Burkard Rosenberger

Konstruktion eines äußeren Längenmaßes auf Banachräumen

MSC 2000: 28A12, 28A75, 28A78

Münster 2004
Durchgesehene, inhaltlich unveränderte Neuausgabe der Originalausgabe (Kiel 1994).

Vorbemerkung

Der vorliegende Text wurde im Jahr 1994 als wissenschaftliche Hausarbeit zur Prüfung für das höhere Lehramt an Gymnasien am Mathematischen Seminar der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel eingereicht. Mit Hilfe des Satzsystems LaTeX konnte nun eine optisch ansprechende Neuausgabe erfolgen. Abgesehen von der Korrektur einiger Schreibfehler wurden dabei jedoch keine weiteren Änderungen des Textes vorgenommen.

Münster, im Dezember 2004
Burkard Rosenberger

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

0.1 Zum Begriff der Längenmessung in Banachräumen

Zur Längenmessung in $\mathbb{R}$ bedient man sich des äußeren Lebesgue-Maßes λ^*. Möchte man dieses Konzept der Längenmessung auf einen beliebigen Banachraum übertragen, so ergeben sich begriffliche Schwierigkeiten: Intuitiv ist zunächst unklar, was man unter der „Länge" einer mehrdimensionalen Menge (wie beispielsweise der Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$) verstehen soll. Wir werden daher in diesem einleitenden Abschnitt einige Anforderungen diskutieren, die an ein äußeres Maß auf einem Banachraum F gestellt werden sollen, damit es als geeignetes Instrument zur Längenmessung in F angesehen werden kann.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Konstruktion eines äußeren Maßes μ auf F, das möglichst vielen der folgenden Anforderungen genügt; diese Konstruktion soll dabei von der speziellen Wahl des Banachraumes F unabhängig geschehen. Im Fall $F = \mathbb{R}$ sollte selbstverständlich das auf diese Weise resultierende äußere Maß μ mit dem äußeren Lebesgue-Maß übereinstimmen. Dies liefert die erste Forderung:

Forderung 1: Im Fall $F = \mathbb{R}$ gilt $\mu \;=\; \lambda^*$.

Im allgemeinen Banachraum-Fall sollten sich vernünftigerweise zumindest diejenigen der Eigenschaften von λ^*, die im unmittelbaren Zusammenhang zur Längenmessung stehen, auf das äußere Maß μ übertragen lassen. Zwei zentrale derartige Eigenschaften sind die Translationsinvarianz

$$\forall\, A \subset F \quad \forall\, x \in F \;:\quad \mu(A+x) = \mu(A)$$

sowie die Homogenität vom Grade 1

$$\forall\, A \subset F \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \;:\quad \mu(\alpha A) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha = 0\,, \\ |\,\alpha\,| \cdot \mu(A) & \text{sonst.}^1 \end{cases}$$

Wir notieren also:

[1] Insbesondere diese zweite Eigenschaft illustriert die „Eindimensionalität" der Längenmessung; für eine Flächenmessung würde man analog die Homogenität vom Grade 2, für eine Volumenmessung die Homogenität vom Grade 3 fordern usw.

Forderung 2: μ ist translationsinvariant.

Forderung 3: μ ist homogen vom Grade 1.

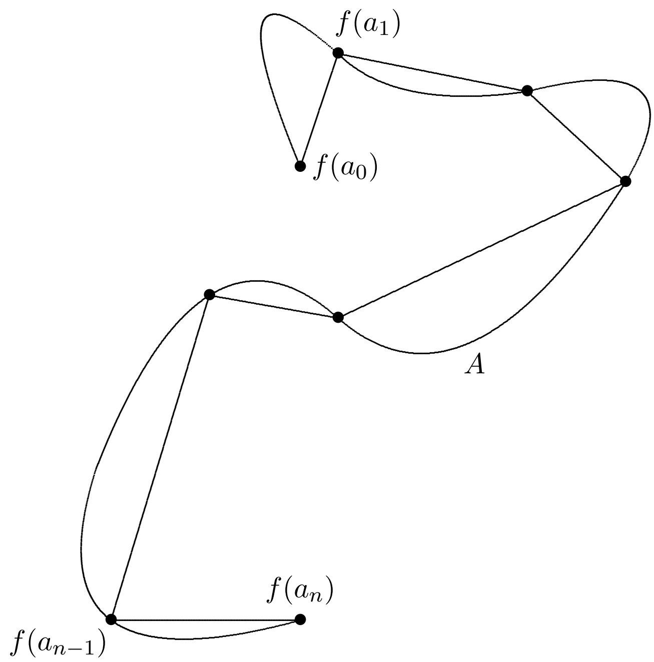
Ebenfalls in Anlehnung an den eindimensionalen Fall soll μ den F-Intervallen (d. h. den Verbindungsstrecken zwischen zwei Punkten aus F) als Länge ihren Durchmesser zuordnen:

Forderung 4: Für alle F-Intervalle $I \subset F$ ist $\mu(I) = \mathrm{diam}(I)$.

Diese Forderung werden wir im folgenden verallgemeinern. Wir bezeichnen dazu die stetigen injektiven F-wertigen Abbildungen auf kompakten Definitionsintervallen abkürzend als *ISK-Abbildungen* sowie Teilmengen von F, die sich durch eine ISK-Abbildung parametrisieren lassen, als *eindimensionale Mengen.* (Die abgeschlossenen F-Intervalle lassen sich per definitionem durch ISK-Abbildungen parametrisieren, sind also in unserer Bezeichnungsweise eindimensionale Teilmengen von F.) Ist $A \subset F$ eine eindimensionale Menge und f eine ISK-Parametrisierung von A mit Definitionsintervall $[\,a, b\,] \subset \mathbb{R}$, so liefert jede *Zerlegung* $a = a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_n = b$ von $[\,a, b\,]$ eine Approximation von A durch den *Streckenzug*

$$\bigcup_{j=1}^{n} [\, f(a_{j-1}), f(a_j)\,] \;;$$

je „feiner“ man die Zerlegung wählt, umso besser ist die Approximation.



Die „Länge“ der eindimensionalen Menge A ist dann anschaulich nichts anderes als das Supremum der Längen der approximierenden Streckenzüge, die sog. *Totalvariation von f*:

$$\mathbf{V}(f) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} \| f(a_j) - f(a_{j-1}) \| \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\, a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n = b \right\}.^{2}$$

Wir bemerken dabei, daß diese Definition der Länge einer eindimensionalen Teilmenge von F in der Tat unabhängig von der speziellen Wahl der jeweiligen parametrisierenden ISK-Abbildung ist.[3] Ist A insbesondere ein abgeschlossenes F-Intervall, so kann man leicht zeigen, daß für jede ISK-Parametrisierung f von A die Gleichung $\mathbf{V}(f) = \mathrm{diam}(A)$ erfüllt ist;[4] insofern ist die folgende Forderung 5 tatsächlich eine Verallgemeinerung der Forderung 4.

Forderung 5: Für jede injektive stetige Abbildung $f : I \to F$ mit kompakten Definitionsintervall I gilt $\mu(f(I)) = \mathbf{V}(f)$.

Da die Totalvariation einer Funktion offenbar translationsinvariant und homogen vom Grade 1 ist, ist die eben aufgestellte Forderung 5 mit den Forderungen 2 und 3 kompatibel. Abschließend bemerken wir, daß sich mit Hilfe des im fünften Paragraphen eingeführten Begriffs der *Jordan-Kurve* die Forderung 5 eleganter formulieren läßt:

Forderung 5': μ mißt die Länge von Jordan-Kurven.

Im allgemeinen wird man für ein äußeres Maß ν auf einer Menge Ω eine (möglichst große) σ-Algebra suchen derart, daß die Restriktion von ν auf diese σ-Algebra additiv und damit ein Maß ist. Die Theorie der äußeren Maße zeigt, daß die Menge der *ν-meßbaren* Teilmengen von Ω eine derartige σ-Algebra ist.[5] In unserem Fall wäre es wünschenswert, daß zumindest die eben untersuchten eindimensionalen Teilmengen von F μ-meßbar sind. Als stetige Bilder kompakter Mengen sind die eindimensionalen Teilmengen von F insbesondere abgeschlossen; daher ist eine sinnvolle Anforderung an μ, daß die von den abgeschlossenen Teilmengen von F erzeugte σ-Algebra (d. h. die Borelsche σ-Algebra) in der σ-Algebra der μ-meßbaren Mengen enthalten ist:

Forderung 6: Die Borelschen Teilmengen von F sind μ-meßbar.

[2] Die Totalvariation von f kann durchaus unendlich sein; ist $\mathbf{V}(f) < \infty$, so heißt f *von beschränkter Variation*, s. Abschnitt 5.1.

[3] s. Abschnitt 5.2, Lemma 5.7

[4] s. Abschnitt 6.2, Kombination der Sätze 6.7 und 6.8

[5] Zur Carathéodory-Definition der ν-Meßbarkeit s. Abschnitt 1.2, Definition 1.6. Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen an ν ist die σ-Algebra der ν-meßbaren Mengen sogar maximal, s. Abschnitt 1.4, Satz 1.17.

Ist ν ein äußeres Maß auf einem metrischen Raum (Ω, d), so sind unter der folgenden einfachen Bedingung bereits alle Borelschen Teilmengen von Ω ν-meßbar:[6]

$$\forall\, A, B \subset \Omega \;:\quad \mathrm{d}(A, B) > 0 \implies \nu\,(A \cup B) = \nu\,(A) + \nu\,(B)\ .$$

Erfüllt ν diese Bedingung, so nennt man ν ein *metrisches* äußeres Maß. Daher notieren wir die folgende Forderung:

Forderung 7: μ ist ein metrisches äußeres Maß auf F.

Sei ν nun wieder ein äußeres Maß auf einer beliebigen Menge Ω. In der Praxis muß man damit rechnen, daß man auf Teilmengen von Ω trifft, die nicht ν-meßbar sind oder von denen die ν-Meßbarkeit nicht vorausgesetzt werden kann. Über solche Mengen lassen sich dennoch vernünftige Aussagen machen, wenn sie sich zu ν-meßbaren Mengen mit demselben äußeren ν-Maß „auffüllen" lassen. Gibt es zu jeder Teilmenge von Ω eine ν-meßbare Obermenge gleichen äußeren ν-Maßes, so heißt ν *regulär*; reguläre äußere Maße weisen in der Tat einige praktisch verwertbare Eigenschaften auf.[7] Eine letzte Anforderung an μ ist also:

Forderung 8: μ ist ein reguläres äußeres Maß auf F.

0.2 Ansatz und Ergebnis der vorliegenden Arbeit

Überträgt man die bekannte Konstruktion des äußeren Lebesgue-Maßes λ^* auf den Banachraum-Fall, so erfüllt das resultierende äußere Maß λ^F_∞ im allg. zwar die Forderungen (1)–(4), nicht jedoch die Forderungen (5)–(7).[8] Aus diesem Grund verschärft man die Konstruktion von λ^F_∞; dies geschieht in Anlehnung an die aus der Literatur bekannte Konstruktion des *Hausdorff-Maßes der Dimension 1*.[9] Dabei gewinnt man zunächst eine Menge $\{\, \lambda^F_d \,|\, d \in\ ]\,0, \infty\,]\,\}$ äußerer Maße auf F; die damit durch $A \mapsto \sup\big\{\ \lambda^F_d(A)\ \big|\ d > 0\ \big\}$ definierte Mengenfunktion λ^F_0 ist wiederum ein äußeres Maß auf F.[10] In Rahmen dieser Arbeit werden wir die äußeren Maße λ^F_d $(d \in [\,0, \infty\,]\,)$ als *äußere d-Maße auf F* bezeichnen.

In der vorliegenden Arbeit werden die äußeren d-Maße auf F dahingehend systematisch untersucht, welche der in Abschnitt 0.1 aufgestellten Forderungen (1)–(8) für ein fixiertes $d \in [\,0, \infty\,]$ stets (d. h. für jeden beliebige Banachraum F) erfüllt sind. Die Ergebnisse dieser Untersuchung gibt die folgende Tabelle wieder:

[6] s. Abschnitt 1.6, Satz 1.26
[7] s. Abschnitt 1.4
[8] Ob die Forderung (8) erfüllt ist, ist unklar; s. Abschnitt 7.3.
[9] s. [BAR] S. 200f, [FAL1] S. 25f, [FAL2] S. 7
[10] λ^F_0 ist nach dieser Konstruktion das Analogon zum Hausdorff-Maß der Dimension 1. Zu den Differenzen zwischen der Konstruktion von λ^F_0 und der des Hausdorff-Maßes der Dimension 1 s. Abschnitt 2.3.

Forderung	$d = 0$	$d \in \,]\,0, \infty\,[$	$d = \infty$
(1)	erfüllt (Satz 7.1)		
(2)	erfüllt (Lemma 3.1)		
(3)	erfüllt (Satz 3.9)	unklar	erfüllt (Satz 3.9)
(4)	erfüllt (Satz 4.16)		
(5)	erfüllt (Satz 6.1)	nicht erfüllt (Satz 7.9)	
(6)	erfüllt (Satz 3.13)	nicht erfüllt (Satz 7.6)	
(7)	erfüllt (Satz 3.13)	nicht erfüllt (Satz 7.6)	
(8)	erfüllt (Satz 3.13)	unklar	unklar

Die Quintessenz der vorliegenden Arbeit ist also, daß lediglich λ_0^F allen der oben genannten acht Anforderungen genügt. Insbesondere hat nur λ_0^F die geforderte fünfte Eigenschaft; da diese Eigenschaft in besonderer Weise die Längenmessung beschreibt, werden wir λ_0^F als *äußeres Längenmaß auf F* bezeichnen.

0.3 Übersicht über den Aufbau der vorliegenden Arbeit

Nachdem im ersten Paragraphen eine Zusammenfassung von Definitionen und wichtigen Sätzen über äußere Maße im allgemeinen gebracht wurde, folgt im zweiten Paragraphen die bereits kurz beschriebene Konstruktion der äußeren d-Maße auf F. Die folgenden fünf Paragraphen bilden den Hauptteil der vorliegenden Arbeit und lassen sich unter dem Titel *Untersuchung der Eigenschaften der äußeren d-Maße* zusammenfassen. Im einzelnen werden dabei zunächst einige fundamentale, leicht zu beweisende Eigenschaften der äußeren d-Maße, insbesondere natürlich von λ_0^F, festgehalten (Paragraph 3). Der folgende Paragraph 4 ist dem Zusammenhang zwischen dem äußerem d-Maß und dem Durchmesser von Teilmengen von F gewidmet. Vorbereitende Funktion hat der Paragraph 5; in den dort entwickelten begrifflichen Rahmen (Kurven, Jordan-Kurven) wird das Konzept der Längenmessung von Bildern (injektiver) stetiger Funktionen mittels des äußeren Längenmaßes eingefügt (Paragraph 6). Im letzten Paragraphen wird schließlich untersucht, welchen Einfluß die Dimension von F auf die Eigenschaften der äußeren d-Maße hat.

0.4 Einige Definitionen, Notationen und Generalvoraussetzungen

- Eine Menge heißt **abzählbar**, falls sie endlich oder abzählbar unendlich ist.
- Eine Menge von Mengen bezeichnet man auch als **Mengensystem**. Ist $\mathcal{M}$ ein Mengensystem, so verwendet man die Notationen $\bigcup \mathcal{M} := \bigcup_{A \in \mathcal{M}} A$ und $\bigcap \mathcal{M} :=$

$\bigcap_{A\in\mathcal{M}} A$. Eine Mengensystem $\mathcal{M}$ heißt **disjunkt**, falls gilt: $\forall\, A, B \in \mathcal{M} \;:\; A \neq B \;\Rightarrow\; A \cap B = \emptyset$.

- Die Potenzmenge einer Menge Ω wird mit $\mathfrak{P}(\Omega)$ bezeichnet.

- Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Das **Innere** einer Menge $A \subset X$ wird mit $\operatorname{int}(A)$ bezeichnet.

- Seien (M, d) ein metrischer Raum, $x \in M$ und $r \geq 0$. Als **offene** (bzw. **abgeschlossene**) M**-Kugel** mit **Mittelpunkt** x und **Radius** r wird die Menge $\mathrm{K}_M(x, r) := \{\, y \in M \mid \mathrm{d}(x, y) < r \,\}$ (bzw. $\overline{\mathrm{K}}_M(x, r) := \{\, y \in M \mid \mathrm{d}(x, y) \leq r \,\}$) bezeichnet. Eine Menge $K \subset M$ heißt M**-Kugel**, falls es $x \in M$ und $r \geq 0$ gibt derart, daß $\mathrm{K}_M(x, r) \subset K \subset \overline{\mathrm{K}}_M(x, r)$. Als M**-Sphäre** um x mit Radius r wird die Menge $\partial\mathrm{K}_M(x, r) := \{\, y \in M \mid \mathrm{d}(x, y) = r \,\}$ bezeichnet. Sind Verwechslungen ausgeschlossen, so unterbleibt der Einfachheit wegen der Zusatz „M“, d. h. man spricht von Kugel bzw. Sphäre und schreibt $\mathrm{K}(x, r)$, $\overline{\mathrm{K}}(x, r)$ bzw. $\partial\mathrm{K}(x, r)$.

- Ist (M, d) ein metrischer Raum, so heißt für jede nichtleere Menge $A \subset M$ die Größe $\operatorname{diam}(A) := \sup\{\, \mathrm{d}(x, y) \mid x, y \in A \,\}$ **Durchmesser von** A. Man setzt $\operatorname{diam}(\emptyset) := 0$.

- Sei V ein Vektorraum. Eine Menge $I \subset V$ heißt V**-Intervall** (abkürzend auch nur **Intervall**), falls es ein beschränktes reelles Intervall $J \subset \mathbb{R}$ und eine affine Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to V$ gibt derart, daß $\varphi(J) = I$. Analog zur Schreibweise reeller Intervalle führt man für V-Intervalle die Notationen $]\,a, b\,[$, $]\,a, b\,]$, $[\,a, b\,[$ bzw. $[\,a, b\,]$ für alle $a, b \in V$ ein.

- Sind Ω, Ω' Mengen, so wird die Menge aller Abbildungen von Ω nach Ω' mit $\mathsf{Abb}(\Omega, \Omega')$ bezeichnet.

- Sind (X, τ), (X', τ') topologische Räume, so wird der Raum der stetigen Abbildungen von X nach X' mit $\mathsf{C}(X, X')$ bezeichnet.

- **Generalvoraussetzung:** F sei ein Banachraum mit Norm $\|\,.\,\|$.

1 Über äußere Maße

Dieser Paragraph bietet eine knappe Zusammenfassung der wichtigsten bekannten Ergebnisse über äußere Maße; um den Umfang dieser Arbeit nicht zu sprengen, werden die meisten Beweise durch Zitate der entsprechenden Literatur ersetzt. Die ersten beiden Abschnitte behandeln im wesentlichen die Begriffe äußeres Maß, σ-Algebra, Maß, Meßbarkeit und Nullmengen. Von äußerster Wichtigkeit ist dabei der Satz 1.11: Ist ν ein äußeres Maß auf einer nichtleeren Menge Ω, so ist die Menge $\mathfrak{M}_\nu^\Omega$ der ν-meßbaren Teilmengen von Ω eine σ-Algebra auf Ω, die alle ν-Nullmengen enthält, und die Restriktion von ν auf $\mathfrak{M}_\nu^\Omega$ ist ein Maß. Der dritte Abschnitt befaßt sich mit monotonen Mengenfolgen; in diesem Zusammenhang wird der Satz über die σ-Stetigkeit von Maßen formuliert (Satz 1.14). Im vierten Abschnitt werden reguläre äußere Maße definiert und der Stetigkeitssatz sowie ein Meßbarkeitskriterium für reguläre äußere Maße zitiert (Sätze 1.18 und 1.19). Die Borelsche σ-Algebra auf topologischen Räumen sowie metrische äußere Maße sind die Themen der beiden letzten Abschnitte; zentrales Ergebnis ist der Satz 1.26: Ist ν ein metrisches äußeres Maß auf einem metrischen Raum, so sind alle Borelschen Mengen ν-meßbar. — Im folgenden sei Ω eine nichtleere Menge.

1.1 Äußere Maße, σ-Algebren und Maße

Definition 1.1 *Sei $\mathcal{C} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$. Eine Mengenfunktion $\nu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ heißt* **monoton***, falls gilt: $\forall\, A, B \in \mathcal{C} \;:\; A \subset B \implies \nu(A) \le \nu(B)$.*

Definition 1.2 *Sei $\mathcal{C} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ so, daß $\Omega \in \mathcal{C}$. Eine monotone Mengenfunktion $\nu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ heißt* **endlich***, falls $\nu(\Omega) < \infty$. ν heißt* **σ-endlich***, falls es eine abzählbare Menge $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$ gibt derart, daß $\Omega = \bigcup \mathcal{M}$ und $\nu(M) < \infty$ für alle $M \in \mathcal{M}$.*

Definition 1.3 *Eine Mengenfunktion $\nu : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ heißt* **äußeres Maß auf** Ω*, falls ν die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) $\nu(\emptyset) = 0$.

(ii) ν ist monoton.

(iii) *ν ist σ-**subadditiv**, d. h. für jede abzählbare Menge $\mathcal{M} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt:*

$$\nu\left(\bigcup \mathcal{M}\right) \;\leq\; \sum_{A \in \mathcal{M}} \nu(A)\ .$$

Definition 1.4 *Eine Menge $\Sigma \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt σ-**Algebra auf** Ω, falls Σ die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) $\emptyset \in \Sigma$.

(ii) *Für alle $A \in \Sigma$ ist* $\Omega \setminus A \in \Sigma$.

(iii) *Für jede abzählbare Menge $\mathcal{M} \subset \Sigma$ ist* $\bigcup \mathcal{M} \in \Sigma$.

Definition 1.5 *Sei Σ eine σ-Algebra auf Ω. Eine Mengenfunktion $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ heißt **Maß auf** Σ, falls μ die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) $\mu(\emptyset) \;=\; 0$.

(ii) *ν ist σ-**additiv**, d. h. für jede disjunkte abzählbare Menge $\mathcal{M} \subset \Sigma$ gilt:*

$$\nu\left(\bigcup \mathcal{M}\right) \;=\; \sum_{A \in \mathcal{M}} \nu(A)\ .$$

1.2 Meßbarkeit und Nullmengen

Ziel dieses Abschnitts ist, für ein gegebenes äußeres Maß ν auf Ω eine (möglichst große) σ-Algebra zu finden, auf der ν additiv ist. Der bereits erwähnte Satz 1.11 liefert ein derartiges Resultat; um diesen Satz formulieren zu können, benötigt man zuvor den Begriff der ν-Meßbarkeit von Mengen. Die folgende (etwas unanschauliche) Definition geht auf Carathéodory zurück.

Definition 1.6 (Carathéodory) *Sei ν ein äußeres Maß auf Ω. Eine Menge $A \subset \Omega$ heißt ν-**meßbar**, falls gilt:*

$$\forall\, Q \subset \Omega\ :\quad \nu(Q) = \nu(Q \setminus A) + \nu(Q \cap A)\ .$$

Die Menge aller ν-meßbaren Teilmengen von Ω wird mit $\mathfrak{M}_\nu^\Omega$ bezeichnet.

Als unmittelbare Konsequenz aus der σ-Subadditivität von äußeren Maßen notieren wir die

Bemerkung 1.7 *Sei ν ein äußeres Maß auf Ω. Eine Teilmenge $A \subset \Omega$ ist genau dann ν-meßbar, wenn gilt:* $\forall\, Q \subset \Omega\ :\ \nu(Q) \geq \nu(Q \setminus A) + \nu(Q \cap A)$.

Besonders einfach zu handhabende Mengen sind solche, deren äußeres Maß Null ist:

Definition 1.8 *Sei ν ein äußeres Maß auf Ω. Eine Menge $A \subset \Omega$ heißt* **ν-Nullmenge***, falls $\nu(A) = 0$.*

Lemma 1.9 *Seien ν ein äußeres Maß auf Ω und $Q, A \subset \Omega$. Ist A eine ν-Nullmenge, so gilt:*

(i) $\nu(Q \cap A) = 0$

(ii) $\nu(Q \cup A) = \nu(Q)$

(iii) $\nu(Q \setminus A) = \nu(Q)$

Beweis. Sei $\nu(A) = 0$. Wegen $Q \cap A \subset A$ folgt aus der Monotonie von ν unmittelbar Aussage (i). Ferner erhält man aus der Monotonie und der σ-Subadditivität von ν die Ungleichung $\nu(Q) \leq \nu(Q \cup A) \leq \nu(Q) + \nu(A) = \nu(Q)$, mithin die Aussage (ii). Anwendung von (i) und (ii) ergibt schließlich: $\nu(Q \setminus A) = \nu((Q \setminus A) \cup (Q \cap A)) = \nu(Q)$, also (iii). ■

Mit Hilfe des eben formulierten Lemmas können wir sofort zeigen, daß alle Nullmengen bereits meßbar sind:

Satz 1.10 *Sei ν ein äußeres Maß auf Ω. Dann ist jede ν-Nullmenge ν-meßbar.*

Beweis. Sei $A \subset \Omega$ eine ν-Nullmenge. Für alle $Q \subset \Omega$ gilt dann nach Lemma 1.9 $\nu(Q \setminus A) = \nu(Q)$ und $\nu(Q \cap A) = 0$, also $\nu(Q) = \nu(Q \setminus A) + \nu(Q \cap A)$. Also ist A ν-meßbar. ■

Für den langen Beweis des abschließenden Satzes geben wir lediglich eine Fundstelle an.

Satz 1.11 (Carathéodory) *Sei ν ein äußeres Maß auf Ω. Dann ist $\mathfrak{M}_\nu^\Omega$ eine σ-Algebra auf Ω und enthält alle ν-Nullmengen. Ferner ist die Restriktion von ν auf $\mathfrak{M}_\nu^\Omega$ ein Maß.*

Beweis. [ROG] Theoreme 2 und 3, S. 4–8. □

1.3 Monotone Mengenfolgen und σ-Stetigkeit von Maßen

Eine besonders wichtige Eigenschaft von Maßen ist ihre Stetigkeit bezüglich monotoner Mengenfolgen, die sog. *σ-Stetigkeit*.[1] Wir notieren zunächst die folgende

[1]Unter bestimmten zusätzlichen Voraussetzungen haben auch äußere Maße derartige Eigenschaften; siehe dazu die beiden Abschnitte 1.4 und 1.6.

Definition 1.12 *Eine Folge* (A_j) *in* $\mathfrak{P}(\Omega)$ *heißt* **aufsteigend** *(bzw.* **absteigend***), falls für alle* $j \in \mathbb{N}$ *die Inklusion* $A_j \subset A_{j+1}$ *(bzw.* $A_j \supset A_{j+1}$*) gilt. Eine Folge* (A_j) *in* $\mathfrak{P}(\Omega)$ *heißt* **monoton***, falls sie auf- oder absteigend ist. Ist* (A_j) *eine aufsteigende bzw. absteigende Folge in* $\mathfrak{P}(\Omega)$*, so setzt man:*

$$\lim_{j\to\infty} A_j := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \qquad \textit{bzw.} \qquad \lim_{j\to\infty} A_j := \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$$

Wo Verwechslungen ausgeschlossen sind, wird im folgenden die Indizierung „$j\to\infty$“ bei Limesbildungen der Übersichtlichkeit wegen weggelassen.

Bemerkung 1.13 *Sind* Σ *eine* σ*-Algebra auf* Ω *und* (A_j) *eine monotone Folge in* Σ*, so gilt wegen der Abgeschlossenheit von* Σ *unter der Bildung von abzählbarer Vereinigung bzw. abzählbarem Durchschnitt* $\lim A_j \in \Sigma$ *.*

Wir notieren nun den bereits angekündigten Satz über die Stetigkeit von Maßen bezüglich monotoner Mengenfolgen. Anstelle eines Beweises zitieren wir auch hier die entsprechende Literatur.

Satz 1.14 (σ-Stetigkeit von Maßen) *Seien* Σ *eine* σ*-Algebra auf* Ω*,* μ *ein Maß auf* (Ω, Σ) *und* (A_j) *eine monotone Folge in* Σ*. Dann gilt:*

(i) (A_j) *aufsteigend* $\Longrightarrow \mu(\lim A_j) = \lim \mu(A_j)$

(ii) (A_j) *absteigend* $\wedge\, \mu(A_1) < \infty \Longrightarrow \mu(\lim A_j) = \lim \mu(A_j)$

Beweis. [FAL2] Theorem 1.1, S. 2f. □

Für äußere Maße kann man im allgemeinen keine Stetigkeitsaussagen bezüglich monotoner Mengenfolgen beweisen. Lediglich die folgenden Ungleichungen sind stets wahr:

Satz 1.15 *Seien* ν *ein äußeres Maß auf* Ω *und* (A_j) *eine Folge in* $\mathfrak{P}(\Omega)$*. Dann gilt:*

(i) (A_j) *aufsteigend* $\Longrightarrow \nu(\lim A_j) \geq \lim \nu(A_j)$

(ii) (A_j) *absteigend* $\Longrightarrow \nu(\lim A_j) \leq \lim \nu(A_j)$

Beweis. Sei (A_j) aufsteigend. Wegen $\lim A_j \supset A_j$ folgt $\nu(\lim A_j) \geq \nu(A_j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und deswegen $\nu(\lim A_j) \geq \sup\{\, \nu(A_j) \mid j \in \mathbb{N} \,\} = \lim \nu(A_j)$, d. h. es gilt (i). Aussage (ii) zeigt man analog. ■

1.4 Reguläre äußere Maße

Die Stetigkeitsaussage für aufsteigende Mengenfolgen aus Satz 1.14 ist zumindest dann auch für ein äußeres Maß ν wahr, wenn ν der folgenden zusätzlichen Bedingung genügt: Zu jeder Teilmenge von Ω findet man eine ν-meßbare Obermenge gleichen äußeren Maßes. Ein äußeres Maß mit dieser Eigenschaft nennt man *regulär.*

Definition 1.16 *Sei ν ein äußeres Maß auf Ω. ν heißt* **regulär**, *falls gilt:*

$$\forall\, A \subset \Omega \quad \exists\, E \in \mathfrak{M}_\nu^\Omega : \quad A \subset E \ \wedge \ \nu(A) = \nu(E) \,.$$

Bevor wir die bereits angedeutete σ-Stetigkeit von regulären äußeren Maßen formulieren, beweisen wir unter direkter Ausnutzung der Definition die bemerkenswerte Tatsache, daß für ein reguläres äußeres Maß ν die σ-Algebra der ν-meßbaren Mengen in der folgenden Weise maximal ist:

Satz 1.17 *Seien ν ein reguläres äußeres Maß auf Ω und Σ eine σ-Algebra auf Ω, die $\mathfrak{M}_\nu^\Omega$ umfaßt und auf der ν additiv ist. Dann ist $\Sigma = \mathfrak{M}_\nu^\Omega$.*

Beweis. Zu zeigen ist lediglich die Inklusion „$\subset$'“. Sei also $A \in \Sigma$. Man prüft die ν-Meßbarkeit von A gemäß Bemerkung 1.7 nach. Sei dazu $Q \subset F$. Da ν regulär ist, findet man eine ν-meßbare Obermenge $E \subset F$ von Q so, daß $\nu(Q) = \nu(E)$. Wegen $\mathfrak{M}_\nu^\Omega \subset \Sigma$ sind $A, E \in \Sigma$. Da ν monoton und auf Σ additiv ist, gilt

$$\nu(Q \setminus A) + \nu(Q \cap A) \ \le \ \nu(E \setminus A) + \nu(E \cap A) \ = \ \nu(E) \ = \ \nu(Q) \,. \quad \blacksquare$$

Satz 1.18 (σ-Stetigkeit von regulären äußeren Maßen) *Sei ν ein reguläres äußeres Maß auf Ω und (A_j) eine aufsteigende Folge in $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann ist $\nu(\lim A_j) = \lim \nu(A_j)$.*

Beweis. [ROG] Theorem 9, S. 17. $\square$

Die analoge Stetigkeitsaussage für absteigende Mengenfolgen ist (im Fall regulärer äußerer Maße) im allg. nicht wahr. Dazu findet man bei Rogers mehrere schöne Beispiele.[2] — Eine weitere wichtige Eigenschaft regulärer äußerer Maße ist das folgende (im Vergleich zur Carathéodory-Definition deutlich einfachere) Meßbarkeitskriterium für Mengen endlichen äußeren Maßes:

Satz 1.19 (Meßbarkeitskriterium für reguläre äußere Maße) *Seien ν ein reguläres äußeres Maß auf Ω und $M \in \mathfrak{M}_\nu^\Omega$. Gilt $\nu(M) < \infty$, so ist eine Teilmenge $A \subset M$ genau dann ν-meßbar, wenn $\nu(M) = \nu(A) + \nu(M \setminus A)$.*

Beweis. [ROG] Theorem 10, S. 19f. $\square$

[2] [ROG] S. 18

1.5 Die Borelsche σ-Algebra

Es ist im allgemeinen sehr nützlich, σ-Algebren zu untersuchen, die von einer geeigneten Teilmenge von $\mathfrak{P}(\Omega)$ erzeugt werden. Um dies zu präzisieren, notieren wir zunächst das

Lemma 1.20 *Ist $\mathcal{F}$ eine Menge von σ-Algebren auf Ω, so ist auch $\bigcap \mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω.*

Beweis. Einfaches Verifizieren der Definitionen. □

Wir können also σ-Algebren beliebig miteinander schneiden und erhalten wieder σ-Algebren. Dies erlaubt nun die folgende

Definition 1.21 *Seien $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ und*

$$\mathcal{F} := \{ \Sigma \mid \mathcal{E} \subset \Sigma \text{ und } \Sigma \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } \Omega \} .$$

Dann heißt $\bigcap \mathcal{F}$ **die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra auf Ω**.

Im Fall topologischer Räume erhält die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra einen besonderen Namen:

Definition 1.22 *Sei (Ω, τ) ein topologischer Raum. Die von τ erzeugte σ-Algebra auf Ω heißt* **Borelsche σ-Algebra** *und wird mit $\mathfrak{B}^\Omega$ bezeichnet, die Elemente von $\mathfrak{B}^\Omega$ heißen* **Borelsche Mengen**. *Im Falle $\Omega = \mathbb{R}$ schreibt man kurz $\mathfrak{B}$.*

Bemerkung 1.23 *Ist (Ω, τ) ein topologischer Raum, so enthält die Borelsche σ-Algebra $\mathfrak{B}^\Omega$ alle offenen sowie (aufgrund der Abgeschlossenheit einer σ-Algebra unter Komplementbildung) alle abgeschlossenen Teilmengen von Ω.*

1.6 Metrische äußere Maße

Eine Abschwächung der Aussage von Satz 1.18 gewinnt man für die sog. *metrischen* äußeren Maße auf metrischen Räumen.

Definition 1.24 *Sei (Ω, d) ein metrischer Raum. Ein äußeres Maß ν auf Ω heißt* **metrisch**, *falls gilt:*

$$\forall\, A, B \subset \Omega : \quad \mathrm{d}(A, B) > 0 \implies \nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) .$$

Satz 1.25 (Carathéodory) *Seien (Ω, d) ein metrischer Raum, ν ein metrisches äußeres Maß auf Ω und (A_j) eine aufsteigende Folge in $\mathfrak{P}(\Omega)$ mit der Eigenschaft*

$$\forall\, j \in \mathbb{N} : \quad \mathrm{d}(A_j, \Omega \setminus A_{j+1}) > 0 .$$

Dann ist $\nu(\lim A_j) = \lim \nu(A_j)$.

Beweis. [ROG] Theorem 17, S. 31f. □

Eine wichtige Folgerung aus dem eben zitierten Satz 1.25 ist, daß im Fall eines metrischen äußeren Maßes ν alle abgeschlossenen Mengen ν-meßbar sind. Da die ν-meßbaren Mengen eine σ-Algebra bilden, impliziert dies, daß bereits alle Borel-Mengen ν-meßbar sind:

Satz 1.26 *Seien* (Ω, d) *ein metrischer Raum und* ν *ein metrisches äußeres Maß auf* Ω*. Dann sind alle Borel-Mengen* ν*-meßbar, d. h. es ist* $\mathfrak{B}^\Omega \subset \mathfrak{M}^\Omega_\nu$*.*

Beweis. [ROG] Theoreme 18 und 19, S. 32f. □

2 Konstruktion äußerer Maße

Im ersten Abschnitt dieses Paragraphen werden zwei Methoden (die sog. Infimums- bzw. Supremums-Methode[1]) vorgestellt, mit deren Hilfe man äußere Maße auf beliebigen Mengen konstruieren kann (Sätze 2.1 und 2.2). Vermittels der Infimums-Methode wird im zweiten Abschnitt die bekannte Konstruktion des äußeren Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$ durchgeführt (Satz 2.4). In enger Anlehnung an die Konstruktion des Hausdorff-Maßes der Dimension 1 werden im dritten Abschnitt schließlich die äußeren d-Maße auf F etabliert, wobei man sich sowohl der Infimums- als auch der Supremums-Methode bedient (Satz 2.7).

2.1 Hilfsmittel

Die in den beiden Sätzen dieses Abschnitts vorgestellten Methoden zur Konstruktion äußerer Maße auf beliebigen Mengen werden im weiteren Verlauf dieses Paragraphen lediglich als Hilfsmittel zur Konstruktion des äußeren Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$ sowie der äußeren d-Maße auf F dienen.[2]

Satz 2.1 (Infimums-Methode) *Sei $\mathcal{C} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ so, daß $\emptyset \in \mathcal{C}$. Sei ferner $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ so, daß $\tau(\emptyset) = 0$. Dann ist die Mengenfunktion*

$$\nu \,:\, \mathfrak{P}(\Omega) \to [\,0, \infty\,]\ ,\ A \mapsto \inf \left\{ \sum_{M \in \mathcal{M}} \tau(M) \;\middle|\; \mathcal{M} \subset \mathcal{C} \text{ ist abzählbar und } A \subset \bigcup \mathcal{M} \right\}$$

ein äußeres Maß auf Ω. (Dabei setzt man wie üblich $\inf(\emptyset) = \infty$.)

Beweis. [ROG] Theorem 4, S. 9–11. □

Satz 2.2 (Supremums-Methode) *Ist $\mathcal{N}$ eine Menge äußerer Maße auf Ω, so ist*

$$\nu \,:\, \mathfrak{P}(\Omega) \to [\,0, \infty\,]\ ,\ A \mapsto \sup\{\, \nu(A) \mid \nu \in \mathcal{N} \,\}$$

ein äußeres Maß auf Ω.

Beweis. [ROG] Theorem 12, S. 21. □

[1] Rogers nennt diese beiden Methoden *method I* bzw. *method II*.

[2] Zur wesentlich allgemeineren Bedeutung der Infimums-Methode (method I) im Rahmen der Theorie äußerer Maße s. [ROG] S. 9ff.

2.2 Konstruktion des äußeren Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$

Die mittels der Infimums-Methode durchgeführte Konstruktion des äußeren Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$ ist die „klassische" Konstruktion.

Definition 2.3 *Für alle $A \subset \mathbb{R}$ heißt eine abzählbare Menge $\mathcal{M}$ von reellen Intervallen eine* **Intervall-Überdeckung von** *A, falls $A \subset \bigcup \mathcal{M}$. Die Menge aller Intervall-Überdeckungen von A wird mit $\mathfrak{I}(A)$ bezeichnet.*

Satz 2.4 *Die Mengenfunktion*

$$\lambda^* : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty] , \ A \mapsto \inf \left\{ \sum_{I \in \mathcal{M}} \operatorname{diam}(I) \ \middle| \ \mathcal{M} \in \mathfrak{I}(A) \right\}$$

ist ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}$.

Beweis. Setzt man $\mathcal{C} := \{ I \subset \mathbb{R} \mid I \text{ ist ein Intervall} \}$ und $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty], A \mapsto \operatorname{diam}(A)$, so sind offenbar $\emptyset \in \mathcal{C}$ und $\tau(\emptyset) = \operatorname{diam}(\emptyset) = 0$. Nach Satz 2.1 ist daher λ^* ein äußeres Maß. ■

Definition 2.5 *Das in Satz 2.4 definierte äußere Maß λ^* auf $\mathbb{R}$ heißt* **äußeres Lebesgue-Maß auf** $\mathbb{R}$. *Die λ^*-meßbaren Mengen nennt man auch* **Lebesgue-meßbar***; die Menge aller Lebesgue-meßbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ wird mit $\mathfrak{M}^*$ bezeichnet. Das durch Restriktion von λ^* auf $\mathfrak{M}^*$ entstehende Maß λ heißt* **Lebesgue-Maß**.

2.3 Konstruktion der äußeren d-Maße auf F

Die in diesem Abschnitt durchgeführte Konstruktion des äußeren Längenmaßes auf F lehnt sich eng an die bekannte Konstruktion des *Hausdorff-Maßes der Dimension 1* an. Der wesentliche Unterschied zwischen diesen beiden Konstruktionen besteht in den verschiedenen Mengen, die im Rahmen der Anwendung der Infimums-Methode zur Überdeckung zugelassen werden: während bei der Konstruktion des Hausdorff-Maßes der Dimension 1 *beliebige* Mengen zur Überdeckung zugelassen werden, werden wir bei der Konstruktion der äußeren Längenmaßes auf F lediglich Überdeckungen durch *F-Kugeln* zulassen.[3] — Zunächst stellen wir wieder einige Begriffe und Notationen bereit.

Definition 2.6 *(i) Für alle $A \subset F$ heißt eine abzählbare Menge $\mathcal{K}$ von F-Kugeln eine* **F-Kugel-Überdeckung von** *A, falls $A \subset \bigcup \mathcal{K}$. Die Menge aller F-Kugel-Überdeckungen von A wird mit $\mathfrak{K}^F_\infty(A)$ bezeichnet.*

[3] Aus diesem Grund nennt Falconer das äußere Längenmaß *sphärisches Hausdorff-Maß der Dimension 1* ([FAL2] S. 7). Eine genauere Untersuchung dieses äußeren Maßes findet man bei Falconer jedoch nicht.

(ii) *Für alle $A \subset F$ und $d \in \,]\,0, \infty\,[\,$ setzt man*

$$\mathfrak{K}_d^F(A) := \left\{ \mathcal{K} \in \mathfrak{K}_\infty^F(A) \;\middle|\; \forall\, K \in \mathcal{K} \,:\, \operatorname{diam}(K) < d \right\} ;$$

jedes der Elemente von $\mathfrak{K}_d^F(A)$ wird als **F-Kugel-Überdeckung von A zum Durchmesser d** *bezeichnet.*

(iii) *Für alle $A \subset F$ heißt eine F-Kugel-Überdeckung $\mathcal{K}$ von A* **offen** *(bzw.* **abgeschlossen***), wenn jede F-Kugel $K \in \mathcal{K}$ offen (bzw. abgeschlossen) ist.*

Daß es in der vorliegenden Definition der F-Kugel-Überdeckungen von A zum Durchmesser d wichtig ist, die „echte“ Ungleichung $\operatorname{diam}(K_j) < d$ (und nicht $\operatorname{diam}(K_j) \le d$) zu fordern, wird im Beweis von Lemma 3.10 deutlich werden. — Wir können nun die Konstruktion der äußeren d-Maße vornehmen.

Satz 2.7 *Für alle $d \in \,]\,0, \infty\,]$ ist die Mengenfunktion*

$$\lambda_d^F \,:\, \mathfrak{P}(F) \to [\,0, \infty\,] \;,\; A \mapsto \inf \left\{ \sum_{K \in \mathcal{K}} \operatorname{diam}(K) \;\middle|\; \mathcal{K} \in \mathfrak{K}_d^F(A) \right\}$$

ein äußeres Maß auf F. Ferner ist

$$\lambda_0^F \,:\, \mathfrak{P}(F) \to [\,0, \infty\,] \;,\; A \mapsto \sup \left\{ \lambda_d^F(A) \;\middle|\; d \in \,]\,0, \infty\,] \right\}$$

ein äußeres Maß auf F.

Beweis. Sei $d \in \,]\,0, \infty\,]$. Setzt man $\mathcal{C} := \{\, K \subset F \mid K$ ist eine F-Kugel mit $\operatorname{diam}(K) < d \,\}$ und $\tau : \mathcal{C} \to [\,0, \infty\,], A \mapsto \operatorname{diam}(A)$, so sind offenbar $\emptyset \in \mathcal{C}$ und $\tau(\emptyset) = \operatorname{diam}(\emptyset) = 0$. Nach Satz 2.1 ist daher λ_d^F ein äußeres Maß. Kombiniert man dies mit Satz 2.2, so folgt die Behauptung auch für λ_0^F. ∎

Definition 2.8 *Für alle $d \in [\,0, \infty\,]$ heißt das in Satz 2.7 definierte äußere Maß λ_d^F auf F* **äußeres d-Maß auf F**. *Insbesondere heißt λ_0^F* **äußeres Längenmaß auf F**. *Die Menge aller λ_d^F-meßbaren Teilmengen von F wird mit $\mathfrak{M}_d^F$ bezeichnet.*

Bemerkung 2.9 *Vergleicht man die Konstruktionen von λ^* und λ_d^F, so erhält man für den Spezialfall $F = \mathbb{R}$ die Identität $\lambda_\infty^{\mathbb{R}} = \lambda^*$.*

3 Fundamentale Eigenschaften der äußeren d-Maße

Mit relativ einfachen Mitteln werden in diesem Paragraphen einige fundamentale Eigenschaften der äußeren d-Maße gezeigt. Die drei einleitenden kurzen Abschnitte beschäftigen sich mit der Translationsinvarianz der äußeren d-Maße, dem äußeren d-Maß von abzählbaren Mengen sowie der σ-Endlichkeit von λ_∞^F. Fixiert man eine Teilmenge $A \subset F$, so liefert die Untersuchung der Abbildung

$$\lambda_{(\cdot)}^F(A) \ : \ [\,0, \infty\,] \to [\,0, \infty\,] \ , \ d \mapsto \lambda_d^F(A)$$

einige einfache, aber durchaus bemerkenswerte Tatsachen. Da im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit diese Abbildung $\lambda_{(\cdot)}^F(A)$ eine entscheidende Rolle spielen wird, finden sich ihre wichtigsten Eigenschaften im vierten Abschnitt. Als unmittelbare Konsequenz aus der Antitonie von $\lambda_{(\cdot)}^F(A)$ bzw. der Stetigkeit von $\lambda_{(\cdot)}^F(A)$ in Null ergeben sich die Nullmengen-Äquivalenz der äußeren d-Maße sowie die Homogenität von λ_0^F, die in den beiden folgenden Abschnitten bewiesen werden. Der siebente Abschnitt bringt eine für das weitere Vorgehen äußerst nützliche Aussage: Zu jeder Teilmenge von F und zu jedem $d \in [\,0, \infty\,]$ existiert eine Borelsche Obermenge gleichen äußeren d-Maßes (Satz 3.11). Im letzten Abschnitt dieses Paragraphen wird schließlich der Nachweis der Tatsache erbracht, daß λ_0^F ein reguläres metrisches äußeres Maß auf F ist (Satz 3.13); insbesondere sind daher alle Borelschen Teilmengen von F bereits λ_0^F-meßbar (s. Satz 1.26). Im Hinblick auf die in der Einleitung notierten Anforderungen an das äußere Längenmaß können wir bereits am Ende dieses Paragraphen konstatieren, daß λ_0^F den Forderungen 2, 3, 6, 7 und 8 genügt.

3.1 Translationsinvarianz der äußeren d-Maße

Lemma 3.1 *Für alle $d \in [\,0, \infty\,]$ ist λ_d^F translationsinvariant.*

Beweis. Offenbar ist für alle $d \in \,]\,0, \infty\,]$, $A \subset F$ und $x \in F$ die Abbildung

$$\mathfrak{K}_d^F(A) \to \mathfrak{K}_d^F(x + A) \ , \ \mathcal{K} \mapsto x + \mathcal{K}$$

eine Bijektion, d. h. λ_d^F ist translationsinvariant für alle $d \in \,]\,0, \infty\,]$. Dies impliziert dann auch die Translationsinvarianz von λ_0^F. ∎

3.2 Äußeres d-Maß von abzählbaren Mengen

Lemma 3.2 *Sei $A \subset F$ abzählbar. Dann gilt $\lambda_d^F(A) = 0$ für alle $d \in [\,0, \infty\,]$.*

Beweis. Wegen $\operatorname{diam}(\{x\}) = 0$ für alle $x \in F$ ist $\{\ \{x\} \mid x \in A\ \} \in \mathfrak{K}_d^F(A)$ und daher

$$0 \;\le\; \lambda_d^F(A) \;\le\; \sum_{x\in A} \operatorname{diam}(\{x\}) \;=\; 0$$

für alle $d \in \,]\,0, \infty\,]$. Dies impliziert dann auch $\lambda_0^F(A) = 0$. ∎

3.3 σ-Endlichkeit von λ_∞^F

Bevor wir den Satz über die σ-Endlichkeit von λ_∞^F beweisen, notieren wir ein kleines Lemma.

Lemma 3.3 *Für alle $A \subset F$ ist $\lambda_\infty^F(A) \le 2\operatorname{diam}(A)$.*

Beweis. Der Fall $A = \emptyset$ ist trivial; es seien also $\emptyset \ne A \subset F$ und $x \in A$. Setzt man $\mathcal{K} := \{\overline{\mathrm{K}}\,(x, \operatorname{diam}(A))\}$, so ist offenbar $\mathcal{K} \in \mathfrak{K}_\infty^F(A)$ und daher $\lambda_\infty^F(A) \le \operatorname{diam}\big(\overline{\mathrm{K}}\,(x, \operatorname{diam}(A))\big) = 2\operatorname{diam}(A)$. ∎

Satz 3.4 *λ_∞^F ist ein σ-endliches äußeres Maß auf F.*

Beweis. Nach Lemma 3.3 gilt $\lambda_\infty^F(\mathrm{K}\,(0,n)) \le 4n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}\,(0,n)$ ist λ_∞^F also σ-endlich. ∎

3.4 Eigenschaften der Abbildung $\lambda_{(\cdot)}^F(A)$

Wie in der Einleitung zu diesem Paragraphen bereits angedeutet wurde, spielt die Abbildung $\lambda_{(\cdot)}^F(A)$ für ein festes $A \subset F$ eine entscheidende Rolle in vielen weiteren Beweisen dieser Arbeit. Daher werden wir im folgenden als zentrale Eigenschaften von $\lambda_{(\cdot)}^F(A)$ die Antitonie sowie die Stetigkeit in 0 und ∞ beweisen. — In diesem Abschnitt sei $A \subset F$ fixiert.

Satz 3.5 (Antitonie von $\lambda_{(\cdot)}^F(A)$) *Die Abbildung $\lambda_{(\cdot)}^F(A)$ ist monoton fallend.*

Beweis. Seien $0 < d \le d' \le \infty$. Dann gilt offenbar $\mathfrak{K}_d^F(A) \subset \mathfrak{K}_{d'}^F(A) \subset \mathfrak{K}_\infty^F(A)$. Dies impliziert $\lambda_0^F(A) \ge \lambda_d^F(A) \ge \lambda_{d'}^F(A) \ge \lambda_\infty^F(A)$, womit die Behauptung gezeigt ist. ∎

Lemma 3.6 *Es gelte $m := \lambda_\infty^F(A) < \infty$. Dann ist $\lambda_d^F(A) = m$ für alle $d \in \,]\,m, \infty\,]$.*

Beweis. Sei $d \in \,]\, m, \infty\,]$. Aufgrund der Antitonie von $\lambda^F_{(\cdot)}(A)$ genügt es, die Ungleichung

$$\lambda^F_d(A) \;\leq\; m \;=\; \inf\;]\, m, d\,[$$

zu zeigen. Sei $\alpha \in \,]\, m, d\,[$. Wegen $\lambda^F_\infty(A) = m < \alpha$ findet man $\mathcal{K} \in \mathfrak{K}^F_\infty(A)$ derart, daß

$$\sum_{K \in \mathcal{K}} \operatorname{diam}(K) \;<\; \alpha \;<\; d\,.$$

Dies impliziert $\operatorname{diam}(K) < d$ für alle $K \in \mathcal{K}$, also $\mathcal{K} \in \mathfrak{K}^F_d(A)$. Daraus folgt sofort

$$\lambda^F_d(A) \;\leq\; \sum_{K \in \mathcal{K}} \operatorname{diam}(K) \;<\; \alpha\,,$$

was zu zeigen war. ■

Satz 3.7 (Stetigkeit von $\lambda^F_{(\cdot)}(A)$ in 0 und ∞) *Es gilt:*

$$\lambda^F_0(A) \;=\; \lim_{d \to 0} \lambda^F_d(A) \qquad \textit{und} \qquad \lambda^F_\infty(A) \;=\; \lim_{d \to \infty} \lambda^F_d(A)$$

Beweis. Die erste Aussage ergibt sich unmittelbar aus der Antitonie von $\lambda^F_{(\cdot)}(A)$ und der Definition von $\lambda^F_0(A)$. Die zweite Aussage ist im Fall $\lambda^F_\infty(A) = \infty$ aufgrund der Antitonie von $\lambda^F_{(\cdot)}(A)$ trivialerweise erfüllt; im Fall $m := \lambda^F_\infty(A) < \infty$ folgt aus Lemma 3.6 für alle $d \in \,]\, m, \infty\,]$ die Identität $\lambda^F_d(A) = m$ und damit ebenfalls die zweite Aussage der Behauptung. ■

3.5 Nullmengen-Äquivalenz der äußeren d-Maße

Mit Hilfe der im letzten Abschnitt gezeigten Eigenschaften von $\lambda^F_{(\cdot)}(A)$ zeigen wir zunächst, daß die Nullmengen für alle äußeren d-Maße dieselben sind:

Satz 3.8 *Für alle $A \subset F$ gilt:*

$$\big(\exists\, d \in [0, \infty] \;:\; \lambda^F_d(A) = 0\big) \iff \big(\forall\, d \in [0, \infty] \;:\; \lambda^F_d(A) = 0\big)$$

Beweis. „$\Leftarrow$“ : Trivial.
„$\Rightarrow$“ : Seien $A \subset F$ und $d \in [0, \infty]$ derart, daß $\lambda^F_d(A) = 0$. Dies impliziert aufgrund der Antitonie von $\lambda^F_{(\cdot)}(A)$ insbesondere $\lambda^F_\infty(A) = 0 < \infty$. Mit Lemma 3.6 folgt daher

$$\forall\, d \in \,]\,0, \infty\,] \;:\; \lambda^F_d(A) = 0\,.$$

Hieraus folgt unmittelbar $\lambda^F_0(A) = 0$. ■

3.6 Homogenität von λ_0^F und λ_∞^F

Eine schöne Anwendung der Stetigkeit von $\lambda_{(\cdot)}^F(A)$ in 0 ist der folgende Satz:

Satz 3.9 *λ_0^F und λ_∞^F sind homogen vom Grad 1.*

Beweis. Seien $A \subset F$. Zu zeigen ist

$$\lambda_d^F(tA) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } t = 0 \\ |t| \cdot \lambda_d^F(A) & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $d \in \{0, \infty\}$. Der Fall $t = 0$ ist trivial; es sei also $t \neq 0$. Aufgrund der Homogenität der Norm ist für alle $d \in \,]\,0, \infty\,]$ die Abbildung

$$\mathfrak{K}_d^F(A) \to \mathfrak{K}_{|t|d}^F(tA)\;,\; \mathcal{K} \mapsto t\,\mathcal{K}$$

eine Bijektion. Daher gilt

$$\begin{aligned} \lambda_{|t|d}^F(tA) &= \inf\left\{ \sum_{K \in \mathcal{K}} \operatorname{diam}(K) \;\middle|\; \mathcal{K} \in \mathfrak{K}_{|t|d}^F(tA) \right\} \\ &= \inf\left\{ \sum_{K \in t\,\mathcal{K}} \operatorname{diam}(K) \;\middle|\; \mathcal{K} \in \mathfrak{K}_d^F(A) \right\} \\ &= \inf\left\{ \sum_{K \in \mathcal{K}} \operatorname{diam}(tK) \;\middle|\; \mathcal{K} \in \mathfrak{K}_d^F(A) \right\} \;=\; |t| \cdot \lambda_d^F(A) \end{aligned}$$

für alle $d \in \,]\,0, \infty\,]$. Dies beinhaltet bereits die Identität $\lambda_\infty^F(tA) = |t|\lambda_\infty^F(A)$. Der Grenzübergang $d \to 0$ liefert ferner aufgrund der Stetigkeit von $\lambda_{(\cdot)}^F(A)$ in 0 die noch fehlende Beziehung $\lambda_0^F(tA) = |t|\lambda_0^F(A)$. ■

3.7 Borelsche Approximation „von außen“

Lemma 3.10 *Seien $A \subset F$ und $d \in \,]\,0, \infty\,]$ so, daß $\lambda_d^F(A) < \infty$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:*

(i) Es existiert eine abgeschlossene (bzw. offene) F-Kugel-Überdeckung $\mathcal{K} \in \mathfrak{K}_d^F(A)$ so, daß

$$\sum_{K \in \mathcal{K}} \operatorname{diam}(K) \;<\; \lambda_d^F(A) + \varepsilon\,.$$

(ii) Es existiert eine offene Obermenge $U \subset F$ von A so, daß $\lambda_d^F(U) < \lambda_d^F(A) + \varepsilon$.

Beweis. Fall 1: $d < \infty$:

Seien $d < \infty$ und $\varepsilon > 0$; o.B.d.A. gelte $\varepsilon < 2\,d$. Nach Definition von λ_d^F findet man eine abzählbare Menge $J \subset \mathbb{N}$ und eine Menge $\{\ L_j \mid j \in J\ \} \in \mathfrak{K}_d^F(A)$ so, daß

$$\sum_{j \in J} \operatorname{diam}(L_j) \ < \ \lambda_d^F(A) + \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{3.1}$$

Offenbar ist $\left\{\ \overline{L}_j \ \middle|\ j \in J\ \right\} \in \mathfrak{K}_d^F(A)$ abgeschlossen; wegen $\operatorname{diam}(L_j) = \operatorname{diam}\bigl(\overline{L}_j\bigr)$ für alle $j \in J$ erfüllt also $\left\{\ \overline{L}_j \ \middle|\ j \in J\ \right\}$ die Forderung in Aussage (i).
Wegen $\{\ L_j \mid j \in J\ \} \in \mathfrak{K}_d^F(A)$ gilt $\operatorname{diam}(L_j) < d < \infty$ für alle $j \in J$. Daher findet man $x_j \in F$ und $r_j \in [\,0, \frac{d}{2}\,[$ so, daß für alle $j \in J$ die Beziehung

$$\mathrm{K}(x_j, r_j) \ \subset\ L_j \ \subset\ \overline{\mathrm{K}}(x_j, r_j)$$

gilt. Definiert man nun

$$K_j \ :=\ \mathrm{K}\Bigl(x_j\,,\ r_j + (d - 2\,r_j)\,\frac{\varepsilon}{2\,d}\,2^{-(j+1)}\Bigr)$$

für alle $j \in J$, so folgt wegen $d - 2\,r_j > 0$ sofort $K_j \supset \overline{\mathrm{K}}(x_j, r_j) \supset L_j$. Wegen $\varepsilon < 2\,d$ gilt ferner

$$\operatorname{diam}(K_j) \ =\ 2\,r_j + (d - 2\,r_j)\,\frac{\varepsilon}{2\,d}\,2^{-j} \ <\ 2\,r_j + (d - 2\,r_j) \ =\ d$$

für alle $j \in J$. Also ist die Menge $\{\ K_j \mid j \in J\ \}$ eine offene F-Kugel-Überdeckung von A zum Durchmesser d. Mit (3.1) folgt dann:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \operatorname{diam}(K_j) \ &=\ \sum_{j \in J} 2\,r_j + (d - 2\,r_j)\,\frac{\varepsilon}{2\,d}\,2^{-j} \\ &=\ \sum_{j \in J} 2\,r_j \ +\ \frac{\varepsilon}{2\,d}\sum_{j \in J} (d - 2\,r_j)\,2^{-j} \\ &\le\ \sum_{j \in J} \operatorname{diam}(L_j) \ +\ \frac{\varepsilon}{2\,d}\sum_{j \in J} d\,2^{-j} \\ &\le\ \sum_{j \in J} \operatorname{diam}(L_j) \ +\ \frac{\varepsilon}{2}\sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j} \\ &=\ \sum_{j \in J} \operatorname{diam}(L_j) \ +\ \frac{\varepsilon}{2} \ <\ \lambda_d^F(A) \ +\ \varepsilon\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Damit ist (i) vollständig gezeigt. Setzt man nun $U := \bigcup_{j \in J} K_j$, so ist U als Vereinigung offener Mengen offen, und es gilt $A \subset U$. Offenbar ist $\{\ K_j \mid j \in J\ \} \in \mathfrak{K}_d^F(U)$; kombiniert man dies mit (3.2), so folgt

$$\lambda_d^F(U) \ \le\ \sum_{j \in J} \operatorname{diam}(K_j) \ <\ \lambda_d^F(A) + \varepsilon\,,$$

womit auch (ii) bewiesen ist.

Fall 2: $d = \infty$:
Sei $d = \infty$. Nach Voraussetzung gilt $m := \lambda_\infty^F(A) < \infty$. Daher folgt $\lambda_{d'}^F(A) = m$ für alle $d' \in \,]\,m, \infty\,[\,$ nach Lemma 3.6. Wendet man den bereits bewiesenen Fall 1 auf ein solches $d' \in \,]\,m, \infty\,[\,$ an, so folgt wegen $\mathfrak{K}_{d'}^F(A) \subset \mathfrak{K}_\infty^F(A)$ die erste und wegen der Antitonie von $\lambda_{(\cdot)}^F(U)$ die zweite Aussage des Satzes auch für $d = \infty$. ■

Beim Beweis der Aussage (i) ("offen") im obigen Lemma ist ganz wesentlich eingegangen, daß in der Definition der F-Kugel-Überdeckungen von A zum Durchmesser d die „echte“ Ungleichung $\operatorname{diam}(K) < d$ (und nicht $\operatorname{diam}(K) \leq d$) gefordert ist; dies war bereits im Paragraph 2.3 angedeutet worden. — Dem eben bewiesenen Lemma entnimmt man, daß Mengen mit endlichem äußeren d-Maß im Fall $d > 0$ stets „bis auf ε“ durch eine offene Obermenge approximiert werden können. Eine offene Obermenge mit *demselben* d-Maß wird man im allgemeinen nicht finden, wohl aber eine Borelsche Obermenge, wie der folgende Satz zeigt. Diese Borelsche Approximation gelingt — im Gegensatz zur offenen Approximation nach Lemma 3.10 — auch im Fall $d = 0$.

Satz 3.11 (Borelsche Approximation „von außen“) *Seien $A \subset F$ und $d \in [\,0, \infty\,]$. Dann existiert eine Borelsche Obermenge $U \subset F$ von A so, daß $\lambda_d^F(A) = \lambda_d^F(U)$.*

Beweis. Ist $\lambda_d^F(A) = \infty$, so ist mit $U := F \in \mathfrak{B}^F$ die Behauptung bewiesen; es gelte also im folgenden $\lambda_d^F(A) < \infty$.

Fall 1: $d \neq 0$. Nach Lemma 3.10 (ii) findet man für alle $n \in \mathbb{N}$ eine offene (und damit Borelsche) Obermenge $U_n \subset F$ von A so, daß

$$\lambda_d^F(U_n) \;<\; \lambda_d^F(A) + \frac{1}{n}\,. \tag{3.3}$$

Daher ist $U := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ eine Borelsche Obermenge von A, und es gilt unter Beachtung von (3.3) die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \lambda_d^F(A) \;&\leq\; \lambda_d^F(U) \;\leq\; \inf\left\{\, \lambda_d^F(U_n) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \,\right\} \;\leq \\ &\leq\; \lambda_d^F(A) + \inf\left\{\, \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \,\right\} \;=\; \lambda_d^F(A)\,, \end{aligned}$$

also $\lambda_d^F(A) = \lambda_d^F(U)$.

Fall 2: $d = 0$. Aufgrund der Antitonie von $\lambda_{(\cdot)}^F(A)$ ist $\lambda_{d'}^F(A) \leq \lambda_0^F(A) < \infty$ für alle $d' \in \,]\,0, \infty\,]$. Gemäß Fall 1 findet man also für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Borelsche Obermenge $U_n \subset F$ von A so, daß

$$\lambda_{1/n}^F(A) \;=\; \lambda_{1/n}^F(U_n)\,.$$

Daher ist $U := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ eine Borelsche Obermenge von A, und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda_{1/n}^F(A) \;\le\; \lambda_{1/n}^F(U) \;\le\; \lambda_{1/n}^F(U_n) \;=\; \lambda_{1/n}^F(A)\,,$$

also $\lambda_{1/n}^F(A) = \lambda_{1/n}^F(U)$. Dies impliziert schließlich nach Satz 3.7:

$$\lambda_0^F(A) \;=\; \lim_{n\to\infty} \lambda_{1/n}^F(A) \;=\; \lim_{n\to\infty} \lambda_{1/n}^F(U) \;=\; \lambda_0^F(U)\,. \quad \blacksquare$$

3.8 λ_0^F ist regulär und metrisch

Im folgenden Lemma halten wir zunächst eine einfache Beobachtung fest.

Lemma 3.12 *Seien $A, B \subset F$ derart, daß $\delta := \mathrm{d}(A,B) > 0$. Dann gilt für alle $d \in [\,0,\delta\,[$:*

$$\lambda_d^F(A\cup B) \;=\; \lambda_d^F(A) \,+\, \lambda_d^F(B)\,.$$

Beweis. Hat man die Behauptung für $d \in \,]\,0,\delta\,[$ gezeigt, so folgt wegen

$$\begin{aligned}
\lambda_0^F(A\cup B) \;&=\; \lim_{d\to 0} \lambda_d^F(A\cup B) \;=\; \lim_{d\to 0}\big(\lambda_d^F(A) + \lambda_d^F(B)\big)\\
&=\; \lim_{d\to 0} \lambda_d^F(A) \,+\, \lim_{d\to 0} \lambda_d^F(B) \;=\; \lambda_0^F(A) \,+\, \lambda_0^F(B)
\end{aligned}$$

die Behauptung auch für $d = 0$. Im folgenden sei daher $d \in \,]\,0,\delta\,[$. Wegen der σ-Subadditivität von λ_d^F genügt es ferner, lediglich die Ungleichung „$\ge$" zu zeigen. Sei also $\mathcal{K} \in \mathfrak{K}_d^F(A\cup B)$. Man setzt

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} \;&:=\; \{\, K \in \mathcal{K} \mid K\cap A \neq \emptyset \,\}\,,\\
\mathcal{Q} \;&:=\; \{\, K \in \mathcal{K} \mid K\cap B \neq \emptyset \,\}\,.
\end{aligned}$$

Offenbar sind $\mathcal{P} \in \mathfrak{K}_d^F(A)$ und $\mathcal{Q} \in \mathfrak{K}_d^F(B)$. Wegen $\mathrm{diam}(K) < d < \mathrm{d}(A,B)$ für alle $K \in \mathcal{K}$ gilt ferner $\mathcal{P}\cap\mathcal{Q} = \emptyset$. Also ergibt sich

$$\sum_{K\in\mathcal{K}} \mathrm{diam}(K) \;\ge\; \sum_{K\in\mathcal{P}} \mathrm{diam}(K) \,+\, \sum_{K\in\mathcal{Q}} \mathrm{diam}(K) \;\ge\; \lambda_d^F(A) \,+\, \lambda_d^F(B)\,,$$

was $\lambda_d^F(A\cup B) \ge \lambda_d^F(A) + \lambda_d^F(B)$ impliziert. $\blacksquare$

Mit Hilfe dieses Lemmas und des Satzes von der Borelschen Approximation können wir nun den abschließenden Satz dieses Paragraphen beweisen:

Satz 3.13 *λ_0^F ist ein reguläres metrisches äußeres Maß auf F. Insbesondere sind alle Borelschen Teilmengen von F λ_0^F-meßbar.*

Beweis. Aus Lemma 3.12 folgt unmittelbar, daß λ_0^F metrisch ist. Daher gilt $\mathfrak{B}^F \subset \mathfrak{M}_0^F$ nach Satz 1.26. Kombiniert man diese Aussage mit Satz 3.11, so folgt die Regularität von λ_0^F. $\blacksquare$

4 Vergleich von Durchmesser und äußerem d-Maß

In Lemma 3.3 hatten wir die einfache Feststellung getroffen, daß für alle $A \subset F$ die Ungleichung

$$(*) \qquad \lambda_\infty^F(A) \;\leq\; 2\,\mathrm{diam}(A)$$

gilt. Daß diese Abschätzung im allgemeinen nicht optimal ist, verdeutlicht das Beispiel einer unbeschränkten abzählbaren Teilmenge $A \subset F$: Obwohl $\mathrm{diam}(A) = \infty$ gilt, ist $\lambda_\infty^F(A) = 0$ (vgl. Lemma 3.2). Daher soll in diesem Paragraphen der Fragestellung nachgegangen werden, inwieweit die Ungleichung $(*)$ verbessert werden kann, genauer: für welche Mengen $A \subset F$ die Identität

$$(**) \qquad \lambda_\infty^F(A) \;=\; \mathrm{diam}(A)$$

gilt. Im direkten Zusammenhang mit dieser Fragestellung werden im ersten Abschnitt die Begriffe Diagonalität sowie Sub- und Super-Diagonalität einer Teilmenge von F eingeführt. Die folgenden drei Abschnitte bringen hinreichende Bedingungen für das Vorliegen von Sub- bzw. Super-Diagonalität. Im letzten Abschnitt wird mit den in diesem Paragraphen gewonnenen Ergebnisse das äußere d-Maß von F-Intervallen bestimmt; dabei stellt man fest, daß alle äußeren d-Maße der Forderung 4 der Einleitung genügen, d. h. daß $\lambda_d^F(I) = \mathrm{diam}(I)$ für alle F-Intervalle I und für alle $d \in [\,0, \infty\,]$ gilt.

4.1 Diagonale Mengen

Um die Frage nach der Gültigkeit von $(**)$ begrifflich präzise fassen zu können, führen wir drei neue Begriffe ein.

Definition 4.1 *Sei $A \subset F$. Dann heißt A*

(i) **sub-diagonal**, *falls* $\lambda_\infty^F(A) \leq \mathrm{diam}(A)$.

(ii) **super-diagonal**, *falls* $\lambda_\infty^F(A) \geq \mathrm{diam}(A)$.

(iii) **diagonal**, *falls A sub- und super-diagonal ist.*

Im weiteren Verlauf dieses Paragraphen werden hinreichende Bedingungen für das Vorliegen von Sub- bzw. Super-Diagonalität formuliert. Zuvor notieren wir jedoch unmittelbare Folgerungen aus der Sub- bzw. Super-Diagonalität einer (beschränkten) Menge $A \subset F$.

Lemma 4.2 *Sei $A \subset F$ sub-diagonal und beschränkt. Dann gilt $\lambda_d^F(A) \leq \operatorname{diam}(A)$ für alle $d \in \left]\operatorname{diam}(A), \infty\right]$.*

Beweis. Es ist $m := \lambda_\infty^F(A) \leq \operatorname{diam}(A) < \infty$. Nach Lemma 3.6 folgt $\lambda_d^F(A) = m$ für alle $d \in \left]m, \infty\right]$. Wegen $m \leq \operatorname{diam}(A)$ ist die Behauptung bewiesen. ■

Lemma 4.3 *Sei $A \subset F$ super-diagonal. Dann gilt $\lambda_d^F(A) \geq \operatorname{diam}(A)$ für alle $d \in [0, \infty]$.*

Beweis. Unmittelbare Folgerung aus der Antitonie von $\lambda_{(\cdot)}^F(A)$. ■

Kombiniert man die beiden eben notierten Lemmata, so erhält man den folgenden

Satz 4.4 *Ist $A \subset F$ diagonal und beschränkt, so gilt für alle $d \in \left]\operatorname{diam}(A), \infty\right]$ die Identität $\lambda_d^F(A) = \operatorname{diam}(A)$.* ■

4.2 Hinreichende Bedingungen für Sub-Diagonalität

Die Sub-Diagonalität ist eine für viele Mengen relativ einfach zu zeigende Eigenschaft, wie das folgende Lemma belegt.

Lemma 4.5 *Sei $A \subset F$. Jede der folgenden Aussagen impliziert die Sub-Diagonalität von A:*

(i) A ist eine λ_∞^F-Nullmenge.

(ii) A ist unbeschränkt.

(iii) A ist beschränkt, und es existiert $x \in F$ so, daß $A \subset \overline{\mathrm{K}}\left(x, \frac{1}{2}\operatorname{diam}(A)\right)$.

Beweis. (i), (ii) : Trivial.
(iii) : Seien A beschränkt und $x \in F$ so, daß $A \subset K := \overline{\mathrm{K}}\left(x, \frac{1}{2}\operatorname{diam}(A)\right)$. Dann ist offenbar $\{K\} \in \mathfrak{K}_\infty^F(A)$ und daher $\lambda_\infty^F(A) \leq \operatorname{diam}(K) = \operatorname{diam}(A)$. ■

Wir notieren im folgenden einige Beispiele sub-diagonaler Mengen.

Beispiel 4.6 *(i) F-Kugeln und F-Sphären sind sub-diagonal.*

(ii) Alle Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind sub-diagonal.

Beweis. (i) : Folgt unmittelbar aus Lemma 4.5 (iii).
(ii) : Alle unbeschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind nach Lemma 4.5 (ii) sub-diagonal. Ist $A \subset \mathbb{R}$ beschränkt, so setzt man

$$x := \frac{1}{2}(\sup A + \inf A) \qquad \text{und} \qquad r := \frac{1}{2}(\sup A - \inf A) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(A) .$$

Wegen $A \subset [\, x - r, x + r\,] = \overline{\mathrm{K}}\,(x, r)$ folgt die Sub-Diagonalität von A aus Lemma 4.5 (iii). ∎

4.3 Durchquerbare Mengen

Um eine hinreichende Bedingung für die Super-Diagonalität einer Menge $A \subset F$ zu erhalten, bedarf es eines etwas größeren Aufwandes. Wir werden im folgenden zunächst die *durchquerbaren* Mengen einführen und untersuchen.

Definition 4.7 *$A \subset F$ heißt* **durchquerbar**, *wenn es für alle $R \in [\,0, \operatorname{diam}(A)\,[$ eine stetige Abbildung $\varphi : [\,0,1\,] \to A$ gibt derart, daß $\|\,\varphi(1) - \varphi(0)\,\| > R$.*

Unmittelbar aus dieser Definition ergibt sich die folgende

Bemerkung 4.8 *Wegzusammenhängende Teilmengen von F sind durchquerbar. Insbesondere sind also alle konvexen bzw. sternförmigen Teilmengen von F durchquerbar.*

Im Spezialfall $F = \mathbb{R}$ sind die beschränkten durchquerbaren Mengen genau die beschränkten Intervalle:

Lemma 4.9 *Eine beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist genau dann durchquerbar, wenn A ein Intervall ist.*

Beweis. Sei $A \subset \mathbb{R}$ beschränkt und durchquerbar. Seien ferner $a := \inf A$ und $b := \sup A$. Zeigt man $]\,a, b\,[\subset A$, so ist A konvex, mithin ein Intervall. Sei also $x \in \,]\,a, b\,[$. Setzt man $R := \max\{x - a,\, b - x\}$, so folgt zunächst

$$b - R \;\le\; x \;\le\; a + R\,. \tag{4.1}$$

Da A durchquerbar ist, findet man eine stetige Abbildung $\varphi : [\,0,1\,] \to A$ so, daß

$$|\,\varphi(1) - \varphi(0)\,| \;>\; R\,. \tag{4.2}$$

Als stetiges Bild von $[\,0,1\,]$ ist $X := \varphi([\,0,1\,])$ ein kompaktes Intervall, d. h. man findet $c, d \in A$ derart, daß $X = [\,c, d\,]$. Wegen (4.2) ist $R < \operatorname{diam}(X) =$

$d - c$. Dies impliziert wegen $[\,c,d\,] \subset A \subset [\,a,b\,]$ unter Beachtung von (4.1) die Ungleichungskette

$$c \;<\; d - R \;\leq\; b - R \;\leq\; x \;\leq\; a + R \;\leq\; c + R \;<\; d\,,$$

insgesamt also $x \in [\,c,d\,] \subset A$. Also ist A ein Intervall. Andererseits ist jedes Intervall wegzusammenhängend, nach Bemerkung 4.8 also durchquerbar. Dies vervollständigt den Beweis. $\blacksquare$

Ist F nicht eindimensional, so gibt es durchquerbare Mengen, die nicht wegzusammenhängend sind. Um ein Beispiel dafür angeben zu können, notieren wir zuerst das folgende

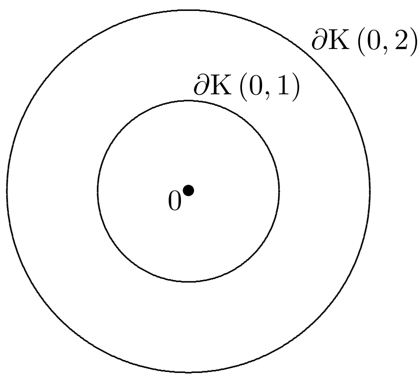
Lemma 4.10 *Sei F nicht eindimensional. Dann gilt für alle $x \in F$:*

(i) $F \setminus \{x\}$ ist wegzusammenhängend.

(ii) Für alle $r \geq 0$ ist die F-Sphäre $\partial\mathrm{K}\,(x,r)$ wegzusammenhängend.

Beweis. Es genügt offenbar, den Fall $x = 0$ zu untersuchen.
(i) : Seien $a,b \in F \setminus \{0\}$. Sind a und b linear unabhängig, so ist $0 \notin [\,a,b\,]$, d. h. die Standardparametrisierung von $[\,a,b\,]$ ist eine stetiger Weg von a nach b in $F \setminus \{0\}$. Sind a und b linear abhängig, so findet man $c \in F \setminus \{0\}$ derart, daß a und c sowie b und c linear unabhängig sind. Nach dem bisher Gezeigten findet man stetige Wege von a nach c sowie von c nach b in $F \setminus \{0\}$, also auch einen stetigen Weg von a nach b in $F \setminus \{0\}$.
(ii) : Der Fall $r = 0$ ist trivial, es sei also $r > 0$. Seien $a,b \in \partial\mathrm{K}\,(0,r)$. Da $F \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend ist, findet man einen stetigen Weg φ von a nach b in $F \setminus \{0\}$. Wegen der Stetigkeit der Norm ist dann $\frac{r\,\varphi}{\|\varphi\|}$ ein stetiger Weg von a nach b in $\partial\mathrm{K}\,(x,r)$. $\blacksquare$

Beispiel 4.11 *Sei F nicht eindimensional. Dann ist die Menge $A := \partial\mathrm{K}\,(0,1) \cup \partial\mathrm{K}\,(0,2)$ durchquerbar aber nicht wegzusammenhängend.*



Beweis. A ist wegen $\partial \mathrm{K}(0,1) \cap \partial \mathrm{K}(0,2) = \emptyset$ offenbar nicht wegzusammenhängend. Ferner ist $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\partial \mathrm{K}(0,2)) = 4$. Sei $x \in \partial \mathrm{K}(0,2)$. Nach Lemma 4.10 ist $\partial \mathrm{K}(0,2)$ wegzusammenhängend, d. h. man findet eine stetige Abbildung $\varphi : [0,1] \to \partial \mathrm{K}(0,2)$ so, daß $\varphi(0) = x$ und $\varphi(1) = -x$. Dies liefert

$$4 = \operatorname{diam}(A) \geq \operatorname{diam}(\varphi([0,1])) \geq \|\varphi(1) - \varphi(0)\| = 2\,\|x\| = 4\,,$$

also $\|\varphi(1) - \varphi(0)\| = \operatorname{diam}(A)$. Damit ist A durchquerbar. ■

4.4 Eine hinreichende Bedingung für Super-Diagonalität

In diesem Abschnitt werden wir beweisen, daß durchquerbare Teilmengen von F bereits super-diagonal sind (s. Satz 4.14). Dies ist eine fast unmittelbare Folgerung aus Satz 4.13, dessen Beweis wiederum ganz wesentlich auf das folgende Lemma 4.12 Bezug nimmt. Die Aussage dieses Lemmas ist eine Verschärfung der bekannten Tatsache, daß eine zusammenhängende offene Teilmenge von F wegzusammenhängend ist.

Lemma 4.12 *Seien $\mathcal{K}$ eine Menge offener nichtleerer F-Kugeln und $U := \bigcup \mathcal{K}$ zusammenhängend. Dann gibt es zu je zwei Punkten $a, b \in U$ ein $n \in \mathbb{N}$, ein $(n+1)$-Tupel $(a_0, a_1, ..., a_n) \in F^{n+1}$ sowie eine injektive Abbildung $\sigma : \mathbb{N}_{\leq n} \to \mathcal{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $a_0 = a$

(ii) $a_n = b$

(iii) $\forall\, i \in \mathbb{N}_{\leq n} \;:\quad [\,a_{i-1}, a_i\,] \subset \sigma(i)$

Beweis. Für den Beweis führt man folgende Sprechweise ein: Zwei Punkte $a, b \in U$ nennt man **in U simpel verbindbar**, falls es $n \in \mathbb{N}$, ein $(n+1)$-Tupel $(a_0, a_1, ..., a_n) \in F^{n+1}$ sowie eine injektive Abbildung $\sigma : \mathbb{N}_{\leq n} \to \mathcal{K}$ gibt derart, daß die Aussagen (i)-(iii) der Behauptung gelten.

Sei $a \in U$. Man setzt nun $M := \{\, b \in U \mid a$ und b sind in U simpel verbindbar$\,\}$; zu zeigen ist dann $M = U$. Dies ist wegen des Zusammenhangs von U äquivalent dazu, daß M eine (bezüglich U) offene und abgeschlossene nichtleere Teilmenge von U ist. Wegen $a \in M$ ist $M \neq \emptyset$. Um nachzuweisen, daß M eine offene und abgeschlossene Teilmenge von U ist, zeigt man

$$\forall\, x \in \overline{M}^U \quad \exists\, \delta > 0 \;:\quad \mathrm{K}(x, \delta) \subset M\,.$$

Sei $x \in \overline{M}^U$. Als zusammenhängende offene Teilmenge von F ist U insbesondere wegzusammenhängend, d. h. man findet eine stetige Abbildung $\varphi : [0,1] \to U$

so, daß $\varphi(0) = a$ und $\varphi(1) = x$. Aufgrund der Stetigkeit von φ ist $X := \varphi([0,1])$ kompakt. Wegen $X \subset U$ ist $\mathcal{K}$ eine offene Überdeckung von X; da X kompakt ist, findet man also eine endliche Menge $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}$ so, daß

$$X \subset \bigcup \mathcal{P} .$$

O.B.d.A. kann man dabei $X \cap K \neq \emptyset$ für alle $K \in \mathcal{P}$ annehmen. Man setzt nun $\mathcal{Q} := \{ K \in \mathcal{P} \mid x \in K \}$; wegen $x \in X$ ist $\mathcal{Q} \neq \emptyset$. Da $\mathcal{Q}$ also eine endliche nichtleere Menge offener nichtleerer F-Kugeln ist, findet man $\delta > 0$ so, daß

$$\mathrm{K}(x,\delta) \subset \bigcap \mathcal{Q} .$$

Sei $b \in \mathrm{K}(x,\delta)$. Zu zeigen bleibt: $b \in M$.
Wegen $x \in \overline{M}^U$ ist $M \cap \mathrm{K}(x,\delta) \neq \emptyset$, d. h. man findet $c \in \mathrm{K}(x,\delta)$ derart, daß a und c in U simpel verbindbar sind. Seien also $m \in \mathbb{N}$, $c_0, c_1, ..., c_m \in U$ und $\tau : \mathbb{N}_{\leq m} \to \mathcal{K}$ eine injektive Abbildung so, daß $c_0 = a$, $c_m = c$ und $[c_{i-1}, c_i] \subset \tau(i)$ für alle $i \in \mathbb{N}_{\leq m}$.

Fall 1: $\mathcal{Q} \cap \tau(\mathbb{N}_{\leq m}) \neq \emptyset$.
Wähle $n \in \mathbb{N}_{\leq m}$ so, daß $\tau(n) \in \mathcal{Q}$. Man setzt nun $a_i := c_i$ für alle $i \in \{0, ..., n-1\}$, $a_n := b$ und

$$\sigma := \tau\big|_{\mathbb{N}_{\leq n}} .$$

Unmittelbar aus der Injektivität von τ folgt die Injektivität von σ. Ferner gilt $[a_{i-1}, a_i] \subset \sigma(i)$ für alle $i \in \mathbb{N}_{<n}$ aufgrund der Definition von σ . Schließlich ist $a_{n-1} = c_{n-1} \in \tau(n) = \sigma(n)$ und wegen $\sigma(n) \in \mathcal{Q}$ auch $a_n = b \in \mathrm{K}(x,\delta) \subset \sigma(n)$. Die Konvexität der F-Kugel $\sigma(n)$ impliziert daher $[a_{n-1}, a_n] \subset \sigma(n)$.

Fall 2: $\mathcal{Q} \cap \tau(\mathbb{N}_{\leq m}) = \emptyset$.
Man setzt $n := m + 1$. Wegen $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ findet man $K \in \mathcal{Q}$. Man setzt nun $a_i := c_i$ für alle $i \in \{0, ..., n-1\}$, $a_n := b$ und

$$\sigma : \mathbb{N}_{\leq n} \to \mathcal{P} , \ i \mapsto \begin{cases} \tau(i) & , \quad \text{falls } i < n , \\ K & , \quad \text{falls } i = n . \end{cases}$$

Unmittelbar aus der Injektivität von τ sowie der Voraussetzung $K \notin \tau(\mathbb{N}_{\leq m}) = \sigma(\mathbb{N}_{<n})$ folgt die Injektivität von σ. Ferner gilt $[a_{i-1}, a_i] \subset \sigma(i)$ für alle $i \in \mathbb{N}_{<n}$ aufgrund der Definition von σ. Schließlich ist $a_{n-1} = c \in \mathrm{K}(x,\delta) \subset \sigma(n)$ und wegen $\sigma(n) = K \in Q$ auch $a_n = b \in \mathrm{K}(x,\delta) \subset \sigma(n)$. Die Konvexität der F-Kugel $\sigma(n)$ impliziert daher $[a_{n-1}, a_n] \subset \sigma(n)$.

Damit sind in beiden Fällen a und b in U simpel verbindbar, d. h. $b \in M$. ∎

Satz 4.13 *Seien $\mathcal{K}$ eine abzählbare Menge offener nichtleerer F-Kugeln und $\bigcup \mathcal{K}$ zusammenhängend. Dann gilt:*

$$\operatorname{diam}\Big(\bigcup \mathcal{K}\Big) \;\leq\; \sum_{K \in \mathcal{K}} \operatorname{diam}(K) \;.$$

Beweis. Seien $a, b \in \bigcup \mathcal{K}$. Nach Lemma 4.12 findet man dann $n \in \mathbb{N}$, ein $(n+1)$-Tupel $(a_0, a_1, ..., a_n) \in F^{n+1}$ sowie eine injektive Abbildung $\sigma : \mathbb{N}_{\leq n} \to \mathcal{K}$ mit den Eigenschaften $a_0 = a$, $a_n = b$ und

$$\forall\, i \in \mathbb{N}_{\leq n} \;:\quad [\, a_{i-1}, a_i \,] \subset \sigma(i) \;.$$

Daher gilt unter Beachtung der Injektivität von σ:

$$\|\, b - a \,\| \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} \|\, a_i - a_{i-1} \,\| \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} \operatorname{diam}(\sigma(i)) \;\leq\; \sum_{K \in \mathcal{K}} \operatorname{diam}(K) \;.$$

Dies impliziert die Behauptung. ∎

Wir kommen nun zu dem bereits angekündigten

Satz 4.14 *Durchquerbare Teilmengen von F sind super-diagonal.*

Beweis. Sei $A \subset F$ durchquerbar. Im Fall $\lambda_{\infty}^{F}(A) = \infty$ bzw. im Fall $\operatorname{diam}(A) = 0$ gilt die Behauptung trivialerweise; es gelte also im folgenden $\lambda_{\infty}^{F}(A) < \infty$ und $\operatorname{diam}(A) > 0$. Sei $R \in [\, 0, \operatorname{diam}(A) \,[$. Dann findet man eine stetige Abbildung $\varphi : [\, 0, 1 \,] \to A$ so, daß $\|\, \varphi(1) - \varphi(0) \,\| > R$. Wegen der Stetigkeit von φ ist $X := \varphi([\, 0, 1 \,])$ wegzusammenhängend. — Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 3.10 findet man eine offene F-Kugel-Überdeckung $\mathcal{K} \in \mathfrak{K}_{\infty}^{F}(A)$ so, daß

$$\sum_{K \in \mathcal{K}} \operatorname{diam}(K) \;<\; \lambda_{\infty}^{F}(A) + \varepsilon \;. \tag{4.3}$$

Man setzt nun

$$\mathcal{P} \;:=\; \{\; K \in \mathcal{K} \mid K \cap X \neq \emptyset \;\} \;.$$

Offenbar ist $\mathcal{P}$ eine abzählbare Menge offener nichtleerer F-Kugeln. Wegen des Wegzusammenhangs von X ist ferner $\bigcup \mathcal{P}$ ebenfalls wegzusammenhängend, also zusammenhängend. Mit Satz 4.13 und (4.3) ergibt sich also

$$\begin{aligned} R \;&<\; \|\, \varphi(1) - \varphi(0) \,\| \;\leq\; \operatorname{diam}(X) \;\leq\; \operatorname{diam}\Big(\bigcup \mathcal{P}\Big) \;\leq\; \sum_{K \in \mathcal{P}} \operatorname{diam}(K) \\ &\leq\; \sum_{K \in \mathcal{K}} \operatorname{diam}(K) \;<\; \lambda_{\infty}^{F}(A) + \varepsilon \;, \end{aligned}$$

was zunächst $R < \lambda_{\infty}^{F}(A)$ und daher $\operatorname{diam}(A) \leq \lambda_{\infty}^{F}(A)$ impliziert. ∎

Kombiniert man den eben bewiesenen Satz mit Beispiel 4.6, Bemerkung 4.8 sowie Lemma 4.10, so ergibt sich das folgende

Beispiel 4.15 *(i) F-Kugeln sind diagonal.*

(ii) Ist F nicht eindimensional, so sind alle F-Sphären diagonal. ■

4.5 Äußeres d-Maß von F-Intervallen

Als erste Anwendung der in diesem Paragraphen gewonnenen Ergebnisse werden wir abschließend das äußere d-Maß von F-Intervallen bestimmen.

Satz 4.16 *Sei $I \subset F$ ein F-Intervall. Dann gilt $\lambda_d^F(I) = \operatorname{diam}(I)$ für alle $d \in [0, \infty]$.*

Beweis. „$\geq$“ : Nach Bemerkung 4.8 und Satz 4.14 ist I super-diagonal. Lemma 4.3 liefert daher die zu zeigende Ungleichung.

„$\leq$“ : Wegen der Stetigkeit von $\lambda_{(\cdot)}^F(I)$ in 0 genügt es, die gewünschte Ungleichung lediglich für $d \in]0, \infty]$ zu zeigen; es sei also $d \in]0, \infty]$. Ferner seien $x, y \in F$ so, daß $]x, y[\subset I \subset [x, y]$. Man findet nun $N \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$r := \frac{\| y - x \|}{2N} < \frac{d}{2} .$$

Seien $J := \mathbb{N}_{\leq N}$ und

$$\begin{aligned} x_j &:= x + (y - x)\,(2j - 1)\,r , \\ K_j &:= \overline{\mathrm{K}}\,(x_j, r) \end{aligned}$$

für alle $j \in J$. Dann ist offenbar $\{ K_j \mid j \in J \} \in \mathfrak{K}_d^F(I)$, und es gilt:

$$\lambda_d^F(I) \leq \sum_{j \in J} \operatorname{diam}(K_j) = \sum_{j=1}^{N} 2r = 2Nr = \| y - x \| = \operatorname{diam}(I) . \quad ■$$

5 Kurven

Dieser Paragraph bringt im wesentlichen die Definitionen der Begriffe Funktionen von beschränkter Variation, Kurve, Parameterdarstellung und Länge einer Kurve, rektifizierbare bzw. geschlossene Kurve sowie Jordan-Kurve. In diesen begrifflichen Rahmen werden wir im folgenden Paragraphen 6 das Konzept der Längenmessung von Bildern (injektiver) stetiger Funktionen mittels des äußeren Längenmaßes einfügen.

5.1 Funktionen von beschränkter Variation

Notation 5.1 *Die Menge der kompakten nicht-trivialen Intervalle in* $\mathbb{R}$ *wird mit* $\mathfrak{I}_{\mathrm{k}}(\mathbb{R})$ *bezeichnet.*

Definition 5.2 *Sei* $I \in \mathfrak{I}_{\mathrm{k}}(\mathbb{R})$. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *heißt das* $(n+1)$*-Tupel* $(a_0, a_1, ..., a_n) \in I^{n+1}$ *eine* **Zerlegung von** I, *falls* $\inf I = a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_n = \sup I$ *gilt. Die Menge aller Zerlegungen von* I *wird mit* $\mathfrak{Z}\,(I)$ *bezeichnet.*

Definition 5.3 *Seien* $I \in \mathfrak{I}_{\mathrm{k}}(\mathbb{R})$ *und* $f \in \mathsf{Abb}\,(I, F)$. *Für alle* $Z := (a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathfrak{Z}\,(I)$ *heißt*

$$V(f, Z) \;:=\; \sum_{j=1}^{n} \| f(a_j) - f(a_{j-1}) \|$$

Variation von f **bezüglich** Z. *Ferner heißt*

$$\mathbf{V}(f) \;:=\; \sup\{\; V(f, Z) \mid Z \in \mathfrak{Z}\,(I) \;\}$$

totale Variation von f. *Ist* $\mathbf{V}(f) < \infty$, *so heißt* f **von beschränkter Variation**. *Die Menge aller Funktionen von beschränkter Variation aus* $\mathsf{Abb}\,(I, F)$ *wird mit* $\mathsf{BV}\,(I, F)$ *bezeichnet.*

Notation 5.4 *Seien* $I \in \mathfrak{I}_{\mathrm{k}}(\mathbb{R})$ *und* $f \in \mathsf{Abb}\,(I, F)$. *Für jedes kompakte Teilintervall* $J = [\,a, b\,]$ *von* I *und jede Zerlegung* $Z \in \mathfrak{Z}\,(J)$ *schreibt man abkürzend* $V(f, Z)$ *anstelle von* $V(f\,\big|_J, Z)$ *und* $\mathbf{V}_a^b(f)$ *anstelle von* $\mathbf{V}(f\,\big|_J)$.

5.2 Kurven, Jordan-Kurven

Notation 5.5 *Die Menge aller F-wertigen stetigen Abbildungen auf kompakten nichttrivialen Definitionsintervallen wird mit $\mathfrak{C}_F$ bezeichnet, d. h. es ist*

$$\mathfrak{C}_F := \bigcup_{I \in \mathfrak{I}_\mathrm{k}(\mathbb{R})} \mathsf{C}\,(I, F)\ .$$

Lemma 5.6 *Seien $I, J \in \mathfrak{I}_\mathrm{k}(\mathbb{R})$ und $f \in \mathsf{C}\,(I,F)$, $g \in \mathsf{C}\,(J,F)$. Dann wird durch*

$$f \sim g \ :\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l}\textit{es existiert eine stetige streng monoton wachsende} \\ \textit{Bijektion } \varphi : I \to J \textit{ so, daß } f = g \circ \varphi\end{array}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{C}_F$ definiert.

Beweis. Identität sowie Hintereinanderausführung und Umkehrabbildung stetiger streng monoton wachsender Bijektionen sind wieder stetige streng monoton wachsende Bijektionen. ∎

Lemma 5.7 *Seien $I = [\,a, b\,] \in \mathfrak{I}_\mathrm{k}(\mathbb{R})$, $J = [\,c, d\,] \in \mathfrak{I}_\mathrm{k}(\mathbb{R})$ und $f \in \mathsf{C}\,(I,F)$, $g \in \mathsf{C}\,(J,F)$ so, daß $f \sim g$. Dann gilt:*

(i) $f(I) \ = \ g(J)$

(ii) $f(a) \ = \ g(c)$

(iii) $f(b) \ = \ g(d)$

(iv) $\mathbf{V}(f) \ = \ \mathbf{V}(g)$

(v) f *injektiv* $\Longleftrightarrow$ g *injektiv*

Beweis. Sei $\varphi : I \to J$ eine stetige streng monoton wachsende Bijektion so, daß $f = g \circ \varphi$.
(i) : Es ist $f(I) = (g \circ \varphi)(I) = g(\varphi(I)) = g(J)$.
(ii), (iii) : Folgt unmittelbar aus dem monotonen Wachstum und der Surjektivität von φ.
(iv) : φ induziert in natürlicher Weise eine Bijektion $\widehat{\varphi}$ zwischen $\mathfrak{Z}\,(I)$ und $\mathfrak{Z}\,(J)$:

$$\widehat{\varphi} \ : \ \mathfrak{Z}\,(I) \to \mathfrak{Z}\,(J)\ ,\ (a_0, ..., a_n) \mapsto (\varphi(a_0), ..., \varphi(a_n))\ .$$

Ist $Z \in \mathfrak{Z}\,(I)$, so folgt dann $V(f, Z) = V(g \circ \varphi, Z) = V(g, \widehat{\varphi}(Z))$. Daraus ergibt sich sofort $\mathbf{V}(f) = \mathbf{V}(g)$.
(v) : Folgt unmittelbar aus der Injektivität von φ. ∎

Das eben bewiesene Lemma zeigt, daß jeder Repräsentant einer Äquivalenzklasse von $\sim$ in $\mathfrak{C}_F$ in Bezug auf Bild, Totalvariation und Injektivität dieselben Eigenschaften hat. Dies motiviert die folgende

Definition 5.8 *Die Äquivalenzklassen der in Lemma 5.6 eingeführten Äquivalenzrelation* $\sim$ *auf* $\mathfrak{C}_F$ *heißen* **Kurven**. *Jeder Repräsentant einer Kurve* Γ *heißt* **Parameterdarstellung von** Γ. — *Seien* Γ *eine Kurve,* $I = [\,a, b\,] \in \mathfrak{I}_{\mathrm{k}}(\mathbb{R})$ *und* $f \in \mathsf{C}\,(I, F)$ *eine Parameterdarstellung von* Γ. *Die Größe* $\ell\,(\Gamma) := \mathbf{V}(f)$ *wird als* **Länge von** Γ *bezeichnet.* Γ *heißt* **rektifizierbar**, *falls* $\ell\,(\Gamma) < \infty$, *d. h. falls* $f \in \mathsf{BV}\,(I, F)$. Γ *heißt* **geschlossen**, *wenn* $f(a) = f(b)$ *gilt.* Γ *heißt* **Jordan-Kurve**, *wenn* f *auf* $[\,a, b\,[$ *injektiv ist.*

Man beachte, daß bei der Definition einer Jordan-Kurve die Injektivität der fixierten Parameterdarstellung lediglich auf dem halboffenen Intervall $[\,a, b\,[$ gefordert wird. Dies ermöglicht die Begriffsbildung einer *geschlossenen Jordan-Kurve*.

6 Länge von Kurven und äußeres Längenmaß

In diesem Paragraphen wird der Frage nachgegangen, welcher Zusammenhang zwischen der Länge einer (Jordan-)Kurve Γ und dem äußeren Längenmaß des Bildes einer Parameterdarstellung f von Γ besteht. Die beiden Abschnitte dieses Paragraphen bringen diesbezügliche Aussagen über das äußere Längenmaß von Bildern stetiger bzw. stetiger injektiver Funktionen auf kompakten Definitionsintervallen. Kombiniert man die beiden zentralen Sätze 6.4 und 6.7, so erhält man als Quintessenz den folgenden

Satz 6.1 *Seien Γ eine Kurve, $I \in \mathfrak{I}_{\mathrm{k}}(\mathbb{R})$ und $f \in \mathsf{C}(I,F)$ eine Parameterdarstellung von Γ. Dann gilt $\ell(\Gamma) \geq \lambda_0^F(f(I))$. Ist Γ eine Jordan-Kurve, dann gilt sogar $\ell(\Gamma) = \lambda_0^F(f(I))$.*

Damit haben wir gezeigt, daß λ_0^F auch die Eigenschaft 5 aus dem Forderungskatalog der Einleitung besitzt. — Im folgenden sei stets $I = [\,a,b\,] \in \mathfrak{I}_{\mathrm{k}}(\mathbb{R})$.

6.1 Äußeres Längenmaß von Bildern stetiger Funktionen

Als Einstieg in diesen Abschnitt notieren wir das folgende einfache

Lemma 6.2 *Für alle $f \in \mathsf{C}(I,F)$ gilt: $\|\, f(b) - f(a)\,\| \leq \operatorname{diam}(f(I)) \leq \lambda_0^F(f(I))$.*

Beweis. Sei $f \in \mathsf{C}(I,F)$. Die erste Ungleichung ist trivial. Als stetiges Bild einer wegzusammenhängenden Menge ist $f(I)$ wegzusammenhängend, nach Bemerkung 4.8 also durchquerbar. Satz 4.14 liefert daher in Verbindung mit Lemma 4.3 die zweite Ungleichung. ■

Ist $f \in \mathsf{C}(I,F)$, so können wir mit Hilfe des eben notierten Lemmas das äußere Längenmaß des Bildes $\lambda_0^F(f(I))$ nach unten abschätzen. Der aus dem folgenden Lemma abgeleitete Satz 6.4 erlaubt eine Abschätzung nach oben.

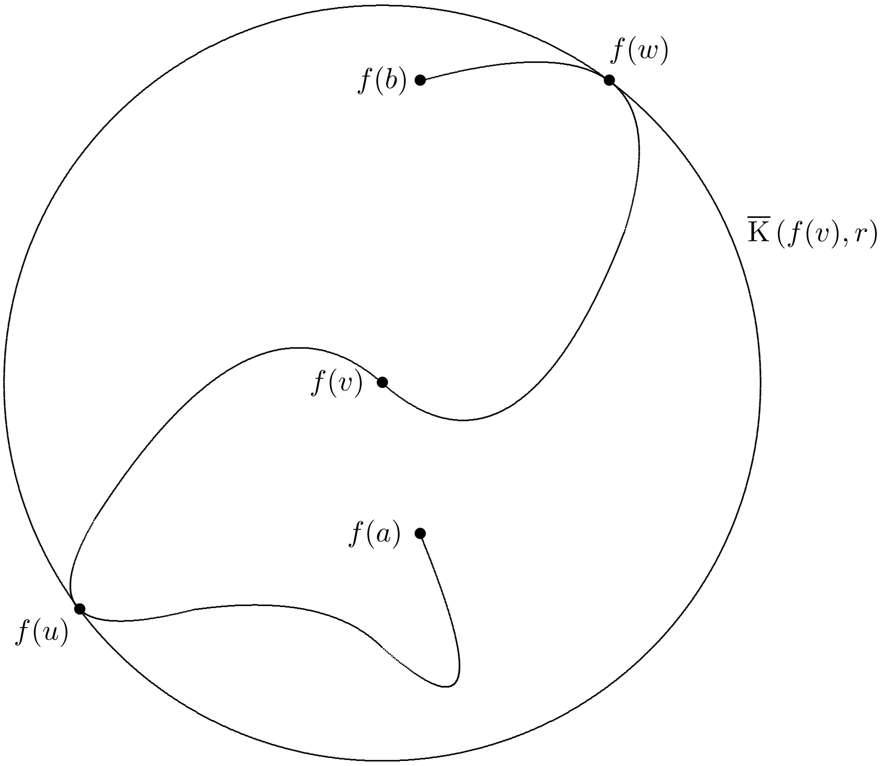
Lemma 6.3 *Sei $f \in \mathsf{C}(I,F)$. Dann gibt es eine Zerlegung $Z := (a,u,v,w,b) \in \mathfrak{Z}(I)$ und $r \geq 0$ so, daß gilt:*

(i) $\| f(w) - f(v) \| = \| f(v) - f(u) \| = r$

(ii) $f(I) \subset \overline{\mathrm{K}}\,(f(v), r)$

(iii) $V(f, Z) \geq 2r$

Der Veranschaulichung dieses Sachverhaltes dient das folgende Bild:



Beweis. Schritt 1: Seien

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: I \to \mathbb{R}_{\geq 0}\ ,\ x \mapsto \sup\{\ \| f(x) - f(y) \| \mid y \in [\,a, x\,]\ \}\ , \\ \varphi_2 &: I \to \mathbb{R}_{\geq 0}\ ,\ x \mapsto \sup\{\ \| f(x) - f(y) \| \mid y \in [\,x, b\,]\ \}\ . \end{aligned}$$

Für alle $x \in I$ sind $[\,a, x\,]$ und $[\,x, b\,]$ kompakt; aufgrund der Stetigkeit von f und $\| \cdot \|$ sind daher φ_1 und φ_2 wohldefiniert.
Behauptung: φ_1 und φ_2 sind stetig.
Beweis: Man zeigt die Behauptung o.B.d.A. nur für φ_1. Seien $x_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$. Da f auf dem Kompaktum I gleichmäßig stetig ist, findet man $\delta > 0$ so, daß

$$\forall\, x, y \in I\ :\quad |\, x - y \,| < \delta \implies \| f(x) - f(y) \| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6.1}$$

Sei $x \in I$ so, daß $|x - x_0| < \delta$. Ist $\varphi_1(x_0) \geq \varphi_1(x)$, so setzt man $s := x_0$ und $t := x$, andernfalls setzt man $s := x$ und $t := x_0$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
|\varphi_1(x_0) - \varphi_1(x)| &= \varphi_1(s) - \varphi_1(t) \\
&= \sup\{\, \| f(s) - f(y) \| \mid y \in [a, s] \,\} \\
&\quad - \sup\{\, \| f(t) - f(y) \| \mid y \in [a, t] \,\} \\
&\leq \sup\{\, \| f(s) - f(t) \| + \| f(t) - f(y) \| \mid y \in [a, s] \,\} \\
&\quad - \sup\{\, \| f(t) - f(y) \| \mid y \in [a, t] \,\} \\
&= \| f(s) - f(t) \| + \sup\{\, \| f(t) - f(y) \| \mid y \in [a, s] \,\} \\
&\quad - \sup\{\, \| f(t) - f(y) \| \mid y \in [a, t] \,\} \,.
\end{aligned}$$

Wegen $|s - t| < \delta$ ist $[a, s] \subset [a, t] \cup (\,]t - \delta, t + \delta[\cap I\,)$. Daher erhält man unter Beachtung von (6.1):

$$\begin{aligned}
|\varphi_1(x_0) - \varphi_1(x)| &\leq \| f(s) - f(t) \| + \sup\{\, \| f(t) - f(y) \| \mid y \in [a, t] \,\} \\
&\quad + \sup\{\, \| f(t) - f(y) \| \mid y \in \,]t - \delta, t + \delta[\cap I \,\} \\
&\quad - \sup\{\, \| f(t) - f(y) \| \mid y \in [a, t] \,\} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,. \quad \square
\end{aligned}$$

Schritt 2: Nach dem eben Gezeigten ist $\varphi := \varphi_2 - \varphi_1$ stetig. Da offenbar $\varphi_1(a) = 0 = \varphi_2(b)$, ist $\varphi(a) \geq 0 \geq \varphi(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz findet man daher $v \in I$ so, daß $\varphi(v) = 0$, d. h. $\varphi_1(v) = \varphi_2(v)$. Da $[a, v]$ und $[v, b]$ kompakt sind, findet man $u \in [a, v]$ und $w \in [v, b]$ so, daß

$$\| f(v) - f(u) \| = \varphi_1(v) = \varphi_2(v) = \| f(v) - f(w) \| =: r \,.$$

Damit ist (i) erfüllt. Sei nun $x \in I$; o.B.d.A. sei $x \in [a, v]$. Dann gilt

$$\| f(x) - f(v) \| \leq \varphi_1(v) = r \,,$$

also $x \in \overline{\mathrm{K}}\,(f(v), r)$, d. h. es gilt (ii). Schließlich gilt für $Z := (a, u, v, w, b) \in \mathfrak{Z}\,(I)$

$$\begin{aligned}
V(f, Z) &= \| f(u) - f(a) \| + \| f(v) - f(u) \| + \\
&\quad + \| f(w) - f(v) \| + \| f(b) - f(w) \| \\
&\geq \| f(v) - f(u) \| + \| f(w) - f(v) \| = 2r \,,
\end{aligned}$$

also die Aussage (iii). ∎

Satz 6.4 *Für alle* $f \in \mathsf{C}\,(I, F)$ *gilt:* $\lambda_0^F(f(I)) \leq \mathbf{V}(f)$.

Beweis. Sei $f \in \mathsf{C}(I, F)$. Es genügt zu zeigen:

$$\forall\, d > 0 \quad \exists\, \mathcal{K} \in \mathfrak{K}_d^F(f(I)) \quad \exists\, Z \in \mathfrak{Z}(I) \ : \quad \sum_{K \in \mathcal{K}} \operatorname{diam}(K) \ \leq \ V(f, Z) \ .$$

Sei $d > 0$. Aufgrund der Kompaktheit von I ist f gleichmäßig stetig, d. h. man findet $\delta > 0$ so, daß

$$\forall\, x, y \in I \ : \quad |\, x - y \,| < \delta \implies \|\, f(x) - f(y) \,\| < \frac{d}{2} \ . \tag{6.2}$$

Sei nun $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß

$$\alpha \ := \ \frac{b-a}{N} \ < \ \delta \ .$$

Damit setzt man $p_j := a + j\alpha$ für alle $j \in \{0, 1, ..., N\}$ und $J := \mathbb{N}_{\leq N}$. Dann ist offenbar $|\, p_j - p_{j-1} \,| = \alpha < \delta$ für alle $j \in J$, es gilt also nach (6.2):

$$\forall\, x, y \in [\, p_{j-1}, p_j \,] \ : \quad \|\, f(x) - f(y) \,\| < \frac{d}{2} \ . \tag{6.3}$$

Nach Lemma 6.3 findet man nun für alle $j \in J$ eine Zerlegung

$$Z_j \ := \ (p_{j-1}, u_j, v_j, w_j, p_j) \ \in \ \mathfrak{Z}(\,[\, p_{j-1}, p_j \,]\,)$$

und ein $r_j \geq 0$ so, daß gilt:

$$\|\, f(w_j) - f(v_j) \,\| \ = \ \|\, f(v_j) - f(u_j) \,\| \ = \ r_j \ , \tag{6.4}$$

$$f(\,[\, p_{j-1}, p_j \,]\,) \ \subset \ \overline{\mathrm{K}}\,(f(v_j), r_j) \ , \tag{6.5}$$

$$V(f, Z_j) \ \geq \ 2r_j \ . \tag{6.6}$$

Aus (6.3) und (6.4) folgt unmittelbar

$$r_j \ < \ \frac{d}{2} \tag{6.7}$$

für alle $j \in J$. Setzt man nun $\mathcal{K} := \left\{\ \overline{\mathrm{K}}\,(f(v_j), r_j) \ \middle|\ j \in J \ \right\}$, so ist wegen (6.5) und (6.7) $\mathcal{K} \in \mathfrak{K}_d^F(f(I))$. Setzt man ferner

$$Z \ := \ (p_0, u_1, v_1, w_1, p_1, ..., u_N, v_N, w_N, p_N) \ ,$$

so ist $Z \in \mathfrak{Z}(I)$, und es gilt nach (6.6):

$$V(f, Z) \ = \ \sum_{j=1}^{N} V(f, Z_j) \ \geq \ \sum_{j=1}^{N} 2r_j \ = \ \sum_{K \in \mathcal{K}} \operatorname{diam}(K) \ . \quad \blacksquare$$

6.2 Äußeres Längenmaß von Bildern injektiver stetiger Funktionen

Im diesem Abschnitt soll nun gezeigt werden, daß die in Satz 6.4 für stetige Funktionen bewiesene Ungleichung zur Gleichung $\lambda_0^F(f(I)) = \mathbf{V}(f)$ wird, falls f zusätzlich injektiv ist. Dazu wird im wesentlichen der Satz 6.6 (wenn auch nicht in der hier angegebenen sehr allgemeinen Formulierung) benötigt.

Lemma 6.5 *Seien* (Ω, d) *ein metrischer Raum und* ν *ein metrisches äußeres Maß auf* Ω*. Ferner sei* $f : [a,b] \to \Omega$ *stetig. Dann ist* $f([a,b[)$ ν*-meßbar.*

Beweis. Sei (b_n) eine monoton wachsende gegen b konvergente Folge in $[a,b[$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ stellt man aufgrund der Stetigkeit von f fest, daß $f([a,b_n])$ als Bild eines kompakten Intervalls kompakt, also insbesondere Borelsch ist. Da ν metrisch ist, ist $(f([a,b_n]))_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge ν-meßbarer Mengen. Der Grenzwert $f([a,b[)$ dieser Folge ist daher ebenfalls ν-meßbar. ■

Satz 6.6 *Seien* (Ω, d) *ein metrischer Raum und* ν *ein metrisches äußeres Maß auf* Ω*. Ferner sei* $f : [a,b] \to \Omega$ *stetig. Ist* f *injektiv auf* $[a,b[$*, so gilt für jede Zerlegung* $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathfrak{Z}(I)$*:*

$$\nu(f(I)) = \sum_{j=1}^{n} \nu(f([a_{j-1}, a_j])) .$$

Beweis. Seien f injektiv auf $[a,b[$ und $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathfrak{Z}(I)$. Nach Lemma 6.5 ist dann $f([a,b[)$ die disjunkte Vereinigung der ν-meßbaren Mengen $f([a_{j-1}, a_j[)$, $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$. Daher folgt wegen der Additivität von ν auf $\mathfrak{M}_\nu^\Omega$:

$$\begin{aligned} \nu(f(I)) &= \nu(f([a,b])) = \nu(f([a,b[) = \nu\left(\biguplus_{j=1}^{n} f([a_{j-1}, a_j[)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \nu(f([a_{j-1}, a_j[)) = \sum_{j=1}^{n} \nu(f([a_{j-1}, a_j])) . \quad ■ \end{aligned}$$

Wir können nun den bereits angekündigten wichtigen Satz beweisen:

Satz 6.7 *Sei* $f \in \mathsf{C}(I, F)$ *injektiv auf* $[a,b[$*. Dann gilt:* $\lambda_0^F(f(I)) = \mathbf{V}(f)$.

Beweis. „$\leq$“ : Dies ist die Aussage von Satz 6.4.
„$\geq$“ : Sei $Z := (a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathfrak{Z}(I)$. Nach Lemma 6.2 gilt für alle $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$:

$$\lambda_0^F(f([a_{j-1}, a_j])) \geq \operatorname{diam}(f([a_{j-1}, a_j])) \geq \| f(a_j) - f(a_{j-1}) \| .$$

Kombiniert man dies mit der Aussage von Satz 6.6, so folgt:

$$\begin{aligned}\lambda_0^F(f(I)) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_0^F(f([a_{j-1}, a_j])) \geq \sum_{j=1}^{n} \| f(a_j) - f(a_{j-1}) \| = \\ &= V(f, Z) .\end{aligned}$$

Dies impliziert $\lambda_0^F(f(I)) \geq \mathbf{V}(f)$. ■

Abschließend bemerken wir, daß man mit Hilfe des eben bewiesenen Satzes 6.7 für die aus Satz 4.16 bereits bekannte Aussage $\lambda_0^F([x,y]) = \mathrm{diam}([x,y])$ für $x, y \in F$ einen weiteren, eleganten Beweis findet:

Satz 6.8 *Seien $x, y \in F$. Dann gilt:* $\lambda_0^F([x,y]) = \mathrm{diam}([x,y])$.

Beweis. Sei $f : [0,1] \to F$, $t \mapsto (1-t)x + ty$ und $Z := (a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathfrak{Z}([0,1])$. Dann ist

$$\begin{aligned}V(f, Z) &= \sum_{j=1}^{n} \| f(a_j) - f(a_{j-1}) \| = \sum_{j=1}^{n} \| (a_j - a_{j-1}) \cdot (y - x) \| \\ &= \| y - x \| \sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1}) = \| y - x \| = \mathrm{diam}([x,y]) .\end{aligned}$$

Dies impliziert $\mathbf{V}(f) = \mathrm{diam}([x,y])$. Wegen der Injektivität von f und wegen $f([0,1]) = [x,y]$ folgt die Behauptung aus Satz 6.7. ■

7 Äußere d-Maße und Dimension von F

In diesem abschließenden Paragraphen wird untersucht, welchen Einfluß die Dimension von F auf die Eigenschaften der äußeren d-Maße hat. Im Fall $F = \mathbb{R}$ stellt man fest, daß die äußeren d-Maße auf F bereits alle identisch sind und mit dem äußeren Lebesgue-Maß übereinstimmen. Damit genügen alle äußeren d-Maße der Forderung 1 der Einleitung. Ist hingegen F nicht eindimensional, so erhält man als wichtigstes Ergebnis, daß λ_d^F lediglich im Fall $d = 0$ die Eigenschaften 5, 6 und 7 aus dem Forderungskatalog der Einleitung hat (Sätze 7.6 und 7.9). Ob und unter welchen Voraussetzungen im Fall $d \in \,]\,0, \infty\,[\,$ das äußere d-Maß λ_d^F regulär bzw. homogen ist, ist ein offenes Problem.

7.1 Der Fall $F = \mathbb{R}$

Die wesentliche Aussage dieses Abschnitts liefert der folgende

Satz 7.1 *Für alle $d \in [\,0, \infty\,]$ ist $\lambda_d^{\mathbb{R}} = \lambda^*$.*

Beweis. Sei $A \subset \mathbb{R}$. Nach Bemerkung 2.9 ist $\lambda^*(A) = \lambda_\infty^{\mathbb{R}}(A)$. Aufgrund der Antitonie von $\lambda_{(\cdot)}^{\mathbb{R}}(A)$ und der Stetigkeit von $\lambda_{(\cdot)}^{\mathbb{R}}(A)$ in 0 genügt es daher, die Ungleichung

$$\lambda_d^{\mathbb{R}}(A) \;\leq\; \lambda_\infty^{\mathbb{R}}(A)$$

für alle $d \in \,]\,0, \infty\,[\,$ zu zeigen; es sei also $d \in \,]\,0, \infty\,[\,$. Der Fall $\lambda_\infty^{\mathbb{R}}(A) = \infty$ ist trivial; es gelte also im folgenden $m := \lambda_\infty^{\mathbb{R}}(A) < \infty$. Dann findet man $N \in \mathbb{N}$ so, daß $Nd > m$. Nach Lemma 3.6 ist daher $\lambda_{Nd}^{\mathbb{R}}(A) = \lambda_\infty^{\mathbb{R}}(A)$, d. h. es genügt zu zeigen:

$$\lambda_d^{\mathbb{R}}(A) \;\leq\; \lambda_{Nd}^{\mathbb{R}}(A)\,. \tag{7.1}$$

Seien J eine abzählbare Indexmenge und $\{\, K_j \mid j \in J \,\} \in \mathfrak{K}_{Nd}^{\mathbb{R}}(A)$. Für alle $j \in J$ findet man $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ so, daß $\;]\,a_j, b_j\,[\, \subset K_j \subset [\,a_j, b_j\,]\;$. Offensichtlich ist $P := J \times \mathbb{N}_{\leq N}$ abzählbar. Für alle $(j, k) \in P$ setzt man nun

$$L_{j,k} \;:=\; a_j \;+\; [\,k-1, k\,]\,\frac{b_j - a_j}{N}\;.$$

Dann gilt offenbar $\{\ L_{j,k} \mid (j,k) \in P\ \} \in \mathfrak{K}_d^{\mathbb{R}}(A)$ und

$$\sum_{(j,k)\in P} \operatorname{diam}(L_{j,k}) \;=\; \sum_{j\in J}\sum_{k=1}^{N} \frac{b_j - a_j}{N} \;=\; \sum_{j\in J}(b_j - a_j) \;=\; \sum_{j\in J} \operatorname{diam}(K_j) \;.$$

Dies impliziert (7.1). ■

Korollar 7.2 *λ^* ist ein σ-endliches metrisches reguläres äußeres Maß auf $\mathbb{R}$.*

Beweis. Kombination der Sätze 3.4, 3.13 und 7.1. ■

7.2 F ist nicht eindimensional

In diesem Abschnitt seien F nicht eindimensional und $d \in \,]0,\infty]$. Wir werden im folgenden zunächst die λ_d^F-meßbaren Mengen genauer untersuchen. Wichtigstes Ergebnis dieser Untersuchungen ist der Satz 7.6: Nicht alle Borelschen Teilmengen von F sind λ_d^F-meßbar. Eine unmittelbare Konsequenz dieser Tatsache ist, daß λ_d^F nicht metrisch ist.

Lemma 7.3 *Für alle $x \in F$, $r \in \,]0, \frac{d}{2}[$ und $A \in \{\mathrm{K}(x,r), \overline{\mathrm{K}}(x,r), \partial\mathrm{K}(x,r)\}$ ist $\lambda_d^F(A) = 2\,r$.*

Beweis. Seien $x \in F$, $r \in \,]0, \frac{d}{2}[$ und $A \in \{\mathrm{K}(x,r), \overline{\mathrm{K}}(x,r), \partial\mathrm{K}(x,r)\}$. Nach Beispiel 4.15 ist A diagonal; wegen $\operatorname{diam}(A) = 2\,r < d \leq \infty$ impliziert dies nach Satz 4.4 die Identität $\lambda_d^F(A) = \operatorname{diam}(A) = 2\,r$. ■

Satz 7.4 *Sei $A \subset F$ so, daß $\operatorname{diam}(A) < \frac{d}{2}$. Dann gilt: $A \in \mathfrak{M}_d^F \iff \lambda_d^F(A) = 0$.*

Beweis. „$\Leftarrow$“ : Nach Satz 1.10 sind alle λ_d^F-Nullmengen λ_d^F-meßbar.
„$\Rightarrow$“ (via Kontraposition): Es gelte $\lambda_d^F(A) > 0$. Dann ist insbesondere $A \neq \emptyset$. Seien $x \in A$ und $r \in \,]\operatorname{diam}(A), \frac{d}{2}[$. Dann ist $A \subset \mathrm{K}(x,r)$. Seien $Q := \overline{\mathrm{K}}(x,r)$ und $R := \partial\mathrm{K}(x,r)$. Nach Lemma 7.3 gilt dann:

$$\lambda_d^F(Q) \;=\; \lambda_d^F(R) \;=\; 2\,r\,. \tag{7.2}$$

Wegen $A \subset Q$ ist $Q \cap A = A$, also gilt

$$\lambda_d^F(Q \cap A) \;=\; \lambda_d^F(A) \;>\; 0\,. \tag{7.3}$$

Wegen der Offenheit von $\mathrm{K}(x,r)$ ist schließlich $A \cap R = \emptyset$, d. h. es gilt $Q \setminus A \supset R$. Daher folgt mit (7.2)

$$2\,r \;=\; \lambda_d^F(Q) \;\geq\; \lambda_d^F(Q \setminus A) \;\geq\; \lambda_d^F(R) \;=\; 2\,r\,,$$

also $\lambda_d^F(Q \setminus A) = 2\,r$. Kombiniert man dies mit (7.3), so folgt

$$\lambda_d^F(Q \cap A) + \lambda_d^F(Q \setminus A) \;>\; 2\,r \;=\; \lambda_d^F(Q)\,,$$

also $A \notin \mathfrak{M}_d^F$. ■

Korollar 7.5 *Ist $A \subset F$ beschränkt, so gilt:* $A \in \mathfrak{M}_\infty^F \iff \lambda_\infty^F(A) = 0$.

Beweis. Dies ist der Fall $d = \infty$ in Satz 7.4. ■

Satz 7.6 *Es ist $\mathfrak{B}^F \not\subset \mathfrak{M}_d^F$. Insbesondere ist λ_d^F nicht metrisch.*

Beweis. Seien $r := \min\left\{1, \frac{d}{8}\right\}$ und $K := \mathrm{K}(0, r)$. Nach Lemma 7.3 ist $\lambda_d^F(K) = 2\,r > 0$. Wegen

$$\operatorname{diam}(K) \;=\; 2\,r \;\leq\; \frac{d}{4} \;<\; \frac{d}{2}$$

ist $K \notin \mathfrak{M}_d^F$ nach Satz 7.4. Da K als offene Menge Borelsch ist, folgt die erste Aussage. Kombiniert man dies mit Satz 1.26, so ergibt sich die zweite Aussage. ■

Abschließend beweisen wir zuerst das einfache Lemma 7.7. Als Anwendung dieses Lemmas werden wir zeigen, daß das äußere Längenmaß von Mengen mit nichtleerem Inneren stets unendlich ist (Satz 7.8) und daß es Jordan-Kurven Γ gibt, deren Länge nicht mit dem äußeren d-Maß des Bildes einer Parameterdarstellung von Γ übereinstimmt (Satz 7.9).

Lemma 7.7 *Für alle $x \in F$, $\varepsilon > 0$ und $R > 0$ existiert eine injektive stetige Abbildung $f : [\,0, 1\,] \to \overline{\mathrm{K}}\,(x, \varepsilon)$ so, daß $\mathbf{V}(f) > R$.*

Beweis. Da die Totalvariation einer Funktion offenbar translationsinvariant und homogen ist, genügt es, die Behauptung für den Fall $x = 0$ und $\varepsilon = 1$ zu beweisen. Sei $R > 0$. Da F nicht eindimensional ist, gibt es einen zweidimensionalen Teilraum G von F. Seien $K := \overline{\mathrm{K}}\,(0, 1) \cap G$ und $e_1, e_2 \in K$ linear unabhängige Einheitsvektoren. Es ist also $\{e_1, e_2\}$ eine Basis von G; im folgenden werden die Elemente von G in Koordinaten bezüglich dieser Basis geschrieben. Wegen der Konvexität der Kugel K gilt:

$$Q \;:=\; \{\; (x, y) \in G \mid \; |\,x\,| + |\,y\,| \leq 1 \;\} \;\subset\; K\;.$$

Seien $N \in \mathbb{N}_{>R}$ und $J := \{0, 1, ..., N\}$. Für alle $j \in J$ seien ferner

$$a_j \;:=\; \left(-\frac{1}{2} + \frac{j}{N}\,, -\frac{1}{2}\right)\,,$$

$$b_j \;:=\; \left(-\frac{1}{2} + \frac{j}{N}\,, \frac{1}{2}\right)\,.$$

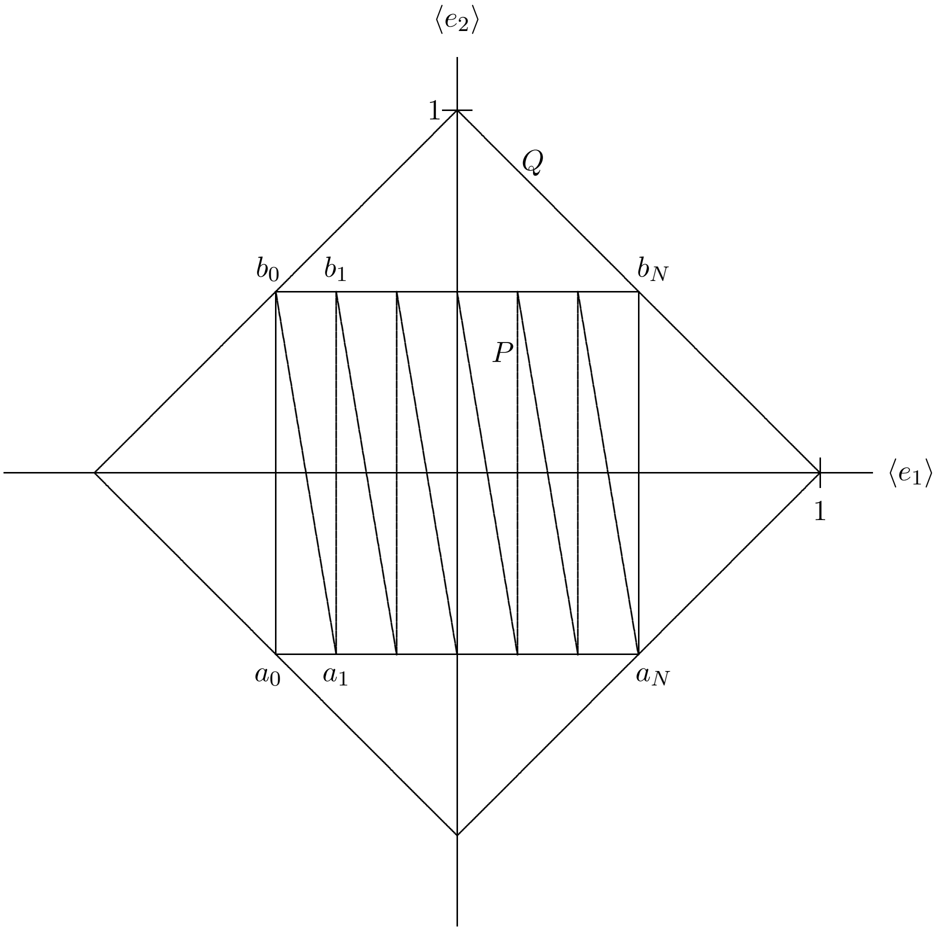
Offenbar sind $a_j, b_j \in Q$ für alle $j \in J$; wegen der Konvexität von K ist daher

$$P \;=\; \bigcup_{j=0}^{N-1} \left(\,[\,a_j, b_j\,[\, \cup \,[\,b_j, a_{j+1}\,[\,\right) \;\cup\; [\,a_N, b_N\,] \;\subset\; K\;.$$

Da P stückweise aus disjunkten F-Intervallen zusammengesetzt ist, gibt es eine stetige injektive Abbildung $f : [0,1] \to K$ so, daß $f([0,1]) = P$. Ferner erhält man als (sehr grobe) Abschätzung für die Totalvariation von f:

$$\mathbf{V}(f) \geq \sum_{j=0}^{N} \| b_j - a_j \| = (N+1) \cdot \| (0,1) \| > N \cdot \| e_2 \| = N > R . \quad \blacksquare$$

Das folgende Bild dient der Veranschaulichung der eben geschilderten Situation:



Satz 7.8 *Sei $A \subset F$ so, daß $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$. Dann ist $\lambda_0^F(A) = \infty$.*

Beweis. Seien $x \in \operatorname{int}(A)$ und $\varepsilon > 0$ so, daß $K := \overline{\mathrm{K}}(x, \varepsilon) \subset A$. Kombiniert man Lemma 7.7 und Satz 6.7, so folgt $\lambda_0^F(K) > R$ für alle $R > 0$. Also ist $\lambda_0^F(A)$ unbeschränkt.
$\blacksquare$

Satz 7.9 *Es gibt eine Jordan-Kurve Γ, deren Länge $\ell(\Gamma)$ nicht mit dem äußeren d-Maß des Bildes einer Parameterdarstellung von Γ übereinstimmt (d. h. λ_d^F mißt nicht die Länge aller Jordan-Kurven).*

Beweis. Seien $r \in \,]0, \frac{d}{2}[$ und $A := \overline{\mathrm{K}}(x,r)$. Nach Lemma 7.7 findet man eine Jordan-Kurve Γ mit Parameterdarstellung $f : [0,1] \to A$ so, daß $\ell(\Gamma) = \mathbf{V}(f) > 2r$. Nach Lemma 7.3 ist $\lambda_d^F(A) = 2r$; aufgrund der Monotonie von λ_d^F liefert dies $\lambda_d^F(f([0,1])) \leq 2r < \ell(\Gamma)$. Dies war zu zeigen. ■

7.3 Ein offenes Problem

Im Spezialfall $F = \mathbb{R}$ hatten wir festgestellt, daß für alle $d \in [0,\infty]$, $x \in \mathbb{R}$ und $r \geq 0$ die Identität

$$\lambda_d^{\mathbb{R}}(\mathrm{K}(x,r)) \;=\; \lambda^*(\mathrm{K}(x,r)) \;=\; 2r$$

gilt (Satz 7.1). Ist F nicht eindimensional, so hatten wir eine entsprechende Aussage nur für den Fall $d \in \,]0,\infty]$ und $r \in \,]0, \frac{d}{2}[$ zeigen können (Lemma 7.3). Im folgenden seien F nicht eindimensional, $d \in \,]0,\infty[$, $x \in F$ und $r_0 = \frac{d}{2}$. Aufgrund der Monotonie von λ_d^F gilt dann die Abschätzung

$$\lambda_d^F\;(\mathrm{K}(x,r_0)) \;\geq\; \sup\left\{\, \lambda_d^F(\mathrm{K}(x,r)) \;\middle|\; r \in \left]0, \frac{d}{2}\right[\, \right\} \;=\; d\,.$$

Es ist eine unbeantwortete Frage, ob sogar die Gleichheit

$$(*) \qquad \lambda_d^F\;(\mathrm{K}(x,r_0)) \;=\; d$$

gilt. Diese Frage steht im unmittelbaren Zusammenhang mit den ebenfalls unbeantworteten Fragen nach der Homogenität bzw. der Regularität von λ_d^F, denn $(*)$ ist eine notwendige Voraussetzung für das Vorliegen von Homogenität bzw. Regularität von λ_d^F. Ist nämlich einerseits λ_d^F homogen vom Grad 1, so gilt nach Lemma 7.3

$$\lambda_d^F\;(\mathrm{K}(x,r_0)) \;=\; 2\cdot\lambda_d^F\left(\mathrm{K}\left(x,\frac{r_0}{2}\right)\right) \;=\; 2r_0 \;=\; d\,,$$

also $(*)$. Ist andererseits λ_d^F regulär, so definiert man

$$K_n \;:=\; \overline{\mathrm{K}}\left(x,\; r_0\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist (K_n) eine aufsteigende Mengenfolge in $\mathfrak{P}(F)$; somit gilt nach Satz 1.18 (σ-Stetigkeit regulärer äußerer Maße)

$$\lambda_d^F(\mathrm{K}(x,r_0)) \;=\; \lambda_d^F\left(\lim_{n\to\infty} K_n\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} \lambda_d^F(K_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} 2r_0\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) \;=\; d\,,$$

also ebenfalls $(*)$.

Meine Vermutung ist, daß $(*)$ *falsch* ist, daß also insbesondere λ_d^F nicht regulär und homogen ist.

Literaturverzeichnis

[BAR] Barnsley, Michael F.: Fractals everywhere. – Boston [u.a.] : Academic Press, 1988.

[BAU1] Bauer, Heinz: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. – 3., neubearb. Aufl. – Berlin [u.a.] : de Gruyter, 1978.

[BAU2] Bauer, Heinz: Maß- und Integrationstheorie. – Berlin [u.a.] : de Gruyter, 1990.

[ERW] Erwe, Friedhelm: Differential- und Integralrechnung : 2, Integralrechnung. – Mannheim : Bibliographisches Institut, 1962. – (B.I.-Hochschultaschenbücher ; 31–31a)

[FAL1] Falconer, Kenneth J.: Fractal geometry : mathematical foundations and applications. – Chichester [u.a.] : Wiley, 1990.

[FAL2] Falconer, Kenneth J.: The geometry of fractal sets. – Cambridge [u.a.] : Cambridge University Press, 1985. – (Cambridge tracts in mathematics ; 85)

[LAN] Lang, Serge: Real and functional analysis. – 3. ed. – New York [u.a.] : Springer, 1993. – (Graduate texts in mathematics ; 142)

[ROG] Rogers, Claude A.: Hausdorff measures. – Cambridge : Cambridge University Press, 1970.

Tabelle der verwendeten Symbole

$\mathsf{Abb}\,(\Omega, \Omega')$	Abbildungen von Ω nach Ω', S. 5f
$\mathsf{BV}\,(I, F)$	Funktionen beschränkter Variation von I nach F, S. 35
$\mathfrak{B}^{\Omega}$, $\mathfrak{B}$	Borelsche σ-Algebra auf Ω bzw. auf $\mathbb{R}$, S. 12
$\mathsf{C}\,(X, X')$	stetige Abbildungen von X nach X', S. 5f
$\mathfrak{C}_F$	stetige F-wertige Abbildungen auf nicht-trivialen kompakten Intervallen, S. 36
$\operatorname{diam}(A)$	Durchmesser von A, S. 5f
$\operatorname{int}(A)$	Inneres von A, S. 5f
$\mathfrak{I}\,(A)$	Intervall-Überdeckungen von A, S. 16
$\mathfrak{I}_{\mathrm{k}}(\mathbb{R})$	nicht-triviale kompakte Intervalle, S. 35
$\mathrm{K}\,(x, r)$, $\overline{\mathrm{K}}\,(x, r)$	offene, abgeschlossene Kugel um x mit Radius r, S. 5f
$\partial\mathrm{K}\,(x, r)$	Sphäre um x mit Radius r, S. 5f
$\mathfrak{K}_d^F\,(A)$	F-Kugel-Überdeckungen von A zum Durchmesser d, S. 16
$\mathfrak{K}_\infty^F\,(A)$	F-Kugel-Überdeckungen von A, S. 16
$\ell\,(\Gamma)$	Länge der Kurve Γ, S. 37
λ, λ^*	Lebesgue-Maß, äußeres Lebesgue-Maß, S. 16
λ_d^F	äußeres d-Maß auf F, S. 17
$\lambda_{(\cdot)}^F(A)$, $\lambda_{(\cdot)}^{\mathbb{R}}(A)$	Abbildung $d \mapsto \lambda_d^F(A)$ bzw. $d \mapsto \lambda_d^{\mathbb{R}}(A)$, S. 20
$\mathfrak{M}_\nu^\Omega$	ν-meßbare Teilmengen von Ω, S. 8
$\mathfrak{M}^*$	Lebesgue-meßbare Teilmengen von $\mathbb{R}$, S. 16
$\mathfrak{M}_d^F$	λ_d^F-meßbare Teilmengen von F, S. 17
$\mathfrak{P}\,(\Omega)$	Potenzmenge von Ω, S. 5f
$V(f, Z)$	Variation von f bezüglich Z, S. 35
$\mathbf{V}(f)$, $\mathbf{V}_a^b(f)$	totale Variation von f, S. 35
$\mathfrak{Z}\,(I)$	Zerlegungen von I, S. 35
$\bigcup \mathcal{M}$, $\bigcap \mathcal{M}$	Vereinigung, Durchschnitt von Mengensystemen, S. 5f

Register