruntergefahren.

Auf diese Weise wirkt das Rauschfeld für $w \approx 0$ in erster Näherung proportional auf die Orientierung, die Sättigung verhindert jedoch ein Verlassen des zulässigen Wertebereichs. Das Rauschen wirkt dabei auch im Falle $w = 0$ (kein rein multiplikatives Rauschen), weil auf die Orientierung die *Differenz* der Pumpraten wirkt ($P_D = P_+ - P_-$). Die *Summe* der Pumpraten des reflektierten Feldes $P_S^R = P_+^R + P_-^R \lesssim P_0$ entspricht jedoch stets annähernd der Eingangspumprate, d. h. auch für $w = 0$ verschwinden die einzelnen Pumpraten P_{\pm} nicht.

Um in Simulationen mit verschiedenen Parametern immer gleichartige Anfangsbedingungen (z. B. eine Domäne mit stets gleichem Radius) erzeugen zu können, wurden zwei verschiedene Methoden verwendet, die am Beispiel einer runden Domäne positiver Orientierung mit Radius r erläutert werden sollen:

- **Vorgabe einer Orientierungsverteilung:**

Hierbei wurde eine Orientierungsverteilung vorgegeben, die im Innern der Domäne der positiven homogenen Lösung und außerhalb der Domäne der negativen homogenen Lösung entsprach.

$$w(x, y) = \begin{cases} +w_h & (x^2 + y^2) < r^2 \\ -w_h & (x^2 + y^2) > r^2 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Die Vorteile dieser Methode sind, dass sich zu Beginn der Simulation noch keine Muster ausgebildet haben, und dass während der Simulation auf dem gesamten Grundgebiet symmetrische Bedingungen herrschen. Ein wichtiger Nachteil dieser Methode ist, dass die Form der Front sich erst in den ersten Iterationsschritten ausbildet, da sich diese nicht analytisch berechnen lässt. Die Frontdynamik am Beginn der Simulation wird also überlagert von der Ausbildung der Frontform und ggf. hexagonaler Muster.

- **Simulation eines Zündstrahls:**

Um dies zu umgehen, wurde alternativ mit einem virtuellen „Zündstrahl“ gearbeitet. Dazu wurde zunächst nicht mit einer linearen Polarisierung gepumpt, sondern die Eingangspumpraten P_{\pm}^i innerhalb und außerhalb der Domäne unterschiedlich gewählt, was einer leicht elliptischen Polarisierung mit unterschiedlichen Hauptachsen und damit einer Bevorzugung jeweils eines stationären Zustandes entspricht (vgl. Abbildung 5.1 b).

$$\begin{aligned} P_+^i > P_-^i & \quad (x^2 + y^2) < r^2 \\ P_+^i < P_-^i & \quad (x^2 + y^2) > r^2 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Durch die Bevorzugung unterschiedlicher Zustände bildet sich eine Domäne mit positiver Orientierung im Innern aus, deren Größe in guter Näherung dem virtuellen Zündstrahl entspricht. Nachdem sich ein solcher stationärer Zustand ausgebildet hat, wird dann die eigentliche Simulation gestartet und mit linearer Eingangspolarisation weitergerechnet.

Dieses Vorgehen simuliert das experimentelle Vorgehen zur Vorgabe bestimmter transversaler Anfangsbedingungen, birgt aber auch dessen Nachteile: Zum einen

weicht abhängig von den verwendeten Parametern die Größe der sich bildenden Domäne leicht vom Radius des Zündstrahls ab, und oberhalb der Schwelle zur Musterbildung ist die sich bildende Domäne auch nicht zwingend exakt kreisförmig, da das unterliegende hexagonale Muster den Verlauf der Front beeinflusst. Zum anderen sinkt die Schwelle zur Musterbildung auf dem bevorzugten Ast der bei elliptischer Einstrahlung gestörten Pitchfork-Bifurkation ab, so dass in den so erzeugten Anfangsbedingungen unter Umständen strukturierte Bereiche entstehen, obwohl die Eingangspumprate bei linearer Polarisierung noch unterhalb der Schwelle zur Musterbildung liegt. In diesem Fall relaxieren die Muster während der ersten Iterationen und beeinflussen wiederum die Frontdynamik.

Dem steht der große Vorteil gegenüber, dass sich unter dem Einfluss eines nur leicht elliptischen Pumpstrahls selbstkonsistente Verteilungen in allen Komponenten der Magnetisierung mit relativ gut kontrollierbarer Geometrie ausbilden.

Um die Vorteile beider Methoden zu nutzen und die Nachteile größtenteils zu umgehen, wird eine Kombination aus beiden Methoden angewendet: Zunächst wird eine Domäne mit der gewünschten Geometrie unterhalb der Schwelle zur Musterbildung gezündet, die dann bei linearer Polarisierung (nach Abschalten des Zündstrahls) einige Zeit relaxiert, bis die Front kreisförmig ist und die Orientierung im Innern und außerhalb der Domäne in einem Abstand zur Front homogen ist. Diese Verteilung wird dann als feststehende Anfangsbedingung für weitere Simulationen genutzt. Dabei wird ausgenutzt, dass die homogene Lösung w_h oberhalb des Bifurkationspunktes schnell sättigt und sich bei Variation von P_0 und B_x im untersuchten Parameterbereich um die Schwelle zur Musterbildung herum nur noch sehr geringfügig ändert. Die homogenen Bereiche abseits der Front entsprechen daher in guter Näherung der homogenen, stationären Lösung in einem weiten Pumpratenbereich, und die Form der Front ist bereits selbstkonsistent.

B.3 Verfahren zur Bestimmung der Frontlänge

Um aus der Orientierungsverteilung der numerischen Simulationen eine möglichst genaue Länge der auf dem Grundgebiet vorhandenen Fronten l_F zu erhalten, wird zunächst jeder Punkt des Gitters auf das Vorzeichen der Orientierung normiert:

$$w(i, j) \longrightarrow w'(i, j) = \text{sign}(w(i, j)) \in \{\oplus, \ominus\}. \quad (\text{B.4})$$

Das Vorkommen einer Orientierung von exakt $w = 0$ entlang einer Front ist wegen der Speicherung in doppelt genauer Fließkomma-Arithmetik extrem unwahrscheinlich, so dass solche Punkte nicht berücksichtigt werden.

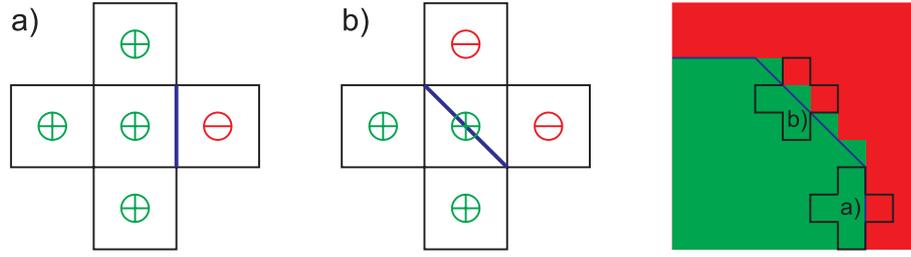


Abbildung B.1: Beispiele zur Bestimmung der Frontlänge. a) gerades Teilstück der Front, b) Teilstück unter 45° . In beiden Fällen würde der Zähler l_F^{\oplus} erhöht.

Um bei hohen Amplituden der unterliegenden Modulationsinstabilität eine fälschliche Detektion von einzelnen Musterkonstituenten als Domäne zu vermeiden, kann vor der Bestimmung des Vorzeichens wahlweise eine Mittelung über einen quadratischen Kern von $(2n + 1) \times (2n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$ (typischerweise 3×3) Gitterpunkten vorgenommen werden, wodurch kleinskalige Modulationen ausgewaschen werden. Auf die zu bestimmende Frontlänge hat dies nur einen sehr geringen Einfluss, solange die Größe des Kerns klein gegen die Musterwellenlänge ist.

Anschließend wird jeder Gitterpunkt schrittweise ($m : 1 \dots N^2$) auf Vorzeichengleichheit mit seinen nächsten Nachbarn hin untersucht, wobei das Grundgebiet an den Rändern periodisch fortgesetzt wird. Abhängig vom Vorzeichen des gerade untersuchten Gitterpunkts wird dabei die Länge der Berandung des Gebiets mit positiver und negativer Orientierung (l_F^{\oplus} , l_F^{\ominus}) getrennt erfasst und in jedem Schritt nach dem folgenden Algorithmus akkumuliert:

$$w'(i, j - 1) = w'(i, j + 1) \quad \vee \quad w'(i - 1, j) = w'(i + 1, j) \\ \Rightarrow l_F^{w'(i,j)}(m + 1) = l_F^{w'(i,j)}(m) + 1 \quad (\text{B.5})$$

$$w'(i, j - 1) \neq w'(i, j + 1) \quad \wedge \quad w'(i - 1, j) \neq w'(i + 1, j) \\ \Rightarrow l_F^{w'(i,j)}(m + 1) = l_F^{w'(i,j)}(m) + \sqrt{2} \quad (\text{B.6})$$

In allen anderen Fällen wird keine Änderung der akkumulierten Längen vorgenommen. Bedingung (B.5) berücksichtigt Gitterpunkte, bei denen zwei nächste Nachbarn entlang genau *einer* Ortsachse das gleiche Vorzeichen besitzen, was einer gerade durch diesen Gitterpunkt verlaufenden Front entspricht (vgl. Abbildung B.1 a). In Bedingung (B.6) werden solche Punkte berücksichtigt, bei denen die Front unter 45° durch den Gitterpunkt verläuft (Abbildung B.1 b).

Zum Schluss wird der Mittelwert aus den ermittelten Längen der Berandung positiver und negativer Domänen gebildet und in die durch die Wahl der Ortsdiskretisierung gegebene physikalische Länge umgerechnet:

$$l_F = \frac{l_F^{\oplus} + l_F^{\ominus}}{2} \cdot \frac{l_{GG}}{N} \quad (\text{B.7})$$

Hier steht l_{GG} für die Kantenlänge des quadratischen Grundgebietes und N für die Zahl der Gitterpunkte, in die das Grundgebiet entlang einer Raumrichtung aufgeteilt wurde.

Das Verfahren misst systematisch geringfügig zu große Frontlängen, was auf die Ortsdiskretisierung der Simulation zurückzuführen ist. Dennoch liefert es die Frontlängen in hinreichender Genauigkeit, um diese als quantitatives Maß für die Zeitentwicklung verwenden zu können.

Literaturverzeichnis

- [AAGWL02] A. Aumann, T. Ackemann, E. Große Westhoff, and W. Lange. *Eight-fold quasipatterns in an optical pattern-forming system*. Phys. Rev. E **66**, 046220, 2002.
- [ABK⁺99] I. S. Aranson, D. Blair, W. K. Kwok, G. Karapetrov, U. Welp, G. W. Crabtree, V. M. Vinokur, and L. S. Tsimring. *Controlled Dynamics of Interfaces in a Vibrated Granular Layer*. Phys. Rev. Lett. **82**, 731–734, 1999.
- [ABR99] F. T. Arecchi, S. Boccaletti, and P. L. Ramazza. *Pattern formation and competition in nonlinear optics*. Phys. Rep. **318**, 1–83, 1999.
- [Ack96] T. Ackemann. *Spontane Musterbildung in einem atomaren Dampf mit optischer Rückkopplung*. Dissertation, Münster, 1996.
- [Agr01] G. P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, San Diego, USA, 3. Auflage, 2001. ISBN 0-12-045143-3.
- [AHL97] T. Ackemann, A. Heuer, Yu. A. Logvin, and W. Lange. *Light-shift induced level crossing and resonatorless optical bistability in sodium vapor*. Phys. Rev. A **56**, 2321–2326, 1997.
- [AL94] T. Ackemann and W. Lange. *Non- and nearly hexagonal patterns in sodium vapor generated by single-mirror feedback*. Phys. Rev. A **50**, R4468–R4471, 1994.
- [AS93] M. Assenheimer and V. Steinberg. *Rayleigh-Bénard convection near the gas-liquid critical point*. Phys. Rev. Lett. **70**, 3888–3891, 1993.
- [ATV99] I. S. Aranson, L. S. Tsimring, and V. M. Vinokur. *Hexagons and interfaces in a vibrated granular layer*. Phys. Rev. E **59**, R1327–R1330, 1999.
- [Aum99] A. Aumann. *Optical patterns and quasipatterns in an alkali metal vapor with feedback*. Dissertation, Münster, 1999.

- [AVI88] S. A. Akhmanov, M. A. Vorontsov, and V. Yu. Ivanov. *Large-scale transverse nonlinear interactions in laser beams; new types of nonlinear waves; onset of "optical turbulence"*. Sov. Phys. JETP Lett. **47**, 707–711, 1988.
- [AVI+92] S. A. Akhmanov, M. A. Vorontsov, V. Yu. Ivanov, A. V. Larichev, and N. I. Zheleynykh. *Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics: generation and interaction of spatiotemporal structures*. J. Opt. Soc. Am. B **9**, 78–90, 1992.
- [Bab06] I. Babushkin, 2006. Persönliche Mitteilung.
- [BAC+00] D. Blair, I. S. Aranson, G. W. Crabtree, V. Vinokur, L. S. Tsimring, and C. Jossierand. *Patterns in thin vibrated granular layers: Interfaces, hexagons and superoscillons*. Phys. Rev. E **61**, 5600–5610, 2000.
- [BBAC91] E. Bodenschatz, J. R. de Bruyn, G. Ahlers, and D. S. Cannell. *Transitions between patterns in thermal convection*. Phys. Rev. Lett. **67**, 3078–3081, 1991.
- [BBE+98] N. Bowden, S. Brittain, A. G. Evans, J. W. Hutchinson, and G. M. Whitesides. *Spontaneous formation of ordered structures in thin films of metals supported on an elastomeric polymer*. Nature **393**, 146–149, 1998.
- [Ben85] L. Bendersky. *Quasicrystal with One-Dimensional Translational Symmetry and a Tenfold Rotation Axis*. Phys. Rev. Lett. **55**, 1461–1463, 1985.
- [BHMT00] M. Bär, A. Hargberg, E. Meron, and U. Thiele. *Front propagation and pattern formation in anisotropic bistable media*. Phys. Rev. E **62**, 366–374, 2000.
- [BLSS01] J. R. de Bruyn, B. C. Lewis, M. D. Shattuck, and H. L. Swinney. *Spiral patterns in oscillated granular layers*. Phys. Rev. E **63**, 041305, 2001.
- [Boy92] R. W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press, Boston, 1992.
- [BPA00] E. Bodenschatz, W. Pesch, and G. Ahlers. *Recent developments in Rayleigh-Bénard convection*. Annual review of fluid mechanics **32**, 709–778, 2000.
- [Bro90] *Brockhaus-Enzyklopädie*, Band **12**, Seiten 673–674. F. A. Brockhaus GmbH, Mannheim, 1990. ISBN 3-7653-1100-6.

- [BW89] K. L. Babcock and R. M. Westervelt. *Elements of cellular domain patterns in magnetic garnet films*. Phys. Rev. A **40**, 2022–2037, 1989.
- [Car02] J. H. E. Cartwright. *Labyrinthine Turing Pattern Formation in the Cerebral Cortex*. J. Theor. Biol. **217**, 97–103, 2002.
- [CEK05] M. G. Clerc, D. Escaff, and V. M. Kenkre. *Patterns and localized structures in population dynamics*. Phys. Rev. E **72**, 056217, 2005.
- [CGJO05] A. Cēbers, C. Gourdon, V. Jeudy, and T. Okada. *Normal-state bubbles and lamellae in type-I superconductors*. Phys. Rev. B **72**, 014513, 2005.
- [CGPS82] S. Cecchi, G. Giusfredi, E. Petriella, and P. Salieri. *Observation of optical tristability in sodium vapor*. Phys. Rev. Lett. **49**, 1928–1931, 1982.
- [CGR89] P. Couillet, L. Gil, and F. Rocca. *Optical vortices*. Opt. Commun. **73**, 403–408, 1989.
- [CH93] M. C. Cross and P. C. Hohenberg. *Pattern formation outside of equilibrium*. Rev. Mod. Phys. **65**, 851–1112, 1993.
- [CLHL90] P. Couillet, J. Lega, B. Houchmanzadeh, and J. Lajzerowics. *Breaking chirality in nonequilibrium systems*. Phys. Rev. Lett. **65**, 1352–1355, 1990.
- [CT62] C. Cohen-Tannoudji. *Théorie quantique du cycle de pompage optique*. Ann. Phys. (Paris) **7**, 423, 1962.
- [CT95] M. C. Cross and Y. Tu. *Defect Dynamics for Spiral Chaos in Rayleigh-Bénard Convection*. Phys. Rev. Lett. **75**, 834–837, 1995.
- [CV01] H. Caps and N. Vandewalle. *Labyrinthine granular landscapes*. Phys. Rev. E **64**, 052301, 2001.
- [DF91] G. D’Alessandro and W. J. Firth. *Spontaneous hexagon formation in a nonlinear optical medium with feedback mirror*. Phys. Rev. Lett. **66**, 2597–2600, 1991.
- [DF92] G. D’Alessandro and W. J. Firth. *Hexagonal spatial pattern for a Kerr slice with a feedback mirror*. Phys. Rev. A **46**, 537–548, 1992.
- [DH99] A. De Wit and G. M. Homsy. *Viscous fingering in reaction-diffusion systems*. J. Chem. Phys. **110**, 8663–8675, 1999.

- [DM06] M. P. DeFeo and M. Marchevsky. *Localized ac response and stochastic amplification in a labyrinthine magnetic domain structure in a yttrium iron garnet film*. Phys. Rev. B **73**, 184409, 2006.
- [DSS⁺98] C. Denz, M. Schwab, M. Sedlatschek, T. Tschudi, and T. Honda. *Pattern dynamics and competition in a photorefractive feedback system*. J. Opt. Soc. Am. B **15**, 2057–2064, 1998.
- [EF94] W. S. Edwards and S. Fauve. *Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment*. J. Fluid Mech. **278**, 123–178, 1994.
- [Fab58] T. E. Faber. *The intermediate state in superconducting plates*. Proc. R. Soc. London, Ser. A **248**, 460–481, 1958.
- [FB85] R. J. Field and M. Burger. *Oscillations and travelling waves in chemical systems*. John Wiley & Son, New York, 1985.
- [Fir90] W. J. Firth. *Spatial instabilities in a Kerr medium with single feedback mirror*. J. Mod. Opt. **37**, 151–153, 1990.
- [Gah96] A. Gahl. *Räumliche Vektorinstabilitäten in der nichtlinearen Optik: Die magneto-optisch induzierte Aufspaltung eines Laserstrahles in atomaren Dämpfen*. Dissertation, Münster, 1996.
- [GBB83] V. Gáspár, G. Bazsa, and M. T. Beck. *The influence of visible light on the Belousov-Zhabotinskii oscillating reactions applying different catalysts*. Z. Phys. Chem. **264**, 43–48, 1983.
- [GCOM01] D. Gomila, P. Colet, G. L. Oppo, and M. San Miguel. *Stable Droplets and Growth Laws Close to the Modulational Instability of a Domain Wall*. Phys. Rev. Lett. **87**, 194101, 2001.
- [GCOM04] D. Gomila, P. Colet, G.-L. Oppo, and M. San Miguel. *Stable droplets and nucleation in asymmetric bistable nonlinear optical systems*. J. Opt. B **6**, S265–S270, 2004.
- [Get98] A. V. Getling. *Rayleigh-Bénard Convection*, Band **11** aus *Advanced series in nonlinear dynamics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998.
- [GHK98] G. H. Gunaratne, D. K. Hoffman, and D. J. Kouri. *Characterizations of natural patterns*. Phys. Rev. E **57**, 5146–5149, 1998.

- [Gia85] E. Giacobino. *Tristability and Bifurcations in sodium vapor*. Opt. Commun. **56**, 249–254, 1985.
- [GMP94] G. Grynberg, A. Maître, and A. Petrossian. *Flowerlike patterns generated by a laser beam transmitted through a rubidium cell with a single feedback mirror*. Phys. Rev. Lett. **72**, 2379–2382, 1994.
- [GMP96] R. E. Goldstein, D. J. Muraki, and D. M. Petrich. *Interface proliferation and the growth of labyrinths in a reaction-diffusion system*. Phys. Rev. E **53**, 3933–3957, 1996.
- [GMT00] R. Gallego, M. San Miguel, and R. Toral. *Self-similar domain growth, localized structures, and labyrinthine patterns in vectorial Kerr resonators*. Phys. Rev. E **61**, 2241–2244, 2000.
- [Goo91] D. Goossens. *Superposition of aeolian dust ripple patterns as a result of changing wind directions*. Earth Surface Processes and Landforms **16**, 689–699, 1991.
- [GTP⁺04] A. Garfinkel, Y. Tintut, D. Petrasek, K. Bostro, and L. L. Demer. *Pattern formation by vascular mesenchymal cells*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **101**, 9247–9250, 2004.
- [GW02] E. Große Westhoff. *Quasimuster und Überstrukturen in einem optisch getriebenen atomaren Dampf*. Dissertation, Münster, 2002.
- [GWHAL03] E. Große Westhoff, R. Herrero, T. Ackemann, and W. Lange. *Self-organized superlattice patterns with two slightly differing wave numbers*. Phys. Rev. E **67**, 025293, 2003.
- [GWKL⁺00] E. Große Westhoff, V. Kneisel, Yu. A. Logvin, T. Ackemann, and W. Lange. *Pattern formation in the presence of an intrinsic polarization instability*. J. Opt. B **2**, 386–392, 2000.
- [HEA94] Yuchun Hu, R. E. Ecke, and G. Ahlers. *Behavior of focus patterns in low Prandtl number convection*. Phys. Rev. Lett. **72**, 2191–2194, 1994.
- [HG87] M. S. Heutmaker and J. P. Gollub. *Wave-vector field of convective flow patterns*. Phys. Rev. A **35**, 242–260, 1987.

- [HGWA⁺99] R. Herrero, E. Große Westhoff, A. Aumann, T. Ackemann, Yu. A. Logvin, and W. Lange. *Twelfefold quasiperiodic patterns in a nonlinear optical system with continuous rotational symmetry*. Phys. Rev. Lett. **82**, 4627–4630, 1999.
- [HI06] Rui Huang and Se Hyuk Im. *Dynamics of wrinkle growth and coarsening in stressed films*. Phys. Rev. E **74**, 026214, 2006.
- [HK74] R. P. Huebener and R. T. Kampwirth. *Pattern of Flux Tubes in Superconducting Lead Films*. J. Low Temp. Phys. **15**, 47–52, 1974.
- [HKK72] S. Honda, S. Konishi, and T. Kusuda. *Flux reversal in single-crystal MnBi platelets by vacuum deposition*. Appl. Phys. Lett. **21**, 421–423, 1972.
- [HLA06] F. Huneus, W. Lange, and T. Ackemann. *Competition of pattern forming instabilities due to phase front curvature in an optical system*. Phys. Rev. E **73**, 016215, 2006.
- [HM94] A. Hagberg and E. Meron. *Pattern formation in non-gradient reaction-diffusion systems: the effects of front bifurcations*. Nonlinearity **7**, 805–835, 1994.
- [HM98] A. Hagberg and E. Meron. *Order parameter equations for front transitions: Nonuniformly curved fronts*. Physica D **123**, 460–473, 1998.
- [HMD74] A. Hubert, A. P. Malozemoff, and J. C. DeLuca. *Effect of cubic, tilted uniaxial, and orthorhombic anisotropies on homogeneous nucleation in a garnet bubble film*. J. App. Phys. **45**, 3562–3571, 1974.
- [HMSZ01] J. von Hardenberg, E. Meron, M. Shachak, and Y. Zarmi. *Diversity of Vegetation Patterns and Desertification*. Phys. Rev. Lett. **87**, 198101, 2001.
- [Hon93] T. Honda. *Hexagonal pattern formation due to counterpropagation in KNbO₃*. Opt. Lett. **18**, 598–600, 1993.
- [HSAL03] F. Huneus, B. Schäpers, T. Ackemann, and W. Lange. *Optical target and spiral patterns in a single-mirror feedback scheme*. Appl. Phys. B **76**, 191–197, 2003.
- [Hun06] F. Huneus. *Dynamische Targetmuster und Spiralen in einem optischen Experiment zur Selbstorganisation*. Dissertation, Münster, 2006.

- [HYE⁺06] A. Hagberg, A. Yochelis, C. Elphick, L. Pismen, and E. Meron. *Linear and nonlinear front instabilities in bistable systems*. *Physica D* **217**, 186–192, 2006.
- [IGNK02] J. R. Iglesias, S. Gonçalves, O. A. Nagel, and M. Kiwi. *Modeling two-dimensional magnetic domain patterns*. *Phys. Rev. E* **65**, 064447, 2002.
- [IMS01] G. Izús, M. San Miguel, and M. Santagiustina. *Phase-locked spatial domains and Bloch domain walls in type-II optical parametric oscillators*. *Phys. Rev. E* **64**, 056231, 2001.
- [JG98] R. E. Jones and G. H. Gunaratne. *Characterization of Labyrinthine Patterns and Their Evolution*. *J. Stat. Phys.* **93**, 427–447, 1998.
- [JKP00] Y. Jun, K. Kim, and H. K. Pak. *Dynamics of spiral patterns in vertically vibrated thin granular layer system*. *Physica A* **281**, 93–98, 2000.
- [Jon06] R. M. Jones. *Buckling of Bars, Plates, and Shells*. Bull Ridge, Blacksburg, Virginia, USA, 2006. ISBN 0-978-72230-2.
- [Kas57] A. Kastler. *Optical methods of atomic orientation and of magnetic resonance*. *J. Opt. Soc. Am.* **47**, 460–465, 1957.
- [KCK67] B. P. Kibble, G. Copley, and L. Krause. *Inelastic collisions between excited alkali atoms and molecules. II. the quenching of sodium resonance radiation by N₂, H₂, HD and D₂*. *Phys. Rev.* **159**, 11–13, 1967.
- [Ker83] H. Kern. *Labyrinthe*. Prestel, München, 2. Auflage, 1983. ISBN 3-7913-0614-6.
- [Kin87] P. R. King. *The fractal nature of viscous fingering in porous media*. *J. Phys. A* **20**, L529–L534, 1987.
- [KKRT96] S. V. Kiyashko, L. N. Korzinov, M. I. Rabinovich, and L. S. Tsimring. *Rotating spirals in an Faraday experiment*. *Phys. Rev. E* **54**, 5037–5040, 1996.
- [Kös85] E. Köster. *Phasenkonjugationsexperimente mit Hilfe des transversalen optischen Pumpens*. Dissertation, Hannover, 1985.
- [Kra81] L. Kramer. *On the Relative Stability of States and First-Order Phase Transitions in Systems far from Equilibrium*. *Z. Phys. B* **41**, 357–363, 1981.

- [KS94] R. Kapral and K. Showalter. *Chemical waves and patterns*. Kluwer Academic Publishers, Ontario, Canada / Morgantown, USA, 1994.
- [KYO81a] M. Kitano, T. Yabuzaki, and T. Ogawa. *Optical tristability*. Phys. Rev. Lett. **46**, 926–929, 1981.
- [KYO81b] M. Kitano, T. Yabuzaki, and T. Ogawa. *Self-sustained spin precession in an optical tristable system*. Phys. Rev. A **24**, 3156–3159, 1981.
- [LA98] W. Lange and T. Ackemann. *Alkaline vapors with single-mirror feedback – a model system for pattern formation*. Asian J. Phys. **7**, 439–452, 1998.
- [LAA⁺99] W. Lange, T. Ackemann, A. Aumann, E. Büthe, and Yu. A. Logvin. *Atomic vapors – a versatile tool in studies of optical pattern formation*. Chaos, Solitons & Fractals **10**, 617–626, 1999.
- [LAL97] Yu. A. Logvin, T. Ackemann, and W. Lange. *Winking hexagons*. Europhys. Lett. **38**, 583–588, 1997.
- [LBLR⁺95] M. Le Berre, D. Leduc, E. Ressayre, A. Tallet, and A. Maître. *Simulation and analysis of the flower-like instability in the single-feedback mirror experiment with rubidium vapor*. Opt. Commun. **118**, 447–456, 1995.
- [LBRT00] M. Le Berre, E. Ressayre, and A. Tallet. *Kinetics of domain walls in the degenerate optical parametric oscillator*. J. Opt. B **2**, 347–352, 2000.
- [LBRT⁺02] M. Le Berre, E. Ressayre, A. Tallet, Y. Pomeau, and L. Di Menza. *Example of a chaotic crystal: The labyrinth*. Phys. Rev. E **66**, 026203, 2002.
- [LBRTT05] M. Le Berre, E. Ressayre, A. Tallet, and M. Tlidi. *Spiral patterns, spiral breakup, and zigzag spirals in an optical device*. Phys. Rev. E **71**, 036224, 2005.
- [LBS00] P. Lodahl, M. Bache, and M. Saffman. *Spiral intensity patterns in the internally pumped optical parametric oscillator*. Phys. Rev. Lett. **85**, 4506–4509, 2000.
- [LECGEM05] Ye. Larionova, O. Egorov, E. Cabrera-Granado, and A. Esteban-Martin. *Intensity spiral patterns in a semiconductor microresonator*. Phys. Rev. A **72**, 033825, 2005.
- [Lef80] H. C. Lefevre. *Single-mode fibre fractional wave devices and polarization controllers*. Electron. Lett. **16**, 778–779, 1980.

- [LGJ92] S. A. Langer, R. E. Goldstein, and D. P. Jackson. *Dynamics of labyrinthine pattern formation in magnetic fluids*. Phys. Rev. A **46**, 4894–4904, 1992.
- [LL00] Weiping Lu and S. L. Lachinova. *Formation and transition of labyrinthine domain patterns in a nonlinear optical system*. Phys. Rev. A **63**, 013807, 2000.
- [LMOS93] K. J. Lee, W. D. McCormick, Q. Ouyang, and H. L. Swinney. *Pattern Formation by Interacting Chemical Fronts*. Science **261**, 192–194, 1993.
- [LPEM⁺04] Ye. Larionova, U. Peschel, A. Esteban-Martin, J. Garcia Monreal, and C. O. Weiss. *Ising and Bloch walls of phase domains in two-dimensional parametric wave mixing*. Phys. Rev. A **69**, 033803, 2004.
- [LS95] K. L. Lee and H. L. Swinney. *Lamellar structures and self-replicating spots in a reaction-diffusion system*. Phys. Rev. E **51**, 1899–1914, 1995.
- [Lug92] L. A. Lugiato. *Spatio-Temporal Structures I*. Phys. Rep. **219**, 291–310, 1992.
- [Man90] P. Manneville. *Dissipative structures and weak turbulence*. Academic Press, Boston, 1990.
- [MB95] M. Möller and H. J. Bruns. *Video sampling: A new low-cost method of capturing fast repetitive processes*. Rev. Sci. Instrum. **66**, 4535–4538, 1995.
- [MBCA93] S. W. Morris, E. Bodenschatz, D. S. Cannell, and G. Ahlers. *Spiral Defect Chaos in Large Aspect Ratio Rayleigh-Bénard Convection*. Phys. Rev. Lett. **71**, 2026–2029, 1993.
- [MDLM86] F. Mitschke, R. Deserno, W. Lange, and J. Mlynek. *Magnetically induced optical self-pulsing in a nonlinear resonator*. Phys. Rev. A **33**, 3219–3231, 1986.
- [MHML06] B. Marts, A. Hagberg, E. Meron, and A. L. Lin. *Resonant and nonresonant patterns in forced oscillators*. Chaos **16**, 037113, 2006.
- [MML83] F. Mitschke, J. Mlynek, and W. Lange. *Observation of magnetically induced optical self-pulsing in a Fabry-Perot resonator*. Phys. Rev. Lett. **50**, 1160–1163, 1983.
- [MML04] B. Marts, K. Martinez, and A. L. Lin. *Front dynamics in an oscillatory bistable Belousov-Zhabotinsky chemical reaction*. Phys. Rev. E **70**, 056223, 2004.

- [MO96] C. B. Muratov and V. V. Osipov. *Scenarios of domain pattern formation in a reaction-diffusion system*. Phys. Rev. E **54**, 4860–4879, 1996.
- [Möl92] M. Möller. *Verallgemeinerte optische Bistabilität und Chaos: ein nicht-lineares Szenario in einem natriumdampfgefüllten Fabry-Pérot-Resonator*. Dissertation, Münster, 1992.
- [MPL⁺01] D. Michaelis, U. Peschel, F. Lederer, D. V. Skryabin, and W. J. Firth. *Universal criterion and amplitude equation for a nonequilibrium Ising-Bloch transition*. Phys. Rev. E **63**, 066602, 2001.
- [MS79] A. P. Malozemoff and J. C. Slonczewski. *Magnetic Domain Walls in Bubble Materials*. Academic Press, New York, 1979.
- [MSA⁺99] M. Möller, J. P. Seipenbusch, T. Ackemann, B. Schäpers, A. Aumann, A. Gahl, H.-J. Bruns, and W. Lange. *Observing pattern dynamics in nonlinear optical systems using the video-sampling method*. Chaos, Solitons & Fractals **10**, 675–679, 1999.
- [Mül96] S. C. Müller. Experiments on Excitation Waves. In J. Parisi, S. C. Müller, and W. Zimmermann (Hrsg.), *Nonlinear Physics of Complex Systems*, Band **476** aus *Lecture Notes in Physics*, Seiten 133–148. Springer, Berlin / Heidelberg, 1996.
- [Neu88] E.-G. Neumann. *Single-mode fibers*, Band **57** aus *Springer Series in Optical Sciences*. Springer, Berlin / Heidelberg / New York, 1988.
- [NP93] A. C. Newell and Y. Pomeau. *Turbulent crystals in macroscopic systems*. J. Phys. A **26**, L429–L434, 1993.
- [OF96] Q. Ouyang and J.-M. Flesselles. *Transition from spirals to defect turbulence driven by a convective instability*. Nature **379**, 143–146, 1996.
- [Ohl87] J. Ohlenbusch. *Entwicklung eines kostengünstigen, Mikroprozessor gesteuerten Wavemeters*. Diplomarbeit, Hannover, 1987.
- [PCT97] D. V. Petrov, F. Canal, and L. Torner. *A simple method to generate optical beams with a screw dislocation*. Opt. Commun. **143**, 265–267, 1997.
- [Pes05] M. Pesch, 2005. Persönliche Mitteilung.
- [Pes07] M. Pesch. *Formation and properties of a discrete family of dissipative solitons in a nonlinear optical system*. Dissertation, Münster, 2007.

- [PFTV92] W. H. Press, B. Flannery, S. Teukolsky, and W. Vetterling. *Numerical recipes: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [PGV⁺05] D. Pochieca, E. Gorecka, N. Vaupotič, M. Čepić, and J. Mieczkowski. *Spontaneous Breaking of Minimal Surface Condition: Labyrinths in Free Standing Smectic Films*. Phys. Rev. Lett. **95**, 207801, 2005.
- [PGWAL04] M. Pesch, E. Große Westhoff, T. Ackemann, and W. Lange. Vectorial solitons and higher-order localized states in a single-mirror feedback system. In *Nonlinear Guided Waves and Their Applications*, Toronto, Canada, 2004. Optical Society of America. Paper TuC24.
- [PGWAL05] M. Pesch, E. Große Westhoff, T. Ackemann, and W. Lange. *Observation of a Discrete Family of Dissipative Solitons in a Nonlinear Optical System*. Phys. Rev. Lett. **95**, 143906, 2005.
- [Pom86] Y. Pomeau. *Front motion, metastability and subcritical bifurcations in hydrodynamics*. Physica D **23**, 3–11, 1986.
- [POS97] V. Petrov, Qi Ouyang, and H. L. Swinney. *Resonant pattern formation in a chemical system*. Nature **388**, 655–657, 1997.
- [PRA93] E. Pampaloni, S. Residori, and F. T. Arecchi. *Roll-hexagon transition in a Kerr-like experiment*. Europhys. Lett. **24**, 647–652, 1993.
- [Res05] S. Residori. *Patterns, fronts and structures in a Liquid-Crystal-Light-Valve with optical feedback*. Physics Reports **416**, 201–272, 2005.
- [Rie99] H. Riecke. Localized structures in pattern-forming systems. In *Pattern Formation in Continuous and Coupled Systems*, Band **115** aus IMA, Seiten 215–228. Springer, New York, 1999.
- [Rom04] O. G. Romanov. *Periodical and Labyrinthine Optical Patterns in the Problem on Two-Wave-Mixing in Ring Cavity*. Nonlinear Phenomena in Complex Systems **7**, 168–172, 2004.
- [Ros85] R. E. Rosensweig. *Ferrohydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [Rot98] D. H. Rothman. *Oscillons, spiral waves, and stripes in a model of vibrated sand*. Phys. Rev. E **57**, R1239–R1242, 1998.

- [RRR02] B. Reimann, R. Richter, and I. Rehberg. *Glasslike relaxation of labyrinthine domain patterns*. Phys. Rev. E **65**, 031504, 2002.
- [Rud01] D. Rudolph. *Charakterisierung und Parameterabhängigkeit komplexer Muster in einer Einspiegelanordnung*. Diplomarbeit, Münster, 2001.
- [RZS83] R. E. Rosensweig, M. Zahn, and R. Shumovich. *Labyrinthine Instability in Magnetic and Dielectric Fluids*. J. Magn. Magn. Mater. **39**, 127–132, 1983.
- [SC93] M. Seul and V. S. Chen. *Isotropic and Aligned Stripe Phases in a Monomolecular Organic Film*. Phys. Rev. Lett. **70**, 1658–1661, 1993.
- [Sch01] B. Schäpers. *Lokalisierte Strukturen in einem atomaren Dampf mit optischer Rückkopplung*. Dissertation, Münster, 2001.
- [Sch06] J.-U. Schurek. *Experimentelle Untersuchungen zu solitären Strukturen in einer Polarisationsinstabilität*. Diplomarbeit, Münster, 2006.
- [SGFO05] A. J. Scroggie, D. Gomila, W. J. Firth, and G.-L. Oppo. *Spontaneous and induced motion of optical patterns*. Appl. Phys. B **81**, 963–968, 2005.
- [SGLP07] L. Stollenwerk, S. V. Gurevich, J. G. Laven, and H.-G. Purwins. *Transition from bright to dark dissipative solitons in dielectric barrier gas-discharge*. Zur Veröffentlichung eingereicht, 2007.
- [SS90] M. Seul and M. J. Sammon. *Competing Interactions and Domain-Shape Instabilities in a Monomolecular Film at an Air-Water Interface*. Phys. Rev. Lett. **64**, 1903–1906, 1990.
- [SSM98] K. Staliunas and V. J. Sánchez-Morcillo. *Dynamics of phase domains in the Swift-Hohenberg equation*. Phys. Lett. A **241**, 28–34, 1998.
- [ST58] P. G. Saffman and Sir G. Taylor. *The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid*. Proc. R. Soc. A **245**, 312–329, 1958.
- [Sto07] L. Stollenwerk. *Selbstorganisierte Strukturen in planaren Gasentladungssystemen mit dielektrischer Barriere*. Dissertation, Münster, 2007.
- [Str94] S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos*. Addison-Wesley, Reading, 1994.

- [SW92a] M. Seul and R. Wolfe. *Evolution of disorder in magnetic stripe domains. I. Transverse instabilities and disclination unbinding in lamellar patterns.* Phys. Rev. A **46**, 7519–7533, 1992.
- [SW92b] M. Seul and R. Wolfe. *Evolution of disorder in magnetic stripe domains. II. Hairpins and labyrinth patterns versus branches and comb patterns formed by growing minority component.* Phys. Rev. A **46**, 7534–7547, 1992.
- [SW92c] M. Seul and R. Wolfe. *Evolution of Disorder in Two-Dimensional Stripe Patterns: „Smectic“ Instabilities and Disclination Unbinding.* Phys. Rev. Lett. **68**, 2460–2463, 1992.
- [Tal36] W. H. F. Talbot. *Facts relating to optical science. No. IV.* Philos. Mag. **9** (Third series), 401–407, 1836.
- [TBWS93] M. Tamburrini, M. Bonavita, S. Wabnitz, and E. Santamato. *Hexagonally patterned beam filamentation in a thin liquid-crystal film with a single-feedback mirror.* Opt. Lett. **18**, 855–857, 1993.
- [TNT93] B. Thüring, R. Neubecker, and T. Tschudi. *Transverse pattern formation in liquid crystal light valve feedback system.* Opt. Commun. **102**, 111–115, 1993.
- [TSW98] V. B. Taranenko, K. Staliunas, and C. O. Weiss. *Pattern formation and localized structures in degenerate optical parametric mixing.* Phys. Rev. Lett. **81**, 2236–2239, 1998.
- [Tur52] A. M. Turing. *The chemical basis of morphogenesis.* Philos. Trans. R. Soc. London Ser. B **237**, 37–72, 1952.
- [TZWW99] V. B. Taranenko, M. Zander, P. Wobben, and C. O. Weiss. *Stability of localized structures in degenerate wave mixing.* Appl. Phys. B **69**, 337–339, 1999.
- [UMS96] P. B. Umbanhowar, F. Melo, and H. L. Swinney. *Localized excitations in a vertically vibrated granular layer.* Nature **382**, 793–796, 1996.
- [UMS98] P. B. Umbanhowar, F. Melo, and H. L. Swinney. *Periodic, aperiodic, and transient patterns in vibrated granular layers.* Physica A **249**, 1–9, 1998.
- [URE80] R. Ulrich, S. C. Rashleigh, and W. Eickhoff. *Bending-induced birefringence in single-mode fibers.* Opt. Lett. **5**, 273–275, 1980.

- [VS99] M. Vasnetsov and K. Staliunas (Hrsg.). *Optical vortices*, Band **228** aus *Horizons in World Physics*. Nova Science Publishers, New York, 1999.
- [Wei92] C. O. Weiss. *Spatio-Temporal Structures II*. Phys. Rep. **219**, 311–338, 1992.
- [Win72] A. T. Winfree. *Spiral Waves of Chemical Activity*. Science **175**, 634–636, 1972.
- [WVS⁺99] C. O. Weiss, M. Vaupel, K. Staliunas, G. Slekyš, and V. B. Taranenko. *Solitons and vortices in lasers*. Appl. Phys. B **68**, 151–168, 1999.
- [YHM⁺02] A. Yochelis, A. Hagberg, E. Meron, A. L. Lin, and H. L. Swinney. *Development of Standing-Wave Labyrinthine Patterns*. SIAM J. Applied Dynamical Systems **1**, 236–247, 2002.
- [YOKO84] T. Yabuzaki, T. Okamoto, M. Kitano, and T. Ogawa. *Optical bistability with symmetry breaking*. Phys. Rev. A **29**, 1964–1972, 1984.
- [Zan03] A. Zanin. *Experimental investigations on pattern formation in planar barrier gas discharge*. Dissertation, Münster, 2003.
- [Zha64] A. M. Zhabotinskii. *Periodic processes of the oxidation of malonic acid in solution (study of the kinetics of Belousov's Reaction)*. Biofizika **9**, 306–311, 1964.
- [ZOM98] O. Zik, Z. Olami, and E. Moses. *Fingering Instability in Combustion*. Phys. Rev. Lett. **81**, 3868–3871, 1998.

Danksagung

Mein erster Dank gilt Herrn Prof. Dr. W. Lange für die Anregung zu dieser Arbeit, für die Möglichkeit, diese in seiner Arbeitsgruppe anzufertigen, für die Gewährung von Mitteln und für zahlreiche wertvolle Ratschläge und Diskussionen.

Ganz besonders danken möchte ich auch Herrn Dipl.-Phys. Matthias Pesch, der mir nicht nur als geschätzter Kollege, sondern auch als guter Freund stets mit Rat und Tat zur Seite gestanden hat.

Herrn Dr. Igor Babushkin danke ich für die Unterstützung bei der theoretischen Analyse und für weitere, fruchtbare Diskussionen.

Der gesamten Arbeitsgruppe, besonders den Herren Dr. Thorsten Ackemann, Dipl.-Phys. Karl-Friedrich Jentsch und Dr. Florian Huneus, gilt mein Dank für eine gute, kooperative Arbeitsatmosphäre, ständige Gesprächsbereitschaft und viele hilfreiche Anregungen. Herrn Dipl.-Phys. Jens-Uwe Schurek danke ich für wertvolle Beiträge zu dieser Arbeit, die er im Rahmen seiner Diplomarbeit geleistet hat.

Auch allen anderen Angehörigen des Instituts möchte ich für ihre stete Hilfsbereitschaft und das angenehme Arbeitsklima danken.

Bei meinen Eltern möchte ich mich herzlich für die finanzielle Unterstützung während meines Studiums sowie für stetigen Zuspruch und Anteilnahme bedanken.

Nicht zuletzt danke ich meiner Freundin Brigitte Bartosch für ein hohes Maß an Verständnis und ihre liebevolle Unterstützung.

