

**Aus dem Universitätsklinikum Münster  
Poliklinik für Kieferorthopädie  
- Direktorin: Univ.-Prof. Dr. med. dent. U. Ehmer -**

**Computergestützte Zahnbogenformberechnungen zur  
Verbesserung der Ergebnisqualität in der Orthodontie**

**INAUGURAL - DISSERTATION**

**zur**

**Erlangung des doctor rerum medicinalium**

**der Medizinischen Fakultät  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster**

**vorgelegt von**

**Hirtz, Michael Manfred**

**aus Coesfeld**

**2008**



**Dekan:** Univ. Prof. Dr. med. V. Arolt

**1. Berichterstatter:** Univ. Prof. Dr. med. dent. U. Ehmer

**2. Berichterstatter:** Prof. Dr. rer. nat. L.F. Chi

**Tag der mündlichen Prüfung: 26.03.2008**

---

**Aus dem Universitätsklinikum Münster**  
**Poliklinik für Kieferorthopädie**  
**- Direktorin: Univ.-Prof. Dr. med. dent. U. Ehmer -**  
Referent: Univ. Prof. Dr. med. dent. U. Ehmer  
Koreferent: Prof. Dr. rer. nat. L.F. Chi

### **ZUSAMMENFASSUNG**

#### **Computergestützte Zahnbogenformberechnungen zur Verbesserung der Ergebnisqualität in der Orthodontie**

Hirtz, Michael Manfred

Die drei primären Zielsetzungen dieser Arbeit sind erstens ein umfassender Review internationaler Wissensressourcen zu dem Thema "Humane Zahnbogenformen" und zweitens die Entwicklung eines Vorschlages für eine Klassifikation der mathematischen Modelle zur computergestützten Berechnung von Zahnbogenformen mit einer Systematik als Entscheidungshilfe für die Auswahl mathematischer Formeln bei spezifischen klinischen und wissenschaftlichen Fragestellungen. Als dritte Zielsetzung umfasst diese Arbeit die Idee und Konzeption, einschließlich der Programmierung und Pilotierung des Computerprogramms "Dental Archform Manager (DAM)", welches dem klinisch tätigen Fachzahnarzt für Kieferorthopädie ein leistungsfähiges digitales Werkzeug zur Dokumentation und virtuellen Planung der in der Multibracketbehandlung therapeutisch relevanten Zahnbogenformen zur Verfügung stellt. Gleichzeitig wurden die Bogenformen führender Hersteller konfektionierter Behandlungsbögen im Hinblick auf die Verwendung innerhalb dieser Software analysiert und pragmatisch gruppiert.

Die drei Zielsetzungen wurden unter der übergeordneten Prämisse einer Steigerung der Behandlungsqualität mit kieferorthopädischen Apparaturen, welche Zahnbogenformen verändern können, implementiert und sollen dazu beitragen spezielle Risiken und Nebenwirkungen, wie insbesondere Knochendehiszenzen, Wurzelresorptionen und Rezidive nach Abschluß von Behandlungen durch eine vorausschauende Planung bezüglich des Bogenformmanagements zu minimieren, indem dem Behandler für den klinischen Alltag ein pragmatisches Werkzeug zur Bogenformbestimmung, Dokumentation und Auswahl spezifischer konfektionierter Multibracket-Behandlungsbögen als Ergänzung zu herkömmlichen elektronischen Modellanalysesystemen offeriert wird.

Weiterhin soll diese Arbeit wissenschaftlich arbeitenden Zahnärzten als Wissensressource dienen, die sich historisch, epidemiologisch oder im Bereich der klinischen Forschung mit dem Thema "Zahnbogenformen" in kieferchirurgischer, prothetischer oder kieferorthopädischer Fragestellung auseinandersetzen.

**Tag der mündlichen Prüfung: 26.03.2008**

Für meine Eltern  
und Bastian

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1. Einleitung.....</b>	<b>1</b>
<b>2. Zahnbogenformen und orthodontische Behandlungsbögen.....</b>	<b>7</b>
2.1 Zahnbogenformen im Spiegel internationaler Literatur.....	7
2.1.1 Strategie der Literaturrecherche.....	7
2.1.2 Relevante Quellen in chronologischer Darstellung.....	10
2.2 Mathematische Beschreibungen von Zahnbogenformen.....	24
2.2.1 Lokalisation von Referenzpunkten.....	24
2.2.2 Mathematische Modelle.....	30
2.2.3 Matching per "Least-Square-Fit".....	55
2.2.4 Levenberg-Marquardt-Algorithmus.....	58
2.3 Orthodontische Behandlungsbögen in der kieferorthopädischen Therapie.....	62
2.3.1 Materialien orthodontischer Behandlungsbögen.....	63
2.3.2 Formen konfektionierter orthodontischer Behandlungsbögen.....	67
<b>3. Entwicklung des "Dental Archform Managers" (DAM).....</b>	<b>104</b>
3.1 Anforderungen an ein computergestütztes Bogenform-Analysemodul.....	104
3.1.1 Anforderungen an die Softwareentwicklung.....	105
3.1.2 Anforderungen an die Funktionalität eines Bogenform-Analysemoduls.....	108
3.2 Grafische Benutzeroberfläche (GUI).....	110
3.3 Manuelle Festlegung der Referenzpunkte.....	111
3.4 Initiale Bogenformbestimmung / Okklusionslinie.....	116
3.5 Bogenformanpassung.....	126
3.6 Bukkale Zielbogenbestimmung.....	130
3.7 Auswahl des kieferorthopädischen Behandlungsbogens.....	138
<b>4. Exemplarischer Behandlungsfall.....</b>	<b>147</b>
4.1 Einzelkieferbetrachtung.....	153
4.2 Betrachtung der antagonistischen Okklusion.....	160
<b>5. Diskussion.....</b>	<b>172</b>
5.1 Auswahlhilfe für Bogenformberechnungsmodelle in Klinik und Wissenschaft...	172
5.1.1 Explizite Beschreibung einer Zahnbogenform.....	173
5.1.2 Vergleich von Zahnbogenformen.....	174
5.1.3 Kieferorthopädische Behandlungsplanung.....	175
5.1.4 Allgemeines Fazit zur Modellauswahl.....	176
5.2 "Dental Archform Manager" im Vergleich mit ähnlichen Applikationen.....	178
5.2.1 Anwendungsbereiche.....	178
5.2.2 Vergleich mit ähnlichen Projekten.....	178
5.2.3 Ausblick und Erweiterungsmöglichkeiten.....	183
<b>6. Literaturverzeichnis.....</b>	<b>185</b>
<b>7. Danksagung.....</b>	<b>196</b>
<b>8. Lebenslauf.....</b>	<b>197</b>
<b>Anhang.....</b>	<b>1</b>

**1. Einleitung**

Diskrepanzen zwischen der Summe der Zahnbreiten und der absoluten Länge der Alveolarfortsätze führen oft zu Überlappungen von Zähnen, den sogenannten "Engständen", welche im Volksmund als "schiefe Zähne" imponieren. Während einer kieferorthopädischen Therapie wird neben anderen Platzbeschaffungsmethoden häufig die Zahnbogenform im Sinne einer Zahnbogenexpansion therapeutisch verändert. Auf diese Weise kommt es zu einer Vergrößerung der Zahnbogenlänge und die Zähne können orthodontisch in ihrer idealen Position in einem harmonischen Zahnbogen auf dem Alveolarfortsatz ausgerichtet werden.

Die Methode der Platzbeschaffung durch eine Zahnbogenexpansion unterliegt jedoch engen Grenzen durch die individuelle Anatomie und Physiologie der Patienten. Im Rahmen der klassischen Forschung von Wachstum und Entwicklung postulierten, basierend auf den Lehren von CHARLES DARWIN (1809-1882), schon Ende des achtzehnten Jahrhunderts JULIUS WOLFF (1836-1902) [188] und WILHELM ROUX (1850-1924) [144] das Gesetz der "Funktionellen Anpassung". Es wurde den Wissenschaftlern verstärkt bewusst, dass "Weichgewebe Hartgewebe formt". WOLFF verfasste "Das Gesetz der Transformation der Knochen" und schrieb sinngemäß: "Die kieferorthopädische Einflussnahme auf die Gewebe im orofazialen Bereich beruht auf der Möglichkeit, Knochen durch gezielte Kraftapplikation zum Umbau anzuregen".

Einerseits wurde in den letzten Jahrzehnten gezeigt, dass durch funktionskieferorthopädische Maßnahmen tatsächlich Knochenstrukturen während des Wachstums dauerhaft zu beeinflussen sind, andererseits wird im Hinblick auf die beschriebenen Postulate aber deutlich, dass die Stabilität von Behandlungsergebnissen ganz erheblich von der Funktion der umgebenden Weichteilkapsel und den Grenzen der Wachstumsintervalle abhängt, was zu einer Problematik führen kann, die allen Kieferorthopäden bekannt ist: dem "Rezidiv".

Aus den ROUX'schen Lehren lässt sich ableiten, dass die Zahnbogenform, neben der genetischen Determination, Ausdruck des individuellen Kräftegleichgewichtes der intra- und extraoralen Weichgewebe ist. Folglich darf ein Zahnbogen nicht unbegrenzt therapeutisch erweitert werden, obwohl moderne festsitzenden Multibrackettechniken mit superelastischen Bogenmaterialien dieses technisch-mechanisch in großem Umfang ver-

mögen. Nach therapeutischen Maßnahmen, welche die Expansionen von Zahnbögen umfassen, stellen sich daher häufig Rezidive ein. Die Weichteilkapsel des Gesichtes, sowie die parodontalen Bindegewebszüge üben erhebliche Kräfte aus, die in Richtung der Ausgangssituation abzielen. Folglich können expandierte Zahnbögen zumindest teilweise kollabieren und das Behandlungsergebnis läuft Gefahr sich qualitativ zu verschlechtern, da - vor allem im Unterkieferfrontzahnbereich - erneut Engstände entstehen.

Daher hat sich in der kieferorthopädischen Therapie eine weit verbreitete Zielsetzung entwickelt, vor allem im Unterkiefer, die Zahnbogenform und -breite während der Therapie möglichst wenig zu verändern, um das zu erwartende Rezidiv zu minimieren. Besonders die transversale Eckzahndistanz des Unterkiefers sollte während einer kieferorthopädischen Therapie weitgehend unverändert bleiben [45],[52],[63],[80],[87]. WILLIAMS [187] stellt in seiner Arbeit über "Fact and fantasy in orthodontics" fest, dass bei starken Bogenexpansionen die größte Gefahr eines Rezidivs besteht. Auch JERING [82] stellt fest, dass insbesondere Expansionen im Unterkiefer hochgradig rezidivgefährdet sind. GRAF und EHMER [73] führen an, dass von allen möglichen Expansionen die im anterioren Bereich des Unterkiefers am instabilsten sind. Insgesamt bleiben geringe Expansionen (unter 4 mm) stabiler als Expansionen größeren Ausmaßes. Ein weiterer, im Hinblick auf Komplikationen bei der kieferorthopädischen Behandlung zu berücksichtigender Effekt ist das sogenannte "Jiggling". Darunter versteht man eine ständig wechselnde Krafteinwirkung auf die Zähne, welche mit einer erhöhten Gefahr von Wurzelresorptionen in Verbindung gebracht wird [32],[33]. Um diesen Effekt zu vermeiden empfiehlt sich die Form der Behandlungsbögen über die gesamte Therapie möglichst konstant zu halten, was eine sorgfältige initiale Bestimmung der individuellen Zahnbogenform des Patienten sowie eine durchdachte und vorausschauende Therapieplanung erfordert.

In Abbildung 1 ist ein typischer Zahnengstand im Unterkieferfrontzahnbereich dargestellt, wie er zu Beginn einer kieferorthopädischen Behandlung vorliegen kann.



Abbildung 1: Intraorales Foto - Primärer Engstand

Man sieht die Überlappungen der Frontzähne als Folge eines Platzmangels auf dem Alveolarfortsatz des Patienten (Abbildung 1), sowie einen nach anterior verhältnismäßig spitz zulaufenden Unterkieferzahnbogen mit geringer transversaler Eckzahndistanz.



Abbildung 2: Initiale Phase der Multibrackettherapie

Der Engstand wurde mittels einer Multibrackettherapie (Abbildung 2) behandelt.



Abbildung 3: Endphase der Multibrackettherapie

In Abbildung 3 sind die Frontzähne des Unterkiefers harmonisch ausgerichtet, die Engstände aufgelöst. Man sieht jedoch deutlich, dass die Platzbeschaffung primär durch eine Expansion des Zahnbogens geschah, der transversalen Abstand zwischen den Eckzähnen ist deutlich verbreitert gegenüber der Eckzahndistanz in Abbildung 2.



Abbildung 4: Intraorales Foto - kurz nach MB-Entfernung

Nach Entfernung der Multibracket-Apparatur (Abbildung 4) stellt sich der Unterkieferzahnbogen harmonisch und ohne nennenswerte Kontaktpunktverlagerungen dar. Zu diesem Zeitpunkt erhielt der Patient ein sogenanntes "Retentionsgerät", d.h. eine Zahnspange, welche die Zähne in den Folgemonaten in der Zielposition hält.

Bedauerlicherweise befolgte der Patient die detaillierten Tragezeitanweisungen der Behandler nicht.



Abbildung 5: Rezidiv - zwei Jahre nach Behandlungsabschluß

Abbildung 5 zeigt die Zahnstellung ca. zwei Jahre nach Entfernung der MB-Apparatur. Ein Vergleich mit Abbildung 1 zeigt nicht nur eine rezidierte Eckzahndistanz mit erneutem Auftreten eines Frontzahnengstandes, sogar die Einzelzahnstellungen entsprechen sehr genau dem Ausgangsbefund, z.B. ist Zahn 42 erneut der am weitesten prokliniert stehende Zahn. Durch adäquate Retentionsmaßnahmen mit Einhaltung der Tragezeitanweisungen bzw. der Applikation festsitzender Retainer, sind derartige Rezidive zwar zu minimieren, jedoch zeigen viele Studien [52],[63],[80],[87], dass die Rezidivprophylaxe schon bei der Planung der Zielbogenform zu Beginn der kieferorthopädischen Behandlung ansetzen muss, um als Zielsetzung eine möglichst geringe Veränderung der Zahnbogenform zu gewährleisten.

Kieferorthopädische Behandlungsbögen gibt es von zahlreichen Dentalfirmen in verschiedenen Bogenformen und -größen. Zu Beginn der Therapie wählt der Behandler anhand von Gipsmodellen die individuell am besten passende Bogenform aus. Dieser Arbeitsgang erfolgt heute noch vorwiegend manuell, gefolgt von einer schriftlichen Dokumentation in einer Karteikarte. Während einer Multibracketbehandlung, welche einige Monate bis zu drei Jahren dauern kann, wird die initial ausgewählte Bogenform beibehalten, sofern das Behandlungsziel nicht grundlegend geändert werden muss. D.h. während des mehrjährigen Behandlungsverlaufs, mit dem sukzessivem Einsatz von Bögen aus verschiedenen Materialien und unterschiedlichen Durchmessern, sollte die Zahnbogenform möglichst konsistent gehalten werden, was eine sorgfältige initiale Bestim-

mung und Verlaufsdocumentation derselben voraussetzt.

Im Rahmen eines Beitrages zur Qualitätssteigerung bei der Multibracket-Behandlung besitzt diese Arbeit im wesentlichen drei Zielsetzungen: Zunächst soll eine umfassende Literaturrecherche zu den historischen und aktuellen computergestützten Verfahren der Beschreibung von Zahnbogenformen in Sinne eines Reviews durchgeführt werden. Darauf aufbauend soll eine Klassifikation der verschiedenen mathematischen Modelle, sowie eine Entscheidungshilfe für den klinischen und wissenschaftlich tätigen Kieferorthopäden zur Auswahl des geeigneten mathematischen Modells erarbeitet werden. Die so gewonnenen Erkenntnisse sollen in die Entwicklung eines Computerprogramms einfließen, welches als zusätzliches digitales Analysemodul an bestehende elektronische Modellanalyseysteme angebunden werden kann und bei der Auswahl und Dokumentation der optimalen Bogenformen Hilfestellungen leistet, indem ein kieferorthopädischer Behandlungsbogen virtuell auf das Anfangsmodell projiziert wird und durch diverse Programmfunktionen modifiziert, auf das Behandlungsziel abgestimmt und permanent patientenbezogen gespeichert werden kann. Druckfunktionen sollen die individuellen Zielzahnbogenformen zusätzlich als individuelle "Bogen-Templates" auf Papier darstellen können, sodass auch ein manuelles Biegen bzw. eine Anpassung kieferorthopädischer Stahlbögen erfolgen kann.

## **2. Zahnbogenformen und orthodontische Behandlungsbögen**

Die folgenden Kapitel geben einen umfassenden Überblick über den internationalen Wissensstand zu dem Thema "Zahnbogenformen". Im Sinne eines "Reviews" wird, angefangen von frühen historischen Publikationen bis zu aktuellen Veröffentlichungen wissenschaftlicher computergestützter Projekte, die spezifische Literatur systematisch gesichtet und chronologisch aufbereitet. In einem eigenen Kapitel werden die zahlreichen komplexen mathematischen Formeln, die zur Beschreibung von Zahnbogenformen verwendet werden, klassifiziert und detailliert vorgestellt. Anschließend folgt eine Übersicht über die Systematik konfektionierter orthodontischer Behandlungsbögen.

### **2.1 Zahnbogenformen im Spiegel internationaler Literatur**

In den letzten etwa hundert Jahren haben zahlreiche Autoren über die Bestimmung und Beschreibung der "idealen Zahnbogenform" publiziert. Daher erfolgt zunächst eine systematische internationale Literaturrecherche, um den "State of Art" zu ermitteln und einen Überblick über die Entwicklung und Anwendung verschiedener mathematischer Methoden zur Beschreibung der Zahnbogenformen zu erhalten.

#### ***2.1.1 Strategie der Literaturrecherche***

Seit der Öffnung großer Literaturdatenbanken über das Internet stehen jetzt (2007) nahezu alle medizinischen Zeitschriften für eine Online-Recherche zur Verfügung. Die Suche in dem exponentiell wachsenden Informationsangebot medizinischer Inhalte und Veröffentlichungen wird durch frei verfügbare Internet-Suchportale unterstützt, die Meta-Recherchen in großen Journal-Katalogen zulassen (vgl. Tabelle 1). Für das Verständnis der historischen Entwicklung der Zahnbogenformmodelle wurden zusätzlich einige zahnmedizinische Lehrbücher einbezogen.

##### **2.1.1.1 Primäre internationale Datenquellen**

Um einen Überblick über die in der Literatur verwendeten Modelle und die Herangehensweisen bei der Beschreibung von Zahnbogenform zu erlangen, wurde eine umfangreiche Literaturrecherche im Sinne eines "Reviews" durchgeführt. Neben der Rückverfolgung anhand zitierter Literatur in Artikeln und Lehrbüchern wurden dabei alle großen

Literaturdatenbanken berücksichtigt. Tabelle 1 gibt zeigt die bei der Recherche verwendeten Datenbanken und Suchmaschinen.

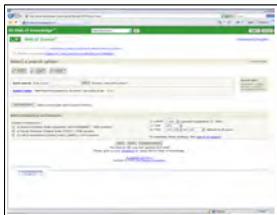
Internet-Portale für Literaturrecherchen		
Datenbank	Beschreibung	
<b>MEDLINE über PubMed</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ Datenbank erfasst momentan mehr als 4800 bio-medizinische Journale aus über 70 Ländern</li> <li>▶ enthält momentan mehr als 14 Millionen Einträge</li> </ul>	
<b>Scopus</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ Zitationsdatenbank von Elsevier</li> <li>▶ Enthält ca. 25 Millionen Abstracts aus über 14.000 Titeln</li> <li>▶ weltgrößte Abstract-Datenbank</li> </ul>	
<b>Web of Science</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ Zitationsdatenbank des Institute for Scientific Information (ISI)</li> <li>▶ Enthält Einträge aus ca. 8700 Journalen verschiedener Fachrichtungen</li> </ul>	
<b>IngentaConnect</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ Große Lehrbuch und Publikationsdatenbank</li> <li>▶ enthält momentan über 20 Millionen Einträge</li> </ul>	
<b>DigiBib</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ Digitale Bibliothek des Landes Nordrhein-Westfalen</li> <li>▶ Metasuchmaschine für viele Bibliothekskataloge und Literaturdatenbanken aus aller Welt</li> </ul>	
<b>Google Scholar</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ Betaversion der Zitationsdatenbank von Google</li> </ul>	

Tabelle 1: Online-Datenbanken für Literaturrecherchen

2.1.1.2 Spezielle Suchstrategie

Tabelle 2 enthält die wichtigsten, bei der Recherche verwendeten Schlüsselwörter.

<b>Schlüsselwörter (Keywords)</b>	
<b>deutsch</b>	<b>englisch</b>
Bogenform	arch form
	arch shape
Zahnbogen	dental arch
	dental arcade
Mathematische Beschreibung	mathematical description
Ideale Bogenform	ideal arch form
Betafunktion	beta function
Kettenlinie	catenary
Kegelschnitte	conic sections
Fourierreihe	fourier series
Polynom	polynomial
Spline-Kurven	spline curve

Tabelle 2: Schlüsselwörter der Literaturrecherche

Die Schlüsselwörter wurden bei der Recherche zu unterschiedlichen Suchanfragen an die verschiedenen Datenbanken kombiniert. Tabelle 3 zeigt exemplarisch für die Datenbank MEDLINE die durchgeführte Suchstrategie in der für das PUBMED-Interface üblichen Syntax.

<b>Exemplarische MEDLINE Suchstrategie</b>	
	<b>Schlüsselwörter und Syntax</b>
<b>#1</b>	arch form <b>AND</b> mathematical description
<b>#2</b>	dental arch <b>AND</b> mathematical description
<b>#3</b>	ideal arch form
<b>#4</b>	catenary <b>OR</b> polynomial <b>OR</b> conic <b>OR</b> spline <b>OR</b> beta function <b>OR</b> fourier
<b>#5</b>	arch form <b>AND</b> #4
<b>#6</b>	dental arch <b>AND</b> #4
<b>#7</b>	<b>#3 AND #4</b>

Tabelle 3: Suchstrategie am Beispiel MEDLINE über PubMed

Die Suche über die weiteren, oben genannten Suchportale erfolgte analog, mit der für diese Portale speziellen Syntax und Recherchefiltern.

### 2.1.2 Relevante Quellen in chronologischer Darstellung

Eine der ersten Arbeiten zu diesem Thema stammt von HAWLEY [74] aus dem Jahre 1905. In dieser Arbeit entwickelte er eine ursprünglich von BONWILL [25] 1885 beschriebene Methode der Bogenformbeschreibung zur bekannten BONWILL-HAWLEY-Bogenform weiter.

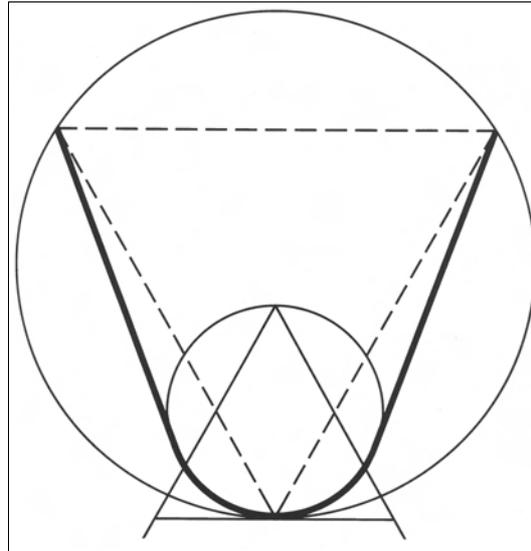


Abbildung 6: BONWILL-HAWLEY-Bogenformkonstruktion

Diese Bogenform stellt eine rein geometrische Beschreibung des Zahnbogens dar (Abbildung 6). Die Front- und Eckzähne werden dabei durch einen Kreisbogen beschrieben, dessen Radius der Summe der Breiten von Schneide- und Eckzähnen gleicht. Aus diesem Kreis wird ein gleichseitiges Dreieck abgeleitet, dessen Seitenlänge als Radius des größeren Kreises dient. Ein weiteres, in den größeren Kreis eingeschriebenes, gleichseitiges Dreieck definiert die Endpunkte des Zahnbogens. Ab den Eckzähnen wird der Verlauf des Zahnbogens mit Geraden durch die Endpunkte des Zahnbogens beschrieben [39].

Zur selben Zeit kam parallel die Idee auf, die Zähne seien in Form einer halben Ellipse (BLACK [24], 1894), oder aber auf einer parabolischen Kurve (ANGLE [14], 1907) angeordnet. Insbesondere ANGLE sah die BONWILL-HAWLEY-Form nur als eine Näherung an die wahre Okklusionslinie an. Auch WILLIAMS [186] beschrieb 1917 die Form des Frontzahnbogens als Kreis, an dem sich die weiteren Zähne auf einer geraden Linie anschließen, was eine der BONWILL-HAWLEY-Form sehr ähnliche geometrische Beschreibung ergab.

1919 kritisierte HELLMANN [77] die BONWILL-HAWLEY-Form, da er in seinen Untersuchungen keine Relation zwischen Einzelzahnbreiten und allgemeiner Bogenform fand. Auch STANTON [161] (1922) und IZARD [81] (1927) verwarfen die Idee der BONWILL-HAWLEY-Bogenform. Letzterer fand in der von ihm untersuchten Probandengruppe bei 75 % einen ellipsoiden, bei 20 % einen paraboloiden und in 5 % einen "U"-förmigen Zahnbogen [81]. CHUCK [39] empfahl 1934 zwar weiterhin die BONWILL-HAWLEY-Form zur kieferorthopädischen Behandlung, schlug aber eigene kleinere Veränderungen vor, um den Bogen individuell anzupassen.

MACCONAILL [102] brachte 1949 eine neue Form der Zahnbogenbeschreibung vor, die sogenannte "Kettenlinie", die sich ergibt, wenn ein Seil oder eine Kette unter ihrem eigenen Gewicht an zwei Punkten aufgehängt wird (Abbildung 7).

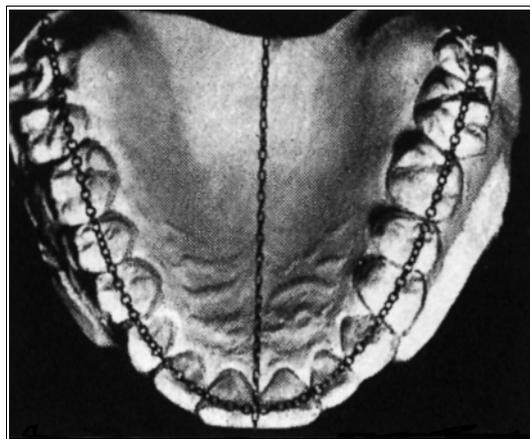


Abbildung 7: Kettenlinie auf Gipsmodell, aus MacCONAILL [102]

Durch Veränderung des Abstandes der Aufhängepunkte und der Länge der Kette näherte der Autor den Verlauf des Zahnbogens an.

SVED [163] griff 1952 seine schon 1928 erstmals vorgestellte Idee über die Beschreibung des Zahnbogens mit Hilfe von "Kugelschnitten" wieder auf: Auch in dieser Beschreibung liegen die Frontzähne auf einem Kreisbogen, die restlichen Zähne des Bogens allerdings auf einem zu diesem Kreisbogen senkrecht verlaufenden Schnittebene entlang eines Großkreises um die laut SVED auf einer Kugel liegende Okklusionsfläche (Abbildung 8).

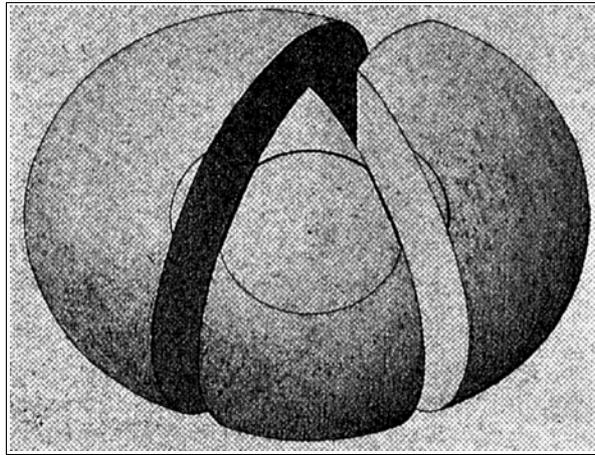


Abbildung 8: Zahnbogenform nach Sved [163]

Bei der Projektion dieses Zahnbogens in eine Ebene ergibt sich erneut die von WILLIAMS [186] schon 1917 vorgeschlagene Beschreibung. 1950 wurde von NUMATA [121] die schon zuvor vorgebrachte Idee der Anordnung der Zähne auf einem parabelförmigen Bogen erstmals formal mathematisch (d.h. explizit durch eine Formel, die einen mathematischen Zusammenhang zwischen der x- und y-Koordinate auf dem Bogen angibt) durch eine Parabel  $y = a x^2$  beschrieben. Diese 1950 publizierte Beschreibung von NUMATA ist nach unseren Literaturrecherchen die erste veröffentlichte Beschreibung einer Zahnbogenform durch eine mathematische Formel.

HAYASHI [75] verallgemeinerte 1956 diesen Ansatz auf Potenzen mit rationalen (also als Bruch darstellbaren) Exponenten und führte zusätzlich zur besseren Annäherung an verschiedene Bogenformen einen exponentiellen Korrekturterm ein (vgl. Kapitel 2.2.2.3 "Polynome").

Etwa zur gleichen Zeit (1957) griff SCOTT [155] den Beschreibungsansatz von MACCONAIL [102] über die Kettenlinie wieder auf. SCOTT charakterisierte bei seiner Untersuchung die Zahnbogenform von fetalen sowie adulten Zahnbögen von Tieren und Menschen durch eine freihängende Kette, deren Länge und Abstand der Aufhängepunkte zur individuellen Anpassung wie bei MACCONAIL [102] verändert wurden. BURDI [35],[34] unternahm 1966 und 1968 darauf aufbauend eine genauere Untersuchung der Zahnbogenentwicklung bei menschlichen Embryonen und entwickelte zur reproduzierbaren Zahnbogenvermessung das "Catenometer" (Abbildung 9) weiter.

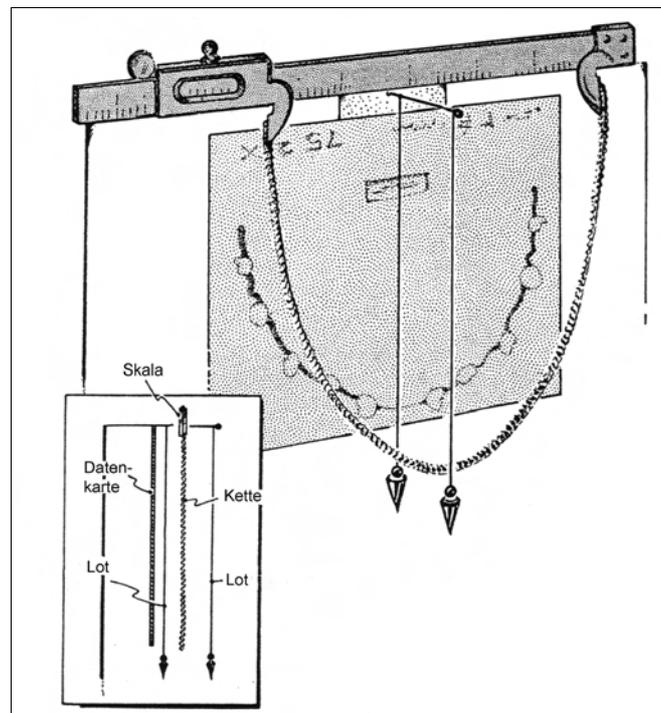


Abbildung 9: Catenometer, adaptiert nach BURDI [35]

Das Gerät besteht aus einer Schieblehre an der eine Kette und ein Lot angebracht sind. Der Aufbau wird so vor ein Modell oder der Fotografie eines Kiefers angebracht, dass das Lot durch den tiefsten Punkt der hängenden Kette und gleichzeitig durch die sagittale Symmetrielinie des Kiefers verläuft. Nun kann durch Verschieben der Schieblehre sowie Veränderung der Kettenlänge die sich ergebende Kettenlinienform mit der Zahnbogenform zur Deckung gebracht werden. Als die Form eindeutig charakterisierende Messwerte ergeben sich der an der Schieblehre ablesbare Abstand der Aufhängepunkte und die Länge der angehängten Kette. Parallel stellte LU [100],[101] 1964 und 1966 eine Beschreibung mittels Polynomen vierten Grades vor (vgl. Kapitel 2.2.2.3 "Polynome"). Insbesondere ergab diese Methode durch die Verwendung orthogonaler Polynome die Möglichkeit den einzelnen Polynomkoeffizienten Bedeutung zuzuordnen, da sie ein Maß für gegenläufige Eigenschaften wie "Symmetrie und Asymmetrie", "Kegelförmigkeit und Eckigkeit", oder der "Verkippung" des Zahnbogens boten. Im gleichen Zeitraum wurde 1965 von MILLS [108] bei einer epidemiologischen Untersuchung zu Zahnfehlstellungen der Ansatz Kegelschnitte zu verwenden erstmals konsequent mathematisiert, indem sie eine Beschreibung durch Parabeln verwendete, um die Länge des Zahnbogens zu berechnen.

1969 berichtete CURRIER [41] erstmals über den Einsatz einer computergestützten Analyse der Zahnbogenform mittels Kegelschnitten. Der Autor betrachtete auf der Basis unterschiedlicher Referenzzahnpunkte drei verschiedene Kurven (Abbildung 10).

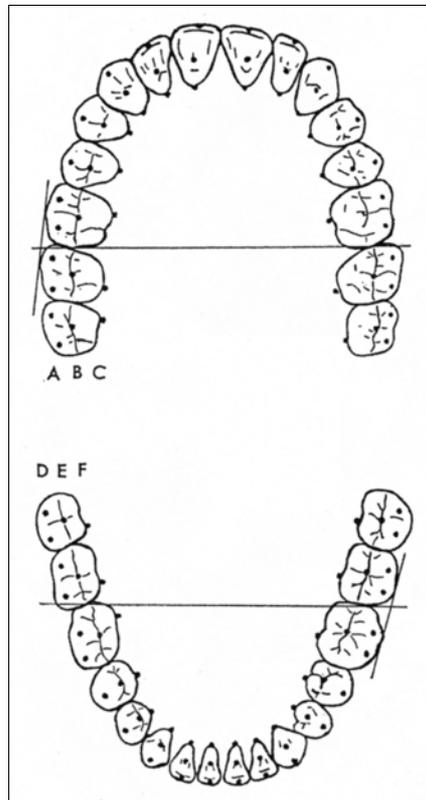


Abbildung 10: Punkte für äußere (A/D), mittlere (B/E) und innere (C/F) Kurven von CURRIER [41]

CURRIER [41] fand heraus, dass die äußeren Kurven (Inzisalpunkte und bukkale Höcker- spitzenpunkte) von Ober- und Unterkiefer am besten durch Ellipsen, die Punkte in den zentralen Fissuren dagegen eher durch Parabeln beschrieben werden konnten. Für die innere Kurve (Verbindungspunkte auf den lingualen Zahnflächen) schnitt keine der beiden Beschreibungen signifikant besser ab. SANIN [150] ermittelte 1970 eine empirische Regressionsformel, mit der aus Bogenhöhe und -weite die Bogenlänge bestimmt werden konnte und verglich diese mit der Bogenlänge, die aus einem Polynom vierten Grades bestimmt wurde. Seine Untersuchung ergab, dass eine hinreichend genaue Bogenlänge auch durch seine empirische Näherungsformel ermittelt werden kann. Im gleichen Jahr griff SCHUMACHER [154] unbewusst den Ansatz von HAYASHI [75] wieder auf, indem er untersuchte welche Exponenten in Polynomen der Art  $y = x^n$  die Form des Zahnbogens und des Alveolarfortsatzbogens am besten beschreiben. Der Autor fand heraus, dass bei

beiden, sowohl im Ober- als auch Unterkiefer, eine Funktion dritten Grades (also  $y = x^3$ ) die beste Annäherung ergab. BIGGERSTAFF [23] führte 1972 die vollständige, explizit mathematische Beschreibung der Zahnbogenform durch Kegelschnitte ein, indem er die Gleichung

$$AX^2 + BY^2 + CXY + DX + EY - F = 0$$

Formel 1: Allgemeine Formel eines Kegelschnitts nach BIGGERSTAFF [23]

und damit die allgemeine Formel eines Kegelschnitts mittels eines Computerprogramms an die Zahnbogenformen seiner Patienten annäherte. Im gleichen Jahr untersuchte BRADER [26] die Form der Zahnbögen, sowie den Einfluß intraoraler orthodontischer Kräfte auf die Zähne. Die Beschreibung des Zahnbogens mittels Ellipsen und die Einbeziehung der intraoralen Kräfte führte zur Entwicklung der bis heute in kieferorthopädischen Multibracket-Behandlungen verwendeten BRADER-Bogenformen. 1973 beschrieb MUSICH [111] ein weiteres mal das auf BURDI [34],[35] zurückgehende "Catenometer" als ein verlässliches Werkzeug zur Bestimmung des Zahnbogens.

Zwei Jahre später verwendete PEPE [130] 1975 erstmals eine explizite mathematische Beschreibung der Kettenlinie mit einer Koordinatengleichung und verglich diese Methode mit Polynomen bis zu achten Grades. Sie fand, dass Polynome sechsten Grades am besten die Zahnbogenform annähern, während ihr Kettenlinien weniger geeignet erschienen. Im Ausblick dieser Publikation wies die Autorin auch erstmals auf die Idee hin, in Zukunft kubische Splinefunktionen zur Beschreibung von Zahnbogenformen zu verwenden. Im gleichen Jahr unternahm LAVELLE [88] unter Verwendung einer Deskription mit Kegelschnitten eine Querschnittsstudie zum Vergleich der Zahnbogenformen in verschiedenen Ethnien ("caucasoid", "negroid" und "mongoloid"). Die Studie ergab signifikante Unterschiede zwischen den verschiedenen Völkergruppen, die in kieferorthopädischen Therapien berücksichtigt werden sollten.

Mit der zunehmenden Verbreitung von Computern nahmen von nun an auch die rein mathematischen Modelle zur Beschreibung der Zahnbogenformen zu, da die Ermittlung der Parameter und die Annäherung der Modelle an digitalisierte Landmarks (z.B. über "Least-Square"-Methoden, vgl. Kapitel 2.2.3 "Matching per 'Least-Square-Fit'") mit Computerprogrammen immer einfacher und effizienter wurden. Insbesondere die Be-

schäftigung mit "SplineKurven" zur Beschreibung der Bogenformen wurde erst durch die große Rechenleistung von Computern möglich. WHITE [170] entwickelte 1977 eine auf elliptischen Zahnbogenformen basierende Plastikschablone, mit der auf einfache Art und Weise die Diskrepanzen zwischen Bogenlänge und Platzbedarf der Zähne festgestellt werden kann. HECHTER [76] untersuchte 1978 die Asymmetrie in menschlichen Zahnbögen und verglich dazu die Form "akzeptabler" bzw. in Normalokklusion stehender Zahnbögen mit kieferorthopädisch korrigierten Zahnbögen vor und mindestens zwei Jahre nach der Behandlung. Da er für die Formbeschreibung symmetrische Polynome zweiten Grades verwendete, entwickelte er für die Symmetriebetrachtungen drei Indices, die auf Abstands- und Winkelmessungen der korrespondierenden linken bzw. rechten Zähne in Bezug auf die vertikale Mittellinie des Zahnbogens basieren. HECHTER [76] fand, dass das Maß an Asymmetrie von Malokklusionen unabhängig, zufällig schwankte. Zudem tendierte eine bei Behandlungsbeginn vorhandene Asymmetrie nach Beendigung der Retention zurückzukehren. Ob die Behandlung mit oder ohne Extraktion erfolgte, ergab keinen eindeutigen Effekt auf die Stabilität der Symmetrie nach Retentionsende. Ebenfalls 1978 verglich WHITE [171] die Passform der Kettenlinie, BONWILL-HAWLEY-Bogenform, BRADER-Bogenform und der computergestützt entwickelten ROCKY-MOUNTAIN-DATA-SYSTEMS-Bogenform (RMDS-Form) [142],[153]. Der Autor favorisierte aufgrund seiner Untersuchungen vor allem die Kettenlinie und die RMDS-Form als Beschreibungen der Zahnbögen, da diese für den größten Teil der untersuchten Fälle eine gute bis sehr gute Annäherung an die individuellen Bogenformen darstellten. Auch ENGEL [50] fand 1979 bei seiner Untersuchung konfektionierter Bogenformen eine gute Übereinstimmung der zweiparametrischen Kettenlinie, bzw. der darauf basierenden im RMDS-Programm entwickelten Formen mit einer großen Anzahl untersuchter Zahnbögen. Der Autor stellte als Ergebnis neun Zahnbogenformen vor, die den allergrößten Teil der Bogenformen der untersuchten Patientenfälle abdecken können sollen. BEGOLE [17],[18],[19],[20] entwickelte Ende der 70'er bzw. Anfang der 80'er Jahre eine Reihe von Programmen zur Beschreibung der Bogenformen mittels kubischer Spline-Kurven [18],[19],[20] und der Kettenlinie [17]. 1981 [148] bzw. 1983 [149] veröffentlicht SAMPSON eine statistische Analyse der Zahnbogenformen in der Bevölkerung, basierend auf Kegelschnitten. Der Autor ermittelte dabei eine "durchschnittliche" Zahnbo-

genform, betonte aber, dass in der Bevölkerung starke Variationen der Bogenformen bestünden. FELTON [52] publizierte 1987 eine Studie, in der er einerseits konfektionierte Bögen mit den Zahnbogenformen seiner Patienten verglich und andererseits die Zahnbogenform vor und nach kieferorthopädischen Behandlungen mit einem Polynom vierten Grades annäherte und anschließend verglich. Auch dieser Autor kam zu dem Ergebnis, dass obwohl in ungefähr 50 % der Fälle ein konfekzionierter Bogen eine sehr gute Annäherung an die Bogenform darstellte, in den restlichen Fällen eine sehr große Variation an Bogenformen existiert und daher zur Vermeidung von Rezidiven für die Behandlung möglichst die individuelle Bogenform bestimmt werden soll. MCKEE [104] nahm 1988 den Ansatz der "Spline-Kurven" von BEGOLE [18] wieder auf, um eine Untersuchung über die Zahnbogenformen bei australischen Aborigines durchzuführen. Die Methode ist prinzipiell dieselbe, aber an Stelle kubischer Polynome benutzte der Autor "quasi-kubische HERMITE-Polynome", da diese seiner Aussage nach einen "geschmeidigeren Kurvenverlauf" gewährleisten. 1989 führte JONES [83] eine Untersuchung der Passform von Parabeln vor und nach kieferorthopädischer Behandlung durch. Der Autor fand die beste Übereinstimmung der Parabelform mit dem Unterkieferzahnbogen bis zu den ersten Molaren. Es ergab sich außerdem nach der Behandlung eine genauere Übereinstimmung der Parabeln mit den Zahnbögen als bei den unbehandelten Bögen. JONES führte dies auf die bei der Behandlung verwendeten konfektionierten Bögen zurück. RICHARD [136] beschrieb 1990 die Morphologie der Zahnbögen australischer Zwillinge ebenfalls mit Polynomen vierten Grades und benutzte die Koeffizienten der Polynome dabei direkt als Maß für die Form des Zahnbogens (im Unterschied zu LU [101], der den mathematisch sichereren Weg über orthogonale Polynome nahm, um die Unabhängigkeit der einzelnen Koeffizienten im Hinblick auf die Zahnbogenform zu gewähren). GERMANE [70] griff 1991 in einer Untersuchung zur Zunahme des Bogenumfangs durch kieferorthopädisch-orthodontische Expansion auf "kubische Spline-Kurven" zurück. RABERIN [135] untersuchte 1993 die Zahnbogenformen verschiedener Probanden mit normaler Okklusion mittels Polynomen sechsten Grades und stellte dabei keine signifikanten Unterschiede in den Bogenformen männlicher und weiblicher Probanden fest. Die Zahnbögen der weiblichen Probanden wiesen jedoch insgesamt kleinere Abmessungen auf. FERRARIO [55] kam ein Jahr später bei der Betrachtung der Bogenform in ge-

sunden bleibenden Gebissen, unter Verwendung einerseits von Polynomen vierten Grades und parallel dazu einer Annäherung der Frontzähne durch Ellipsen und der restlichen Zähne durch Parabeln, zu demselben Ergebnis: Es ergaben sich keine signifikanten Bogenformunterschiede zwischen männlichen und weiblichen Probanden, mit Ausnahme der kleineren Dimensionen der weiblichen Alveolarfortsätze. Zusätzlich stellte FERRARIO nur vernachlässigbare Asymmetrien in seiner Probandengruppe fest. 1995 verwandte DE LA CRUZ [45] Kegelschnitte zur Beobachtung von Langzeitänderungen der Zahnbogenformen nach kieferorthopädischen Behandlungen. Das Ergebnis dieser Untersuchung war, dass die ursprüngliche Bogenform der Patienten während der Behandlung möglichst wenig verändert werden sollte, da sonst die Wahrscheinlichkeit für Rezidive zunimmt. Trotzdem ist laut DE LA CRUZ auch die Minimierung der Bogenformänderung keine Garantie für eine dauerhaft gleichbleibende Bogenform nach Abschluss einer kieferorthopädischen Behandlung, da die Stabilität kieferorthopädischer Behandlungsergebnisse von vielen zusätzlichen Parametern abhängt. Einige der Ergebnisse dieser Arbeit sind aber laut RUSSEL [147] kritisch zu beurteilen, da es bei der Untersuchung wohl zu fehlerhaften statistischen Auswertungen gekommen ist. Bei der Vorstellung eines neuen Verfahrens zur Zahnbogenlängenbestimmung (basierend auf einer definierten Anleitung zur Einzelzahnbreitenmessung) verwandte BATTAGEL [16] die Kettenlinie als Vergleichsmodell um die Brauchbarkeit des neuen Verfahrens zu demonstrieren. Im Jahr 1997 untersuchte BRAUN [27] mithilfe der Kettenlinie das vordere Zahnbogensegment, stellte eine ausgezeichnete Passform fest und nutzte dies um eine Relation zwischen Eckzahnabstand, Bogentiefe und Bogenlänge aufzustellen. 1998 wurden von DAVIS [44] und BEGOLE [21],[22] ebenfalls kieferorthopädische Rezidive untersucht, die Autoren bedienten sich zur Zahnbogenformbestimmung "kubischer SplineKurven". Sie stimmten darin überein, dass kubische Spline-Kurven eine gute Möglichkeit darstellen, um Änderungen in den Zahnbogenformen zu beschreiben, geben aber beide an, die Möglichkeit einer Rezidivvorhersage sei, anhand den von ihnen aus den Beschreibungen gewonnenen Parametern, nur sehr eingeschränkt gegeben. 1998 schlug BRAUN [28] eine in der Literatur völlig neue mathematische Beschreibung der Zahnbogenform über eine "modifizierte Beta-Verteilung" vor (vgl. Kapitel 2.2.2.4). Diese beschreibt laut Aussage des Autors die Zahnbogenformen wesentlich genauer als

die bisherigen Ansätze. In der Publikation wurden einige Daten irrtümlich vertauscht, ein Kommentar und Berichtigung erfolgte in [115]. Im folgenden Jahr verwendete BRAUN [31] seinen neuen Ansatz, um die Passform verschiedener konfektionierter superelastischer Nickel-Titanium-Bögen zu untersuchen, mit dem Ergebnis, dass diese nicht angemessen der natürlichen Form der menschlichen Zahnbögen entsprechen. NOROOZI [119] verglich 2001 die neue Methode von BRAUN mit der herkömmlichen Annäherung über Polynome und fand heraus, dass der mathematische Mehraufwand einer Verwendung der Betafunktion nicht gerechtfertigt sei, da ein Polynom 6. Grades eine vergleichbar gute Annäherung bieten würde. FERRARIO [53] unternahm 1999 eine weitere Untersuchung zur Ermittlung von Unterschieden der Zahnbogenmorphologie in verschiedenen ethnischen Gruppen. Der Autor benutze zur Beschreibung der Zahnbogenformen Polynome vierten Grades. Die Zahnbögen zeigten, bis auf die bekannte Beobachtung größerer Bogendimensionen bei Männern, keine eindeutigen Unterschiede zwischen den Geschlechtern derselben ethnischen Gruppe, es konnte über die Zahnbogenformen aber relativ sicher auf die ethnische Zugehörigkeit rückgeschlossen werden. Im gleichen Jahr griff BRAUN [29],[30] seine früheren Überlegungen über die Kettenlinie wieder auf und stellte ein Computerprogramm sowie ein Nomogramm<sup>5</sup> vor, mit dessen Hilfe die Bogenlänge des vorderen Zahnbogensegments aufgrund der Weite und Tiefe des Zahnbogens bestimmt werden kann.

BURRIS [36] untersuchte im Jahr 2000 die Unterschiede in der Zahnbogenmorphologie von weißen und schwarzen Amerikanern und bediente sich dabei sowohl "kubischer SplineKurven" als auch Polynomen vierten Grades, um die Koeffizienten wie von LU [101] vorgeschlagen zur Beurteilung der Bogenform einzusetzen. Es ergaben sich signifikante Unterschiede sowohl in Form als auch Größe der Zahnbögen, die bei der kieferorthopädischen Behandlung berücksichtigt werden sollten. Im gleichen Jahr stellte MUTINELLI [113] ein mathematisches System vor, um die Variation der Zahnbogenlänge in Abhängigkeit von der Schneidezahninklination zu berechnen. Die Zahnbogenform wurde dabei sowohl mit Kegelschnitten, als auch mit der Kettenlinie beschrieben. NOOROZI [120] stellt in 2000 ein auf der Betafunktion basierendes Nomogramm vor, das eine schnelle grafische Bestimmung der Zahnbogenlänge aus der Bogenweite und -höhe erlaubt. Ebenfalls in 2000 kombiniert HNAT [79] den Kettenlinien- und Betafunktionsan-

satz von BRAUN [28],[29], indem er den Frontzahnbogen bis zu den Eckzähnen mit der Kettenlinie, die dahinter liegenden Zähne mit der Betafunktion beschreibt. Auf diese Beschreibung aufbauend stellt er ein Verfahren vor, mit dem sich die Zahnbogenlängenveränderung bei Erweiterung der Kieferbreite vorhersagen lässt. HENRIKSON [78] publizierte 2001 eine Langzeitstudie, in der die Zahnbogenformen von Probanden mit normaler Okklusion vom 13. bis zum 31. Lebensjahr verfolgt wurde. Zur Beschreibung wurden hier Kegelschnitte verwendet. Der Autor fand keine allgemeine ideale Zahnbogenform, bei vielen seiner Probanden veränderte sich schon im Jugendalter und im Erwachsenenalter weiterhin die Zahnbogenform, was dem Autor fraglich erscheinen lässt, ob eine posttherapeutische stabile Zahnbogenform grundsätzlich überhaupt zu garantieren ist. Ebenfalls 2001 untersuchte SETO [156] mithilfe Polynome vierten Grades die Oberkiefermorphologie von Patienten mit Schlafapnoesyndrom und stellte fest, dass die Patienten signifikant engere, spitzer zulaufende und kürzere Oberkiefer hatten als Probanden aus einer Kontrollgruppe.

Im Jahr 2002 wird von VALENZUELA [167] eine weitere (auf andere biologisch-anatomische Fragestellungen bereits angewendete [38],[94],[95]) mathematische Methode zur Beschreibung der Zahnbogenform mittels "Fourierreihen" vorgestellt und mit Annäherungen durch Polynome vierten Grades verglichen. Die Autorin kommt zu dem Schluss, dass die Beschreibung durch Fourierreihen der Beschreibung durch Polynome vierten Grades an Genauigkeit überlegen ist. Auch im Jahr 2002 stellt NOROOZI [118] ein Programm zur Berechnung der Zahnbogenlänge aus der Bogentiefe und -weite mittels eines Polynoms sechsten Grades vor und zeigte die Vergleichbarkeit des Ansatzes mit herkömmlichen Messungen anhand von 23 Probanden. Ebenfalls in 2002 untersuchte TSAI [166] unter Verwendung von Polynomen dritten Grades die frühen Dentales permanentes von 53 Kindern. Der Autor entdeckte, dass die Bogendimensionen der Jungen durchschnittlich größer waren, als die der Mädchen und außerdem stärker variierten: Obwohl die größten Bögen bei den Jungen größer waren als bei den Mädchen, waren die jeweils kleinsten Bögen in beiden Gruppen etwa gleich groß. 2004 benutzte LESTREL [96] Fourierreihen zur Zahnbogenbeschreibung bezüglich der Untersuchung von Engständen und zeigte damit, dass diese Methode auch in der klinischen Anwendung nützlich sein kann. Ebenfalls 2004 publizierte KOJIMA [86] eine

computergestützte morphologische Untersuchung von Prognathien mit frontalen Kreuzbissen, der eine Analyse mit Polynomen zweiten und vierten Grades zugrunde lag. Im selben Jahr veröffentlichte MUTINELLI [112] einen Artikel über ein computergestütztes System, mit dem die Veränderung der Zahnbogenform eines Patienten während einer kieferorthopädischen Behandlung verfolgt werden kann. Dieses System arbeitet wahlweise mit verschiedenen Bogenformbeschreibungen (Polynome, Kettenlinien, Kegelschnitte und kubische Spline-Kurven) und kann nach Eingabe der entsprechenden Zahnpositionen die Zahnbogenlänge und -breite berechnen. Die Veränderung der Bogenform zwischen zwei Zeitpunkten wird über die sog. "Euclidian Distance Matrix Analysis" (EDMA, vgl. [92],[93]) registriert, bei der die paarweisen Abstände aller registrierten Zahnpositionen und die Änderung dieser Abstände zur Quantifizierung der Formänderung herangezogen werden. Die Autorin entschied sich für die Möglichkeit verschiedener Beschreibungen, da auch sie nach Literaturlage sowie eigenen Untersuchungen keinen eindeutigen Favoriten unter den mathematischen Beschreibungen ausmachen konnte. Weiter vermaß TANER [164] im Jahr 2004 die Veränderung der Zahnbogenform zwischen den Zeitpunkten vor, direkt nach Abschluß und durchschnittlich 3 Jahre nach einer kieferorthopädischen Behandlung an 21 Patienten mit einer Klasse II Malokklusion. Die Untersuchung mittels kubischer Spline-Kurven und anschließende Einteilung der Bogenformen in die fünf Bogenform-Klassen nach RICKETTS [137], ergab bei seinen Patienten in 81 % der Fälle eine Veränderung der Oberkieferbogenform in eine andere Bogenformklasse während der Behandlung, von diesen blieben 76 % auch nach der Behandlung stabil. Im Unterkiefer veränderte sich bei 33 % der Patienten die Bogenform, davon blieben 71 % auch 3 Jahre nach Behandlungsende stabil. Diese Arbeit wurde allerdings dafür kritisiert nicht die geeigneten (individuellen) Bogenformen zu erfassen, subjektive Maße für die Einschätzung von "Stabilität" zu benutzen, sowie mit durchschnittlich 3 Jahren nach Behandlungsende einen zu kurzen Zeitraum zur abschließenden Beurteilung der Stabilität zu betrachten [116]. In 2006 benutzte KAGEYAMA [84] die Beschreibung durch Polynome vierten Grades sowie der modifizierten Betafunktion nach BRAUN [28] bei einer Untersuchung der Zahnbogenform von Patienten mit verschiedenen Gesichtstypen. Die Untersuchung ergab, dass der Oberkiefer bei dolichofazialen Gesichtstypen eher zugespitzt verläuft während der brachio-

faziale Gesichtstyp bei männlichen Testpersonen einen transversal weiten Oberkiefer aufweist. Der Unterkiefer der verschiedenen Gesichtstypen zeigte keine signifikanten Unterschiede. Insgesamt kommt KAGEYAMA [84] zu dem Ergebnis, dass der Polynomansatz die Zahnbögen passender beschreibt als die Betafunktion.

Abbildung 11 zeigt abschließend eine Darstellung der komplexen gegenseitigen Verknüpfung der vorgestellten Literatur. Die Publikationen sind chronologisch angeordnet, die neuesten Artikel stehen oben. Neben den aufgeführten Artikeln wird jeweils durch farbige Punkte verdeutlicht, welche Modelle in der jeweiligen Publikation verwendet wurden. Dabei steht rot für Kegelschnitte, dunkelgrün für die Verwendung einer hängenden Kette, hellgrün für die Verwendung einer mathematischen Beschreibung einer Kettenlinie, blau für ein auf Polynome basierendes Modell, orange für die Betafunktion, weiß für die Fourierreihe, schwarz für Spline-Kurven und gelb für die BONWILL-HAWLEY-Bogenform.

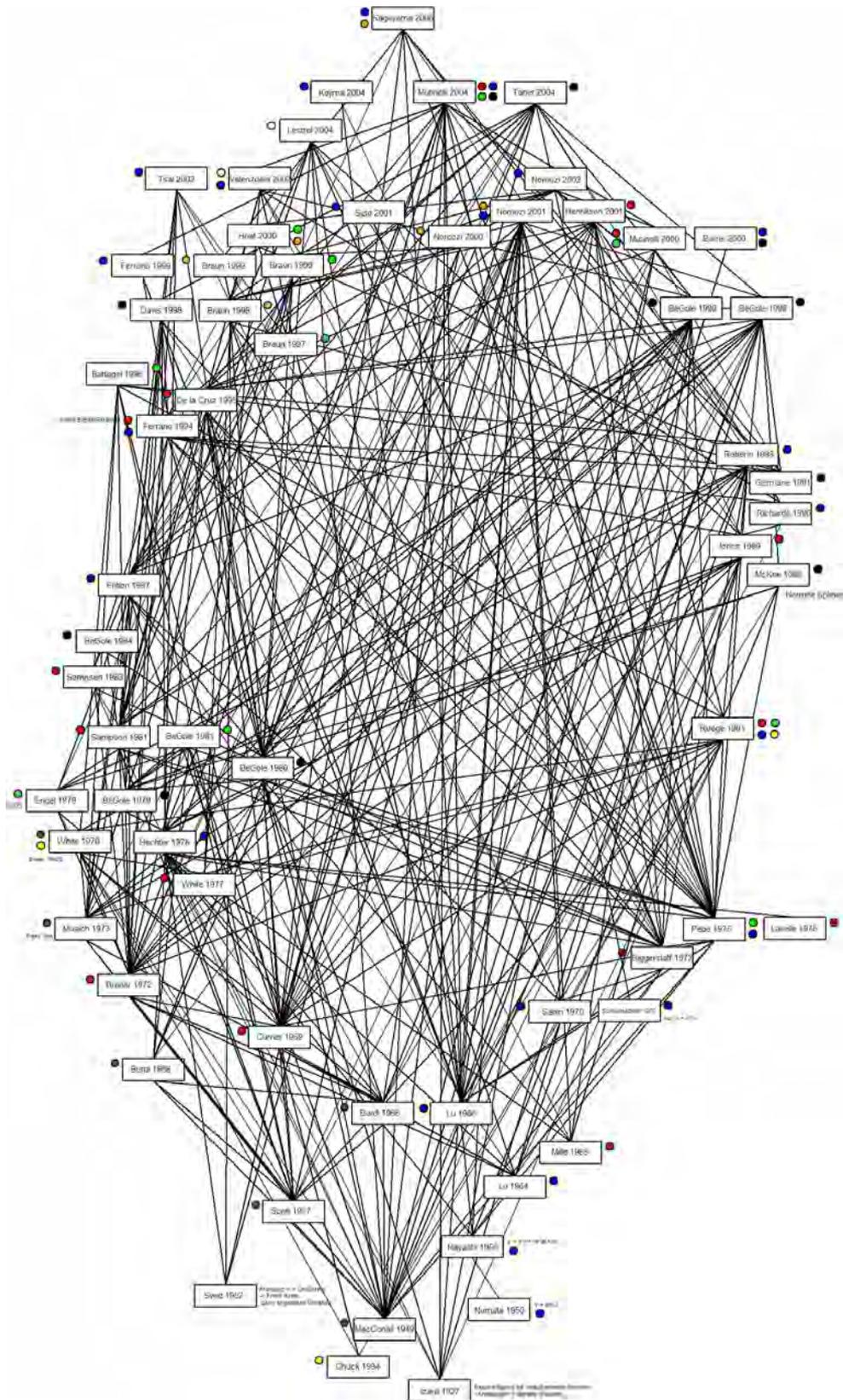


Abbildung 11: Zitationsverknüpfungen der vorgestellten Literatur

## **2.2 Mathematische Beschreibungen von Zahnbogenformen**

Vor allem seit Beginn der vermehrten Anwendung von "Straight-Wire"-Techniken mit den schwer individualisierbaren superelastischen Bogenmaterialien hat die Beachtung der Zahnbogenformen in der Kieferorthopädie eine vergrößerte Bedeutung erhalten. Im Rahmen der industriellen Herstellung von orthodontischen Behandlungsbögen für moderne Multibracketsysteme mussten mathematische Formeln zur Beschreibung symmetrischer, idealer Zahnbogenformen gefunden werden.

Zahlreiche Autoren verwendeten verschiedene mathematische Modelle (siehe Kapitel 1.3.2 "Mathematische Modelle"), um Zahnbögen von Probanden mit idealen Okklusionen möglichst exakt zu beschreiben. Sie definierten anatomische Referenzpunkte an den Zähnen und konstruierten harmonische, symmetrische Zahnbogenformen, die sich diesen Zahnpunkten möglichst stark annähern sollten.

Diese mathematischen Modelle sind in dem Fachgebiet der Kieferorthopädie Gegenstand zweier grundsätzlicher Intentionen: Zum einen dienen sie der mathematischen Berechnung "idealer" Zahnbogenformen auf der Basis von Malokklusionen im Sinne von Planungen der posttherapeutischen Bogenformen und zum anderen werden sie für den Vergleich von Zahnbogenformen verwendet, inter- (zwischen zwei verschiedenen Individuen) und intraindividuell (zu verschiedenen Zeitpunkten bei einem Individuum).

Im Rahmen therapeutischer Maßnahmen der Zahnersatzkunde können diese Modelle bei multiplen Zahnverlusten zur Positionierung von Ersatzzähnen für un- oder teilbezahnte Alveolarfortsätze hilfreich sein.

### ***2.2.1 Lokalisation von Referenzpunkten***

Bei der Festlegung der anatomischen Referenzpunkte an den Zähnen sind verschiedene Systeme zu unterscheiden (Tabelle 4).

Anatomische Zahnpunkte für Bogenformkonstruktionen		
Punktgruppen	Kurzbeschreibung	Autoren
<b>Bukkale Höckerspitzen</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ Inzisalkanten der Frontzähne und bukkale Höcker der Prämolaren</li> <li>▶ an Molaren i.d.R. zwei Punkte auf den bukkalen Höckerspitzen</li> <li>▶ häufigste Punktelokalisation zur Beschreibung von Zahnbogenformen</li> </ul>	BeGOLE 1980[19], BeGOLE 1998[21],[22], BRAUN 1998[28], DE LA CRUZ 1995[45], FELTON 1987[52], FERRARIO 1994[55], MUTINELLI 2004[112], NOROOZI 2001[119]
<b>Facial axis points (FA)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ Punkte auf den vestibulären Flächen der Zähne</li> <li>▶ auf dem anatomischen Äquator der Zähne lokalisiert</li> </ul>	FUJITA 2002[64]
<b>Antagonistische Kontaktpunkte</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ in idealer Okklusion korrespondierende Punktelokalisationen an Ober- und Unterkieferzähnen</li> <li>▶ Verbindungslinie als "Line of Occlusion" (für Ober- und Unterkiefer deckungsgleiche Bogenformen)</li> </ul>	LEHMANN 1985[91], LOTZMANN 1985[99], PROFFIT [134]

Tabelle 4: Anatomische Zahnpunkte für Bogenformkonstruktionen

Die meisten Autoren betrachten die Punktelokalisationen isoliert, bezogen auf einen Kiefer. Die aus "Höckerpunkten" konstruierten Zahnbogenlinien oder aus den "Facial axis"-Punkten (= FA-Punkte) des Ober- und Unterkiefers sind auch bei einer idealen Okklusion nicht antagonistisch deckungsgleich. Die "Line of Occlusion" (PROFFIT [134]) ist hingegen eine Bogenform, die durch die antagonistischen Zahnkontaktpunkte beider Kiefer führt und somit für beide Kiefer idealerweise die gleiche Form aufweist.

### 2.2.1.1 Bukkale Höckerspitzen

Die am häufigsten zur Konstruktion von Zahnbogenformen verwendeten Referenzpunkte sind die Inzisalkanten der Schneidezähne, sowie die bukkalen Höckerspitzen der Seitenzähne (Abbildung 12).

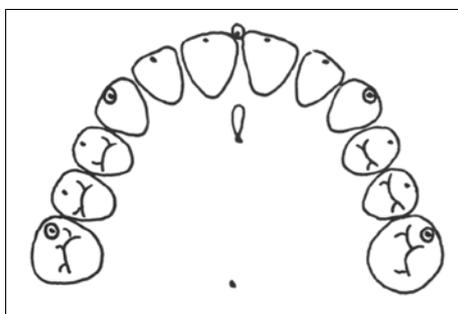


Abbildung 12: Punkte auf Inzisalkanten und Höckerspitzen [19]

Diese Punkte werden an den höchsten vertikalen Erhebungen der bukkalen Höcker der Zahnkronen festgelegt. Bei Seitenzähnen mit mehreren Höckern werden einer oder

mehrere der am weitesten vestibulär lokalisierten Höckerspitzen verwendet, die als Basis für die Bogenformberechnungen dienen.

### 2.2.1.2 Facial axis points (FA)

Bei dem Versuch die Zahnbogenform von 79 Probanden mit idealer Okklusion mittels eines objektiven mathematischen Verfahrens in möglichst repräsentative Klassen einzuteilen und herauszufinden, wie viele Klassen dazu überhaupt nötig sind, verwendete FUJITA [64] von ihm als "Facial axis points (FA)" bezeichnete Punkte zur Definition der Zahnbogenform. Diese Punkte sind "mitten" auf den Vestibulärflächen der Zähne lokalisiert und korrespondieren gut mit den Positionen der bukkalen Straight-Wire-Brackets. Die auf der Basis dieser Koordinaten konstruierten Zahnbogenformen repräsentieren annähernd die Form bukkal lokalisierter, orthodontischer Behandlungsbögen. Schon ANDREWS [13] legte 1989 die Referenzpunkte auf die vestibulären Flächen der Zähne

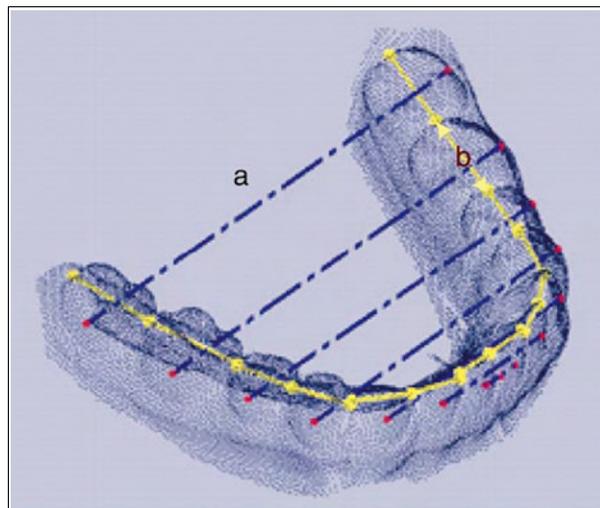


Abbildung 13: "Facial axis points" (rot markiert) nach FUJITA [64]

Nachdem FUJITA [64] die zweidimensionale Projektion der FA-Punkte auf die Okklusionsebene für 79 Probanden bestimmt hatte, wurden diese nach einem bestimmten Algorithmus Vektoren zugeordnet, die im entsprechenden Vektorraum umso näher beieinander liegen, je ähnlicher die Ausgangsbogenformen sind. FUJITA teilte diese Vektoren in eine willkürliche Anzahl von Bogenformgruppen ein, indem er aus den 79 bestimmten Vektoren jeweils eine Anzahl entsprechend der zu definierenden Bogenformgruppenzahl herausgriff und diese als Definition der einzelnen Bogenformgruppen nutzte. Es

wurden dabei jeweils die Vektoren gewählt, die im Vergleich zu den restlichen Vektoren jeweils am weitesten voneinander entfernt lagen. Alle anderen Vektoren wurden dann in die Gruppe eingeteilt, deren Vektor sie am nächsten lagen. Je mehr Gruppen eingeführt werden, umso geringer ist die durchschnittliche Abweichung der einzelnen Vektoren von dem jeweils nächstliegenden Gruppendifinitionsvektor (bei 79 Gruppen wäre die Abweichung exakt Null, da jeder Vektor seine eigene Gruppe definieren würde). FUJITA nahm daher die Anzahl an Gruppen als ideal an, bei der die Abnahme der durchschnittlichen Abweichung am höchsten ist. Die größte Abnahme ergab sich bei seiner Probandengruppe bei dem Erhöhen der Gruppenanzahl von drei auf vier, daher nimmt FUJITA die Einteilung in vier Bogenformgruppen als ideal an.

### 2.2.1.3 Antagonistische Kontaktpunkte

Referenzpunkte der bukkalen Höckerspitzen bzw. der bukkalen Zahnflächen können zur isolierten Beschreibung der Zahnbogenformen im Ober- und Unterkiefer herangezogen werden. Aber auch in idealer Okklusion korrespondieren diese Punkte zwischen Ober- und Unterkiefer nicht antagonistisch, weshalb vor allem für intraindividuelle Bogenformvergleiche und -abgleiche die Konstruktion von Bögen durch die antagonistischen Kontaktpunkte der Oberkiefer- und Unterkieferdentitionen sinnvoll ist.

Die aus der zahnärztlichen Prothetik bekannten Kontaktpunktbeziehungen "Höcker-Fossa" und "Höcker-Randleiste" [91],[99] zeigen komplexe Kontaktpunktschemata mit idealerweise tripolisiert antagonistischen, punktförmigen Kontakten zwischen den Ober- und Unterkieferzähnen (Abbildung 14).

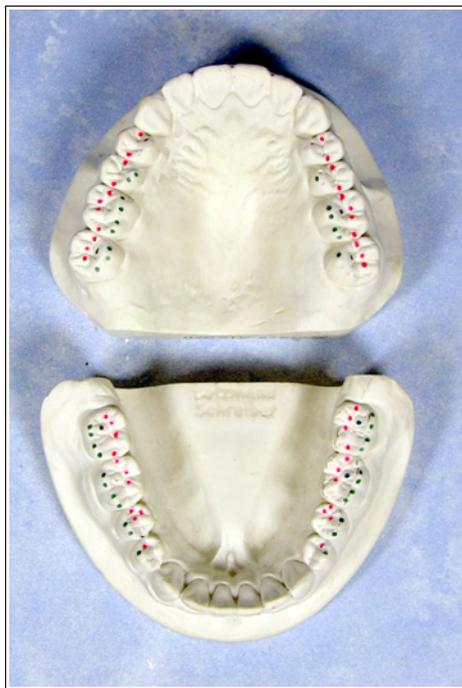


Abbildung 14: Antagonistische Kontaktpunkte auf Gipsmodellen

Durch die anatomisch "abgerundete" Form der Höckerspitzen kommt es zu "Dreipunkt-Abstützungen" im Bereich der antagonistischen zentralen Fissuren der Zähne. Die "Höckerkontakte" sind in Abbildung 14 grün dargestellt, die sogenannten "Stops" im Bereich der zentralen Fissuren imponieren als rote Punkte.

Eine gute Annäherung bietet die von PROFFIT [134] beschriebene "Line of Occlusion", welche eine für Ober- und Unterkiefer deckungsgleiche Bogenform definiert (Abbildung 15).

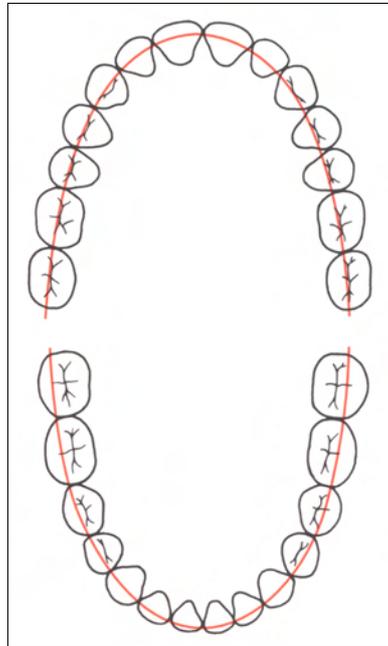


Abbildung 15: Die "Line of Occlusion" nach PROFFIT [134]

Die von PROFFIT [134] beschriebene Linie nähert sich im Oberkiefer an die "Stops" an, während sie im Unterkiefer die Höckerkontakte verbindet. Eine zweite Lokalisation einer "Okklusionslinie" ist durch die Höckerkontakte der Oberkieferzähne denkbar, welche im Unterkiefer durch die zentralen Fissuren verläuft.

Die an die anatomischen intermaxillären Kontaktpunkte angenäherte "Line of Occlusion" kann in Ober- und Unterkiefer getrennt ermittelt und im Rahmen von Therapieplänen bei Malokklusionen abgeglichen werden.

### 2.2.2 Mathematische Modelle

Es gibt eine Reihe von mathematischen Funktionsklassen, die zur Beschreibung der Zahnbogenformen von verschiedenen Autoren herangezogen wurden (Tabelle 5). Neben der Unterscheidung nach formal-mathematischen Kriterien unterschieden sich die verschiedenen Bogenformmodelle vor allem durch zwei Gesichtspunkte:

#### 1. Kurvenverlauf relativ zu den vorgegebenen Punkten:

Bei einigen Bogenformmodellen werden alle vorgegebenen Punkte exakt durchlaufen (Fourierreihe, Spline-Kurven), bei anderen Modellen werden die einzelnen der Funktion vorgegebenen Zahnpunkte zugunsten eines harmonischen Kurvenverlaufs möglichst genau angenähert, sobald eine größere Anzahl von Punkten vorhanden ist, als minimal zur eindeutigen Festlegung der jeweiligen Funktion nötig ist (Kettenlinie, Kegelschnitte, Betafunktion). Bei bestimmten Berechnungsmodellen (z.B. der Beschreibung durch Polynome) sind je nach Ansatz beide Möglichkeiten gegeben. In Abbildung 16 ist ein exemplarisches Beispiel für ein "alle vorgegebenen Punkte exakt durchlaufendes" Modell (Spline-Kurve, rot), sowie ein "annäherndes" Modell (Polynom zweiten Grades, blau) dargestellt.

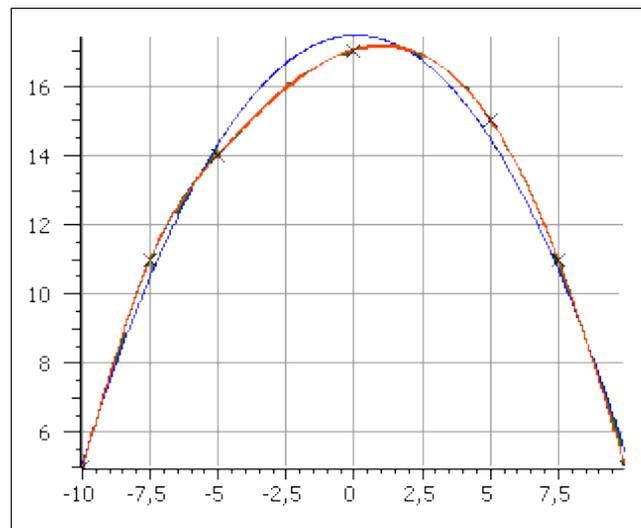


Abbildung 16: Unterschiedlicher Kurvenverlauf bei gleichen vorgegebenen Punkten

Man erkennt deutlich den unterschiedlichen Kurvenverlauf, obwohl bei der Berechnung beider Kurven dieselben Punkte verwendet wurden. Die rote Spline-Kurve durchläuft alle vorgegebenen Punkte und erzeugt daher eine asymmetrische Kurve, während das

blau dargestellte Polynom zweiten Grades zwar nicht alle Punkte exakt durchläuft, dafür aber einen symmetrischen Kurvenverlauf erzeugt.

## 2. Symmetrie der Beschreibung:

Die Beschreibung der Bogenform ist bei einigen mathematischen Berechnungsmodellen zwangsläufig symmetrisch (Kettenlinie, Betafunktion, Kegelschnitte), andere Modelle lassen sowohl symmetrische als auch asymmetrische Formen zu (Fourierreihe, Spline-Kurve). Weitere Modelle (auch hier als Beispiel die Polynome) lassen durch die Wahl der Parameter symmetrische oder asymmetrische Beschreibungen zu. Asymmetrische Modelle (Fourierreihe, Spline-Kurve) können aber durch Vorgabe einer symmetrischen Punktverteilung natürlich auch symmetrische Formen beschreiben.

Anhand dieser Gesichtspunkte ist eine Zweiteilung der Berechnungsmodelle in "idealisierende" und "beschreibende" Modelle möglich. Modelle, welche eine symmetrische Beschreibung ergeben, d.h. nicht zwangsläufig jeden vorgegebenen Punkt exakt durchlaufen, "idealisieren" die Zahnbogenform bei Malokklusionen, indem Zahnpunkte auf ektopisch positionierten Zähnen nur bedingt berücksichtigt werden. Sie glätten und harmonisieren die Bogenformen, so dass Ihre Einsatzgebiete primär im Bereich der Therapieplanung (Bestimmung der initialen Bogenform) und zahnärztlich prothetischen Planung liegen.

Mathematische Modelle, die jeden vorgegebenen Punkt exakt durchlaufen, beschreiben die tatsächliche Zahnbogenform genauer und dokumentieren auch Einzelzahnabweichungen und Asymmetrien. Diese Modelle werden klinisch im Rahmen epidemiologischer Studien verwendet, um die Zahnbogenanatomie möglichst exakt zu beschreiben, sind aber auch wesentliche Werkzeuge zur Ermittlung von intraindividuellen Unterschieden zwischen Zahnbogenformen zu verschiedenen Zeitpunkten bei kieferorthopädischen Therapien mit der Zielsetzung Aussagen über die angestrebte "Zahnbogen-Stabilität" eines Behandlungsergebnisses zu treffen oder Vergleiche der Zahnbogenformen zwischen den Geschlechtern oder verschiedenen ethnischen Gruppen anzustellen [53],[89].

Die in der internationalen Literatur verwendeten Funktionen zur Zahnbogenbeschreibung lassen sich mathematisch in sechs verschiedene Klassen einteilen, wobei die Klasse der Kegelschnitte nochmal in vier Unterklassen gegliedert ist. Tabelle 5 gibt eine kurze Übersicht über die verschiedenen Funktionsklassen und Autoren, welche diese Modelle beschrieben bzw. in wissenschaftlichen Studien angewandt haben. Die Modelle wurden nach ansteigender Komplexität der mathematischen Beschreibung geordnet.

Klassifizierung der mathematischen Modelle		
Funktionsklasse	Kurzbeschreibung	Autoren
<b>Kettenlinie</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ <math>y = a \cosh(bx) - a</math></li> <li>▶ symmetrisch</li> <li>▶ idealisierend</li> </ul>	BATTAGEL 1996[16], BeGOLE 1981[17], BRAUN 1997[27], BRAUN 1999[29],[30], BURDI 1966[35], BURDI 1968[34], DIGGS 1982[49], ENGEL 1979[50], FRECH 1988[62], HNAT 2000[79], MACCONAILL 1949[102], MUSICH 1973[111], MUTINELLI 2000[113], MUTINELLI 2004[112], PEPE 1975[130], SCOTT 1957[155], SHAPIRO 1973[157], WHITE 1978[171]
<b>Kegelschnitte</b> Parabel Hyperbel Ellipse Kreis	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ <math>ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0</math></li> <li>▶ symmetrisch</li> <li>▶ idealisierend</li> </ul>	BIGGERSTAFF 1972[23], BRADER 1972[26], CURRIER 1969[41], DE LA CRUZ 1995[45], DIGGS 1982[49], FERRARIO 1994[55], HENRIKSON 2001[78], IZARD 1927[81], JONES 1989[83], LAVELLE 1975[88], MILLS 1965[108], MUTINELLI 2000[113], MUTINELLI 2004[112], SAMPSON 1981[148], SAMPSON 1983[149], SHAPIRO 1973[157], SICHER 1974[159], WHITE 1977[170]
<b>Polynome</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ <math>y = \sum a_i x^i</math></li> <li>▶ Asymmetrie möglich</li> <li>▶ idealisierend / beschreibend</li> </ul>	BURRIS 2000[36], BURSTONE 1979[37], FELTON 1987[52], FERRARIO 1994[55], FERRARIO 1999[53], HAYASHI 1956[75], HECHTER 1978[76], KAGEYAMA 2006 [84], KOJIMA 2004[86], LU 1964[100], LU 1966[101], MUTINELLI 2004[112], NOROOZI 2001[119], NOROOZI 2002[118], NUMATA 1950[121], PEPE 1975[130], RABERIN 1993[135], RICHARDS 1990[136], SANIN 1970[150], SCHUMACHER 1970[154], SETO 2001[156], TSAI [166]2002, VALENZUELA 2002[167], WHEELER 1950[169]
<b>Betafunktion</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ <math>y=a(x/b+1/2)^{c-1}(1/2-x/b)^{c-1}</math></li> <li>▶ symmetrisch</li> <li>▶ idealisierend</li> </ul>	BRAUN 1998[28], BRAUN 1999[31], HNAT 2000[79], KAGEYAMA 2006 [84], NOROOZI 2000[120], NOROOZI 2001[119]
<b>Spline-Kurven</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ stückweise Annäherung durch Polynome</li> <li>▶ Asymmetrie möglich</li> <li>▶ beschreibend</li> </ul>	BeGOLE 1979[18], BeGOLE 1980[19], BeGOLE 1984[20], BeGOLE 1998[21],[22], BURRIS 2000[36], COOMBS 1979[40], DAVIS 1998[44], DIGGS 1982[49], GERMANE 1991[70], McKEE 1988[104], MUTINELLI 2004[112], TANER 2004[164]
<b>Fourierreihen</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ <math>Y=a_0+\sum(a_n \cos(n\omega x)+b_n \sin(n\omega x))</math></li> <li>▶ Asymmetrie möglich</li> <li>▶ beschreibend</li> </ul>	LESTREL 2004[96], VALENZUELA 2002[167]

Tabelle 5: Klassifikation der Modelle zur Beschreibung von Zahnbogenformen

Innerhalb der Funktionsklassen sind in Tabelle 5 die für die klinisch-praktische, bzw.

klinisch-wissenschaftliche Anwendung wesentlichen Eigenschaften "idealisierend/beschreibend", sowie "symmetrisch/asymmetrisch" zugeordnet. Die Angabe der Jahreszahlen verdeutlicht die chronologisch breite Fächerung in der Literatur, z.B. bei der "Kettenlinie", aber auch die Tendenz, dass in jüngeren Publikationen zunehmend komplexere Berechnungsmodelle zur Anwendung kamen.

In Abbildung 17 ist die Verteilung der in Tabelle 5 aufgeführten Publikationen - zur besseren Einschätzung der relativen Häufigkeit ihrer Verwendung in der Literatur - grafisch dargestellt. Da oft in einer Publikation mehrere Modelle genutzt werden, sind Mehrfachzählungen von Publikationen möglich: Insgesamt wurden 68 Publikationen aus dem Zeitraum von 1927 bis 2006 betrachtet, in denen sich 82 distinkte Verwendungen von mathematischen Beschreibungen fanden.

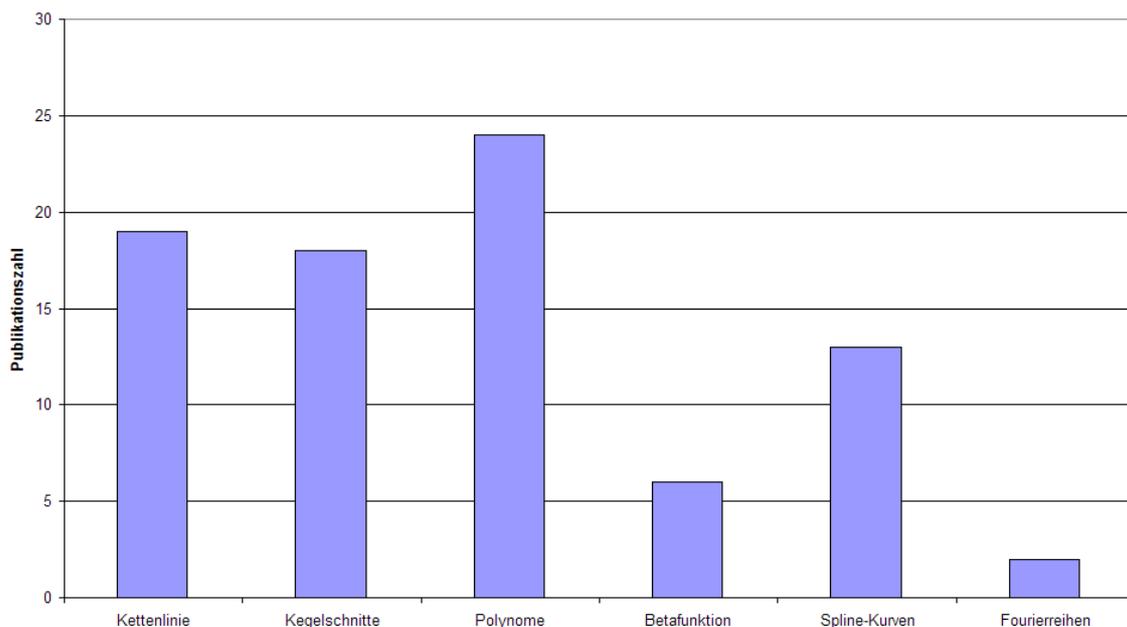


Abbildung 17: Publikationsanzahl zu den einzelnen Modellen (Gesamtanzahl 82)

Man erkennt deutlich, dass die Klasse der Polynome das am häufigsten verwendete Modell darstellt ( $n = 24$ ), dicht gefolgt von den etwa gleich häufig verwendeten Modellen Kettenlinie ( $n = 19$ ) und Kegelschnitte ( $n = 18$ ). Spline-Kurven wurden seltener verwendet ( $n = 13$ ), gefolgt von der Betafunktion ( $n = 6$ ) und Fourierreihe, die die am seltensten genutzte Modellklasse darstellt ( $n = 2$ ).

In den folgenden Kapiteln werden die einzelne Funktionsklassen vorgestellt und auf ihre jeweiligen Besonderheiten eingegangen.

### 2.2.2.1 Kettenlinie

Seit MACCONAILL 1949 [102] wurde die Kettenlinie sehr häufig zur Beschreibung der Zahnbogenform herangezogen (vgl. Tabelle 5) und ist nach den Polynomen die am häufigsten verwendete Beschreibung der Zahnbogenform. Als "Kettenlinie" bezeichnet man eine Form, die ein Seil oder eine Kette unter Einfluss der Gravitation annimmt, wenn es/sie an zwei Punkten aufgehängt wird (Abbildung 18, Seite 34).

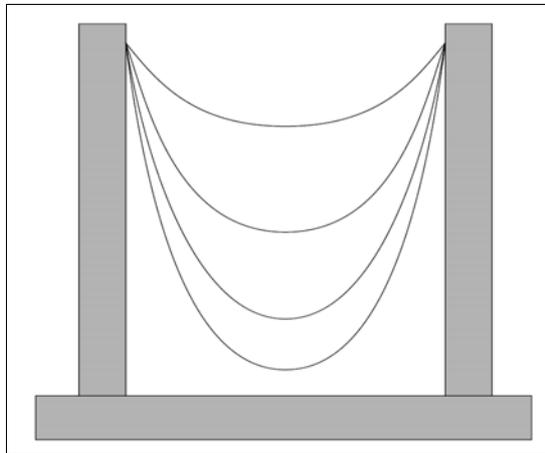


Abbildung 18: Kettenlinie [12]

Diese Form weist eine offensichtliche Ähnlichkeit zu der menschlichen Zahnbogenform auf und wurde bereits historisch von vielen Autoren zu der Beschreibung derselben verwendet. Aufgrund ihrer symmetrischen Form und zwei freien Parametern ist die Kettenlinie prinzipiell schon durch zwei vorgegebene Punkte eindeutig festgelegt. Soll die Kettenlinie (wie meist gewünscht) an mehr als zwei Punkten ausgerichtet werden, so können Näherungsverfahren wie das "Least-Square-Fit"-Verfahren verwendet werden, um einen möglichst nah an den vorgegebenen Punkten gelegenen Kurvenverlauf zu erhalten. Daher ist diese Funktion den idealisierenden Modellen zuzuordnen. Bevor das Computerzeitalter die Handhabung mathematischer Formeln bei der Beschreibung von Zahnbögen stark vereinfachte, wurden tatsächlich "hängende Ketten" mit, um die Form nicht zu stören, hinreichend kleinen Kettengliedern zur Ermittlung der Zahnbogenform verwendet. Dabei wurde die halbe Gesamtlänge  $S$  der Kette, sowie die Höhe  $H$  des

Bogens (also der Abstand vom Scheitelpunkt bis zur Verbindungslinie der beiden Aufhängepunkte der Kurve) bestimmt, um daraus einen Wert für die Krümmung  $R$  zu gewinnen, die die Form der Kettenlinie eindeutig charakterisiert:

$$R = \frac{S^2 - H^2}{2H}$$

Formel 2: Charakterisierung der Kettenlinie nach MacCONALL [102]

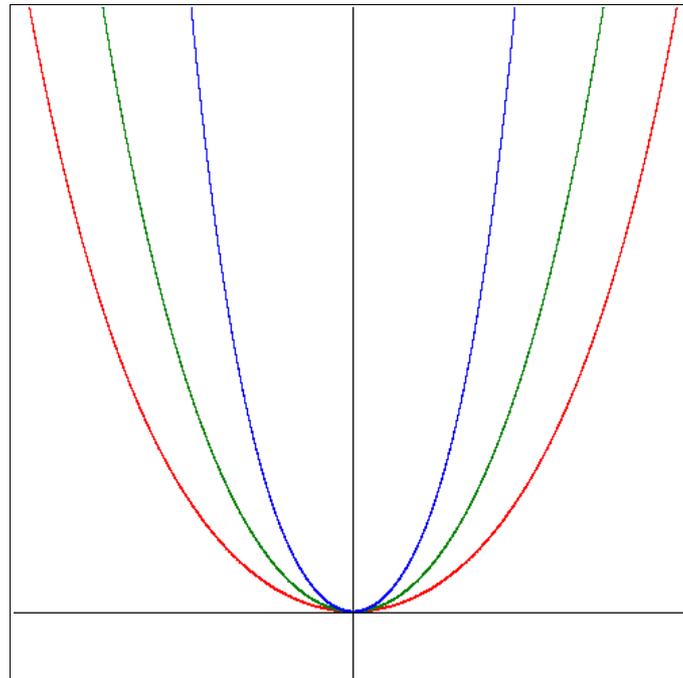
Trotzdem handelt es sich bei dieser Formel noch nicht um eine mathematische Bogenformbeschreibung in unserem Sinne, da kein direkter Bezug zwischen den  $x$ - und  $y$ -Koordinaten der die Kurve definierenden Punkte hergestellt wird.

Die allgemeine Form einer Kettenlinie mit dem Scheitelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems lautet:

$$y = a \cosh(bx) - a$$

Formel 3: Allgemeine Formel der Kettenlinie [143]

Es handelt sich um eine symmetrische, auf dem Cosinus Hyperbolicus<sup>1</sup> ( $\cosh$ ) basierende, Funktion, deren Parameter  $a$  und  $b$  die genaue Form der Kettenlinie bestimmen. Auf den ersten Blick sieht die Kettenlinie einer Parabel sehr ähnlich, die Kettenlinie besitzt aber, da sie zwei unabhängige Parameter aufweist, eine wesentlich höhere Flexibilität in der Annäherung an den Zahnbogen. Die beiden Parameter lassen sich nicht eindeutig der Zahnbogenbreite oder -höhe zuordnen, beide Parameter beeinflussen gleichzeitig sowohl die Steigung als auch die Krümmung der Kurven.



Formel: $y = a \cosh(bx) - a$		
Kurve	Werte der Parameter	
	a	b
rot	1	1
grün	2	1
blau	1	2

Abbildung 19: Drei Repräsentanten der Kettenlinie

Das Beispiel zeigt, dass sowohl die Erhöhung des Parameters  $a$ , als auch von  $b$  die Kurve enger und steiler werden lässt. Prinzipiell beeinflussen beide Parameter zusammen den genauen Kurvenverlauf.

MACCONAILL [102] stellte bei einer Untersuchung von 50 Zahnbögen von Frauen und Männern sowie eines Typodonten als erster fest, dass die 'ideale' Form eines Zahnbogens durch eine Kettenlinie beschrieben werden kann. Später wurde diese Beschreibung durch hängende Ketten von SCOTT [155] und BURDI [34],[35] zur Beschreibung embryonaler Kieferwachstumsprozesse sowohl bei Tieren als auch bei Menschen verwandt. Während PEPE [130] bei einem Vergleich mit der Beschreibung der Zahnbogenform durch Polynome die Kettenlinie für weniger geeignet erachtet (allerdings auch Polynome als letztlich zu ungenau verwirft), werden etwa zur gleichen Zeit sowohl von

MUSICH [111] bei einer Untersuchung zum Zahnbogenumfang, als auch von WHITE [171] beim Vergleich konfektionierte und individualisierte kieferorthopädischer Behandlungsbögen die Kettenlinie als gute Beschreibung des Zahnbogens angegeben. Auch ENGEL [50] findet bei seinen Untersuchungen zu konfektionierten Bögen, die seiner Ansicht nach den Zahnbögen nicht genug entsprechen, dass die zweiparametrische Kettenlinie Zahnbogenformen im Allgemeinen gut annähern kann. Daher wird dieser Ansatz bis heute in Systemen zur computergestützten Beschreibung von Zahnbögen verwendet [17],[112],[113].

#### 2.2.2.2 Kegelschnitte

Kegelschnitte sind aufgrund ihrer mannigfaltigen Formen (Abbildung 20) und Anpassungsmöglichkeiten von vielen Autoren zur Beschreibung der Bogenform verwendet worden (siehe Tabelle 5, Seite 32).

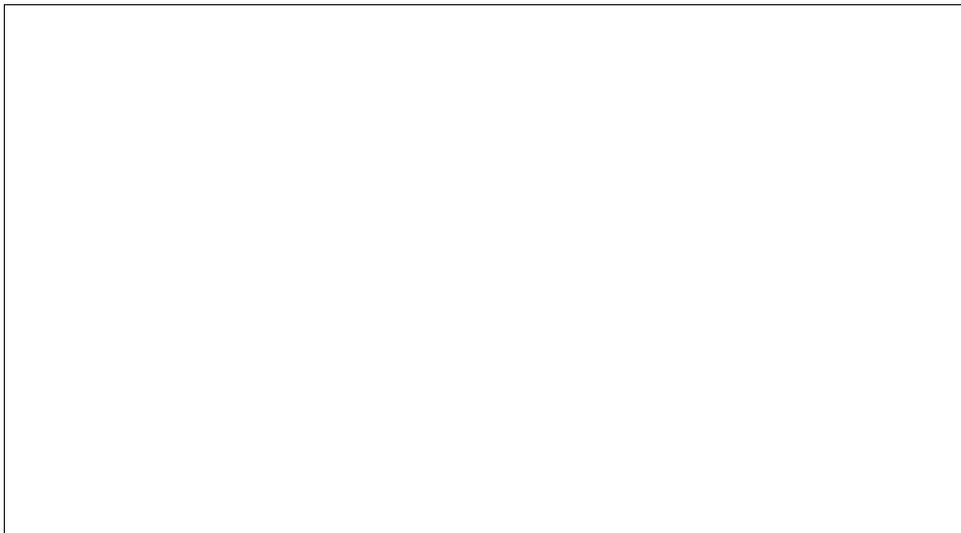


Abbildung 20: Die verschiedenen Kegelschnitte [179]

Die Kegelschnitte gehören zu den idealisierenden Modellen und ergeben grundsätzlich symmetrische Beschreibungen der Zahnbogenform. In mathematisch strengem Sinne können aus einem Kegelschnitt die geometrischen Entitäten Punkt, Gerade, Parabel, Hyperbel, Ellipse und Kreis hervorgehen. Für die Beschreibung der Zahnbogenform sind aber aufgrund ihrer Form nur Parabeln, Hyperbeln, Ellipsen und Kreise relevant, da ein einzelner Punkt oder eine Gerade keine adäquate Beschreibung liefern können.

Kegelschnitte lassen sich allgemein mit folgender Gleichung beschreiben:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Formel 4: Allgemeine Form eines Kegelschnittes [57]

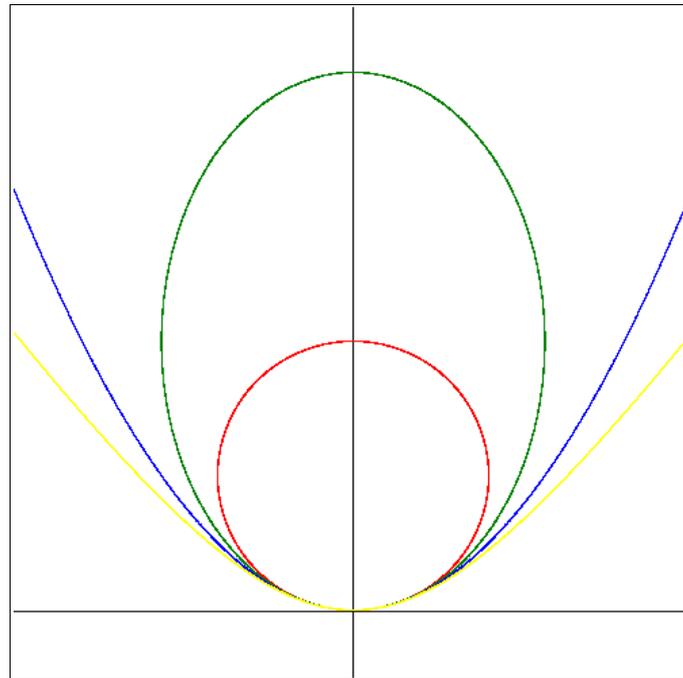
Die Variablen  $x$  und  $y$  stehen dabei für die Koordinaten in einem kartesischen Koordinatensystem, während die Parameter  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  und  $f$  den genauen Verlauf des Kegelschnitts festlegen. Zur näheren Klassifikation definiert man folgende Größen:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}; \quad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}; \quad S = a + c$$

Formel 5: Klassifikationsgrößen der Kegelschnitte [57]

Für  $\delta > 0$  und  $\Delta \cdot S < 0$  ergibt sich eine geschlossene Kurve in Form einer Ellipse. Gilt zusätzlich  $a = c$  und  $b = 0$  erhält man einen Kreis. Für  $\delta \leq 0$  bei  $\Delta \neq 0$  ergeben sich offene Kurven: wenn  $\delta = 0$  Parabeln, bei  $\delta < 0$  Hyperbeln.

Ein allgemeiner Kegelschnitt ist durch fünf Punkte eindeutig festgelegt. Sollen mehr als fünf Referenzpunkte zur Beschreibung eines Zahnbogens herangezogen werden, so muss der beschreibende Kegelschnitt über z.B. einen "Least-Square-Fit" möglichst optimal an alle Referenzpunkte angenähert werden.



Formel: $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$						
Kurve	Werte der Parameter					
	a	b	c	d	e	f
Kreis (rot)	1	0	1	0	-1	0
Ellipse (grün)	1	0	0,5	0	-1	0
Parabel (blau)	1	0	0	0	-1	0
Hyperbel (gelb)	1	0	-0,5	0	-1	0

Abbildung 21: Vier Repräsentanten der Kegelschnitte (Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel)

Kegelschnitte wurden von zahlreichen Autoren zur Beschreibung der Zahnbogenform [23],[26],[41],[45],[49],[55],[76],[81],[108],[112],[113],[148],[149],[157],[159] herangezogen. Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln wurden zur Beschreibung des gesamten Zahnbogens verwendet. Die Kreisform wurde nur zur Charakterisierung der Bogenform im Frontzahnbereich verwendet, da sie ab den Eckzähnen nicht mehr dem Verlauf der Bogenform entspricht [113].

### 2.2.2.3 Polynome

Die Polynome stellen eine weitere große Funktionsgruppe zur Beschreibung von Zahnbogenformen dar. Je nach gewählter Einschränkung können Polynome sowohl als idealisierendes als auch beschreibendes Modell verwendet werden. Ob symmetrische oder asymmetrische Beschreibungen resultieren, ergibt sich aus der Wahl der speziellen

Polynomform. Ganz allgemein sind Polynome Funktionen folgender Form:

$$y = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad , a_n \neq 0$$

Formel 6: Allgemeine Form eines Polynoms [56]

Der Parameter  $n$  bestimmt die höchste vorkommende Potenz und damit den Grad des Polynoms. Man spricht von einem Polynom  $n$ -ten Grades. Diese sind grundsätzlich durch  $n+1$  vorgegebene Punkte eindeutig festgelegt, d.h. alle  $n+1$  Parameter sind eindeutig zu bestimmen und alle vorgegebenen Punkte werden durch die Funktion exakt durchlaufen. Es sind sowohl symmetrische als auch asymmetrische Kurvenverläufe möglich. Es gibt in der Literatur verschiedene Herangehensweisen, um unter der Verwendung von Polynomen die Zahnbogenform zu beschreiben. So beschrieb erstmals NUMATA [121] im Jahr 1950 die Zahnbogenform über ein Polynom der Form

$$y = a x^2$$

Formel 7: Polynom-Formel nach NUMATA [121]

Mathematisch überschneidet sich hier die Klasse der Polynome zweiten Grades mit der Klasse der Parabeln, da sich beide Klassen bei der Nullsetzung einiger Parameter auf diese Form bringen lassen. Da aber alle NUMATA zitierenden Autoren polynomische Modelle verwendeten, soll dieser Ansatz auch hier unter der Rubrik Polynom behandelt werden. Diese sehr einfache Beschreibung, die nur eine begrenzte Annäherung an verschiedene individuelle Bogenformen erlaubt, wurde von HAYASHI [75] aufgegriffen und auf Funktionen der Form

$$y = a x^n$$

Formel 8: Polynom-Formel nach HAYASHI [75]

erweitert.

Da der Parameter  $n$  in seiner Beschreibung nicht mehr zwingend ganzzahlig sein musste, ergeben sich für nicht ganzzahlige Werte von  $n$  Funktionen, die streng mathematisch gesehen nicht mehr unter die Klasse der Polynome fallen, wegen der inhaltlichen Nähe wird dieser Ansatz aber trotzdem hier beschrieben. Werden nicht ganzzahlige Exponenten  $n$  verwendet, ergibt sich das Problem, dass die Funktion für negative  $x$ -Werte nicht definiert ist, die Funktion also nur den halben Zahnbogen im ersten Sektor des Koordinatensystems beschreibt. HAYASHI löst dieses Problem, indem er die

Funktionen grundsätzlich nur im ersten Quadranten betrachtet und den vollständigen Zahnbogen durch Spiegelung der Funktion an der y-Achse erhält. Alle Bogenformbeschreibungen sind in seiner Art der Anwendung also symmetrisch. Da HAYASHI [75] trotz der erhöhten Flexibilität der Beschreibung durch Einführung des zweiten Parameters  $n$  in die Formel immer noch Abweichungen von den realen Zahnbogenformen fand, führte er einen aus den Ingenieurwissenschaften übernommenen exponentiellen Korrekturterm ein. Letztlich ergibt sich zur Beschreibung der Zahnbogenform die Funktion

$$y = ax^n \pm e^{\alpha(x-\beta)}$$

Formel 9: Um Exponentialterm erweiterte Polynom-Formel nach HAYASHI [75]

Durch die freie Wahl des Vorzeichens des Korrekturterms und den zwei neuen Parametern  $\alpha$  und  $\beta$ , erlangte dieser Ansatz genügend Flexibilität um viele Zahnbogenformen angemessen zu beschreiben. HAYASHI [75] erprobte seine Beschreibung an 50 Zahnbögen (28 Ober- und 22 Unterkiefer), die er zufällig aus 1000 im Archiv seiner Klinik vorhandenen Modellen auswählte und fand eine sehr gute Annäherung an die vorgegebene Bogenform.

Eine weitere Möglichkeit der Beschreibung des Zahnbogens mit Polynomen besteht in der direkten Interpolation<sup>3</sup> mit einem Polynom  $n$ -ten Grades. Um dieses eindeutig festzulegen werden prinzipiell  $n+1$  Punkte benötigt. Daher könnte man eigentlich zur Interpolation eines Zahnbogens einfach ein Polynom geeigneten hohen Grades verwenden. Interessanterweise wird dabei die Näherung allerdings mit zunehmendem Grad des Polynoms nicht zwingend besser. So durchquert der Graph des Polynoms dann zwar alle vorgegebenen Punkte exakt, neigt aber auf den Intervallen zwischen den Punkten zur Oszillation und Überschwingungen. Diese Beobachtung wird RUNGES Phänomen genannt [182] und ist in Abbildung 22 dargestellt.

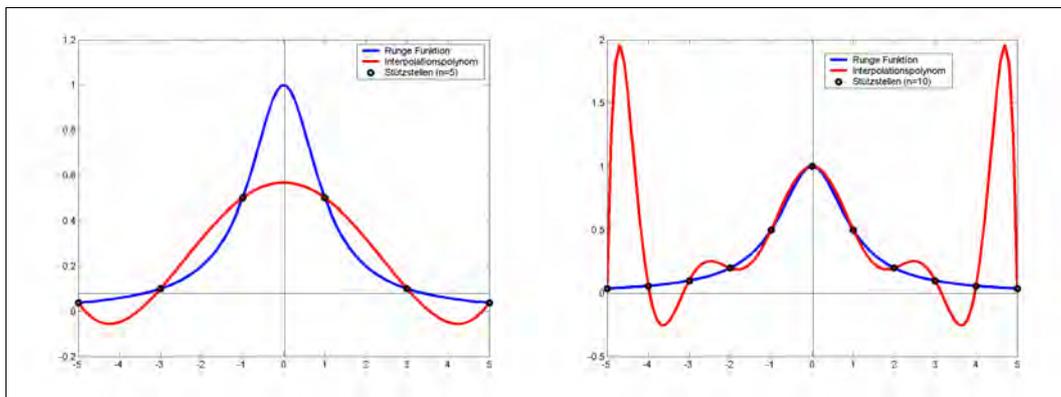


Abbildung 22: RUNGE-Funktion mit Interpolationspolynom 5. (links) u. 10. Grades (rechts) [182]

Die in blau dargestellte RUNGE-Funktion wird einmal mit einem in rot dargestellten Polynom fünften (links) bzw. zehnten Grades (rechts) angenähert. Deutlich erkennt man, dass hier eine Interpolation mit Polynomen höheren Grades zwar in einigen Bereichen zu einer Verbesserung der Annäherung an die vorgegebene Funktion führt, die Anpassung insgesamt aber durch große Überschwinger eher verschlechtert. Daher wird zur Interpolation meistens ein Polynom von viel geringerem Grad angewendet, als zum exakten Verlauf durch alle vorgegebenen Punkte nötig wäre und stattdessen nur möglichst gut an diese Punkte angenähert – auf den Gesamtbogen bezogen ergibt sich trotzdem eine bessere Näherung als es mit den Überschwingungen des hochgradigen Polynoms der Fall wäre.

Die erste systematische Interpolationsbeschreibung dieser Art wurde 1964 von LU [100] beschrieben. Der Autor verwendet ein Polynom vierten Grades, also:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

Formel 10: Polynom 4. Grades nach Lu [100]

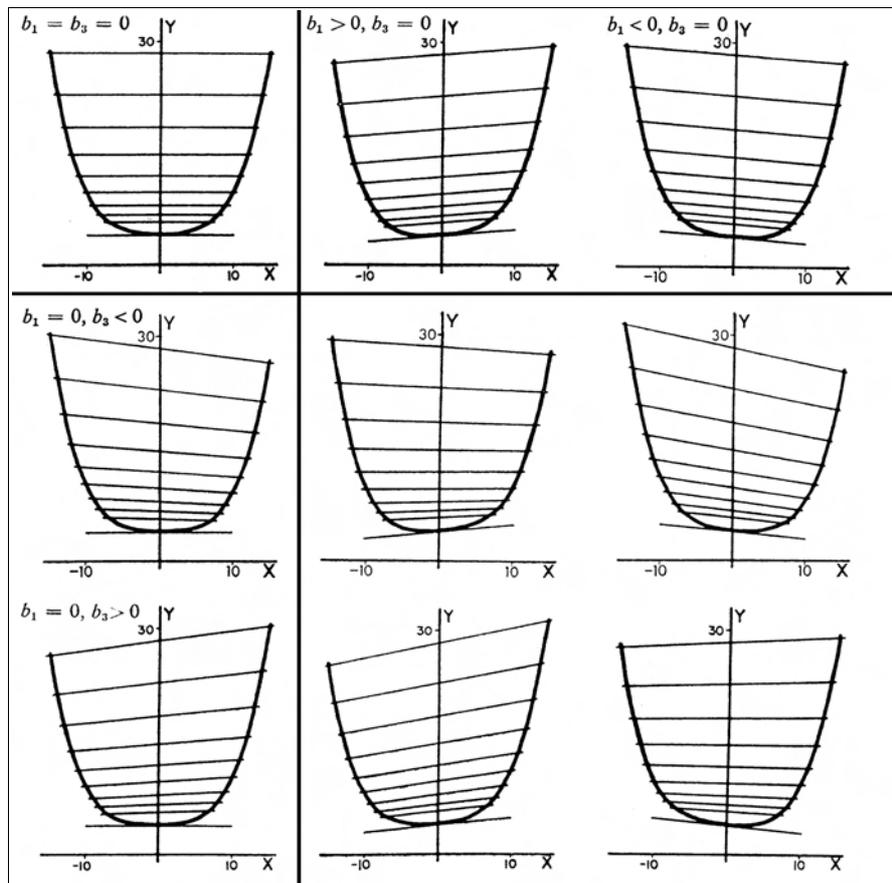
Zusätzlich zu der reinen Beschreibung des Zahnbogens entwickelte der Autor auch ein Verfahren, um aus den bei der Annäherung an den Zahnbogen ermittelten Koeffizienten  $a_i$  Rückschlüsse auf die Form des beschriebenen Zahnbogens zu gewinnen. Allgemein kann über ein Polynom, das nur gerade Exponenten enthält (also  $a_i = 0$  für alle ungeraden  $i$  ist, man nennt solche Polynome auch "gerade", es gilt  $f(x) = f(-x)$ ) gesagt werden, dass es vollständig symmetrisch zur y-Achse ist, während ein Polynom, das gemischte Exponenten oder nur ungerade Exponenten besitzt keine Spiegelsymmetrie

zur y-Achse aufweist. Polynome mit ausschließlich ungerade Exponenten werden auch "ungerade" genannt, hier gilt  $f(x) = -f(-x)$ . Da die Koeffizienten in der obigen Darstellung eines Polynoms nicht völlig unabhängig voneinander sind, also eine Änderung an einem Parameter nicht eindeutig zu einer Änderung einer einzelnen geometrischen Eigenschaft führt, sondern jeder Parameter die gesamte Kurvengeometrie beeinflusst, griffen die Autoren auf eine Beschreibung mittels orthogonaler Polynome zurück. Umgeschrieben auf eine Basis orthogonaler Polynome  $\xi_i$  lautet die Formel

$$y = b_0 \xi_0 + b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + b_3 \xi_3 + b_4 \xi_4$$

Formel 11: Beschreibung mit orthogonalen Polynomen nach Lu [100]

Die orthogonalen Polynome  $\xi_i$  sind in der Literatur und verschiedenen Nachschlagewerken berechnet und aufgelistet worden [11],[58]. Der Vorteil dieses zusätzlichen mathematischen Aufwands besteht darin, dass die Vorfaktoren  $b_i$  nun jeweils völlig unabhängig voneinander die Form der Funktion beeinflussen und deshalb direkt als Maß für geometrische Eigenschaften dienen können (im Gegensatz zu den Vorfaktoren  $a_i$  im einfachen Polynom, die keine explizite Zuordnung zulassen). Der Parameter  $b_0$  bewirkt lediglich eine Verschiebung der gesamten Funktion nach oben oder unten, die anderen Parameter  $b_1$  bis  $b_4$  lassen sich weiter in die Vorfaktoren der geraden, y-achsensymmetrischen Polynome  $\xi_2$  und  $\xi_4$  bzw. der nicht-y-achsensymmetrischen Polynome  $\xi_1$  und  $\xi_3$  unterteilen. Dementsprechend stellen  $b_2$  und  $b_4$  ein Maß für die Symmetrie des Zahnbogens dar, während  $b_1$  und  $b_3$  die Asymmetrie beschreiben. Empirisch ordnet Lu [101] den einzelnen Parametern im Detail folgende Eigenschaften zu: Der Symmetrieparameter  $b_2$  entspricht der *taperedness* ("Zuspitzung"),  $b_4$  der *squaredness* ("quadratische Form"), der Asymmetrieparameter  $b_1$  misst die *lopsidedness* ("Einseitigkeit") und  $b_3$  die *tiltedness* ("Schiefheit").

Abbildung 23: Auswirkung der Parameter  $b_1$  und  $b_3$  auf das orthogonale Polynom aus Lu [101]

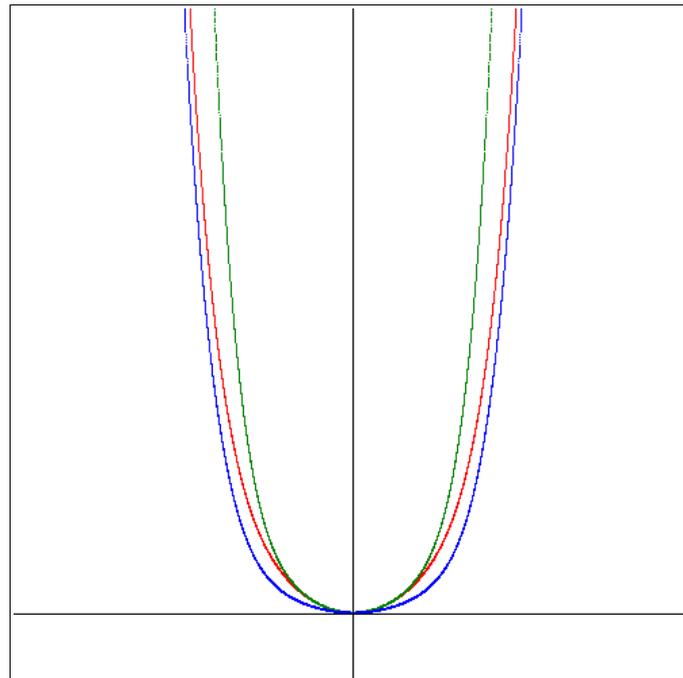
Spätere Autoren scheuen allerdings meistens den mathematischen Mehraufwand, den die orthogonalen Polynome bedeuten und begnügen sich mit der Beschreibung durch einfache Polynome bis zu sechsten Grades [35],[52],[54],[76],[112],[119],[135],[150],[154],[167]. Nur BURRIS [36] greift explizit auf orthogonale Polynome zurück und nutzt die Vorfaktoren wie von LU [101] beschrieben zur Beurteilung der Zahnbogenform. Auch RICHARDS [136] zieht die einzelnen Vorfaktoren explizit zur Bogenformbeschreibung heran, ohne allerdings orthogonale Polynome zu verwenden.

Eine weitere Möglichkeit, das Polynommodell zu vereinfachen ist die willkürliche Einschränkung auf Teilpolynome. So verzichten zum Beispiel viele Autoren auf die prinzipiell mögliche Asymmetrie und benutzen ausschließlich symmetrische Polynome [52],[86],[119]. NOROOZI [119] beobachtet z.B. die beste Anpassung an gegebene Zahnbogenformen mit einem symmetrischen Polynom sechsten Grades von der Form:

$$y = ax^6 + bx^2$$

Formel 12: Polynom 6. Grades nach NOROOZI [119]

Die Variablen x und y stehen dabei für die Koordinaten in einem kartesischen Koordinatensystem. In Abbildung 24 sind drei der sich für verschiedene Werte der Parameter a und b ergebenden Kurven aufgezeichnet.



Formel: $y = ax^6 + bx^2$		
Kurve	Werte der Parameter	
	a	b
rot	1	1
grün	3	1
blau	1	0,5

Abbildung 24: Drei beispielhafte Repräsentanten für Polynome

Man erkennt, dass alle Kurven symmetrisch zur Mittelachse sind und mit kleiner werdenden Parametern die Kurven insgesamt breiter werden, während die genaue Bogenform (insbesondere Rundung und Bauchung) von beiden Parametern gleichzeitig abhängt.

Auch FELTON [52] nutzte symmetrische Polynome vierten Grades bei seiner Untersuchung konfektionierter Zahnbögen. Sowohl FELTON als auch NOROOZI sind der Mei-

nung, dass auch diese eingeschränkten Polynome eine hinreichend genaue Beschreibung der Zahnbögen liefern.

#### 2.2.2.4 Betafunktion

Die aus der Statistik stammende Betaverteilung wurde aufgrund ihrer unter bestimmten Parametern bogenähnlichen Form von einigen Autoren zur Beschreibung der Bogenform herangezogen. In ihrer eigentlichen Bestimmung wird diese Funktion zur Berechnung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung<sup>8</sup> benutzt. In ihrer Funktion als Wahrscheinlichkeitsverteilung ist sie nicht zwingend von achsensymmetrischer Form, bei der Verwendung zur Beschreibung von Zahnbögen wird die Betafunktion aber nur unter Parametern, die eine achsensymmetrische Form ergeben, verwandt. Die hier vorgestellte modifizierte Betafunktion ist den idealisierenden Modellen zuzuordnen und ergibt grundsätzlich symmetrische Bogenformbeschreibungen.

Die allgemeine Betaverteilung, wie sie in der Statistik verwendet wird, ist gegeben durch die Gleichung:

$$y = \frac{1}{B(p; q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \quad \text{mit } p, q \leq 1 \text{ und } p+q=1$$

Formel 13: Allgemeine Betaverteilung aus der Statistik [51]

Dabei entsprechen x und y den kartesischen Koordinaten, p und q den Parametern der Betaverteilung und B(p;q) steht für die Betafunktion:

$$B(p; q) = \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du$$

Formel 14: Die Betafunktion aus der Statistik [51]

Durch einige Vereinfachungen und Modifikationen kann eine für die Zahnbogenbeschreibung zweckmäßige Form erreicht werden [28]:

- die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtige Normierung<sup>6</sup> der Betaverteilung auf 1 durch den Faktor  $\frac{1}{B(p; q)}$  kann im Falle der Zahnbogenform vernachlässigt werden.

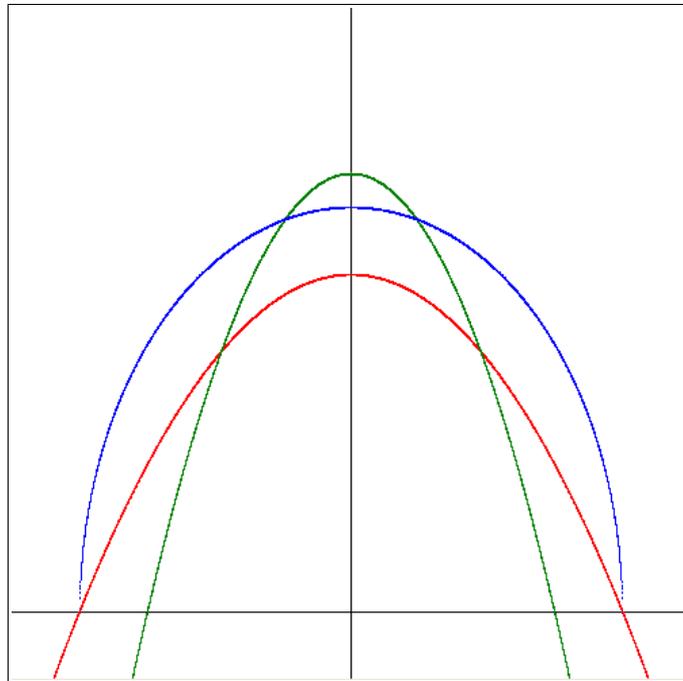
- es werden nur symmetrische Verteilungen betrachtet, d.h.  $p = q \equiv c$ .
- die Verteilung wird um die Zahnbogenbreite aufgeweitet und so verschoben, dass der Scheitelpunkt bei  $x = 0$  liegt.

Es ergibt sich eine modifizierte, leicht handhabbare Betaverteilung:

$$y = a \left( \frac{x}{b} + \frac{1}{2} \right)^{c-1} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{b} \right)^{c-1}$$

Formel 15: Vereinfachte Betaverteilung

Diese Formel besitzt nur noch die drei unabhängigen Parameter a, b und c.



Formel: $y = a \left( \frac{x}{b} + \frac{1}{2} \right)^{c-1} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{b} \right)^{c-1}$			
Kurve	Werte der Parameter		
	a	b	c
rot	10	4	2
grün	13	3	2
blau	6	4	1,5

Abbildung 25: Drei Repräsentanten der modifizierten Betaverteilung

BRAUN [28] verbindet empirisch die Parameter  $a$  und  $b$  mit der Breite  $W$  und der Höhe  $D$  des Zahnbogens:

$$a = 3,0314 \cdot D \qquad b = W$$

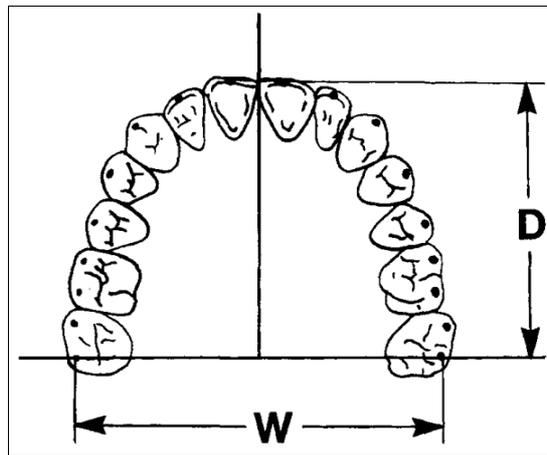


Abbildung 26: Definition der Parameter der Betafunktion nach BRAUN [28]

Die Zahnbogenbreite  $W$  ist definiert als der Abstand zwischen den distobukkalen Höckerspitzen der zweiten Molaren, die Zahnbogenhöhe  $D$  als der Abstand vom Mittelpunkt der Strecke zwischen den Inzisalpunkten der Zähne 11 und 21 und der Strecke  $W$  (Abbildung 26). Weiter setzt BRAUN den Exponent für alle Modelle gleich 0,8 (also  $c = 1,8$ ) und erhält damit insgesamt eine sehr kompakte Beschreibung:

$$y = 3,0314 D \left( \frac{x}{W} + \frac{1}{2} \right)^{0,8} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{W} \right)^{0,8}$$

Formel 16: Modifizierte Betafunktion nach Braun [28]

Da die Wahl des Parameters  $c = 1,8$  die Kurvenform beeinflusst (kleinere  $c$  machen den Kurvenverlauf runder, vgl. Abbildung 25), erscheint die Festlegung in der Darstellung durch BRAUN willkürlich. Eigentlich könnte  $c$  als zusätzlicher Parameter zur weiteren Anpassung der Kurvenform an verschiedene individuelle Zahnbögen genutzt werden. BRAUN [28] geht nicht darauf ein, was ihn zur Wahl genau dieses Wertes bewogen hat, daher lässt sich nur vermuten, dass sich bei dem von ihm gewählten Werten empirisch die beste Anpassung an die Zahnbogenform ergeben hat. Liegt der Wert für  $c$  fest, ergibt sich der Proportionalitätsfaktor  $k$  zwischen  $a$  und  $D$  automatisch aus der Forderung, dass im Scheitelpunkt der Kurve (bei  $x = 0$ )  $y$  den Wert  $D$  (also die Zahnbogenhöhe) annehmen soll:

$$D = k D \left( \frac{0}{W} + \frac{1}{2} \right)^{0,8} \left( \frac{1}{2} - \frac{0}{W} \right)^{0,8} \Rightarrow k = \frac{1}{(1/2)^{1,6}} \approx 3,0314$$

BRAUN [28] verwendet 18 bukkale Höckerspitzen pro Kiefer und bestimmt die Parameter W und D dann durch einen "Least-Square-Fit" (siehe Kapitel 2.2.3 "Matching per Least-Square-Fit"). Bei den 40 in seiner Arbeit betrachteten Kiefermodellen (15 Angle Klasse I, 16 Angle Klasse II und 9 Angle Klasse III) wurde jeweils eine sehr gute Annäherung der Funktion an die reale Zahnbogenform des Ober- und Unterkiefers beobachtet. Die Korrelation zwischen den aus dem mathematischen Modell ermittelten Parametern W und D und der direkt am Modell gemessenen Zahnbogenbreite und -höhe betrug im Durchschnitt 0,98 mit einer Standardabweichung von 0,02. Daraus schloss BRAUN, dass die Beschreibung der Zahnbogenform mit der modifizierten Betafunktion genauer ist, als bisher vorgebrachte Modelle. Ein Jahr später verwendete BRAUN [31] das Modell bei der Untersuchung von konfektionierten NiTi-Bögen, mit dem Ergebnis, dass die untersuchten vorgeformten Bögen allgemein nicht ausreichend mit der modifizierten Betafunktion beschrieben werden können. BRAUN empfiehlt daher zukünftig Bögen nach der Betafunktion zu designen, um der natürlichen Zahnbogenform näher zu kommen und damit die Rezidivwahrscheinlichkeit bei kieferorthopädischen Behandlungen zu senken.

#### 2.2.2.5 Spline-Kurven

"Spline" ist das englische Wort für "Straklatte"<sup>7</sup>, ein Begriff aus dem Schiffbau mit dem eine flexible Latte, welche beim Entwurf und der Konstruktion von Schiffsrümpfen zum Einsatz kam, bezeichnet wird. Wird eine solche Latte an einigen Punkten fixiert, biegt sie sich in den nicht vorgegebenen Bereichen automatisch so, dass insgesamt die in der verformten Latte gespeicherte Biegeenergie minimal wird (möglichst geringe Gesamtkrümmung). Es ergibt sich also immer die "gleichmäßigste" und für die Latte am wenigsten belastende Form.

Die mathematische Beschreibung dieses physikalischen Verhaltens sind die sogenannten kubischen Spline-Kurven mit natürlicher Randbedingung. Diese im Folgenden vorgestellten Kurven sind, auf die Charakterisierung von Zahnbögen angewandt, ein beschreibendes Modell, dass je nach vorgegebenen Punkten (die zwangsläufig alle exakt

durchlaufen werden), sowohl symmetrische als auch asymmetrische Kurvenverläufe ergeben kann.

Stückweise aus Polynomen n-ten Grades zusammengesetzte Funktionen nennt man "Spline-Kurven n-ten Grades". Da eine Spline-Kurve exakt durch alle vorgegebenen Stützpunkte verläuft (die Interpolation findet nur in den Intervallen zwischen diesen Punkten statt), kann sie entsprechend der Symmetrie der vorgegebenen Punkte sowohl asymmetrische als auch symmetrische Kurven beschreiben. Naturgemäß weisen praktisch alle Zahnbogenformen ein bestimmtes Maß an Asymmetrie auf [72], so dass sich in der Praxis fast immer eine asymmetrische Beschreibung durch die Spline-Kurve ergeben wird.

Eine kubische Spline-Kurve  $S$  durch  $k$  Stützpunkte auf dem Intervall  $[x_s, x_e]$  wird durch  $k-1$  Polynome  $P_i$  dritten Grades stückweise zwischen jeweils zwei der Stützpunkte zusammengesetzt:

$$S: [x_s, x_e] \rightarrow \mathbb{R} := P_i: [x_i, x_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{mit } i = 0, 1, \dots, k-1, \quad x_s = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} = x_e$$

Formel 17: Definition einer kubischen Spline-Kurve [133]

Die Teilpolynome  $P_i$  sind von der Form:

$$P_i = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

Formel 18: Teilpolynom  $P_i$  einer kubischen Spline-Kurve [133]

Damit die Spline-Kurve ohne Knicke und Sprünge verläuft, wird weiter gefordert, dass die an den Knoten genannten Stellen  $t_i$  zusammenstoßende Teilpolynome dort jeweils in Funktionswert und dem Wert der ersten und zweiten Ableitung übereinstimmen:

$$\begin{aligned} P_i(x_{i+1}) &= P_{i+1}(x_{i+1}) \\ P'_i(x_{i+1}) &= P'_{i+1}(x_{i+1}) \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, k-2 \\ P''_i(x_{i+1}) &= P''_{i+1}(x_{i+1}) \end{aligned}$$

Formel 19: Stetigkeitsbedingungen einer kubischen Spline-Kurve [133]

Zusätzlich fordert man mit der natürlichen Randbedingung auch noch, dass die Krümmung der Kurve (also die zweite Ableitung) im Start- und Endpunkt gleich Null wird:

$$P_0''(x_s)=0$$
$$P_{k-2}''(x_e)=0$$

Formel 20: Natürliche Randbedingung an eine kubischen Spline-Kurve [133]

Diese Bedingungen ergeben zusammengenommen genug Gleichungen, um die (k-1) mal 4 Parameter  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  und  $d_i$  für die (k-1) Teilpolynome der kubischen Spline-Kurve zu berechnen.

Mit der "kubischen Spline-Kurve" kann also eine beliebige Anzahl Punkte glatt und gleichmäßig verbunden werden, ohne dass der Grad der beschreibenden Polynome proportional mit der Anzahl der Punkte ansteigen muss - die Polynome aus denen die kubische Spline-Kurve zusammengesetzt ist, sind unabhängig von der Anzahl zu verbindender Punkte immer dritten Grades. Dadurch vermeidet die Spline-Interpolation die bei Polynomen höheren Grades häufig auftretenden starken Oszillationen zwischen den vorgegebenen Punkten (RUNGES Phänomen).

BEGOLE [18] fand, dass auch eine durch nur fünf Punkte festgelegte kubische Spline-Kurve schon eine sehr gute Annäherung der Zahnbogenform darstellen kann. Da Spline-Kurven auch asymmetrische Bogenformen beschreiben können und mit der immer weiteren Verbreitung von Computern die Lösung der linearen Gleichungssysteme zur Bestimmung der Parameter auch bei einer größeren Anzahl von Punkten nunmehr unproblematisch ist, wurde auch dieser Ansatz von verschiedenen Autoren immer wieder aufgegriffen: So stellte BEGOLE [19] 1980 ein Computerprogramm in der Programmiersprache FORTRAN<sup>2</sup> vor, mit dem Spline-Kurven zur Beschreibung von Zahnbogenformen berechnet werden können. Neuere Systeme zur computergestützten Analyse von Zahnbögen bedienen sich teilweise ebenfalls dieses Ansatzes [112],[164]. Auch auf klinische Fragestellungen wurde dieses Modell angewandt. So entwickelte BEGOLE [22] eine neue, auf Spline-Kurven basierende Methode zur Vermessung von Bogenformveränderungen, z.B. vor und nach kieferorthopädischen Behandlungen. BEGOLE [21] verwandte diese Methode bei der Stabilitätsanalyse von 38 Behandlungsfällen (53 Zahnbögen ohne, 23 mit Extraktion von Molaren). Verglichen wurde die Zahnbogenform vor, unmittelbar nach und sechs bis acht Jahre nach Abschluss der kieferorthopädischen Behandlung. BEGOLE kam zu dem Schluss, dass es in den von

ihnen betrachteten Fällen keinen bedeutenden Zusammenhang zwischen dem Umfang der Zahnbogenveränderung und der Stabilität gab und auch eine sigifikante Verbreiterung des Zahnbogens zu stabilen Bogenformen führen kann. Eine weitere Untersuchung von DAVIS [44], bei der die Bogenformstabilität von 72 kieferorthopädisch behandelten Patienten mit und ohne Prämolarenextraktion einige Jahre nach Abschluss der Behandlung mit derselben Methode untersucht worden ist, zeigte eine nur geringe Prognosemöglichkeit im Hinblick auf spätere Rezidive über die aus der Methode gewonnenen Parametersätze.

#### 2.2.2.6 Fourierreihen

Fourierreihen sind ein mächtiges Werkzeug zur Darstellung und Behandlung periodischer Funktionen. Sie dienen in Mathematik, Physik und den Ingenieurwissenschaften dazu, periodische Funktionen als Summe aus Sinus- und Kosinusschwingungen zu beschreiben und damit einfacher handhabbar zu machen. Allgemein kann durch die Fourierreihe jede periodische Funktion  $f(x)$  mit der Periode  $L$  auf elementare Sinus- und Kosinusschwingungen zurückgeführt werden (Formel 21).

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) \quad , \text{ mit } \omega = \frac{2\pi}{L}$$

Formel 21: Allgemeine Fourierreihe [98]

Die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  stehen für die Stärke, mit denen die einzelnen Sinus- und Kosinusschwingungen mit dem jeweils  $n$ -fachen der Grundfrequenz  $\omega$  in die Fourierreihe eingehen. Der Koeffizient  $a_0$  ergibt eine Verschiebung der Funktion parallel zur  $y$ -Achse. Nachdem die Fourierreihe in anderen Bereichen der Biologie und Medizin erfolgreich zur Beschreibung anatomischer Strukturen wie des menschlichen Schädels, des menschlichen Unterkiefers oder auch der Form von Zellen und Zellkernen [38],[94],[95] angewandt wurde, übertrug VALENZUELA [167] diesen Ansatz auf die Beschreibung von Zahnbögen. Das von VALENZUELA [167] entwickelte Verfahren stellt prinzipiell ein beschreibendes Modell dar, bei dem alle vorgegebenen Punkte exakt durchlaufen werden und daher sowohl symmetrische als auch asymmetrische Zahnbögen exakt beschrieben werden können. In der praktischen Anwendung weicht der Kurvenverlauf unter Umständen trotzdem leicht von den vorgegeben Punkten ab (dieses

wurde von VALENZUELA [167] ebenfalls untersucht), da nur endlich viele Glieder der Fourierreihe bei der Beschreibung berücksichtigt werden. Trotzdem ist das Modell klar den beschreibenden Modellen zuzurechnen, da trotz dieser Abweichung keinerlei Parameteroptimierung im Sinne der "Least-Square"-Methode stattfinden kann, sondern zur Steigerung der Genauigkeit mehr bzw. höhere Terme der Fourierreihe in die Formberechnung einbezogen werden müssten.

Ein Zahnbogen ist nicht periodisch, daher wird die Fourierreihen-Funktion nur innerhalb einer halben Periode  $L/2$  betrachtet. Diese ist gegeben durch die maximale Breite  $T$  des Zahnbogens (bei VALENZUELA [167] der transversale Abstand der bukkalen Höckerpunkte der ersten Molaren). Zur weiteren Vereinfachung werden von den Autoren nur ungerade Funktionen betrachtet, da die (globalen) Symmetrieeigenschaften der Funktion für die Charakterisierung der Zahnbogenform irrelevant sind. Damit vereinfacht sich die Fourierreihe wesentlich, da nun nur noch die Sinusterme in Betracht gezogen werden müssen. Legt man den Startpunkt der Funktion zusätzlich in den Ursprung, fällt auch der Koeffizient  $a_0$  weg und man erhält die sehr kompakte Beschreibung:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin(n\omega x)) \quad , \text{ mit } \omega = \frac{2\pi}{L} \quad \text{ und } L = 2T$$

Formel 22: Vereinfachte Fourierreihe nach VALENZUELA [167]

Die Koeffizienten  $b_n$  der Fourierreihe sind gegeben durch:

$$b_n = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} f(x) \sin(n\omega x) dx$$

Formel 23: Koeffizienten  $b_n$  der Fourierreihe nach VALENZUELA [167]

Die Autoren segmentieren den durch die Funktion zu beschreibenden Bereich des Zahnbogens nun mittels  $P$  Punkten mit den Koordinaten  $x_i$  und  $y_i$  in  $P-1$  Teilstücke. Die Koeffizienten der Fourierreihe sind dann gegeben durch:

$$b_n = \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{P-1} b_{n,i} \quad \text{mit} \quad b_{n,i} = m_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} x \sin(kx) dx + c_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin(kx) dx$$

Formel 24: Koeffizienten  $b_n$  der segmentierten Fourierreihe nach VALENZUELA [167]

zusätzlich zu den oben schon angegebenen wurden dabei folgende Abkürzungen eingeführt:

$$k = \frac{n\pi}{T}, \quad m_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{und} \quad c_i = y_i - m_i x_i$$

Formel 25: Zusätzliche Abkürzungen nach VALENZUELA [167]

Das  $k$  steht (ähnlich dem  $\omega$  in der allgemeinen Fourierreihe) für die jeweilige Frequenz der Sinusfunktionen,  $m_i$  ist die Steigung der Geraden durch die zwei Punkte, die das  $i$ -te Segment definieren und  $c_i$  der  $y$ -Achsenabschnitt dieser Geraden.

Nach dem Ausführen der Integration in der Definitionsgleichung für die  $b_{n,i}$  (vgl. Formel 24) ergibt sich folgender Ausdruck:

$$b_{n,i} = \frac{-\cos(kx_{i+1})}{k} y_{i+1} + \frac{\cos(kx_i)}{k} y_i + \frac{m_i}{k^2} [\sin(kx_{i+1}) - \sin(kx_i)]$$

Formel 26: Koeffizienten  $b_n$  nach Integration [167]

der durch Einführung des Termes  $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$  noch symmetrischer geschrieben werden kann:

$$b_{n,i} = \frac{y_{i+1}}{k^2 h_{i+1}} [-k h_{i+1} \cos(kx_{i+1}) + \sin(kx_{i+1}) - \sin(kx_i)] \\ + \frac{y_i}{k^2 h_{i+1}} [k h_{i+1} \cos(kx_{i+1}) - \sin(kx_{i+1}) + \sin(kx_i)]$$

Formel 27: Symmetrisch geschriebene Koeffizienten  $b_n$  nach VALENZUELA [167]

Dieses Ergebnis kann nun in die Gleichung für die  $b_n$  (Formel 24) eingesetzt werden und es ergibt sich folgende Bestimmungsgleichung für die Koeffizienten der Fourierreihe:

$$b_n = \frac{2T}{n^2 \pi^2} \sum_{i=1}^{p-1} \frac{y_i}{h_{i+1}} [k h_{i+1} \cos(kx_{i+1}) - \sin(kx_{i+1}) + \sin(kx_i)] \\ + \frac{y_{i+1}}{h_{i+1}} [-k h_{i+1} \cos(kx_{i+1}) + \sin(kx_{i+1}) - \sin(kx_i)]$$

Formel 28: Koeffizienten  $b_n$  der vereinfachten Fourierreihe nach VALENZUELA [167]

Setzt man in die Formel 28 die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten der vorgegebenen Punkte des Zahnbogens ein, so erhält man sukzessive die benötigten Koeffizienten  $b_n$  für Formel 22, die dann den Verlauf des Zahnbogens beschreibt.

VALENZUELA verglich nun die Passgenauigkeit der Beschreibung mittels der Fourierreihe mit der von Polynomen vierten Grades, indem sie für beide Modellen die Zahnbogenform von 40 Modellen bestimmt. Die Abweichung des Kurvenverlaufs von den vorge-

gegebenen Punkten betrug beim Polynom zwischen 0,32 und 2,12 mm, während der Fehler bei der Fourierreihe lediglich 0,01 bis 0,03 mm betrug (die Abweichung beträgt nicht wie theoretisch zu erwarten 0 mm, weil die Fourierreihe nach einer gewissen Zahl von Koeffizienten abgebrochen wurde). VALENZUELA schließt daraus, dass die Beschreibung des Zahnbogens mittels Fourierreihe genauer ist und diese Methode anstatt der Näherung mit Polynomen vierten Grades, trotz des erhöhten mathematischen Aufwands, verwendet werden sollte.

### **2.2.3 Matching per "Least-Square-Fit"**

Zwei der hier vorgestellten Modelle (Fourierreihen und Spline-Kurven) laufen verfahrensbedingt bereits exakt durch alle vorgegebenen Bezugspunkte. Alle anderen Modelle lassen sich prinzipiell durch ebensoviele Punkte exakt festlegen, wie sie freie Parameter enthalten. Sollen – wie üblicherweise nötig – mehr Punkte erfasst werden, als das Modell freie Parameter enthält (man spricht von "Überbestimmung"), ergibt sich das Problem, dass die zusätzlichen Punkte meistens nicht exakt von der mathematischen Beschreibung durchlaufen werden können. Man benötigt also ein Verfahren, mit dem die "Passgenauigkeit" der Funktion mit einem bestimmten Parametersatz beurteilt werden kann, damit dann als ideale Näherung derjenige Parametersatz ausgewählt werden kann, der die vorgegebenen Punkte am besten annähert. Auch bei den Modellen, die prinzipiell schon alle vorgegebenen Punkte durchlaufen, kann die Anwendung eines solchen Verfahrens sinnvoll sein, um die allgemeine Passform dieser Modelle zu beurteilen. Dies kann erfolgen, indem zum Beispiel nicht alle Bezugspunkte zur Berechnung der Funktion verwendet werden, sondern einige nur nachträglich zur Gütebestimmung herangezogen werden, oder indem zusätzlich noch weitere "Kontrollpunkte" auf dem anatomischen Zahnbogen ermittelt werden.

Das verbreitetste Verfahren zur Bestimmung der "Passgenauigkeit" einer beliebigen Funktion zu einer vorgegebenen Punktmenge ist der sogenannte "Least-Square-Fit" oder in der deutschen Übersetzung "Methode der kleinsten Quadrate" [168]. Dieses Verfahren wird allgemein CARL FRIEDRICH GAUß (1777-1855) zugeschrieben, der 1795 die Grundlagen schuf und es Anfang des 19. Jahrhunderts auf ein astronomisches Problem

anwandte, bei dem es um die Bahnberechnung zur Wiederauffindung des nur kurzzeitig beobachteten Asteroiden Ceres ging. GAUSS publizierte das vollständige Verfahren erst 1809 [69]. Der Franzose ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833) beschrieb 1805 unabhängig von ihm dieselbe Methode [90].

Betrachtet man den Verlauf einer Funktion  $f(x; a_1, \dots, a_n)$ , deren genauer Funktionszusammenhang von  $n$  verschiedenen Parametern  $a_n$  bestimmt sei, durch eine Punktwolke von  $i$  Punkten  $P_i$  mit den Koordinaten  $x_i/y_i$  (Abbildung 27), gibt die Differenz  $\Delta y_i$  zwischen der  $y$ -Koordinate des jeweiligen Punktes und dem Wert  $f(x_i)$  der Funktion an dieser Stelle die Abweichung der Funktion vom vorgegebenen Punkt an.

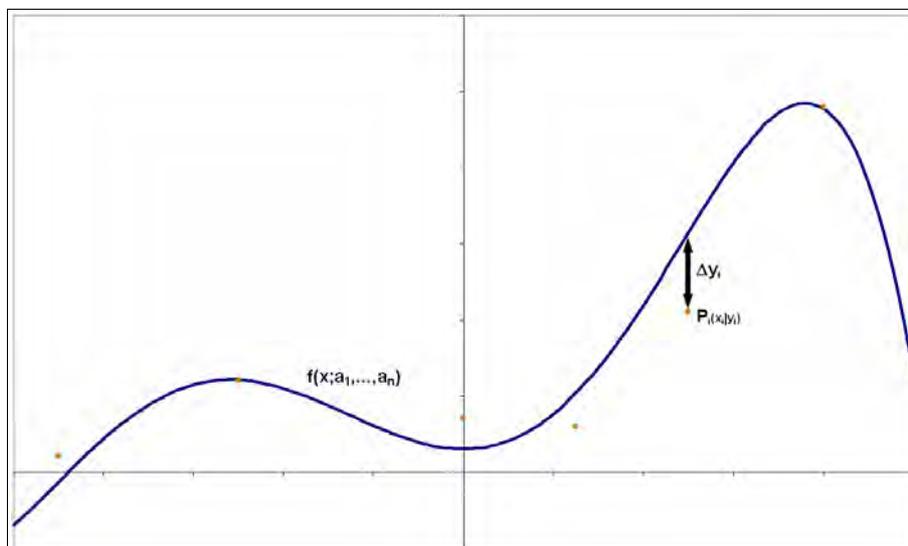


Abbildung 27: Beispiel zum "Least-Square"-Verfahren

Im Idealfall sollte diese Differenz für jeden Punkt gleich Null sein, die Funktion würde dann exakt durch alle vorgegebenen Punkte verlaufen. Wenn dies nicht möglich ist, da z.B. das Verändern eines der Parameter  $a_n$  zur Verringerung eines bestimmten Punkt-Funktionsabstands  $\Delta y_i$  dazu führt, dass der Abstand zu einem oder mehreren anderen Punkten gleichzeitig zunimmt, sollte als Kompromiss die Summe aller Abstände  $\Delta y_i$  möglichst klein werden. Da bei einfacher Summation aller Abstände die Abweichungen oberhalb und unterhalb der Funktion mit unterschiedlichen Vorzeichen in die Summe eingehen würden und sich daher unter Umständen ungewollt durch gegenseitige Kompensation in niedrigeren Abstandssummen niederschlagen würden, werden die Differenzen vor der Summation quadriert. Durch Variation der Parameter  $a_n$  soll also die kleinst-

mögliche Abstandssumme  $A(a_1, \dots, a_n)$  gesucht werden, mathematisch formuliert:

$$\min A(a_1, \dots, a_n) = \min \sum_{m=1}^i (\Delta y_m)^2 = \min \sum_{m=1}^i (f(x_m) - y_m)^2$$

Formel 29: Abstandssumme für das "Least-Square"-Verfahren [168]

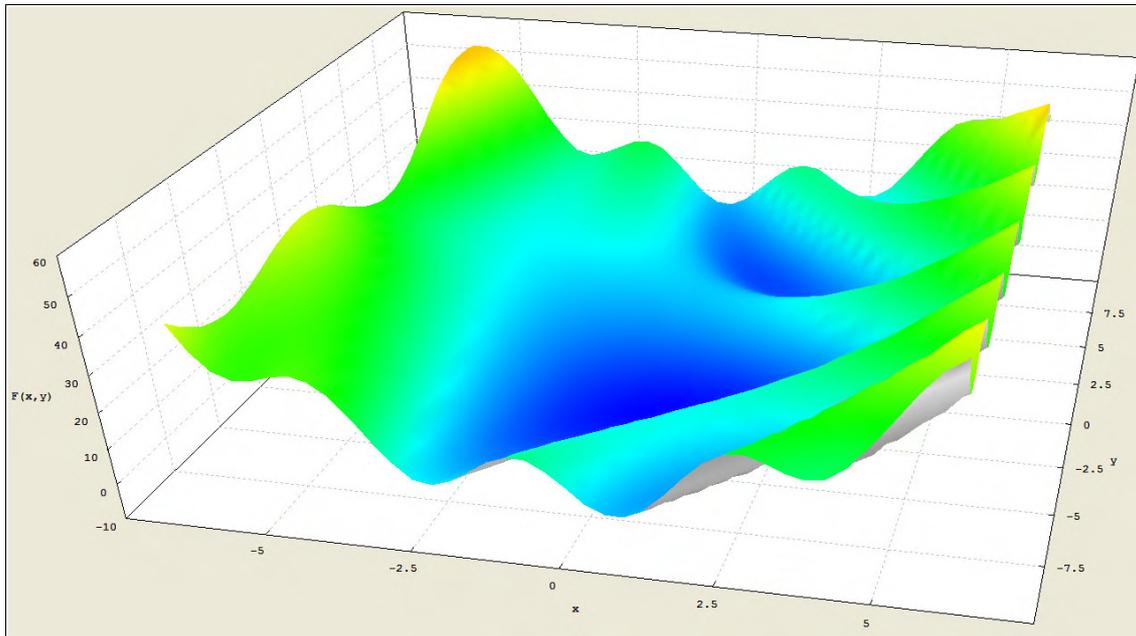
Die Variation der Parameter  $a_n$  kann auf verschiedenen Wegen durchgeführt werden. Besitzt die Funktion nur einen einzigen freien Parameter  $a$ , kann die Abstandssumme allgemein mit den Standardmethoden der Analysis minimiert werden [162]: Das hinreichende Kriterium für ein Minimum ist, dass die Ableitung der Abstandssumme  $A(a)$  nach  $a$  gleich Null ist, während die zweite Ableitung größer als Null sein muss:

$$\frac{d}{da} A(a) = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^2}{da^2} A(a) > 0$$

Formel 30: Hinreichendes Kriterium für Minima der Abstandssumme  $A(a)$  [162]

Anschaulich bedeutet dies, in einer Auftragung des Wertes der Abstandssumme  $A$  gegen den Parameters  $a$  die Stellen der Kurve zu suchen, an der die Steigung (1. Ableitung) gleich Null und die Krümmung (2. Ableitung) positiv, also links ist. Diese Stellen sind die lokalen Minima der Abstandssumme  $A$  in  $a$ , das globale Minimum (also das Kleinste der Gefundenen) liegt an der Stelle, die dem Parameter  $a$  entspricht, bei dem die Funktion also die vorgegebenen Punkte am Besten annähert.

Hängt die Funktion von mehr als einem Parameter ab gibt es keine immer zum Erfolg führende analytische Lösung des Problems das globale Minimum zu finden. Bei nur zwei Parametern wird aus dem einfachen eindimensionalen Problem, das soeben beschrieben wurde ein von zwei Dimensionen abhängiges "Funktionsgebirge", in dem es nun das tiefste Tal zu finden gilt (Abbildung 28).

Abbildung 28: Die Funktion  $F(x,y) = 7 \sin((x/3+1)*y/1,7) + (x^2+1/8y^2)$ 

Schon anschaulich ist klar, dass dieses ein wesentlich komplizierteres Problem darstellt, da die Funktion nicht mehr einfach von kleiner zu größer werdendem  $a$  durchlaufen werden kann um den tiefsten Punkt zu finden, sondern plötzlich unendlich viele Richtungen (in Abbildung 28 aufgespannt von  $x$  und  $y$ ) offen stehen, in der der minimale Punkt liegen könnte. Hängt die Funktion von noch mehr Parametern ab, ergeben sich dementsprechend weitere zusätzliche Freiheitsgrade, das entstehende Gebilde, in dem nun das Minimum der Abstandssumme zu suchen ist, ist nicht mehr anschaulich vorstellbar, für seine Darstellung wären mehr als drei Dimensionen nötig. Glücklicherweise existieren einige Algorithmen, die auch für beliebig viele Parameter numerisch Minima in diesen  $n$ -dimensionalen "Funktionsgebirgen" finden können, vor allem der LEVENBERG-MARQUARDT-Algorithmus, der im folgenden Kapitel näher erläutert wird, findet dabei heute weite Verwendung.

#### 2.2.4 LEVENBERG-MARQUARDT-Algorithmus

Bei der Verwendung des Least-Square-Verfahrens zur Optimierung von Funktionen mit mehr als einem Parameter entsteht das Problem, dass die Abstandssumme folglich auch von mehr als einem Parameter abhängt. Dies hat zur Folge, dass die oben geschilderte Standardmethode der Analysis bei  $n$  zu optimierenden Parametern auf einen  $n$ -

dimensionalen Parameterraum erweitert werden muss. Der LEVENBERG-MARQUARDT-Algorithmus ist die heute wohl am weitesten verbreitete Methode (und wird auch von dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Programm zur Bogenformanalyse verwendet), die dies leistet.

Der LEVENBERG-MARQUARDT-Algorithmus wurde erstmals von LEVENBERG [97] im Jahr 1944 veröffentlicht. Im Jahr 1963 wurde der Algorithmus unabhängig von MARQUARDT [103] ein zweites Mal entwickelt. Heute trägt er daher den Namen beider Mathematiker. Im wesentlichen beruht der LEVENBERG-MARQUARDT-Algorithmus auf einer Kombination des Gradientenabstiegsverfahren (auch "Verfahren des steilsten Abstiegs") und dem GAUß-NEWTON-Verfahren. Beide Verfahren sind ihrerseits Algorithmen zur Lösung nichtlinearer und mehrparametrischer Minimierungsprobleme. Der einfachste und gleichzeitig wahrscheinlich intuitivste Algorithmus ist das sogenannte Gradientenabstiegsverfahren. Man macht sich in diesem Verfahren zunutze, dass der negative Gradient einer Funktion  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$-\nabla F(X), \quad \text{mit } X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Formel 31: Negativer Gradient von  $F(X)$  [71]

immer in Richtung des steilsten Abstiegs einer Funktion zeigt. Folgt man dem Gradienten iterativ mit einer geeigneten Schrittweite  $\eta$  bis der Gradient null wird (es also in keiner Richtung mehr abwärts geht), landet man im Allgemeinen (es gibt Ausnahmen, auf die hier aber nicht näher eingegangen werden soll, für eine detailliertere Diskussion siehe [71]) in einem Minimum (das allerdings nicht zwangsläufig das globale Minimum sein muss). Ein Startpunkt muss vorgegeben werden, die Iterationsvorschrift<sup>4</sup> für die nächsten Punkte lautet:

$$X_{n+1} = X_n - \eta \nabla F(X_n)$$

Formel 32: Iterationsvorschrift des Gradientenabstiegsverfahren [71]

Der Nachteil dieses Verfahrens besteht vor allem darin, dass die tatsächlich während einer Iteration vollzogene Schrittlänge gerade dann groß ist, wenn der Gradient groß ist und klein, wenn dieser selbst klein ist. Erwünscht wäre aber eher das genau umgekehrte Verhalten, da hierdurch die Gefahr entsteht, dass bei steilen Gradienten Minima zu-

nächst übersprungen werden, was zu einem "Zick-Zack-Kurs" um ein Minimum führen kann, während bei flachem Gradienten insbesondere nahe eines Minimums die Schritte so klein werden, dass der Algorithmus nur langsam konvergiert.

Das GAUß-NEWTON-Verfahren ist etwas komplexer und entwickelt das Prinzip des NEWTON-Verfahrens (also das lokale Ersetzen einer komplizierten Funktion durch eine lineare Näherung mit anschließender Iteration) für eindimensionale Funktionen auf mehrdimensionale Funktionen weiter und wendet es speziell auf das Problem der Minimierung der Fehlerquadratsumme einer Funktion an. Es gilt bei einer Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $n$  Variablen, die zu einem Vektor  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $p$  Parametern, die zu einem Vektor  $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$  zusammengefasst werden können und  $k$  vorgegebenen Vektor/Funktionswert-Paaren  $(X_i; y_i)$  den Parametersatz  $a$  zu finden, für den die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{i=1}^k (f(X_i) - y_i)^2$$

Formel 33: Summe der Fehlerquadrate [71]

(also die Gesamtabweichung von den vorgegebenen Vektor/Funktionswert-Paaren) minimal wird (vgl. Kapitel 2.2.3 "Matching per 'Least-Square-Fit'").

Für das GAUß-NEWTON-Verfahren muss nun zunächst der sogenannte Residuenvektor, der die Abweichung der Funktion von den vorgegebenen Vektor/Funktionswert-Paaren in Abhängigkeit des Parametersatz  $a$  enthält, bestimmt werden:

$$r = (r_1, r_2, \dots, r_k), \quad \text{mit } r_i = f(X_i) - y_i \text{ und } i = 1, 2, \dots, k$$

Formel 34: Residuenvektor des GAUß-NEWTON-Verfahren [71]

Außerdem muss die JACOBI-Matrix dieses Vektors bestimmt werden, diese ist definiert als eine  $(k \times p)$ -Matrix, die die partiellen Ableitung des Residuenvektors nach den einzelnen Parametern enthält. Die Matrixelemente sind gegeben durch:

$$J_{i,j} = \frac{\partial r_i}{\partial a_j}, \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, k \text{ und } j = 1, 2, \dots, p$$

Formel 35: Die JACOBI-Matrix [71]

Die JACOBI-Matrix enthält im Gegensatz zum Gradienten nicht nur Informationen über

die Richtung des steilsten Abstiegs, sondern auch über den Verlauf der Funktion in alle anderen Richtungen. Nachdem ein Startsatz  $a$  von Parametern festgelegt worden ist, berechnen sich die folgenden Parametersätze über folgende Iterationsgleichung:

$$a_{n+1} = a_n - (J^T \cdot J)^{-1} \cdot J^T \cdot r$$

Formel 36: Iterationsvorschrift des GAUß-NEWTON-Verfahren [71]

Durch wiederholte Iteration nähert sich  $a$  immer mehr dem optimalen Parametersatz an, bei dem die Fehlersumme minimal wird. Die Iteration wird abgebrochen, wenn sich der Parametersatz von einem Iterationsschritt zum nächsten nicht mehr (oder um weniger als einen vorher festgelegten Faktor) verändert. Um die Berechnung zu vereinfachen wird diese aufgespalten, man erspart sich so die Matrixinversion und berechnet stattdessen den Lösungsvektor  $s$  eines linearen Gleichungssystems:

$$(J^T \cdot J) \cdot s = -J^T \cdot r$$

Formel 37: Ersetzung zur Vermeidung der Matrixinversion [71]

Den nächsten Iterationsschritt erhält man nach Lösung des Gleichungssystems durch einfache Addition des Lösungsvektors auf den Parametersatz des vorhergegangenen Schrittes:

$$a_{n+1} = a_n + s$$

Formel 38: Modifizierte Iterationsvorschrift des GAUß-NEWTON-Verfahren [71]

Bei dem LEVENBERG-MARQUARDT-Algorithmus wird nun in das lineare Gleichungssystem ein (nicht-negativer) Dämpfungsfaktor  $\lambda$  multipliziert mit der Einheitsmatrix  $E$  eingeführt:

$$(J^T \cdot J + \lambda \cdot E) \cdot s = -J^T \cdot r$$

Formel 39: Modifikation von Formel 37 für den LEVENBERG-MARQUARDT-Algorithmus [97],[103]

Dies bietet nun den entscheidenden Vorteil, dass mittels Anpassung von  $\lambda$  der Algorithmus zwischen GAUß-NEWTON-Verfahren und Gradientenabstiegsverfahren hin- und hergeschaltet werden kann. Wenn sich die Summe der Fehlerquadrate schnell verkleinert, kann  $\lambda$  klein oder sogar zu null gewählt werden und das Verfahren nähert sich dem GAUß-NEWTON-Verfahren an. Sollte ein Iterationsschritt allerdings nur eine unbefriedigende Verbesserung ergeben, kann ein größeres  $\lambda$  gewählt werden und das Verfahren folgt damit eher dem steilsten Abstieg. Abgebrochen wird der LEVENBERG-MARQUARDT-

Algorithmus, wenn entweder eine vorher definierte Mindestschrittlänge unterschritten wird, oder sich die Summe der Fehlerquadrate um weniger als ein vorher definiertes Limit ändert. Der Vorteil gegenüber dem GAUß-NEWTON-Verfahren besteht in einer höheren Robustheit des Algorithmus, d.h. dass er auch bei ungünstigen Startwerten für den Parametersatz  $a$  besser konvergiert als das GAUß-NEWTON-Verfahren.

### 2.3 Orthodontische Behandlungsbögen in der kieferorthopädischen Therapie

In dem Bestreben nach anatomisch und physiologisch idealen, harmonischen Zahnbögen begannen Zahnärzte historisch schon früh damit starre, bogenförmige Hilfsmittel zu verwenden, an denen sich die Dentition orientieren sollte. Schon 1728 publizierte der französische Zahnarzt PIERRE FAUCHARD (1678-1761) [15] in seinem Lehrbuch "The Surgeon Dentist" in einem ganzen Kapitel Methoden "Zähne zu richten". Fauchard verwendete ein Gerät namens "Bandeau", einen hufeisenförmigen Bogen aus "wertvollem Metall", an dem er Zähne mit Bindfäden ligierte und auf diese Weise bei Patienten Zähne bewegen und ganze Zahnbögen expandieren konnte (Abbildung 29).

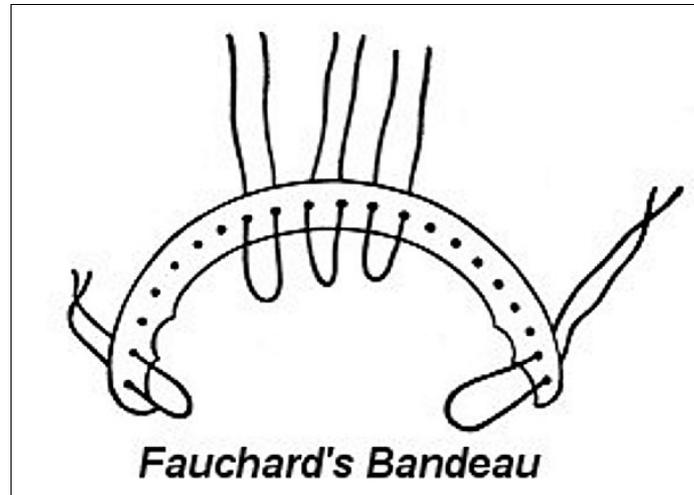


Abbildung 29: Behandlungsgerät "Bandeau" [15]

ETIENNE BOURDET (1722-1789) [15], ein Nachfolger von FAUCHARD beschrieb in seinem Buch "The Dentist's Art" die Weiterentwicklung des "Bandeau", mit dem er als erste belegte Quelle bereits 1757 zur Auflösung von Engständen sogar bereits Prämolarenextraktionen durchführte.

Von den genannten ersten Beschreibungen im 17. Jahrhundert führte ein langer Weg über die international bekannten Pioniere der festsitzenden kieferorthopädischen Be-

handlungstechniken, wie z.B. RICKETTS und ANDREWS, zu den heute verwendeten modernen Multibracket-Systemen. Moderne Fertigungstechniken ermöglichen heute immer kleinere Bracketformen, die bereits in zahnfarbenen Materialien (Keramiken) hergestellt werden können. Die Entwicklung von neuen "superelastischen" Metalllegierungen eröffnete den Fachzahnärzten für Kieferorthopädie erweiterte Therapiemöglichkeiten, sowie qualitative Verbesserungen. Im Folgenden wird im Rahmen der Zielsetzung dieser Arbeit insbesondere auf moderne konfektionierte kieferorthopädische Behandlungsbögen eingegangen

### **2.3.1 Materialien orthodontischer Behandlungsbögen**

Orthodontische Behandlungsbögen bestehen heute aus Metalllegierungen. Je nach Material können Behandlungsbögen mit mehr oder weniger Aufwand an individuelle Zahnbogenformen manuell angepasst werden. Die Bögen sind in verschiedenen Materialzusammensetzungen und je nach Hersteller in unterschiedlichen, konfektionierten Bogenformen über den Dentalhandel zu beziehen. Bögen aus der Gruppe der "Stahl-Bögen" lassen sich z.B. mit kieferorthopädischen Zangen manuell an jede Zahnbogenform individuell anpassen, wobei diese Formgebung plastisch erhalten bleibt. Andere Materialien, wie z.B. die "superelastischen" Metalllegierungen lassen sich von dem Behandler "Chair-Side" nicht an individuelle Bogenformen anpassen, da sie - in Abhängigkeit von der Umgebungstemperatur - ein hochentwickeltes "Formgedächtnis" haben, was aber keinen Nachteil darstellt, sondern gerade deren Qualität ausmacht. Diese Eigenschaft der superelastischen Behandlungsbögen erfordert jedoch eine sorgfältige Analyse der individuellen Zahnbogenform des Patienten und eine entsprechend gewissenhafte Auswahl eines konfektionierten kieferorthopädischen Zahnbogens, der dem Behandlungsziel möglichst genau entspricht. Dabei wird Wert darauf gelegt, dass während der gesamten Bogensequenz (von Bögen dünneren, zu Bögen dickeren Querschnittes), wobei sich die Form des Bogenquerschnittes, sowie das verwendete Material ändern kann, die zu Beginn festgelegte Bogenform möglichst genau bis zum Ende der Behandlung erhalten bleibt.

Neben der Bogenform und der Form des Drahtquerschnittes des Bogenmaterials, sind die Materialeigenschaften eines Behandlungsbogens durch die Größen Elastizitätsmo-

dul, Festigkeit und Deflektionsvermögen charakterisiert. Der Elastizitätsmodul (kurz E-Modul) ist eine Materialkonstante, die angibt, wie stark sich ein Material aufgrund von externen Kräften elastisch verformt. Je größer der E-Modul, desto schwieriger ist ein Draht elastisch zu verformen, desto höher sind folglich die auf die Zähne wirkenden Kräfte, wenn der Draht in seine Ursprungsform zurückkehrt. Die Festigkeit eines Drahtes gibt den Widerstand gegenüber Verformungen an, dieser ist neben dem E-Modul von der Querschnittsfläche und der Länge des Drahtes abhängig. Das Deflektionsvermögen gibt an, wie weit ein Draht elastisch verbogen werden kann, ohne dauerhaft (plastisch) verformt zu werden (also nach der Verbiegung nicht von allein wieder in die Ursprungsform zurückkehrt) [85],[151]. Im folgenden werden einige Bogenmaterialien mit den damit verbundenen klinischen Eigenschaften kurz beschrieben.

**Standardstahl (SS oder CrNi-Stahl, z.B. Tru-Chrome):**

Bögen aus Standardstahl weisen einen hohen E-Modul und eine hohe Festigkeit bei mittlerem Deflektionsvermögen auf.

**Cobalt-Chrom-Nickel (Blue, Yellow, Green oder Red Elgiloy, Remaloy):**

Die verschiedenen Elgiloy-Legierungen unterscheiden sich in ihrem Härtegrad, allgemein weisen sie einen höheren E-Modul als Standardstahl-Bögen auf, was bedeutet, dass sie mit stärkeren Kräften auf die Zähne wirken. Das Deflektionsvermögen dieser Legierungsarten ist gering, plastische Verformungen treten schnell auf. In der RICKETTS-Technik stellt diese Klasse die Standardlegierung (z.B. für Utility-Bögen) dar.

**Titan-Molybdän ( $\beta$ -Titanlegierung, z.B. TMA):**

Diese Legierung besitzt einen gegenüber dem Standardstahl nur etwa halb so großen E-Modul. Es ergibt sich dadurch eine mittlere Festigkeit bei hohem Deflektionsvermögen.

**Nickel-Titanium (NiTi, z.B. Nitinol, Orthonol, Titanol, Sentalloy, Rematitan):**

NiTi-Legierungen weisen nur ca. 20-25 % des E-Moduls von Standardstahl auf. Daher besitzen sie bei geringer Festigkeit ein extrem hohes Deflektionsvermögen. Unterscheiden lassen sich in dieser Gruppe die sogenannten aufgehärteten Martensite (z.B.

Nitinol), die sich – abgesehen von einem geringen E-Modul und den sich daraus ergebenden positiven Eigenschaften – prinzipiell wie konventionelle Bögen aus anderen Materialien verhalten, sowie die pseudo- bzw. superelastischen Drähte (z.B. Sentalloy). Diese weisen das oben genannte "Formgedächtnis" (auch "Memoryeffekt" genannt) auf, d.h. die Legierungen sind so eingestellt, dass sich Drähte z.B. bei Zimmertemperatur verbiegen lassen, sich aber in der Mundhöhle bei Körpertemperatur ihrer alten Form "erinnern" und in diese zurückkehren. Dauerhaft umformen lassen sich Drähte aus solchen Materialien nur oberhalb spezieller Temperaturen ("Umprogrammierung") [174]. Eine ausführliche Diskussion der kieferorthopädischen Verwendung superelastischer Bögen findet sich in [172], hier soll nur kurz ein Überblick über das Prinzip der "Gedächtnislegierungen" gegeben werden: Der Memoryeffekt und die Anwendung in der Kieferorthopädie basiert auf der Existenz verschiedener Phasen (Martensit, Austenit und Übergangphasen), sowie geeignet eingestellten Übergangstemperaturen zwischen diesen in NiTi-Legierungen (und gelegentlich Beimischungen anderer Metalle).

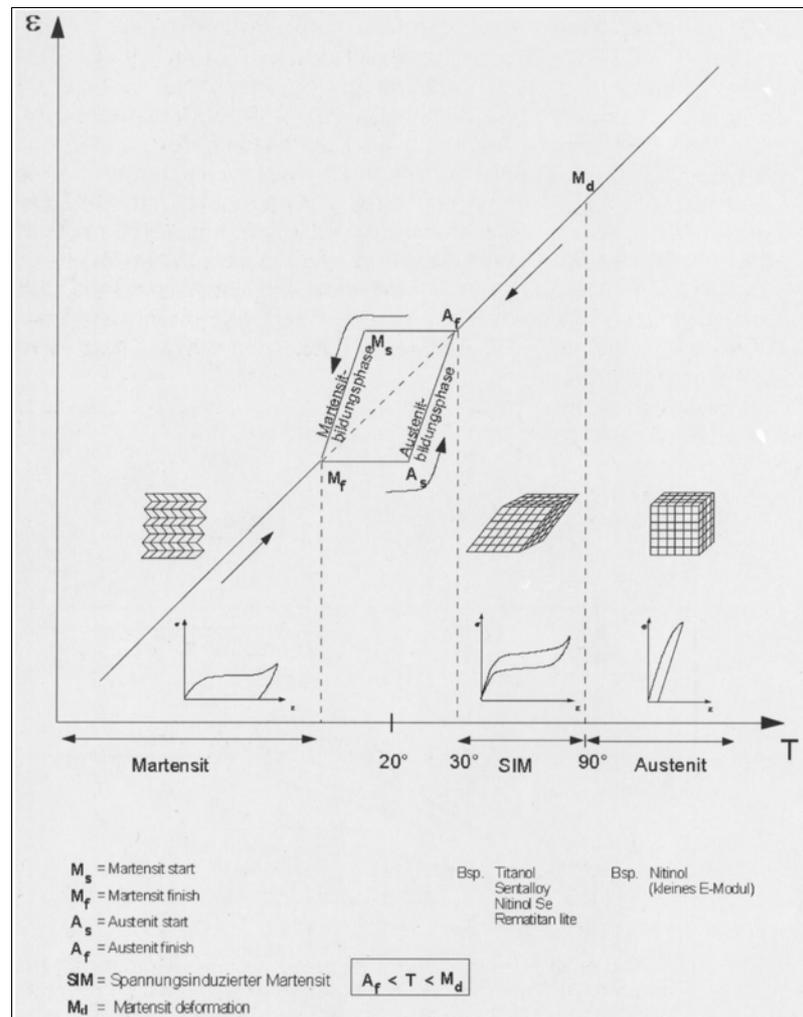


Abbildung 30: Temperaturabhängigkeit der Materialparameter von Memory-Legierungen [173]

Abbildung 30 zeigt eine Übersicht über die Materialeigenschaften einer Nitinol-Legierung bei verschiedenen Temperaturen: Unterhalb einer Temperatur  $M_f$  befindet sich das Material in einer martensitischen Phase und kann - wie im klein eingefügten Spannungs-/Dehnungsdiagramm zu erkennen ist - verhältnismäßig leicht verformt werden, kehrt jedoch nach Zurücknahme der Spannung nicht in seine alte Form zurück (es ergibt sich keine geschlossene Kurve im  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm). Wird das Material nun über die Temperatur  $M_f$  hinaus erwärmt, beginnt ab einer bestimmten Temperatur  $A_s$  der Phasenübergang zu einer austenitischen Phase, der mit dem Erreichen der Temperatur  $A_f$  abgeschlossen ist. Obwohl sich das Material nun im austenitischen Bereich befindet, nimmt es unter Spannung immer noch eine Martensit-Phase an, man spricht vom spannungsinduziertem Martensit (SIM). In dieser Phase (die bei der kieferorthopädischen Anwen-

nung so eingestellt ist, dass sie im Bereich der Körpertemperatur vorliegt) bilden sich Verformungen zurück, die in der Martensit-Phase durchgeführt wurden, d.h. das Material kehrt wieder in seine Ausgangsform zurück (der eigentliche Memoryeffekt). Eine erneute Verformung des Materials in dieser Phase ist schwerer durchzuführen und nach Rücknahme der Spannung kehrt das Material sofort vollständig wieder in die alte Form zurück (Superelastizität, geschlossene Kurve im  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm). Durch erneutes Abkühlen unter die Temperatur  $M_s$  erfolgt der Phasenübergang zurück zum Martensit, der bei Erreichen der Temperatur  $M_f$  abgeschlossen ist. Der Wechsel zwischen Austenit und Martensit ist völlig reversibel und kann beliebig oft vollzogen werden. Nach einem weiteren Erhitzen über die Temperatur  $M_d$  hinaus, verlässt das Material die Phase des SIM und erreicht die reine austenitische Phase. Hier kann das Material wieder irreversibel verformt werden (offene Kurve im  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm), auch wenn die Verformung noch schwerer durchzuführen ist als zuvor. Im Gegensatz zur Verformung in der martensitischen Phase bleiben die Verformungen in der austenitischen Phase auch bei der Rückkehr in die SIM-Phase erhalten, das Material ist "umprogrammiert" worden.

### **2.3.2 Formen konfektionierter orthodontischer Behandlungsbögen**

In diesem Kapitel wird eine Übersicht über die verschiedenen in der Literatur beschriebenen Bogenformen, sowie das im Handel erhältliche konfektionierte Bogenmaterial gegeben. Da sich einige der von den verschiedenen Dentalherstellern angebotenen Bogensysteme nicht von in der Literatur vorgestellten Bogenformen ableiten oder die akademischen Bogensysteme nur teilweise übernehmen, ist es sinnvoll eine Unterscheidung zwischen in der Literatur vorgestellten "akademischen" und direkt im Handel erhältlichen "konfektionierten" Bögen zu machen. Bei konfektionierten Bögen, die auf akademischen Formen basieren, wird dies entsprechend deklariert. Ansonsten werden die Angaben des Herstellers zum Hintergrund des Bogenformdesigns wiedergegeben. Tabelle 6 enthält eine Übersicht der Bogensysteme.

Übersicht über die Bogensysteme verschiedener Hersteller					
Bogensystem	Autor/Hersteller	Anzahl		OK/UK	Bogenformen
		Bogen-templates	Bogenformen		
<b>Akademische Bogensysteme</b>					
BONWILL-HAWLEY-Bogenform		-	1	nein	VII
BRADER-Bögen	BRADER [26]	6	1	nein	I
RICKETTS "Penta-Morphic Arch System"	RICKETTS [137]	5	4	nein	II,III,V,VI
McLAUGHLIN/BENNETT-Bögen	McLAUGHLIN [105],[106]	6	3	ja	II,III,IV
<b>Konfektionierte Bogensysteme</b>					
ALEXANDER Vari-Simplex	ORMCO	3	2	ja	II,V
DAMON Arch	ORMCO	1	1	nein	IV
Orthos	ORMCO	4	1	ja	VI
Broad Arch	ORMCO	4	1	ja	IV
Tru-Arch	ORMCO	4	1	ja	IV
StandardArch	ORMCO	2	1	ja	VII
OrthoForm	3M UNITEK	6	3	ja	II,III,IV
Standard	3M UNITEK	2	1	ja	VII
RICKETTS PENTA	DENTAURUM	5	4	nein	II,III,V,VI
Idealbogen / American Style	DENTAURUM	2	1	ja	II
Penta-Morphic Arches	RMO	5	4	nein	II,III,V,VI
Natural Arches	RMO	2	1	ja	IV
Ideal Arches	RMO	2	1	ja	II
Anterior Contour Arches	RMO	1	1	nein	VII
Straight-Arch-Form	FORESTADENT	2	1	ja	IV
Euro-Smile-Form	FORESTADENT	2	1	ja	III
BONWILL-HAWLEY-Form	FORESTADENT	1	1	nein	VII
Ideal	GAC	2	1	ja	VI
Standard	GAC	2	1	ja	V
Ovation	GAC	6	1	ja	II
Standard (BONWILL-HAWLEY)	GAC	2	1	ja	VII
Natural Arch	AMERICAN ORTHODONTICS	6	3	ja	II,III,IV
BRADER Arch	AMERICAN ORTHODONTICS	6	1	nein	I
BONWILL HAWLEY Arch	AMERICAN ORTHODONTICS	2	1	ja	VII
Rick-Form	SMILE DENTAL	5	4	nein	II,III,V,VI
Europa II	SMILE DENTAL	2	1	ja	II
Standard Form	SMILE DENTAL	2	1	ja	VII
Trueform	SMILE DENTAL	2	1	ja	IV
Symmetry	PHOENIX ORTHODONTICS	6	2	ja	II,IV
Standard	PHOENIX ORTHODONTICS	3	1	ja	VII

Tabelle 6: Übersicht über die untersuchten Bogensysteme

Im Folgenden wird erklärt, wie die systematische Einteilung in Bogenformen (letzte Spalte in Tabelle 6) erfolgte. Beim Vergleich von vorgegebenen Bögen gilt es zu beachten, dass diese dieselbe Form aufweisen können, auch wenn sie sich nicht direkt übereinander legen lassen, da sie unterschiedlich groß sind (Abbildung 31).

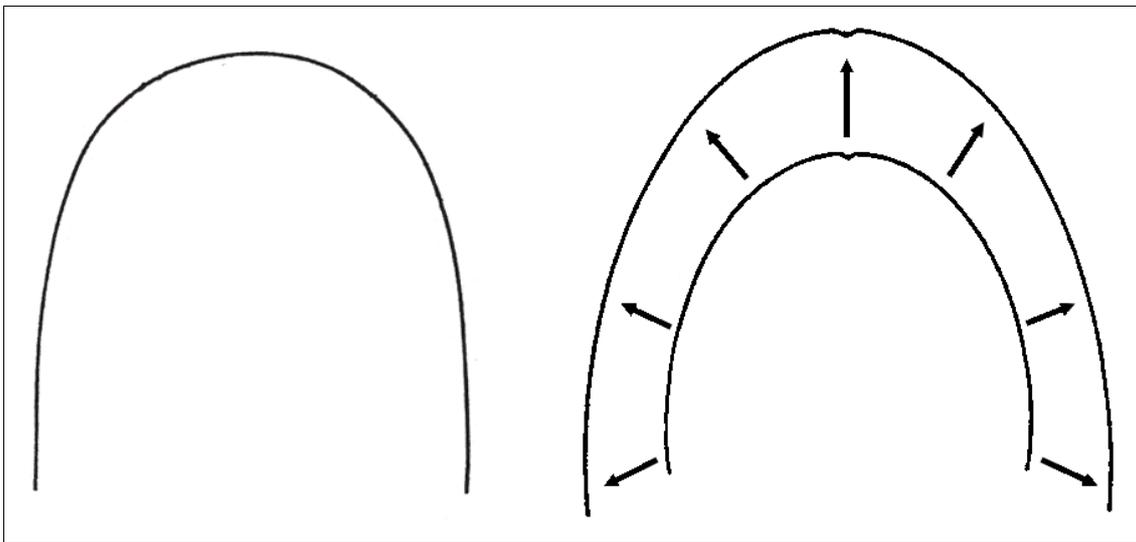


Abbildung 31: Bögen verschiedener Form (links, rechts) und unterschiedlicher Größe (rechts)

Die drei in Abbildung 31 dargestellten Bögen lassen sich alle jeweils paarweise nicht deckungsgleich übereinanderlegen. Trotzdem weisen die beiden Bögen auf der rechten Seite dieselbe Form auf. Durch angemessene Skalierung, d.h. Vergrößerung oder Verkleinerung um einen passenden Faktor ohne Verzerrung der Proportionen (hier angedeutet durch die Pfeile), können die beiden Bögen rechts zur Deckung gebracht werden. Für den Bogen auf der linken Seite ist dies über einen verzerrungsfreien Vorgang offensichtlich nicht möglich. Bei der Einteilung der Bögen in verschiedene Formen, soll die Größe der einzelnen Bögen nicht berücksichtigt werden: Bögen gleicher Form sollen als solche identifiziert werden, auch wenn sie sich nicht direkt deckungsgleich übereinanderlegen lassen. Bei der Untersuchung der Bogensysteme wurden daher mittels eines Bildbearbeitungsprogramms (Adobe Photoshop 7.0) untersucht, ob sich nicht-deckungsgleiche Bögen evtl. nach angemessener Skalierung kongruent darstellen, d.h. bei unterschiedlicher absoluter "Größe" dieselbe Formgebung aufweisen.

Nach diesen grundlegenden Überlegungen zu den Begriffen "Form" und "Größe" sei hier zusammenfassend und zum besseren Verständnis kurz klargestellt, wie in dieser

Arbeit die Bezeichnungen "Bogentemplate" und "Bogenform" in Abgrenzung zur Bezeichnung "kieferorthopädischer Behandlungsbogen" verwendet wird (Tabelle 7).

<b>Bezeichnungsdefinition zur Bogenklassifikation</b>	
<b>Bezeichnung</b>	<b>Definition</b>
<b>Behandlungsbogen</b>	Konkreter Bogen mit den Eigenschaften <b>Form</b> , <b>Größe</b> , <b>Querschnitt</b> und <b>Material</b> .
<b>Bogentemplate</b>	Klasse von Behandlungsbögen die sich in <b>Form</b> und <b>Größe</b> gleichen.
<b>Bogenform</b>	Klasse aller Behandlungsbögen und/oder Bogentemplates, die sich in auf dieselbe <b>Form</b> zurückführen lassen.
<b>Bogensystem</b>	Hersteller- oder autorenspezifische Zusammenfassung verschiedener Bogentemplates oder Behandlungsbögen.

Tabelle 7: Definition der Bezeichnungen für die Bogenklassifikation

Während der Begriff "Behandlungsbogen" den konkreten konfektionierten Bogendraht mit seinen Eigenschaften "Form", "Größe", "Querschnitt" und "Material" bezeichnet, meint der Begriff "Bogentemplate" eine Klasse von Behandlungsbögen, die dieselbe Größe und Form aufweisen. Der am weitesten gefasste Begriff der "Bogenform" umfasst alle Behandlungsbögen und Bogentemplates die dieselbe Form aufweisen, insbesondere ungeachtet ihrer konkreten Größe. Die Gruppierung mehrerer Bogentemplates unter einem gemeinsamen Namen, z.B. "OrthoForm" (Firma 3M UNITEK) bezeichnen wir als "Bogensystem".

Wir fanden, dass bei allen untersuchten Systemen, die Ober- und Unterkieferbögen vorhalten, sich diese nur durch ihre Größe unterscheiden und nach proportionaler Vergrößerung bzw. Verkleinerung ("Zoom") identisch waren. Bei vier der Bogensysteme, die mehr als nur einen Ober- und Unterkieferbogen enthalten ("BRADER-Bogenformen", "ORMCO Orthos", "ORMCO Tru-Arch" und "GAC Ovation"), lassen sich sämtliche Bögen, die im System vorkommen, proportional ineinander skalieren. Diese Systeme basieren also jeweils nur auf einer Bogenform, die in verschiedenen Größen gefertigt wird. Weiterhin ist klar, dass bei allen Bögen, die auf der BONWILL-HAWLEY-Form basieren, zumindest der Frontzahnbereich durch Skalierung ineinander überführbar sein muss, da dieser von BONWILL als Kreis definiert wurde. Die daran anschließenden geraden Bogenabschnitte können allerdings in verschiedenen Winkeln angeordnet sein.

In der kieferorthopädischen Behandlung ist Form und Größe der Behandlungsbögen gleichzeitig von Bedeutung, d.h. es ist in der Therapie nicht ausreichend, wenn ein Bogen bei angemessener Vergrößerung oder Verkleinerung zwar die exakt passende Form für den Zahnbogen eines Patienten aufweist, aber nicht in der passenden Größe verfügbar ist: Konfektionierte Bögen sind im allgemeinen nicht in stufenlosen Größen, sondern meistens nur in zwei oder sogar nur einer Größe erhältlich. Daher muss bei der Auswahl eines bestimmten konfektionierten Bogens dieser sowohl in Form als auch in Größe mit dem individuellen Zahnbogens des Patienten abgeglichen werden. Für eine bessere Übersicht über die Bögen der verschiedenen Bogensysteme und zur Systematisierung innerhalb von EDV-Anwendungen, erscheint es aber sinnvoll, Bögen mit gleicher Form unabhängig von ihrer Größe in Bogenform-Klassen zusammenzufassen.

Vergleicht man alle untersuchten Bögen und Bogensysteme ohne Beachtung der Bogengröße kristallisieren sich sieben unterschiedliche Formen heraus (Abbildung 32).

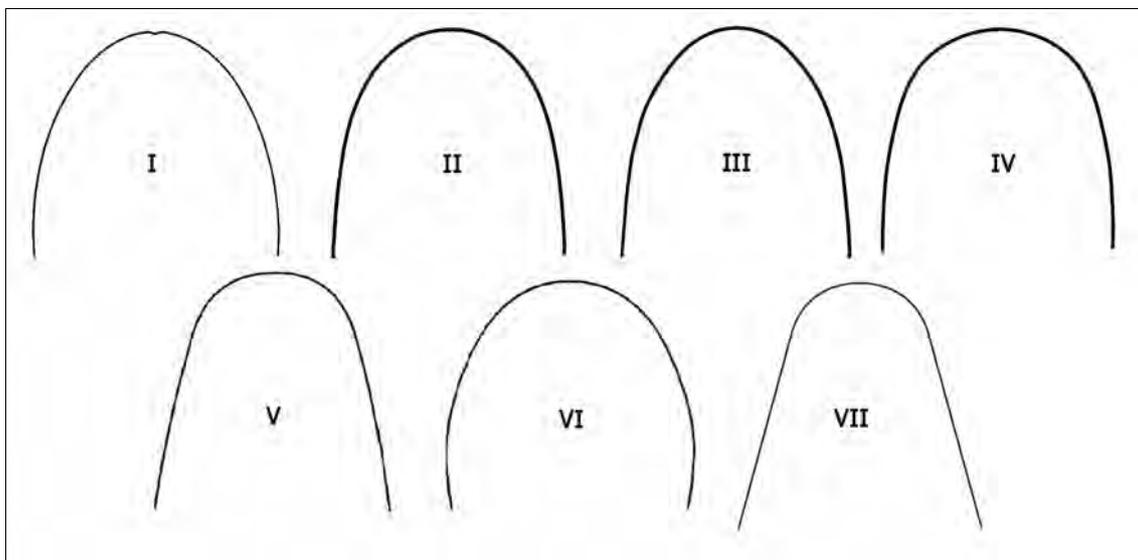


Abbildung 32: Bogenformklassen kommerzieller Bogensysteme

Alle von uns untersuchten Bogentemplates lassen sich auf Bogenformen aus den in Abbildung 32 zusammengestellten zurückführen, daher berufen wir uns bei der folgenden kurzen Vorstellung der vorgefundenen Bogenformen auf diese sieben mit römischen Zahlen bezeichneten Bogenformen. Die Form I ist die Form der BRADER-Bögen, sie entspricht der Form einer Ellipse. Die dieser ähnlich sehende Form II verläuft etwas spitzer. Diese Form findet sich in der Form des "Normal"-Bogens nach RICKETTS, sowie

der "Oval"-Bögen nach McLAUGHLIN und BENNETT wieder. Die im anterioren Segment deutlich spitzer zulaufende Form III ist die Form des "Zugespitzt"- und "Eng Zugespitzt"-Bogens nach RICKETTS, sowie der "Konisch"-Bögen von McLAUGHLIN und BENNETT. Die im Eckzahnbereich im Vergleich zum posterioren Bogenverlauf breiteste der sieben Bogenformen ist die Form IV, die transversale Bogenbreite im Eckzahnbereich ist fast genauso groß wie im posterioren Bereich. Die Form IV findet sich in den "Eckig"-Bögen von McLAUGHLIN und BENNETT wieder. Die Form V kann als eine Mischform von Form III und IV interpretiert werden: Sie vereint die abgeflachte Charakteristik der Form IV mit einem wesentlich geringeren Eckzahnabstand. Dieser verleiht der Form V verbunden mit einem im Verhältnis wesentlich breiteren posterioren Bereich ein eher zugespitztes Aussehen vergleichbar der Form III. Außerdem ähnelt sie insgesamt der Form VII, im Gegensatz zu dieser verlaufen die mittleren und hinteren Bogensegmente allerdings nicht völlig gerade. Unter den akademischen Bogensystemen findet sich die Form V bei dem "Schmal Oval"-Bogen nach RICKETTS wieder. Die Form VI ähnelt den Formen I und II, baucht aber im posterioren Bogensegment wesentlich stärker aus. Die Form VI ist die Form des "Oval"-Bogens nach RICKETTS. Unter der Form VII werden alle Bögen, die auf der BONWILL-HAWLEY-Form basieren subsumiert, auch wenn die geraden posterioren Bogenabschnitte bei vielen Bögen in unterschiedlichen Winkeln verlaufen, nachdem man das anteriore Bogensegment auf gleiche Größe skaliert hat. Trotzdem erscheint es uns nicht sinnvoll diese Variationen als eigene Formen anzusehen, da alle auf der BONWILL-HAWLEY-Form basierenden Bögen aus plastisch formbaren Materialien wie z.B. Standard-Stahl hergestellt werden und das posteriore Segment routinemäßig vom Behandler angepasst wird.

Die Tabelle 8 enthält eine Übersicht mit welcher der in Abbildung 32 gezeigten Formen die einzelnen untersuchten Bögen korrespondieren.

<b>Bogenformen kommerzieller Bogensysteme</b>	
<b>Bogenform</b>	<b>Bögen</b>
Form I	Brader-Bögen, AMERICAN ORTHODONTICS "BRADER Arch"-Bögen
Form II	RICKETTS "normal", McLAUGHLIN/BENNETT "oval"-Bögen, ORMCO ALEXANDER Vari-Simplex "OK" & "UK large", 3M UNITEK OrthoForm III "Ovoid"-Bögen, DENTAURUM RICKETTS PENTA "normal", DENTAURUM "Idealbogen"-Bögen, RMO Penta Morphic Arches "Normal", RMO "Ideal Arches"-Bögen, GAC "Ovation"-Bögen, AMERICAN ORTHODONTICS "Natural Arch Form III"-Bögen, SMILE DENTAL Rick-Form "normal", SMILE DENTAL "Europa II"-Bögen, PHOENIX ORTHODONTICS "Symmetry2"- & "Symmetry 3"-Bögen
Form III	RICKETTS "zugespitzt" & "eng zugespitzt", McLAUGHLIN/BENNETT "konisch"-Bögen, 3M UNITEK OrthoForm I "Tapered"-Bögen, DENTAURUM RICKETTS PENTA "spitz" & "extra spitz", RMO Penta Morphic Arches "Tapered" & "Narrow Tapered", FORESTADENT "Euro-Smile-Form"-Bögen, AMERICAN ORTHODONTICS "Natural Arch Form II"-Bögen, SMILE DENTAL Rick-Form "spitz zulaufend" & "extra spitz zulaufend"
Form IV	McLAUGHLIN/BENNETT "eckig"-Bögen, ORMCO DAMON SL Universal Archform, ORMCO Tru-Arch-Bögen, ORMCO Broad Arch-Bögen, 3M UNITEK OrthoForm II "Square"-Bögen, RMO "Natural Arches"-Bögen, FORESTADENT "Straight-Arch-Form"-Bögen, AMERICAN ORTHODONTICS "Natural Arch Form I"-Bögen, SMILE DENTAL "Trueform"-Bögen, PHOENIX ORTHODONTICS "Symmetry"-Bögen
Form V	RICKETTS "schmal oval", ORMCO ALEXANDER Vari-Simplex "UK small", DENTAURUM RICKETTS PENTA "oval schmal", RMO Penta Morphic Arches "Narrow Ovoid", GAC "Standard"-Bögen, SMILE DENTAL Rick-Form "oval schmal"
Form VI	RICKETTS "oval", ORMCO Orthos-Bögen, DENTAURUM RICKETTS PENTA "oval", RMO Penta Morphic Arches "Ovoid", GAC "Ideal"-Bögen, SMILE DENTAL Rick-Form "oval"
Form VII	BONWILL-HAWLEY-Bogenform, ORMCO Standard Arch, 3M Unitek Standard, RMO Anterior Contour Arches, FORESTADENT "vorgeformter Bogen", GAC "Standard"-BONWILL-HAWLEY-Bögen, AMERICAN ORTHODONTICS "BONWILL HAWLEY ARCH"-Bögen, SMILE DENTAL "Standard Form"-Bögen

Tabelle 8: Übersicht über die Bogenformen

Bei der Betrachtung der konfektionierten Bögen in Hinblick auf ihre Form fällt zunächst auf, dass sich alle Bögen auf die in der Literatur einschlägigen akademischen Bogensysteme zurückführen lassen, auch wenn die Hersteller sich nicht immer auf die entsprechenden Formen oder Systeme berufen.

In den folgenden Kapiteln werden die verschiedenen Bogensysteme kurz vorgestellt und soweit verfügbar Einzelheiten zur Quelle der verschiedenen Formen angeführt.

### 2.3.2.1 Akademische Bogensysteme

Unter "akademischen" Bogensystemen werden in dieser Arbeit Bogenbeschreibungen verstanden, die von international bekannten Autoren publiziert wurden. Die meisten Dentalfirmen griffen diese Bogensysteme ganz oder teilweise zur Formgebung ihrer konfektionierten Behandlungsbögen auf.

### BONWILL-HAWLEY-Bogenform

Die BONWILL-HAWLEY-Bogenform ist einer der ältesten Vorschläge für eine standardisierte Bogenform. Die hier beschriebene Konstruktion geht auf HAWLEY [74] aus dem Jahre 1905 zurück, der eine Methode zur Beschreibung der Bogenform von BONWILL [25] aus dem Jahr 1885 weiterentwickelte. Die BONWILL-HAWLEY-Bogenform (Abbildung 33) nimmt insofern eine Sonderstellung ein, als dass zwar in diesem System eindeutig eine einzige Bogenform definiert wird, die Größe des Bogens aber eigentlich individuell jedem einzelnen Patienten angepasst werden soll. Es findet keine explizite Unterscheidung zwischen Ober- und Unterkieferbogen statt, aber die Konstruktion kann natürlich für beide Kiefer unabhängig durchgeführt werden. In der Praxis bieten die auf die BONWILL-HAWLEY-Form aufbauenden Bogensysteme allerdings meist nur ein oder zwei Größenabstufungen an.

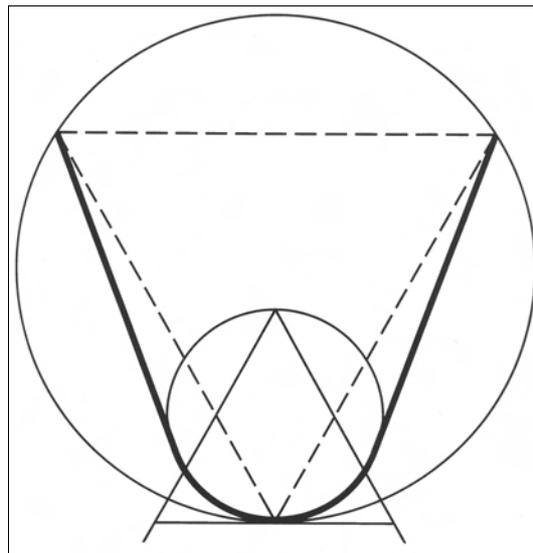


Abbildung 33: BONWILL-HAWLEY-Bogenformkonstruktion

Die Bogenform wird bei der BONWILL-HAWLEY-Konstruktion im anterioren Bereich durch einen Kreis und im mittleren und posterioren Bereich durch zwei daran angeschlossene gerade Bogensegmente definiert. Der Radius dieses Kreises entspricht der Summe der Breiten von Schneide- und Eckzähnen. Ein aus diesem Kreis abgeleitetes gleichseitiges Dreieck dient als Radius eines größeren Kreises, in dem ein weiteres gleichseitiges Dreieck eingeschrieben wird um die Endpunkte des Bogens zu definieren. Ab den Eckzähnen wird der Verlauf des Bogens mit Geraden durch diese Endpunkte definiert [39].

BRADER-Bögen

BRADER entwickelte 1972 in seinem Artikel "Dental arch form related with intraoral forces:  $PR = C$ " [26] unter der Berücksichtigung intraoraler Kräfte und basierend auf der Form trifokaler Ellipsen die in der orthodontischen Therapie häufig verwendeten "BRADER-Bögen". Die der Form zugrundeliegende Idee war, dass sich die Zähne derart anordnen, dass sich die von der Zunge und den perioralen Weichteilen auf sie wirkenden Kräfte ausgleichen. In Abbildung 34 sind die von BRADER abgeleiteten Standardbögen zur kieferorthopädischen Behandlung abgebildet.

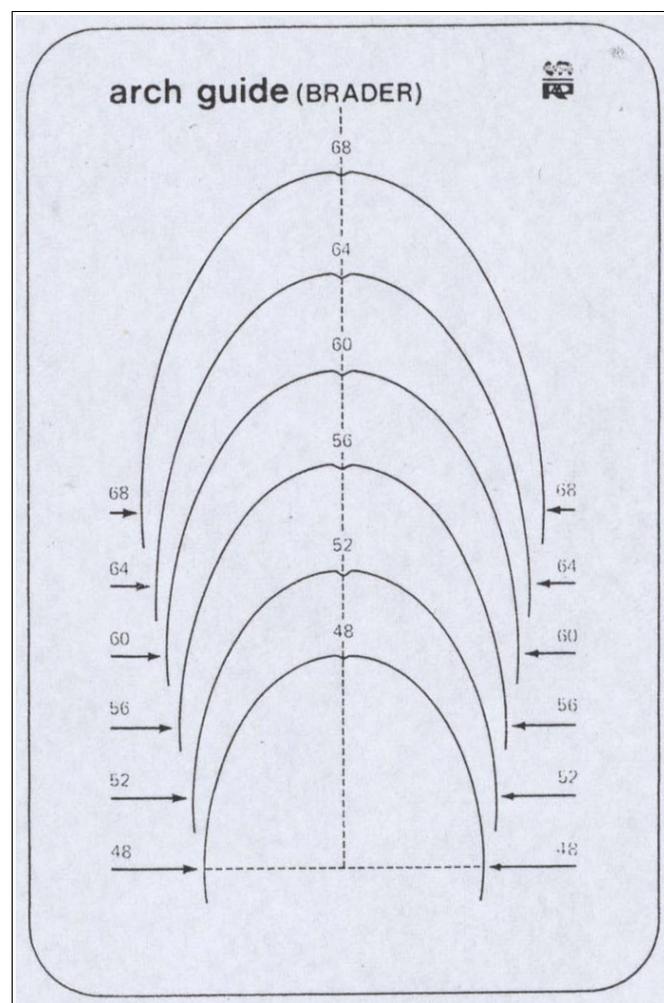


Abbildung 34: Bogenformen nach BRADER [26]

Die von BRADER [26] vorgestellte Bogenformschablone enthält sechs Bögen, die sich unter Berücksichtigung individuell verschiedener Kieferdimensionen, in der maximalen transversalen Breite von 48 mm bis 68 mm unterscheiden. Alle Brader-Bögen weisen

prinzipiell die gleiche Form auf und lassen sich durch Auf- oder Abskalieren (also maßstabsgetreues Vergrößern oder Verkleinern) ineinander überführen. In BRADERS Ausführungen fanden wir keine Differenzierung zwischen Ober- und Unterkieferbögen. Die Form der Bögen entspricht in unserer Definition der vorgefundenen Bogenformen Form I.

### RICKETTS "Penta-Morphic Arch System"

Die von RICKETTS [137] im Rahmen seiner "Bioprogressiven Therapie" vorgestellten fünf Bogenformen gehen auf umfangreiche Untersuchungen an unbehandelten Probanden mit "akzeptabler" Okklusion zurück: Ursprünglich wurden dabei in einer Untersuchung der FOUNDATION FOR ORTHODONTIC RESEARCH zwölf Bögen ermittelt, die dann später durch weitere Analysen zunächst auf neun und dann letztendlich auf die vorgestellten fünf Bögen reduziert wurden [137]. Diese fünf Bögen, "Penta-Morphic Arches" genannt, sind in Abbildung 35 aufgeführt.

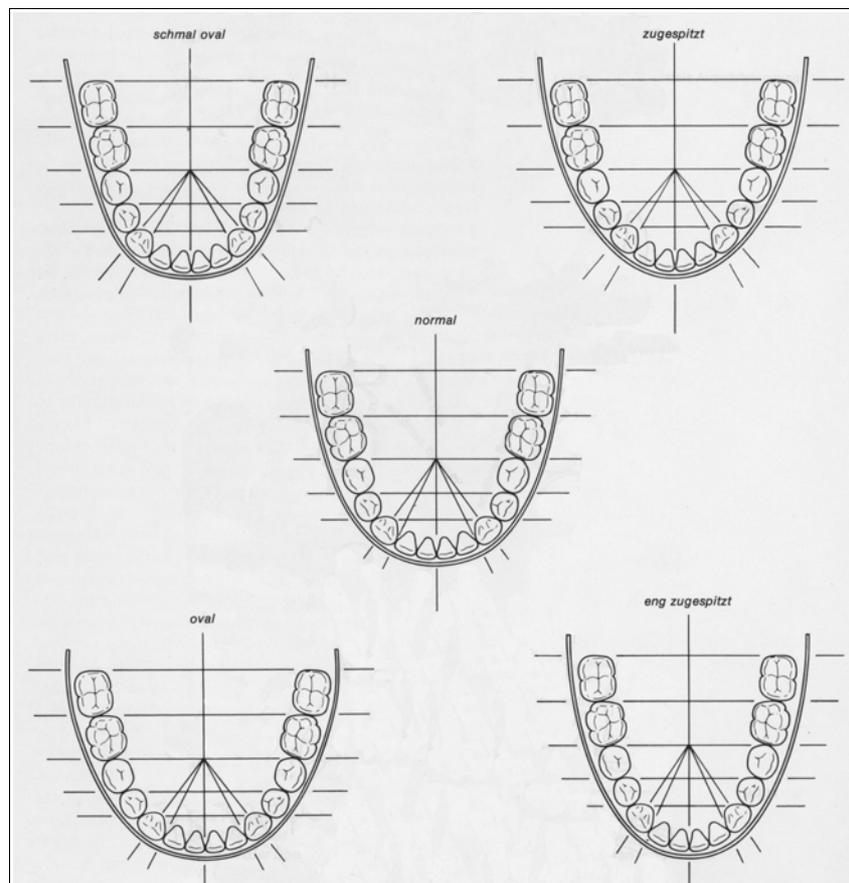


Abbildung 35: Penta-Morphic Arches nach RICKETTS [137]

Es wird in diesem Bogensystem nicht zwischen Ober- und Unterkieferbögen unterschieden und die fünf Bögen ("normal", "oval", "schmal oval", "zugespitzt", "eng zugespitzt") weisen insgesamt vier unterschiedliche Formen auf: Die Bögen "zugespitzt" und "eng zugespitzt" lassen sich durch geeignete Skalierung ineinander überführen, sind also in ihrer Form identisch. Die RICKETTS-Bögen überschneiden sich teilweise mit denen von McLAUGHLIN und BENNETT (Abbildung 36, Seite 77): Der "normal"-Bogen ist in Form und Größe identisch zu dem "oval"-Oberkieferbogen von McLAUGHLIN und BENNETT, der "eng zugespitzt"-Bogen ist (wieder in Form und Größe) identisch zu dem "konisch"-Oberkieferbogen von McLAUGHLIN und BENNETT. Der "normal"-Bogen weist die Form II, der "oval"-Bogen die Form VI und der "schmal oval"-Bogen die Form V auf. Der "zugespitzt"- und "eng zugespitzt"-Bogen haben beide die Form III.

#### McLAUGHLIN/BENNETT-Bogensystem

McLAUGHLIN und BENNETT [105],[106] verwenden für ihr Bogensystem (Abbildung 36) die zuerst von CHUCK [39] so benannten und später immer wieder verwendeten Grundformen "konisch" (auch "spitz zulaufend" genannt), "eckig" und "oval". Das System besteht aus sechs Bögen, jeweils einem Ober- und Unterkieferbogen zu jeder der drei im System definierten Formen. Ober- und Unterkieferbögen lassen sich jeweils durch Skalierung ineinander überführen.

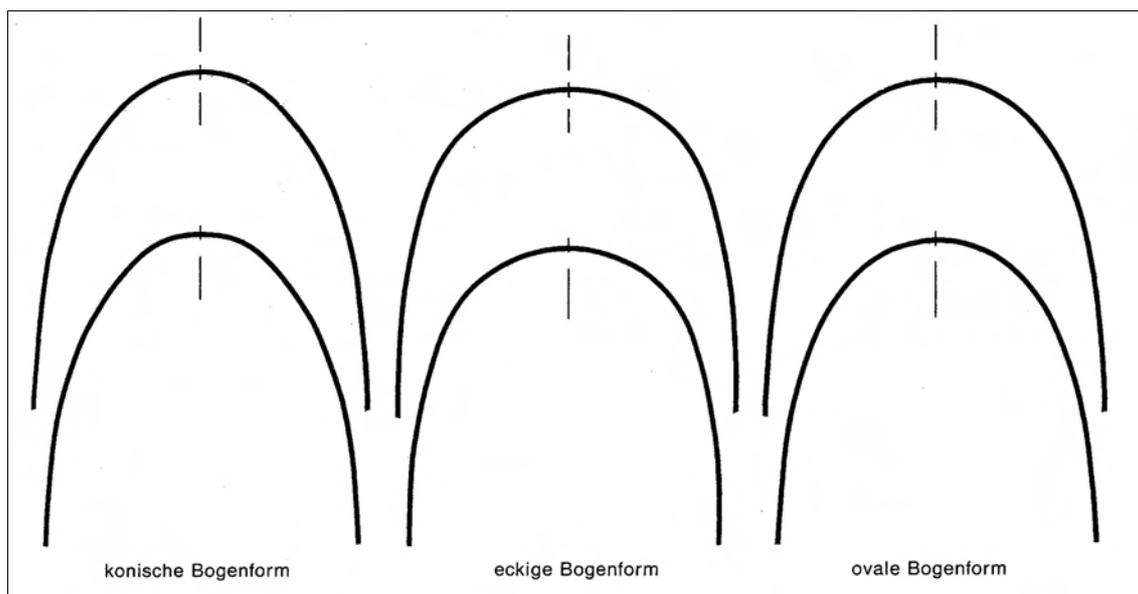


Abbildung 36: Bogenformen nach McLAUGHLIN [106]

Ausgehend von einer Studie von NOJIMA [114] und FELTON [52] sowie unveröffentlichten eigenen Untersuchungen an 200 Patienten empfehlen McLAUGHLIN, BENNET und TREVESI [107] für eine Praxis mit überwiegend kaukasischem Klientel zu jeweils 45 % konische und 45 % ovoide Bögen und zu 10 % eckige Bögen vorrätig zu halten. Die Autoren verwenden diese Bögen für die ersten Behandlungsstadien, empfehlen aber, sich in späteren Behandlungsphasen bei jedem Patienten an der individuellen Bogenform zu orientieren. Der "konische" und "ovale" Oberkieferbogen findet sich in Form und Größe identisch in den RICKETTS "Penta-Morphic Arches" (Abbildung 35, Seite 76) als "eng zugespitzt" bzw. "normal" wieder. Die "konisch"-Bögen entsprechen der Form III, die "eckig"-Bögen der Form IV und die "oval"-Bögen schließlich der Form II.

#### 2.3.2.2 Bogensysteme der Dentalindustrie

Es sind wenig evidente Informationen darüber verfügbar, auf welche Weise die Dentalfirmen die ihren konfektionierten Behandlungsbögen zugrunde liegenden Zahnbogenformen festgelegt haben. Meistens wird darauf verwiesen, dass "durchschnittliche anatomische Werte" aus umfangreichen Probandenstichproben die Basis der Formentwicklung darstellen, wie hier im Falle des Orthos-Systems der Firma ORMCO:

*»Over a five-year period, the Orthos research and development team conducted extensive anatomical analysis of more than 100 orthodontic cases. Computer Aided Engineering (CAE) measurements – consisting of highly complex digital codes – achieved unprecedented precision in determining “ideal” anatomical averages.«* [122]

Das anatomische Durchschnittswerte zwischen ethnischen Gruppen beträchtlich schwanken können [53],[88] schlägt sich im Design konfektionierter Bögen darin nieder, dass teilweise eigene Produktlinien angeboten werden, z.B. bei ORMCO "Orthos AP" für asiatische Patienten [123].

#### Bogensysteme der Firma ORMCO

Die Firma ORMCO bietet zur Zeit (2007) für den europäischen und amerikanischen Markt sechs verschiedene Bogensysteme an: "ALEXANDER Vari-Simplex", "DAMON Arch", "Orthos", "Broad Arch", "Tru-Arch", "Standard Arch" [124].

Das "ALEXANDER Vari-Simplex"-Bogensystem (Abbildung 37) wurde von R. G. ALEXANDER im Rahmen seines Behandlungssystem "Vari-Simplex" entwickelt [5],[6],[7],[8],[9]. Es wird lediglich ein Bogen für den Oberkiefer angeboten, für den Unterkiefer existieren zwei Bögen in diesem Bogensystem.

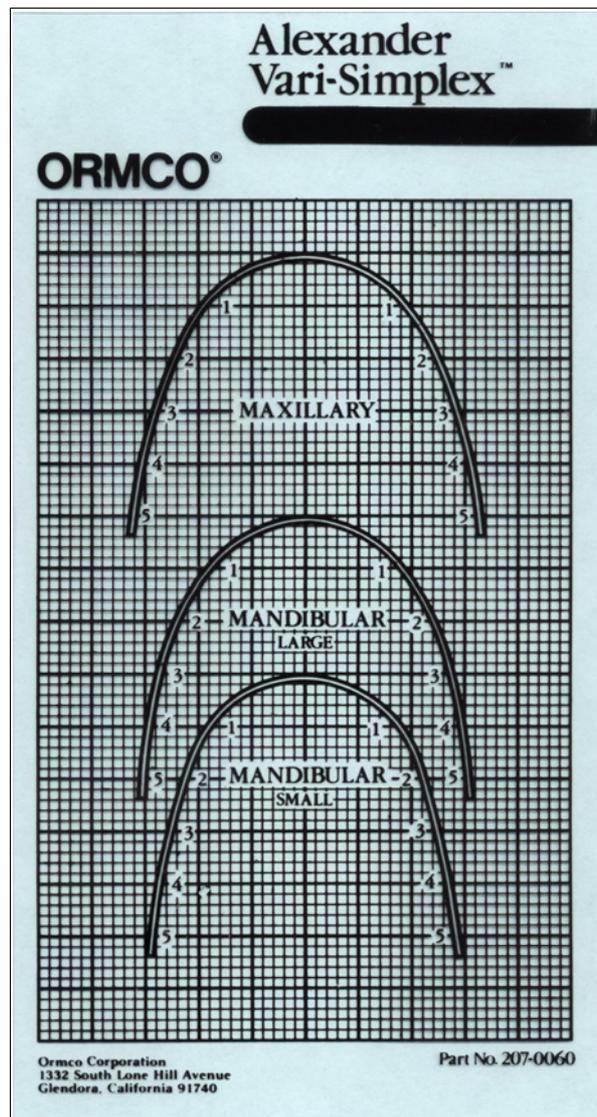


Abbildung 37: Bogenschablone "ALEXANDER Vari-Simplex"

Während der Oberkiefer- und der große Unterkieferbogen dieselbe Form aufweisen und durch Skalierung ineinander überführt werden können, ist der kleinere Unterkieferbogen von einer qualitativ anderen Form und lässt sich nicht durch Skalierung in die anderen Bögen überführen. Der Oberkiefer- und der große Unterkieferbogen entsprechen der Form II, der Unterkieferbogen hat die Form V.

DAMON stellte zur Vervollständigung des von ihm entwickelten selbstligierenden Bracketsystems [42],[43] die "DAMON SL Universal Archform" (Abbildung 38) vor.

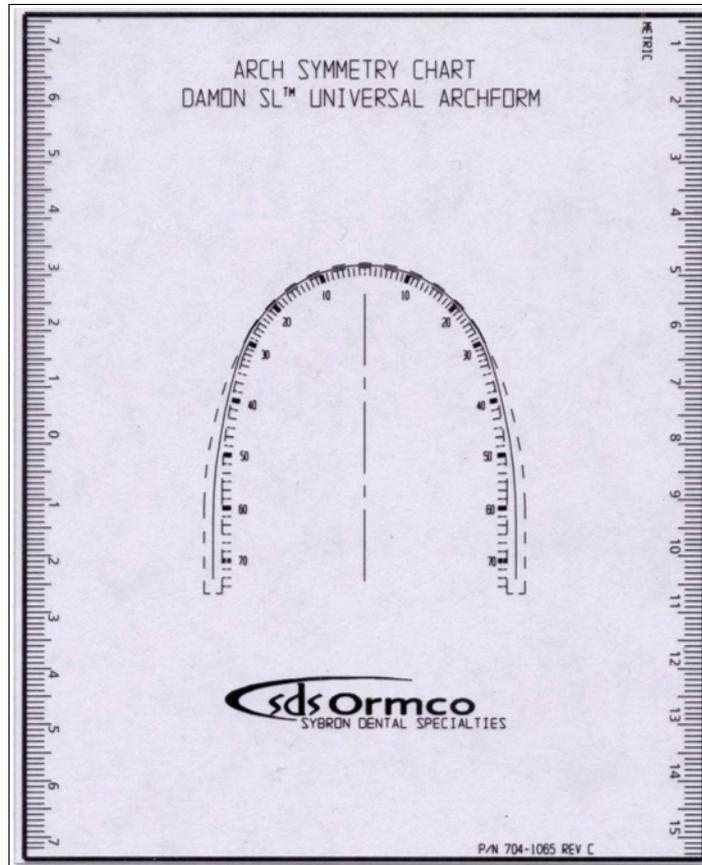


Abbildung 38: Bogenschablone "DAMON SL Universal Archform"

Diese Bogenform (es existiert nur ein Bogen, Ober- und Unterkieferbögen werden also nicht unterschieden) ist laut Ormco-Katalog [125] aus der Auswertung mehrerer hundert Patientenfälle und dem Studium über 7000 Fotos mit "exzeptionellem" Lächeln entstanden. Evidente Literatur wurde nicht gefunden. Die Form des Bogens entspricht Form IV.

Das "Orthos"-Bogensystem wurde mithilfe von "Computer Aided Engineering (CAE)"-Methoden, basierend auf der "skelettalen und dentalen Anatomie typischer kieferorthopädischer Fälle" entwickelt [126], evidente Literaturhinweise wurden jedoch von uns in der Literatur auch hier nicht gefunden.

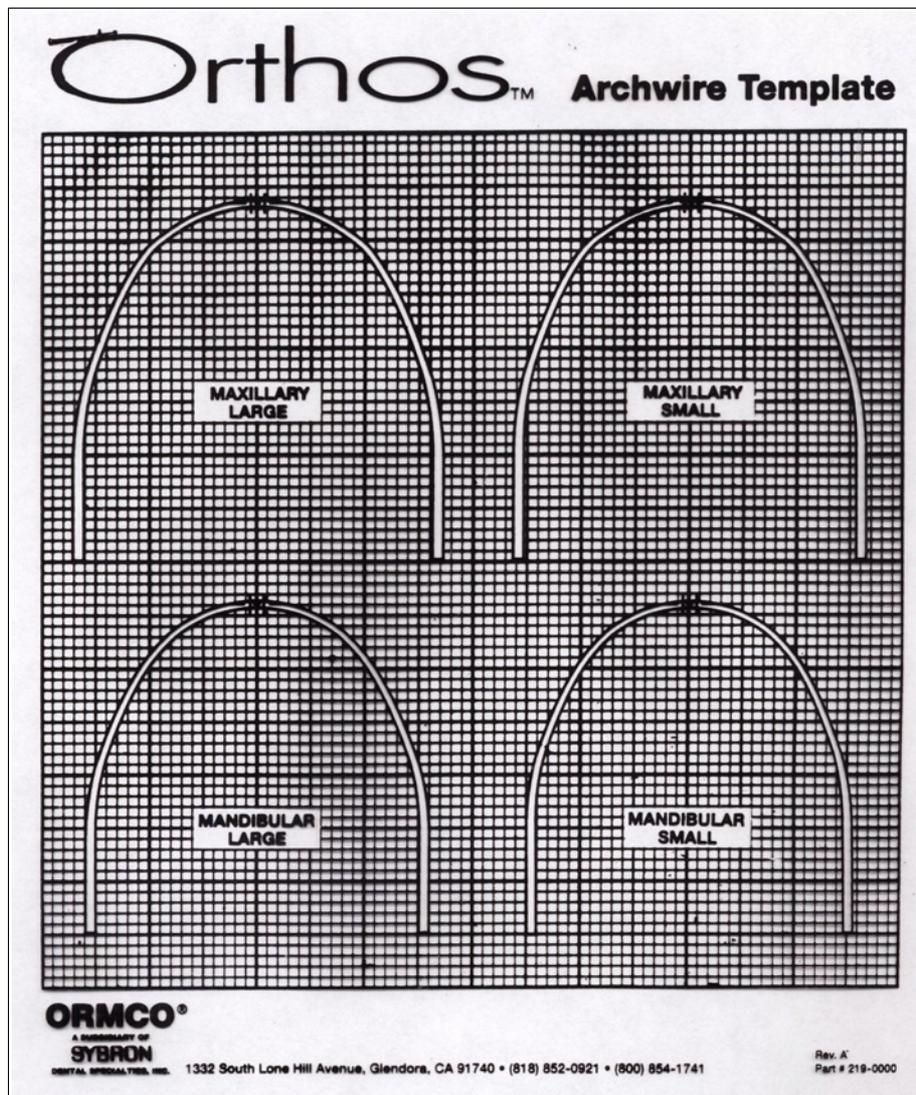


Abbildung 39: Bogenschablone "Orthos" der Firma ORMCO

Die vier Bögen (Abbildung 39) des Orthos-Bogensystems teilen sich in zwei Ober- und zwei Unterkieferbögen auf. Alle Bögen sind von derselben Form, mit absteigender Größe vom "Maxillary large"- über den "Maxillary small"- zum "Mandibular large"- und schließlich dem "Mandibular small"-Bogen. Die Form der Bögen entspricht Form VI.

Das "Tru-Arch Form"-System besteht aus vier Bögen, jeweils einem "medium" (Abbildung 40 obere Bögen) und "small" Bogen (Abbildung 40 untere Bögen), für Ober- und Unterkiefer [128].

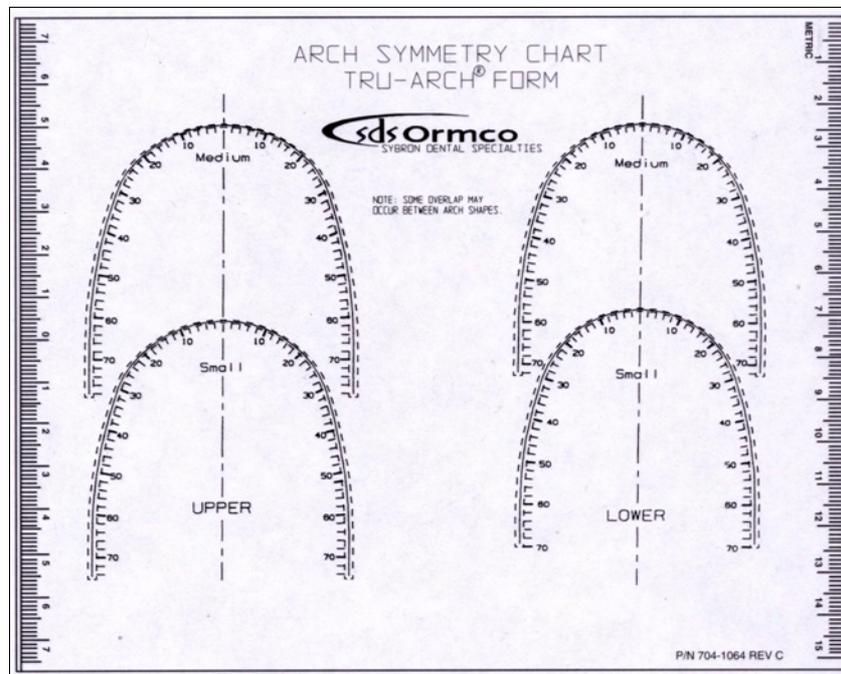


Abbildung 40: Bogenschablone "Tru-Arch Form"

Alle vier Bögen weisen die gleiche Form bei verschiedener Größe auf, sind also durch Skalierung ineinander zu überführen. Die Form der Bögen entspricht der Form IV, damit ist das "Tru-Arch"-Bogensystem formgleich mit dem "DAMON SL Universal Arch"-Bogen das ebenfalls von ORMCO angeboten wird. Die Größe des DAMON-Bogens liegt im Vergleich zwischen dem "medium"- und "small"-Unterkieferbogen des "Tru-Arch"-Systems. Es scheint sich bei diesem Bogensystem also um eine Erweiterung des DAMON-Systems auf verschiedene Kiefergrößen zu handeln.

Das "Standard Arch"-Bogensystem (Abbildung 41) der Firma ORMCO besteht aus zwei Bögen (einem Ober- und einem Unterkieferbogen) [129].

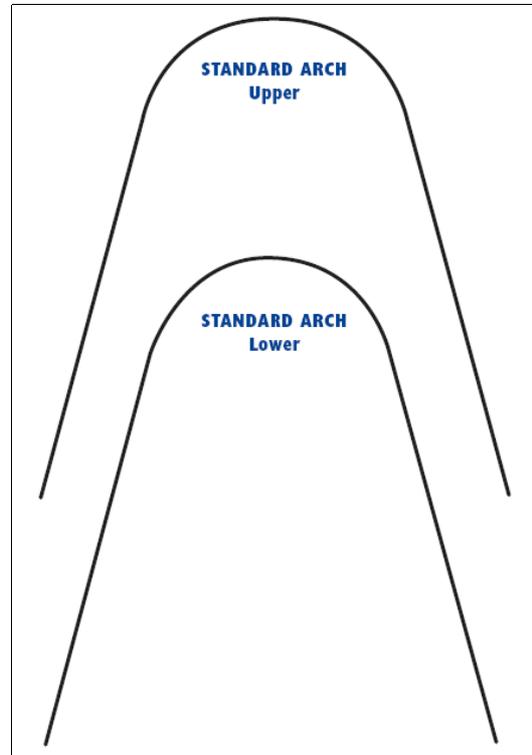


Abbildung 41: ORMCO "Standard Arch" Bögen [129]

Offensichtlich wurde das System an der BONWILL-HAWLEY-Bogenform angelehnt, der Unterkieferbogen ist eine maßstäbliche Verkleinerung des Oberkieferbogens, das Bogensystem entspricht der Form VII.

Das "Broad Arch"-Bogensystem umfasst insgesamt vier Bögen, die sich in jeweils ein Ober- und Unterkieferbogenpaar ("large","small") gliedern (Abbildung 42) [127]. Alle vier Bögen sind durch Größenskalierung zur Deckung zu bringen, das System definiert also nur eine Form.

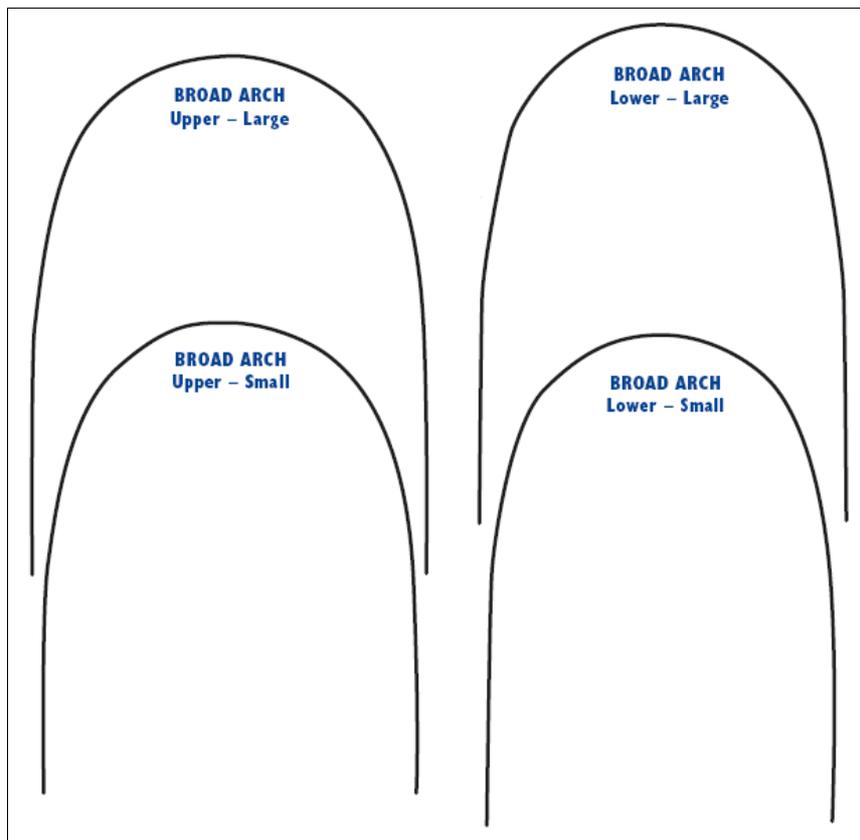


Abbildung 42: ORMCO "Broad Arch" Bogenform [127]

Die Form der "Broad Arch"-Bögen entspricht der Form IV, dieses System ist also wie das "Tru-Arch"-System auch dem "DAMON SL Universal Archform"-Bogen formgleich. Bei dem Vergleich der Bogengrößen erkennt man, dass der "small"-Oberkieferbogen des "Tru-Arch"-Systems in Form und Größe identisch mit dem "large"-Oberkieferbogen der "Broad Arch"-Bögen ist. Das "Broad-Arch"-System erscheint also im wesentlichen als eine Variation des "Tru-Arch"-Systems in geringerer Größe.

Bogensysteme der Firma 3M UNITEK

Die Firma 3M UNITEK bietet momentan zwei Bogensysteme an: "OrthoForm" und "Standard" [2].

Die "OrthoForm"-Bögen (Abbildung 43) sind die 3M UNITEK Implementation des Bogensystems von McLAUGHLIN und BENNETT. Es werden sechs Bögen (drei Ober- und drei Unterkieferbögen) angeboten, die drei verschiedene Formen aufweisen [1].

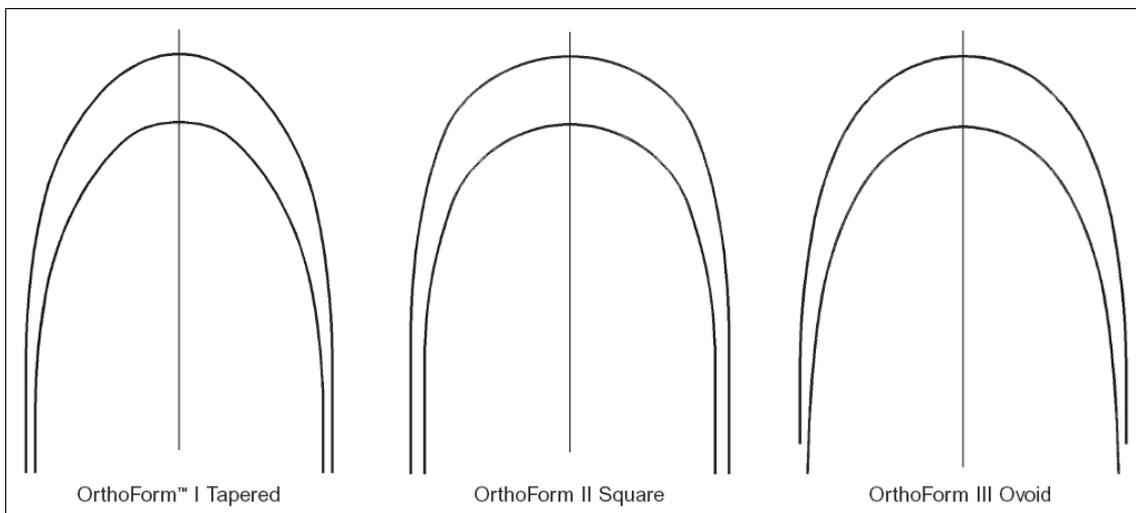


Abbildung 43: 3M UNITEK "OrthoForm" Bogenform [3]

"OrthoForm I" (jetzt auch "OrthoForm LA" genannt) entspricht der konischen, "OrthoForm II" der eckigen und "OrthoForm III" der ovalen Bogenform nach McLAUGHLIN und BENNETT. Die Ober- und Unterkieferbögen der einzelnen Formen unterscheiden sich jeweils nur in ihrer Skalierung bei sonst gleicher Form. Die "OrthoForm I"-Bögen entsprechen Form III, die "OrthoForm II"-Bögen Form IV und die "OrthoForm III"-Bögen Form II.

Das "Standard"-Bogensystem (Abbildung 44) basiert offensichtlich auf der BONWILL-HAWLEY-Bogenform [4].

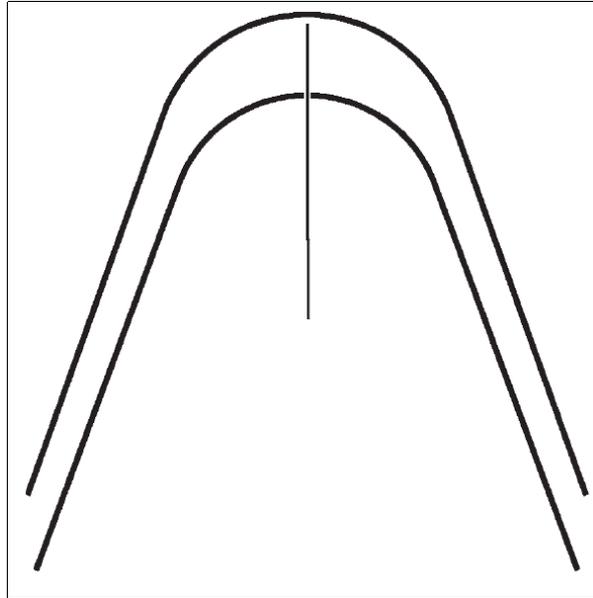


Abbildung 44: 3M UNITEK "Standard" Bogenform [4]

3M UNITEK bietet in diesem System zwei Bögen (einen Ober- und einen Unterkieferbogen) an. Der Unterkieferbogen ist eine kleiner skalierte Version des Oberkieferbogens und kann nach geeigneter Vergrößerung mit diesem zur Deckung gebracht werden. Die Form dieses Bogensystems entspricht Form VII.

Bogensysteme der Firma DENTAURUM

Die Firma DENTAURUM bietet zwei Bogensysteme an, die "RICKETTS PENTA"-Bögen entsprechend dem "Penta-Morphic Arches" Bögen nach RICKETTS [137] (vgl. Kapitel 2.3.2.1, Abschnitt "RICKETTS 'Penta-Morphic Arch System'") und ein weiteres "Idealbogen" genanntes System [47],[48].

Die "RICKETTS PENTA"-Bögen sind nach dem von RICKETTS [137] vorgestellten "Penta-Morphic Arches"-System geformt.

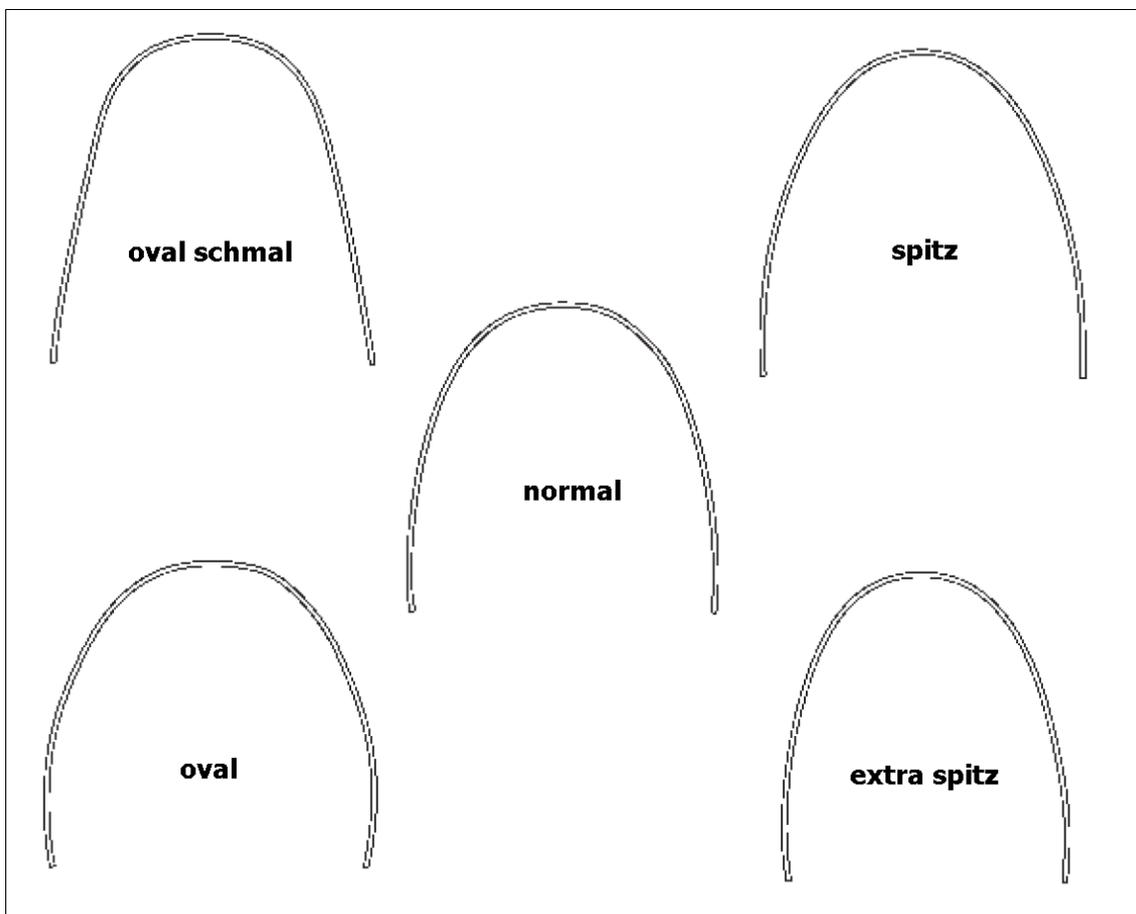


Abbildung 45: DENTAURUM "RICKETTS PENTA" Bogenform, adaptiert nach [48]

Das Bogensystem beinhaltet fünf verschiedene Bögen (Abbildung 45), die insgesamt vier verschiedenen Formen entsprechen ("spitz" und "extra spitz" sind bei geeigneter Skalierung deckungsgleich), eine Unterscheidung zwischen Ober- und Unterkieferbögen wird nicht getroffen. Die Namensgebung erfolgte analog zu RICKETTS, nur die Bögen "zugespitzt" bzw. "eng zugespitzt" werden bei den DENTAURUM-Bögen "spitz" bzw.

"extra spitz" genannt [48]. Der "oval schmal"-Bogen ist von der Form V, der "oval"-Bogen von der Form VI, der "normal"-Bogen von der Form II und der "spitz"- sowie "extra spitz"-Bogen entsprechen der Form III.

Das zweite von DENTAURUM angebotene Bogensystem ist das "Idealbogen"- oder auch "American Style"-Bogen genannte System (Abbildung 46).

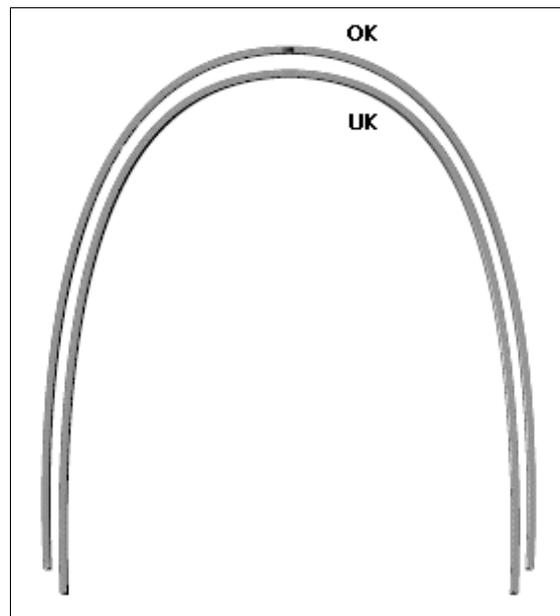


Abbildung 46: DENTAURUM "Idealbogen" Bogenform, adaptiert nach [47]

Zum "Idealbogen"-Bogensystem gehören zwei Bögen (ein Ober- und ein Unterkieferbogen). Diese beide Bögen können bei geeigneter Skalierung zur Deckung gebracht werden, sind also formgleich. Die Bogenform soll "dem Ideal amerikanischer Kieferorthopäden" entsprechen [46]. Die "Idealbogen"-Bögen entsprechen der Form II.

Bogensysteme der Firma ROCKY MOUNTAIN ORTHODONTICS (RMO)

Vier verschiedene Bogensysteme werden von der Firma RMO angeboten: "Penta-Morphic Arches", die dem System von RICKETTS [137] (vgl. Kapitel 2.3.2.1, Abschnitt "RICKETTS 'Penta-Morphic Arch System'") entsprechen, "Natural Arches", "Ideal Arches" und "Anterior Contour Arches" (letztere basieren auf der BONWILL-HAWLEY-Form) [138].

Auch RMO bietet ein an die RICKETTS-Bögen [137] angelehntes Bogensystem an, das "Penta-Morphic Arches" genannt wird (Abbildung 47) [139].

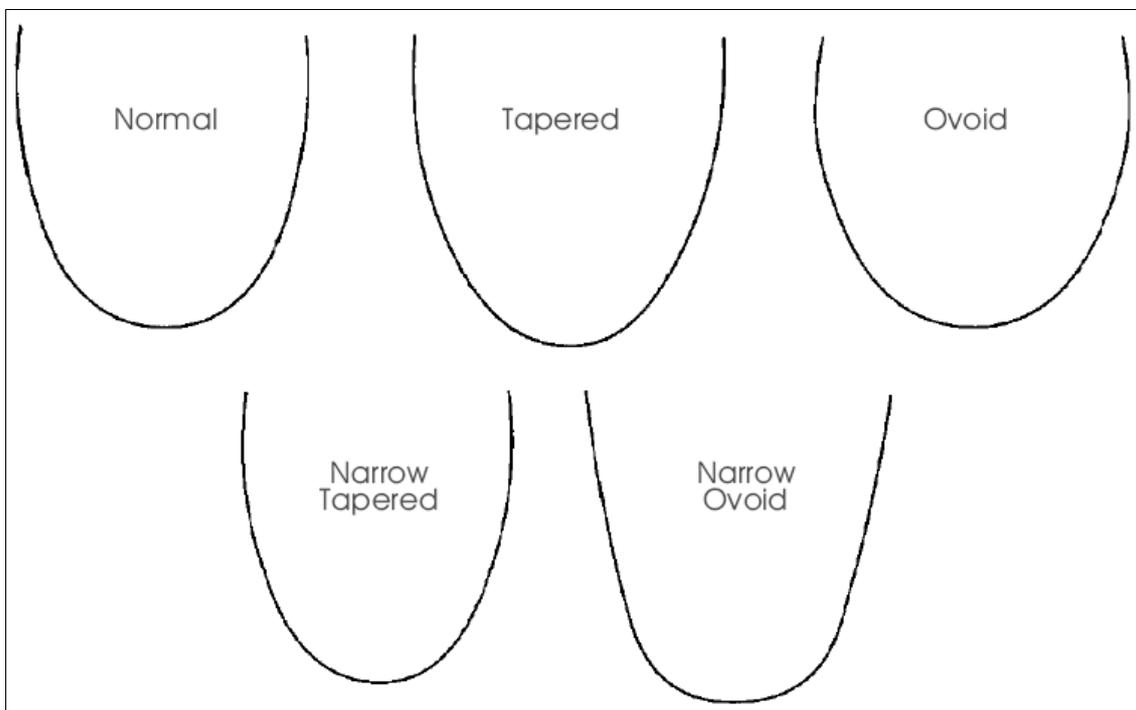


Abbildung 47: RMO "Penta-Morphic Arches" Bogenform [139]

In vollständiger Übereinstimmung mit den RICKETTS-Bögen enthält das System fünf Bögen mit insgesamt vier unterschiedlichen Formen ("Tapered" und "Narrow Tapered" basieren auf der gleichen Form). Es gibt keine Unterscheidung zwischen Ober- und Unterkieferbögen. Der "Normal"-Bogen entspricht Form II, der "Tapered"- sowie "Narrow Tapered"-Bogen der Form III, der "Ovoid"-Bogen der Form VI und der "Narrow Ovoid"-Bogen der Form V.

RMO bietet weiter das "Natural Arches"-Bogensystem (Abbildung 48) an [140].

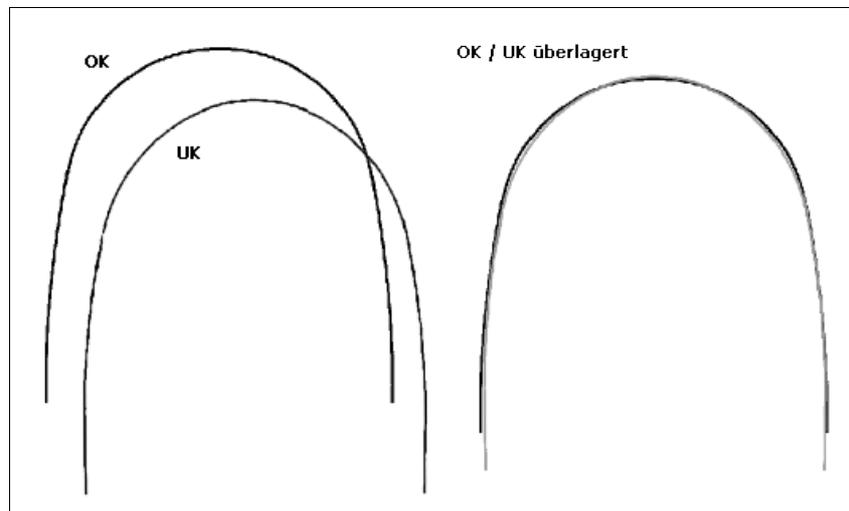


Abbildung 48: RMO "Natural Arches"-Bögen, adaptiert nach [140]

Das System besteht aus zwei Bögen, einem Ober- und einem Unterkieferbogen, die bis auf minimale Abweichungen im mittleren Bogenbereich (weniger als 0,3 mm, vgl. Abbildung 48 rechts, Oberkieferbogen in schwarz, Unterkieferbogen in grau) sowohl in Form als auch Größe übereinstimmen. Die Form der "Natural Arches"-Bögen ist identisch zur Form IV.

Das "Ideal Arches"-Bogensystem von RMO besteht ebenfalls aus einem Ober- und Unterkieferbogen (also insgesamt zwei Bögen), die aber sowohl in Form als auch Größe identisch sind (Abbildung 49) [140].

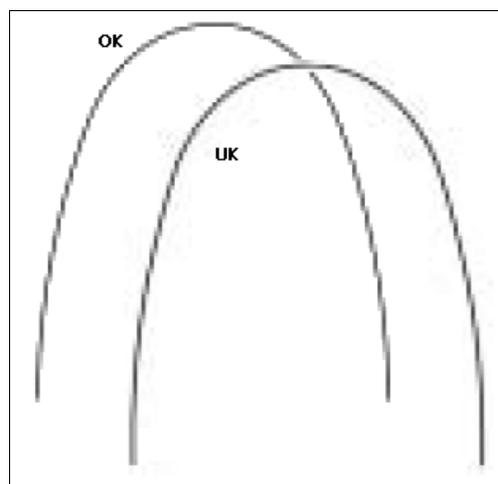


Abbildung 49: RMO "Ideal Arches"-Bögen, adaptiert nach [140]

Die Form der "Ideal Arches"-Bögen entspricht der Form II, sie sind also im Vergleich zu den "Natural Arches"-Bögen von RMO im anterioren Bereich wesentlich schmaler geformt.

Die "Anterior Contour Arches" Bogenform (Abbildung 50) beruht offensichtlich auf der BONWILL-HAWLEY-Bogenform [141].

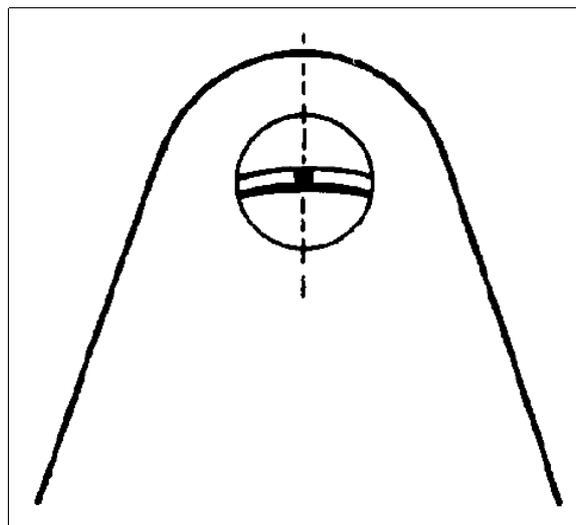


Abbildung 50: RMO "Anterior Contour Arches" Bogen [141]

Es existiert von dieser Bogenform nur eine Größe, zwischen Ober- und Unterkieferbögen wird dementsprechend nicht unterschieden. Die Form des Bogens entspricht Form VII.

Bogensysteme der Firma FORESTADENT

Von der Firma FORESTADENT werden zwei verschiedene Bogensysteme ("Straight-Arch-Form" und "Euro-Smile-Form") sowie eine nicht explizit benannte ("vorgeformte Drahtbögen") BONWILL-HAWLEY-Bogenform angeboten [59].

Das "Straight-Arch"-Bogensystem (Abbildung 51) besteht aus zwei Bögen (einem Ober- und einem Unterkieferbogen), die eine gemeinsame Form aufweisen [60].

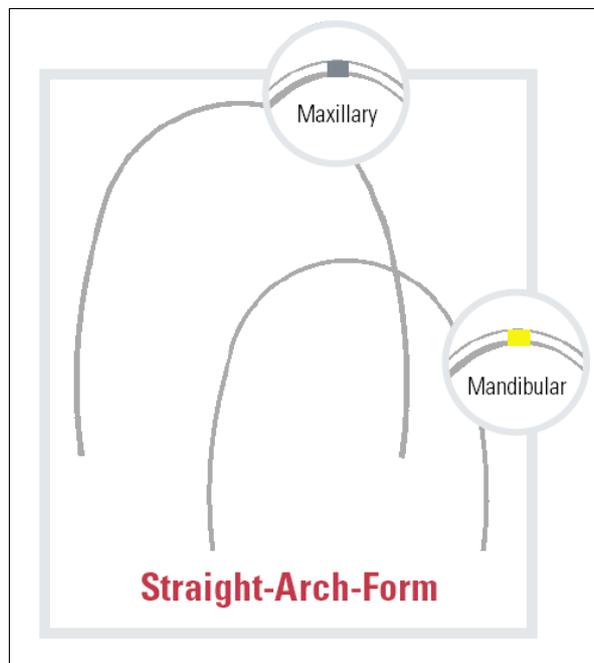


Abbildung 51: FORESTADENT "Straight-Arch"-Bögen, adaptiert nach [60]

Beide Bögen skalieren, der kleinere Unterkieferbogen kann durch maßstäbliches Vergrößern mit dem Oberkieferbogen zur Deckung gebracht werden. Die Form der "Straight-Arch"-Bögen entspricht Form IV.

Auch das "Euro-Smile" (Abbildung 52) besteht aus zwei Bögen, einem Oberkieferbogen und einem kleiner skalierten Unterkieferbogen gleicher Form [60].

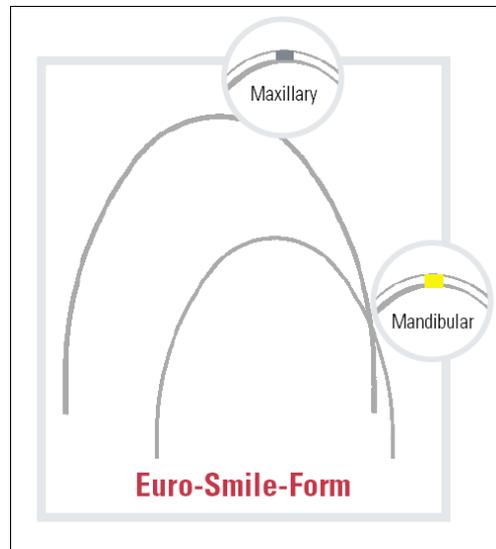


Abbildung 52: FORESTADENT "Euro-Smile"-Bögen, adaptiert nach [60]

Im direkten Vergleich zu den "Straight-Arch"-Bögen sind die "Euro-Smile"-Bögen im anterioren Bereich wesentlich schmaler, bei gleicher posteriorer Breite. Die Form der "Euro-Smile"-Bögen ist identisch mit Form III.

FORESTADENT vertreibt ein weiteres Bogensystem, das nur aus einem einzigen Bogen besteht, Ober- und Unterkieferbögen werden dementsprechend nicht unterschieden.

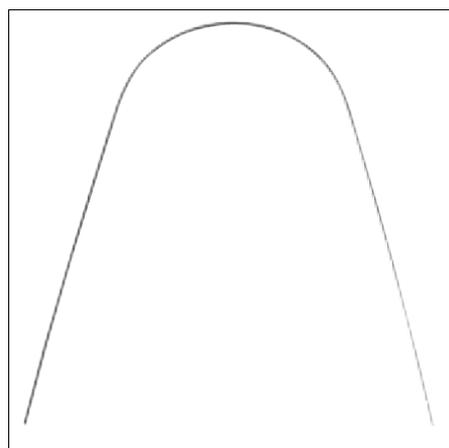


Abbildung 53: BONWILL-HAWLEY-Bogenform VON FORESTADENT [61]

Der nur als "vorgeformter Bogen" [61] bezeichnete Bogen in Abbildung 53 ist offensichtlich an der BONWILL-HAWLEY-Form angelehnt und entspricht Form VII.

### Bogensysteme der Firma GAC

Die Firma GAC vertreibt zur Zeit vier verschiedene Bogensysteme [65]: "Standard"-Bögen, "Ideal"-Bögen, das "Ovation"-Bogensystem, sowie eine weitere "Standard" genannter Bogen, der sich an die BONWILL-HAWLEY-Bogenform anlehnt.

Das "Standard"-Bogensystem (Abbildung 54) umfasst einen Ober- und einen Unterkieferbogen, die sich durch einfache Skalierung zur Deckung bringen lassen, also von gleicher Form sind [67].

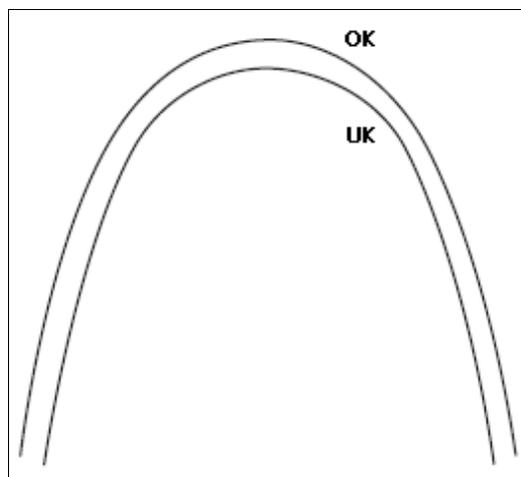


Abbildung 54: "Standard"-Bögen von GAC, adaptiert nach [67]

Die "Standard"-Bögen entsprechen der Form V.

Auch das "Ideal"-Bogensystem (Abbildung 55) wird in einer Ober- und Unterkieferversion angeboten [67].

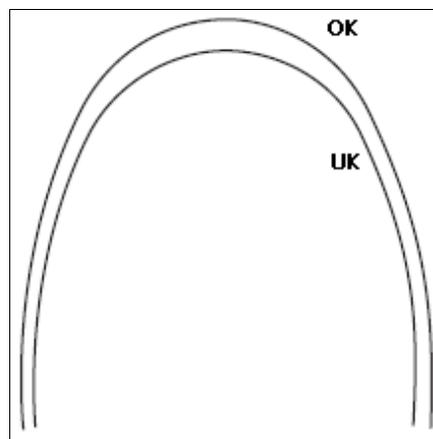


Abbildung 55: "Ideal"-Bögen von GAC, adaptiert nach [67]

Die beiden Bögen des Systems lassen sich durch Skalierung ineinander überführen, basieren also auf derselben Form. Diese Form entspricht Form VI, im direkten Vergleich zu den "Standard"-Bögen von GAC sind die "Ideal"-Bögen also im Eckzahnbereich etwas breiter und im posterioren Bogenbereich "ausgebaucht".

Das GAC "Ovation"-Bogensystem (Abbildung 56) besteht aus sechs verschiedenen Bögen, eingeteilt in drei Größenklassen ("large", "medium", "small") mit jeweils einem Ober- und Unterkieferbogen [66].

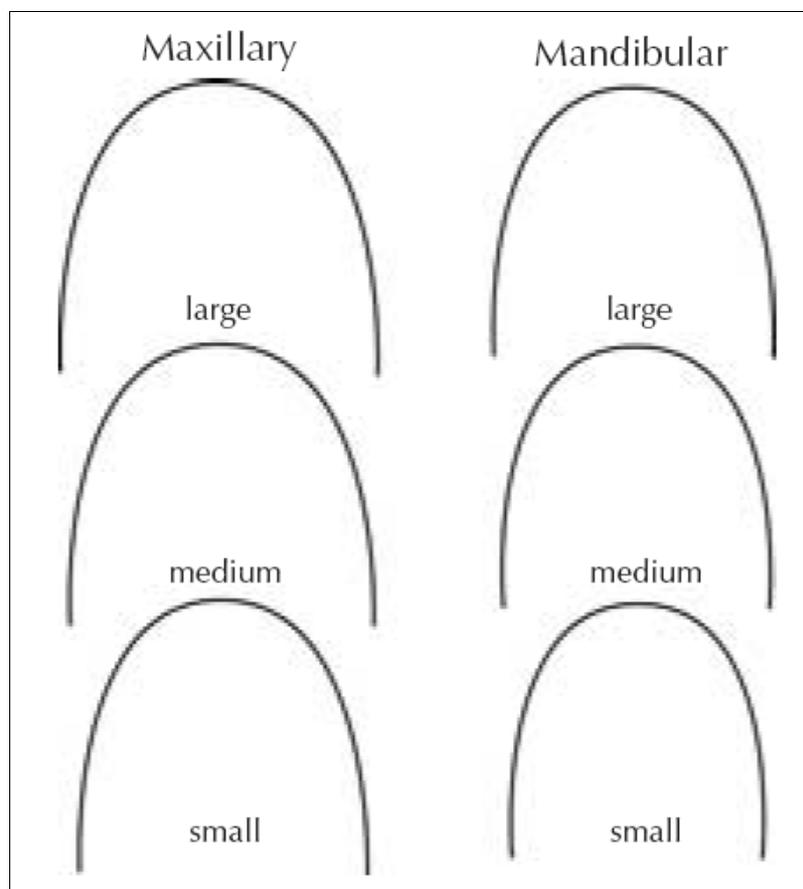


Abbildung 56: "Ovation"-Bogensystem von GAC [66]

Alle Bögen des Systems lassen sich durch Skalierung ineinander überführen, haben also dieselbe Form bei unterschiedlicher Größe, es ergibt sich eine Abstufung vom größten Bogen "Maxillary large" über "Maxillary medium", "Maxillary small" zum gegenüber dem kleinsten Oberkieferbogen nur geringfügig kleineren "Mandibular large", zum Bogen "Mandibular medium" und schließlich zum kleinsten Bogen des Systems "Mandibular small". Die gemeinsame Form aller Bögen dieses Systems ist die Form II,

sie stellen also im Vergleich zu den "Standard"- und "Ideal"-Bögen eine Mittelposition hinsichtlich der Breite im Eckzahnbereich und dem posterioren Verlauf dar.

Ein ebenfalls "Standard" genanntes Bogensystem von GAC (Abbildung 57) basiert auf der BONWILL-HAWLEY-Bogenform [68].

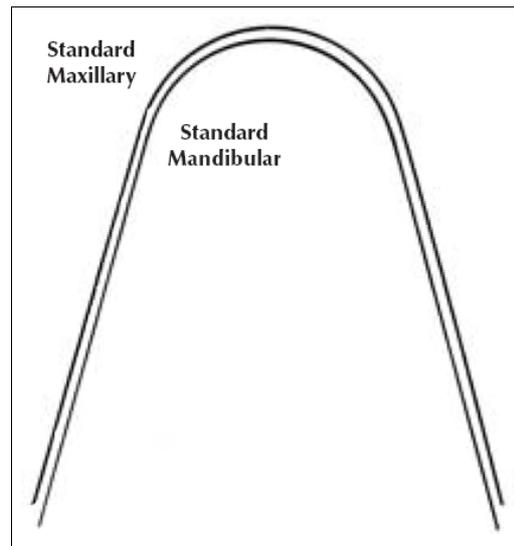


Abbildung 57: "Standard"-Bogenform von GAC, adaptiert nach [68]

Es wird eine Ober- und Unterkieferversion angeboten, die sich voneinander nur durch eine etwas kleinere Skalierung des Unterkieferbogens unterscheiden. Die Form der Bögen entspricht Form VII.

Bogensysteme der Firma AMERICAN ORTHODONTICS

Von AMERICAN ORTHODONTICS werden drei verschiedene Bogensysteme angeboten: Das "Natural Arch Form"-System, das "BRADER Arch"-System, sowie eine "BONWILL HAWLEY Arch"-Bogenform.

Das "Natural Arch Form"-Bogensystem (Abbildung 58) besteht aus sechs Bögen, die insgesamt drei verschiedene Formen aufweisen.

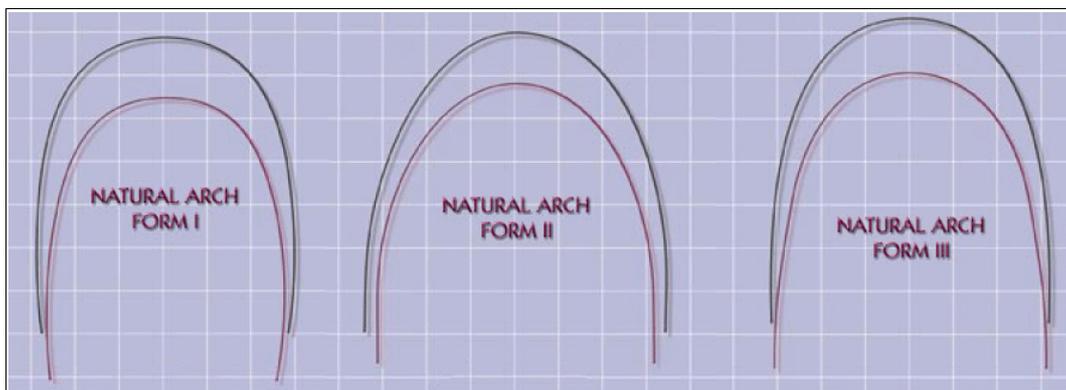


Abbildung 58: "Natural Arch Form"-Bogensystem von AMERICAN ORTHODONTICS [10]

Bei jeder Form wird eine Ober- und Unterkieferversion unterschieden, die Unterkieferbögen (rot) sind mit den entsprechenden Oberkieferbögen (schwarz) in der Form identisch und lediglich jeweils etwas kleiner skaliert. Die "Natural Arch Form I"-Bögen korrespondieren mit Form IV, die "Natural Arch Form II" mit der Form III und die Form der "Natural Arch Form III"-Bögen schließlich mit Form II.

Die Firma AMERICAN ORTHODONTICS bietet darüber hinaus ein "BRADER Arch"-Bogensystem (Abbildung 59) an (vgl. BRADER-Bögen Abbildung 34, Seite 75) [10].

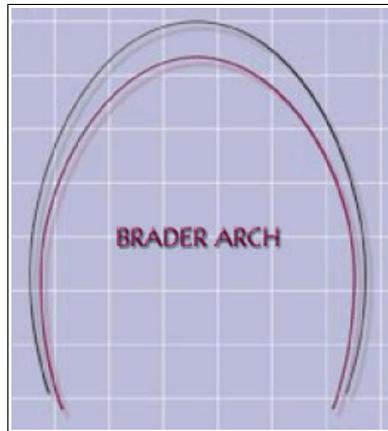


Abbildung 59: "BRADER Arch"-Bogenform von AMERICAN ORTHODONTICS [10]

Obwohl in Abbildung 59 nur zwei Bögen abgebildet sind, werden alle sechs BRADER-Bögen [26] angeboten. Es wird nicht zwischen Ober- und Unterkieferbögen unterschieden (auch wenn in Abbildung 59 zwei unterschiedlich eingefärbte Bögen abgebildet sind, diese stellen lediglich zwei der erhältlichen sechs Bogengrößen dar), alle Bögen sind von derselben Form, können also durch eine Größenskalierung ineinander überführt werden. Die Form der Bögen entspricht Form I.

Auch AMERICAN ORTHODONTICS bietet unter dem Namen "BONWILL HAWLEY Arch" (Abbildung 60) Bögen nach der klassischen BONWILL-HAWLEY-Bogenform an [10].

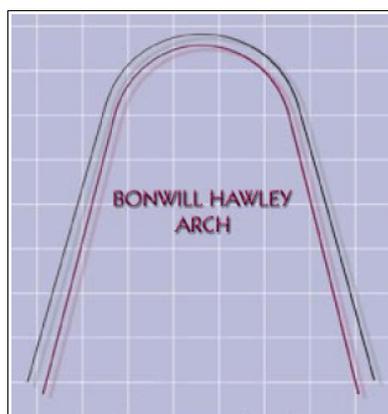


Abbildung 60: "BONWILL HAWLEY Arch"-Bogenform von AMERICAN ORTHODONTICS [10]

Oberkieferbogen (schwarz) und Unterkieferbogen (rot) unterscheiden sich nur durch ihre Skalierung und sind in der Form identisch. Die Form der Bögen ist die Form VII.

Bogensysteme der Firma SMILE DENTAL

Neben einem den "RICKETTS 'Penta-Morphic Arch System'" entsprechendem Bogensystem namens "Rick-Form" bietet die Firma Smile Dental noch drei weitere Bogenformen an: "Europa II", "Standard Form" und "Trueform" [160].

Das "Rick-Form"-Bogensystem (Abbildung 61) der Firma SMILE DENTAL setzt das Bogensystem nach RICKETTS [137] um.

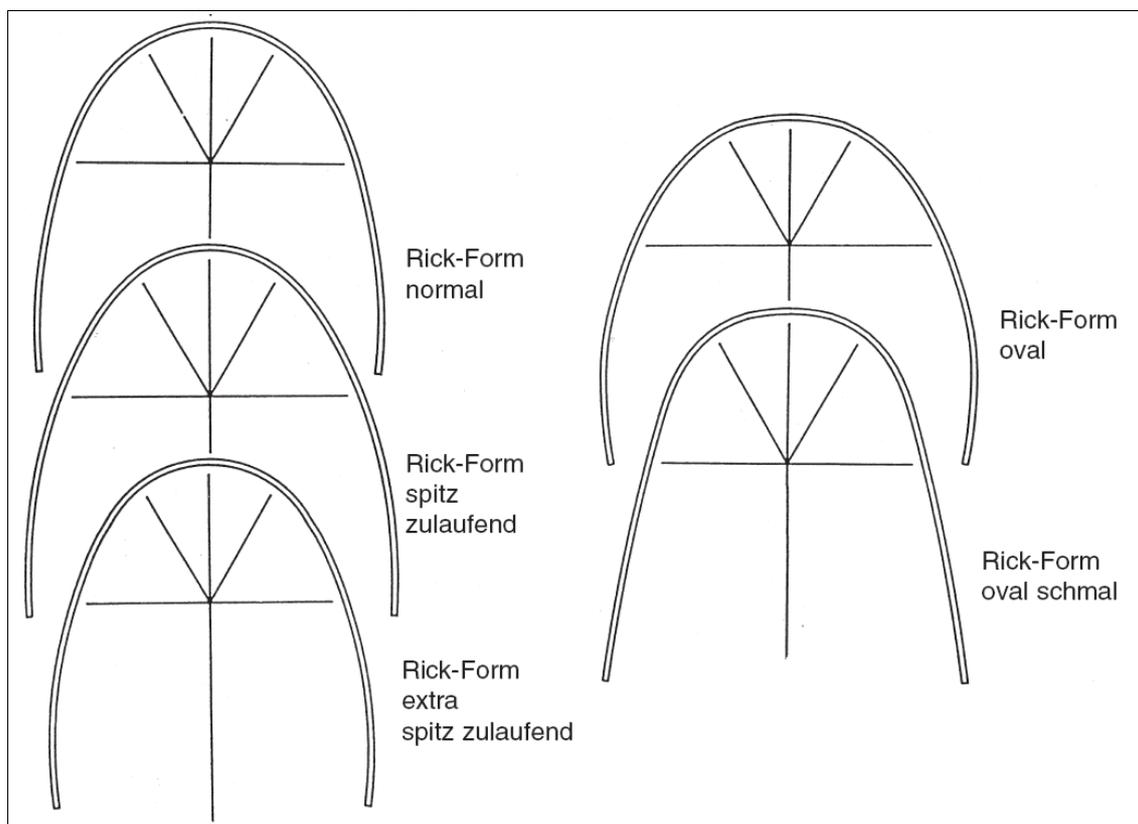


Abbildung 61: "Rick-Form"-Bogensystem von SMILE DENTAL [160]

Das System umfasst dementsprechend fünf verschiedene Bögen die insgesamt vier verschiedene Formen aufweisen ("spitz zulaufend" und "extra spitz zulaufend" sind formgleich und lassen sich durch Skalierung zur Deckung bringen). Eine Unterscheidung zwischen Ober- und Unterkieferbögen findet nicht statt. Die Benennung erfolgt analog zu RICKETTS, lediglich die Formen "zugespitzt" und "eng zugespitzt" werden "spitz zulaufend" bzw. "extra spitz zulaufend" genannt. Der "normal"-Bogen entspricht Form II, der "spitz zulaufend"- und "extra spitz zulaufend"-Bogen Form III, der "oval"-Bogen Form VI und der "oval schmal"-Bogen Form V.

Die "Europa II"-Bogenform (Abbildung 62) von SMILE DENTAL wird in einer Ober- und Unterkieferversion angeboten. Beide Bögen haben dieselbe Form, der Unterkieferbogen ist leicht kleiner skaliert [160].

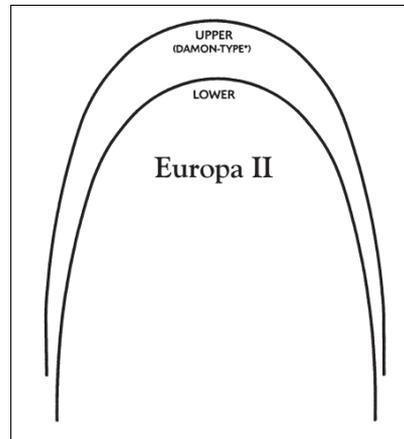


Abbildung 62: "Europa II"-Bogenform von SMILE DENTAL [160]

Obwohl SMILE DENTAL für den Oberkieferbogen angibt, er wäre vom "DAMON-Type", stimmt dieser Bogen nicht mit dem "DAMON SL Universal Archform"-Bogen (Abbildung 38, Seite 80) der Firma ORMCO überein. Diesem ist er in der Form zwar recht ähnlich, der "Europa II"-Oberkieferbogen ist aber im Eckzahnbereich leicht schmaler geformt. Stattdessen stimmt die Form der "Europa II"-Bögen mit Form II überein.

Auch die Firma SMILE DENTAL hat einen der BONWILL-HAWLEY-Bogenform nachempfundene Bogen im Angebot [160].

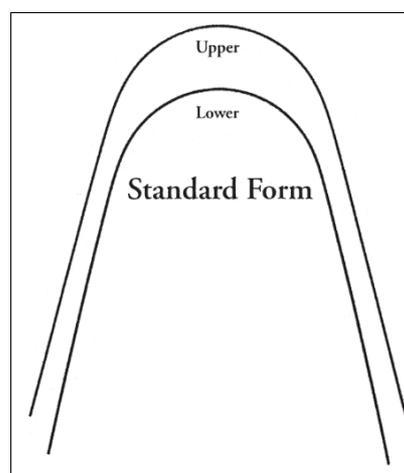


Abbildung 63: "Standard Form"-Bogenform von SMILE DENTAL [160]

Die "Standard Form" genannten Bögen (Abbildung 63) werden in einer Ober- und einer

schmäler geschnittenen Unterkieferversion hergestellt. Der Frontzahnbogen beider Bögen lässt sich durch Skalierung ineinander überführen, die geraden posterioren Segmente verlaufen dann allerdings im vergrößerten Unterkieferbogen immer noch etwas schmaler. Die Form der Bögen entspricht der Form VII.

Das "Trueform"-Bogensystem (Abbildung 64) der Firma SMILE DENTAL besteht aus zwei Bögen (einem Ober- und einem Unterkieferbogen), die dieselbe Form bei geringerer Größe des Unterkieferbogens aufweisen [160].

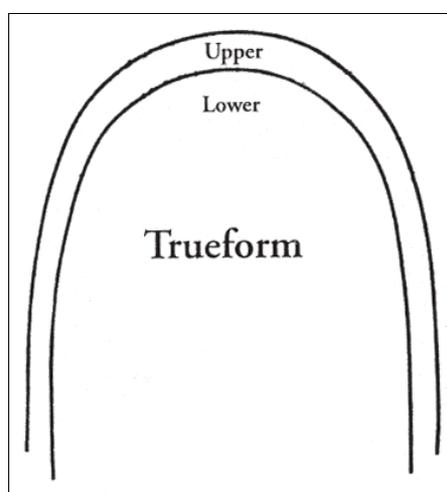


Abbildung 64: "Trueform"-Bogenform von SMILE DENTAL [160]

Auch wenn der Händler die Identität nicht explizit angibt, stimmt das "Trueform"-Bogensystem mit der Form des "Tru-Arch"-Bogensystem (Abbildung 40, Seite 82) der Firma ORMCO überein, beide sind von der Form IV. Im Vergleich zum "Europa II"-System von SMILE DENTAL ist das "Trueform"-System im Eckzahnbereich bei gleicher posteriorer Breite wesentlich weiter geformt.

#### Bogensysteme der Firma PHOENIX ORTHODONTICS

Die Firma PHOENIX ORTHODONTICS bietet zwei verschiedenen Bogensysteme an: eines mit dem Namen "Symmetry" und ein zweites namens "Standard", welches auf der BONWILL-HAWLEY-Bogenform basiert [131].

Das "Symmetry"-Bogensystem (Abbildung 65) besteht aus sechs Bögen, jeweils drei Ober- und drei Unterkieferbögen, es liegen zwei verschiedene Formen vor [131].

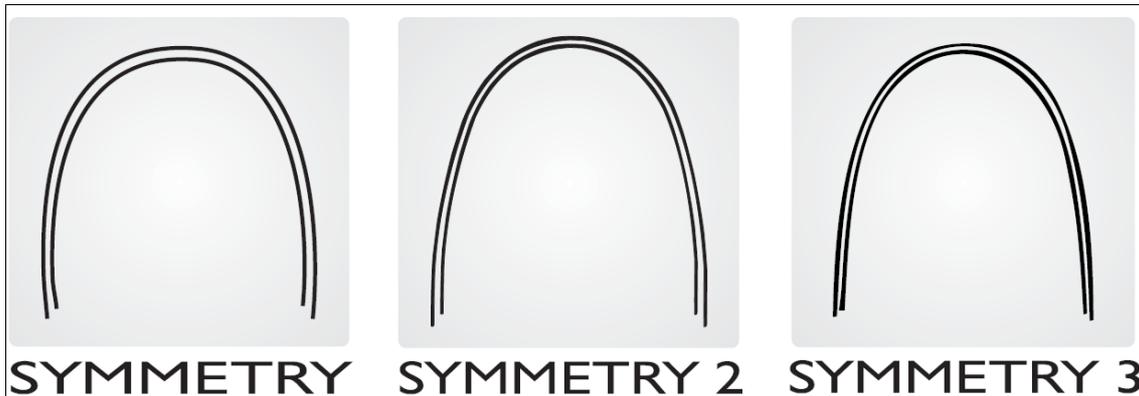


Abbildung 65: "Symmetry"-Bogensystem von PHOENIX ORTHODONTICS [131]

Die Unterkieferbögen (die unteren Bögen in Abbildung 65) sind jeweils eine kleiner skalierte, ansonsten formgleiche Version der entsprechenden Oberkieferbögen. Die insgesamt vier Bögen der "Symmetry 2"- und "Symmetry 3"-Bögen (Abbildung 65 mitte bzw. rechts) sind in Form identisch: Der "Symmetry 3"-Oberkieferbogen ist in Form und Größe identisch mit dem "Symmetry 2"-Unterkieferbogen, der "Symmetry 3"-Unterkieferbogen lediglich kleiner skaliert. Die Form der "Symmetry"-Bögen entspricht Form IV, die der "Symmetry 2"- und "Symmetry 3"-Bögen Form II.

Die "Standard"-Bögen (Abbildung 66) der Firma PHOENIX ORTHODONTICS orientieren sich offensichtlich an der BONWILL-HAWLEY-Bogenform [131].

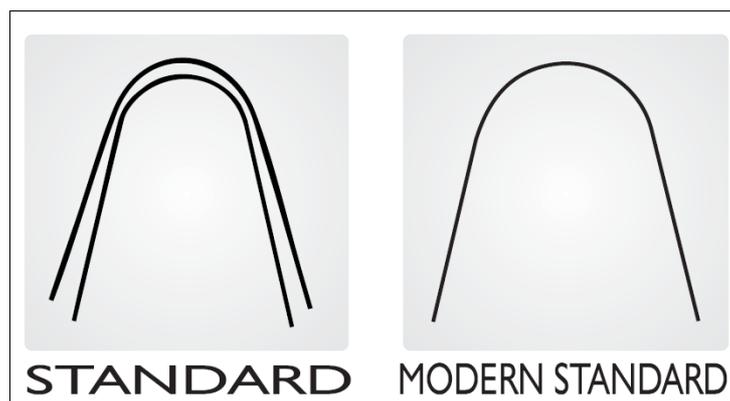


Abbildung 66: "Standard"-Bogensystem von PHOENIX ORTHODONTICS [131]

Die klassischen "Standard"-Bögen werden in einer Ober- und Unterkieferversion angeboten, zusätzlich gibt es noch ein "Modern Standard"-Bogentemplate, das insgesamt breiter geschnitten ist. Wie für die BONWILL-HAWLEY-Bogenform üblich unterscheiden sich auch hier die Frontzahnbögen aller Bögen nur durch ihre Skalierung, die geraden

Bogensegmente sind aber durch reine Skalierung nicht zur Deckung zu bringen, sondern verlaufen in unterschiedlichen Winkeln. Die Form der Bögen entspricht Form VII.

### 3. Entwicklung des "Dental Archform Managers" (DAM)

Der Quellcode der im Rahmen dieser Arbeit neu entwickelten Windowsapplikation "Dental Archform Manager" (DAM) umfasst weit über 6000 Programmzeilen und ist daher nicht als Anhang an die vorliegende Arbeit angefügt worden. Statt der Beschreibung der detaillierten Entwicklungsprozesse aus softwaretechnischer Sicht, werden zunächst die Anforderungen an die zu entwickelnde Software allgemein geschildert (Kapitel 3.1) und dann ab Kapitel 3.2 die Arbeitsweise des Programms primär anhand typischer Ablaufprozesse bei der klinischen Anwendung des Archform-Managers beschrieben. Der schematische Ablauf einer Bogenformanalyse mit dem DAM ist in Abbildung 67 dargestellt.

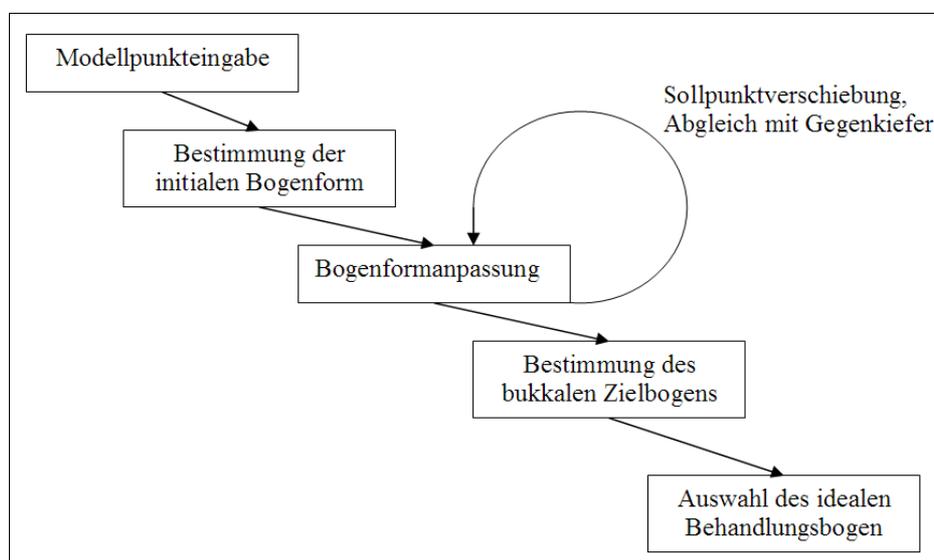


Abbildung 67: Schematische Darstellung des Arbeitsablaufs im BAM

In den Kapiteln ab Kapitel 3.2 werden jeweils nach einer kurzen Beschreibung des praktisch-klinischen Arbeitsschrittes auf der grafischen Benutzeroberfläche (GUI) des Dental-Archform-Managers für jeden Schritt dieses Ablaufschemas Unterkapitel eingefügt, welche die automatisch ablaufenden Prozesse der Bogenformanalyse näher beschreiben und die technischen und mathematischen Details erklären, die die im Hintergrund versteckten "Herzstücke" der Applikation bilden.

#### 3.1 Anforderungen an ein computergestütztes Bogenform-Analysemodul

Zu Beginn einer kieferorthopädischen Behandlung wird für die obligatorische Modellanalyse in Münster ein in das hauseigene Dokumentationssystem "DokuInforma" [109]

integriertes elektronisches Modellanalysemodul verwendet. Das Modul dokumentiert Modellanalysedaten, die bei der klassischen "Vermessung" kieferorthopädischer Modelle erhoben werden (z.B. Werte der TONN- und BOLTON-Relationen), sowie manuell-visuell befundete Daten, wie z.B. die Angle Klassen oder spezielle Einzelzahnabweichungen (Rotationen, Kippungen, etc.).

Ein im Rahmen dieser Arbeit zu entwickelndes Windows-Zusatzprogramm soll das vorhandene Modellanalysemodul um die Funktionen erweitern, die Zahnbogenformen initialer Malokklusionsmodelle zu erfassen, zu dokumentieren und eine Hilfestellung bei der Auswahl adäquater kieferorthopädischer Behandlungsbögen ("Arch Wires") zu leisten. Auf digitalisierte Aufsichtsansichten der Ober- und Unterkiefermodelle sollen definierte Zahnpunkte gesetzt werden, welche die Software zur Berechnung eines initialen Zahnbogens verwendet. Im Rahmen der Therapieplanung kann der Behandler die therapeutische Zielbogenform individuell an den Therapieplan anpassen. Das Programm soll nachfolgend aus einem praxisspezifisch katalogisierten Materiallager konfektionierter Behandlungsbögen die am besten zur individuellen Zielbogenform des Patienten passende Bogenform auswählen. Das neu zu entwickelnde Modul soll über eine Schnittstelle an die Basismodellanalyse angebunden werden und mit dieser automatisiert notwendige Daten austauschen.

### ***3.1.1 Anforderungen an die Softwareentwicklung***

Das am ZMK verwendete elektronische Dokumentationssystem "DokuInforma" [109] basiert im Kern auf einer Accessdatenbank der Firma MICROSOFT (MS), die Programmierung ist in der Sprache "Visual Basic for Applications" (VBA) realisiert. Damit sich das Modul zur Bogenformanalyse möglichst nahtlos in das bestehende Dokumentationssystem integriert, soll zur Entwicklung des Moduls zur Bogenformanalyse ebenfalls ein Visual Basic-Dialekt verwendet werden. Die höhere Komplexität der bei der Bogenformberechnung und der Unterstützung zur Behandlungsplanung anfallenden Aufgaben (insbesondere in mathematischer und grafischer Hinsicht) führten zu der Einsicht, dass die in VBA vorhandenen inhärenten Grenzen der Programmierung schnell erreicht würden. Wir entschieden uns daher für die Entwicklung des Bogenformmoduls unter "Visual Basic 8", welches eine der Programmiersprachen in dem Paket "Visual

Studio 2005" der Firma MICROSOFT darstellt und unabhängig von MS Access arbeiten kann. Diese Auswahl ermöglicht aber dennoch durch die Integration in das aktuelle .NET Framework einen einfachen und sicheren Zugriff auf die bestehende Access-datenbank und damit einen problemlosen Datenaustausch zwischen dem Modul und dem "DokuInforma"-System. Andererseits steht unter Visual Basic 8 die volle Leistungsfähigkeit dieser Programmiersprache zur Verfügung, ohne die Einschränkungen der speziell für das MS-Office-Paket bereitgestellten Makroprogrammiersprache "Visual Basic for Applications" (VBA). Durch die Eigenständigkeit des Moduls zur Bogenformanalyse soll prinzipiell auch eine Anbindung an andere Modellanalysesysteme ermöglicht werden. Das Modul zur Bogenformanalyse benötigt als Übergabedaten die Lokalisation der auszuwertenden Modellbilder, sowie die relevanten Messdaten aus einer Modellanalyse (z.B. transversale Breiten, Zahnbreiten), um die entsprechenden Größen zu visualisieren und eine Kalibration der Modellbilder zu ermöglichen. Kann ein Modellanalyseprogramm diese Daten über eine geeignete Schnittstelle bereitstellen, soll das Programm zur Bogenformanalyse auch als Erweiterungsmodul für dieses genutzt werden können. Zusätzlich wäre durch die Ausrichtung des .NET Frameworks auf Internetanwendungen sogar eine spätere Portierung des Analysemoduls in eine Webanwendung denkbar.

Allgemein ist Softwareentwicklung ein aufwendiger und langwieriger Prozess, da spätere Anwender möglichst intuitiv und effektiv mit den Applikationen arbeiten können sollen. Auch die Integration eines Programms in bereits bestehende Anwendungsumgebungen kompliziert die Aufgabe des Entwicklers zusätzlich, da die Datenstrukturen beider System aufeinander abgestimmt werden müssen. Daher werden von professionellen Programmierern bzw. Programmiererteams verschiedene Modelle zur Planung der Entwicklungsprozesse verwendet, die festlegen welche Aufgaben welche Teammitglieder zu welchen Zeitpunkten des Prozesses durchführen sollen. Der Vorteil eines solchen Vorgehens liegt in der besseren Planbarkeit des Gesamtprojekts. So können z.B. Fehlentwicklungen durch gezielt und im voraus festgelegte Testläufe und Teilzielpunkte vermieden oder zumindest früh entdeckt und korrigiert werden. Je nach Zielsetzung und Anforderungen des konkreten Entwicklungsprozesses gibt es verschiedene Modelle, die

regelmäßig zur Anwendung kommen und sich im wesentlichen z.B. durch ihren Grad an Flexibilität oder auch unterschiedlich gewichteten Schwerpunkten in Hinblick auf z.B. Testläufe, Kostenabschätzungen oder Kommunikationsprozessen zwischen Auftraggebern, Anwendern und Programmierern unterscheiden. Das Bogenform-Analyse-Modul soll in enger Zusammenarbeit mit dem Fachzahnarzt für Kieferorthopädie und Autor des "DokuInforma"-Systems Dr. KARL-LUDWIG MISCHKE entstehen, wodurch sowohl die technische Integration in die bestehende Dokumentationsdatenbank, als auch die Ausrichtung an die Bedürfnisse des kieferorthopädischen Behandlers im klinischen Alltag gewährleistet wird. Bedingt durch die begrenzte Zahl der in Entwicklung involvierten Personen, soll im Wesentlichen das klassische "Wasserfallmodell" (welches im Folgenden kurz vorgestellt wird) in flexiblerer Gestaltung (insbesondere rekursiver Verfeinerung des Entwurfs) der einzelnen Projektphasen zur Anwendung kommen.

Das Wasserfallmodell ist ein klassischer Vorgehensplan zur Softwareentwicklung, der erstmals im Jahr 1970 von ROYCE [145] beschrieben wurde. Der Entwicklungsprozess wird innerhalb dieses Modells in festgelegte Phasen organisiert. Der Name "Wasserfall" leitet sich von der häufig zu findenden schematischen Darstellung der fünf bis sechs kaskadenartig angeordneten Phasen (vgl. Abbildung 68) ab.

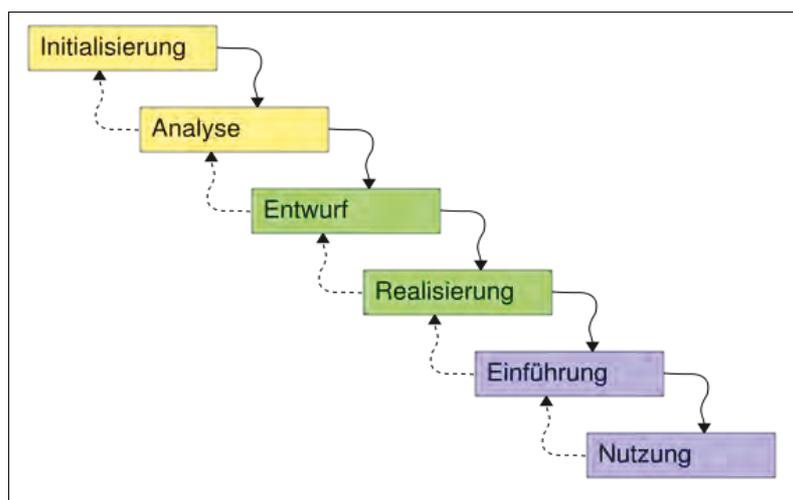


Abbildung 68: Schematische Darstellung des Wasserfallmodells aus [185]

Phasen des Wasserfallmodells:

- Initialisierung: Beauftragung der Softwareentwicklung
- Analyse: Analyse der Problemstellung; Festlegung der Anforderung an die Software; Erstellung eines Pflichtenheftes
- Entwurf: Entwurf der Softwarelösung
- Realisierung: Implementierung der Programmfunktionen
- Einführung: Testbetrieb und Schulung der Nutzer
- Nutzung: Aufnahme des Regelbetriebs

Im ursprünglichen Modell sollten die Phasen nacheinander ohne Verzweigungen und Rückschritte durchlaufen werden. Dies ist für Praxis aber eher unüblich, daher wird meistens (wie in Abbildung 68 durch gestrichelte Pfeile angedeutet) in der praktischen Umsetzung erlaubt, dass beim Auftreten von Problemen auch in frühere Entwicklungsphasen zurückgesprungen werden kann, um von dort aus den Prozess wieder aufzunehmen. Der größte Vorteil dieses Modells – Übersichtlichkeit und extreme Einfachheit – bedingt auch gleichzeitig seinen größten Nachteil: Mangelnde Flexibilität speziell beim Programmieren in größeren Teams oder bei sehr komplexen, vielleicht nicht von Anfang an klar formulierbaren Anforderungen an das zu erstellende Programmpaket. Für ein Projekt mit nur einem Programmierer und relativ klar umrissenen Anforderungen wie in der vorliegenden Arbeit ist das Wasserfallmodell ausreichend und kann durch mehrmaliges rekursives Durchlaufen der Phasen "Entwurf" und "Realisierung" unproblematisch als Strukturierung für den Entwicklungsprozess zur Realisierung unseres Projektes angewandt werden.

### **3.1.2 Anforderungen an die Funktionalität eines Bogenform-Analysemoduls**

Die Grundidee bei der Entwicklung eines Moduls für Bogenformanalysen war es, eine mathematische Beschreibung eines Zahnbogens zu finden und darauf aufbauend den am besten zur individuellen Morphologie passenden konfektionierten Bogens aus einer vorher anzugebenden Auswahl kieferorthopädischer Behandlungsbögen zu ermitteln.

Darüber hinaus soll das Programm relevante Informationen aus dem Dokumentationssystem "DokuInforma" bereitstellen und visualisieren, um dem Fachzahnarzt für Kieferorthopädie die Therapieplanung zu erleichtern.

Bei der genauen Analyse der Problemstellung ergibt sich im Sinne einer Kurzform eines Pflichtenheftes folgende Liste der zu implementierenden Programmfunktionen:

- Visualisierung der idealen Okklusionslinie auf digitalen Modellfotos
- Interaktive und dynamische Visualisierung der Bogenformveränderung beim Verschieben von Zahnpositionen
- farbliche Visualisierung der Breitensummen der Inzisivi (BSI) und Stützzonen
- Visualisierung der transversalen Kiefer-Sollbreiten relativ zu den BSI
- Entfernungsmessungen (in mm) zwischen zwei beliebigen Punkten
- Bogenlängenbestimmungen (in mm) zwischen zwei Punkten auf den darzustellenden Zahnbögen
- Berechnung und Visualisierung der bukkalen Zielzahnbogenformen basierend auf der Okklusionslinie
- automatische Ermittlung des am besten passenden konfektionierten kieferorthopädischen Behandlungsbogens aus einer vorher anzugebenden Auswahl (z.B. aus individuelle Lagerhaltung oder einem wissenschaftlich-virtuellen Bogenformenarchiv)
- Projektion beliebiger konfektionierte Bögen auf die Modellfotos beider Kiefer
- Import von akademischen und konfektionierten Zahnbogenformen über Aufsichtsscanner
- maßstabsgerechter Ausdruck der berechneten Zielbogenformen als Biegeschablonen

Die Wahl des mathematischen Modells fiel auf die Beschreibung durch Kettenlinien, da diese einerseits durch ihre Eigenschaft der Idealisierung gut für das Vorhaben kieferorthopädischer Therapieplanung geeignet ist und andererseits auch mit wenigen Referenzpunkten gute Beschreibungen liefert (vgl. Kapitel 5.1 "Auswahlhilfe für Bogenformberechnungsmodelle in Klinik und Wissenschaft"). Dadurch soll das Ziel erreicht

werden, dass der Behandler möglichst wenige Punkte manuell setzen muss und gleichzeitig durch virtuelle Zahnbewegungen eine flexible Planung der Zielbogenform zugelassen wird.

### 3.2 Grafische Benutzeroberfläche (GUI)

Der Aufruf des Dental Archform Managers erfolgt zur nahtlosen Integration direkt aus dem Patientendokumentationssystem "DokuInforma". Es erscheint das in Abbildung 69 gezeigte Hauptfenster der Applikation.

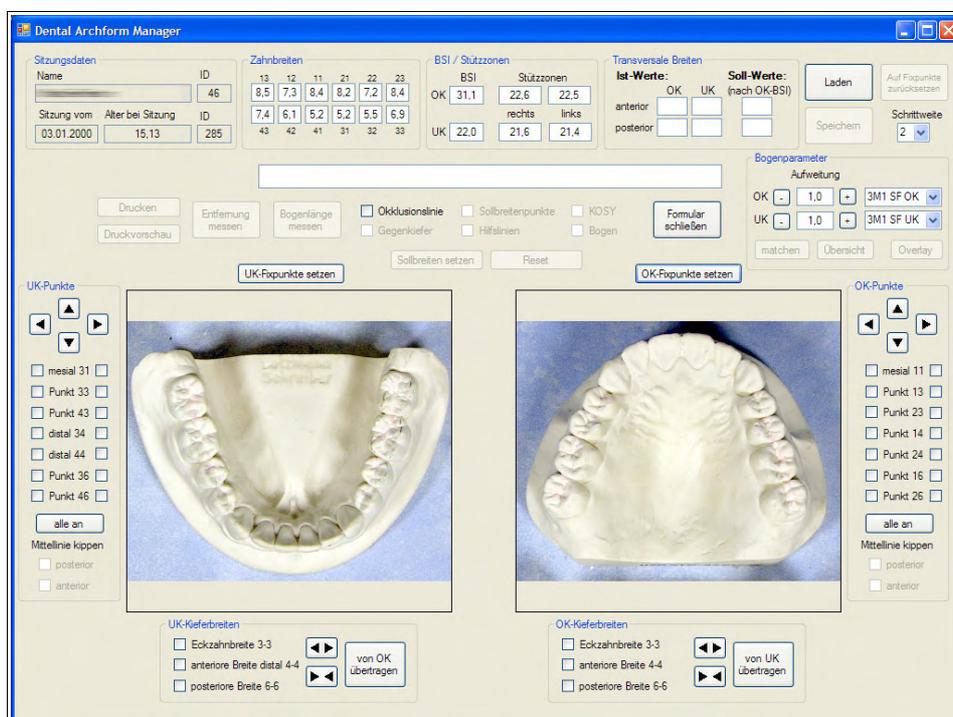


Abbildung 69: Grafische Benutzeroberfläche des DAM

Zur besseren Übersicht sind in Abbildung 70 die einzelnen Bereiche der Bedienoberfläche farblich hervorgehoben:

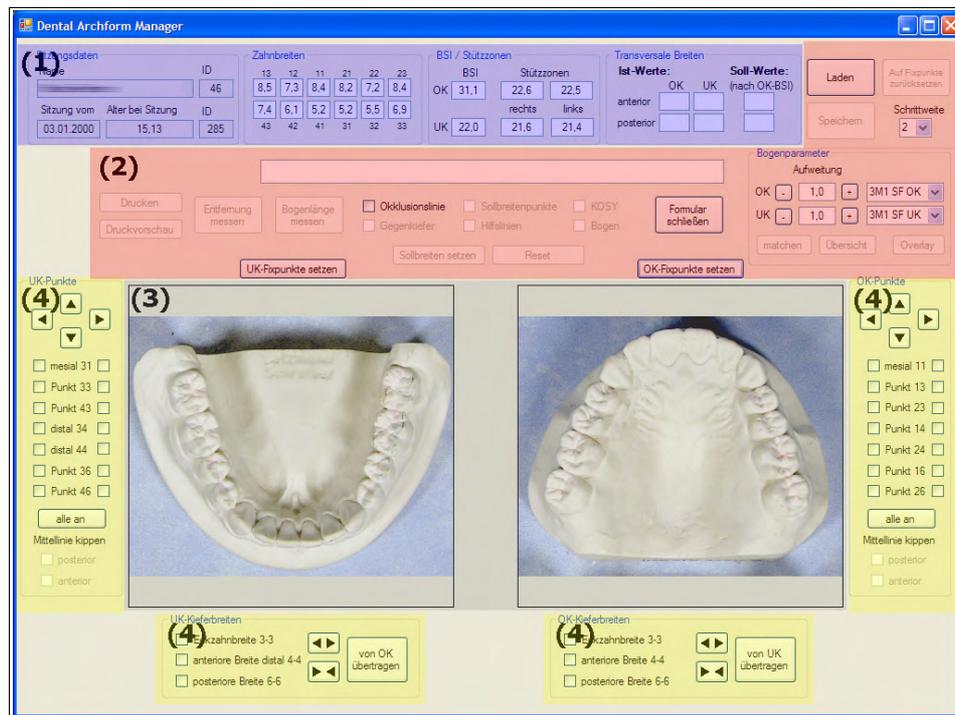


Abbildung 70: Benutzeroberfläche des DAM mit farblich hervorgehobenen Bereichen

Der blau unterlegte Bereich (1) enthält die aus dem Modellanalyseformular der "Doku-Infirma" übernommenen Stammdaten des Patienten, sowie die Messwerte des aktuellen Modellanalysedatensatzes. Im rot eingefärbten Bereich (2) befinden sich die Bedienelemente um die verschiedenen Funktionen des DAM kontrollieren zu können. Der grau hinterlegte Bereich (3) enthält die Modellbilder von Ober- und Unterkiefer. Neben und unter diesem Bereich befinden sich im gelb unterlegten Bereich (4) die Kontrollelemente zur Manipulation der im Verlauf der Bogenformanalyse gesetzten Modellpunkte. In den folgenden Kapiteln werden die einzelnen Bedienelemente anhand eines typischen Arbeitsablaufs vorgestellt und näher erläutert. Für diese Programmbeschreibung werden hier zunächst Schaumodelle mit idealen Zahnbogenformen und optimaler Okklusionsbeziehung verwendet, eine exemplarische klinische Anwendung ist in dem anschließenden Kapitel 4 zu finden.

### 3.3 Manuelle Festlegung der Referenzpunkte

Um Zahnbogenformen berechnen zu können, muss dem DAM die Lage einiger Koordinaten und anatomischer Zahnpunkte vermittelt werden. Hierfür muss ein Koordinatensystem definiert werden, welches sich an der Raphe-Median-Ebene (sagittale Sym-

metrielinie) der Kiefermodelle orientiert. Dafür ist die manuelle Festlegung zweier "zahnunabhängiger" Punkte erforderlich.

Nach Betätigung der Schaltfläche "UK-Fixpunkte setzen" bzw. "OK-Fixpunkte setzen" wird der Behandler aufgefordert den anterioren Punkt der Symmetrielinie in Verlängerung der Raphe-Median-Ebene vor die Inzisivi zu setzen. Der posteriore Punkt der Symmetrielinie wird dorsal - ebenfalls auf der Raphe-Median-Ebene - auf Höhe der distalen Kontaktpunkte der letzten Molaren gesetzt (Abbildung 71).

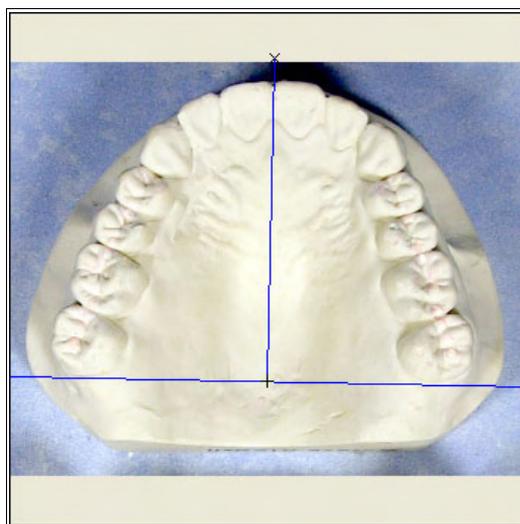


Abbildung 71: Setzen der Symmetrielinie

Während der Behandler den Mauszeiger über das Modellbild bewegt (siehe Abbildung 71), wird als optische Hilfe eine Linie vom zuerst gesetzten anterioren Punkt (in der Abbildung x-förmig markiert) zur aktuellen Mausposition (in der Abbildung kreuzförmig) gezogen, sowie eine auf dieser senkrecht stehende Linie, die später die x-Achse des Koordinatensystems definiert. Dadurch wird dem Behandler ermöglicht, die y-Achse des Koordinatensystems mit der Raphe-Median-Ebene (= Symmetrielinie) des jeweiligen Kiefers in Deckung zu bringen und die x-Achse hinter die letzten vorhandenen Molaren zu setzen. Dem Autor ist bewusst, dass die Raphe-Median-Ebene an Gipsmodellen, vor allem auf dem Unterkiefermodell, anatomisch nicht eindeutig zu erkennen ist, da anatomische Hinweise wie z.B. Lippenbändchen oft nicht erkennbar sind und im dorsalen Bereich die Zunge keine anatomisch genaue Wiedergabe des Mundbodens auf dem Gipsmodell zulässt. Desweiteren ist auch der anteriore Punkt der Symmetrielinie in transversaler Richtung schwer auszumachen, da der approximale Kontaktpunkt der mittleren Inzisivi

nicht zwangsläufig in der Gesichtsmitte (d.h. der Sagittal-Ebene) liegt. Im Oberkiefer ist die Platzierung der y-Achse leichter möglich, da sich die Gaumennaht i.d.R. auch auf Gipsmodellen deutlich darstellt. Aber auch im Oberkiefer ist die Festlegung eines transversalen Mittelpunktes nicht eindeutig möglich, wenn nicht weitere klinische Befunde zur Beurteilung der dentalen Mitten hinzugezogen werden (klinische Untersuchung, Frontalfotografien).

Im Bewusstsein der Problematik einer eindeutigen Festlegung des Koordinatensystems, wurde die Software so entwickelt, dass das Koordinatensystem dynamisch verändert werden kann, um eine individuelle Anpassung an die geplante therapeutische Zahnstellung und Zielbogenformen erreichen zu können. D.h., sollte später deutlich werden, dass das Koordinatensystem nicht zufriedenstellend ausgerichtet ist, kann dieses jederzeit verschoben, gedreht und neu fixiert werden, während sich die Bogenformberechnungen automatisch anpassen.

Nach der (vorläufigen) Festlegung des Koordinatensystems wird der Behandler dazu aufgefordert nacheinander die für die Bogenformbestimmung erforderlichen Zahnpunkte zu setzen (Abbildung 72).

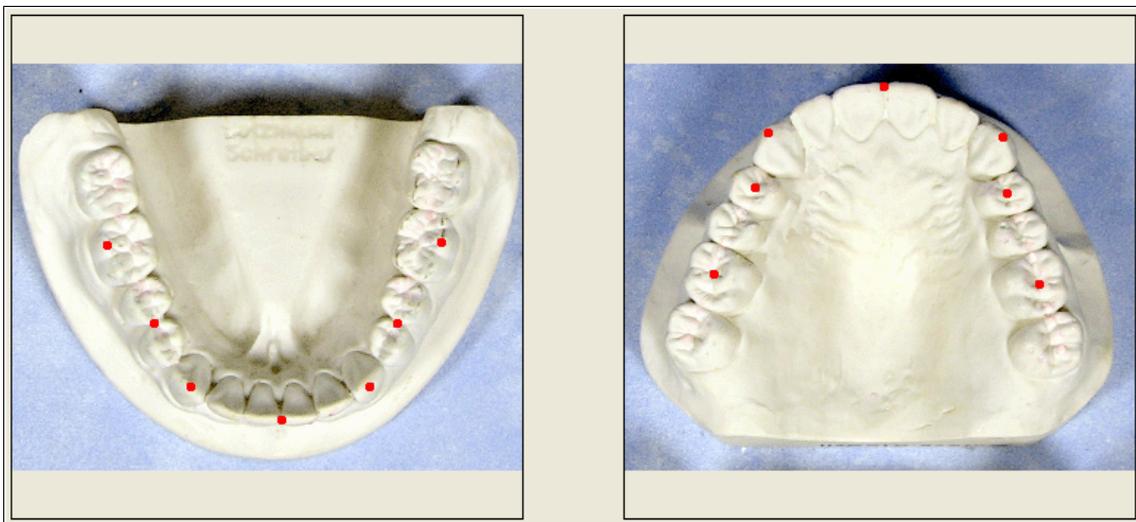


Abbildung 72: Modellbilder mit hervorgehobenen Punktpositionen

Im Unterkiefer werden die distalen bukkalen Höckerspitzen der ersten Molaren, die distalen Kontaktpunkte der ersten Prämolaren, die Höckerspitzen der Eckzähne und schließlich der mesiale Kontaktpunkt der Inzisivi gesetzt. Im Oberkiefer wird der mesiale Kontaktpunkt der Inzisivi gesetzt, die Höckerspitzen der Eckzähne, die Punkte in den zentralen

Fissuren der ersten Prämolaren, sowie die Punkte in den zentralen Fissuren der ersten Molaren. Die genannten Punkte sind in Abbildung 72 dargestellt und in Tabelle 9 zusammengefasst.

Position	Unterkiefer	Oberkiefer
<b>Inzisal-Punkt</b>	Mesialer Kontaktpunkt der Zähne 41-31	Mesialer Kontaktpunkt der Zähne 11-21
<b>Eckzahn-Punkte</b>	Höckerspitzen der Zähne 43 bzw. 33	Höckerspitzen der Zähne 13 bzw. 23
<b>Prämolaren-Punkte</b>	Distaler Kontaktpunkt der Zähne 44 bzw. 34	Zentrale Fissuren der Zähne 14 bzw. 24
<b>Molaren-Punkte</b>	Bukkale Höckerspitzen der Zähne 36 und 46	Zentrale Fissuren der Zähne 16 und 26

Tabelle 9: Definition der Referenzpunkte im DAM

Zahnpunkte, die z.B. aufgrund des Entwicklungsstandes des Wechselgebisses nicht definiert werden können, sind durch Anklicken einer roten Schaltfläche auf den Modellbildern zu überspringen. Sollte ein Punkt ungenau gesetzt worden sein, kann der Behandler jederzeit durch Anklicken desselben mit der rechten Maustaste zu dem jeweils vorherigen Punkt zurückkehren und diesen neu setzen.

Nachdem alle Zahnpunkte gesetzt worden sind, legt der DAM die Koordinaten der Punkte intern in der Patientendatenbank ab, damit diese Prozedur nur beim erstmaligen Aufruf einer Modellanalyse notwendig ist. Die auf diese Weise festgelegten Zahnpunkte sind anatomisch auf den in Malokklusion stehenden Zähne definiert. Sie werden im folgenden als "Fixpunkten" (x-förmige Darstellung auf den Modellfotos) bezeichnet.

Durch Aktivierung des Checkbuttons "Okklusionslinie" werden initial rote "Sollpunkte" (kreisförmige Darstellung) exakt den Fixpunkten überlagert. Der Behandler erhält auf diese Weise die Möglichkeit bei unveränderten Fixpunkten die Zähne über die frei beweglichen Sollpunkte "virtuell zu bewegen", um eine Optimierung der Zielbogenform nach seinen individuellen Vorstellungen bezüglich des Therapiezieles zu realisieren. Alle Berechnungen der Bogenform basieren auf den "Sollpunkten", die "Fixpunkte" bleiben konstant auf ihren anatomischen Zahnpunkten verankert und dienen als optische Referenzpunkte für den Behandler und bieten die Möglichkeit eines Zurücksetzens der Sollpunkte auf die Fixpunkte, um die Bogenformermittlung erneut zu initiieren.

**Details zur technischen Implementierung:**

Damit der DAM die Okklusionslinie anhand des Kettenlinienmodells beschreiben kann, muss programmintern ein geeignetes Koordinatensystem vorhanden sein. Da die Modelle nicht immer exakt parallel zu den Bildkanten der Modellaufnahmen ausgerichtet sind, sondern oftmals leicht verkippt, werden programmintern zwei Koordinatensysteme geführt: Ein "reales", mit Maßeinheiten in Pixeln, welches auf der Benutzeroberfläche des Programms direkt über das Bild des Patientenmodells gelegt wird und in welchem die Visualisierung der mathematischen Beschreibung stattfindet, sowie ein "virtuelles", mit Maßeinheiten in Millimeter, in dem die eigentlichen Berechnungen zur Kettenlinie durchgeführt werden und das einen auflösungsunabhängigen Vergleich der Zahnbögen der beiden Kiefer erlaubt (Abbildung 73).

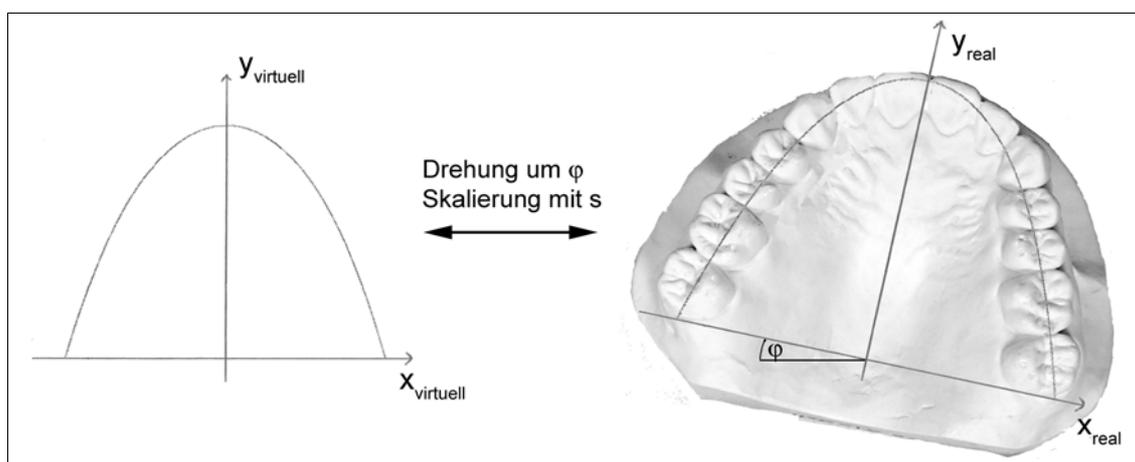


Abbildung 73: "Virtuelles" (links) und "reales" Koordinatensystem (rechts)

Bei der Umrechnung der Koordinaten zwischen den Koordinatensystemen muss sowohl die Auflösung, als auch die mögliche "Verdrehung" des Fotos des Patientenmodells gegenüber dem virtuellen Koordinatensystem berücksichtigt werden. Dies geschieht über einen Skalierungsfaktor  $s$  (in mm/Pixel, berechnet aus der Auflösung der Modellbilder und der Kalibrierungsstrecke des Modells, meistens der transversale Abstand zwischen den 6-Jahr-Molaren) und einen Drehwinkel  $\varphi$ , der bestimmt ist durch die Verkipfung des über die Symmetrielinie des Modells vom Behandler festgelegten Koordinatensystems gegenüber der horizontalen Modellbildachse.

Wenn  $\varphi$  und  $s$  festgelegt sind, kann durch Anwendung einer Drehmatrix und anschließender Multiplikation mit  $s$  zwischen den beiden Koordinatensystem transformiert werden:

$$\begin{pmatrix} x_{real} \\ y_{real} \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{virtuell} \\ y_{virtuell} \end{pmatrix}$$

Formel 40: Transformationsgleichung zwischen realem und virtuellem Koordinatensystem

Oder explizit in Koordinatenform:

$$\begin{aligned} x_{real} &= s(x_{virtuell} \cos(\varphi) - y_{virtuell} \sin(\varphi)) \\ y_{real} &= s(x_{virtuell} \sin(\varphi) + y_{virtuell} \cos(\varphi)) \end{aligned}$$

Formel 41: Koordinatenform der Transformationsgleichung

Soll in die andere Richtung transformiert werden, müssen entsprechend die inversen Ausdrücke benutzt werden.

### 3.4 Initiale Bogenformbestimmung / Okklusionslinie

Nachdem die Referenzpunkte für Ober- und Unterkiefer gesetzt wurden, wird über die Checkbox "Okklusionslinie" die initiale Bogenformberechnung aktiviert. Automatisch berechnet die Software nun die Ausgangsbogenformen und projiziert diese mehrfarbig auf die Modellfotos von Ober- und Unterkiefer (Abbildung 74).

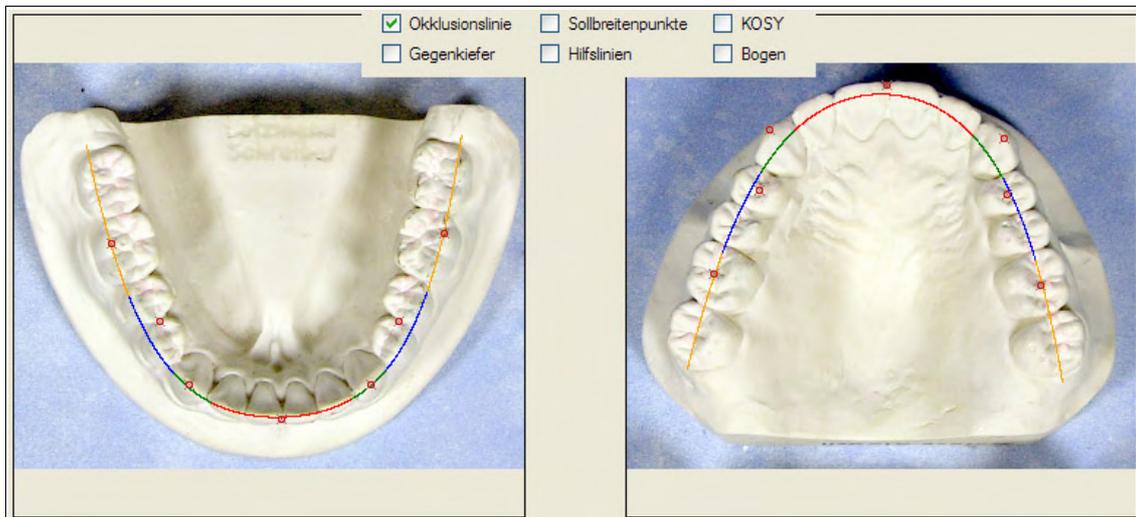


Abbildung 74: Modellfotos mit aktivierten Okklusionslinien

Die Berechnung der Okklusionslinien stützt sich dabei auf die Sollpunkte (kreisförmige rote Punkte), die primär exakt über den anatomischen Zahnpunkten (als graue Kreuze dargestellt) liegen. Da die Prämolarenpunkte im Unterkiefer bzw. die Inzisal- und Eckzahn-

punkte im Oberkiefer keine antagonistische Kontaktpunkte darstellen, werden diese Punkte programmintern in Richtung der Okklusionslinie korrigiert (Details vgl. Abbildung 77, Seite 121).

Die Okklusionslinien werden farblich dargestellt. Die Breitensumme der Inzisivi imponiert als rotes Bogensegment, so dass der Behandler einen ersten optischen Eindruck bezüglich des Platzbedarfs der Frontzähne in einem harmonischen Frontzahnbogen gewinnen kann. Die grün eingefärbten kleineren Segmente stellen die anatomischen Zahnbreiten der Eckzähne dar, welche zusammen mit den sich distal anschließenden blauen Bogenabschnitten die klassischen "Stützzonen" repräsentieren.

Die Okklusionslinien werden für jeden der beiden Kiefer unabhängig berechnet. Ihre Form und Position wird, wie unten näher beschrieben, auf der Basis von jeweils sieben Sollpunkten berechnet.

Sollte der Behandler nach der initialen Bestimmung der Okklusionslinie erkennen, dass das Koordinatensystem im Hinblick auf die Raphe-Median-Ebene nicht zufriedenstellend ausgerichtet ist, kann dieses korrigiert werden (siehe Abbildung 75).

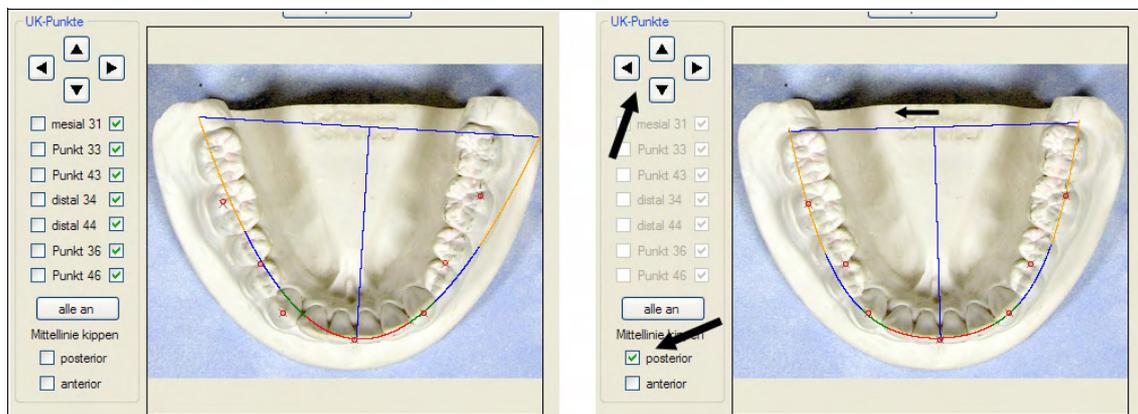


Abbildung 75: Korrektur der Lage des Koordinatensystems

In Abbildung 75 links ist ein Unterkiefermodell mit unbefriedigender Ausrichtung des Koordinatensystems abgebildet. Man erkennt, dass das gesamte Koordinatensystem und die Okklusionslinie leicht nach links "gekippt" werden muss, um die Okklusionslinie symmetrisch mit dem Zahnbogen in Deckung zu bringen. Bei visualisiertem Koordinatensystem (einschaltbar über die Checkbox "KOSY") kann der Behandler z.B. den posterior

ren Punkt der Symmetrielinie verschieben, indem er den Haken "posterior" setzt und über die Pfeilbuttons eine "Kippung" der Symmetrielinie erreicht (Abbildung 75). Durch ein Verschieben des posterioren Punktes nach oben oder unten kann auch die Position der x-Achse in sagittaler Richtung angepasst werden. Analog kann der vordere Definitionspunkt "anterior" verschoben werden, um die Symmetrieachse in diesem Bereich manuell auszurichten.

Der Behandler kann im Rahmen der Therapieplanung bestimmte Sollpunkte optional ausschalten (z.B. bei extrem ektopisch stehenden Zähnen, Abbildung 76) oder auch beliebig verschieben, was virtuellen Zahnbewegungen entspricht. Der DAM berechnet bei derartigen Änderungen der Sollpunktkoordinaten automatisch die Okklusionslinien neu und aktualisiert deren Darstellung dynamisch.

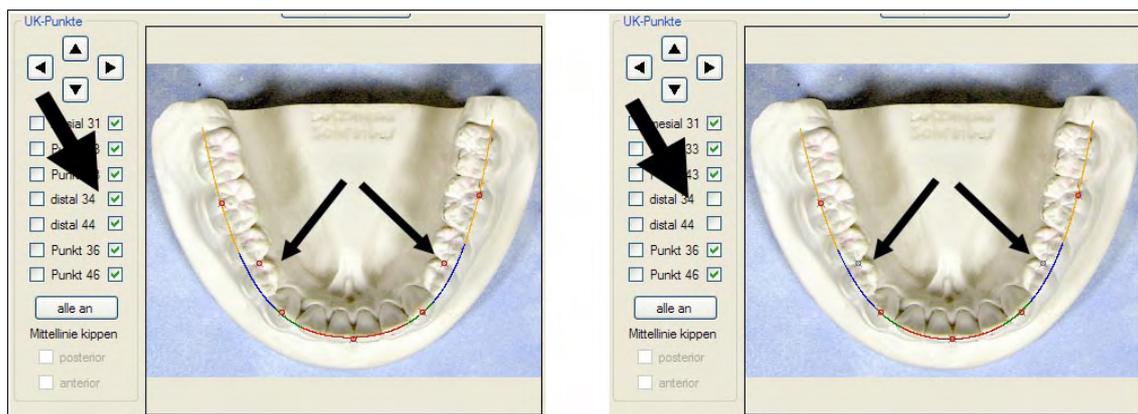


Abbildung 76: Deaktivieren von Sollpunkten

Um die Berücksichtigung eines Sollpunktes für die Bogenformberechnung ein- oder auszuschalten, können rechts von der jeweiligen Zahnposition in der Schaltfläche für die Verschiebung der Sollpunkte Häkchen gesetzt oder gelöscht werden. In Abbildung 76 links sind alle Sollpunkte aktiviert, rechts wurden die Molarenpunkte deaktiviert, indem die entsprechenden Checkboxes (dicker Pfeil) gelöscht wurden. Die entsprechenden Sollpunkte wechseln ihre Färbung von rot (links, dünne Pfeile) auf grau (rechts, dünne Pfeile). Sollpunkte können auch direkt auf dem Modellfoto bei gedrückter ALT-Taste mit der Maus angeklickt werden. Dem Behandler gibt die freie Wahl der in die Berechnung einzubeziehenden Sollpunkte die Möglichkeit den Einfluß einzelner Zahnpositionen auf den Zahnbogen zu testen, sowie gezielt einzelne Zahnpositionen in den durch die anderen Punkte vorgegebenen Zahnbogen einzugliedern. Diese Funktionalität ermöglicht dem Be-

handler eine Art begrenztes virtuelles "Set-Up", wobei die roten verschobenen Sollpunkte die Zielpositionen der entsprechende Zähne darstellen.

#### **Details der technischen Implementierung:**

Aus den antagonistischen Kontaktpunkten (Sollpunkte) im Ober- und Unterkiefer wird die Okklusionslinie des jeweiligen Kiefers bestimmt. Es wird dem Behandler so ermöglicht diese im Rahmen der Behandlungsplanung miteinander abzugleichen, um Erkenntnisse über das Größenverhältnis der Zahnbögen von Ober- und Unterkiefer zueinander zu erhalten und in die therapeutischen Überlegungen einfließen zu lassen. Es kann z.B. eine bei Klasse II-Fällen häufig anzutreffende transversale Unterentwicklung des Oberkiefers visualisiert werden, indem die Okklusionslinien im Inzisalpunkt überlagert aufeinander projiziert werden.

In dem virtuellen Koordinatensystem hat die zu ermittelnde Okklusionslinie die Gleichung:

$$g(x) = a \cosh(bx) + c$$

Formel 42: Allgemeine Form der im DAM verwendeten Kettenlinie

Der die eigentliche Form der Kettenlinie nicht beeinflussende Parameter  $c$  wird hier aus praktischen Gründen nicht wie im Theorieteil (vgl. Kapitel 2.2.2.1 "Kettenlinie", Formel 3, Seite 35) identisch  $a$  gesetzt: Der Scheitelpunkt der Kettenlinie soll nicht zwingend im Ursprung des Koordinatensystems liegen, vielmehr kann der Behandler über die freie Wahl der  $x$ -Achse des Koordinatensystems selbst bestimmen, bis zu welchem Bereich des Zahnbogens die Okklusionslinie und damit später der Zielbogenform berechnet werden soll, der Scheitelpunkt wird dadurch entsprechend ober- bzw. unterhalb des Ursprungs liegen. Der Behandler kann auswählen, welche der aus der Modellanalyse stammenden oder im DAM selbst gesetzten Punkte zur Ermittlung der Parameter  $a, b$  und  $c$  der Kettenlinie herangezogen werden (zur ausführlichen Definition der Punkte vgl. Kapitel 2.2.1 "Lokalisation von Referenzpunkten").

Die Okklusionslinie verläuft im Oberkiefer nicht durch den mesialen Kontaktpunkt der 1'er, sondern durch einen entsprechend der sagittalen Frontzahnstufe 2 mm nach lingual verschobenen Punkt. Daher wird zur Ermittlung der Okklusionslinie entsprechend ein

Punkt, der gegenüber dem vom Behandler festgelegten um 2 mm Richtung lingual verschoben ist verwendet. Aus demselben Grund werden im Oberkiefer außerdem die Eckzahnpunkte um 2 mm nach innen und im Unterkiefer die Prämolarenpunkte um 3 mm in Richtung der Okklusionslinie nach bukkal verschoben. Damit die Kettenlinie eindeutig definiert ist, müssen mindestens drei Punkte ausgewählt werden, der DAM stellt sicher, dass diese Bedingung erfüllt ist und lässt gegebenenfalls keine weitere Abwahl von Punkten zu.

Im nächsten Schritt sucht das Programm automatisch diejenige Kettenlinie, die möglichst gut alle vom Behandler ausgewählten Punkte annähert. Um diese Kettenlinie zu identifizieren wird zunächst eine Kettenlinie mit den willkürlich gewählten Parametern  $a = b = 0,01$  und  $c = 200$  angenommen und dann mittels des LEVENBERG-MARQUARDT-Algorithmus [97],[104] sukzessiv Parameter berechnet, die eine bessere Anpassung an die vorgegebenen Punkte ergeben. Wenn keine weitere Verbesserung der Anpassung erfolgt, wird die ermittelte Kettenlinie als die bestangepasste angenommen und in die Modellfotos eingezeichnet.

Im Folgenden wird dieser Vorgang zum besseren Verständnis exemplarisch für einen konkreten Satz von Punkten eines Oberkiefermodells illustriert: Es sei angenommen, bei der Analyse eines Oberkiefermodells im DAM hätten sich für die sieben in die Berechnung der Okklusionslinie einfließenden Punkte Pixelkoordinaten entsprechend Tabelle 10 ergeben.

<b>Pixelkoordinaten der Zahnpositionen eines exemplarischen Oberkiefermodells</b>		
<b>Punkt</b>	<b>X<sub>i</sub> / Pixel</b>	<b>y<sub>i</sub> / Pixel</b>
<b>P<sub>1</sub></b>	0	192 (201)
<b>P<sub>2</sub></b>	-72 (-78)	161 (167)
<b>P<sub>3</sub></b>	76 (82)	161 (167)
<b>P<sub>4</sub></b>	-84	125
<b>P<sub>5</sub></b>	85	128
<b>P<sub>6</sub></b>	-113	66
<b>P<sub>7</sub></b>	111	66

Tabelle 10: Koordinaten eines exemplarischen Oberkiefermodells

In Abbildung 77 sind diese Punkte zur besseren Übersicht in einem Koordinatensystem dargestellt und dem Oberkiefermodell überblendet:

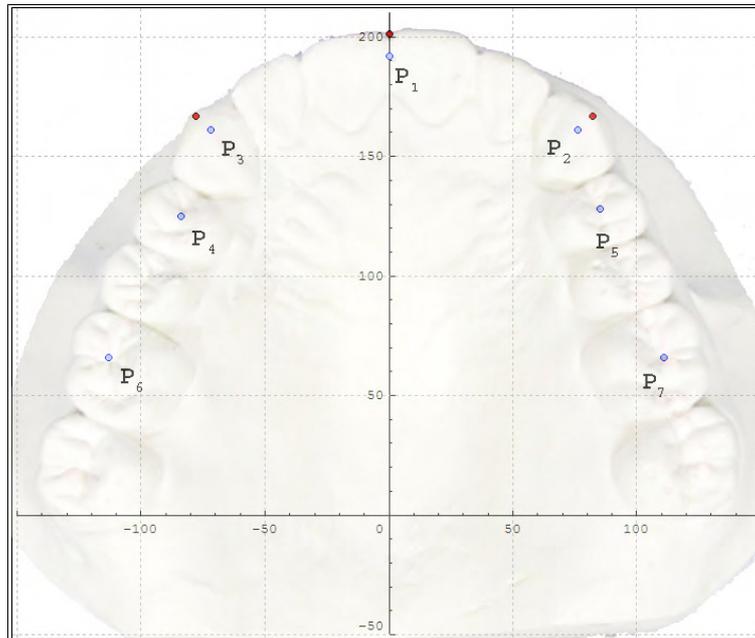


Abbildung 77: Die zur Annäherung vorgegebenen Oberkieferpunkte

Die für die Berechnung der Okklusionslinie berücksichtigten Punkte  $P_1$  bis  $P_7$  sind in hellblau eingezeichnet, zusätzlich sind der Inzisalpunkt sowie die Eckzahnpunkte vor der Transformation für die Okklusionslinienberechnung in rot markiert (die Koordinaten sind in Tabelle 10 in Klammern angegeben). Die zu minimierende Summe der Quadrate der Abweichung (Fehlerquadratsumme) der Kettenlinienfunktion  $g(x)$  von den vorgegebenen Punkten  $P_i$  in Abhängigkeit der Parameter  $a, b$  und  $c$  ist gegeben durch (vgl. Formel 33, Seite 60):

$$F(a, b, c) = \sum_{i=1}^7 f_i^2(x) = \sum_{i=1}^7 (y_i - (a \cdot \cosh(b \cdot x_i) + c))^2$$

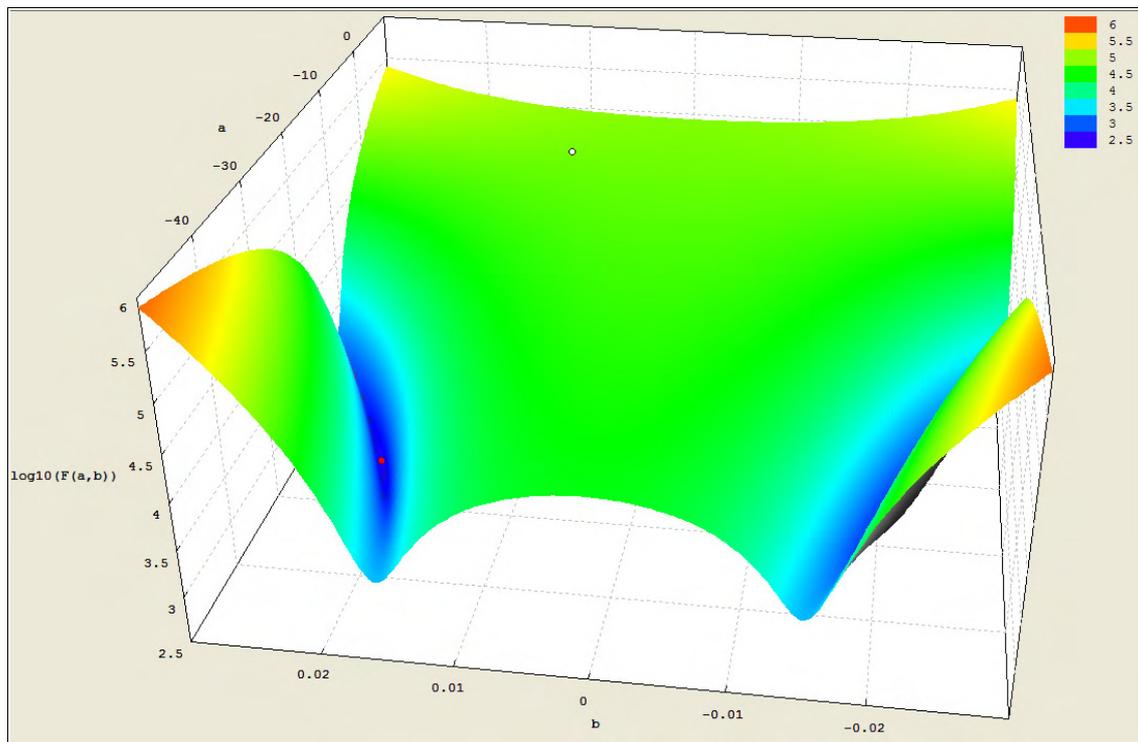
Formel 43: Fehlerquadratsumme  $F(a, b, c)$  der Kettenlinienfunktion  $g(x)$

mit  $x_i$  und  $y_i$  hier und im Folgendem entsprechend Tabelle 10. Damit ergibt sich für die für den LEVENBERG-MARQUARDT-Algorithmus benötigte JACOBI-Matrix (vgl. Formel 35, Seite 60):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a} & \frac{\partial f_2}{\partial b} & \frac{\partial f_1}{\partial c} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a} & \frac{\partial f_2}{\partial b} & \frac{\partial f_2}{\partial c} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a} & \frac{\partial f_3}{\partial b} & \frac{\partial f_3}{\partial c} \\ \frac{\partial f_4}{\partial a} & \frac{\partial f_4}{\partial b} & \frac{\partial f_4}{\partial c} \\ \frac{\partial f_5}{\partial a} & \frac{\partial f_5}{\partial b} & \frac{\partial f_5}{\partial c} \\ \frac{\partial f_6}{\partial a} & \frac{\partial f_6}{\partial b} & \frac{\partial f_6}{\partial c} \\ \frac{\partial f_7}{\partial a} & \frac{\partial f_7}{\partial b} & \frac{\partial f_7}{\partial c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \cdot b \cdot \sinh(b \cdot x_1) & -\cosh(b \cdot x_1) & 1 \\ -a \cdot b \cdot \sinh(b \cdot x_2) & -\cosh(b \cdot x_2) & 1 \\ -a \cdot b \cdot \sinh(b \cdot x_3) & -\cosh(b \cdot x_3) & 1 \\ -a \cdot b \cdot \sinh(b \cdot x_4) & -\cosh(b \cdot x_4) & 1 \\ -a \cdot b \cdot \sinh(b \cdot x_5) & -\cosh(b \cdot x_5) & 1 \\ -a \cdot b \cdot \sinh(b \cdot x_6) & -\cosh(b \cdot x_6) & 1 \\ -a \cdot b \cdot \sinh(b \cdot x_7) & -\cosh(b \cdot x_7) & 1 \end{pmatrix}$$

Formel 44: JACOBI-Matrix zu dem betrachteten Beispiel

In Abbildung 78, Seite 123 ist die Fehlerquadratsumme  $F(a,b)$  graphisch dargestellt. Da eine Darstellung mit der Variation aller Parameter  $(a,b,c)$  eigentlich ein vierdimensionales Koordinatensystem, das aus verständlichen Gründen hier nicht darstellbar ist, erfordern würde, ist in den folgenden graphischen Darstellungen der Parameter  $c$  (der lediglich eine Verschiebung der Kettenlinie entlang der  $y$ -Achse bewirkt) schon auf den für diesen Beispielsfall durch den LEVENBERG-MARQUARDT-Algorithmus als optimalen ermittelten Wert voreingestellt. Da die Fehlerquadratsumme abseits der optimalen Parameter schnell zunimmt sind in den Darstellungen außerdem die Funktionswerte logarithmisch aufgetragen.

Abbildung 78: Dreidimensionale Darstellung der Fehlerquadratsumme  $F(a,b)$ 

Man erkennt deutlich, die in dunkelblau dargestellten Minima der Fehlerquadratsumme, die sich symmetrisch zur  $b=0$  Achse anordnen, da sich durch die Symmetrie des Cosinus Hyperbolicus für  $b' = -b$  identische Kettenlinien  $g(x)$  ergeben. Der für den LEVENBERG-MARQUADT-Algorithmus gewählte Startwert ( $a = b = 0,01$ ;  $c = 200$ ) ist mit einem weißen Punkt markiert. Von diesem Punkt aus wandert der LEVENBERG-MARQUADT-Algorithmus immer in Richtung kleinerer Funktionswerte bis er in einem der Minima angekommen ist. In unserem Beispielsfall ergibt sich nach einigen Iterationen als Parametersatz mit minimaler Fehlerquadratsumme:

$$a = -25,0976; \quad b = 0,0223; \quad c = 219,9135$$

Dieser ist in Abbildung 78 mit einem roten Punkt markiert. In den Abbildungen 79 und 80 ist die Fehlerquadratsumme  $F(a,b)$  in der näheren Umgebung des gefundenen Minimum dargestellt. Das mittels des LEVENBERG-MARQUADT-Algorithmus gefundene Minimum ist wiederum mit einem roten Punkt markiert.

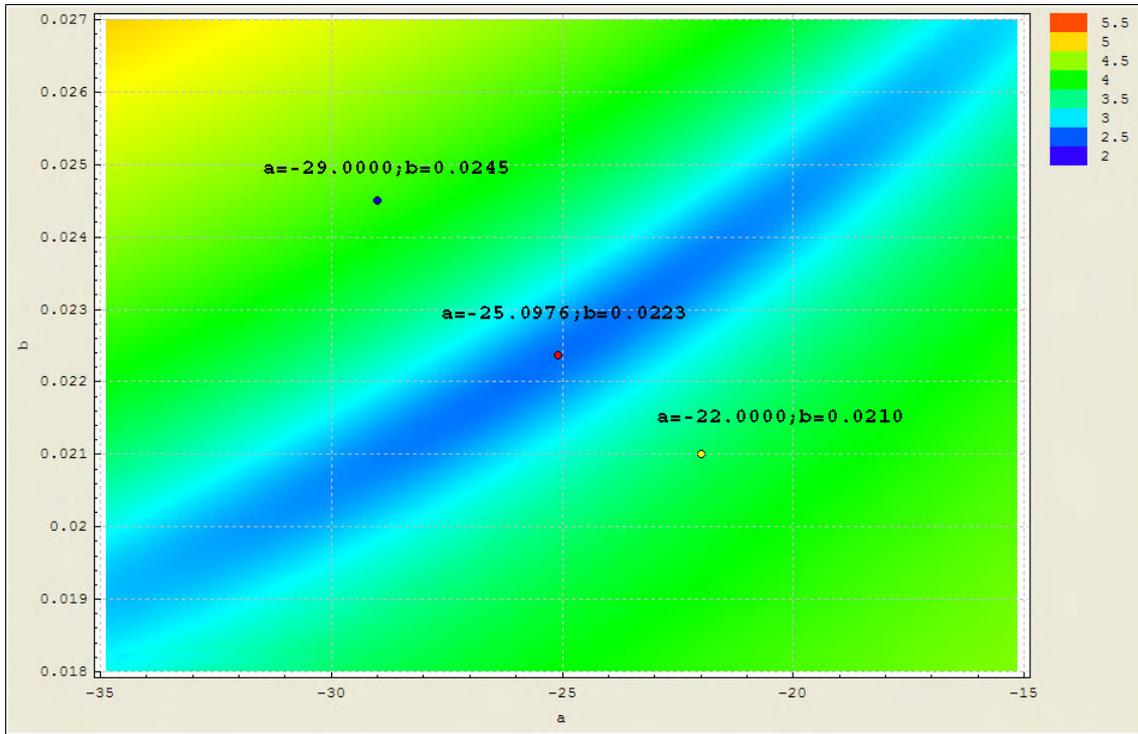


Abbildung 79: Nähere Umgebung des ermittelten lokalen Minimum von  $F(a,b)$

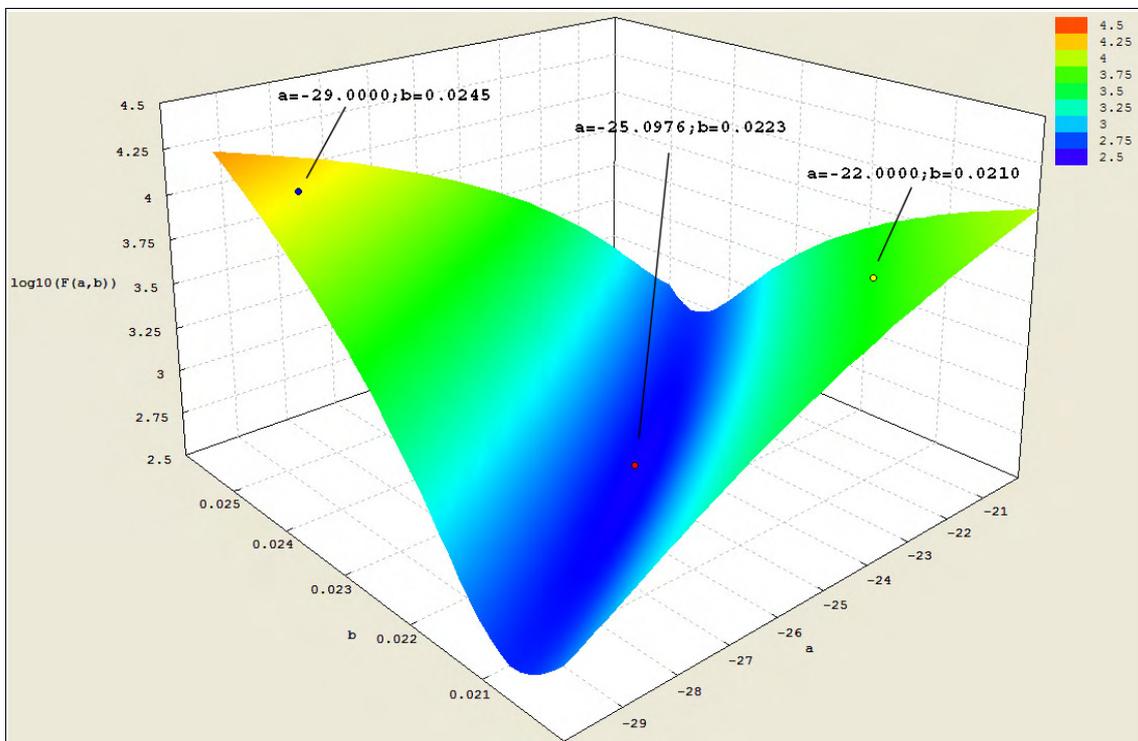


Abbildung 80: 3D-Darstellung der näheren Umgebung des ermittelten lokalen Minimum von  $F(a,b)$

Man erkennt deutlich, dass sich dieser im tiefsten Punkt der näheren Umgebung befindet. In Abbildung 81 ist die Kettenlinie mit diesen optimalen Parametern in rot dargestellt. Alle vorgegebenen Punkte werden durch die Kettenlinie mit diesem Parametersatz sehr gut angenähert, es ist also eine Kettenlinie gefunden worden, die den gesuchten Zahnbogen optimal beschreibt.

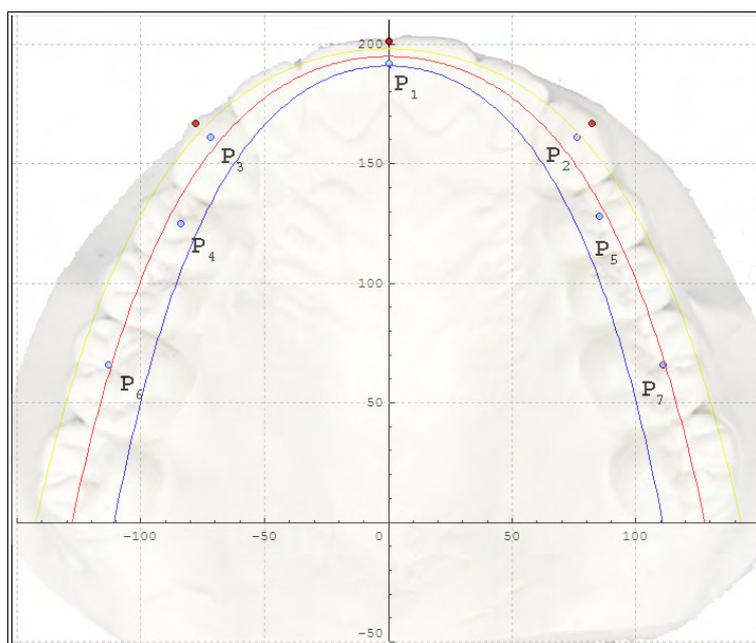


Abbildung 81: Annäherung an die vorgegebenen Punkte bei verschiedenen Parametersätzen

Zum Vergleich sind in blau ( $a = -29,0000$ ;  $b = 0,0245$ ) bzw. gelb ( $a = -22,0000$ ;  $b = 0,0210$ ) zwei Parametersätze dargestellt, die etwas Abseits vom ermittelten Minimum liegen. In Abbildung 79 und 80 sind diese Parametersätze mit einem blauen bzw. gelben Punkt markiert. Obwohl sich die Parameter immer noch sehr nahe am Minimum befinden, erkennt man in Abbildung 81, dass die Annäherung wesentlich schlechter ist. In der Praxis wären dies zwei weniger gute Näherungen für die Bogenform basierend auf den vorgegebenen Modellpunkten  $P_1$  bis  $P_7$ . Dies zeigt einerseits, wie empfindlich die Kettenlinie auf die Variation der Parameter reagiert und andererseits, wie effizient der LEVENBERG-MARQUARDT-Algorithmus im Allgemeinen in der Ermittlung der optimalen Parameter ist – offensichtlich hat der Algorithmus den optimalen Parametersatz, der die Kettenlinie mit der besten Passform repräsentiert gefunden: Schon kleinste Änderungen an den vom LEVENBERG-MARQUARDT-Algorithmus gefundenen Parametern verschlechtern die Passform der Kettenlinie optisch sichtbar deutlich.

### 3.5 Bogenformanpassung

Nachdem die initialen Zahnbogenformen in Form optimal ausgerichteter Okklusionslinien auf den Ober- und Unterkieferaufsaufnahmen festgelegt sind, kann der Behandler diese im nächsten Schritt entsprechend den therapeutischen Erfordernissen anpassen. Virtuelle Zahnbewegungen können zu diesem Zweck durch die Verschiebung der Sollpunkte (rote Kreise) auf den Modellfotos simuliert werden. Diese Simulation ermöglicht dem Behandler abzuschätzen, um welche Distanz ein ektopisch gelegener Zahn bewegt werden muss, damit er sich in den harmonischen Zahnbogen eingliedert und visualisiert gleichzeitig durch die dynamische optische Anpassung der Okklusionslinie die Auswirkungen der Zahnbewegung auf die Formen der Zahnbögen.

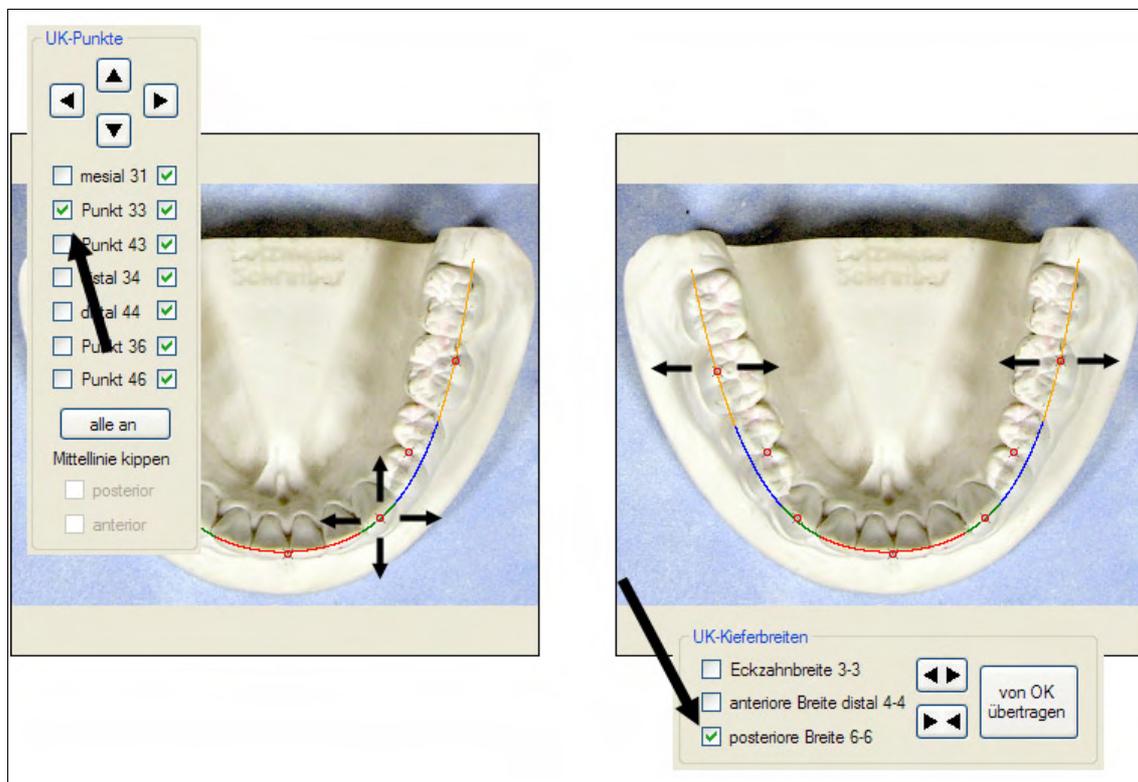


Abbildung 82: Virtuelle Zahnbewegungen durch Sollpunktverschiebungen

Der Behandler kann entweder nach Mausklick auf einen Sollpunkt diesen anschließend bei gedrückter Maustaste an die gewünschte neue Position ziehen, oder über die Check-boxen links bzw. rechts von den Modellbildern einzelne oder auch Gruppen von Punkten anwählen und anschließend über die Pfeiltastenschaltflächen verschieben (Abbildung 82 links). Desweiteren liegen unterhalb der Modellfotos Check-boxen und Schaltflächen, um

gezielt die transversalen Breiten von Ober- oder Unterkiefer zu vergrößern oder zu verkleinern (Abbildung 82 rechts). Außerdem steht über die Schaltfläche "von OK übertragen" bzw. "von UK übertragen" die Möglichkeit bereit die transversalen Breiten des jeweiligen Gegenkiefers in den aktuellen Kiefer zu übernehmen. Bei der Verschiebung der Punkte wird die Bogenform dynamisch neu berechnet und visualisiert. Der DAM stellt dem Behandler zur Bogenformanpassung vielseitige weitere Hilfestellungen bereit:

Über die Checkbox "Hilfslinien" werden die transversalen Breiten des Ober- und Unterkiefers visualisiert (Abbildung 83).

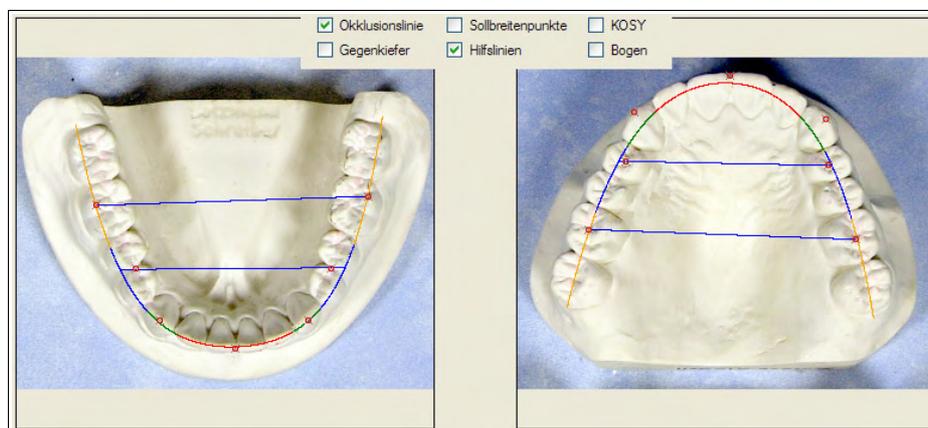


Abbildung 83: Modellfotos mit Okklusionslinie und Hilfslinien

Diese Ansicht kann dem Behandler zusätzliche Information über die Symmetrie und Breitenverhältnisse der Kiefer liefern. Bei gleichzeitig eingeblendetem Koordinatensystem sollten beide Transversalen idealerweise parallel zur x-Achse verlaufen (Abbildung 84).

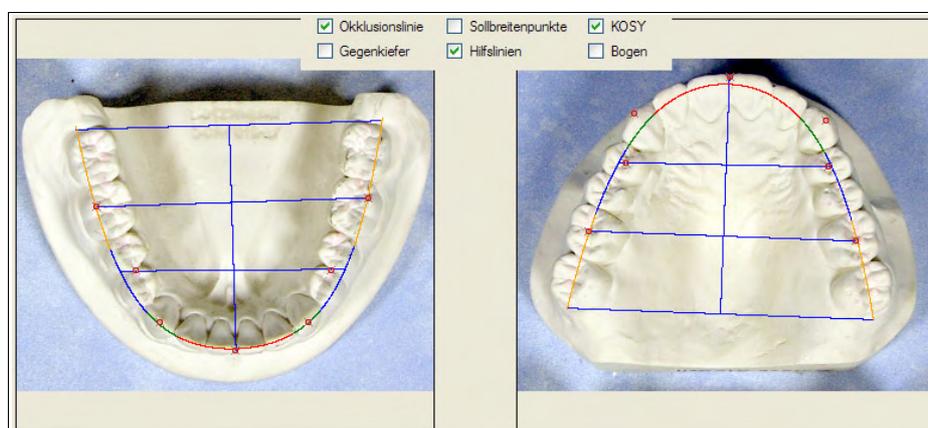


Abbildung 84: Modellfotos mit Okklusionslinie, Koordinatensystem und Hilfslinien

Als weitere Hilfe für den Behandler können auf Wunsch über die Checkbox "Sollbreiten" auch die aus den Breitensummen der Inzisivi abgeleiteten Sollbreiten (P<sub>ONT</sub> [132]) auf den Modellfotos visualisiert werden (Abbildung 85):

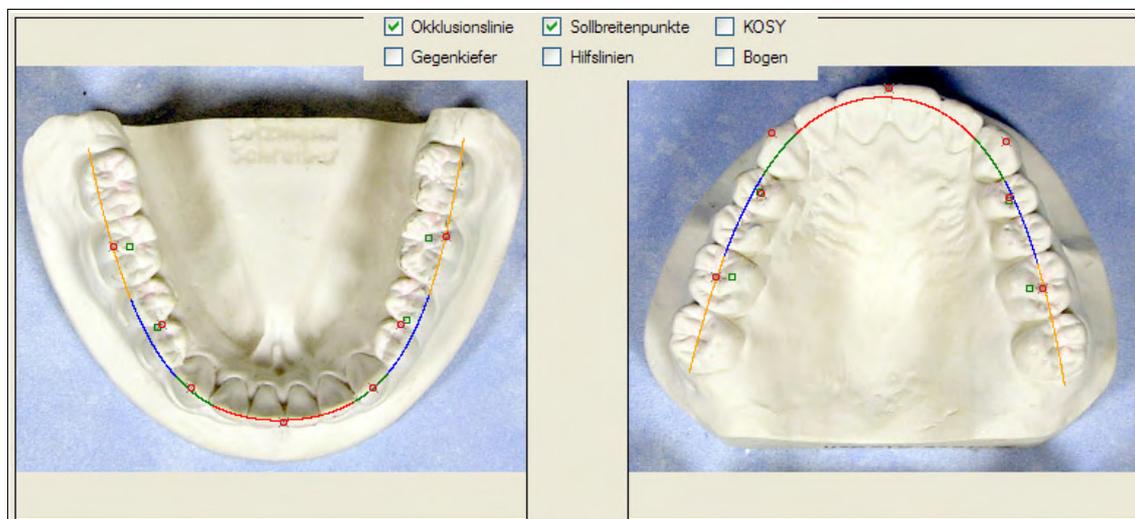


Abbildung 85: Modellfotos mit eingeblendeten Sollbreiten

Die sich aus den BSI ergebenden anterioren und posterioren Sollbreiten werden mittels grüner Quadrate auf den für die ermittelte Breite nötigen Zahnpositionen angezeigt. Der Behandler kann nun entscheiden, ob und wie weit sich diese Sollbreiten ggf. realisieren lassen bzw. für den individuellen Behandlungsfall tatsächliche Relevanz besitzen. Über die Schaltfläche "Sollbreiten setzen" können die Sollpunkte automatisch auf die entsprechenden Positionen gesetzt werden.

Wie oben erwähnt, können die Okklusionslinien von Ober- und Unterkiefer gegenseitig übereinander projiziert werden. Auf dem Gegenkiefer stellt sich die Okklusionslinie des Gegenkiefers jeweils in der Farbe "Grau" dar. BSI und Stützzonen sind in verschiedenen Grautönen visualisiert. Über die Checkbox "Gegenkiefer" können diese Überlagerungen ein- bzw. ausgeblendet werden (Abbildung 86).

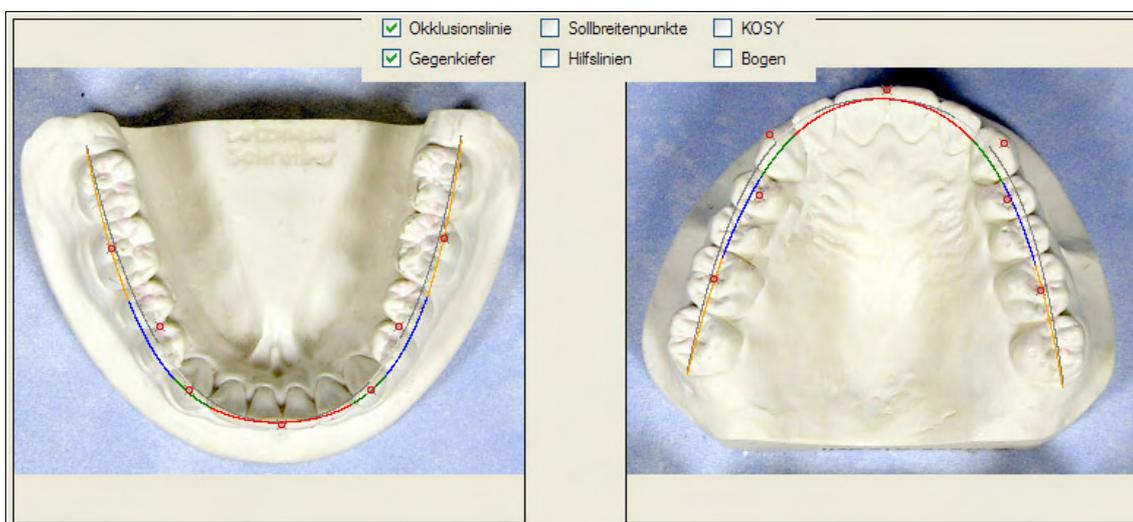


Abbildung 86: Modellfotos mit eingeblendeter Gegenkieferokklusionslinie

Die Überlagerung der Okklusionslinien erfolgt im Unterkiefer-Inzisalpunkt in Richtung der Symmetrielinien (Raphe-Median-Ebene) der Kiefer, d.h. eine initial evtl. bestehende Lageabweichung wird virtuell "korrigiert". Es wird z.B. die Dysgnathie bei einem Klasse II-Behandlungsfall mit einer negativen sagittalen Frontzahnstufe durch eine sagittale Annäherung der Kiefer (z.B. Vorverlagerung des Unterkiefers) bis auf eine ideale sagittale Frontzahnstufe automatisch virtuell angepasst, sodass die Zahnbogendimensionen in der Zielposition visualisiert und verglichen werden können.

Im Rahmen der Therapieplanung können die Zahnbögen jetzt mit dem Ziel einer idealen Okklusionsbeziehung einander angenähert werden, in dem virtuelle Zahnbewegungen durchgeführt werden.

Zusätzlich zu den beschriebenen optischen Hilfsmitteln bietet der DAM dem Behandler die Möglichkeit der Vermessung beliebiger geradliniger Strecken auf den Modellbildern sowie die Ermittlung von Bogenlängen beliebiger Abschnitte der Okklusionslinie in Millimeterangaben:

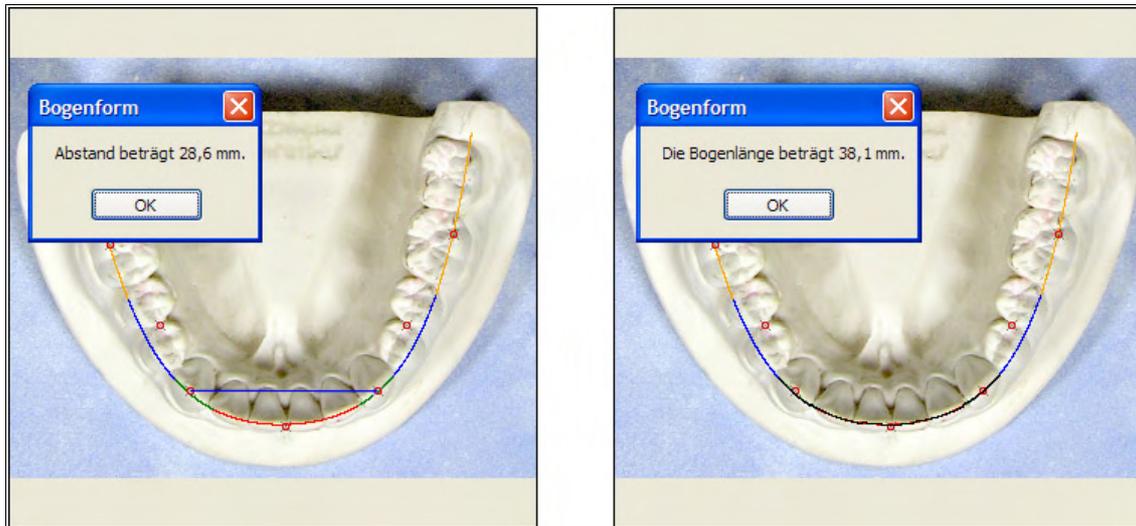


Abbildung 87: Messungen von Strecken und Bogenlängen

Über die Schaltfläche "Entfernung messen" kann der Behandler beliebige geradlinige Entfernungen in den Modellbildern messen. Nach dem Betätigen der Schaltfläche wird zunächst der Startpunkt und anschließend der Endpunkt der zu messenden Strecke auf einem der beiden Modellfotos angeklickt. Die gemessene Strecke wird von dem DAM auf dem Modellfoto blau dargestellt und die Länge der ausgemessenen Strecke in Millimeter ausgegeben (Abbildung 87 links).

Über die Schaltfläche "Bogenlänge messen" kann der Behandler die Länge beliebiger Bogenabschnitte auf der ermittelten Okklusionslinie messen. Wie bei der Entfernungsmessung muss auch hier nach dem Betätigen der Schaltfläche zunächst ein Startpunkt und anschließend der Endpunkt der zu messenden Strecke auf einem der beiden Zahnbögen angeklickt werden. Klickt der Benutzer auf eine Stelle abseits des Zahnbogens, so wird der Punkt zur Messung verwendet, der dem angeklickten parallel zur Symmetrielinie des jeweiligen Kiefers verschoben am nächsten liegt. Nachdem der Endpunkt festgelegt ist, wird der vermessene Bogenabschnitt schwarz markiert und die entsprechende Länge in Millimeter zurückgemeldet (Abbildung 87 rechts).

### 3.6 Bukkale Zielbogenbestimmung

Für die nachfolgende Auswahl des bukkal über Brackets zu fixierenden kieferorthopädischen Behandlungsbogens müssen die Okklusionslinien auf die bukkalen Zahnflächen interpoliert werden. Mit der Checkbox "Bogen" kann die Berechnung und Visualisierung

der bukkalen Zielbogenform eingeschaltet werden. Die bukkale Zielbogenform wird den Modellfotos in schwarz überlagert (Abbildung 88).

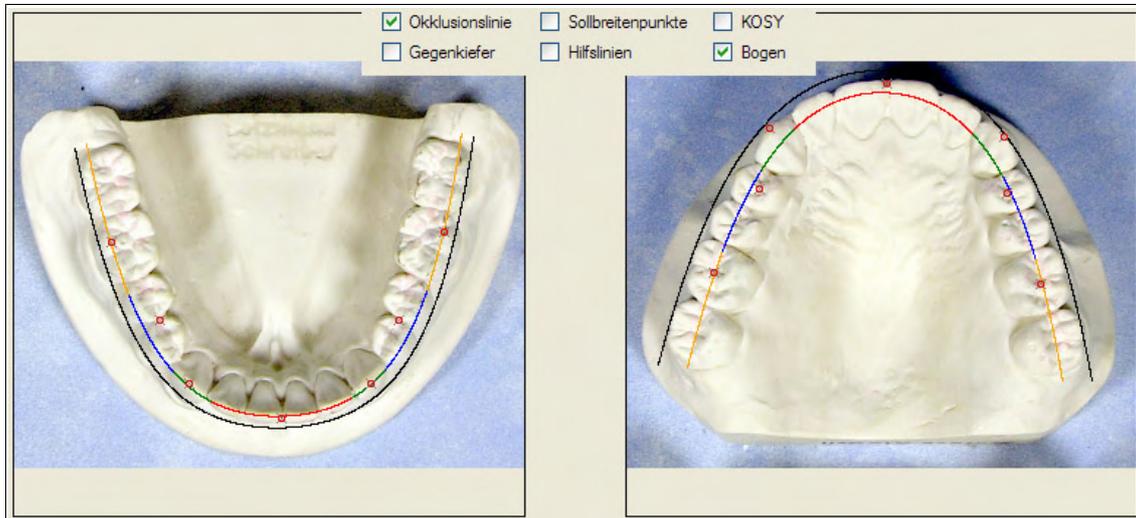


Abbildung 88: Modellfotos mit berechneter bukkaler Zielbogenform

Man erkennt die unterschiedlichen Aufweitungen für Ober- und Unterkiefer, sowie im vorderen und hinteren Bereich des Oberkiefers, die der unterschiedlichen anatomischen Lage der Referenzpunkte Rücksicht tragen. Sollte die vom DAM vorgeschlagene Aufweitung kein befriedigendes Ergebnis erbringen, kann die Aufweitung über entsprechende Schaltflächen unter dem Punkt Bogenparameter vom Behandler manuell vergrößert oder verkleinert werden (Abbildung 89).

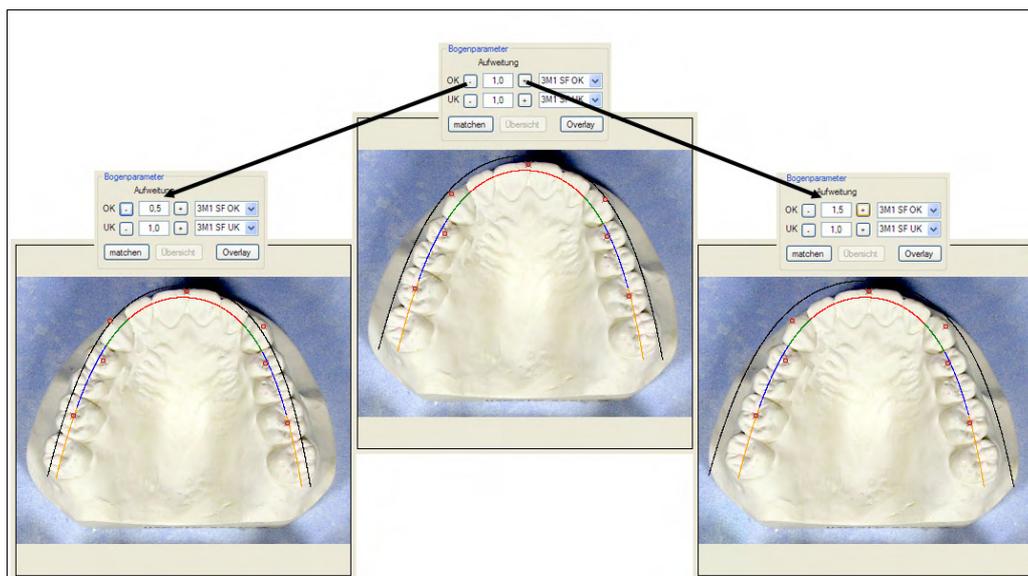


Abbildung 89: Manuelles Anpassen der bukkalen Zielbogenform

In Abbildung 89 (mittleres Foto) ist exemplarisch ein Oberkiefermodell mit eingeschaltetem bukkalem Zielbogen dargestellt. Im Unterkiefer wird die Okklusionslinie über den gesamten Bogen gleichmäßig aufgeweitet, da die Referenzpunkte auf den Inzisalkanten bzw. den bukkalen Höckergraden liegen. Im Oberkiefer findet im Molarenbereich eine größere Aufweitung statt, da die antagonistischen Punkte dort zentral liegen. Durch Betätigung der Schaltfläche "-" kann über das Einstellen des Aufweitungsfaktors der bukkale Zielbogen nun beliebig verschmälert (Abbildung 89 links) bzw. durch die Schaltfläche "+" verbreitert (Abbildung 89 rechts) werden. Die bukkale Zielbogenform wird (wie bei der Okklusionslinie) dynamisch aktualisiert, so dass der Behandler direkt ein visuelles Feedback erhält um die Aufweitung gezielt auf das gewünschte Maß einzustellen.

#### **Details zur technischen Implementierung:**

Nach der Bestimmung der Okklusionslinie muss die so gefundene Bogenform in einem weiteren Schritt transversal und sagittal aufgeweitet werden, damit sie mit der eigentlich gesuchten bukkalen Zielbogenform - als Template für die Auswahl des kieferorthopädischen Behandlungsbogens - übereinstimmt. Dabei muss die Breite der Zähne, die Position der Zahnpunkte auf dem Zahn und die Dicke der Bracketbasen berücksichtigt werden, daher unterscheidet sich die Aufweitung (speziell im Oberkiefer) auch noch an verschiedenen Stellen des Zahnbogens. Aus diesem Grund definieren wir verschiedene Bogenaufweitungen  $d_i$  für die verschiedenen Zahnpositionen. Um Richtwerte für den Betrag der Aufweitungen  $d_i$  zu ermitteln, wurde eine eigene Untersuchung an einigen Patientenmodellen durchgeführt (s.u.). Die zusätzliche Aufweitung aufgrund der Dicke der Bracketbasen beträgt 0,3 bis 1,2 mm [152] und kann durch eine in der Kontur nicht exakt mit der Bracketbasis übereinstimmende bukkale Zahnfläche und dem sich daraus ergebenden Spalt (der beim Bonding mit Kleber ausgefüllt wird) noch weiter vergrößert werden. Daher verwenden wir als Vorschlag für die zusätzliche Aufweitung durch die Bracketbasen einen mittleren Wert von 0,6 mm.

Wie schon erwähnt muss im Oberkiefer durch die Lage der anatomischen Zahnpunkte die Okklusionslinie um die bukkale Zielbogenform zu erhalten im Bereich der Molaren stärker aufgeweitet werden als im Bereich der Inzisivi, daher variieren hier auch die  $d_i$  für

die verschiedenen Zahnpositionen. Im Unterkiefer ist die Aufweitung über den gesamten Zahnbogen konstant. Die im DAM verwendeten Vorschlagsaufweitungen (inkl. der Dicke der Bracketbasen) sind in Tabelle 11 aufgeführt.

Aufweitung des bukkalen Zahnbogens gegenüber der Okklusionslinie		
Position	Aufweitung in mm	
	Unterkiefer	Oberkiefer
Inzispunkt	1,9	1,6
Eckzahn-Punkte	1,9	1,6
Prämolaren-Punkte	4,7	4,3
Molaren-Punkte	1,9	4,3

Tabelle 11: Aufweitung des Zahnbogens an den verschiedenen Zahnpunkten

Zur Feineinstellung der therapeutischen Zielbogenform werden alle  $d_i$  mit dem vom Behandler - für Ober- und Unterkiefer unabhängig – eingestellten Faktor (mit der Voreinstellung 1,0) vor der Berechnung des bukkalen Zahnbogens multipliziert. Auf diese Weise kann das Maß der Aufweitung des Zielbogen beliebig angepasst werden.

Eine schematische Darstellung zur Berechnung der die bukkale Zielbogenform definierenden Punkte wird in Abbildung 90 gezeigt.

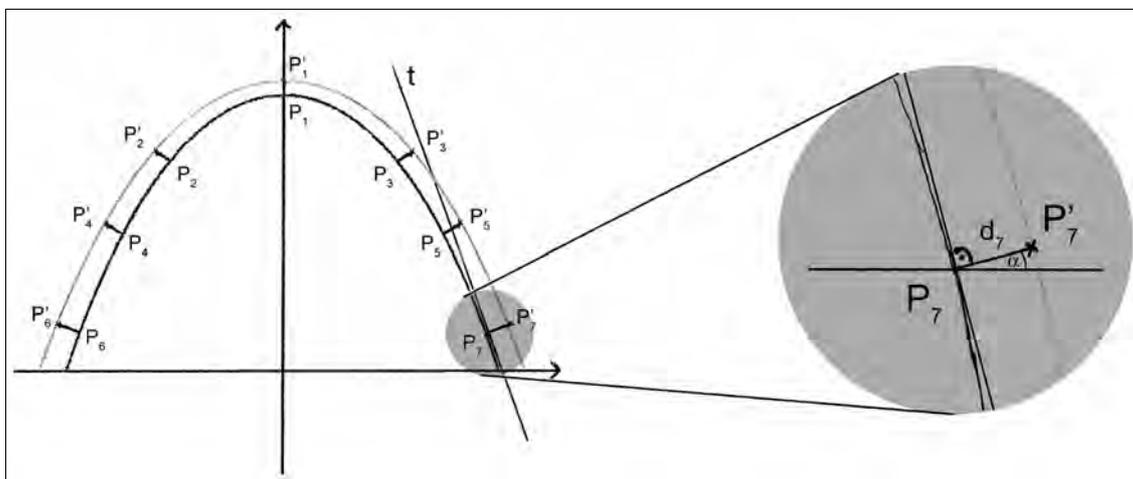


Abbildung 90: Aufweitung der Bogenform

In der Abbildung sind die die Okklusionslinie definierenden Punkte  $P_i$ , sowie die die aufgeweitete bukkale Zielbogenform definierenden  $P'_i$  und ihre geometrische Beziehung dargestellt. Die Okklusionslinie ist in schwarz, die bukkale Zielbogenform in grau eingezeichnet. Die Detailansicht für das Punktepaar  $P_7/P'_7$  zeigt exemplarisch alle zur Be-

rechnung verwendeten Größen. Der DAM ermittelt den aufgeweiteten Bogen, indem aus jedem vom Behandler zur Berechnung der Okklusionslinie aktivierten Punkt  $P_i$  die Koordinaten eines im rechten Winkel zur Okklusionslinie um die Strecke  $d_i$  nach außen verschobenen Punktes  $P'_i$  bestimmt werden.

Folgende Schritte werden nacheinander durchgeführt um die Koordinaten der  $P'_i$  zu berechnen:

1. Zunächst wird das Lot auf die Tangente  $t$  durch den Punkt  $P_i$  bestimmt. Der Winkel  $\alpha$  berechnet sich aus dem Arkustangens der negativen reziproken Steigung in  $x_i$ , gegeben durch:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{-1}{a \cdot b \cdot \sinh(b \cdot x_i)}\right)$$

Formel 45: Steigungswinkel des Lots auf die Tangente  $t$

2. Aus dem Winkel  $\alpha$  und der für den jeweiligen Punkt  $P_i$  individuell vorgegebenen Aufweitung  $d_i$  kann über trigonometrische Beziehungen die Lage des Punktes  $P'_i$  berechnet werden:

$$P'_i = (x_i + d_i \cdot \cos(\alpha); y_i + d_i \cdot \sin(\alpha))$$

Formel 46: Koordinaten der  $P'_i$

3. Die Schritte 1 und 2 werden für jeden Punkt  $P_i$ , der für die Berechnung der Okklusionslinie aktiviert wurde, wiederholt.

Die bukkale Zielbogenform wird durch Formel 47 völlig analog zur Okklusionslinie beschrieben:

$$y = a' \cdot \cosh(b' \cdot x) - c'$$

Formel 47: Allgemeine Form der Kettenlinie zur Beschreibung der bukkalen Zielbogenform

Die Parameter  $a'$ ,  $b'$  und  $c'$  der die bukkale Zielbogenform beschreibenden Kettenlinie werden aus den oben bestimmten Punkten  $P'_i$  mittels des LEVENBERG-MARQUARDT-Algorithmus bestimmt.

**Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Zahnbreite und BSI:**

Um einen Richtwert (in mm) für die nötige Aufweitung der Okklusionslinie zum bukkalen Zahnbogen zu erhalten wurde die Relation zwischen der BSI und der Breite der 6-Jahr-Molaren an 50 Patienten untersucht, weiter wurde der Abstand zwischen bukkaler Fläche und zentraler Fissur der 6-Jahr-Molaren im Oberkiefer bzw. der Abstand zwischen den bukkalen Höckerspitzen und der bukkalen Fläche der 6-Jahr-Molaren im Unterkiefer bestimmt. Die Modellmessungen sind im Anhang beigefügt, die Ergebnisse sind in Abbildung 93 bis 94 dargestellt. Die folgende Tabelle 12 gibt eine Übersicht über die gefundenen Ausgleichsgeraden.

<b>Gefundene Beziehungen zwischen Zahnbreiten und BSI</b>		
<b>Beziehung</b>	<b>Ausgleichsgerade</b>	<b>R<sup>2</sup></b>
<b>6'er-Breite gegen BSI (Oberkiefer)</b>	$y = 0,1360 x + 5,1692$	0,2037
<b>6'er-Breite gegen BSI (Unterkiefer)</b>	$y = 0,1974 x + 4,9292$	0,3241
<b>6'er-Fissur gegen BSI (Oberkiefer)</b>	$y = 0,0323 x + 2,7159$	0,0266
<b>6'er-Höckerspitzen gegen BSI (Unterkiefer)</b>	$y = 0,0291 x + 0,6869$	0,0454

Tabelle 12: Übersicht über die verschiedenen Ausgleichsgeraden zur Bogenaufweitung

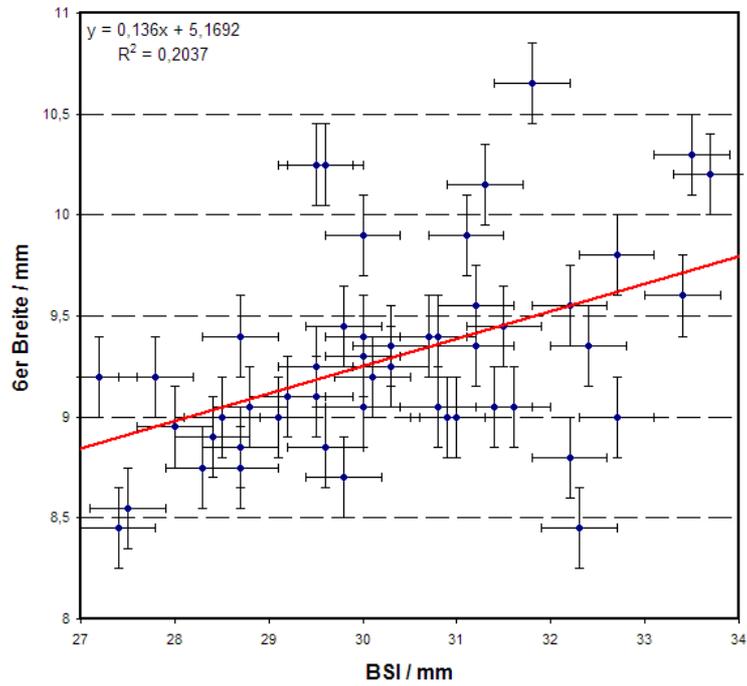


Abbildung 91: Streudiagramm 6'er Breite gegen BSI für den Oberkiefer

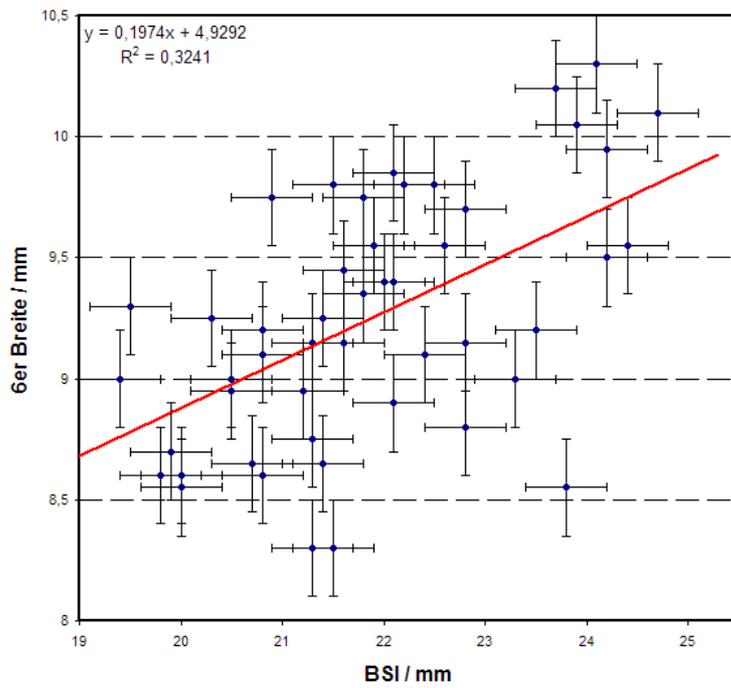


Abbildung 92: Streudiagramm 6'er Breite gegen BSI für den Unterkiefer

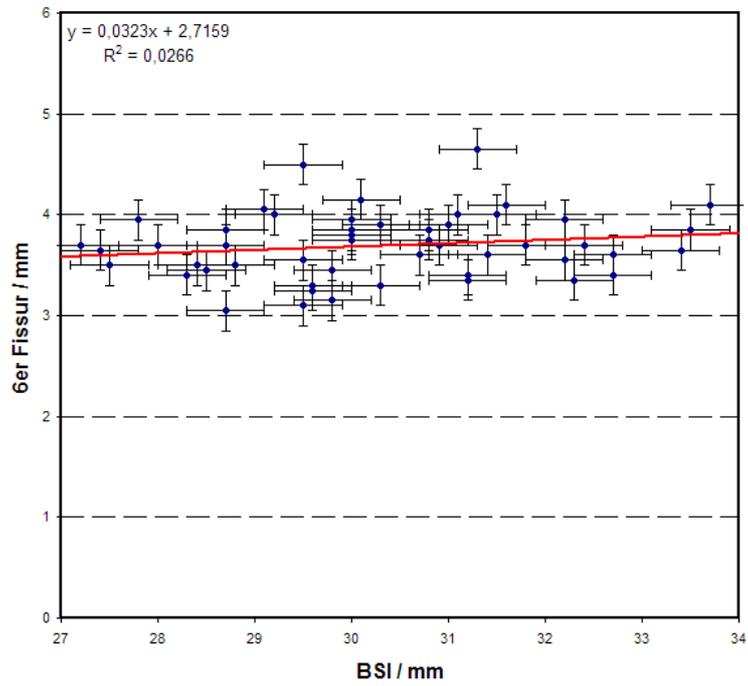


Abbildung 93: Streudiagramm 6'er Fissur gegen BSI für den Oberkiefer

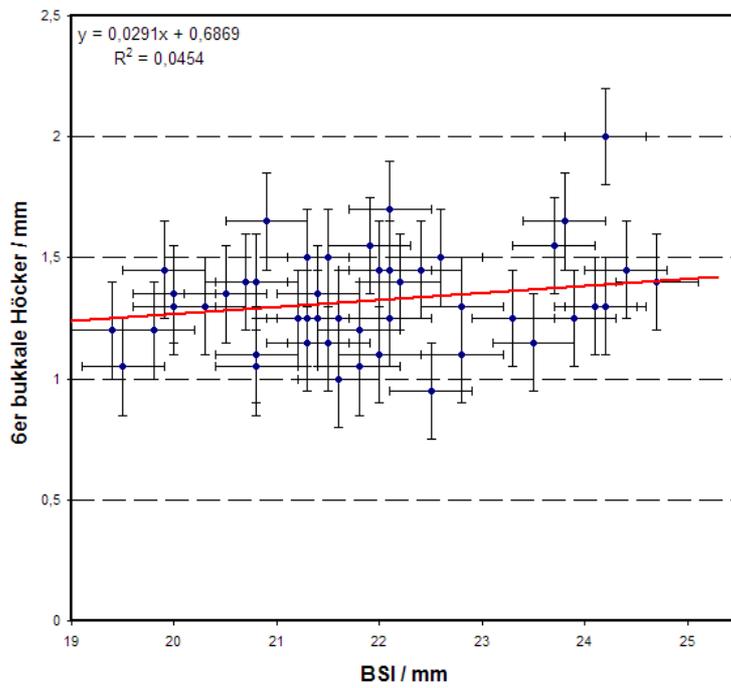


Abbildung 94: Streudiagramm 6'er Fissur gegen BSI für den Unterkiefer

In den Abbildungen 91 und 92 ist wie erwartet eine Korrelation zwischen der BSI und der Breite des 6-Jahr-Molaren zu erkennen, diese ist jedoch weder für Ober- noch für Unterkiefer signifikant. Die für die Bogenaufweitung direkt relevanten Längen von der zentralen Fissur des 6'er zur bukkalen Fläche im Oberkiefer (Abbildung 93) bzw. von den bukkalen Höckerspitzen des 6'ers zur bukkalen Fläche (Abbildung 94) bleiben bei wachsender BSI nahezu konstant. Da vor allem diese Werte für die Aufweitung der Okklusionslinie zum bukkalen Zahnbogen relevant sind, kann aus den erhobenen Daten abgeleitet werden, dass diese Aufweitung in erster Näherung als konstant und unabhängig von der BSI angenommen werden kann. Aus den Daten ergibt sich eine durchschnittliche Aufweitung um 3,7 mm im Ober- bzw. 1,3 mm im Unterkiefer, diese werden vom DAM als Vorschlagsaufweitung zunächst angewendet, der Behandler kann dann die Aufweitung zum bukkalen Zahnbogen bei Bedarf über einen Faktor manuell unter visueller Kontrolle feineinstellen oder die benötigten Aufweitung im DAM selbst manuell ausmessen und die Aufweitung entsprechend anpassen.

### **3.7 Auswahl des kieferorthopädischen Behandlungsbogens**

Mit der in Kapitel 3.6 beschriebenen Bestimmung der "bukkalen Zielbogenform" wurden die Idealbogenformen der kieferorthopädischen Behandlungsbögen über den Ober- und den Unterkieferzahnbogen ermittelt. Da moderne Bogenmaterialien wie z.B. superelastische NiTi-Legierungen eine vom Behandler nicht (bzw. nur mit nicht immer verfügbaren Spezialgeräten) modifizierbare Formgebung besitzen [174], muss der Behandler aus seinem individuellen Materiallager dasjenige konfektionierte Bogenmaterial auswählen, welches der berechneten Zielbogenform am besten entspricht. Für diesen Vorgang bietet der "Dental Archform Manager" ebenfalls eine automatisierte Funktion, indem das Programm die individuell ermittelte Zielbogenform mit allen in der Bogendatenbank des Programm registrierten, konfektionierten kieferorthopädischen Bögen vergleicht und den geeignetesten Bogen vorschlägt.

Über die Schaltfläche "matchen" kann die automatische Bogenauswahl angestoßen werden. Der DAM bestimmt nach dem weiter unten beschriebenen Verfahren die für den jeweiligen Patienten idealen konfektionierten Behandlungsbögen für Ober- und Unterkiefer, gibt diese über die Statusleiste aus und zeigt die jeweils ausgewählten Bögen an.

Über die Schaltfläche "Overlay" können die ausgewählten Bögen in die Modellfotos projiziert werden (Abbildung 95).

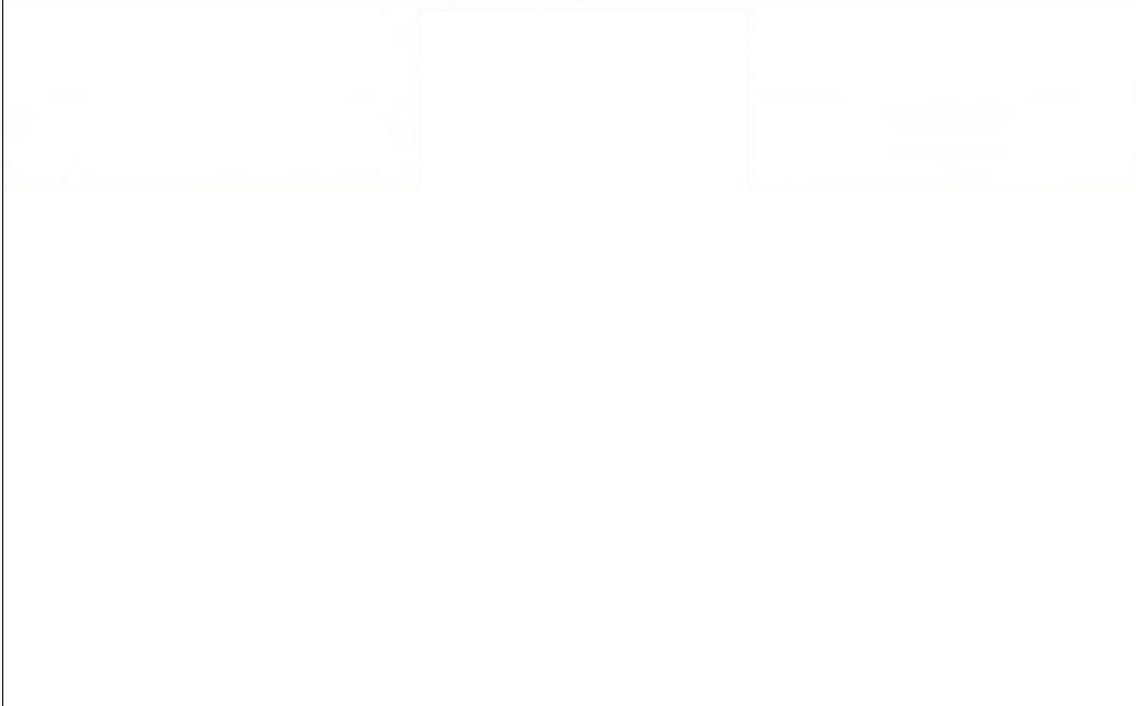


Abbildung 95: Modellfotos mit idealen Behandlungsbögen

Mittels der Overlay-Bilder kann sich der Behandler schnell einen visuellen Überblick über die Passform der verschiedenen in Frage kommenden konfektionierten Bögen verschaffen. In der Abbildung 95 wurde als Beispiel das vom DAM als beste Passform ermittelte Bogenpaar visualisiert ("68 mm BRADER-Arch" für den Oberkiefer, "ADVANCED ORTHODONTICS Ideal OK" für den Unterkiefer). Man erkennt deutlich, dass das vom DAM ermittelte Bogenpaar der berechneten bukkalen Zielbogenform fast perfekt folgt und nur eine sehr kleine Fehlfläche zwischen den beiden Bögen verbleibt. In Abbildung 96 wurden per Overlay beispielhaft zwei weniger gut passende konfektionierte Bögen aus der DAM-Bogendatenbank eingeblendet ("DAMON SL Universal Arch").

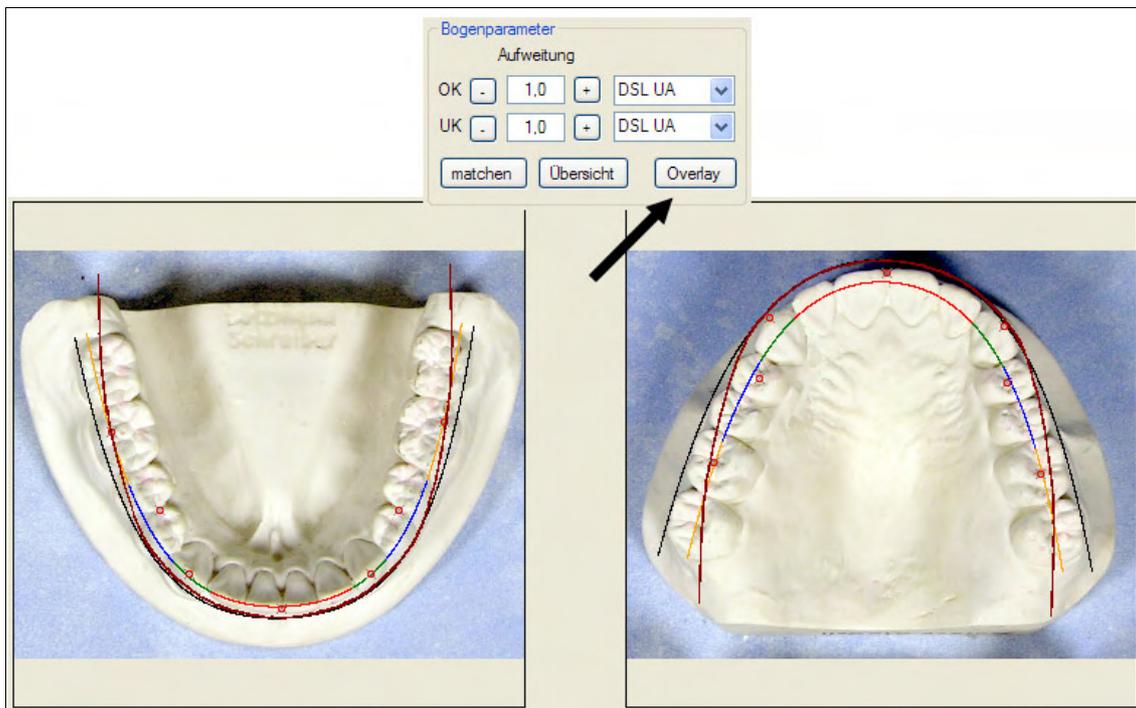


Abbildung 96: Modellfotos mit nicht idealen Behandlungsbögen

Man erkennt deutlich, dass der konfektionierte Behandlungsbogen die bukkale Zielbogenform zwar im Frontzahnbereich sehr gut annähert, ab den Prämolaren allerdings sowohl im Unter- als auch im Oberkiefer zunehmend abweicht und distal in der transversalen Dimension zu schmal ist.

Um diese Abweichung zu quantifizieren und für den Behandler transparent zu machen, kann über die Schaltfläche "Übersicht" nach erfolgtem "Matchen" eine Übersicht aller im DAM registrierten Bogenformen aufgerufen werden (Abbildung 97).

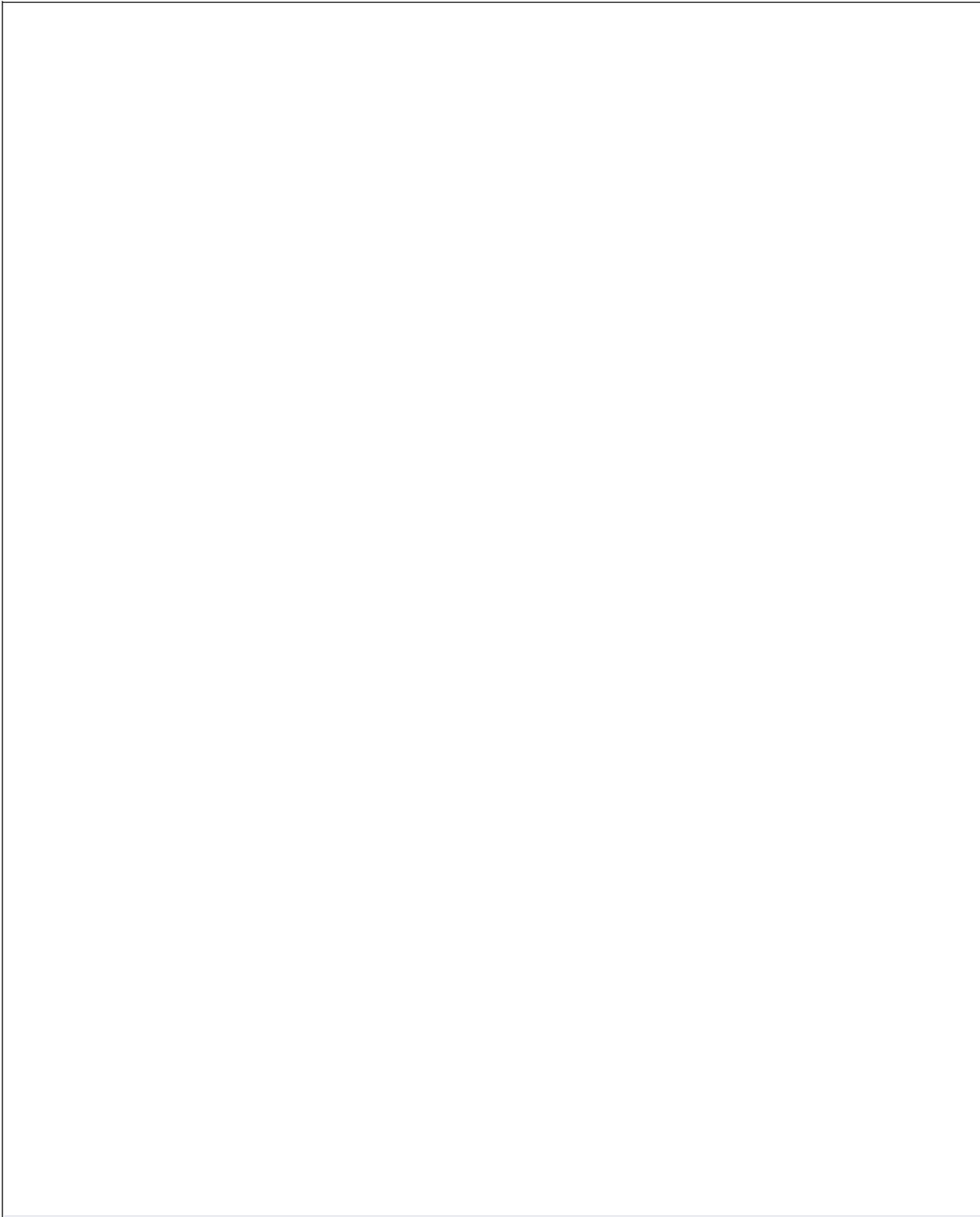


Abbildung 97: Übersichtsanzeige der Bogenformen

Die Übersicht führt, nach akademischen und konfektionierten Bogentemplateklassen gruppiert und jeweils für Ober- und Unterkiefer des Patienten, alle Bogentemplates der im DAM integrierten Bogenformdatenbank nach zunehmender Fehlfläche ansteigend auf. Hinter der Fehlfläche für jedes Bogentemplate wird mit einem Symbol signalisiert, ob das

jeweilige Bogentemplate im posterioren Bereich weiter (+) oder enger (-) als der berechnete Idealbogen verläuft. Mit einem Mausklick auf eine konfektionierte Bogentemplateklasse kann der Behandler die Datenbank mit den unterschiedlichen zu diesem Bogentemplate verfügbaren konfektionierten Behandlungsbögen (verschiedene Materialien, Querschnitte usw.) aufrufen (Abbildung 98).



Abbildung 98: Behandlungsbögen-Übersicht einer Bogentemplateklasse

Über die Bedienelemente am oberen Rand der Übersicht kann der Behandler gezielt nach konfektionierten Bögen einer bestimmten Dimension oder eines bestimmten Materials filtern. Die der Auswahl entsprechende konfektionierten Behandlungsbögen (in der Einzelbogenübersicht) oder Bogentemplateklassen, die passende konfektionierte Behandlungsbögen enthalten (in der Übersicht) werden in roter Schrift angezeigt.

Falls der Behandler keine konfektionierten Bögen verwenden möchte, sondern stattdessen die individuellen bukkalen Zielbogenformen, z.B. für Behandlungsbögen aus plastisch verformbaren Stahl-Legierungen, direkt verwenden möchte, können diese über die Schaltfläche "Drucken" ausgedruckt werden, um als Bogenformschablone zu dienen. Der Auf-

bau des Schablonenblattes in der Druckvorschau ist in Abbildung 99 dargestellt:

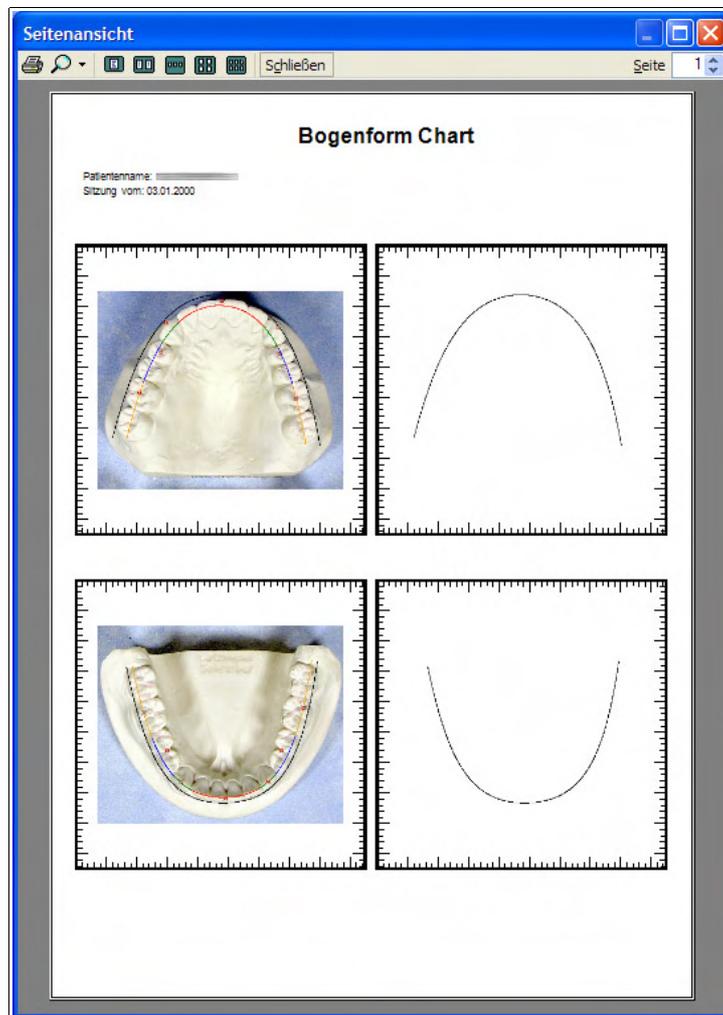


Abbildung 99: Druckvorschau der Bogenschablone

Zur besseren Übersicht sind auf der linken Seite die Modellansicht mit allen zum Zeitpunkt des Druckens aktiven Visualisierungen eingezeichnet und auf der rechten Seite ausschließlich die ermittelte bukkale Zielbogenform, die als Biegeschablone genutzt werden kann. Alle Darstellungen sind von einem in Millimeterabständen skalierten Rahmen umgeben.

#### **Details zur technischen Implementierung:**

Die Ermittlung der kieferorthopädisch-therapeutischen Zielbogenform dient der Auswahl von möglichst gut an die individuelle Bogenform angepassten konfektionierten Bögen für die Multibrackettherapie. Um die berechnete bukkale Zielbogenform mit vorgegebenen

konfektionierten Bögen vergleichen zu können, müssen diese im DAM registriert werden. Das Programmmodul "Bogenformanalysator" (Abbildung 100) des DAM liest zu diesem Zweck beliebige Bildformate (wie z.B. Bitmaps, JPEG-, GIF- oder TIFF-Dateien) ein, analysiert diese dann Zeile für Zeile und erstellt eine Datendatei mit den Pixel-Koordinaten des konfektionierten kieferorthopädischen Bogens.

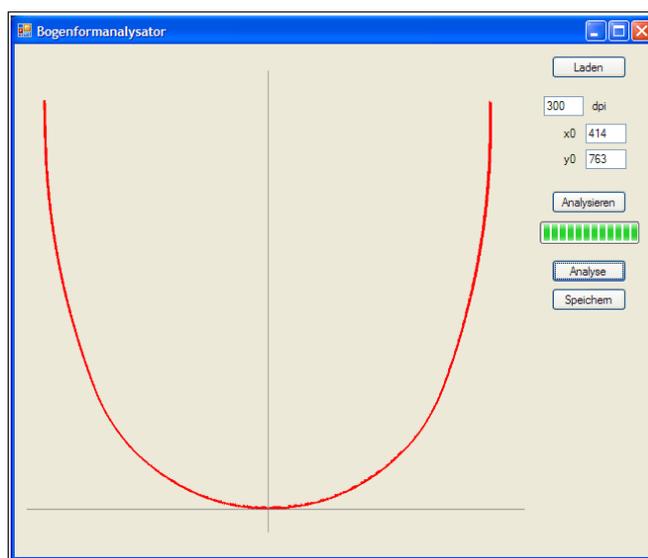


Abbildung 100: Bogenformanalysator des DAM

Die Auflösung der Bilddateien kann dem Programm mitgeteilt werden, die Auflösung der erzeugten Datendatei beträgt 0,1 mm. Damit diese Genauigkeit erreicht werden kann, sollten die Quellbilder eine Auflösung von mindestens 300 dpi aufweisen. Die erzeugten Datendateien werden anschließend in das entsprechende Datenverzeichnis des DAM abgelegt und in der Bogenformdatenbank registriert. Danach stehen sie für den automatischen Abgleich mit dem berechneten bukkalen Zielbogen des DAM zur Verfügung.

Neben den im Kapitel 2.3.2.1 "Akademische Bogensysteme" vorgestellten akademischen Bogenformen wurden - um die Funktion der in den DAM integrierten Bogendatenbank zu demonstrieren - eine große Anzahl der in der Poliklinik für Kieferorthopädie des Universitätsklinikums Münster vorhandenen konfektionierten Behandlungsbögen gescannt und wie beschrieben durch den Bogenformanalysator für den DAM aufbereitet. Insgesamt wurden 78 einzelne Behandlungsbögen unterschiedlicher Hersteller, Querschnitte und Materialien gescannt. Da die Hersteller gewöhnlich gleiche Bogenformen in verschiedenen Querschnitten und Materialien anbieten, kristallisierten sich bei der

anschließenden Analyse 27 distinkte Bogentemplates (zur Definition "Bogentemplate" vgl. Tabelle 7, Seite 70) heraus, die dann in den DAM zusätzlich zu den akademischen Bogentemplates für den Bogenformabgleich integriert wurden. Im Anhang findet sich eine Übersicht über alle 78 eingescannten Bögen, sowie eine Abbildung aller 27 gefundenen Bogentemplates im Maßstab 1:1.

Beim Abgleich des berechneten bukkalen Zielbogens mit den vorgegebenen konfektionierten Behandlungsbögen und akademischen Bogenformen werden zunächst alle im entsprechenden Datenverzeichnis abgelegten Bogendateien vom DAM eingelesen. Als Maß für die Passform der konfektionierten Bögen im Hinblick auf den errechneten Bogen wurde die Fläche zwischen beiden Bögen gewählt (Abbildung 101).

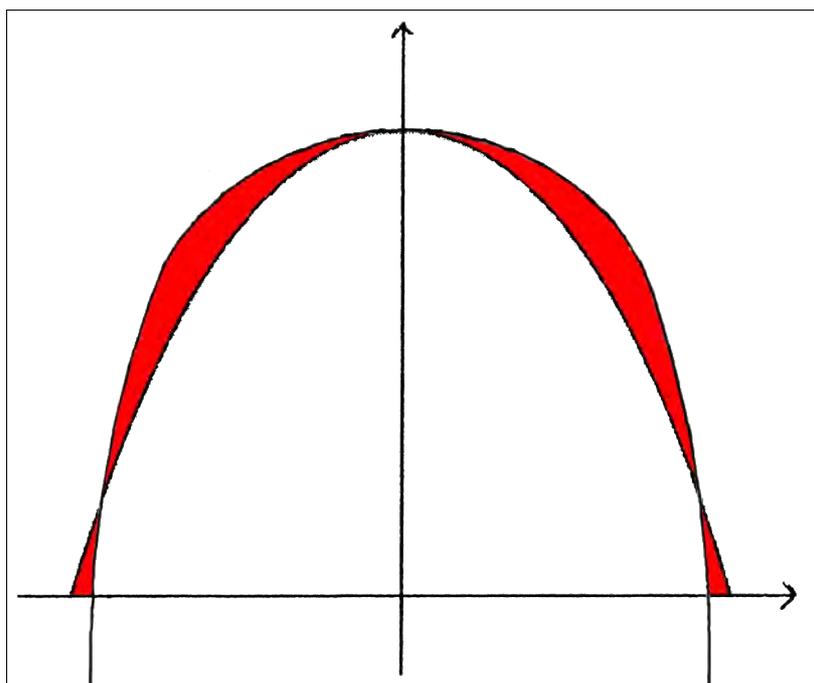


Abbildung 101: "Fehlfläche" (rot) zwischen berechneten und konfektionierten Bogen

Idealerweise sollte diese Null betragen, beide Bögen würden sich in diesem Falle perfekt überlagern. In der Realität wird derjenige konfektionierte Bogen ausgewählt, der die geringste "Fehlfläche" aufweist. Bei der Ermittlung der Fläche geht der DAM wie folgt vor:

1. Die Pixelkoordinaten des zu prüfenden konfektionierten Bogens werden eingelesen und entlang der x-Achse jeweils die kleinste sowie die größte zum Bogen gehörende y-Koordinate  $y_{\min}$  bzw.  $y_{\max}$  in ein Array geschrieben.

2. Im gleichen Maßstab wird entlang der x-Achse die jeweilige y-Koordinate  $y_b$  des berechneten Zahnbogens ermittelt. Liegt  $y_b$  für die aktuelle Stelle  $x$  zwischen  $y_{\min}$  und  $y_{\max}$  fallen an dieser Stelle berechneter und konfektionierte Bogen zusammen, die Fehlfläche vergrößert sich nicht. Ist  $y_b$  kleiner als  $y_{\min}$  bzw. größer als  $y_{\max}$  wird die Differenz  $y_{\min} - y_b$  bzw.  $y_b - y_{\max}$  auf die Fehlfläche aufaddiert.
3. Falls der berechnete Bogen (wie in Abbildung 101) links und rechts über den konfektionierten Bogen hinausragt, wird zusätzlich die Fläche zwischen dem über den konfektionierten Bogen hinausragenden Bogenstück und der x-Achse auf die Fehlfläche aufaddiert.
4. Um eine Vergleichbarkeit zwischen verschiedenen Modellaufnahmen und Bildauflösungen zu gewährleisten wird die Fehlfläche anschließend auf Quadratmillimeter umgerechnet.

Im wesentlichen führt der DAM eine numerische Integration der Fläche zwischen berechneten und konfektionierte Bogen aus, indem er die Fläche zwischen den beiden Bögen zunächst mit Kacheln der Größe eines Pixels ausfüllt und die erhaltene Fläche anschließend in die Einheit  $\text{mm}^2$  umrechnet. Die linke und rechte Grenze auf der x-Achse ergeben sich durch die Schnittpunkte des berechneten individuellen bukkalen Zielbogens mit der x-Achse des Koordinatensystems. Dadurch kann der Behandler durch anpassen des Koordinatensystems gezielt vorgeben, bis zu welcher Position des Zahnbogens "gematcht" werden soll. Im Gegensatz zu einer rein mathematischen Integration kann dieses Verfahren unabhängig von einer mathematischen Beschreibung des konfektionierten Bogens (die außer im Falle der BRADER-Bogenform gar nicht verfügbar wäre) angewandt werden. Die oben beschriebenen Schritte werden nacheinander für jeden vorgegebenen konfektionierten Bogen ausgeführt. Der Bogen mit der geringsten Fehlfläche wird vom DAM als passendster Bogen ausgegeben, weiter kann eine Übersicht über alle "gematchten" Bögen ausgegeben werden, um verschiedene Bögen zu vergleichen oder Alternativen zu ermitteln.

#### 4. Exemplarischer Behandlungsfall

Im Folgenden werden die Funktionen des in dieser Arbeit entwickelten Dental Arch-Form Managers (DAM) für einen realen kieferorthopädischen Behandlungsfall sukzessive beschrieben, um die Leistungsfähigkeit des DAM auch klinisch zu demonstrieren. Patient Michael F. (Abbildung 102-107) steht im Alter von 15 Jahren kurz vor einer festsitzenden kieferorthopädischen Behandlung mit einer Multibracket-Apparatur.



Abbildung 102: Patient M.F. - En Face



Abbildung 103: Patient M.F. - OK

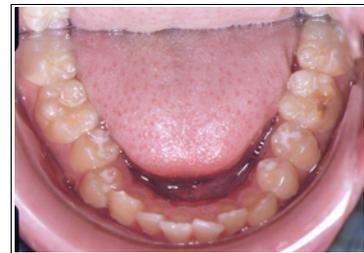


Abbildung 104: Patient M.F. - UK

Im Rahmen der kieferorthopädischen Behandlungsplanung werden neben den hier gezeigten Fotografien und Anfangsmodellen natürlich zahlreiche weitere Befunde erhoben, Unterlagen angefertigt und ausgewertet, die aufgrund der gegebenen Zielsetzung in diesem Beispiel nicht Gegenstand detaillierterer Auseinandersetzungen sind.

Bei Patient M.F. liegen als "Chief Complaints" folgende pathologischen Befunde vor:

- Angle Klasse II (beidseitig)
- vergrößerte sagittale Frontzahnstufe (ca. -6 mm)
- diverse Einzelzahnstellungsanomalien (z.B. Rotationen und Kippungen)
- seitlich temporär offener Biss (aufgrund einer vorhergehenden Behandlung mit herausnehmbaren funktionskieferorthopädischen Geräten)
- dentale Mittenabweichung
- transversale Unterentwicklung des Oberkieferzahnbogens
- Engstand im Unterkieferfrontzahnbereich

Als Grundlage für die - bei jeder Behandlungsaufnahme standardmäßig durchgeführte - Modellanalyse, sowie die nachfolgende Vermessung der Zahnbogenform mit dem DAM, wurden Abformungen der Kiefer angefertigt und Gipsmodelle hergestellt (Abbildungen 105-107).



Abbildung 105: Patient M.F. - Modell frontal

In der frontalen Ansicht können u.a. Mittenabweichungen, Achsenstellungen der Zähne, sowie das Ausmaß des vertikalen Überbisses beurteilt werden.

Die Ansichten "Okklusion rechts/links" (Abbildungen 106 und 107) geben Aufschluß über die antagonistischen Relation der OK- und UK-Zähne zueinander.

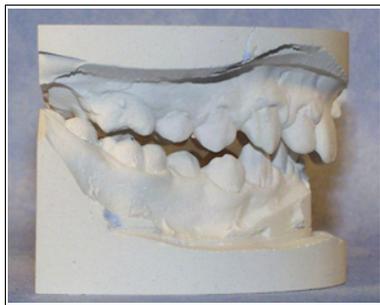


Abbildung 106: Patient M.F. - Modell Okklusion rechts

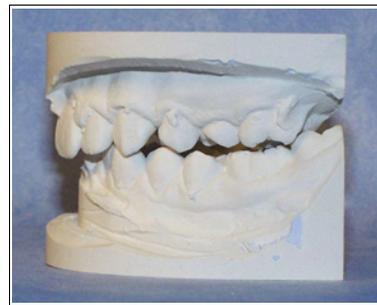


Abbildung 107: Patient M.F. - Modell Okklusion links

Bei Patient M.F. (Abbildungen 106 und 107) liegt eine Angle Klasse II vor, welche asymmetrisch ist und in den Eckzahnbereichen imponiert. Weiterhin fällt der temporär lateral offene Biss auf, sowie die vergrößerte sagittale Frontzahnstufe von ca. -6 mm.

Als Voraussetzung für die Zahnbogenformbestimmung, erfolgt die Standard-Modellanalyse, welche mit Hilfe eines Formulars innerhalb des Dokumentationssystems "DokuInforma" durchgeführt wird (Abbildung 108).

Der DAM wird aus dem Modellanalyseformular der "DokuInforma" heraus über die Schaltfläche "Dental-Arch-Manager starten" aktiviert (Abbildung 108).

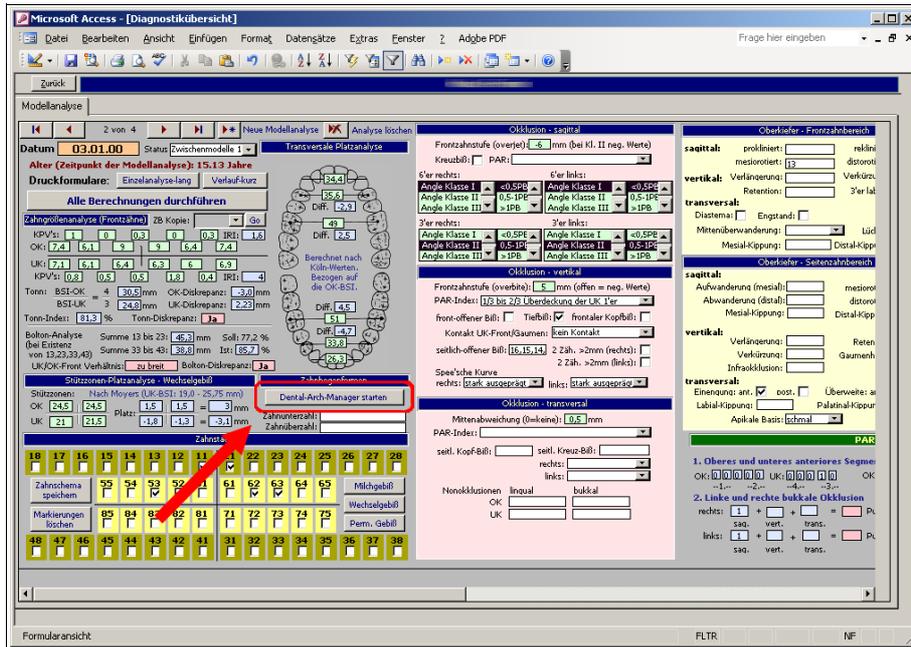


Abbildung 108: Modellanalyseformular der "DokuInforma"

Nach dem Starten erscheint die Benutzeroberfläche des DAM (Abbildung 109).

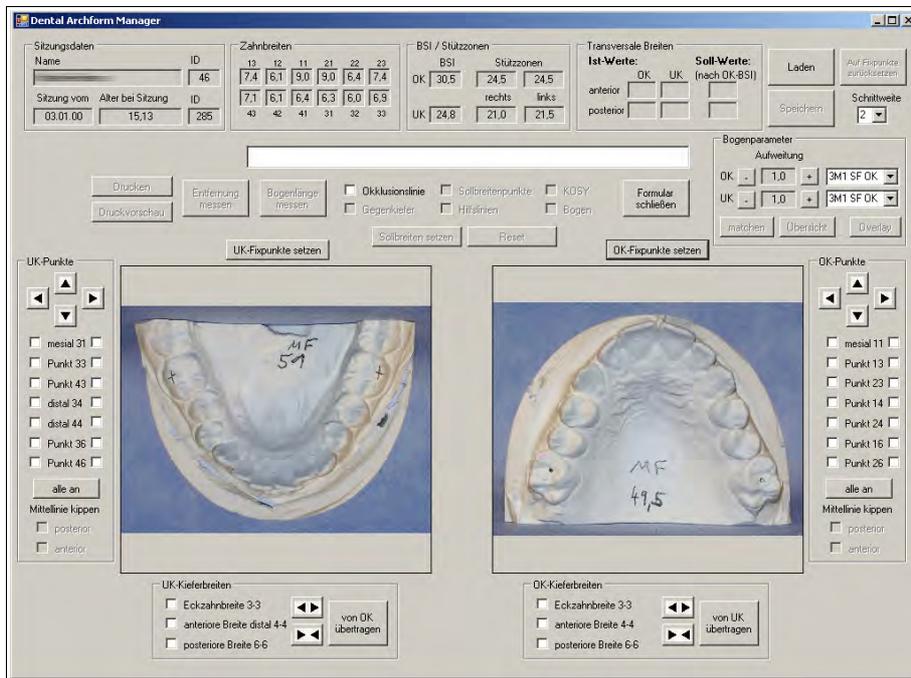


Abbildung 109: Startbildschirm des "Dental Archform Managers"

Auf der Bedienoberfläche sind die bereits die aus der Patientendatenbank übernommene Personen- und Sitzungsdaten, Zahnbreiten und Stützplänen sichtbar.

Zunächst müssen die initialen Referenzpunkte (hier "Fixpunkte" genannt) identifiziert und gesetzt werden (Abbildung 110). Für jeden Kiefer sind dafür jeweils zwei Punkte für das Koordinatensystem und sieben Zahnpunkte via "Mausklick" zu lokalisieren.

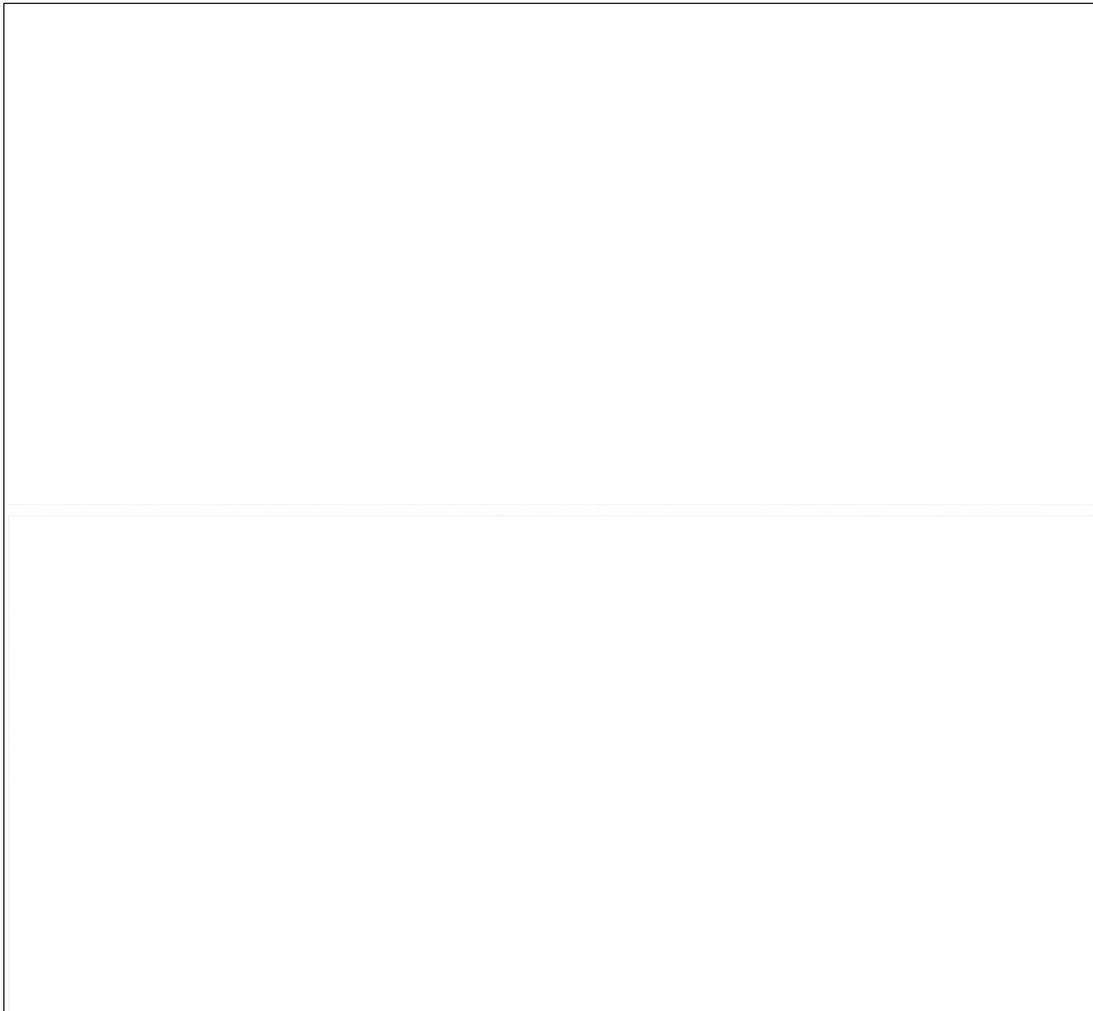


Abbildung 110: Setzen der initialen Punkte

In Abbildung 110 wird nach dem Betätigen der Schaltfläche "UK-Fixpunkte setzen" zunächst die Raphe-Median-Ebene gesetzt, indem der Behandler einen anterioren Punkt der sagittalen Symmetrielinie und anschließend einen posterioren Punkt auf Höhe der distalen Kontaktpunkte der 6-Jahr-Molaren setzt (Abbildung 110, oben links). Anschließend werden die sieben Referenzzahnpunkte per Mausclick markiert (als rote Kreuze, Abbildung 110, unten links). Anschließend wiederholt sich das Prozedere nach dem Betätigen der Schaltfläche "OK-Fixpunkte setzen" für den Oberkiefer (Abbildung 110, unten rechts).

Ist der letzte Referenzpunkt im Oberkiefer gesetzt, schaltet der DAM automatisch die "Sollpunkte" (als rote Kreise) ein (Abbildung 111).



Abbildung 111: Fixpunkte (graue Kreuze) und Sollpunkte (rote Kreise) im Ober- und Unterkiefer

Die vormals als rote Kreuze fixierten Referenzpunkte erscheinen nun als graue Kreuze, und werden initial von den roten Sollpunkten (rote Kreise) exakt überlagert. Diese Sollpunkte sind dynamisch verschiebbar, während die Fixpunkte die unveränderbaren Ausgangspositionen der Zähne darstellen (Abbildung 111).

Über den Check-Button "Okklusionslinie" wird in Echtzeit die initiale Okklusionslinie berechnet und den Modellbildern farbig überlagert (Abbildung 112).

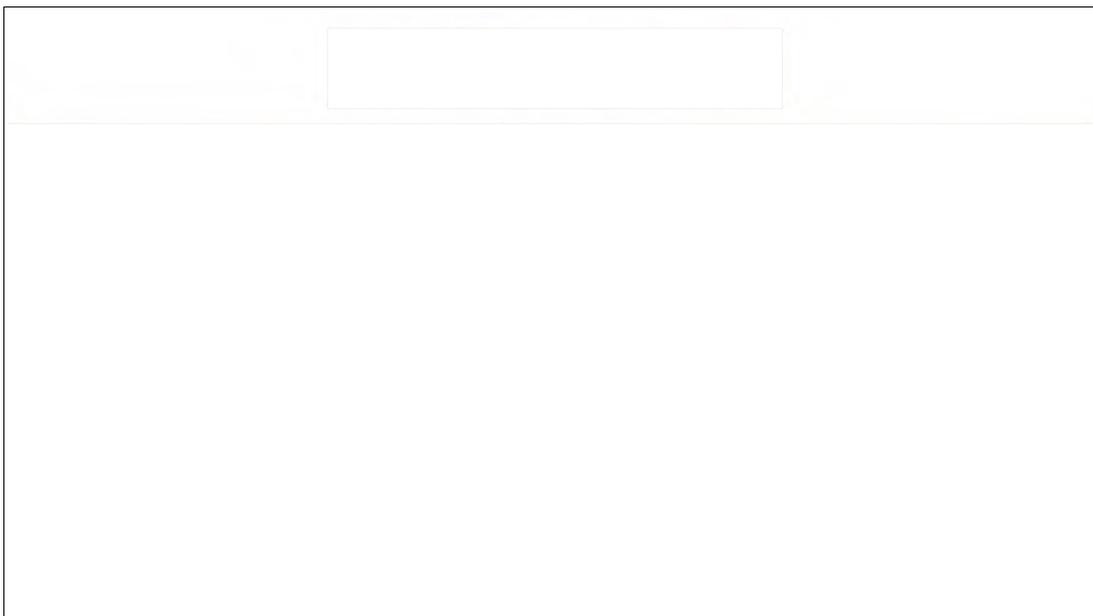


Abbildung 112: Initiale Okklusionslinien

Die Okklusionslinie nähert sich mathematisch möglich genau den Sollpunkte an, wobei aufgrund der Tatsache, dass nicht alle Fixpunkte auf der antagonistischen Okklusionslinie liegen, rechnerische Korrekturen (Kontaktpunkt UK-Prämolaren, Inzisalpunkt OK, Eckzahnpunkte OK) eingebaut sind (Details siehe Kapitel 3.)

Die Breitensumme der Inzisivi erscheint als rotes Bogensegment, die Eckzahnbreite in grün und visualisiert zusammen mit den blauen Bogensegmenten die klassischen Stütz-zonen.

Die Festlegung der initialen Fixpunkte für die Symmetrielinien ist, gerade im Unterkiefer, durch eine dorsal fehlende anatomische Referenz schwierig. Um zu kontrollieren, ob die Symmetrielinien zufriedenstellend ausgerichtet sind, blendet der Behandler durch Anhaken der Checkbox "KOSY" das Koordinatensystem ein und kann nun gegebenenfalls Korrekturen vornehmen (Abbildung 113).

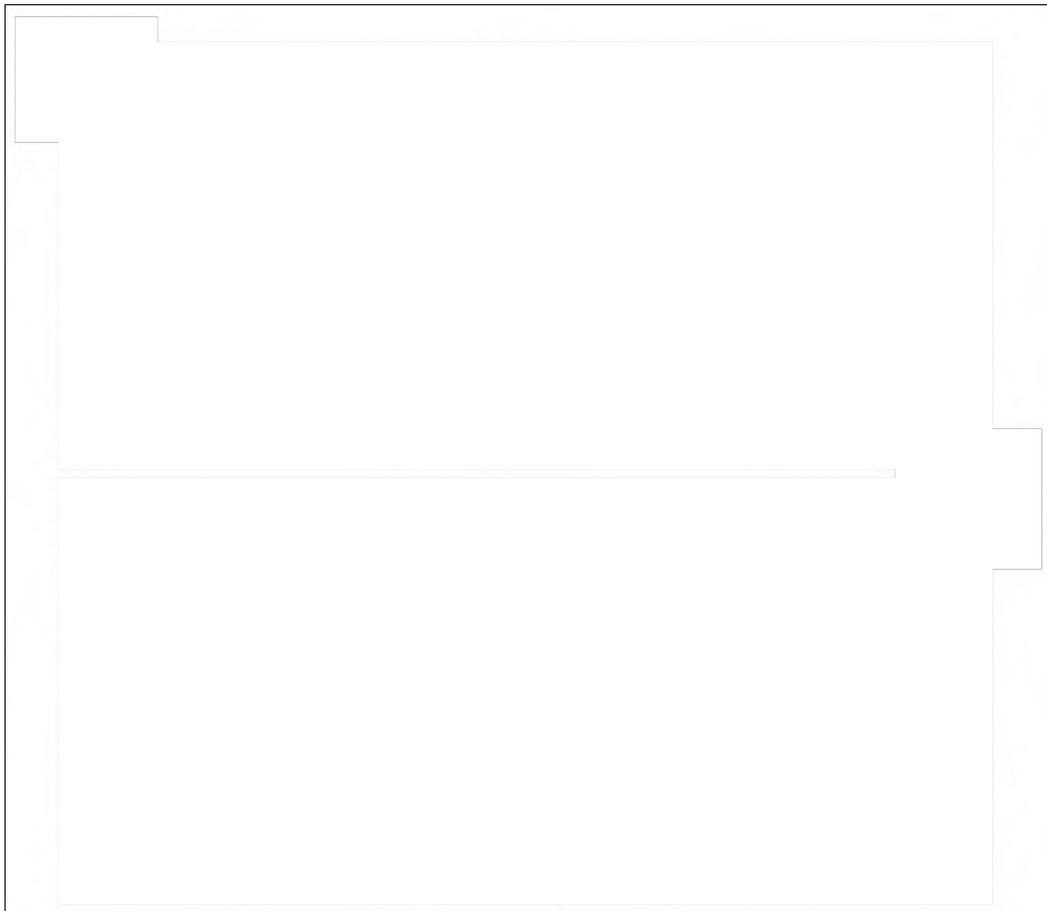


Abbildung 113: Korrektur der Koordinatensysteme

Durch Verschieben des dorsalen Definitionspunktes der Symmetrielinie (Schnittpunkt der blauen x- und y-Achse) kann der Behandler diese neu ausrichten. Im Unterkiefer erfolgte bei Patient M.F. eine minimale Korrektur durch eine geringe Verschiebung des Definitionspunktes nach rechts (Abbildung 113, oben und unten links). Die Symmetrielinie im Oberkiefer wird ebenfalls durch eine etwas deutlichere Verschiebung des hinteren Definitionspunktes gekippt und liegt nun (Abbildung 113, unten rechts) hinreichend genau über der Raphe-Median-Ebene, sodass sich die berechnete Okklusionslinie symmetrisch über den Zahnbogen legt.

Zu diesem Zeitpunkt beginnt die fachlich kieferorthopädische Reflexion im Hinblick auf die Therapieplanung. Im Gegensatz zu der herkömmlichen digitalen Modellanalyse können die weiteren Schritte nur von zahnärztlichem, kieferorthopädisch weitergebildetem Personal durchgeführt werden.

#### **4.1 Einzelkieferbetrachtung**

Obwohl der DAM alle folgenden Funktionen zu beliebigen Zeitpunkten in beliebiger Reihenfolge anbietet, ist es sinnvoll zunächst die Zahnbogenformen von Unter- und Oberkiefer getrennt zu analysieren. Dabei steht die Unterkieferaufsicht bewusst links, da die Unterkieferzahnbogenform für die therapeutische Planung die primären Vorgaben beinhaltet, die Oberkieferzahnbogenform flexibler angepasst werden kann.

In Abbildung 114 sind die transversalen Sollbreitenpunkte (als grüne Quadrate) eingeblendet worden.



Abbildung 114: Einblenden der Sollbreiten - Unterkiefermodell

Aus den - aus der übergeordneten Standardmodellanalyse gewonnenen - vorliegenden Breitenangaben der Frontzähne, werden rein rechnerisch nach auf PONT [132] basierenden, modifizierten Regeln die "ideale" transversale anteriore und posteriore Breite durch die grünen Quadrate visualisiert. Die PONT-Berechnung empfiehlt hier eine Expansion im Prämolarenbereich um 3,7 mm, sowie eine Kompression des Zahnbogens im Molarenbereich um 4,5 mm. Dem Behandler ist an dieser Stelle der Frontzahnengstand bewusst, dessen Ausmaß sich auf Abbildung 114 durch die Überlappung des roten Bogensegmentes in die Eckzähne hinein darstellt und schon zuvor durch die Standardmodellanalyse mit einem Platzmangel von ca. 3-4 mm quantifiziert wurde. Der Behandler ist sich über mögliche Therapiemaßnahmen zur Platzgewinnung bewusst, nämlich Distalisierungen, Zahnbogenexpansionen, Zahnextraktionen, Proklination der UK-Frontzähne oder "approximales Stripping" (Zahnbreiten reduzieren). Bei Patient M.F. ignorieren wir den nicht sinnvollen Vorschlag einer Kompression im distalen transversalen Zahnbogenbereich. Die durch die PONT-Berechnung vorgeschlagene minimale transversale Expansion im Prämolarenbereich wäre zwar realistischer, wobei sich aber durch eine der-

artige Expansion auch die Unterkiefer-Eckzahnbreite vergrößern würde, weshalb wir auch hier davon Abstand nehmen. D.h. wir entscheiden uns für eine geplante Engstandsauflösung durch eine Kombination aus folgenden Therapiemaßnahmen: Lip-Bumper (ermöglicht eine geringe Distalisierung der Prämolaren und Molaren), leichte Proklinierung des reklinierten Zahnes 43 unter Beibehaltung seiner Wurzelposition, leichte Proklinierung der Zähne 33-42, sowie einer ebenfalls geringfügigen approximalen Schmelzreduktion an den Unterkieferfrontzähnen 32-42, wenn sich im späteren Behandlungsverlauf diese Notwendigkeit tatsächlich ergeben sollte.

Unter diesen Prämissen der Therapieplanung wird im Folgenden die Bogenformbestimmung für den Unterkiefer mit dem "DAM" vorgenommen.

Zahnbewegungen können durch Verschieben der roten Sollpunkte simuliert werden. In Abbildung 115 wurde der inklinierte Eckzahn 43 virtuell durch die Verschiebung des Punktes 43 leicht nach disto-bukkal prokliniert.

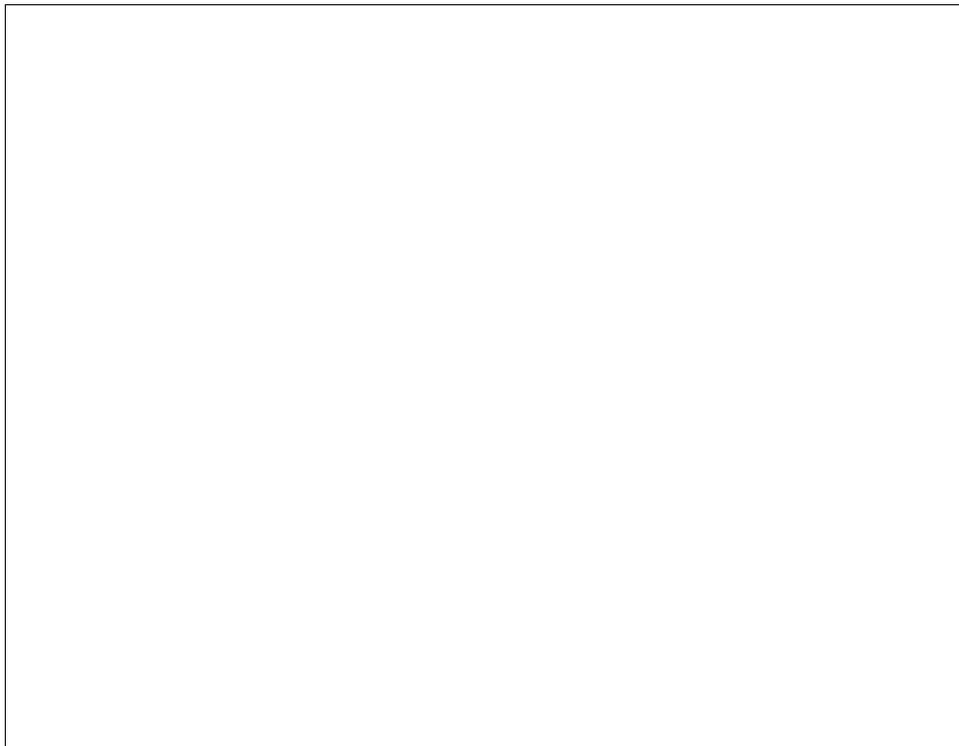


Abbildung 115: Verschiebung des 43'er auf Idealposition

Regio Zahn 43 ist diese leichte Proklation des Zahnes durch den jetzt sichtbaren Abstand zwischen dem Fix- und dem Sollpunkt des Zahnes 43 sichtbar.



Abbildung 116: Verschieben des Punktes mesial 31 auf Idealposition

Durch die Anteriorverschiebung des Zahnpunktes 31 kommt es zu einem Platzgewinn, welcher sich anhand der jetzt geringeren Überlappung des roten Bogensegmentes mit den angrenzenden Eckzähnen abschätzen lässt (Abbildung 116).

Damit ist die isolierte Planung der Unterkieferokklusionslinie abgeschlossen. Man erkennt, dass bei Patient M.F. bewusst keine größeren Änderungen der Bogenform vorgenommen werden, vor allem die Eckzahndistanz konstant gehalten wird, um spätere Rezidive zu minimieren.

Der Behandler wendet sich nun dem Oberkiefer zu, welcher zunächst ebenfalls isoliert betrachtet wird. In Abbildung 118 richtet der Behandler zunächst seine Aufmerksamkeit auf die grünen, bereits eingeblendeten Sollbreitenpunkte.



Abbildung 117: Einblenden der Sollbreiten - Oberkiefermodell

Die Sollbreitenberechnung nach dem PONT'schen Berechnungskonzept zeigt an, dass der Oberkiefer im Prämolarenbereich transversal zu schmal ist. Diese Aussage geht konform mit der Erwartung des Behandlers, da eine transversale Unterentwicklung des Oberkiefers bei Klasse-II Fällen sehr häufig zu erwarten ist [146]. Im distalen Molarenbereich wird eine Verringerung der transversalen Breite laut der PONT-Tabellen empfohlen, was in diesem Fall aber für den Behandler abwegig ist und erneut zeigt, dass die individuelle Expertise des Behandlers gegenüber den reflexionsfreien Zahnbreiten-Kieferbreiten-Berechnungen auch im Zeitalter computergestützter Modellanalyse von großer Bedeutung ist, d.h. das derartige Modellanalyseysteme nur von weitergebildeten Fachzahnärzten verwendet werden sollten.

Mit dem Vermessungstool des DAM kann das Ausmaß der transversalen Breiten bestimmt werden (Abbildung 118).

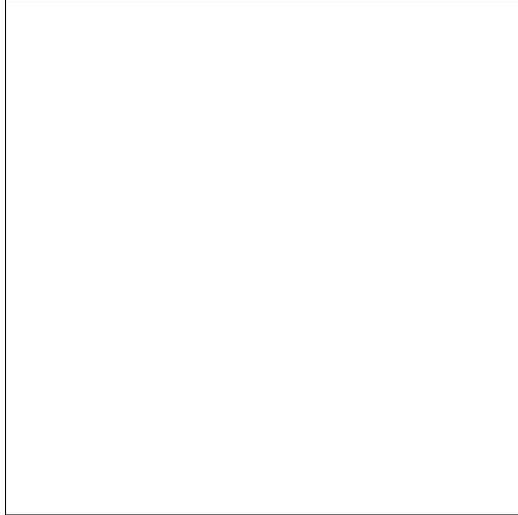


Abbildung 118: Messung der transversalen Sollbreite

Die Messung der anterioren Sollbreite ergibt 38,5 mm, die tatsächliche anteriore Breite des Kiefers beträgt 35,0 mm, d.h. auf den Einzelkiefer bezogen, ist "theoretisch" eine Aufweitung um 3,5 mm notwendig.

Der Behandler kann diese transversale Expansion über die Schaltflächen unterhalb des Oberkiefermodellbildes einstellen (Abbildung 119).

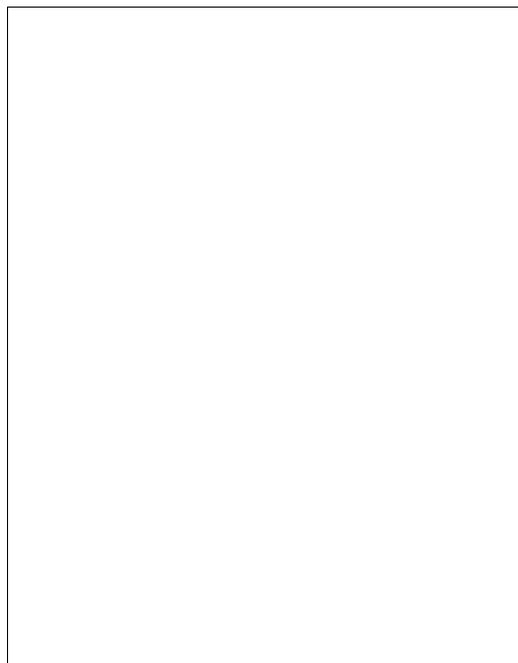


Abbildung 119: Anpassung der anterioren Breite im Oberkiefer

In Abbildung 119 wurden die roten Sollpositionen der 4'er auf die mit grünen Quadraten markierten Sollbreitenpositionen bewegt, so dass sich eine Aufweitung der Okklusionslinie um ca. 3,5 mm ergibt. Eine Verschmälerung des Oberkiefers im posterioren Bereich nehmen wir aus den oben genannten Gründen der transversalen Beziehungen zwischen Ober- und Unterkiefer bei Klasse II-Fällen nicht vor, da dem Behandler zu diesem Zeitpunkt schon vorausschauend bekannt ist, dass diese höchstwahrscheinlich nicht sinnvoll sein wird.

Zu diesem Zeitpunkt ist die isolierte Planung der Okklusionslinien von Ober- und Unterkiefer abgeschlossen, es folgt die Betrachtung der antagonistischen Okklusion.

## 4.2 Betrachtung der antagonistischen Okklusion

Die isolierte Betrachtung der Zahnbögen von Unter- und Oberkiefer ist für die Therapieplanung natürlich nur von begrenztem Wert. Vor allem bei Patienten, wie bei unserem Beispiel-Fall M.F., wo eine vergrößerte sagittale Frontzahnstufe vorliegt, muss natürlich die Lagebeziehung der Zahnbögen intermaxillär berücksichtigt werden. Idealerweise sollten die Okklusionslinien von Ober- und Unterkiefer definitionsgemäß genau übereinander liegen. Um diese Überlagerung elektronisch vornehmen zu können, verwenden wir im "DAM" die beschriebenen Okklusionslinien und nicht die herkömmlichen Bogenformlinien durch Höckerpunkte oder Fazialflächenpunkte (siehe Kapitel 2.2.1).

In Abbildung 120 hat der Behandler die Checkbox "Gegenkiefer" aktiviert.

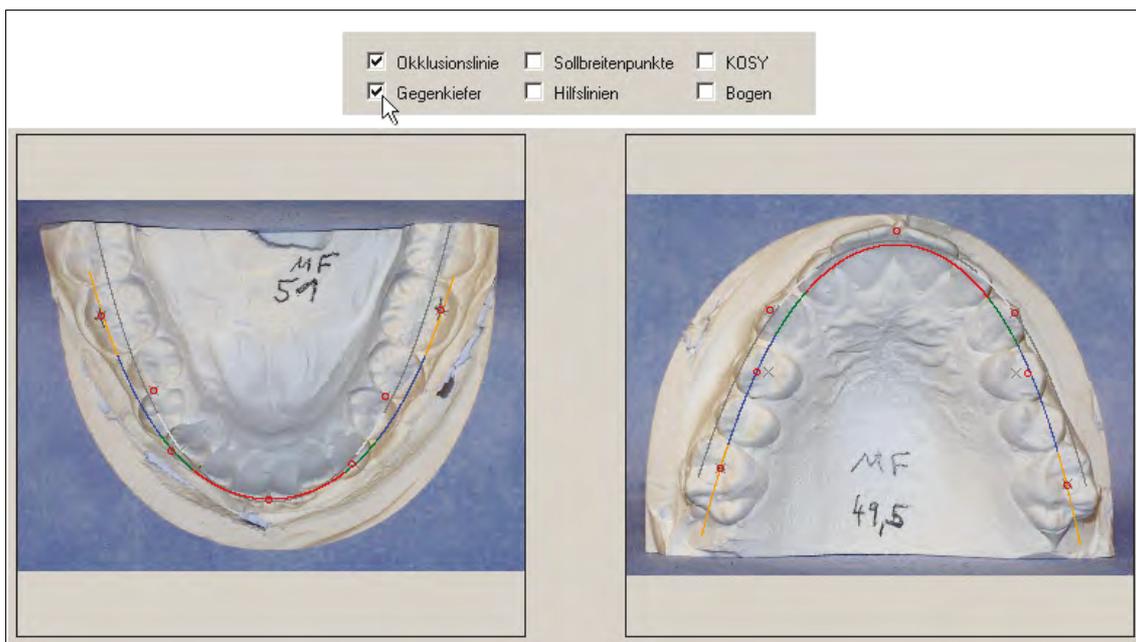


Abbildung 120: Einblenden des Gegenkiefers

Auf den Fotos der Abbildungen 120 imponiert die jeweilige Gegenkiefer-Okklusionslinie als - hier etwas schwer erkennbare - in Grautönen dargestellte überlagerte Linie.

Man erkennt unmittelbar, dass die Vermutung des Behandler bezüglich des zu erwartenden Missverhältnisses der transversalen Breiten zutrifft. Der DAM überlagert die beiden Okklusionslinie nämlich so, dass eine "normale" sagittale Frontzahnstufe simuliert wird, sodass deutlich wird, dass der Unterkiefer seine ideale Lagebeziehung zum Oberkiefer nur dann einnehmen kann, wenn der Oberkieferzahnbogen erheblich expandiert wird.

Um das Ausmaß der Oberkieferexpansion zu bestimmen, kann der Behandler Transversalmessungen an der Oberkieferokklusionslinie und der in grau überlagerten Unterkieferokklusionslinie vornehmen (Abbildung 121).

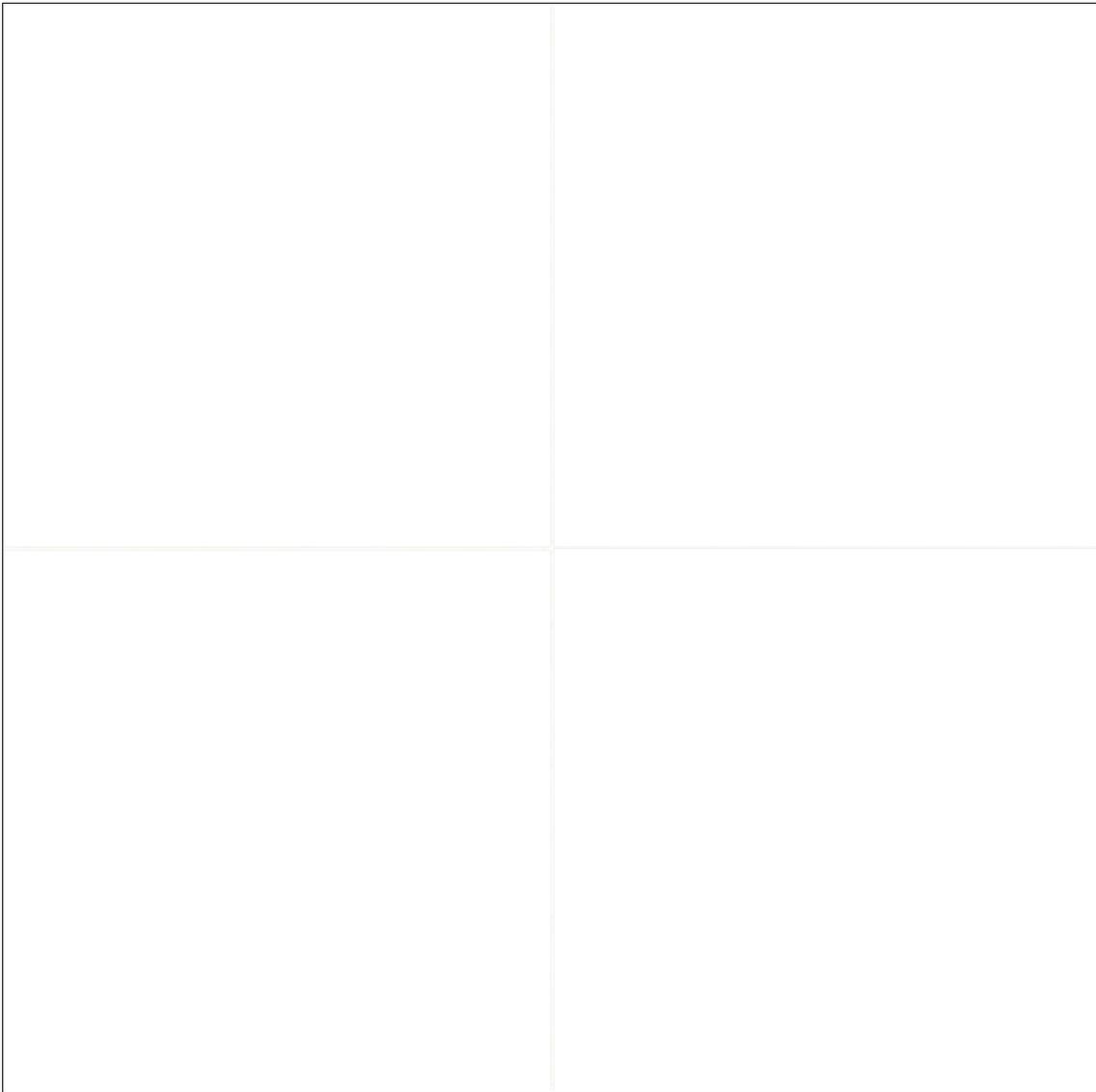


Abbildung 121: Messung und Vergleich der Kieferbreiten

Die Messungen ergeben für die notwendige Aufweitung im anterioren sowie im posterioren Bereich einen Wert von 4,9 mm.

Die notwendige Aufweitung wird vom Behandler über die Schaltflächen unterhalb des Oberkiefermodellbildes simuliert (Abbildung 122).

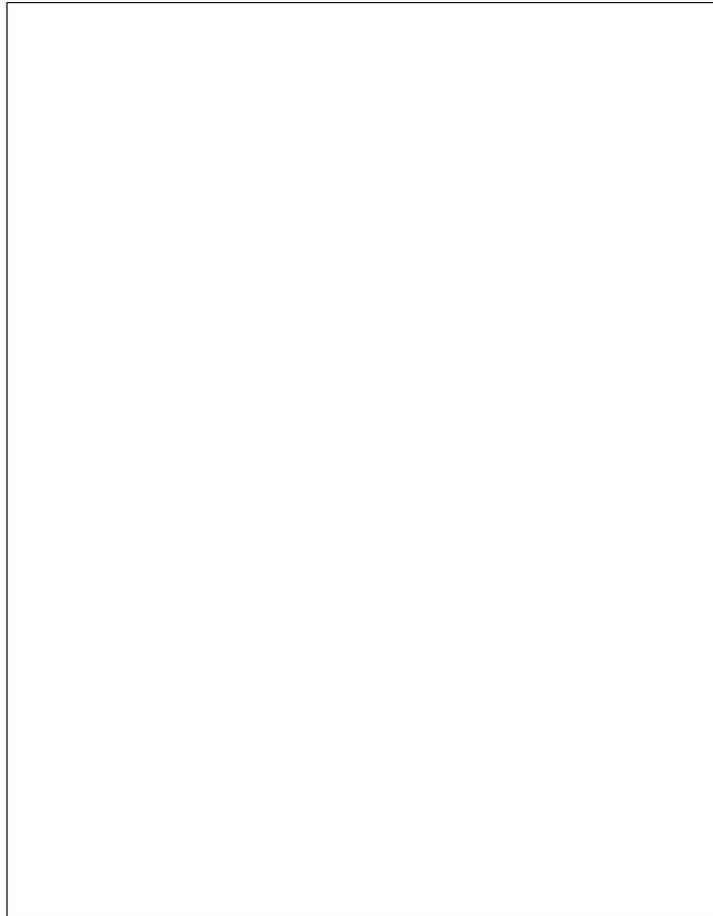


Abbildung 122: Anpassung der Oberkieferbreite

In Abbildung 122 wurde die farbige Oberkieferokklusionslinie über eine transversale Aufweitung des Oberkiefers im 4'er- und 6'er-Bereich mit der grauen UK-Okklusionslinie zur Deckung gebracht, so dass diese nahezu vollständig verdeckt ist. Klinisch gesehen erfolgte auf diese Weise eine Simulation der Anpassung des Oberkieferzahnbogens an den Unterkieferzahnbogen bei gleichzeitiger sagittaler Vorverlagerung des gesamten Unterkieferzahnbogens in eine ideale Frontzahnstufe. Zu diesem Zeitpunkt sind die Okklusionslinien exakt antagonistisch angeglichen.

Um die tatsächliche Bogenform für eine bukkale Multibracketbehandlung zu ermitteln, wird durch Aktivierung des Check-Buttons "Bogen" eine Interpolierung (siehe Kapitel 3.6) der Okklusionslinien auf die individualisierten Behandlungsbogenformen berechnet und in die Modellbilder in schwarzer Farbe eingezeichnet (Abbildung 123).

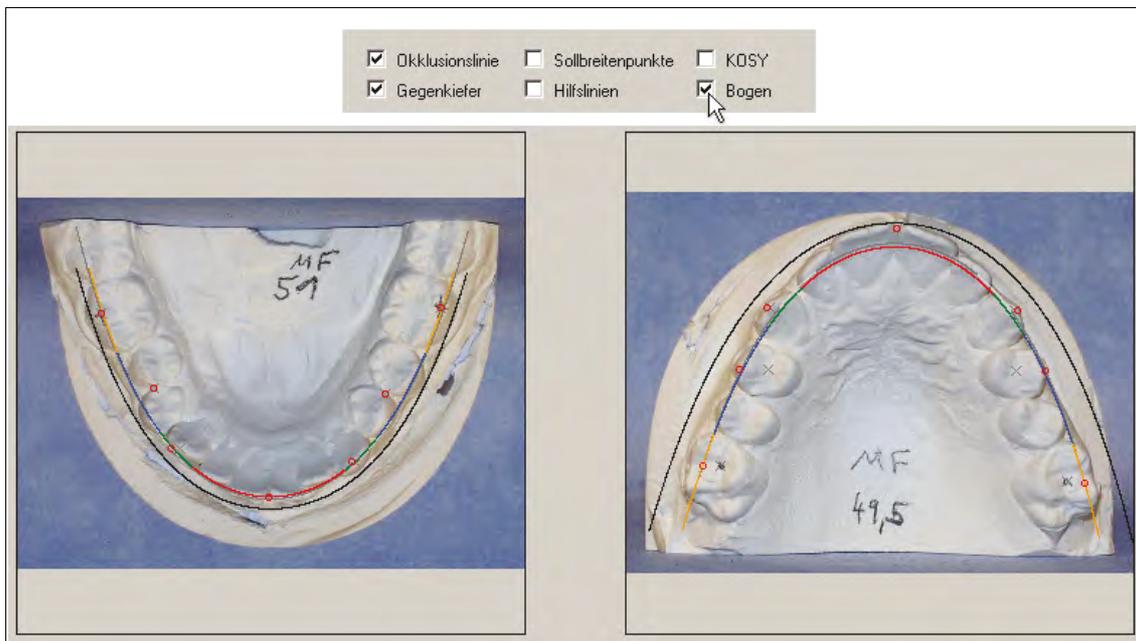


Abbildung 123: Einblendung der individuell berechneten Behandlungsbögen

Die bukkal eingezeichneten schwarzen Bogenverläufe symbolisieren die bukkalen Begrenzungen der Zielpositionen der Zähne bei Behandlungsabschluss.

Auf dem in Abbildung 123 rechts dargestellten Modellfoto des Oberkiefers erscheint die berechnete schwarze Zielbogenform transversal sehr breit, da der DAM zwar die roten Zahnpunkte dynamisch verschieben kann, jedoch technisch nicht in der Lage ist das tatsächliche virtuelle Set-Up in Form einer Verschiebung der Einzelzahnabbildungen zu realisieren. Betrachtet man aber die Distanzen zwischen den grauen Fixpunkt-Kreuzen und den roten Sollpunkten im Prämolaren und Molarenbereich, so relativiert sich das Ausmaß der Expansion wieder, d.h. in der "gedachten" Zielplanung stehen die Seitenzähne ca. 1 mm lingual der schwarzen Zielbogenform.

Um aus rezidivprophylaktischen Gründen die Bogenform des Unterkiefers (Abbildung 123 links) keinesfalls zu expandieren, korrigierte der Behandler bei dem individuellen Behandlungsfall M.F. den Standard-Aufweitungsfaktor von 1,0 auf 0,6, um den Behandlungsbogen noch etwas näher an die bukkalen Flächen zu führen (Abbildung 124).

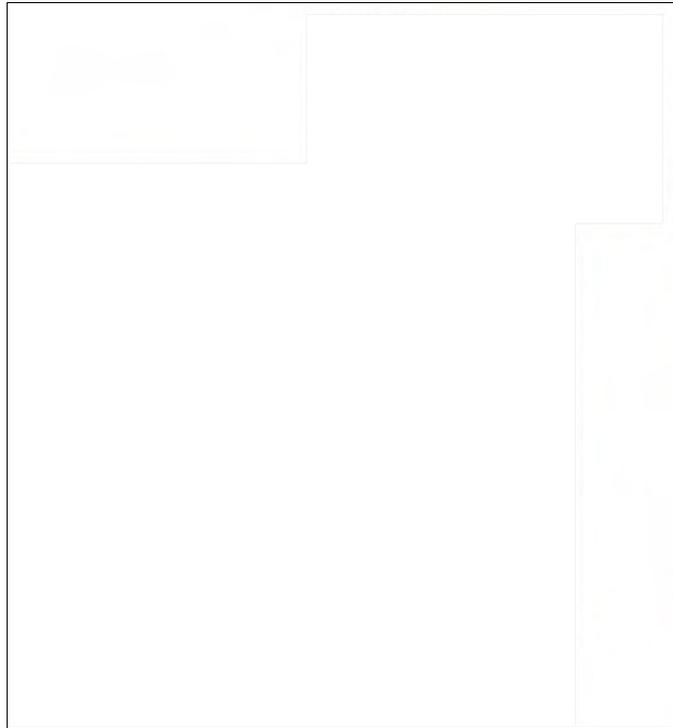


Abbildung 124: Verschmälern des individuellen Unterkieferbogens

Nach der Festlegung der Bogenformen betätigt der Behandler die Schaltfläche "matchen", um auf der Basis der schwarzen Zielbogenformen eine automatische Auswahl aus den in der Datenbank hinterlegten Bogentemplates zu treffen, die den individuell berechneten Behandlungsbogenformen am besten entsprechen (Abbildung 125).



Abbildung 125: Anstoßen des Matching-Prozess

Das "Matching" ergibt, dass das bestpassendste Bogentemplate für den Oberkiefer ein 68 mm BRADER-Bogen, für den Unterkiefer ein 60 mm BRADER-Bogen ist.

Um eine visuelle Kontrolle zu haben, kann der Behandler über die Schaltfläche "Overlay" die ermittelten BRADER-Templates als rote Zielbögen einblenden (Abbildung 126).

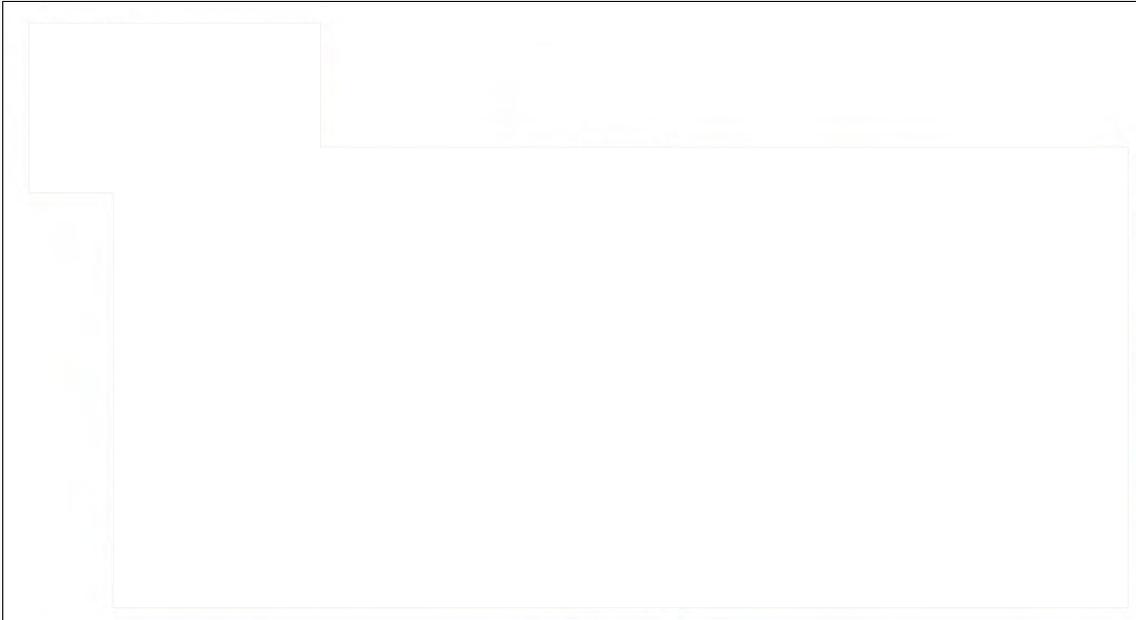


Abbildung 126: Einblendung der idealen Bogentemplates

Man erkennt, dass die Bogentemplates sehr gut dem berechneten individuellen Behandlungsbogen folgen, da sie diesen fast vollständig überlagern.

Der bisherigen Erkenntnis folgend, dass für den Fall M.F. die ermittelten BRADER-Formen eine optimale Formgebung für die kieferorthopädischen Behandlungsbögen darstellen würden, stellt sich nun für den Behandler die rein praktisch-pragmatische Frage, ob er in seiner Praxis diese oder ähnliche konfektionierte Behandlungsbögen vorrätig hat. Um auch zu dieser Fragestellung eine Hilfestellung zu geben, hat der Behandler die Datenbank des DAM im Vorfeld entsprechend seiner tatsächlichen Lagerhaltung in der Praxis (hier Poliklinik für Kieferorthopädie) vorkonfiguriert.

Über die Schaltfläche "Übersicht" ruft der Behandler zu diesem Zweck die Bogentemplates-Übersicht auf, um zu überprüfen, welche Bögen in der beabsichtigten Dimension vorrätig sind (Abbildung 127).

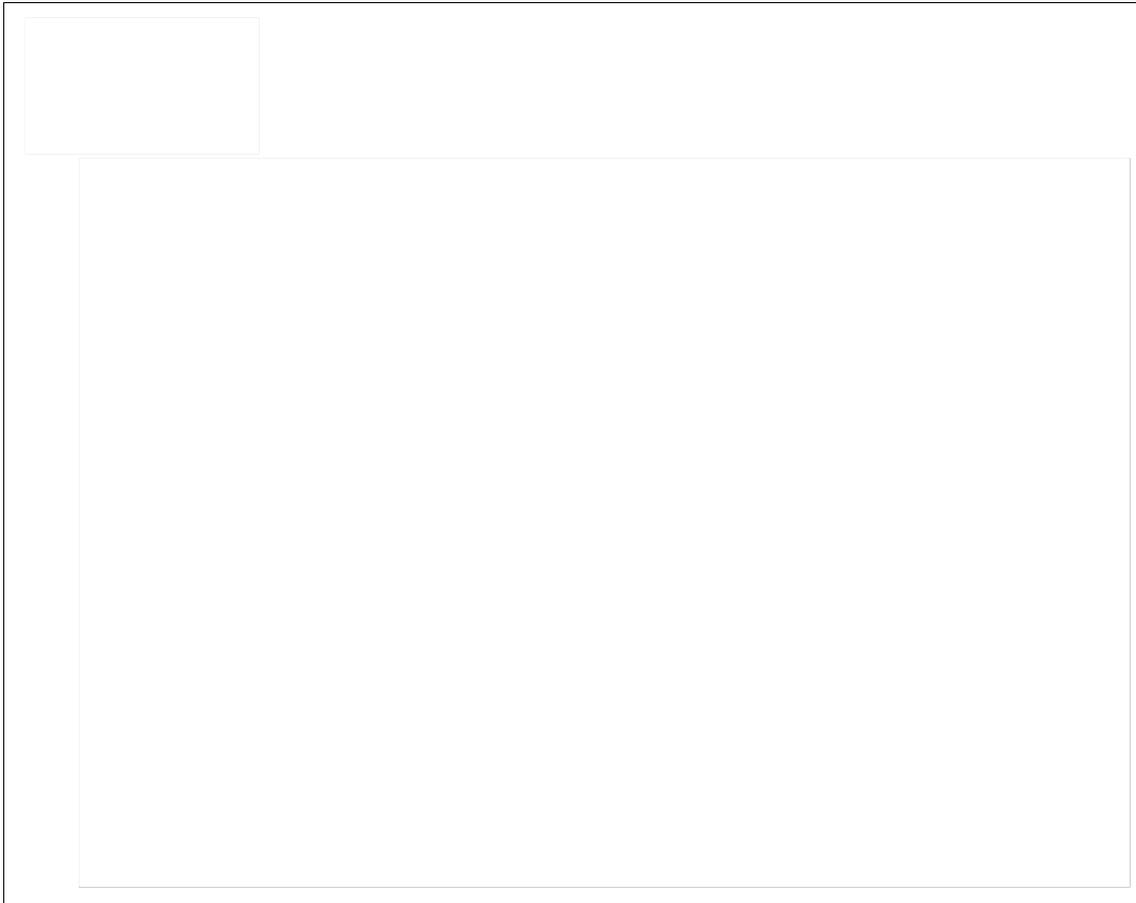


Abbildung 127: Übersicht der Bogentemplates

Die Übersicht (Abbildung 127) zeigt alle in der Datenbank vorhandenen Bogentemplates, links für den Unter- und rechts für den Oberkiefer. In den Spalten rechts neben den Templatenamen sind "Fehler"-Zahlen zu finden, welche die Abweichungen der Templates von der berechneten idealen Zielbogenform anzeigen. Die am besten passenden Templates weisen die niedrigsten Fehlerwerte auf und stehen ganz oben in den Listen. Dahinter ist jeweils ein "+"- oder "-"-Zeichen, welches anzeigt, ob das Bogentemplate im 6'er-Bereich schmaler ("-") oder breiter ("+") ist als die idealisierte Zielbogenform. In beiden Listen sind jeweils OK- und UK-Bögen gelistet, da es durch die individuelle Zielbogenberechnung unwesentlich ist, ob ein planer Bogen einer konfektionierten Ober- oder Unterkiefer-Verpackung entnommen wird. So können Ober- und Unterkieferbogen durchaus auch von verschiedenen Herstellern und aus verschiedenen Bogensystemen entnommen werden.

Neben dem Kriterium "Bogenform" muss der Behandler zu diesem Zeitpunkt den Behandlungsbogen näher spezifizieren, bezüglich seiner Querschnitts-Dimension und dem Legierungsmaterial. Bei Patient M.F. soll ein initialer NiTi-Rundbogen (0,012 inch) eingesetzt werden. Diese Angaben werden in den Bedienfeldern oberhalb der Übersicht eingestellt, worauf der DAM automatisch diejenigen Bogentemplateklassen rot markiert, die Behandlungsbögen enthalten, die diesen speziellen Kriterien entsprechen (Abbildung 128).



Abbildung 128: Individualisierte Übersicht der Bogentemplates für Fall M.F.

Nach Anklicken einer rot gekennzeichneten Bogentemplateklasse öffnet sich eine weitere Übersicht, in der die konkreten konfektionierten Behandlungsbögen in dieser Kategorie angezeigt werden (Abbildung 129).

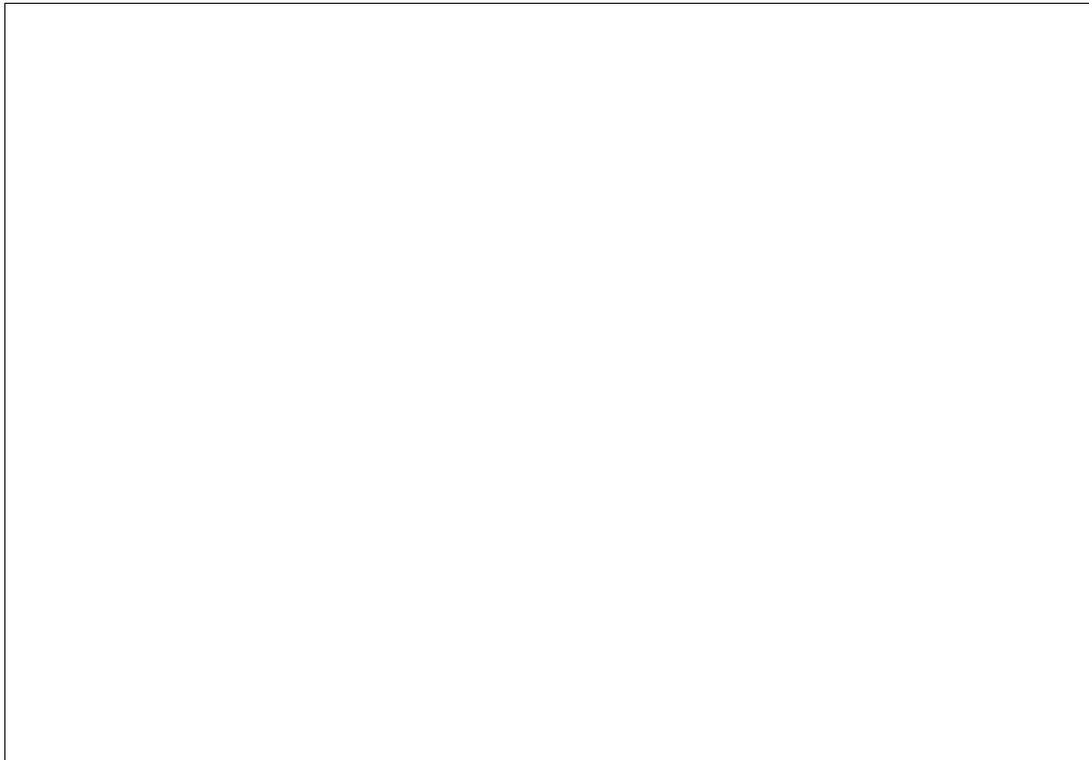


Abbildung 129: Behandlungsbögen-Übersicht einer Bogentemplate-Klasse

Die in Abbildung 129 gezeigten Behandlungsbögen weisen alle dieselbe Bogenform auf. Diejenigen Bögen, die zusätzlich aus dem Material "NiTi" bestehen, sowie die Dimension "0,012 Inch - rund" besitzen, sind rot eingefärbt.

D.h. der Behandler kann nun für den Fall M.F. als initialen Behandlungsbogen für die Nivellierungsphase z.B. aus monetären Gründen den wirtschaftlicheren Bogen auswählen.

In Abbildung 130 sind den Modellbildern die bestpassendsten, in der ausgewählten Dimension und dem ausgewählten Material vorrätigen Behandlungsbögen (im Oberkiefer "ADVANCED ORTHODONTICS Idealbogenform OK", im Unterkiefer "ADVANCED ORTHODONTICS Idealbogenform UK") den Modellbildern überlagert.

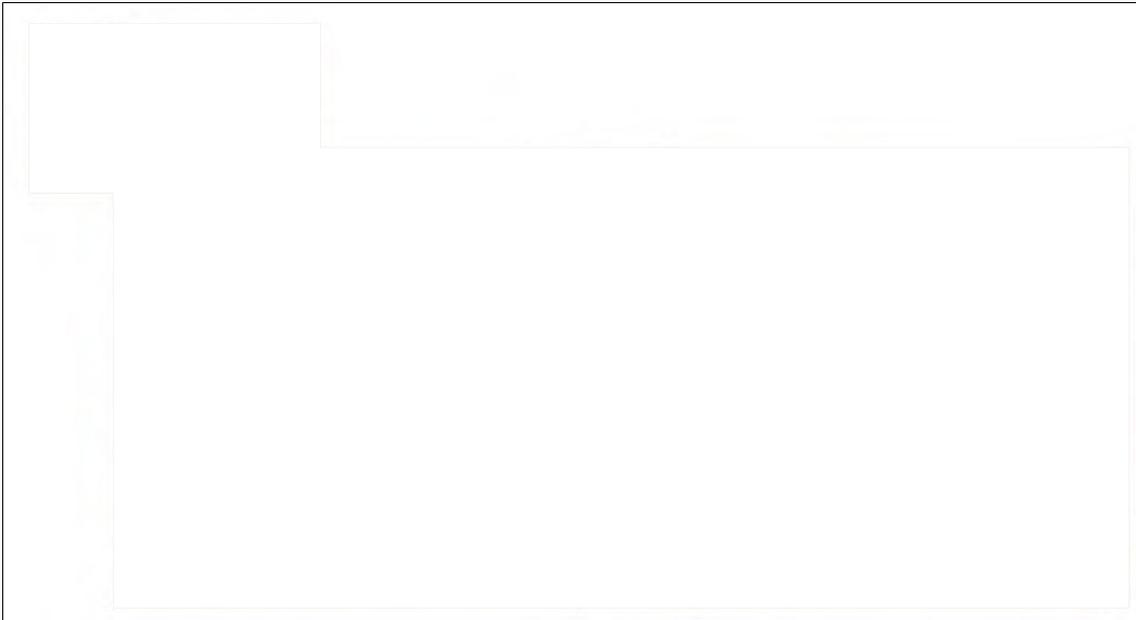


Abbildung 130: Eingblendete beste vorrätige Behandlungsbögen

Der Behandler muss nun die Entscheidung treffen, ob die Passgenauigkeit für die initiale Behandlungsphase ausreichend ist, oder ob er evtl. einen anderen Bogen (z.B. aus einem nicht superelastischen Material) verwendet, den er individuell anpassen kann. Diesbezüglich soll an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen werden, dass die ideale Zielbogenform vom DAM individuell gespeichert wird, d.h. es wird bei späteren Bogenwechselprozessen auf Bögen größerer Dimensionen und anderer Materialien nicht die Form des tatsächlichen ausgewählten Anfangsbogens berücksichtigt, sondern korrekterweise wieder die Idealform des berechneten Zielbogens. D.h. der Behandler hat bei jedem Bogenwechsel die Möglichkeit Bögen auszuwählen, die immer genauer der Zielbogenform entsprechen.

Über die Druckfunktion kann der berechnete individuelle Behandlungsbogen im Maßstab 1:1 auf einem DIN A4-Papier ausgegeben werden, um dieses als Biegeschablone zu verwenden (Abbildung 131).

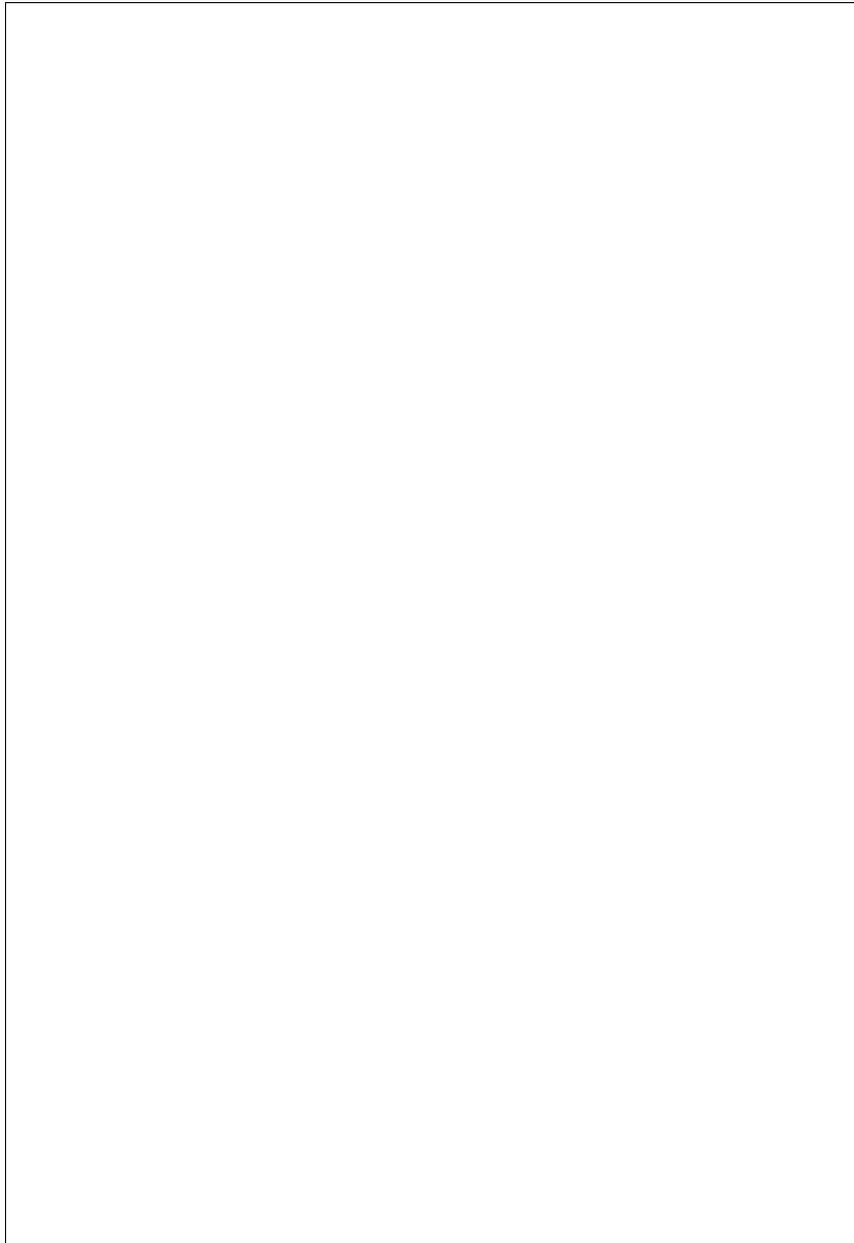


Abbildung 131: Druckvorschau der Behandlungsbogen-Biegeschablone

Mit der Möglichkeit des Ausdrucks der individuellen Biegeschablone Abbildung 131 hat der Behandler in den fortgeschrittenen Phasen der Multibracketbehandlung die Möglichkeit Stahlbögen größerer Dimensionen exakt an die Zielbogenform anzupassen, so dass im Verlaufe der Behandlung einerseits nur wenige "Jiggling"-Bewegungen erfolgen und andererseits die Bogenform schrittweise immer näher der Zielbogenform angenähert werden kann. Theoretisch könnte der Behandler bei dem exemplarischen Fall M.F. auch eine Oberkiefer-Zielbogenform als Zwischenbefund definieren, wenn er die

transversale Expansion auf einen späteren Zeitpunkt des Behandlungsverlaufs verlegen möchte.

## **5. Diskussion**

Die große Anzahl der in der Literatur verwendeten mathematischen Modelle zur Beschreibung von Zahnbogenformen erfordert die Reflexion über deren Nutzen und praktische Einsatzmöglichkeiten. Jedes spezifische mathematische Modell hat diverse Vor- und Nachteile, die abhängig von der klinischen oder wissenschaftlichen Zielsetzung unterschiedlich gewichtet werden können. Im Folgenden werden die verschiedenen Anforderungen bei diversen Einsatzmöglichkeiten analysiert und diskutiert, mit dem Ziel Entscheidungshilfen bei der Auswahl geeigneter mathematischer Modellen zu geben.

### **5.1 Auswahlhilfe für Bogenformberechnungsmodelle in Klinik und Wissenschaft**

Die Vielzahl der vorgestellten mathematischen Modelle zur Beschreibung von Zahnbogenformen stellen den klinisch tätigen Kieferorthopäden sowie den Wissenschaftler vor die Frage der adäquaten Selektion des "richtigen" mathematischen Modells für die von ihm prospektiv formulierte, individuelle klinische Fragestellung. Neben der Klassifikation der mathematischen Modelle nach Funktionsklassen (siehe Tabelle 5, Seite 32) benötigt der klinisch und/oder wissenschaftlich tätige Kieferorthopäde, aber auch der Entwickler von zahnärztlich/kieferorthopädischer Software (Modellanalysen) Entscheidungshilfen bei der Auswahl des Berechnungsmodells. Die Anforderungen bei verschiedenen Zielsetzungen sind in Tabelle 13 postuliert.

Kriterien zur Selektion von mathematischen Bogenformmodellen		
Fragestellung	Anforderungen	Beispiele
<b>Explizite Beschreibung einer Zahnbogenform</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ möglichst exakte Bogenformbeschreibung (zahlreiche Stützpunkte)</li> <li>▶ keine Idealisierung</li> <li>▶ Asymmetrien werden exakt beschrieben</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ biologisch-anthropologische Studien</li> <li>▶ Dokumentation des aktuellen Ist-Zustands einer Zahnbogenform</li> </ul>
<b>Vergleich von Zahnbogenformen</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ exakte Bogenformbeschreibung</li> <li>▶ geringfügige Glättung</li> <li>▶ symmetrische oder asymmetrische Formen</li> <li>▶ mathematische Quantifizierbarkeit des "Unterschiedes"</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ epidemiologische und klinische Studien (z.B. Evaluierung von Therapieerfolgen)</li> <li>▶ Unterschiede zwischen Bogenformen in unterschiedlichen Individuen (z.B. weiblich/männlich)</li> <li>▶ Unterschiede zwischen Zahnbogenformen eines Individuum zu unterschiedlichen Zeitpunkten (z.B. Wachstumsstudien, Untersuchungen der Stabilität von Zahnbogenformen nach therapeutischen Eingriffen)</li> </ul>
<b>Kieferorthopädische Behandlungsplanung</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ Interpolation anhand weniger initialer Stützpunkte (Zahnpunkte in Malokklusion)</li> <li>▶ Glättung zu einer harmonischen, symmetrischen Zahnbogenform (prognostische Zielbogenform nach Therapie)</li> <li>▶ gezielte Manipulierung der Stützpunkte zum Erreichen von Therapiezielen</li> <li>▶ nahezu ausschließlich symmetrische Berechnungsansätze</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ Festlegung der Zielbogenform zu Beginn einer kieferorthopädischen Therapie</li> <li>▶ Auswahl konfektionierter kieferorthopädischer Bögen (Multibrackettherapie)</li> <li>▶ Modell-Analysen von Kiefermodellen (z.B. Matching zwischen OK- und UK-Bogenformen zur Therapieplanung)</li> </ul>

Tabelle 13: Kriterien zur Selektion von Bogenformberechnungsmodellen

In Tabelle 13 werden die möglichen klinisch-praktischen Fragestellungen in drei Gruppen eingeteilt, zwei primär wissenschaftliche und eine klinische Fragestellung. Es werden die Anforderungen an die mathematischen Modelle allgemein beschrieben und Beispiele aus dem Anwendungsspektrum genannt.

### 5.1.1 Explizite Beschreibung einer Zahnbogenform

Bei der expliziten Beschreibung einer Zahnbogenform ist es wichtig, dass das zugrundeliegende Modell die Zahnbogenform möglichst exakt und ohne Einführung von Artefakten wie z.B. erzwungene Symmetrien oder Glättungen der Bogenform beschreibt. Daher sollte ein Modell zu diesem Zwecke möglichst überhaupt nicht "idealisieren" und so wenig wie möglich interpolieren. Beides setzt bei gleichzeitig hohem Anspruch an die Passgenauigkeit eine relativ hohe Anzahl von Referenzpunkten voraus. Explizite Beschreibungen von Zahnbogenformen sind hauptsächlich die Domäne exakt beschreibender mathematischer Modelle (insbesondere Spline-Kurven und Fourierreihen),

die bei geeigneter Auswahl und Anzahl an Referenzpunkten im Gegensatz zu den eher idealisierenden Modellen nahezu beliebige Formen exakt darstellen können. Die Verfahren sind für die klinische Routineanwendung im Rahmen von Standardmodellanalysen zu aufwendig und werden daher primär in wissenschaftlichen Studien verwendet. Auch hochgradige Polynommodelle würden prinzipiell den Anforderungen entsprechen, haben aber gegenüber den letztgenannten Modellen den gravierenden Nachteil der "Überschwingungen" (vgl. Kapitel 2.2.2.3 "Polynome"). Die restlichen, idealisierenden Modelle wie Kegelschnitte, Kettenlinie, Betafunktion und die idealisierenden Polynommodelle kommen für die beschreibende Aufgabe weniger in Frage, da sie die Zahnbogenform insbesondere bei Ausreißern oder starken Asymmetrien glätten und damit eine eher nicht exakte Beschreibung der Zahnbogenform liefern würden. So findet sich die Anwendung der exakt beschreibenden Spline-Kurve oder Fourierreihe auch gerade in von direkter klinischer Anwendung losgelösten Demonstrationen, bei der die Frage der Genauigkeit der Beschreibung an sich im Mittelpunkt steht, wie bei BEGOLE [18], MUTINELLI [112] oder VALENZUELA [167] und bei anthropologischen Studien wie BURRIS [36] und MCKEE [104].

### **5.1.2 Vergleich von Zahnbogenformen**

Der Vergleich von Zahnbogenformen zwischen zwei Individuen oder die Erfassung von Änderungen der Zahnbogenform eines Individuums über einen definierten Zeitraum, stellt an das verwendete mathematische Modell einerseits den Anspruch einer möglichst exakten Beschreibung der einzelnen Zahnbogenform, andererseits aber auch einer aussagekräftigen Vergleichbarkeit der Modellanalysedaten. Die Auswahl eines geeigneten mathematischen Modells stellt daher in vielerlei Hinsicht einen Kompromiss zwischen exakter und idealisierender Beschreibung der Zahnbogenform dar. So erfassen exakt beschreibende Modelle wie Spline-Kurven, Fourierreihen oder hochgradige Polynomansätze zwar die Unterschiede oder Änderungen zwischen zwei Zahnbogenformen mit der größten Genauigkeit, andererseits ist es aber schwierig geeignete Parameter aus diesen Modellen abzuleiten, die sich vergleichen lassen und einen direkten Bezug zu relevanten Größen des Zahnbogens aufweisen, um die Formänderung zu quantifizieren. Zwar gibt es in der Literatur z.B. den Ansatz der "Euclidian Distance Matrix Analysis" (EDMA),

bei der vereinfacht ausgedrückt der Abstand jedes Referenzpunktes zu allen anderen Punkten und die Änderungen dieser Abstände analysiert werden [92],[93], moderat idealisierende Modelle bieten für viele Fragestellungen aber einen einfacheren und direkteren Ansatz für den Vergleich einzelner klinisch relevanter Parameter der Zahnbogenform, indem klassische Messgrößen wie die Zahnbogenbreite explizit als Parameter in die Modelle integriert werden, wie z.B. bei der modifizierten Betafunktion von BRAUN [28], die Breite und Höhe des Zahnbogens. Ein weiteres Beispiel für die schnelle Ableitung relevanter Aussagen über die Bogenform ist das Modell unter Verwendung orthogonaler Polynome von LU [100], dass die Modellparameter direkt mit der Gesamtform des Zahnbogens in Verbindung bringt. Sehr viele Anwendungen fallen unter diese Kategorie, als Beispiel seien hier die explizit vergleichenden Studien von RICHARDS [136], FELTON [52] oder HENRIKSON [78] genannt. Ersterer nutzte einen Polynomansatz zum Vergleich der Zahnbogenmorphologie australischer Zwillinge, die Letzteren verglichen mittels eines auf Polynomen bzw. auf Kegelschnitten basierenden Modells die Zahnbögen vor und nach kieferorthopädischen Behandlungen.

### **5.1.3 Kieferorthopädische Behandlungsplanung**

Im Rahmen der kieferorthopädischen Behandlungsplanung werden Berechnungsmodelle benötigt, die den behandelnden Zahnarzt in erster Linie bei der Ermittlung der für den Patienten idealen, möglichst individuell angepassten Zielbogenform unterstützen. Aus praktischen Erwägungen sollte dieses mit einer möglichst geringen Anzahl von Referenzpunkten geschehen, idealerweise mit den schon in der Standardmodellanalyse definierten Zahnpunkten. Die für diese Aufgabe in Frage kommenden Modelle sind also vor allem die idealisierenden Formeln, die symmetrische Formen beschreiben. So stimmen die meisten Autoren überein, dass - auch wenn eine gewisse Asymmetrie keinen Behandlungsbedarf ergibt [54],[72],[130] - eine symmetrische Zahnbogenform aus ästhetischen, funktionellen, aber auch rein technisch-praktischen Gesichtspunkten bei der kieferorthopädischen Behandlung, die Bogenform der Wahl darstellt [41],[81]. Bei festsitzenden kieferorthopädischen Behandlungsgeräten (Multibracketsysteme) kommen fast ausschließlich konfektionierte symmetrische Behandlungsbögen zum Einsatz, vor allem bei der Verwendung von "superelastischen" Bogenmaterialien, wie z.B. NiTi-Le-

gierungen, ist die Bogenform fest vorgegeben und kann nur durch aufwendige, selten praktizierte "Umprogrammierung" des Bogenmaterials verändert werden. Daher ist die initiale Auswahl der Behandlungsbögen vor allem im Hinblick auf die transversalen Dimensionen in den anterioren und posterioren Regionen der Zahnbögen, sowie die Abstimmung der Ober- und Unterkieferzahnbogenformen im Hinblick auf eine adäquate Okklusion von großer Bedeutung, genauso wie die Konsistenz der Bogenform während der gesamten Behandlungszeit, in der bei einem "Bogenwechsel" bewusst Querschnittsformen und Durchmesser des Drahtes variiert werden, die Bogenform aber unverändert bleiben soll.

Mathematische Modelle für diese Zielsetzung sollten weiter robust gegenüber Ausreißern, d.h. ektopisch lokalisierte Einzelzähne sein. In einer Malokklusion sollten also Einzelzähne, die stark außerhalb der virtuellen Idealbogenform stehen, die initiale Bogenformbestimmung möglichst wenig beeinflussen oder auch ganz ausgeblendet werden können. Diese Ansprüche erfüllen vor allem die idealisierenden Modelle der Kettenlinie, der Kegelschnitte, der Betafunktion und bestimmte Polynomansätze, was sich auch in ihrer häufigen Verwendung in der Literatur bestätigt findet. Beispiele für den Einsatz stark idealisierender Modelle bei diesen und ähnlichen Fragestellungen sind z.B. Studien zur Passgenauigkeit von konfektionierten Zahnbögen wie von WHITE [171], ENGEL [50] oder BRAUN [31]. Bei diesen Studien wurde die Form konfektionierter Bögen und der Zahnbögen verschiedener Patienten oder Probanden mit normaler Okklusion mittels stark idealisierenden Modellen wie der Kettenlinie oder der Betafunktion erfasst und miteinander verglichen.

#### **5.1.4 Allgemeines Fazit zur Modellauswahl**

Aus den vorangehenden Kapiteln der Diskussion geht hervor, dass es kein universelles Berechnungsmodell gibt, welches alle Anforderungen gleichzeitig erfüllen kann. Eine durchdachte prospektive Planung bei der Auswahl des Zahnbogenformmodells im Hinblick auf die Zielsetzung und Fragestellung des zu bearbeitenden Problems, ist bei jeder Projektplanung individuell notwendig. Manchmal lässt sich eine gegebene Fragestellung auch nicht völlig eindeutig einer der vorgestellten Kategorien zuordnen – dem entspricht, dass auch die mathematischen Modelle teilweise für verschiedene Kategorien

geeignet sind. Die Kategorien sollen vielmehr bei der Vorüberlegung zur Modellauswahl helfen und eine Richtschnur der zu beachtenden Gesichtspunkte darstellen. Ausgewählt werden sollte immer das Modell, das aufgrund seiner eher exakten oder eher idealisierenden Beschreibung und der Ableitbarkeit der für die Untersuchung relevanten Parameter am geeignetsten erscheint. Diese Einsicht spiegelt sich auch in der breiten und bunt gefächerten Verwendung der verschiedenen in dieser Arbeit vorgestellten Modelle in der Literatur bis zum heutigen Tage wieder. Die mathematische Komplexität einiger Ansätze (wie z.B. der Fourierreihe im Vergleich zu den Spline-Kurven, oder der Betafunktion im Vergleich zu den anderen symmetrischen Ansätzen) mag ein Grund gewesen sein, die jeweils einfacheren Beschreibungen vorzuziehen, jedoch verliert dieses Argument im Hinblick auf den heute standardmäßigen Einsatz von Computern und softwaregestützter Datenauswertung in der Praxis an Relevanz.

Wir empfehlen zur Auswahl eines geeigneten Modells zunächst zu entscheiden, in welche Kategorie der Tabelle 13 die zu behandelnde Fragestellung einzuordnen ist. Dann sollten die in Frage kommenden Modelle anhand ihrer Komplexität und der Möglichkeit zur Extraktion relevanter Parameter weiter selektiert werden. Bleiben immer noch mehrere gleichwertig erscheinende Modelle übrig, sollte das mathematisch einfachste Modell gewählt werden.

Da das Ziel unserer Arbeit die Erstellung eines Werkzeuges zur Verwendung in der Behandlungsplanung während einer kieferorthopädischen Behandlung war, entschieden wir uns zum Einbau des einfachen und dennoch sehr leistungsfähigen Modells der Kettenlinie in den von uns entwickelten Dental Archform Manager (DAM, siehe Kapitel 3), da es sowohl eine gute Passform zu einer breiten Auswahl von Zahnbogenformen hat, als auch die für die Behandlungsplanung wichtige Eigenschaft der Idealisierung der vorhandenen Zahnbogenform aufweist. Zwar hätte z.B. auch ein symmetrisches Polynommodell eine mögliche Wahl sein können, die Kettenlinie stellt aber im direkten Vergleich den mathematisch einfacheren Ansatz dar und wurde deshalb favorisiert.

## **5.2 "Dental Archform Manager" im Vergleich mit ähnlichen Applikationen**

In den folgenden Kapiteln werden zunächst die Anwendungsbereiche des DAM diskutiert, dann folgt ein Vergleich des DAM mit ähnlichen Projekten. In diesem Zusammenhang positionieren wir unser Programm auch im Hinblick auf existierende dreidimensionale Lösungen zum virtuellen "Set-Up". Anschließend wird ein kurzer Ausblick auf mögliche zukünftige Erweiterungen des DAM gegeben.

### **5.2.1 Anwendungsbereiche**

Durch die flexible Konzeption des DAM kann dieser eine vielseitige Hilfe sowohl im klinischen Alltag des Kieferorthopäden, als auch zu wissenschaftlichen Analysezielen im Rahmen von Studien sein. Bei der Therapieplanung kann leicht die initiale Bogenform bestimmt und dadurch ohne spürbaren Mehraufwand für den Behandler in der Therapie exakt berücksichtigt werden. Durch das freie Verschieben der Sollpunkte lassen sich verschiedene Behandlungsszenarien und ihre Auswirkungen auf die Bogenform wesentlich einfacher durchspielen, als dieses ohne Computerunterstützung möglich wäre. Zusätzlich visualisiert der DAM gleichzeitig relevante Normwerte (wie die BSI, die Stützzonen und die transversalen Kieferbreiten), sodass der Behandler auch hier ein optisches, leicht zu interpretierendes Feedback über die Auswirkungen seiner Behandlungsplanung, z.B. auf Engstände im Frontzahnbereich, erhält. Durch die Möglichkeit des "Matchens" der ermittelten Zahnbogenform kann nicht nur der individuellen Bogenform des Patienten am besten angepasste konfektionierte Behandlungsbogen ausgewählt werden, sondern es ergibt sich die interessante Möglichkeit auch allgemein die individuelle Bogenform mithilfe vorgegebener Formen akademisch zu klassifizieren (z.B. BRADER-Bogenform).

### **5.2.2 Vergleich mit ähnlichen Projekten**

Sucht man in der Literatur nach Projekten mit ähnlicher Zielsetzung fällt auf, dass es - obwohl es einige Programme gibt, die sich mit der Beschreibung und Quantifizierung der Zahnbogenform beschäftigen - noch keine Software existiert, die diese Möglichkeit explizit zur Therapieplanung ausnutzt und nur sehr wenige Applikationen, die eine im klinischen Alltag notwendige einfach zu bedienende Benutzeroberfläche mit

Integration aller notwendigen Teilmodule in einer Einheit aufweist. So waren im Rahmen früher Versuche der computergestützten Bogenformbestimmung [17],[18],[19],[20],[23] aus Gründen fehlender Hardwareperformance keine grafischen Benutzeroberflächen möglich, und es konnten keine Fotografien, wie z.B. Aufsichtfotos kieferorthopädischer Gipsmodelle, auf dem Bildschirm dargestellt werden. Für eine grafische Simulation einer dynamisch modifizierbaren farbigen Okklusionslinie bzw. eines Behandlungsbogens, waren weder die Computer noch die Software damals leistungsfähig genug. Diese Programme konnten nach Eingabe der Koordinaten bestimmter Zahnpositionen zwar eine Bogenform berechnen und z.B. über einen Plotter ausdrucken, aber eine interaktive Beeinflussung der Bogenform oder eine grafische Visualisierung weiterer kieferorthopädischer Parameter (abseits von reinen Zahlentabellen) war nicht möglich. Fast alle Publikationen der letzten 50 Jahre, die eine mathematische Beschreibung der Bogenform vornehmen, stützen sich auf Computerhilfe bei der Berechnung, da diese die Arbeit wesentlich erleichtert oder bei Verwendung von "Least-Square"-Verfahren sowie komplizierteren Funktionsmodellen wie den Spline-Kurven oder Fourierreihen diese mit vernünftigem Aufwand gar nicht mehr von Hand durchzuführen wäre. Trotz der computergestützten Auswertung bleibt es aber in fast allen Publikationen bei einem provisorischen oft aus vielen Einzelanwendungen zusammengesetzten Prozess, da keine maßgeschneiderte Softwarelösung entwickelt wurde, oder nur für einen Teilaspekt eigenen Lösungen entwickelt wurden und die Daten dann wenig effektiv in andere Programme zur grafischen Darstellung, Auswertung oder statistischen Bewertung überführt werden müssen.

Viele Autoren nutzen die mathematische Beschreibung der Zahnbogenform, um aus der Länge der resultierende Kurve, die sich leicht berechnen lässt, die Zahnbogenlänge des Patienten zu berechnen. Zwei Autoren stellen entsprechende Programme vor, um dem Behandler diese Arbeit abzunehmen: BRAUN [29] stellt 1999 ein Programm vor, um die Länge des Frontzahnbogens zu ermitteln, NOROOZI [118] 2002 ein Programm, um den Längenzuwachs bei transversaler Expansion des Zahnbogens eines Patienten zu berechnen. Beiden Programmen ist gemein, dass gar keine Koordinaten einzelner Zahnpunkte einzugeben sind, sondern die benötigten Kurven aus direkter Eingabe der Breite und

Höhe des Zahnbogens an definierten Stellen ermittelt wird. Es ist auch keine Visualisierung der Bogenform auf Modellbildern vorgesehen. Da der einzige ermittelte Zielwert die Bogenlänge ist, war dieses nicht vorgesehen und die Darstellung der berechneten Funktion ohne Bezug auf das Modell eher von fragwürdigem Nutzen. Das zeigt sich auch daran, dass beide Autoren eine absolut gleichwertige, sogar ohne Computerunterstützung ausführbare, Alternative anbieten: BRAUN [30] in Form eines Nomogramms<sup>5</sup> und NOROOZI [118] mittels zweier Regressionsformeln. Die von den Autoren vorgestellten Computerprogramme führen lediglich diese (auch manuell mit wenig Aufwand bewältigbaren) Rechnungen für den Behandler durch.

NOROOZI [117] baut sein oben erwähntes Modell zur Bestimmung der Bogenverlängerung bei einer vorgegebenen Verbreiterung des Zahnbogens 2006 in ein Therapieplanungsprogramm ein, das allerdings keine darüber hinausgehende Möglichkeiten zur Bogenformbestimmung oder virtueller interaktiver Modifikation der Bogenform aufweist, sondern eher eine Sammlung von Behandlungsvorschlägen und alternativen Therapiekonzepten aufgrund der vom Behandler eingegeben kieferorthopädischen Anamnese darstellt.

Die Firma GAC bietet ein Programm namens "HAMILTON Arch Tooth System" (H.A.T.S.) an, das mit der Aussage beworben wird "GAC and Dr. DAVID HAMILTON have developed the first computerized system that tells you which size arch form is right for your patient" [66]. Diese Aussage ist insofern irreführend, dass das Programm gar keine Berechnungen der Zahnbogenformen durchführt: Es leitet lediglich aus den Daten einer BOLTON-Analyse eines mittels einer elektronischen Schieblehre vermessenen Kiefermodells über die Zahnbreiten und die transversalen Kieferbreiten ab, welche der sechs Bogengrößen des GAC Ovation Bogensystems (vgl. Kapitel 2.3.2.2 "Bogensysteme der Dentalindustrie") für den Patienten die passende Größe hat [165]. Da alle sechs Bögen dieselbe Form aufweisen und nur verschieden groß sind stellt dieses Prozedere keine Auswahl der bestangepassten Bogenform im Sinne des in dieser Arbeit entwickelten DAM dar, d.h. eine Bestimmung und ein Abgleich der Zahnbogenform mit den Ovation-Bögen durch das Programm findet gar nicht statt, es wird lediglich aufgrund

der Kieferdimensionen nach statischen Regeln eine angeblich "passende" Bogengröße ausgewählt.

TANER [164] stellte 2004 ein System zur "Verfolgung von Bogenformänderung" während und nach einer kieferorthopädischen Behandlung vor. Das System besteht aus mehreren nicht integrierten Programmen. Zwei der Programme sind Eigenentwicklungen, eines welches die Bogenform aus vier vorgegebenen Punkten mittels kubischer Spline-Kurven bestimmt, sowie eines zur Berechnung der Fläche zwischen zwei Zahnbögen zu verschiedenen Zeitpunkten, um die Größe der Formveränderung zu quantifizieren. Zur Berechnung der Statistik und grafischen Überlagerung der Bogenformen kommen kommerzielle Programme zum Einsatz. Die Zahnbögen werden per "Augenmaß" in eine Bogenformklasse nach RICKETTS [137] eingeordnet. Das Programm wurde in der Literatur kritisiert, sowohl für die Benutzung von Spline-Kurven bei geringer vorgegebener Punktzahl und dem daraus resultierendem suboptimalen Verlauf der berechneten Bogenform (die in der gesamten Untersuchung an den Inzisivi weit ab vom realen Zahnbogen verläuft), als auch für die Einteilung in die Bogenformklassen nach Augenmaß [116]. In diesem Zusammenhang ist grundsätzlich zweifelhaft, weshalb TANER [164] überhaupt eine mathematische Bogenform bestimmt, wenn die Einteilung per Augenmaß und Überlagerung auf dem Modellbild erfolgt, da sich der Benutzer offensichtlich eher nach an dem Modellbild als an der berechneten Funktion orientieren wird. Im gegenwärtigen Zustand bietet das Programm keine Hilfe bei der Therapieplanung und scheint aus den oben genannten Kritikpunkten auch zu Studienzwecken eher weniger geeignet zu sein.

Das unserer Meinung nach am weitesten fortgeschrittene Projekt von MUTINELLI [112] (2004) weist zwar die Möglichkeit zur Berechnung der Bogenform mit verschiedenen mathematischen Modellen (Kegelschnitte, Kettenlinie, Polynome und Spline-Kurven) auf, andererseits wird dem Benutzer aber selbst überlassen per Augenmaß die beste Beschreibung auszuwählen, was wiederum eine gewisse Willkür in den Quantifizierungsprozess einfließen lässt. Außerdem weist das Programm zwar eine rudimentäre Datenbankbindung auf (keine vollständige Patientendatenbank, aber eine Möglichkeit der

Speicherung der ausgewerteten Modellbilder und einiger ergänzender Angaben), andererseits müssen für weitere Auswertungen die ermittelten Daten in eine Excel-Tabelle überführt und dann mit externen Programmen weiter verarbeitet werden. Man erkennt, dass dieses Programm hauptsächlich für eine Studie mit dem Ziel Bogenformänderungen während und nach kieferorthopädischen Behandlungen sowie im Wachstum und während des Alterns zu verfolgen entwickelt wurde. So ist speziell durch die Anbindung an die Datenbank vorgesehen, Modelle zu verschiedenen Zeitpunkten zu vergleichen und die gewonnenen Daten zu speichern, jedoch nicht die Bogenform interaktiv beeinflussen zu können, oder weitergehende für die Behandlungsplanung notwendige Daten aus der Standardmodellanalyse einzublenden und zu visualisieren. Die gesamte Bedienoberfläche scheint eher spartanisch und provisorisch und wurde vermutlich nur für eine geringe Anzahl von Benutzern, die wahrscheinlich an der Entwicklung des Programms mitgewirkt haben erstellt.

Obwohl nur peripher mit der mathematischen Bogenformbestimmung verknüpft, soll das eindrucksvolle 1999 von MOTOHASHI [110] vorgestellte System zur dreidimensionalen Vermessung von Kiefermodellen und darauf aufbauender virtueller Behandlungsplanung in einer 3D-CAD-Umgebung nicht unerwähnt bleiben. Nach der dreidimensionalen Digitalisierung der Modelle mit einem Laserscanner und anschließender Nachbearbeitung am Computer durch den Behandler, der die einzelnen Zähne am virtuellen Modell markieren und herausarbeiten muss, können diese am Bildschirm frei ausgerichtet werden. Es kann somit insbesondere auch im Vorfeld kieferchirurgischer Maßnahmen ein "virtuelles Set-Up" durchgeführt werden. Prinzipiell sind auch Therapieplanungen für die kieferorthopädische Behandlungen möglich, allerdings bietet das Programm in dieser Hinsicht keine weiteren Hilfestellungen. Auch die Bestimmung der individuellen Bogenform ist nicht vorgesehen, das Programm bietet lediglich eine Anordnung entsprechend der BONWILL-HAWLEY-Form an, deren Breite im hinteren Bogenbereich manuell vom Behandler auf von ihm gewünschte Werte angepasst werden kann. Die Autoren sind sich dieser Einschränkung bewusst und führen als mögliche zukünftige Erweiterung die Einführung anderer Bogenformmodelle an. Es scheint aber keine Ermittlung der individuellen Bogenform geplant zu sein, sondern die Modelle

sollen eher als Hilfe für die Neuordnung der Zähne verwendet werden. Für alltägliche kieferorthopädische Problemstellungen erscheint das Programm als zu unwirtschaftlich kompliziert und zeitaufwendig. Sein Nutzen liegt vielmehr in der Begleitung der orthognathen Chirurgie und eingeschränkt bei speziellen kieferorthopädischen Behandlung, bei denen ein aufwendiges "virtuelles Set-Up" Vorteile bieten kann.

Im Fazit erscheint der von uns entwickelte DAM in seiner jetzigen Form einzigartig in Hinblick auf die Möglichkeiten zur Unterstützung der Therapieplanung, sowie insbesondere des automatisierten und quantifizierten Abgleichs der individuellen Zahnbogenform mit akademischen Bogenformen und konfektionierten Behandlungsbögen. Der letztere Punkt ist unseres Wissens nach hier erstmals verwirklicht worden. Obwohl dreidimensionale Systeme die Möglichkeit zu einer weit detaillierteren Behandlungsplanung eröffnen, sind die momentanen Systeme noch zu kompliziert, kosten- und zeitintensiv, da Gipsmodelle in kostenintensiven 3D-Scannern digitalisiert werden oder zu Servicefirmen eingeschickt werden müssen. Teilweise werden die Modelle auch im Zuge der Datenermittlung zwangsläufig zerstört [165] und auch die Nutzung von 3D-Software gestaltet sich für den Behandler im klinischen Alltag oft schwer. Daher stellt der DAM einen guten Kompromiss zwischen den erweiterten Möglichkeiten einer computergestützten Therapieplanung und dem Anspruch der einfachen Anwendbarkeit im klinischen Alltag dar und ist eine wertvolle Erweiterung zu den schon routinemäßig verwendeten kephalometrischen Softwarepaketen.

### ***5.2.3 Ausblick und Erweiterungsmöglichkeiten***

Obwohl der DAM mit der Vorgabe ein Werkzeug im klinischen Alltag des Kieferorthopäden zu sein entwickelt worden ist, zeigen sich auch jetzt schon mögliche Anwendungen im Bereich wissenschaftlicher Studien. Die Möglichkeit zu jedem (Zwischen-)Modell eines Patienten die momentane Bogenform festzustellen ermöglicht außerdem eine retrospektive Beurteilung von Bogenformveränderungen. Anstatt des Matchings mit konfektionierten Behandlungsbögen kann der ermittelte Zahnbogen auch mit beliebigen anderen vorgegebenen Bogenformen abgeglichen werden und so z.B. Erhebungen über die Verteilung verschiedener Zahnbogenformen oder den Wechsel von

einer vorgegebenen Bogenformklasse in eine andere im Rahmen einer kieferorthopädischen Behandlung verfolgt werden. Für die Zukunft erscheint eine gezielte Erweiterung des DAM speziell in Hinblick auf wissenschaftliche Studien sowohl wünschenswert als auch vielversprechend. Die Wahl zum Einbau der Kettenlinie als mathematische Beschreibung der Bogenform erfolgte in erster Linie unter Berücksichtigung der besonderen Ansprüche im Rahmen der kieferorthopädischen Therapieplanung (insbesondere Idealisierung und geringe Punktezahl). In einem nächsten Schritt könnte der DAM um weitere in dieser Arbeit vorgestellte mathematische Beschreibungsmodelle (insbesondere Spline-Kurven und ergänzende Methoden zur Verfolgung von Bogenformänderungen wie EDMA oder ähnliche) erweitert werden um die Möglichkeit zur Bearbeitung vielseitiger Fragestellungen weiter zu erhöhen. Es würde sich anbieten, hierfür einen "erweiterten Modus" einzubauen, sodass der Behandler im klinischen Alltag weiterhin effizient und mit einer übersichtlichen Bedienoberfläche arbeiten kann. Für Studienzwecke würden dann im erweiterten Modus alternative mathematische Modelle und Verfahren zur Verfügung stehen und weitere relevante Daten wie z.B. zusätzliche Modellpunkte erhoben werden. Alles in allem würden sich über die jetzt schon mit dem DAM im Rahmen von Studien behandelbaren Fragestellungen noch eine enorme Anzahl zusätzlicher Möglichkeiten ergeben.

**6. Literaturverzeichnis**

- [1] 3M Corp. HQ. 3M Unitek Catalog. St. Paul, USA, 2005:XI.
- [2] 3M Corp. HQ. 3M Unitek Catalog. St. Paul, USA, 2005:Sec.6.
- [3] 3M Corp. HQ. 3M Unitek Catalog. St. Paul, USA, 2005:Sec.6,p.3.
- [4] 3M Corp. HQ. 3M Unitek Catalog. St. Paul, USA, 2005:Sec.6,p.8.
- [5] Alexander RG. The vari-simplex discipline. Part 1. Concept and appliance design. J Clin Orthod. 1983;17:380-92.
- [6] Alexander RG. The vari-simplex discipline. Part 2. Nonextraction treatment. J Clin Orthod. 1983;17:474-82.
- [7] Alexander RG. The vari-simplex discipline. Part 3. Extraction treatment. J Clin Orthod. 1983;17:537-47.
- [8] Alexander RG. The vari-simplex discipline. Part 4. Countdown to retention. J Clin Orthod. 1983;17:619-25.
- [9] Alexander RG. The vari-simplex discipline. Part 5. Practice management. J Clin Orthod. 1983;17:680-7.
- [10] American Orthodontics. American Orthodontics Catalog. Sheboygan, 2005:132.
- [11] Anderson RL, Houseman EE. Tables of orthogonal polynomial values extended to N=104. Res Bull Iowa Agric Exp Stn. 1942;297.
- [12] Andreiko C, Payne MA. On archwire coordination. Clinical Impressions. 1995;4:2-5.
- [13] Andrews LF. Composites. I: straight-wire, the concept and appliance. San Diego, Calif: L.A. Wells, 1989:13-33.
- [14] Angle EH. Treatment of malocclusion of the teeth. 7th edn. Philadelphia: SS White and Company, 1907.
- [15] Archwired. A Brief History of Braces.  
<http://www.archwired.com/HistoryofOrtho.htm>.
- [16] Battagel JM. Individualized catenary curves: their relationship to arch form and perimeter. Br J Orthod. 1996;23:21-8.
- [17] BeGole EA. A computer program for the analysis of dental arch form using the catenary curve. Comput Programs Biomed. 1981;13:93-9.
- [18] BeGole EA. A computer program for the analysis of dental arch form using the cubic spline function. Comput Programs Biomed. 1979;10:136-42.
- [19] BeGole EA. Application of the cubic spline function in the description of dental arch form. J Dent Res. 1980;59:1549-56.
- [20] BeGole EA. Computer based methodology for construction of orthodontic arch wire templates. Comput Programs Biomed. 1984;19:61-8.

- [21] BeGole EA, Fox DL, Sadowsky C. Analysis of change in arch form with premolar expansion. *Am J Orthod Dentofacial*. 1998;113:307-15.
- [22] BeGole EA, Lyew RC. A new method for analyzing change in dental arch form. *Am J Orthod Dentofacial*. 1998;113:394-401.
- [23] Biggerstaff RH. Three variations in dental arch form estimated by a quadratic equation. *J Dent Res*. 1972;51:1509.
- [24] Black GV. *Descriptive anatomy of the human teeth*. 3rd edn. Philadelphia: Wilmington Dental Manufacturing Company, 1894.
- [25] Bonwill WGA. Geometrical and mechanical laws of articulation, *Tr Odont Soc Penn*. 1885;119-33.
- [26] Brader AC. Dental arch form related with intraoral forces:  $PR=C$ . *Am J Orthod*. 1972;61:541-61.
- [27] Braun S, Hnat WP. Dynamic relationships of the mandibular anterior segment. *Am J Orthod Dentofacial Orthop*. 1997;111:518-24.
- [28] Braun S, Hnat WP, Fender DE, Legan HL. The form of the human dental arch. *Angle Orthod*. 1998;68:29-36.
- [29] Braun S, Hnat WP, Kusnoto B, Hnat TW. A new accurate approach to the anterior ratio with clinical applications - Part I: A computer program. *Am J Orthod Dentofacial Orthop*. 1999;115:368-72.
- [30] Braun S, Hnat WP, Kusnoto B, Hnat TW. A new accurate approach to the anterior ratio with clinical applications - Part II: A nomographic solution. *Am J Orthod Dentofacial Orthop*. 1999;115:494-7.
- [31] Braun S, Hnat WP, Leschinsky R, Legan HL. An evaluation of the shape of some popular nickel titanium alloy preformed arch wires. *AM J Orthod Dentofacial*. 1999;116:1-12.
- [32] Brezniak N, Wasserstein A. Orthodontically induced inflammatory root resorption. Part II: The clinical aspects. *Angle Orthod*. 2002;72:180-4.
- [33] Brezniak N, Wasserstein A. Root resorption after orthodontic treatment: Part 2. Literature review. *Am J Orthod Dentofacial Orthop*. 1993;103:138-46.
- [34] Burdi AR. Morphogenesis of mandibular dental arch shape in human embryos. *J Dent Res*. 1968;47:50-8.
- [35] Burdi AR, Lillie JH. A catenary analysis of the maxillary dental arch during human embryogenesis. *Anat Rec*. 1966;154:13-20.
- [36] Burris BG, Harris EF. Maxillary arch size and shape in american blacks and whites. *Angle Orthod*. 2000;70:297-302.
- [37] Burstone CJ. on the uses of the computer in orthodontic practice. *J Clin Orthod*. 1979;13:442-53, 539-51.

- [38] Chen SYY, Lestrel PE, Kerr WJS, McColl JH. Describing shape changes in the human mandible using elliptical Fourier functions. *Eur J Orthod.* 2000;22:205-16.
- [39] Chuck GC. Ideal arch form. *Angle Orthod.* 1934;4:312-27.
- [40] Coombs CL, Deming DC. Evaluation of dental arch form during and following orthodontic treatment as determined by spline curves (MS Thesis). Portland: University of Oregon, 1979.
- [41] Currier JH. A computerized geometric analysis of human dental arch form. *Am J Orthod.* 1969;56:164-79.
- [42] Damon DH. The Damon low-friction bracket: a biologically compatible straight-wire system. *J Clin Orthod.* 1998;32:670-80.
- [43] Damon DH. The rationale, evolution and clinical application of the self-ligating bracket. *Clin Orthod Res.* 1998;1:52-61.
- [44] Davis LM, BeGole EA. Evaluation of orthodontic relapse using the cubic spline function. *Am J Orthod Dentofacial.* 1998;113:300-6.
- [45] de la Cruz A, Sampson P, Little RM, Artun J, Shapiro PA. Long-term changes in arch form after orthodontic treatment and retention. *Am J Orthod Dentofacial.* 1995;107:518-30.
- [46] Dentaurem J.P. Winkelstroeter KG. *Dentaurem Drahtmanual.* Ispringen, 2004:7.
- [47] Dentaurem J.P. Winkelstroeter KG. *Dentaurem Drahtmanual.* Ispringen, 2004:198ff.
- [48] Dentaurem J.P. Winkelstroeter KG. *Dentaurem Drahtmanual.* Ispringen, 2004:212.
- [49] Diggs DB. The quantification of arch form (M.S.D. Thesis). Seattle: University of Washington, 1982.
- [50] Engel GA. Preformed arch wires: Reliability of fit. *Am J Orthod.* 1979;76:497-504.
- [51] Evans M, Hastings N, Peacock B. *Statistical distributions.* 3<sup>rd</sup> ed., New York: Wiley, 2000:34-42.
- [52] Felton MJ, Sinclair PM, Alexander RG. A computerized analysis of the shape and stability of mandibular arch form, *Am J Orthod.* 1987;92:478-83.
- [53] Ferrario VF, Sforza C, Colombo A, Carvajal R, Duncan V, Palomino H. Dental arch size in healthy human permanent dentitions: Ethnic differences as assessed by discriminant analysis. *Int J Adult Orthod Orthognath Surg.* 1999;14:153-62.
- [54] Ferrario VF, Sforza C, Colombo A, Miani A Jr, D'Addona A. Position and asymmetry of teeth in untreated dental arches. *Int J Adult Orthodon Orthognath Surg.* 1993;8:277-85.

- [55] Ferrario VF, Sforza C, Miani A Jr, Tartaglia G. Mathematical definition of the shape of dental arches in human permanent healthy dentitions. *Eur J Orthod.* 1994;16:287-94.
- [56] Fischer H, Kaul H. *Mathematik für Physiker 1. 2. Auflage*, Stuttgart: B.G. Teubner, 1983:61.
- [57] Fischer H, Kaul H. *Mathematik für Physiker 1. 2. Auflage*, Stuttgart: B.G. Teubner, 1983:380.
- [58] Fisher RA, Yates F. *Statistical tables for biological, agricultural, and medical research*. New York: Hafner, 1957:90-100.
- [59] Forestadent Bernhard Förster GmbH. *Forestadent Katalog Nr. 30*. Pforzheim, 2006:Kapitel 4.
- [60] Forestadent Bernhard Förster GmbH. *Forestadent Katalog Nr. 30*. Pforzheim, 2006:6.
- [61] Forestadent Bernhard Förster GmbH. *Forestadent Katalog Nr. 30*. Pforzheim, 2006:Kapitel 4,S.12.
- [62] Frech DK. *Longitudinal analysis of arch form stability ten years postretention (M.S.D. Thesis)*. Seattle: University of Washington, 1988.
- [63] Freitas KMS, de Freitas MR, Henriques JFC, Pinzan A, Janson G. Postretention relapse of mandibular anterior crowdings in patients treated without mandibular premolar extraction. *Am J Orthod Dentofacial Orthop* 2004;125:480-7.
- [64] Fujita K, Takada K, QianRong G, Shibata T. Patterning of Human Dental Arch Wire Blanks using a Vector Quantization Algorithm. *Angle Orthod.* 2002;72:285-94.
- [65] GAC International Inc. *GAC Catalog 12*. Bohemia, 2007.
- [66] GAC International Inc. *GAC Catalog 12*. Bohemia, 2007:109.
- [67] GAC International Inc. *GAC Catalog 12*. Bohemia, 2007:111.
- [68] GAC International Inc. *GAC Catalog 12*. Bohemia, 2007:123.
- [69] Gauß CF. *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*. Hamburg: Perthes and Besser, 1809.
- [70] Germane N, Lindauer SJ, Rubenstein LK, Revere JH, Isaacson RJ. Increase in arch perimeter due to orthodontic expansion. *Am J Orthod Dentofacial.* 1991;100:421-7.
- [71] Gill, P E, Murray W. Algorithms for the solution of the nonlinear least-squares problem. *SIAM J Numer Anal.* 1978;15:977-92.
- [72] Gottlieb EL. A farewell to symmetry. *J Clin Orthod.* 1993;27:357-8,360.
- [73] Graf H, Ehmer U. Das Rezidiv der transversalen Erweiterung bei Kompression mit frontalem Engstand. *Fortschr Kieferorthop.* 1970;31:175-86.

- [74] Hawley CA. Determination of the normal arch and its application to orthodontia. *Dental Cosmos*. 1905;47:541-52.
- [75] Hayashi T. A mathematical analysis of the dental arch. *Bull Tokyo Med Dent Univ*. 1956;3:175-218.
- [76] Hechter FJ. Symmetry and dental arch form of orthodontically treated patients. *J Canad Dent Assn*. 1978;44:173-84.
- [77] Hellmann M. Dimension vs. form in teeth and their bearing on the morphology of the dental arch. *Int J Orthodontia*. 1919;5:615-51.
- [78] Henrikson J, Persson M, Thilander B. Long-term stability of dental arch form in normal occlusion from 13 to 31 years of age. *Eur J Orthod*. 2001;23:51-61.
- [79] Hnat WP, Braun S, Chinchara A, Legan HL. The relationship of arch length to alterations in dental arch width. *Am J Orthod Dentofacial Orthop*. 2000;118:184-8.
- [80] Huck L, Kahl-Nieke B, Schwarze CW, Schüssele B. Postretention changes in canine position. *J Orofac Orthop*. 2000;61:199-206.
- [81] Izzard G. New method for the determination of the normal arch by the function of the face. *Int J Orthod*. 1927;13:582-595.
- [82] Jering F, Miethke R. Engstand in der Unterkieferfront und Dehnungstherapie. *Prakt Kieferorthop*. 1988;2:93-8.
- [83] Jones ML, Richmond S. An assessment of the fit of a parabolic curve to pre- and post-treatment dental arches. *Br J Orthod*. 1989;16:85-93.
- [84] Kageyama T, Domínguez-Rodríguez GC, Vigorito JW, Deguchi T. A morphological study of the relationship between arch dimensions and craniofacial structures in adolescents with Class II Division 1 malocclusions and various facial types. *Am J Orthod Dentofacial*. 2006;129:368-75.
- [85] Knak S. *Praxisleitfaden Kieferorthopädie*. München: Urban & Fischer, 2004:138-139.
- [86] Kojima T, Sohmura T, Wakabayashi K, Kinuta S, Nagao M, Dei N, Nakamura T, Takahashi J. Computer-assisted morphological analysis of dental casts with maxillary prognathism and reversed occlusion. *J Oral Rehabil*. 2004;31:29-34.
- [87] Lang G, Alfter G, Göz G, Lang GH. Retention and stability - Taking various treatment parameters into account. *J Orofac Orthop*. 2002;63:26-41.
- [88] Lavelle CL. The shape of the dental arch. *Am J Orthod*. 1975;67:176-84.
- [89] Lavelle CL, Plant CG. Comparison between the right and the left sides of the dental arch. *J Dent Res*. 1969;48:971.
- [90] Legendre AM. *Nouvelle méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. Paris: Courcier, 1805.
- [91] Lehmann M. *Einführung in die Zahnersatzkunde*. 5. Auflage. Urban & Schwarzenberg, 1985:57, Abb.1-57.

- [92] Lele S, Richtsmeier JT. Euclidean distance matrix analysis: A coordinate-free approach for comparing biological shape using landmark data. *Am J Phys Anthropol.* 1991;86:415-27.
- [93] Lele S. Euclidean Distance Matrix Analysis (EDMA): Estimation of Mean Form and Mean Form Difference. *Math Geol.* 1993;25:573-602.
- [94] Lestrel PE. A new method for analyzing complex two-dimensional forms: elliptical Fourier functions. *Am J Hum Biol.* 1989;1:149-64.
- [95] Lestrel PE. Fourier descriptors and their applications in biology. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [96] Lestrel PE, Takahashi O, Kanazawa E. A quantitative approach for measuring crowding in the dental arch: Fourier descriptors. *Am J Orthod Dentofacial Orthop.* 2004;125:716-25.
- [97] Levenberg K. A method for the solution of certain problems in least squares. *Quart Appl Math.* 1944;2:164-8.
- [98] Lighthill, MJ. Einführung in die Theorie der Fourier-Analyse und der verallgemeinerten Funktionen. Mannheim: Bibliographisches Institut, 1966:11.
- [99] Lotzmann U. Die Prinzipien der Okklusion. 2. Auflage. München: Verlag Neuer Merkur GmbH, 1985:78,Abb.79.
- [100] Lu KH. Analysis of dental arch symmetry. *J Dent Res.* 1964;43:780.
- [101] Lu KH. An orthogonal analysis of the form, symmetry and asymmetry of the dental arch. *Arch Oral Biol.* 1966;11:1057-69.
- [102] MacConaill MA, Scher EA. The ideal form of the human dental arcade, with some prosthetic application. *Dent Rec (London).* 1949;69:285-302.
- [103] Marquardt D. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM J Appl Math.* 1963;11:431-41.
- [104] McKee JK, Molnar S. Mathematical and descriptive classification of variations in dental arch shape in an Australian aborigine Population. *Arch Oral Biol.* 1988;33:901-6.
- [105] McLaughlin RP, Bennett JC. Arch form considerations for stability and esthetics. *Rev Esp Ortod.* 1999;29:46-63.
- [106] McLaughlin RP, Bennett JC. Betrachtungen zur Bogenform unter Berücksichtigung von Stabilität und Ästhetik. *IOK.* 1999;31:179-99.
- [107] McLaughlin RP, Bennett JC, Trevesi HJ. Behandlungskonzept der vorprogrammierten Apparatur (Systemized Orthodontic Treatment Mechanics). München: Urban & Fischer, 2004:71-85.
- [108] Mills LF, Hamilton PM. Epidemiological studies of malalignment, a method for computing dental arch circumference. *Angle Orthod.* 1965;35:244-8.

- [109] Mischke KL. Präsentation kieferorthopädischer 'Case Reports' im Netzwerk der Poliklinik für Kieferorthopädie Münster. *Kieferorthopädie Nachrichten*. 2004;3:11-3.
- [110] Motohashi N, Kuroda T. A 3D computer-aided design system applied to diagnosis and treatment planning in orthodontics and orthognathic surgery. *Eur J Orthod*. 1999;21:263-74.
- [111] Musich DR, Ackerman JL. The cantenometer, a reliable device for estimating dental arch perimeter. *Am J Orthod*. 1973;63:366-75.
- [112] Mutinelli S, Cozzani M, Manfredi M, Siciliani G. Dental arch analysis system. *Prog Orthod*. 2004;5:200-8.
- [113] Mutinelli S, Manfredi M, Cozzani M. A mathematic-geometric model to calculate variation in mandibular arch form. *Eur J Orthod*. 2000;22:113-25.
- [114] Nojima K, McLaughlin RP, Isshiki Y, Sinclair PM. A comparative study on Caucasian and Japanese mandibular clinical arch forms. *Angle Orthod*. 2001;71:195-200.
- [115] Noroozi H. Commentary. *Angle Orthod*. 2000;70:271-5.
- [116] Noroozi H. Commentary. *Am J Orthod Dentofacial Orthop*. 2004;126:475-6.
- [117] Noroozi H. Orthodontic treatment planning software. *Am J Orthod Dentofacial Orthop*. 2006;129:834-7.
- [118] Noroozi H, Djavid GE, Moeinzad H, Teimouri AP. Prediction of arch perimeter changes due to orthodontic treatment. *J Orthod Dentofacial Orthop*. 2002;122:601-7.
- [119] Noroozi H, Nik TH, Saeeda R. The dental arch from revisited. *Angle Orthod*. 2001;71:386-389.
- [120] Noroozi H, Saeeda R. Interrelationship between the width, depth, and perimeter of the dental arch. *Int J Adult Orthod Orthognath Surg*. 2000;15:69-71.
- [121] Numata H, Kato S, Odagiri Y. Geometrical analysis of the curve of dental arch. *The Numata Medical Institute Bulletin*. 1950;2,1.
- [122] Ormco Corp. HQ. Ormco Catalog. Orange, USA, 2006:Sec.I,p.7.
- [123] Ormco Corp. HQ. Ormco Catalog. Orange, USA, 2006:Sec.I,p.14.
- [124] Ormco Corp. HQ. Ormco Catalog. Orange, USA, 2007:Sec.5.
- [125] Ormco Corp. HQ. Ormco Catalog. Orange, USA, 2007:Sec.5,p.8.
- [126] Ormco Corp. HQ. Ormco Catalog. Orange, USA, 2007:Sec.5,p.10.
- [127] Ormco Corp. HQ. Ormco Catalog. Orange, USA, 2007:Sec.5,p.13.
- [128] Ormco Corp. HQ. Ormco Catalog. Orange, USA, 2007:Sec.5,p.18.
- [129] Ormco Corp. HQ. Ormco Catalog. Orange, USA, 2007:Sec.5,p.23.
- [130] Pepe SH. Polynomial and catenary curve fits to human dental arches. *J Dent Res*. 1975;54:1124-32.

- [131] Phoenix Orthodontics Corp. HQ. Phoenix Orthodontics Catalog. Blue Springs, USA, 2004:5.
- [132] Pont A. Der Zahn-Index in der Orthodontie. *Z Zahnärztl Orthop.* 1909;3:306-21.
- [133] Press, WH. Numerical recipes in C – the art of scientific computing. 2<sup>nd</sup> ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1992:113ff.
- [134] Proffit WR, Fields HW. Contemporary orthodontics. 3<sup>rd</sup> ed. St. Louis: Mosby, 2000:3.
- [135] Raberin M, Laumon B, Martin JL, Brunner F. Dimensions and form of dental arches in subjects with normal occlusions. *Am J Orthod Dentofacial.* 1993;104:67-72.
- [136] Richards LC, Townsend GC, Brown T, Burgess VB. Dental arch morphology in south australian twins. *Arch Oral Biol.* 1990;35:983-9.
- [137] Ricketts RM, Bench RW, Gugino CF, Hilgers JJ, Schulhof RJ. Bioprogressive Therapie. 3. durchges. Aufl. Heidelberg: Hüthig, 1995.
- [138] Rocky Mountain Orthodontics HQ. RMO Catalog. Denver, 2003:166ff.
- [139] Rocky Mountain Orthodontics HQ. RMO Catalog. Denver, 2003:167.
- [140] Rocky Mountain Orthodontics HQ. RMO Catalog. Denver, 2003:168.
- [141] Rocky Mountain Orthodontics HQ. RMO Catalog. Denver, 2003:183.
- [142] RMO Diagnostic Services, P.O. Box 40999, Denver, CO 80204. RMDS Syllabus. p.71.  
<http://www.rmortho.com/media/print/pdf/eceph/syllabusfinal.pdf>
- [143] Rothe R. Höhere Mathematik – Teil I. 8. Auflage. Leipzig: BG Teubner, 1948:70.
- [144] Roux W. Die Entwicklungsmechanik. Ein neuer Zweig der biologischen Wissenschaft. Leipzig, 1895.
- [145] Royce WW. Managing the development of large software systems. Proceedings of IEEE WESCON, 1970;328-38.
- [146] Rüsing, MV. Transversale Entwicklung von Ober- und Unterkieferalveolarfortsätzen bei Schulkindern unter Berücksichtigung differenter Angle-Klassen. Dissertation, Universität Münster, Fachbereich Medizinische Fakultät, 2005.  
<http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:6-26649402875>
- [147] Russell CM, Thompson WO. A statistical artifact. *Am J Orthod Dentofacial.* 1998;113:22-3.
- [148] Sampson PD. Dental arch shape: a statistical analysis using conic sections. *Am J Orthod.* 1981;79:535-48.
- [149] Sampson PD. Statistical analysis of arch shape with conic sections. *Biometrics.* 1983;39:411-23.

- [150] Sanin C, Savara BS, Thomas DR, Clarkson QD. Arc length of the dental arch estimated by multiple regression. *J Dent Res.* 1970;49:885.
- [151] Schmuth GPF, Holtgrave EA, Drescher D. *Kieferorthopädie: Klinische Technik.* Stuttgart, New York: Thieme, 1997:51-3.
- [152] Schmuth GPF, Vardimon AD. *Kieferorthopädie.* 3. Auflage. Stuttgart: Thieme, 1994:328.
- [153] Schulhof R, Gottlieb EL. Rocky Mountain Data Systems. *J Clin Orthod.* 1975;9:776-93.
- [154] Schumacher GH, Ehler E, Brune K, Pfau H. Untersuchung über die geometrische Form des Zahnbogens und des Alveolarfortsatzbogens bei Erwachsenen. *Dtsch Stomat.* 1970;20:729-37.
- [155] Scott JH. The shape of the dental arches. *J Dent Res.* 1957;36:996-1003.
- [156] Seto BH, Gotsopoulos H, Sims MR, Cistulli PA. Maxillary morphology in obstructive sleep apnoea syndrome. *Eur J Orthod.* 2001;23:703-14.
- [157] Shapiro PA. An investigation of the mandibular dental arch in orthodontically treated cases at least 10 years out of retention (M.S.D. Thesis). Seattle: University of Washington, 1973.
- [158] Shapiro PA. Mandibular dental arch form and dimension. Treatment and postretention changes. *Am J Orthod.* 1974;66:58-70.
- [159] Sicher H. *Oral anatomy.* 2nd ed. St. Louis: The CV Mosby Company, 1974.
- [160] Smile Dental Handelsgesellschaft mbH. *Smile Dental Katalog.* Düsseldorf, 2006:1.
- [161] Stanton FL. Arch predetermination and a method of relating the predetermined arch to the malocclusion to show minimum tooth movement. *Int J Orthodontia.* 1922;8:757-78.
- [162] Strubecker K. *Einführung in die höhere Mathematik. Band II: Differentialrechnung einer reellen Veränderlichen.* München: Oldenbourg, 1967:343ff.
- [163] Sved A. The application of engineering methods to orthodontics. *Am J Orthod.* 1952;38:399-421.
- [164] Taner T, Ciğer S, El H, Germeç D, Es A. Evaluation of dental arch width and form changes after orthodontic treatment and retention with a new computerized method. *Am J Orthod Dentofacial Orthop.* 2004;126:464-76.
- [165] Tomassetti JJ, Taloumis LJ, Denny JM, Fischer JR. A comparison of 3 computerized Bolton tooth-size analyses with a commonly used method. *Angle Orthod.* 2001;71:351-7.
- [166] Tsai HH. A computerized analysis of dental arch morphology in early permanent dentition. *ASDC J Dent Child.* 2002;69:259-65.

- [167] Valenzuela AP, Pardo MA, Yezioro S. Description of dental arch form using the Fourier series. *Int J Adult Orthod Orthognath Surg.* 2002;17:59-65.
- [168] Walz G (Red.). *Lexikon der Mathematik. Band 3.* Heidelberg: Spektrum, Akademischer Verlag, 2001:416f.
- [169] Wheeler RC. *A textbook of dental anatomy and physiology.* 2nd ed. Philadelphia: WB Saunders Co., 1950:196-215, 352-406.
- [170] White LW. Accurate arch-discrepancy measurements. *Am J Orthod.* 1977;72:303-8.
- [171] White LW. Individualized ideal arches. *J Clin Orthod.* 1978;12:779-87.
- [172] Wichelhaus A. *Die Entwicklung und klinische Anwendung superelastischer Bögen und Teilbögen in der Kieferorthopädie.* Berlin: Quintessenz-Verlag, 1999.
- [173] Wichelhaus A. *Die Entwicklung und klinische Anwendung superelastischer Bögen und Teilbögen in der Kieferorthopädie.* Berlin: Quintessenz-Verlag, 1999:16.
- [174] Wichelhaus A. *Die Entwicklung und klinische Anwendung superelastischer Bögen und Teilbögen in der Kieferorthopädie.* Berlin: Quintessenz-Verlag, 1999:65ff.
- [175] Wikipedia. Cosinus Hyperbolicus.  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Cosinus\\_Hyperbolicus](http://de.wikipedia.org/wiki/Cosinus_Hyperbolicus).
- [176] Wikipedia. Fortran.  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Fortran>.
- [177] Wikipedia. Interpolation.  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Interpolation>.
- [178] Wikipedia. Iteration.  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Iteration>.
- [179] Wikipedia. Kegelschnitt.  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Kegelschnitt>.
- [180] Wikipedia. Nomogramm.  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Nomogramm>.
- [181] Wikipedia. Normierung.  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Normalisierung\\_%28Mathematik%29](http://de.wikipedia.org/wiki/Normalisierung_%28Mathematik%29).
- [182] Wikipedia. Runges Phänomen.  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Runges\\_Ph%C3%A4nomen](http://de.wikipedia.org/wiki/Runges_Ph%C3%A4nomen).
- [183] Wikipedia. Straklatte.  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Straklatte>.
- [184] Wikipedia. Wahrscheinlichkeitsverteilung.  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Wahrscheinlichkeitsverteilung>.

- [185] Wikipedia. Wasserfallmodell.  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Wasserfallmodell>.
- [186] Williams PN. Determining the shape of the normal arch. *Dent Cosmos*.  
1917;59:695-708.
- [187] Williams P, Roberts-Harry D, Sandy J. Orthodontics. Part 7: Fact and fantasy in  
orthodontics. *Br Dent J*. 2004;196:143-8.
- [188] Wolff J. Gesetz der Transformation der Knochen. Berlin. In: Wessinghage D  
(Hrsg.) Reprint. Stuttgart, 1892.

**7. Danksagung**

Besonders möchte ich mich bei Prof. Dr. Ulrike Ehmer bedanken, die mir die interessante Aufgabe der Entwicklung eines computergestützten Bogenform-Analyse-Moduls zur Bogenformbeschreibung und Therapieplanungsunterstützung überließ und deren Erfahrung im Bereich der Kieferorthopädie wertvolle Anregungen für die Arbeit lieferte.

Weiterhin gilt mein besonderer Dank Prof. Dr. Lifeng Chi, die mir durch ihre Unterstützung meines Promotionsvorhabens dieses erst ermöglichte und immer Verständnis für meine dadurch teilweise eingeschränkte Zeitplanung hatte.

Bei OA Dr. Karl-Ludwig Mischke möchte ich mich für seine intensive Begleitung meiner Arbeit und die vielen Diskussion und Anregungen gerade die medizinischen Aspekte und die Anwendbarkeit im klinischen Alltag betreffend bedanken. Außerdem hatte er immer ein offenes Ohr für alle Probleme und Hindernisse auf die ich im Laufe der Arbeit gestoßen bin.

Bedanken möchte ich mich auch bei Jörg Zimmer für die nette Arbeitsatmosphäre in unserem gemeinsamen Büro sowie den vielen kleinen und größeren Hilfen bei technischen Problemen.

Zuletzt (aber bestimmt nicht am wenigsten) möchte ich meinem Freund Bastian Beck danken für die Unterstützung im gesamten Verlauf meiner Arbeit. Er hielt mir wann immer nötig den Rücken frei, insbesondere in der Endphase der Dissertation.

**8. Lebenslauf****A. Persönliche Daten**

*Name:* Hirtz  
*Vorname:* Michael  
*Wohnort:* Lüder-Clüver-Straße 7, 28779 Bremen  
*Geburtsort:* Coesfeld  
*Geburtsdatum:* 07.03.1979  
*Staatsangehörigkeit:* deutsch  
*Familienstand:* ledig  
*Eltern:* Margret Hirtz geb. Ripperda  
Hugo Hirtz

**B. Ausbildung**

*01.08.1985-* Martinschule Brink, Coesfeld  
*09.06.1989*  
*01.08.1989-* Städtisches Heriburg-Gymnasium Coesfeld  
*08.06.1998*  
*08.06.1998* Abitur, Coesfeld  
*01.07.1998-* Zivildienst im St.-Laurentius-Stift Coesfeld  
*31.07.1999*  
*15.10.1999-* Studium der Physik an der Westfälischen Wilhelms-Universität  
*18.03.2005* Münster  
*18.03.2005* Diplom an der WWU Münster

**C. Beruf**

*01.02.2002* Studentische Hilfskraft in der Poliklinik für Kieferorthopädie des  
*31.03.2005* Universitätsklinikums Münster  
*01.04.2005-* Praktikum an der Jilin-Universität, Changchun, China  
*31.05.2005*  
*01.06.2005-* Wissenschaftliche Hilfskraft am Physikalischen Institut der WWU  
*30.11.2005* Münster  
*Seit 01.12.2005* Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Physikalischen Institut der  
WWU Münster

Münster, den 25.07.2007

**Anhang****Abbildungsverzeichnis**

Abbildung 1: Intraorales Foto - Primärer Engstand.....	3
Abbildung 2: Initiale Phase der Multibrackettherapie.....	3
Abbildung 3: Endphase der Multibrackettherapie .....	4
Abbildung 4: Intraorales Foto - kurz nach MB-Entfernung.....	4
Abbildung 5: Rezidiv - zwei Jahre nach Behandlungsabschluß.....	5
Abbildung 6: Bonwill-Hawley-Bogenformkonstruktion.....	10
Abbildung 7: Kettenlinie auf Gipsmodell, aus MacConaill [102].....	11
Abbildung 8: Zahnbogenform nach Sved [163].....	12
Abbildung 9: Catenometer, adaptiert nach Burdi [35].....	13
Abbildung 10: Punkte für äußere (A/D), mittlere (B/E) und innere (C/F) Kurven von Currier [41].....	14
Abbildung 11: Zitationsverknüpfungen der vorgestellten Literatur.....	23
Abbildung 12: Punkte auf Inzisalkanten und Höckerspitzen [19].....	25
Abbildung 13: "Facial axis points" (rot markiert) nach Fujita [64].....	26
Abbildung 14: Antagonistische Kontaktpunkte auf Gipsmodellen.....	28
Abbildung 15: Die "Line of Occlusion" nach Proffit [134].....	29
Abbildung 16: Unterschiedlicher Kurvenverlauf bei gleichen vorgegebenen Punkten.....	30
Abbildung 17: Publikationsanzahl zu den einzelnen Modellen (Gesamtanzahl 82).....	33
Abbildung 18: Kettenlinie [12].....	34
Abbildung 19: Drei Repräsentanten der Kettenlinie.....	36
Abbildung 20: Die verschiedenen Kegelschnitte [179].....	37
Abbildung 21: Vier Repräsentanten der Kegelschnitte (Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel).....	39
Abbildung 22: Runge-Funktion mit Interpolationspolynom 5. (links) u. 10. Grades (rechts) [182].....	42
Abbildung 23: Auswirkung der Parameter b1 und b3 auf das orthogonale Polynom aus Lu [101].....	44
Abbildung 24: Drei beispielhafte Repräsentanten für Polynome.....	45
Abbildung 25: Drei Repräsentanten der modifizierten Betaverteilung.....	47
Abbildung 26: Definition der Parameter der Betafunktion nach Braun [28].....	48
Abbildung 27: Beispiel zum "Least-Square"-Verfahren.....	56
Abbildung 28: Die Funktion $F(x,y) = 7 \sin((x/3+1)*y/1,7)+(x^2+1/8y^2)$ .....	58
Abbildung 29: Behandlungsgerät "Bandeau" [15].....	62
Abbildung 30: Temperaturabhängigkeit der Materialparameter von Memory-Legierungen [173].....	66
Abbildung 31: Bögen verschiedener Form (links, rechts) und unterschiedlicher Größe (rechts).....	69
Abbildung 32: Bogenformklassen kommerzieller Bogensysteme.....	71
Abbildung 33: Bonwill-Hawley-Bogenformkonstruktion.....	74
Abbildung 34: Bogenformen nach Brader [26].....	75
Abbildung 35: Penta-Morphic Arches nach Ricketts [137].....	76
Abbildung 36: Bogenformen nach McLaughlin [106].....	77
Abbildung 37: Bogenschablone "Alexander Vari-Simplex".....	79
Abbildung 38: Bogenschablone "Damon SL Universal Archform".....	80
Abbildung 39: Bogenschablone "Orthos" der Firma Ormco.....	81
Abbildung 40: Bogenschablone "Tru-Arch Form".....	82
Abbildung 41: Ormco "Standard Arch" Bögen [129].....	83
Abbildung 42: Ormco "Broad Arch" Bogenform [127].....	84
Abbildung 43: 3M Unitek "OrthoForm" Bogenform [3].....	85
Abbildung 44: 3M Unitek "Standard" Bogenform [4].....	86
Abbildung 45: Dentaurum "Ricketts PENTA" Bogenform, adaptiert nach [48].....	87
Abbildung 46: Dentaurum "Idealbogen" Bogenform, adaptiert nach [47].....	88
Abbildung 47: RMO "Penta-Morphic Arches" Bogenform [139].....	89
Abbildung 48: RMO "Natural Arches"-Bögen, adaptiert nach [140].....	90
Abbildung 49: RMO "Ideal Arches"-Bögen, adaptiert nach [140].....	90
Abbildung 50: RMO "Anterior Contour Arches" Bogen [141].....	91
Abbildung 51: Forestadent "Straight-Arch"-Bögen, adaptiert nach [60].....	92

Abbildung 52: Forestadent "Euro-Smile"-Bögen, adaptiert nach [60].....	93
Abbildung 53: Bonwill-Hawley-Bogenform von Forestadent [61].....	93
Abbildung 54: "Standard"-Bögen von GAC, adaptiert nach [67].....	94
Abbildung 55: "Ideal"-Bögen von GAC, adaptiert nach [67].....	94
Abbildung 56: "Ovation"-Bogensystem von GAC [66].....	95
Abbildung 57: "Standard"-Bogenform von GAC, adaptiert nach [68].....	96
Abbildung 58: "Natural Arch Form"-Bogensystem von American Orthodontics [10].....	97
Abbildung 59: "Brader Arch"-Bogenform von American Orthodontics [10].....	98
Abbildung 60: "Bonwill Hawley Arch"-Bogenform von American Orthodontics [10].....	98
Abbildung 61: "Rick-Form"-Bogensystem von Smile Dental [160].....	99
Abbildung 62: "Europa II"-Bogenform von Smile Dental [160].....	100
Abbildung 63: "Standard Form"-Bogenform von Smile Dental [160].....	100
Abbildung 64: "Trueform"-Bogenform von Smile Dental [160].....	101
Abbildung 65: "Symmetry"-Bogensystem von Phoenix Orthodontics [131].....	102
Abbildung 66: "Standard"-Bogensystem von Phoenix Orthodontics [131].....	102
Abbildung 67: Schematische Darstellung des Arbeitsablaufs im BAM.....	104
Abbildung 68: Schematische Darstellung des Wasserfallmodells aus [185].....	107
Abbildung 69: Grafische Benutzeroberfläche des DAM.....	110
Abbildung 70: Benutzeroberfläche des DAM mit farblich hervorgehobenen Bereichen.....	111
Abbildung 71: Setzen der Symmetrielinie.....	112
Abbildung 72: Modellbilder mit hervorgehobenen Punktpositionen.....	113
Abbildung 73: "Virtuelles" (links) und "reales" Koordinatensystem (rechts).....	115
Abbildung 74: Modellfotos mit aktivierten Okklusionslinien.....	116
Abbildung 75: Korrektur der Lage des Koordinatensystems.....	117
Abbildung 76: Deaktivieren von Sollpunkten.....	118
Abbildung 77: Die zur Annäherung vorgegebenen Oberkieferpunkte.....	121
Abbildung 78: Dreidimensionale Darstellung der Fehlerquadratsumme $F(a,b)$ .....	123
Abbildung 79: Nähere Umgebung des ermittelten lokalen Minimum von $F(a,b)$ .....	124
Abbildung 80: 3D-Darstellung der näheren Umgebung des ermittelten lokalen Minimum von $F(a,b)$ .....	124
Abbildung 81: Annäherung an die vorgegebenen Punkte bei verschiedenen Parametersätzen.....	125
Abbildung 82: Virtuelle Zahnbewegungen durch Sollpunktverschiebungen.....	126
Abbildung 83: Modellfotos mit Okklusionslinie und Hilfslinien.....	127
Abbildung 84: Modellfotos mit Okklusionslinie, Koordinatensystem und Hilfslinien.....	127
Abbildung 85: Modellfotos mit eingeblendeten Sollbreiten.....	128
Abbildung 86: Modellfotos mit eingeblendeter Gegenkieferokklusionslinie.....	129
Abbildung 87: Messungen von Strecken und Bogenlängen.....	130
Abbildung 88: Modellfotos mit berechneter bukkaler Zielbogenform.....	131
Abbildung 89: Manuelles Anpassen der bukkalen Zielbogenform.....	131
Abbildung 90: Aufweitung der Bogenform.....	133
Abbildung 91: Streudiagramm 6'er Breite gegen BSI für den Oberkiefer.....	136
Abbildung 92: Streudiagramm 6'er Breite gegen BSI für den Unterkiefer.....	136
Abbildung 93: Streudiagramm 6'er Fissur gegen BSI für den Oberkiefer.....	137
Abbildung 94: Streudiagramm 6'er Fissur gegen BSI für den Unterkiefer.....	137
Abbildung 95: Modellfotos mit idealen Behandlungsbögen.....	139
Abbildung 96: Modellfotos mit nicht idealen Behandlungsbögen.....	140
Abbildung 97: Übersichtsanzeige der Bogenformen.....	141
Abbildung 98: Behandlungsbögen-Übersicht einer Bogentemplateklasse.....	142
Abbildung 99: Druckvorschau der Bogenschablone.....	143
Abbildung 100: Bogenformanalysator des DAM.....	144
Abbildung 101: "Fehlfläche" (rot) zwischen berechneten und konfektionierten Bogen.....	145
Abbildung 102: Patient M.F. - En Face.....	147
Abbildung 103: Patient M.F. - OK.....	147
Abbildung 104: Patient M.F. - UK.....	147
Abbildung 105: Patient M.F. - Modell frontal.....	148
Abbildung 106: Patient M.F. - Modell Okklusion rechts.....	148
Abbildung 107: Patient M.F. - Modell Okklusion links.....	148

Abbildung 108: Modellanalyseformular der "DokuInforma".....	149
Abbildung 109: Startbildschirm des "Dental Archform Managers" .....	149
Abbildung 110: Setzen der initialen Punkte.....	150
Abbildung 111: Fixpunkte (graue Kreuze) und Sollpunkte (rote Kreise) im Ober- und Unterkiefer.....	151
Abbildung 112: Initiale Okklusionslinien.....	151
Abbildung 113: Korrektur der Koordinatensysteme.....	152
Abbildung 114: Einblenden der Sollbreiten - Unterkiefermodell.....	154
Abbildung 115: Verschiebung des 43'er auf Idealposition.....	155
Abbildung 116: Verschieben des Punktes mesial 31 auf Idealposition.....	156
Abbildung 117: Einblenden der Sollbreiten - Oberkiefermodell.....	157
Abbildung 118: Messung der transversalen Sollbreite.....	158
Abbildung 119: Anpassung der anterioren Breite im Oberkiefer.....	158
Abbildung 120: Einblenden des Gegenkiefers.....	160
Abbildung 121: Messung und Vergleich der Kieferbreiten.....	161
Abbildung 122: Anpassung der Oberkieferbreite.....	162
Abbildung 123: Einblenden der individuell berechneten Behandlungsbögen.....	163
Abbildung 124: Verschmälern des individuellen Unterkieferbogens.....	164
Abbildung 125: Anstoßen des Matching-Prozess.....	164
Abbildung 126: Einblenden der idealen Bogentemplates.....	165
Abbildung 127: Übersicht der Bogentemplates.....	166
Abbildung 128: Individualisierte Übersicht der Bogentemplates für Fall M.F.....	167
Abbildung 129: Behandlungsbögen-Übersicht einer Bogentemplate-Klasse.....	168
Abbildung 130: Eingebledete beste vorrätige Behandlungsbögen.....	169
Abbildung 131: Druckvorschau der Behandlungsbogen-Biegeschablone.....	170

### **Tabellenverzeichnis**

Tabelle 1: Online-Datenbanken für Literaturrecherchen.....	8
Tabelle 2: Schlüsselwörter der Literaturrecherche.....	9
Tabelle 3: Suchstrategie am Beispiel MEDLINE über PubMed.....	9
Tabelle 4: Anatomische Zahnpunkte für Bogenformkonstruktionen.....	25
Tabelle 5: Klassifikation der Modelle zur Beschreibung von Zahnbogenformen.....	32
Tabelle 6: Übersicht über die untersuchten Bogensysteme.....	68
Tabelle 7: Definition der Bezeichnungen für die Bogenklassifikation.....	70
Tabelle 8: Übersicht über die Bogenformen.....	73
Tabelle 9: Definition der Referenzpunkte im DAM.....	114
Tabelle 10: Koordinaten eines exemplarischen Oberkiefermodells.....	120
Tabelle 11: Aufweitung des Zahnbogens an den verschiedenen Zahnpunkten.....	133
Tabelle 12: Übersicht über die verschiedenen Ausgleichsgeraden zur Bogenaufweitung.....	135
Tabelle 13: Kriterien zur Selektion von Bogenformberechnungsmodellen.....	173

### **Formelverzeichnis**

Formel 1: Allgemeine Formel eines Kegelschnitts nach Biggerstaff [23].....	15
Formel 2: Charakterisierung der Kettenlinie nach MacConaill [102].....	35
Formel 3: Allgemeine Formel der Kettenlinie [143].....	35
Formel 4: Allgemeine Form eines Kegelschnittes [57].....	38
Formel 5: Klassifikationsgrößen der Kegelschnitte [57].....	38
Formel 6: Allgemeine Form eines Polynoms [56].....	40
Formel 7: Polynom-Formel nach Numata [121].....	40
Formel 8: Polynom-Formel nach Hayashi [75].....	40
Formel 9: Um Exponentialterm erweiterte Polynom-Formel nach Hayashi [75].....	41
Formel 10: Polynom 4. Grades nach Lu [100].....	42
Formel 11: Beschreibung mit orthogonalen Polynomen nach Lu [100].....	43
Formel 12: Polynom 6. Grades nach Noroozi [119].....	45

---

Formel 13: Allgemeine Betaverteilung aus der Statistik [51].....	46
Formel 14: Die Betafunktion aus der Statistik [51].....	46
Formel 15: Vereinfachte Betaverteilung.....	47
Formel 16: Modifizierte Betafunktion nach Braun [28].....	48
Formel 17: Definition einer kubischen Spline-Kurve [133].....	50
Formel 18: Teilpolynom $P_i$ einer kubischen Spline-Kurve [133].....	50
Formel 19: Stetigkeitsbedingungen einer kubischen Spline-Kurve [133].....	50
Formel 20: Natürliche Randbedingung an eine kubischen Spline-Kurve [133].....	51
Formel 21: Allgemeine Fourierreihe [98] .....	52
Formel 22: Vereinfachte Fourierreihe nach Valenzuela [167].....	53
Formel 23: Koeffizienten $b_n$ der Fourierreihe nach Valenzuela [167].....	53
Formel 24: Koeffizienten $b_n$ der segmentierten Fourierreihe nach Valenzuela [167].....	53
Formel 25: Zusätzliche Abkürzungen nach Valenzuela [167].....	54
Formel 26: Koeffizienten $b_n$ nach Integration [167].....	54
Formel 27: Symmetrisch geschriebene Koeffizienten $b_n$ nach Valenzuela [167].....	54
Formel 28: Koeffizienten $b_n$ der vereinfachten Fourierreihe nach Valenzuela [167].....	54
Formel 29: Abstandssumme für das "Least-Square"-Verfahren [168].....	57
Formel 30: Hinreichendes Kriterium für Minima der Abstandssumme $A(a)$ [162].....	57
Formel 31: Negativer Gradient von $F(X)$ [71].....	59
Formel 32: Iterationsvorschrift des Gradientenabstiegsverfahren [71].....	59
Formel 33: Summe der Fehlerquadrate [71].....	60
Formel 34: Residuenvektor des Gauß-Newton-Verfahren [71].....	60
Formel 35: Die Jacobi-Matrix [71].....	60
Formel 36: Iterationsvorschrift des Gauß-Newton-Verfahren [71].....	61
Formel 37: Ersetzung zur Vermeidung der Matrixinversion [71].....	61
Formel 38: Modifizierte Iterationsvorschrift des Gauß-Newton-Verfahren [71].....	61
Formel 39: Modifikation von Formel 37 für den Levenberg-Marquardt-Algorithmus [97],[103].....	61
Formel 40: Transformationsgleichung zwischen realem und virtuellem Koordinatensystem .....	116
Formel 41: Koordinatenform der Transformationsgleichung.....	116
Formel 42: Allgemeine Form der im DAM verwendeten Kettenlinie.....	119
Formel 43: Fehlerquadratsumme $F(a,b,c)$ der Kettenlinienfunktion $g(x)$ .....	121
Formel 44: Jacobi-Matrix zu dem betrachteten Beispiel.....	122
Formel 45: Steigungswinkel des Lots auf die Tangente $t$ .....	134
Formel 46: Koordinaten der $P_i$ .....	134
Formel 47: Allgemeine Form der Kettenlinie zur Beschreibung der bukkalen Zielbogenform.....	134

**6'er Breiten und BSI**Alle Breiten in mm und mit einer Messgenauigkeit von  $\pm 0,1$  mm.

Modellnr.	Modelldatum	12	11	21	22	16	26	F16	F26	42	41
	31	32	46	36	B46	B36	BSI OK	6'er OK	BSI UK	6'er UK	F6'er OK
	B6'er UK										
560	04.11.1993	6,6	8,9	8,3	7	9,2	9,6	3,8	3,7	5,5	5,2
	5	6,4	10,2	9,5	1,9	1,5	30,8	9,4	22,1	9,85	3,75
	1,7										
562	04.11.1993	6,7	8,2	8,2	6,5	10	10,5	3,4	3,2	5,5	5
	5,4	5,5	9,1	9,4	1,5	1,2	29,6	10,25	21,4	9,25	3,3
	1,35										
564	04.11.1993	6,1	9,3	9,5	6,4	9,8	10,5	4,5	4,8	6	6,6
	5,8	6,3	10,2	10	1,4	1,4	31,3	10,15	24,7	10,1	4,65
	1,4										
566	04.11.1993	6,2	8,2	8,1	6,2	9,1	8,4	3,1	3	5,5	5
	5	5,4	10	9,5	1,9	1,4	28,7	8,75	20,9	9,75	3,05
	1,65										
568	12.11.1992	7,4	8,7	8,6	7,5	9,7	9,4	4,1	3,8	5,9	5
	5,5	6	9	9,2	1,5	1,4	32,2	9,55	22,4	9,1	3,95
	1,45										
574	28.10.1993	6,3	9,2	9	6,2	9,5	9,3	3,7	3,5	5,7	5,9
	6,4	6,2	9,5	9,5	1,4	1,2	30,7	9,4	24,2	9,5	3,6
	1,3										
576	28.10.1993	6,1	8,8	8,8	6,4	9,4	9	3,8	4,5	5,7	4,6
	5	5,5	9	9,4	1,2	0,9	30,1	9,2	20,8	9,2	4,15
	1,05										
578	28.10.1993	7,3	9,3	9,7	7,1	9,6	9,6	3,7	3,6	6,8	6,3
	5,8	5,5	9,8	9,3	1,5	1,4	33,4	9,6	24,4	9,55	3,65
	1,45										
580	28.10.1993	6,8	8,2	8,2	6,8	9,5	9,3	4,1	3,5	6,4	5,3
	4,7	5,6	8,8	10	1,6	1,3	30	9,4	22	9,4	3,8
	1,45										
582	28.10.1993	6,4	8,5	8,4	6,7	9,1	9	3,9	3,8	5,5	4,7
	4,8	5,5	8,7	9,2	1,4	1,3	30	9,05	20,5	8,95	3,85
	1,35										
584	28.10.1993	7,1	9	9	7,2	8,5	8,4	3,2	3,5	6,2	5,6
	5,8	5,7	9	9	1,4	1,1	32,3	8,45	23,3	9	3,35
	1,25										
586	28.10.1993	6	9	8,7	7,3	9,1	8,9	3,9	3,9	5,5	5,4
	5,4	5,1	8,6	8,7	1,4	1,1	31	9	21,4	8,65	3,9
	1,25										
590	28.10.1993	6	8	8,2	5,3	8,5	8,6	3,5	3,5	5,2	4,8
	4,5	5,8	9	9,5	1,7	0,9	27,5	8,55	20,3	9,25	3,5
	1,3										
598	14.05.1992	6,1	8	8,3	6	8,9	8,9	3,5	3,5	5,7	4,8
	5	5,3	9	8,2	1,4	1,4	28,4	8,9	20,8	8,6	3,5
	1,4										
606	25.03.1993	5,9	8,5	9	6,1	9,4	9,1	3	3,2	6,3	5,2
	5	6,3	9,7	9,7	1,3	1,3	29,5	9,25	22,8	9,7	3,1
	1,3										
608	25.03.1993	6,6	9,2	9	6,4	9	9,7	3,1	3,7	5,4	5,3
	5	5,6	9	8,5	1,1	1,2	31,2	9,35	21,3	8,75	3,4
	1,15										
612	02.03.1995	6,1	9,8	9,5	7,3	8,7	9,3	3,8	3	5,5	5,5
	5,5	5,3	9,5	10	1,2	0,9	32,7	9	21,8	9,75	3,4
	1,05										
614	07.03.1996	6,3	8,2	7,8	6,8	9,3	8,7	4,2	3,9	5,9	5
	5,3	5,9	8,5	9,3	1,3	1,2	29,1	9	22,1	8,9	4,05
	1,25										



670	20.03.1997	6,7	9,4	9,5	6,6	9,4	8,2	3,5	3,6	6,1	5,8
		5,8	6,1	8,5	8,6	1,9	1,4	32,2	8,8	23,8	8,55
		1,65									
672	20.03.1997	5,8	9,3	9,5	6,2	9,1	9	3,4	4,3	6,2	5,8
		5,8	6,4	10	9,9	2,1	1,9	30,8	9,05	24,2	9,95
		2									
674	20.03.1997	6,7	9,5	9,5	6,7	9,7	9	3,5	3,9	5,8	5,4
		5,4	6	9,5	9,6	1,6	1,4	32,4	9,35	22,6	9,55
		1,5									
676	20.03.1997	7,1	8,9	8,8	6,6	9	9,1	3,7	3,5	5,5	5,1
		5,1	5,6	9,2	9,1	1,3	1,2	31,4	9,05	21,3	9,15
		1,25									
678	20.03.1997	6,7	8,7	8,8	6,7	9	9	3,9	3,5	5,1	4,7
		4,7	5,4	8,7	8,7	1,6	1,3	30,9	9	19,9	8,7
		1,45									
680	09.05.1996	5,9	8,2	8	6,2	8,9	8,6	3,6	3,2	5,7	4,8
		4,9	5,4	9,2	9	1,2	1	28,3	8,75	20,8	9,1
		1,1									
682	24.04.1997	5,7	8,6	8,7	5,7	9,5	9,3	3,9	3,5	5	5
		5,2	5,3	8,5	9,5	1,5	1,2	28,7	9,4	20,5	9
		1,35									
684	30.05.1996	7,7	9,4	9,3	7,3	9,8	10,6	3,7	4,5	6,2	5,5
		5,5	6,5	10	10,4	1,6	1,5	33,7	10,2	23,7	10,2
		1,55									
686	24.04.1997	6,6	9	8,9	6,6	9,9	9,9	4	4	5,4	5
		5,1	5,7	9	8,9	1,2	1,3	31,1	9,9	21,2	8,95
		1,25									
692	05.05.1994	7,3	9,4	9,5	7,3	10,3	10,3	4	3,7	5,8	6
		6	6,3	10,4	10,2	1,4	1,2	33,5	10,3	24,1	10,3
		1,3									
700	29.02.1996	6,4	8	8,2	6,2	9,2	8,9	4	3	6	4,9
		5	5,9	9,5	9,2	1,3	1,1	28,8	9,05	21,8	9,35
		1,2									

\* Messung für die OK 6'er vom 07.02.1994

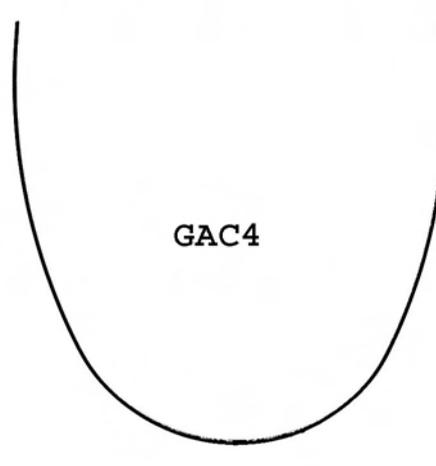
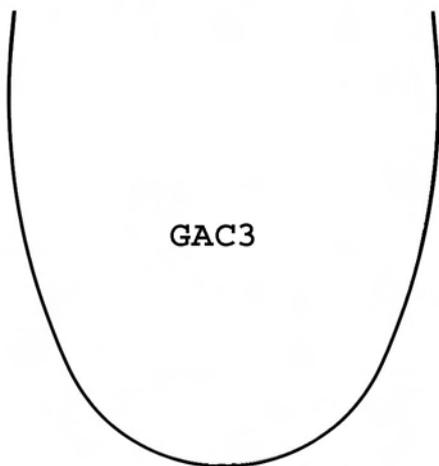
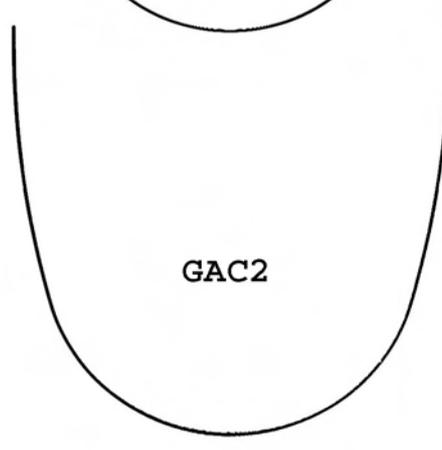
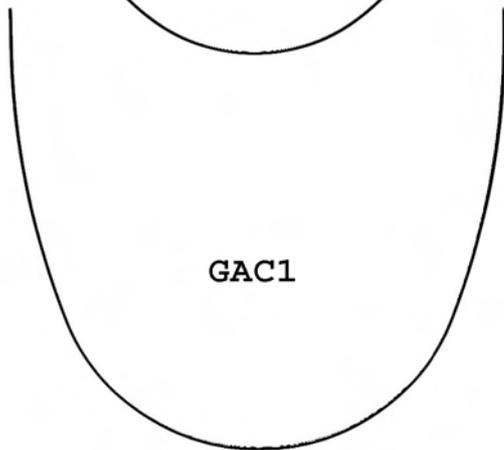
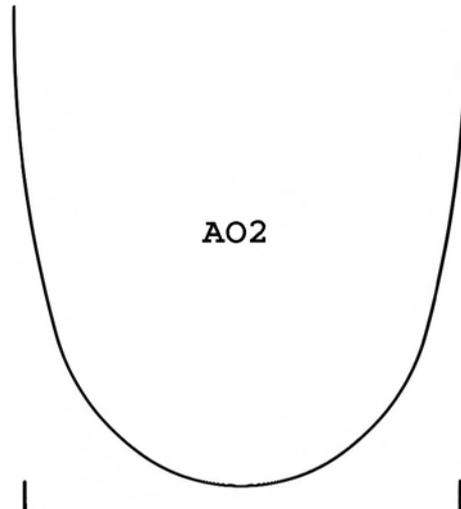
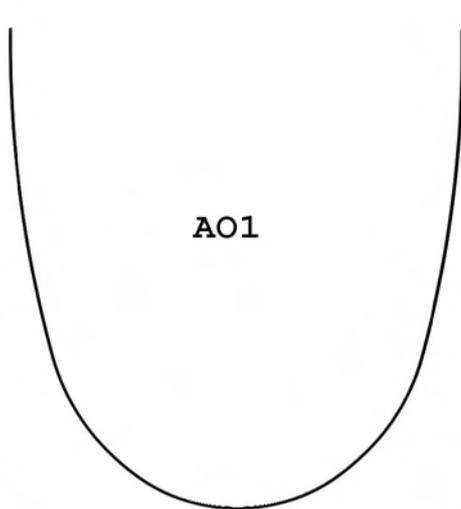
**Eingescannte konfektionierte Bögen**

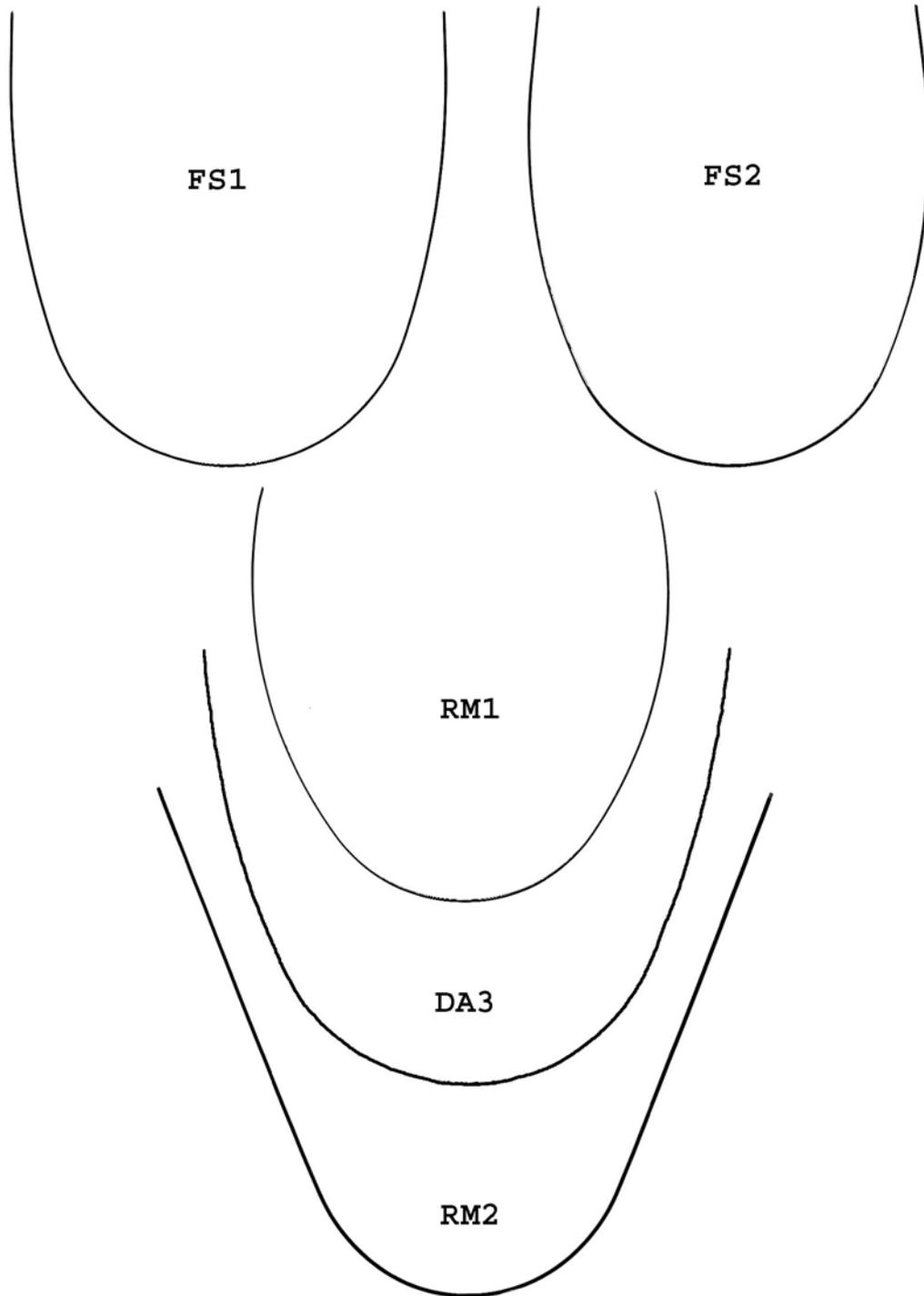
<b>Firma</b>	<b>Bezeichnung</b>	<b>Material</b>	<b>Querschnitt (in Inch)</b>	<b>Kürzel</b>
Advanced Orthodontics	Memory Idealbogenform - UK - AO-7216 (586526)	Ni-Ti	.016x.016	AO1
Advanced Orthodontics	Memory Idealbogenform - UK - AO-7018 (584913)	Ni-Ti	.018	AO1
Advanced Orthodontics	Memory Idealbogenform I - UK - AO-7014 (588269)	Ni-Ti	.014	AO1
Advanced Orthodontics	Memory Idealbogenform - UK - AO-7012 (586526)	Ni-Ti	.012	AO1
Advanced Orthodontics	Memory Idealbogenform I - UK - AO-7016 (192154)	Ni-Ti	.016	AO1
Advanced Orthodontics	Memory Idealbogenform - OK - AO-7008 (584913)	Ni-Ti	.018	AO2
Advanced Orthodontics	Memory Idealbogenform I - OK - AO-7122 (586866)	Ni-Ti	.016x.022	AO2
Advanced Orthodontics	Memory Idealbogenform I - OK - AO-7116 (587476)	Ni-Ti	.016x.016	AO2
Advanced Orthodontics	Memory Idealbogenform I - OK - AO-7002 (586866)	Ni-Ti	.012	AO2
Advanced Orthodontics	Memory Idealbogenform I - OK - AO-7006 (190215)	Ni-Ti	.016	AO2
Advanced Orthodontics	Memory Idealbogenform I - OK - AO-7004 (192152)	Ni-Ti	.014	AO2
Advanced Orthodontics	Neo Memory TTR Idealbogenform - OK - AO- 7122N (581520)	Ni-Ti	.016x.022	AO2
Forestadent	FORESTADENT-Titanol-Superelastic - OK - (204-1440)	Ni-Ti	.016x.016	FS1
Forestadent	FORESTADENT-Titanol-Superelastic - UK - (204-0945)	Ni-Ti	.018	FS2
DENTAURUM	DENTAFLEX-Bögen verseilt, superfederhart, vergütet (766-439)	?	.015	O1
DENTAURUM	Remaloy IDEAL-Bogenform - UK - weich (769- 201)	CrCo	.016x.022	DA2
DENTAURUM	DENTAFLEX Ideal-Bogenform, super federhart - OK - (766-122-00)	?	.018	DA3
RMO rocky mountain orthodontics	ORTHONOL - UK - A-7027	Ni-Ti	.018x.018	RM1
RMO rocky mountain orthodontics	TRU-CHROME Arch Wire Blanks - OK - (A-800)	SS	.017x.025	RM2
Pelz Dental GmbH	NiTi Superelastic Wire - UK - (611-0016)	Ni-Ti	.016	PD1
Pelz Dental GmbH	NiTi Superelastic Wire - UK - (612-1725)	Ni-Ti	.017x.025	PD1
Pelz Dental GmbH	NiTi Superelastic Wire - UK - (612-1616)	Ni-Ti	.016x.016	PD1
OMEGA ORTHODONTICS Vertriebs GmbH	Neo NiTi Thermalloy - UK - (NT16x22LT)	Ni-Ti	.016x.022	OO1

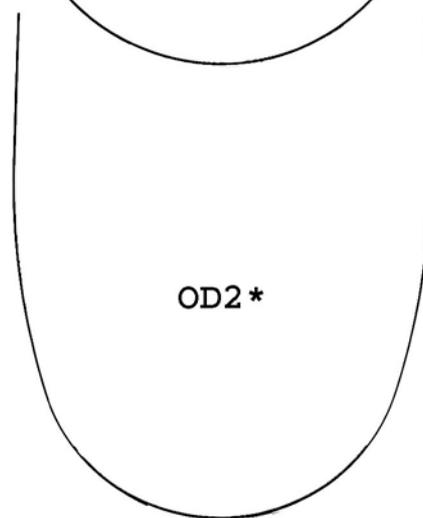
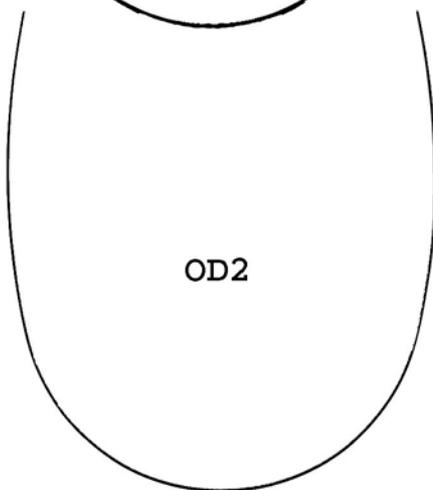
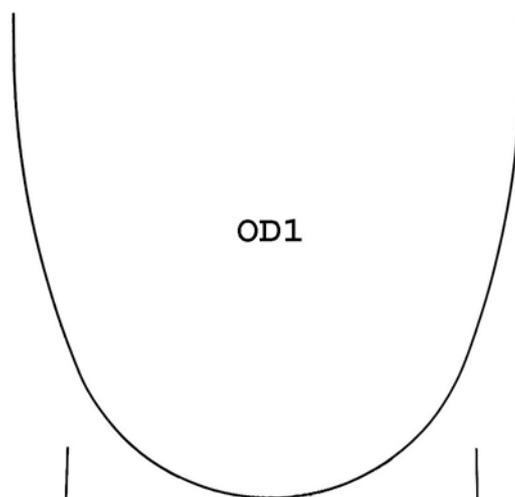
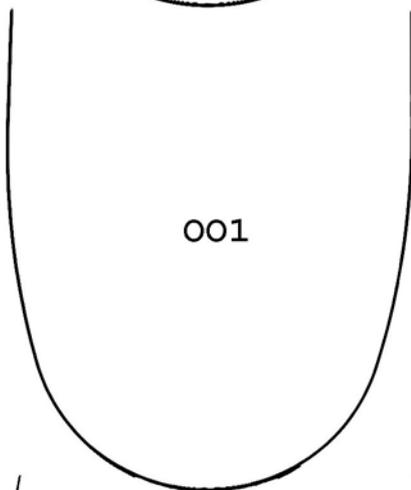
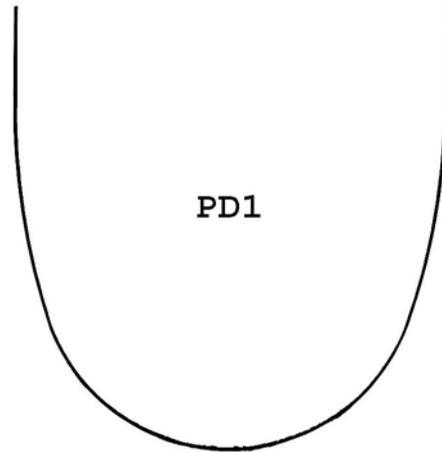
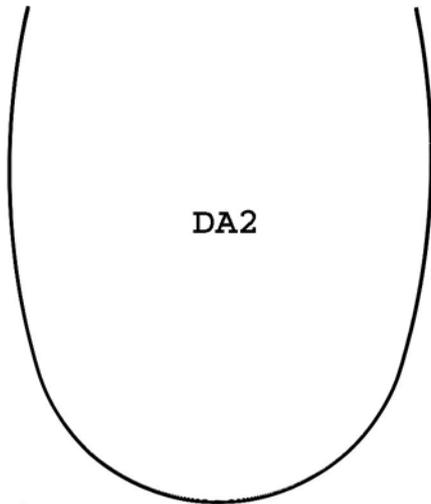
<b>Firma</b>	<b>Bezeichnung</b>	<b>Material</b>	<b>Querschnitt (in Inch)</b>	<b>Kürzel</b>
ORMCO Dental GmbH	NITINOL-Bögen - OK - (POR-1616U)	Ni-Ti	.016x.016	OD1
ORMCO Dental GmbH	NITINOL-Bögen - OK - (POR-18U)	Ni-Ti	.018	OD2
ORMCO Dental GmbH	NITINOL-Bögen - UK - (POR-18L)	Ni-Ti	.018	OD2*
ORMCO Dental GmbH	SuperNitane - OK - (618-118)	Ni-Ti	.018	OD3
ORMCO / Sybron	Preformed Archwires (208-2121)	?	.021x.021	O1
ORMCO / Sybron	D-Rect Braided Archwire - UK - (201-0012)	?	.017x.025	O1
ORMCO / Sybron	D-Rect Braided Archwire - OK - (201-0001)	?	.016x.022	O1
ORMCO	RESPOND .0155 ARCH BLANK - (203-1115)	?	.0155	O1
ORMCO	RESPOND .0170 ARCH BLANK - (203-1117)	?	.0170	O1
ORMCO	RESPOND .0175 ARCH BLANK - (203-1117)	?	.0175	O1
ORMCO	RESPOND .0195 ARCH BLANK - (203-1119)	?	.0195	O1
ORMCO	TMA Arch Blank - UK - (202-0005)	TMA	.015	O1*
ORMCO	TMA Arch Blank - UK - (202-0006)	TMA	.018	O1*
ORMCO	TMA Arch Blank - UK - (202-0010)	TMA	.019x.025	O1*
ORMCO	TMA Arch Blank - UK - (202-0009)	TMA	.017x.025	O1*
ORMCO	TMA Arch Blank - UK - (202-0014)	TMA	.016x.022	O1*
ORMCO	TMA Arch Blank - UK - (202-0016)	TMA	.0175x.0175	O1*
ORMCO	TMA Arch Blank - OK - (202-0003)	TMA	.016	O1
ORMCO	TMA Arch Blank - OK - (202-0004)	TMA	.018	O1
ORMCO	TMA Arch Blank - OK - (202-0007)	TMA	.017x.025	O1
ORMCO	TMA Arch Blank - OK - (202-0012)	TMA	.0175x.0175	O1
ORMCO	TMA Arch Blank - OK - (202-0011)	TMA	.016x.022	O1
ORMCO	TMA Arch Blank - OK - (202-0008)	TMA	.019x.025	O1
ORMCO	Stainless Steel Arch Blank - OK - (208-1925)	SS	.019x.025	O1
ORMCO	Stainless Steel Arch Blank - UK - (209-1925)	SS	.019x.025	O1*
ORMCO	Force 9 Arch Blank - OK - (201-0007)	?	.017x.025	O1
ORMCO	Force 9 Arch Blank - OK - (201-0006)	?	.016x.022	O1
ORMCO	Force 9 Arch Blank - UK - (201-0017)	?	.017x.025	O1*
ORMCO	Force 9 Arch Blank - UK - (201-0016)	?	.016x.022	O1*
ORMCO	Ni-Ti Turbo Arch - UK - (211-0802)	?	.017x.025	O2
ORMCO	Copper Ni-Ti 35C - OK small - (210-0926)	Ni-Ti	.021x.025	O3
ORMCO	Copper Ni-Ti 35C - OK small - (210-0927)	Ni-Ti	.020x.020	O3
ORMCO	Copper Ni-Ti 35C - UK small - (211-0926)	Ni-Ti	.021x.025	O4
GAC	Neo Sentalloy ACCU FORM - OK - (F80 523.02)	Ni-Ti	.016x.022	GAC1
GAC	Neo Sentalloy ACCU FORM - OK - (F100 523.05)	Ni-Ti	.018x.025	GAC1
GAC	Neo Sentalloy LIGHT ACCU FORM - OK - (511.03)	Ni-Ti	.018	GAC1
GAC	Neo Sentalloy ACCU LIGHT - OK - (02-511-02)	Ni-Ti	.016	GAC1
GAC	Neo Sentalloy ACCU MEDIUM - OK - (02-511-12)	Ni-Ti	.016	GAC1

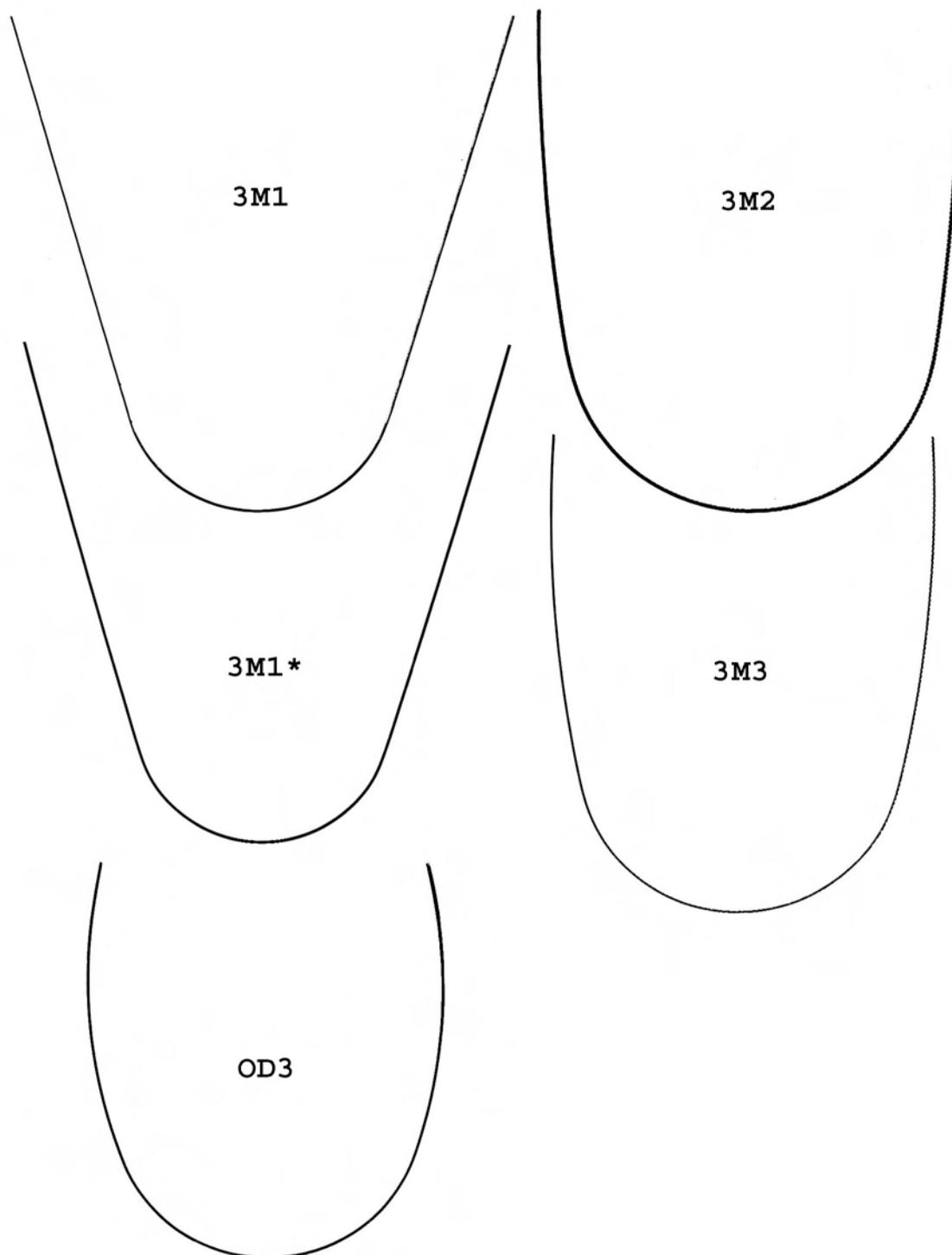
<b>Firma</b>	<b>Bezeichnung</b>	<b>Material</b>	<b>Querschnitt (in Inch)</b>	<b>Kürzel</b>
GAC	Neo Sentalloy ACCU FORM - UK - (F200 523.65)	Ni-Ti	.018x.025	GAC2
GAC	Neo Sentalloy ACCU LIGHT - UK - (02-511-52)	Ni-Ti	.016	GAC2
GAC	Neo Sentalloy ACCU - UK - (02-523-52)	Ni-Ti	.016x.022	GAC2
GAC	Bio Force Sentalloy - OVT BIO IDL - UK MED	Ni-Ti	.018x.025	GAC3
GAC	Bio Force Sentalloy - OVT BIO IDL - OK MED	Ni-Ti	.018x.025	GAC4
3M	Unitek Standard Form - OK - (301-141)	SS	.014	3M1
3M	Unitek Standard Form - OK - (301-161)	SS	.016	3M1
3M	Unitek Standard Form - OK - (301-181)	SS	.018	3M1
3M	Unitek Standard Form - UK - (300-112)	SS	.016x.016	3M1*
3M	Unitek Standard Form - UK - (300-272)	SS	.017x.022	3M1*
3M	Unitek Standard Form - UK - (301-182)	SS	.018	3M1*
3M	Unitek Standard Form - UK - (301-142)	SS	.014	3M1*
3M	Unitek Standard Form - UK - (301-162)	SS	.016	3M1*
3M	Unitek Braided Orthoform II - OK - (300-907)	SS	.016x.022	3M2
3M	Unitek Braided Orthoform II - OK - (300-905)	SS	.016x.016	3M2
3M	Unitek Braided Orthoform II - UK - (300-906)	SS	.016x.016	3M3
3M	Unitek Braided Orthoform II - UK - (300-908)	SS	.016x.022	3M3

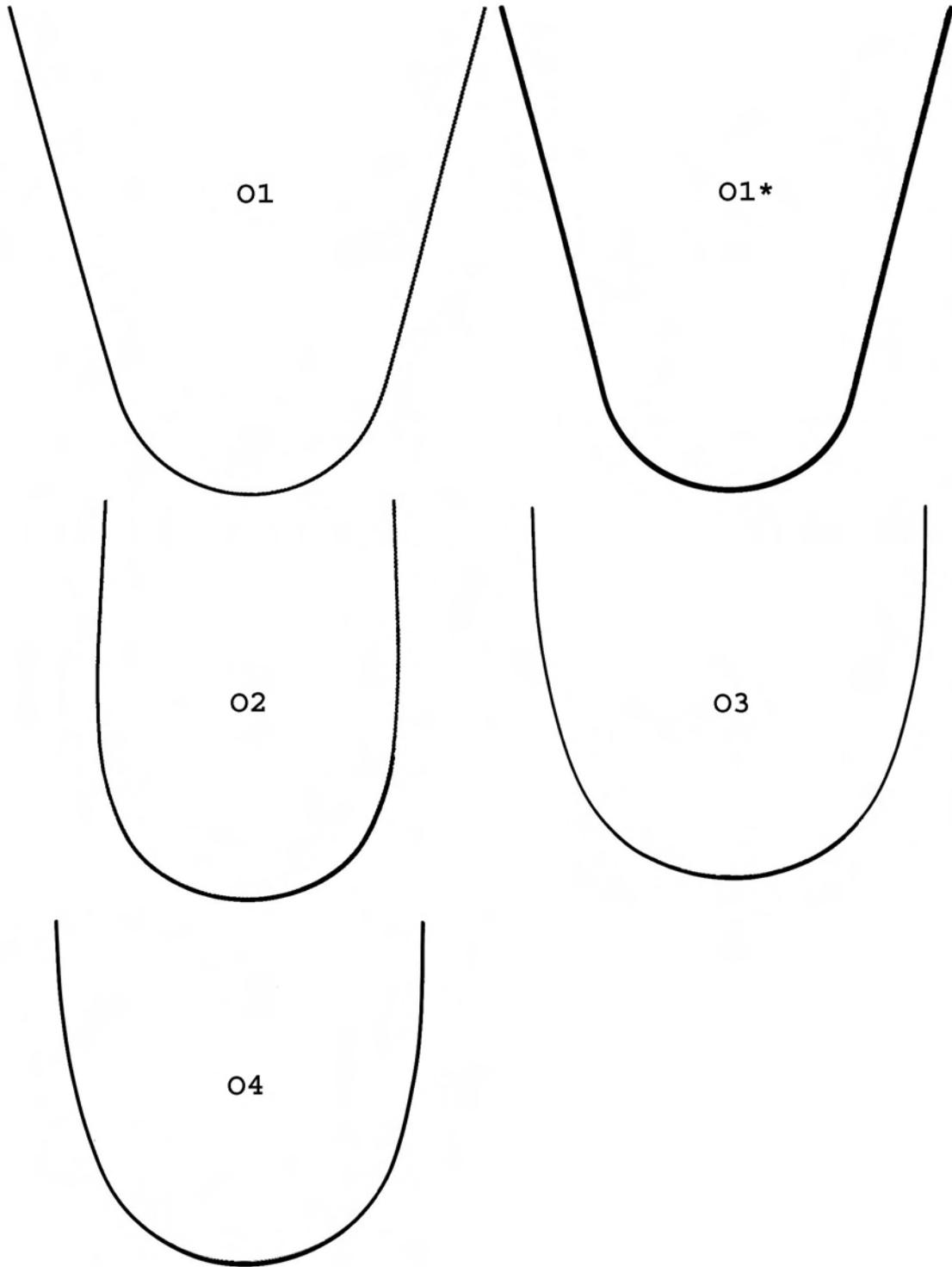
**Bogenformschablonen der konfektionierten Bögen**











**Glossar**

Nr.	Begriff	Erklärung
1	<b>Cosinus Hyperbolicus</b>	Der <b>Cosinus Hyperbolicus</b> ist eine mathematische Hyperbelfunktion. Man nennt ihn auch Hyperbel-Cosinus oder Hyperbolischen Cosinus. Der Cosinus Hyperbolicus beschreibt den Verlauf eines an zwei Punkten aufgehängten Seils. Sein Graph wird deshalb auch als Kettenlinie bezeichnet. [175]
2	<b>Fortran</b>	<b>Fortran</b> ist eine prozedurale und in ihrer neuesten Version zusätzlich eine objekt-orientierte Programmiersprache, die insbesondere für numerische Berechnungen eingesetzt wird. Der Name entstand aus FORMula TRANslation und wurde bis zur Version FORTRAN 77 mit Großbuchstaben geschrieben. [176]
3	<b>Interpolation</b>	Der Begriff <b>Interpolation</b> bezeichnet eine Klasse von Problemen und Verfahren aus der numerischen Mathematik. Zu gegebenen diskreten Daten (z.B. Messwerten) soll eine kontinuierliche Funktion (die sogenannte Interpolante oder Interpolierende) gefunden werden, die diese Daten abbildet. Man sagt dann, die Funktion interpoliert die Daten. [177]
4	<b>Iteration</b>	Die <b>Iteration</b> (von lateinisch iterare, „wiederholen“) ist ein Begriff, der in verschiedenen Wissenschaften oder Anwendungsbereichen verwendet wird. In der numerischen Mathematik bezeichnet er eine Methode, sich der Lösung eines Rechenproblems schrittweise, aber zielgerichtet anzunähern. Sie besteht in der wiederholten Anwendung desselben Rechenverfahrens. [178]
5	<b>Nomogramm</b>	Ein <b>Nomogramm</b> [deutsch: "Netztafel"] ist ein zweidimensionales Diagramm, an dem eine mathematische Funktion näherungsweise abgelesen werden kann. Die Nomographie (Lehre zur Erstellung von Nomogrammen) wurde 1850 von Léon Lalanne und Maurice d'Ocagne begründet. Die Genauigkeit, mit der die Funktionswerte abgelesen werden, hängt von der Genauigkeit ab, mit der die Markierungen ablesbar sind. [180]
6	<b>Normierung</b>	Normalisierung oder <b>Normierung</b> bedeutet in der Mathematik und Statistik die Skalierung des Wertebereichs einer Variablen auf einen bestimmten Bereich, üblicherweise zwischen 0 und 1 (bzw. 100 Prozent). [181]
7	<b>Straklatte</b>	Eine <b>Straklatte</b> ist eine ca. 1,3 m lange elastische Kunststoffplatte mit quadratischer Querschnitt (ca. 3 mm stark). Sie wurde vor allem im Schiffsbau benutzt, um Linienrisse zu entwerfen und schwache Kurven anzuzeichnen. Die Biegungen werden durch Strakgewichte (Molche) gehalten und geformt. [183]
8	<b>Wahrscheinlichkeitsverteilung</b>	In der Wahrscheinlichkeitsrechnung gibt die <b>Wahrscheinlichkeitsverteilung</b> an, wie sich die Wahrscheinlichkeiten auf die möglichen Zufallsergebnisse, insbesondere die möglichen Werte einer Zufallsvariable, verteilen. [184]