Stefan Wiech

Über p-adische Darstellungen der algebraischen Fundamentalgruppe zu Vektorbündeln auf abelschen Varietäten

2006

Reine Mathematik

Über p-adische Darstellungen der algebraischen Fundamentalgruppe zu Vektorbündeln auf abelschen Varietäten

Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften im Fachbereich Mathematik und Informatik der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Stefan Wiech
aus Hamburg
2006

Dekan:	Prof. Dr. Klaus Hinrichs
Erster Gutachter:	Prof. Dr. Christopher Deninger
Zweite Gutachterin:	Prof. Dr. Annette Werner
	(Universität Stuttgart)
Tag der mündlichen Prüfung:	15. Dezember 2006
Tag der Promotion:	31. Januar 2007

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Auf einer kompakten Riemannschen Fläche kann man jeder endlichdimensionalen komplexen Darstellung der Fundamentalgruppe ein Vektorbündel mit flachem Zusammenhang, also ein holomorphes Vektorbündel, zuordnen. In der im Jahr 1938 erschienenen Arbeit [Wei] André Weils wird gezeigt, daß man auf diese Weise genau die holomorphen Vektorbündel erhält, deren unzerlegbare Komponenten vom Grad null sind. In [Na-Se] beweisen Narasimhan und Seshadri, daß unitäre Darstellungen der Fundamentalgruppe polystabilen Vektorbündeln vom Grad null entsprechen, d.h. Vektorbündeln, deren unzerlegbare Komponenten stabil und vom Grad null sind.

In dem Artikel [De-We2] entwickeln Annette Werner und Christopher Deninger ein p-adisches Analogon dieser klassischen Konstruktion. Für eine glatte projektive Kurve X über $\mathbb{C}_p$ wird dazu eine Kategorie von Vektorbündeln auf X definiert, deren Objekte einen Paralleltransport entlang étaler Wege definieren. Insbesondere erhält man auf diese Weise zu Vektorbündeln aus jener Kategorie p-adische Darstellungen der étalen Fundamentalgruppe von X. In [De-We3] wird zudem gezeigt, daß die Kategorie von Vektorbündeln auf X, deren Objekte einen Paralleltransport definieren, eine neutrale Tannakakategorie über $\mathbb{C}_p$ ist.

Im Falle von Mumfordkurven hat Gabriel Herz in [He] gezeigt, daß diese Konstruktion mit einer von Gerd Faltings in [Fa1] entwickelten Konstruktion, bei der einem Vektorbündel auf der Mumfordkurve eine Darstellung der Schottkygruppe zugeordnet wird, verträglich ist.

In dem unlängst erschienenen Artikel [Fa2] wird eine Kategorienäquivalenz einer Kategorie von Vektorbündeln, die mit der Struktur eines p-

adischen Higgsfeldes versehenen sind, mit einer Kategorie sogenannter verallgemeinerter Darstellungen etabliert. Diese Kategorie verallgemeinerter Darstellungen enthält die der Darstellungen der étalen Fundamentalgruppe der Kurve als volle Unterkategorie und erlaubt somit Vergleiche mit der Konstruktion [De-We2]. Die in diesem Absatz genannten Konstruktionen sind jedoch nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

In [De-We1] wird die obige Konstruktion auf den Fall abelscher Varietäten A über $\overline{\mathbb{Q}}_p$ mit guter Reduktion übertragen. Hierzu werden eine Kategorie von Vektorbündeln $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$ sowie ein Funktor definiert, der Vektorbündeln dieser Kategorie endlich-dimensionale stetige p-adische Darstellungen der étalen (d.h. algebraischen) Fundamentalgruppe von A zuordnet. Insbesondere Geradenbündel, die algebraisch äquivalent zu null sind, liegen in der Kategorie der Vektorbündel, d.h. man erhält einen Homomorphismus α der dualen abelschen Varietät $\mathrm{Pic}^0_{A/\mathbb{C}_p}(\mathbb{C}_p)$ in die Gruppe der $\mathbb{C}_p$-wertigen Charaktere der étalen Fundamentalgruppe von A. Hierbei handelt es sich um eine Verallgemeinerung eines durch John Tate in seiner Publikation über p-divisible Gruppen [Ta2] definierten Homomorphismus, der zur Konstruktion der Hodge-Tate-Zerlegung benötigt wird.

In der vorliegenden Dissertation werden verschiedene Aspekte der Konstruktion aus [De-We1] behandelt. Dazu werden zunächst im ersten, vorbereitenden Kapitel grundlegende Begriffe wiederholt und eingeordnet. Da die étale Fundamentalgruppe einer abelschen Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper isomorph zum absoluten Tatemodul ist, werden zunächst Grundlagen über p-Barsotti-Tate-Gruppen (p-divisible Gruppen) zusammengefaßt. Diese Darstellung stützt sich wesentlich auf [Ta2] sowie auf den Vorabdruck [Co-Li], der auch im Rahmen eines DMV-Seminars über endliche Gruppenschemata und p-divisible Gruppen im Mai 2005 in Oberwolfach durch Fabrizio Andreatta, Brian Conrad und René Schoof verwendet wurde. Grundlagen über abelsche Schemata stützen sich auf die Vorlesung [Tam2], die Günter Tamme im Wintersemester 2003 / 2004 sowie im Sommersemester 2004 an der Universität Münster gehalten hat, und auf [Mi2] und [Mum]. Vorausgesetzt werden zahlentheoretische Grundlagen (etwa aus [Ne]) sowie Grundlagen der algebraischen Geometrie (etwa aus [Liu]).

Das zweite Kapitel befaßt sich mit abelschen Varietäten mit gewöhnlicher Reduktion. Es wird bewiesen, daß in diesem Falle der in [De-We1] definierte Funktor volltreu ist. Es stellt sich heraus, daß sogar schon der für ein Modell der abelschen Varietät definierte ganzzahlige Funktor volltreu ist.
Zudem wird gezeigt, daß in dem speziellen Fall, daß die abelsche Varietät durch kanonische Liftung einer gewöhnlichen abelschen Varietät über dem Restklassenkörper entsteht, die étale Fundamentalgruppe in eine direkte Summe zweier Summanden zerlegt werden kann und bei den Darstellungen, die man durch Vektorbündel erhält, einer dieser Summanden stets trivial operiert.

Im dritten Kapitel werden CM-abelsche Varietäten A behandelt, die über einem lokalen Zahlkörper $K/\mathbb{Q}_p$ definiert sind. Ein Beispiel aus [De-We1], das auf eine Frage Damian Roesslers zurückgeht, zeigt nach genauerer Beschreibung des oben genannten Homomorphismus α, der Geradenbündeln aus $\mathrm{Pic}^0_{A/\mathbb{C}_p}(\mathbb{C}_p)$ einen stetigen Charakter zuordnet, daß man im Falle einer abelschen Varietät mit komplexer Multiplikation eine neue Operation der absoluten Galoisgruppe von K auf $A(\mathbb{C}_p)$ erhält. Diese neue Operation wird hier explizit beschrieben.

In [At] werden durch Michael F. Atiyah Vektorbündel auf elliptischen Kurven klassifiziert. Hierbei spielen Bündel, die durch sukzessive Erweiterung mit trivialen Bündeln entstehen (sogenannte verallgemeinerte Atiyahbündel), eine entscheidende Rolle. Nach einem Theorem aus [De-We1] sind derartige Bündel (auch für beliebige abelsche Varietäten A) in der Kategorie $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$ enthalten. In dem vierten und letzten Kapitel wird nun in Abhängigkeit der Wahl einer Basis des Darstellungsraumes explizit die Darstellung von verallgemeinerten Atiyahbündeln in Form von Matrizen beschrieben.

Ich bedanke mich herzlich bei meiner gesamten Arbeitsgruppe für die ausgesprochen angenehme Atmosphäre. Insbesondere danke ich meinem Doktorvater Professor Christopher Deninger für das sehr interessante Thema und für die hervorragende und motivierende Betreuung dieser Arbeit. Zudem danke ich Frau Professor Annette Werner für hilfreiche Gespräche und Anmerkungen.

Desweiteren danke ich Ralf Diepholz und Alexis Pangalos für ihre Unterstützung sowie Ralf Kasprowitz und Roland Olbricht, die eine Vorversion dieser Arbeit gelesen haben. Ein ganz besonderer Dank gilt Dr. Gabriel Herz sowie Dr. Sylvain Maugeais, mit denen ich sehr viele interessante Diskussionen führen konnte und die ebenfalls eine Vorversion dieser Arbeit gelesen haben.
Schließlich ist es mir eine Freude, meiner Familie - insbesondere meiner Frau Nina sowie meinen Eltern - für ihre großartige Unterstützung zu danken.

Diese Dissertation wurde vom DFG-Sonderforschungsbereich 478 „Geometrische Strukturen in der Mathematik“ sowie vom DFG-Graduiertenkolleg „Analytische Topologie und Metageometrie“ maßgeblich unterstützt. Beiden Einrichtungen bin ich sehr dankbar.

1. Präliminarien

1.1. Notationen und Definitionen

Es sei p eine Primzahl und, sofern nicht ausdrücklich anders erwähnt, $K/\mathbb{Q}_p$ ein lokaler Zahlkörper, d.h. eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$. Mit $\mathfrak{o}_K$ werde der Bewertungsring von K bezeichnet, mit $\mathfrak{m}_K$ sein maximales Ideal und mit $\kappa = \mathfrak{o}_K/\mathfrak{m}_K$ der Restklassenkörper. Es gilt $\kappa \simeq \mathbb{F}_q$, wobei $q = p^f$ ist.
Ferner sei $\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$ die Komplettierung des algebraischen Abschlusses von $\mathbb{Q}_p$; diese ist algebraisch abgeschlossen. Der Bewertungsring von $\mathbb{C}_p$ werde mit $\mathfrak{o}_p$ oder, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, einfach mit $\mathfrak{o}$ bezeichnet, das maximale Ideal mit $\mathfrak{m}_p$. Für den Restklassenkörper gilt:

$$\mathfrak{o}_p/\mathfrak{m}_p \simeq \overline{\mathbb{F}}_p.$$

Schließlich werde mit $U^{(1)}_{\mathbb{C}_p} := 1 + \mathfrak{m}_p$ die Gruppe der Einseinheiten von $\mathbb{C}_p$ bezeichnet, und für $\mathbb{C}_p^*$ gilt:

$$\mathbb{C}_p^* = \mathfrak{o}_p^\times \times p^{\mathbb{Q}},$$

wobei $(p^{\mathbb{Q}}, \cdot) \simeq (\mathbb{Q}, +)$ die diskrete Topologie trägt und die Einheitengruppe von $\mathfrak{o}_p$ die folgende Struktur hat:

$$\mathfrak{o}_p^\times = \mu_{(p')} \times U^{(1)}_{\mathbb{C}_p}.$$

Dabei ist $\mu_{(p')}$ die Gruppe der Einheitswurzeln von $\mathbb{C}_p$, deren Ordnung prim zu p ist.
Weitere Eigenschaften des Körpers $\mathbb{C}_p$ finden sich in [Ro].

1.2. p-Barsotti-Tate-Gruppen

In diesem Abschnitt werden grundlegende Definitionen und Eigenschaften über p-Barsotti-Tate-Gruppen wiederholt. Als Grundlage hierzu dient die Arbeit von Tate ([Ta2]) sowie die Ausarbeitung von Conrad und Lieblich ([Co-Li]). Weitere Einblicke in diese Theorie bieten die Arbeiten von Serre ([Se3]), Shatz ([Sha]), Tate ([Ta3]) sowie Waterhouse ([Wa]).

Sei S ein lokal noethersches Schema, X ein S-Schema. In der Kategorie der S-Schemata, versehen mit der fppf-Topologie[1], ist die Prägarbe $h_X := \mathrm{Hom}_S(-, X)$ eine fppf-Garbe. Mit Hilfe des Funktors $X \mapsto h_X$ kann die Kategorie der S-Schemata als volle Unterkategorie der Kategorie der Garben auf dem großen fppf-Situs aufgefaßt werden.

Definition 1.2.1. Ein *endliches flaches Gruppenschema über S* ist ein kommutatives Gruppenobjekt in der Kategorie der endlichen, flachen, lokal endlich präsentierten S-Schemata[2]. Die Kategorie der endlichen flachen Gruppenschemata über S werde mit GpSch/S bezeichnet. Der *Rang* eines endlichen flachen Gruppenschemas G/S ist die auf S lokal konstante Funktion

$$\mathrm{rk}_G : S \longrightarrow \mathbb{N}, \quad s \mapsto \dim_{\kappa(s)} \mathscr{O}_{G \times_S \mathrm{Spec}\, \kappa(s)}.$$

Dabei sei $\kappa(s) := \mathscr{O}_{S,s}/\mathfrak{m}_s$ der Restklassenkörper von s.
Eine *abgeschlossene Untergruppe H* eines endlichen flachen Gruppenschemas G über S ist eine abgeschlossene Immersion $f : H \to G$ in der Kategorie GpSch/S.

Ist das Basisschema S zusammenhängend, so ist die Funktion rk_G konstant, und es sei in diesem Falle $\mathrm{rk}(G) := \mathrm{rk}_G(s)$ für ein beliebiges $s \in S$.

Für abelsche fppf-Garben G auf der Kategorie der S-Schemata nennt man $\mathscr{H}om(G, \mathbb{G}_m)$ das *Cartierdual* von G, wobei wie üblich mit $\mathbb{G}_m$ die

[1] fppf = fidèlement plate et de présentation finie, d.h. treuflach und endlich präsentiert; näheres zu Grothendiecktopologien ist in [Mi1] und in [Tam1] zu finden.

[2] Da das Basisschema S lokal noethersch ist, bedeutet lokal endlich präsentiert über S dasselbe wie lokal von endlichem Typ über S (siehe [EGA] IV_1 Définition 1.3.2 und 1.4.2).

multiplikative Gruppe bezeichnet werde. Für darstellbares G ist das Cartierdual von G nicht notwendig darstellbar, es gilt im Falle endlicher flacher Gruppenschemata jedoch das folgende Theorem:

Theorem 1.2.2 (Cartier-Shatz, [Co-Li] Theorem 2.2.3)**.**
Sei $\pi : G \to S$ ein endliches flaches Gruppenschema über S, und für ein S-Schema T werde mit G_T der Basiswechsel $G \times_S T$ bezeichnet.
Der kontravariante Funktor von der Kategorie der S-Schemata in die Kategorie der abelschen Gruppen

$$T \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{GPSCH}/T}(G_T, \mathbb{G}_{m,T})$$

ist durch ein endliches flaches Gruppenschema $G^\vee/S$ darstellbar; explizit ist

$$G^\vee = \boldsymbol{Spec}\left(\mathscr{H}\mathrm{om}_{\mathscr{O}_S}(\pi_*(\mathscr{O}_G), \mathscr{O}_S)\right).$$

Die Kategorie endlicher flacher Gruppenschemata über dem Basisschema S ist im allgemeinen nicht abelsch. Das folgende Theorem ermöglicht jedoch die Definition kurzer exakter Sequenzen in dieser Kategorie.

Theorem 1.2.3. *Es sei G/S ein endliches flaches Gruppenschema und $f : H \to G$ eine abgeschlossene Untergruppe von G, d.h. eine abgeschlossene Immersion in der Kategorie der endlichen flachen Gruppenschemata über S.*
Dann existiert der Kokern G/H in der Kategorie der endlichen flachen Gruppenschemata über S, und H ist der Kern von $G \to G/H$ in der Kategorie der Gruppenschemata über S.

Beweis. Ein direkter Beweis ist in [Co-Li] Theorem 2.2.4 zu finden. Ein Beweis, der auf der Darstellbarkeit der Garbifizierung der fppf-Prägarbe G/H basiert, findet sich in [SGA3.I] Exposé V. □

Definition 1.2.4. Eine Sequenz

$$0 \longrightarrow G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G'' \longrightarrow 0$$

endlicher flacher S-Gruppenschemata heißt *kurze exakte Sequenz*, falls $f : G' \to G$ eine abgeschlossene Untergruppe ist, die durch g auf null abgebildet wird, und zudem die durch g induzierte Abbildung $G/G' \to G''$ ein Isomorphismus ist.

Sei nun $S = \mathrm{Spec}(R)$ das Spektrum eines henselschen lokalen Ringes und G/S ein endliches flaches Gruppenschema. Dann ist die Zusammenhangskomponente der Identität G^0 eine abgeschlossene Untergruppe von G, und der Kokern $G^{\text{ét}} := G/G^0$ ist étale über S. Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow G^0 \longrightarrow G \longrightarrow G^{\text{ét}} \longrightarrow 0$$

wird als *zusammenhängend-étale exakte Sequenz von* G bezeichnet.

Bemerkung. Ein endliches flaches Gruppenschema G über R ist genau dann étale, falls $G = G^{\text{ét}}$ und genau dann zusammenhängend, falls $G = G^0$ ist.

Theorem 1.2.5 ([Co-Li] Theorem 2.2.10)**.**
Sei k ein vollkommener Körper und G ein endliches flaches Gruppenschema über k. Dann besitzt die zusammenhängend-étale Sequenz von G eine kanonische Spaltung, und diese ist mit Produkten und Basiswechsel mit vollkommenen Körpern verträglich.

Dieses Theorem gestattet es, endliche flache Gruppenschemata G über einem vollkommenen Körper k in eine direkte Summe $G = G^0 \oplus G^{\text{ét}}$ zu zerlegen[3]. Wendet man das Theorem erneut auf $(G^0)^\vee$ sowie auf $(G^{\text{ét}})^\vee$ an, so erhält man nach abermaligem Dualisieren eine Zerlegung in vier direkte Summanden

$$G = G^{0-0} \oplus G^{0-\text{ét}} \oplus G^{\text{ét}-0} \oplus G^{\text{ét}-\text{ét}},$$

wobei sich der zweite Index auf das Cartierdual bezieht, d.h. G^{0-0} ist zum Beispiel zusammenhängend mit zusammenhängendem Cartierdual, $G^{0-\text{ét}}$ zusammenhängend mit étalem Cartierdual. Jedes endliche flache Gruppenschema G über einem Körper der Charakteristik null ist étale-étale, d.h. $G = G^{\text{ét}-\text{ét}}$.

Proposition 1.2.6 ([Ge-Mo] Proposition 4.47)**.**
Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$, G ein zusammenhängendes endliches flaches Gruppenschema über k. Dann ist der Rang von G eine Potenz von p.

[3] Man beachte, daß in der gesamten Arbeit endliche flache Gruppenschemata per definitionem kommutativ sind.

Korollar 1.2.7 ([Ge-Mo] Corollary 4.48)**.**
Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Dann ist ein endliches flaches k-Gruppenschema G genau dann étale-étale, wenn p nicht den Rang von G teilt.

Theorem 1.2.8 (Deligne, [Oo-Ta] Theorem, Seite 4)**.**
Sei S ein zusammenhängendes lokal noethersches Schema und G ein endliches flaches Gruppenschema über S.
Dann teilt die Ordnung von G den Rang von G, d.h. es gilt $\mathrm{rk}(G) \cdot \mathrm{id}_G = 0_G$.

Die Struktur endlicher flacher Gruppenschemata vom Rang p über einem Körper wird durch die folgende Proposition beschrieben:

Proposition 1.2.9 ([Oo-Ta] Lemma 1)**.**
Sei $k = \overline{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Es sei G/k ein endliches flaches Gruppenschema vom Rang p. Dann ist G isomorph zum konstanten Gruppenschema $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, oder der Körper k hat Charakteristik p und $G \simeq \mu_{p,k}$ oder $G \simeq \alpha_{p,k}$.

Dabei ist für $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_{p^n} := \ker([p^n] : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m)$$

die abgeschlossene Untergruppe der p^n-Teilungspunkte der multiplikativen Gruppe $\mathbb{G}_m$, und $\alpha_{p,S}$ ist für ein Schema S der Charakteristik $p > 0$ als Kern des relativen Frobeniusmorphismus $F_{\mathbb{G}_{a,S}/S} : \mathbb{G}_{a,S} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,S}^{(p)}$ definiert, d.h. für ein S-Schema X ist:

$$\alpha_{p,S}(X) := \{x \in \mathbb{G}_{a,S}(X) \mid x^p = 0\}.$$

Das Cartierdual des Gruppenschemas μ_{p^n} ist das konstante Gruppenschema $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, und $\alpha_{p,S}$ ist selbstdual.

Definition 1.2.10. Sei S ein zusammenhängendes lokal noethersches Schema. Eine *p-Barsotti-Tate-Gruppe*[4] *der Höhe h über S* ist ein induktives System $G = (G_n, \iota_n)_{n \geq 1}$, das aus endlichen flachen S-Gruppenschemata G_n und abgeschlossenen Immersionen $\iota_n : G_n \to G_{n+1}$ besteht, für die gilt:

[4]Serre und Tate benutzen in [Se3] und [Ta2] die Bezeichnung *p-divisible Gruppe*.

1. $\mathrm{rk}(G_n) = p^{nh}$, und

2. G_n kann durch ι_n mit dem Kern $G_{n+1}[p^n]$ der Multiplikation mit p^n in G_{n+1} identifiziert werden, d.h. die Sequenz

$$0 \longrightarrow G_n \xrightarrow{\iota_n} G_{n+1} \xrightarrow{[p^n]} G_{n+1}$$

ist exakt.

Für ein beliebiges lokal noethersches Basisschema S werden p-Barsotti-Tate-Gruppen G über S analog definiert. In diesem Fall ist die Höhe von G eine lokal konstante Funktion $S \to \mathbb{N}$, und die erste Bedingung muß als Gleichung lokal konstanter Funktionen auf S interpretiert werden.

Bemerkung (alternative Definition einer p-Barsotti-Tate-Gruppe).
Ein induktives System $G = (G_n, \iota_n)_{n \geq 1}$ bestehend aus endlichen flachen S-Gruppenschemata G_n und abgeschlossenen Immersionen $\iota_n : G_n \to G_{n+1}$ ist genau dann eine p-Barsotti-Tate-Gruppe, wenn für alle natürlichen Zahlen $s, t \geq 1$ Morphismen $j_{s,t} : G_{s+t} \to G_t$ existieren, so daß die folgenden Sequenzen exakt sind:

$$0 \longrightarrow G_s \xrightarrow{\iota_{s,t}} G_{s+t} \xrightarrow{[p^s]} G_{s+t} \xrightarrow{[p^t]} G_{s+t} \xrightarrow{j_{s,t}} G_t \longrightarrow 0, \tag{1.1}$$

dabei sei $\iota_{s,t} := \iota_{s+t-1} \circ \ldots \circ \iota_s$.
Ein Beweis ist in [Co-Li] Remark 5.1.2. zu finden.

Faßt man die endlichen flachen Gruppenschemata G_n als fppf-Garben auf (über den Funktor h_{G_n}), so kann man in der Kategorie abelscher fppf-Garben den direkten Limes $G := \varinjlim_n G_n$ betrachten. Diese Sichtweise führt zu einer äquivalenten Definition von p-Barsotti-Tate-Gruppen (siehe etwa [G] Chapitre III.5.1, [Me] Chapter I, Remark 2.3 oder [Ge-Mo] 10.13).

Sei $G = (G_n, \iota_n)$ eine p-Barsotti-Tate-Gruppe. Da die abgeschlossenen Immersionen ι_n mit Cartierdualität verträglich sind, ist $G^\vee := (G_n^\vee, \iota_n^\vee)$ wieder eine p-Barsotti-Tate-Gruppe; das *Cartierdual von G*.
Ist die Basis $S = \mathrm{Spec}(R)$ das Spektrum eines henselschen lokalen Ringes R,

so ist das induktive System mit den zusammenhängenden-étalen Sequenzen verträglich, und man definiert $G^0 := (G_n^0, \iota_n)$ und $G^{\text{ét}} := (G_n^{\text{ét}}, \iota_n)$. Entsprechend heißt eine p-Barsotti-Tate-Gruppe G *zusammenhängend*, falls $G = G^0$ ist und *étale*, falls $G = G^{\text{ét}}$ gilt.

Für ein abelsches Schema $\mathscr{A}$ über einem Ring R definieren die p^n-Teilungspunkte eine p-Barsotti-Tate-Gruppe $\mathscr{A}(p) := (\mathscr{A}[p^n], \iota_n)$ der Höhe $2 \dim \mathscr{A}$.

Sei nun k ein Körper der Charakteristik null, und $\overline{k}/k$ sei ein algebraischer Abschluß von k.

Definition 1.2.11 (Tatemodul)**.**
Sei $G = (G_n, \iota_n)$ eine p-Barsotti-Tate-Gruppe über k. Der *Tatemodul* $T(G)$ von G ist definiert als projektiver Limes der $\overline{k}$-wertigen Punkte der G_n

$$T(G) := \varprojlim_n G_n(\overline{k}),$$

bezüglich der in der exakten Sequenz (1.1) auf Seite 16 definierten Epimorphismen

$$j_{1,n-1} : G_n \twoheadrightarrow G_{n-1}.$$

Da die $G_n(\overline{k})$ in natürlicher Weise $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-Moduln sind, kann $T(G)$ als $\mathbb{Z}_p$-Modul aufgefaßt werden.
Für p-Barsotti-Tate-Gruppen G über einem nullteilerfreien Ring R mit Quotientenkörper der Charakteristik null sei

$$T(G) := \varprojlim_n G_n(\overline{\mathrm{Quot}(R)}).$$

Für ein abelsches Schema $\mathscr{A}/R$ definiert man den *p-Tatemodul von $\mathscr{A}$* durch

$$T_p\mathscr{A} := T(\mathscr{A}(p)).$$

Der *absolute Tatemodul von $\mathscr{A}$* ist definiert als

$$T\mathscr{A} := \prod_l T_l\mathscr{A},$$

wobei das Produkt alle Primzahlen durchläuft.

Proposition 1.2.12 ([Co-Li] Proposition 5.2.3)**.**
Sei k ein Körper der Charakteristik null. Der Funktor

$$G \mapsto T(G)$$

von der Kategorie der p-Barsotti-Tate-Gruppen über k in die Kategorie endlicher freier $\mathbb{Z}_p$-Moduln mit stetiger Operation der absoluten Galoisgruppe $G_k = G(\overline{k}/k)$ ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Sei nun R ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_R$ und Restklassenkörper $R/\mathfrak{m}_R$ von positiver Charakteristik. Sei L die Komplettierung eines algebraischen Abschlusses des Quotientenkörpers von R und S der Ring der ganzen Zahlen von L. Dann definiert man als *Gruppe der S-wertigen Punkte* einer p-Barsotti-Tate-Gruppe $G = (G_n, \iota_n)$ über R die Gruppe

$$G(S) := \varprojlim_i \Big(G(S/\mathfrak{m}_R^i S)\Big), \quad \text{wobei } G(S/\mathfrak{m}_R^i S) := \varinjlim_n G_n(S/\mathfrak{m}_R^i S) \text{ sei.}$$

Nach Definition der p-Barsotti-Tate-Gruppen erhält man für alle $n \geq 1$ und alle $i \geq 1$ kurze exakte Sequenzen:

$$0 \longrightarrow G_n(S/\mathfrak{m}_R^i S) \longrightarrow G(S/\mathfrak{m}_R^i S) \xrightarrow{p^n} G(S/\mathfrak{m}_R^i S).$$

Daher sind für alle $i \geq 1$ die Gruppen $G(S/\mathfrak{m}_R^i S)$ p-Torsionsgruppen, und also kann $G(S)$ mit der Struktur eines $\mathbb{Z}_p$-Moduls versehen werden, der zu einem topologischen $\mathbb{Z}_p$-Modul wird, wenn man die $G(S/\mathfrak{m}_R^i S)$ mit der diskreten Topologie ausstattet.
Aufgrund der Linksexaktheit des projektiven Limes erhält man aus der obigen exakten Sequenz die folgende exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \varprojlim_i G_n(S/\mathfrak{m}_R^i) = G_n(S) \longrightarrow G(S) \xrightarrow{p^n} G(S).$$

Daher ist die Torsionsuntergruppe von $G(S)$:

$$G(S)_{\text{tors}} = \varinjlim_n G_n(S) = \varinjlim_n \Big(\varprojlim_i G_n(S/\mathfrak{m}_R^i S)\Big).$$

Wenn G étale über R ist, so sind für alle $n \geq 1$ und $i \geq 1$ die Abbildungen $G_n(S/\mathfrak{m}_R^{i+1} S) \to G_n(S/\mathfrak{m}_R^i S)$ bijektiv, d.h. $G_n(S/\mathfrak{m}_R^i S) \simeq G_n(S)$; daher folgt in diesem Fall $G(S) = G(S)_{\text{tors}}$.

Proposition 1.2.13 ([Co-Li] Lemma 6.3.14).
Die Bildung der S-wertigen Punkte

$$G \mapsto G(S)$$

ist ein Funktor von der Kategorie der p-Barsotti-Tate-Gruppen über R in die Kategorie der topologischen $\mathbb{Z}_p$-Moduln. Sie ist funktoriell in G und in S.

Die p^n-Teilungspunkte μ_{p^n} von $\mathbb{G}_m$ definieren eine p-Barsotti-Tate-Gruppe der Höhe eins, die mit $\mathbb{G}_m(p)$ bezeichnet wird.
Sei $\mathfrak{o}$ der Ring der ganzen Zahlen von $\mathbb{C}_p$. Dann ist

$$\mathbb{G}_m(p)(\mathfrak{o}) = U^{(1)}_{\mathbb{C}_p} = 1 + \mathfrak{m}_p$$

die Gruppe der Einseinheiten von $\mathfrak{o}$ (vgl. [Ta2] Example 1, Seite 169).

1.3. Die étale Fundamentalgruppe

Dieser Abschnitt stützt sich auf die Ausführungen zur étalen Fundamentalgruppe in [SGA1] Exposé V sowie auf die Vorlesungsausarbeitung [Mur]. Grundlagen über étale Kohomologie sind in [Mi1] sowie in [Tam1] zu finden.

Sei S ein lokal noethersches und zusammenhängendes Schema.

Definition 1.3.1. Eine *étale Überlagerung* $p : X \to S$ ist ein endlicher étaler Morphismus von Schemata. Mit $\mathscr{F}\mathscr{E}t/S$ werde die Kategorie der étalen Überlagerungen von S bezeichnet (die Morphismen sind S-Morphismen).

Sei Ω ein algebraisch abgeschlossener Körper. Für einen geometrischen Punkt

$$s_0 : \mathrm{Spec}(\Omega) \longrightarrow S$$

definiert man in Analogie zu topologischen Überlagerungen den Faserfunktor

$$F_{s_0} : \mathscr{F}\mathscr{E}t/S \to \mathscr{E}ns$$

durch:

$$F_{s_0}(X) := \mathrm{Mor}_S(s_0, X).$$

Im Gegensatz zum topologischen Faserfunktor ist der soeben definierte Funktor im allgemeinen nicht darstellbar.

Definition 1.3.2. Sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie. Ein kovarianter Funktor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{E}ns$ heißt *pro-darstellbar*, wenn es ein projektives System $P = (P_i)_{i\in I}$ (mit filtrierender Indexmenge I) von Objekten aus $\mathscr{C}$ gibt, so daß F isomorph zu dem Funktor $\varinjlim_{i\in I} \mathrm{Mor}(P_i, -)$ ist. Ein pro-darstellbarer Funktor heißt *strikt pro-darstellbar*, wenn die Übergangsmorphismen des projektiven Systems $\varphi_{ij} : P_i \to P_j$ Epimorphismen sind.

Die folgende Proposition sowie die beiden Lemmata ergeben sich aus den allgemeinen Resultaten in [SGA1] Exposé V.4 (Conditions axiomatiques d'une théorie de Galois), angewandt auf die Kategorie der étalen Überlagerungen von S.

Proposition 1.3.3 (vgl. [SGA1] Exposé V.4 und V.7)**.**
Der Faserfunktor $F_{s_0} : \mathscr{F}\mathscr{E}t/S \to \mathscr{E}ns$ ist strikt pro-darstellbar, d.h. es existiert ein projektives System $\tilde{S} = (\tilde{S}_i)_{i\in I}$ (I filtrierend) von étalen Überlagerungen mit

$$F_{s_0}(X) \simeq \mathrm{Mor}_S(\tilde{S}, X) := \varinjlim_{i\in I} \mathrm{Mor}_S(\tilde{S}_i, X).$$

Lemma 1.3.4 (vgl. [SGA1] Exposé V.4 und V.7)**.**
Für eine étale Überlagerung $\tilde{S}_i$ aus dem projektiven System $\tilde{S}$ der Proposition sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *Die injektive Abbildung*

$$\mathrm{Mor}_S(\tilde{S}_i, \tilde{S}_i) \longrightarrow \mathrm{Mor}_S(\tilde{S}, \tilde{S}_i) \simeq F_{s_0}(\tilde{S}_i)$$

   ist auch surjektiv.

2. *Die Gruppe $\mathrm{Aut}_S(\tilde{S}_i)$ operiert transitiv auf $F_{s_0}(\tilde{S}_i)$.*

Beweis. Das Lemma folgt aus der Tatsache, daß $\mathrm{Mor}_S(\tilde{S}_i, \tilde{S}_i) = \mathrm{Aut}_S(\tilde{S}_i)$ ist. □

Ist eine dieser Bedingungen für $\tilde{S}_i$ aus $\tilde{S}$ erfüllt, so heißt die étale Überlagerung $\tilde{S}_i \to S$ *galoissch mit Galoisgruppe* $\mathrm{Aut}_S(\tilde{S}_i)$.

Lemma 1.3.5 (vgl. [SGA1] Exposé V.4 und V.7)**.**
Sei $X \to S$ eine étale Überlagerung und $\tilde{S}$ ein projektives System von étalen Überlagerungen aus der Proposition 1.3.3.
Dann existiert eine galoissche Überlagerung $\tilde{S}_j \to S$ aus dem projektiven System $\tilde{S}$, so daß alle Morphismen $u \in \mathrm{Mor}_S(\tilde{S}, X)$ über $\tilde{S}_j$ mit dem kanonischen Morphismus $\varphi_j : \tilde{S} \to \tilde{S}_j$ faktorisieren, d.h. das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd} \tilde{S} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & & X \\ & \tilde{S}_j \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Insbesondere bilden die galoisschen Überlagerungen φ_j aus dem projektiven System $\tilde{S}$ ein kofinales System.

Für galoissche Überlagerungen $\tilde{S}_j$ gilt $\mathrm{Mor}_S(\tilde{S}, \tilde{S}_j) = \mathrm{Mor}_S(\tilde{S}_j, \tilde{S}_j) = \mathrm{Aut}_S(\tilde{S}_j)$, und daher ist:

$$\mathrm{Aut}_S(\tilde{S}) = \varinjlim_{i \in I, \mathrm{gal.}} \mathrm{Aut}_S(\tilde{S}_i) \simeq \varinjlim_{i \in I, \mathrm{gal.}} F_{s_0}(\tilde{S}_i).$$

Aufgrund der Surjektivität der Übergangsmorphismen (F_{s_0} ist strikt pro-darstellbar) ist $\mathrm{Aut}_S(\tilde{S})$ projektiver Limes endlicher Gruppen und kann also mit der Struktur einer pro-endlichen Gruppe versehen werden.

Definition 1.3.6. Die pro-endliche Gruppe

$$\pi_1^{\text{ét}}(S, s_o) := \mathrm{Aut}_S(\tilde{S})^{op} \simeq \big(\varinjlim_{i \in I, \mathrm{gal.}} F_{s_0}(\tilde{S}) \big)^{op}$$

heißt *étale* (oder auch: *algebraische*) *Fundamentalgruppe von S zur Basis s_0.*

Wählt man einen anderen geometrischen Punkt $s_0' : \mathrm{Spec}(\Omega') \to S$ mit algebraisch abgeschlossenem Ω', so sind die Faserfunktoren F_{s_0} und $F_{s_0'}$ isomorph zueinander.
Als *Fundamentalgruppoid von S* definiert man die Kategorie $\Pi_1(S)$, deren Objekte alle geometrischen Punkte und deren Morphismen die Homomorphismen der Faserfunktoren sind. Nach der obigen Vorbemerkung sind also

alle Morphismen in $\Pi_1(S)$ Isomorphismen, d.h. für zwei geometrische Punkte s_0 und s_0' ist

$$\mathrm{Mor}_{\Pi_1(S)}(s_0, s_0') = \mathrm{Iso}(F_{s_0}, F_{s_0'}).$$

Ein solcher Isomorphismus heißt *étaler Weg*, und aufgrund der Pro-Darstellbarkeit der Faserfunktoren ist $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(S)}(s_0, s_0')$ eine pro-endliche Menge. Die étale Fundamentalgruppe von S zur Basis s_0 ist dann

$$\pi_1^{\text{ét}}(S, s_0) = \mathrm{Mor}_{\Pi_1(S)}(s_0, s_0) = \mathrm{Iso}(F_{s_0}, F_{s_0}).$$

Nun wird die étale Fundamentalgruppe einer abelschen Varietät näher untersucht.

Theorem 1.3.7 (Serre-Lang, [Mum] Chapter IV.18, Theorem)**.**
Sei k ein Körper der Charakteristik null mit algebraischem Abschluß $\overline{k}$. Sei $X/\overline{k}$ eine abelsche Varietät, $Y/\overline{k}$ eine $\overline{k}$-Varietät (d.h. ein separiertes $\overline{k}$-Schema, das von endlichem Typ und integer ist) und $f : Y \to X$ eine étale Überlagerung.
Dann hat Y die Struktur einer abelschen Varietät, so daß f eine separable Isogenie ist.

Da die Isogenien $l^n : A \to A$ für Primzahlen l kofinal in der Menge der étalen Überlagerungen sind, erhält man das folgende Korollar:

Korollar 1.3.8. *Sie wie im Theorem k ein Körper der Charakteristik null. Sei A/k eine abelsche Varietät mit Nullschnitt 0, aufgefaßt als $\overline{k}$-wertiger Punkt von A. Dann ist die étale Fundamentalgruppe von $A_{\overline{k}}$ isomorph zum absoluten Tatemodul von A:*

$$\pi_1^{\acute{e}t}(A_{\overline{k}}, 0) \simeq \varinjlim_{N} A[N](\overline{k}) \simeq \prod_{l\ prim} T_l A = TA.$$

□

Bemerkung. Das Theorem von Serre-Lang gilt auch für abelsche Varietäten über einem Körper k der Charakteristik $p > 0$. In diesem Fall definiert man analog zur Definition des Tatemoduls in Charakteristik null für alle Primzahlen l den l-Tatemodul einer abelschen Varietät A über k durch

$T_l A := \varprojlim_n A[l^n](k^{\mathrm{sep}})$. Hierbei bedarf es jedoch einer gesonderten Betrachtung der Isogenien p^n. Mit dieser Definition gilt dann in Analogie zum obigen Korollar:

$$\pi_1^{\text{ét}}(A_{k^{\mathrm{sep}}}, 0) \simeq \prod_{l \text{ prim}} T_l A$$

(siehe hierzu [SGA1] Exposé XI, Théorème 2.1; [Mum] Chapter IV.18 sowie [Ge-Mo] Corollary 10.37).

Aufgrund des Korollars werde im folgenden die étale Fundamentalgruppe einer abelschen Varietät über einem separabel abgeschlossenen Körper mit dem absoluten Tatemodul identifiziert.

Als weiteres Korollar erhält man die folgende Anwendung auf l-adische Kohomologiegruppen:

Korollar 1.3.9 ([Ge-Mo] Corollary 10.39)**.**
Sei A eine abelsche Varietät über einem Körper k. Dann hat man für alle Primzahlen $l \neq \mathrm{Char}(k)$ Isomorphismen von $\mathbb{Z}_l$-Moduln mit stetiger Operation der absoluten Galoisgruppe von k:

$$\mathrm{H}^1_{ét}(A_{k^{\mathrm{sep}}}, \mathbb{Z}_l) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_l}(T_l A, \mathbb{Z}_l).$$

1.4. Konstruktion des Funktors ρ

Sei $A/\overline{\mathbb{Q}}_p$ eine abelsche Varietät mit guter Reduktion, d.h. es existiert ein abelsches Schema $\mathscr{A}$ über $\overline{\mathbb{Z}}_p$ mit generischer Faser A. Da $\mathscr{A}$ als abelsches Schema über $\overline{\mathbb{Z}}_p$ endlich präsentiert ist, existiert nach [EGA] IV$_3$ Proposition 8.9.1 ein Unterring Ring $\mathfrak{o}_K$ von $\mathbb{Z}_p$, der als $\mathbb{Z}$-Algebra von endlichem Typ ist, sowie ein abelsches Schema $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}_K}$ mit $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}_K} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \overline{\mathbb{Z}}_p = \mathscr{A}$. Dann ist $K = \mathrm{Quot}(\mathfrak{o}_K)$ ein lokaler Zahlkörper, $A_K := \mathscr{A}_{\mathfrak{o}_K} \otimes_{\mathfrak{o}_K} K$ eine abelsche Varietät mit guter Reduktion und Néronmodell $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}_K}$. Ferner ist $A_K \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}_p = A$. Wie in der Einleitung werde das maximale Ideal des Bewertungsringes $\mathfrak{o}_K$ mit $\mathfrak{m}_K$ bezeichnet, und der Bewertungsring von $\mathbb{C}_p$ werde von nun an lediglich mit $\mathfrak{o}$ bezeichnet. Schließlich sei $G_K = G(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ die absolute Galoisgruppe von K.

Der Basiswechsel von $\mathscr{A}$ mit $\mathfrak{o}$ bzw. von A mit $\mathbb{C}_p$ werde mit

$$\mathscr{A}_{\mathfrak{o}} := \mathscr{A} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \mathfrak{o} \quad \text{bzw.} \quad A_{\mathbb{C}_p} := A \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \mathbb{C}_p$$

bezeichnet; die Reduktion modulo p^n (für $n \in \mathbb{N}$) mit

$$\mathscr{A}_n := \mathscr{A} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \mathfrak{o}_n.$$

Dabei sei $\mathfrak{o}_n := \mathfrak{o}/p^n\mathfrak{o} = \overline{\mathbb{Z}}_p/p^n\overline{\mathbb{Z}}_p$.

Die folgende Konstruktion wurde von Annette Werner und Christopher Deninger in [De-We1] entwickelt. Daß diese Konstruktion eine Verallgemeinerung einer Konstruktion John Tates in [Ta2] ist, wird im 3. Kapitel dargelegt. Eine Version für glatte projektive Kurven über $\mathbb{C}_p$ und Paralleltransport ist in [De-We2] zu finden.

Zunächst werden Kategorien von Vektorbündeln auf $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}$ und $A_{\mathbb{C}_p}$ definiert.

Definition 1.4.1. Es sei $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}}$ die folgende volle Unterkategorie der Kategorie der Vektorbündel auf dem abelschen Schema $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}/\mathfrak{o}$:
Ein Vektorbündel $\mathscr{E}$ auf $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}$ ist genau dann ein Objekt in $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}}$, falls es für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ eine natürliche Zahl $N = N(n) \geq 1$ gibt, so daß die Reduktion $(N^*\mathscr{E})_n$ modulo p^n des Urbildes von $\mathscr{E}$ unter der Multiplikation mit N trivial auf $\mathscr{A}_n$ ist.
Die Kategorie $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$ ist die volle Unterkategorie der Kategorie der Vektorbündel auf $A_{\mathbb{C}_p}$, deren Objekte Vektorbündel E auf $A_{\mathbb{C}_p}$ sind, die isomorph zur generischen Faser $\mathscr{E}_{\mathbb{C}_p}$ eines Vektorbündels $\mathscr{E}$ aus $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}}$ sind. Fortan werde ein solches Vektorbündel $\mathscr{E}$ mit generischer Faser $\mathscr{E}_{\mathbb{C}_p} \simeq E$ als *Modell* von E bezeichnet.

Nun wird ein Funktor

$$\rho : \mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}} \longrightarrow \mathbf{Rep}_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\mathbb{C}_p)$$

definiert, wobei mit $\mathbf{Rep}_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\mathbb{C}_p)$ die Kategorie stetiger Darstellungen der étalen Fundamentalgruppe von A in endlich-dimensionalen $\mathbb{C}_p$-Vektorräumen bezeichnet werde.

Seien $0_{\mathscr{A}}$ bzw. 0_n die Nullschnitte der abelschen Schemata $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}$ bzw. $\mathscr{A}_n$. Für ein Vektorbündel $\mathscr{E}$ auf $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}$ vom Rang r sei $\mathscr{E}_{0_{\mathscr{A}}} := 0_{\mathscr{A}}^* \mathscr{E}$, aufgefaßt als freier $\mathfrak{o}$-Modul vom Rang r und $\mathscr{E}_{0_n} := 0_n^* \mathscr{E}$, aufgefaßt als freier $\mathfrak{o}_n$-Modul vom Rang r. Versieht man die Moduln $\mathscr{E}_{0_n}$ mit der diskreten Topologie, so gilt $\mathscr{E}_{0_{\mathscr{A}}} = \varprojlim_n \mathscr{E}_{0_n}$ als topologische $\mathfrak{o}$-Moduln.

Sei nun $\mathscr{E}$ ein Objekt aus $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}}$ und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Per definitionem existiert eine natürliche Zahl $N \geq 1$, so daß $(N^*\mathscr{E})_n$ trivial auf $\mathscr{A}_n$ ist, d.h. $(N^*\mathscr{E})_n \simeq (\mathscr{O}_{\mathscr{A}_n})^{\mathrm{rk}\,\mathscr{E}}$.
Da der Strukturmorphismus $\lambda : \mathscr{A}_{\mathfrak{o}} \to \mathrm{Spec}(\mathfrak{o})$ eigentlich und flach mit geometrisch integren Fasern ist und die Basis $\mathrm{Spec}(\mathfrak{o})$ lokal noethersch ist, gilt nach [EGA] III_2 Proposition 7.8.6 und Corollaire 7.8.8 die Isomorphie $\lambda_* \mathscr{O}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}} = \mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(\mathfrak{o})}$ universell, d.h. diese Gleichung ist stabil unter beliebigem Basiswechsel. Daher kann $\Gamma(\mathscr{A}_n, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_n})$ als freier $\mathfrak{o}_n$-Modul aufgefaßt werden:

$$\Gamma(\mathscr{A}_n, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}) = \mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}(\mathscr{A}_n) = \lambda_* \mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}(\mathrm{Spec}(\mathfrak{o}_n)) = \mathfrak{o}_n$$

Somit ist die Bildung des Urbildes durch 0_n:

$$\begin{aligned} 0_n^* : \Gamma(\mathscr{A}_n, (N^*\mathscr{E})_n) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathrm{Spec}(\mathfrak{o}_n), 0_n^* N^* \mathscr{E}_n) &= \Gamma(\mathrm{Spec}(\mathfrak{o}_n), (N \circ 0_n)^* \mathscr{E}_n) \\ &= \Gamma(\mathrm{Spec}(\mathfrak{o}_n), 0_n^* \mathscr{E}_n) \\ &= \mathscr{E}_{0_n} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus freier $\mathfrak{o}_n$-Moduln.

Zudem operiert die Gruppe der N-Torsionspunkte $A[N](\overline{\mathbb{Q}}_p) = \mathscr{A}[N](\overline{\mathbb{Z}}_p)$ durch Translation auf $\Gamma(\mathscr{A}_n, (N^*\mathscr{E})_n)$.

Insgesamt erhält man für jedes $n \geq 1$ eine Darstellung

$$\rho_{\mathscr{E},n} : \pi_1^{\text{ét}}(A,0) = TA \xrightarrow{kan} A[N](\overline{\mathbb{Q}}_p) \xrightarrow{T} \mathrm{Aut}_{\mathfrak{o}_n}\left(\Gamma(\mathscr{A}_n, (N^*\mathscr{E})_n)\right) \xrightarrow[0_n^*]{\text{via}} \mathrm{Aut}_{\mathfrak{o}_n}(\mathscr{E}_{0_n}),$$

wobei mit *kan* die kanonische Projektion und mit T die Operation der N-Torsionspunkte durch Translation auf dem modulo p^n reduzierten Modell bezeichnet werde.

Das folgende Lemma zeigt, daß die Konstruktion der Darstellungen $\rho_{\mathscr{E},n}$ unabhängig von der Wahl der natürlichen Zahl $N = N(n)$ aus der Definition der Kategorie $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}}$ ist:

Lemma 1.4.2 ([De-We1] Lemma 1, Seite 104)**.**
Für ein Vektorbündel $\mathscr{E}$ aus der Kategorie $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}}$ sind die soeben definierten Darstellungen $\rho_{\mathscr{E},n}$ unabhängig von der Wahl der natürlichen Zahl N mit $(N^*\mathscr{E})_n \simeq (\mathscr{O}_{\mathscr{A}_n})^{\mathrm{rk}\,\mathscr{E}}$.
Durch Komposition mit den natürlichen Projektionen

$$\mathrm{Aut}_{\mathfrak{o}_{n+1}}(\mathscr{E}_{0_{n+1}}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathfrak{o}_n}(\mathscr{E}_{0_n})$$

bilden sie ein projektives System.

Das Lemma zeigt zudem, daß man nun eine Darstellung

$$\rho_{\mathscr{E}} : \pi_1^{\text{ét}}(A, 0) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathfrak{o}}(\mathscr{E}_{0_{\mathscr{A}}})$$

als projektiven Limes $\rho_{\mathscr{E}} = \varprojlim_n \rho_{\mathscr{E},n}$ der Darstellungen $\rho_{\mathscr{E},n}$ definieren kann. Da für jedes n die Darstellungen $\rho_{\mathscr{E},n}$ über einen endlichen Quotienten von $\pi_1^{\text{ét}}(A, 0) = TA$ faktorisieren, ist die Darstellung $\rho_{\mathscr{E}}$ stetig, wenn man $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{o}}(\mathscr{E}_{0_{\mathscr{A}}}) \simeq \mathrm{GL}_{\mathrm{rk}\,\mathscr{E}}(\mathfrak{o})$ mit der durch $\mathfrak{o}$ induzierten Topologie versieht. Zudem erhält man für einen Morphismus $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ in $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}}$ und $n \geq 1$ eine $\mathfrak{o}_n$-lineare Abbildung auf den Fasern $0_n^* f : \mathscr{E}_{0_n} \to \mathscr{E}'_{0_n}$, die äquivariant unter der durch $\rho_{\mathscr{E},n}$ und $\rho_{\mathscr{E}',n}$ definierten $\pi_1^{\text{ét}}(A, 0)$-Operation ist. Daher wird durch die Zuordnung $\mathscr{E} \mapsto \rho_{\mathscr{E}}$ ein Funktor definiert:

$$\rho : \mathscr{B}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}} \longrightarrow \mathbf{Rep}_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\mathfrak{o}), \tag{1.2}$$

wobei mit $\mathbf{Rep}_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\mathfrak{o})$ die Kategorie stetiger Darstellungen der étalen Fundamentalgruppe von A in freien $\mathfrak{o}$-Moduln endlichen Ranges bezeichnet werde. Dieser Funktor wird im folgenden bisweilen auch als ganzzahliger Funktor bezeichnet.

Bemerkung. Für Vektorbündel $\mathscr{E}$ aus der Kategorie $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}}$, deren Reduktion modulo p^n trivial ist, d.h. $\mathscr{E}_n \simeq (\mathscr{O}_{\mathscr{A}_n})^{\mathrm{rk}\,\mathscr{E}}$, folgt, daß die durch $\rho_{\mathscr{E},n}$ definierte Operation von $\pi_1^{\text{ét}}(A, 0)$ auf $\mathscr{E}_{0_n}$ trivial ist (man wähle $N = 1$, dann ist

$A[N](\overline{Q}_p) = 0$). Insbesondere ist für triviale Vektorbündel aus der Kategorie $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_\mathfrak{o}}$ die durch $\rho_{\mathscr{E}}$ definierte Operation der étalen Fundamentalgruppe auf $\mathscr{E}_{0_{\mathscr{A}}}$ trivial.

Man betrachte nun ein Vektorbündel E auf der abelschen Varietät $A_{\mathbb{C}_p}$ in der Kategorie $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$, und es sei $0 = 0_{\mathscr{A}} \otimes \mathbb{C}_p$ der Nullschnitt von $A_{\mathbb{C}_p}$. Wie oben sei E_0 der $\mathrm{rk}(E)$-dimensionale $\mathbb{C}_p$-Vektorraum 0^*E.

Mit Hilfe des in (1.2) definierten Funktors kann man nun E in folgender Weise eine stetige $\mathbb{C}_p$-lineare Darstellung zuordnen:

$$\rho_E : \pi_1^{\text{ét}}(A, 0) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}_p}(E_0), \quad \rho_E := \rho_{\mathscr{E}} \otimes_\mathfrak{o} \mathbb{C}_p.$$

Dabei sei $\mathscr{E}$ ein Modell von E aus $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_\mathfrak{o}}$. In [De-We1] (Seiten 105 - 106) wird gezeigt, daß diese Zuordnung wohldefiniert ist, daß also für zwei Vektorbündel $\mathscr{E}$ und $\mathscr{E}'$ aus $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_\mathfrak{o}}$, deren generische Fasern beide isomorph zu E sind, gilt: $\rho_{\mathscr{E}} \otimes_\mathfrak{o} \mathbb{C}_p \simeq \rho_{\mathscr{E}'} \otimes_\mathfrak{o} \mathbb{C}_p$.

Entsprechend kann man für jeden beliebigen geometrischen Punkt $x \in A(\mathbb{C}_p)$ und Vektorbündel E aus $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$ Darstellungen definieren:

$$\rho_E : \pi_1^{\text{ét}}(A, x) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}_p}(E_x),$$

wobei man $E_x := x^*E$ als $\mathbb{C}_p$-Vektorraum auffasse.

Die obige Konstruktion von Darstellungen zu Vektorbündeln hat die folgenden Eigenschaften:

Theorem 1.4.3 ([De-We1] Theorem 1, Seite 106)**.**

1. *Die Kategorie $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$ ist abgeschlossen unter direkten Summen, Tensorprodukten, Dualisieren, inneren Homomorphismen und äußeren Produkten. Zudem ist die Kategorie abgeschlossen unter Erweiterungen, d.h. sind für eine kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln auf $A_{\mathbb{C}_p}$*

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

die Bündel E' und E'' in der Kategorie $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$, so auch E.

2. *Die Kategorie $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$ enthält alle Geradenbündel, die algebraisch äquivalent zu null sind. Für jedes Vektorbündel in $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$ ist das Determinantenbündel algebraisch äquivalent zu null.*

3. *Die obige Konstruktion*

$$\rho : \mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}} \longrightarrow \boldsymbol{Rep}_{\pi_1^{\acute{e}t}(A,0)}(\mathbb{C}_p), \quad E \mapsto \rho_E$$

definiert einen additiven exakten Funktor. Dieser kommutiert mit Tensorprodukten, Dualisierungen, inneren Homomorphismen und äußeren Produkten.

4. *Sei $f : A \to A'$ ein Homomorphismus abelscher Varietäten über $\overline{\mathbb{Q}}_p$ mit guter Reduktion. Dann induziert die Bildung des Urbildes von Vektorbündeln unter f einen additiven exakten Funktor*

$$f^* : \mathscr{B}_{A'_{\mathbb{C}_p}} \longrightarrow \mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}, \quad E' \mapsto f^*E',$$

der mit Tensorprodukten, Dualisierungen, inneren Homomorphismen und äußeren Produkten (bis auf kanonische Identifikationen) verträglich ist. Das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B}_{A'_{\mathbb{C}_p}} \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}} \arrow[d, "\rho"] \\ \boldsymbol{Rep}_{\pi_1^{\acute{e}t}(A',0')}(\mathbb{C}_p) \arrow[r, "F"'] & \boldsymbol{Rep}_{\pi_1^{\acute{e}t}(A,0)}(\mathbb{C}_p), \end{tikzcd}$$

wobei F der durch die Komposition mit

$$\pi_1^{\acute{e}t}(A,0) = TA \xrightarrow{Tf} TA' = \pi_1^{\acute{e}t}(A',0')$$

induzierte Funktor ist.

Sei nun $G_K = G(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ die absolute Galoisgruppe. Diese operiert sowohl auf $TA = \pi_1^{\text{ét}}(A,0)$ als auch auf $\mathbb{C}_p$. Hieraus erhält man eine Galoisoperation auf der Kategorie $\mathbf{Rep}_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\mathbb{C}_p)$ in folgender Weise. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}_p$-Vektorraum und $\sigma \in G_K$. Mit ${}^{\sigma}V = V \otimes_{\mathbb{C}_p,\sigma} \mathbb{C}_p$ werde der Vektorraum V mit Skalarmultiplikation $\alpha \cdot v := \sigma(\alpha)v$ ($\alpha \in \mathbb{C}_p$, $v \in V$)

bezeichnet, und es sei $\sigma : V \to {}^{\sigma}V$ die natürliche σ-lineare Abbildung. Für eine Darstellung $\varphi : TA = \pi_1^{\text{ét}}(A, 0) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}_p}(V)$ sei $\sigma_*\varphi$ die folgende Darstellung:

$$\sigma_*\varphi : TA \xrightarrow{\sigma^{-1}} TA \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}_p}(V) \xrightarrow{c_\sigma} \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}_p}({}^{\sigma}V), \tag{1.3}$$

wobei $c_\sigma(f) = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}$ für einen Automorphismus $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}_p}(V)$ sei.
Für ein Vektorbündel E aus der Kategorie $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$ und $\sigma \in G_K$ sei ${}^{\sigma}E$ definiert durch das cartesische Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
{}^{\sigma}E := E \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{C}_p), \mathrm{Spec}(\sigma)} \mathrm{Spec}(\mathbb{C}_p) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(\mathbb{C}_p) \arrow[d, "\mathrm{Spec}(\sigma)"] \\
E \arrow[r] & \mathrm{Spec}(\mathbb{C}_p).
\end{tikzcd}$$

Dann ist ${}^{\sigma}E$ wieder ein Objekt in $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$.

Die folgende Proposition zeigt nun, daß der Funktor ρ äquivariant unter der Operation der Galoisgruppe ist.

Proposition 1.4.4 ([De-We1] Proposition 1, Seite 108)**.**
Für jedes $\sigma \in G_K$ ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "g_\sigma"'] & \boldsymbol{Rep}_{\pi_1^{ét}(A,0)}(\mathbb{C}_p) \arrow[d, "\sigma_*"] \\
\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}} \arrow[r, "\rho"'] & \boldsymbol{Rep}_{\pi_1^{ét}(A,0)}(\mathbb{C}_p),
\end{tikzcd}$$

wobei der Funktor g_σ ein Vektorbündel E auf ${}^{\sigma}E$ abbildet.

2. Gewöhnliche abelsche Varietäten

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß der Funktor ρ, der einem Vektorbündel der Kategorie $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$ eine p-adische Darstellung der étalen Fundamentalgruppe zuordnet, volltreu ist, falls die abelsche Varietät gewöhnliche Reduktion hat. Es stellt sich heraus, daß bei gewöhnlicher Reduktion schon der ganzzahlige Funktor

$$\rho : \mathscr{B}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}} \longrightarrow \mathbf{Rep}_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\mathfrak{o})$$

volltreu ist.
Desweiteren wird gezeigt, daß speziell bei abelschen Varietäten, die durch kanonische Liftung einer gewöhnlichen abelschen Varietät über dem Restklassenkörper entstehen, nur ein Teil der étalen Fundamentalgruppe nichttrivial operiert.

Sei zunächst A_0/k eine abelsche Varietät über einem vollkommenen Körper k der Charakteristik $p > 0$. Dann ist die zugehörige p-Barsotti-Tate-Gruppe $A_0(p)$ von der Höhe $\mathrm{ht}(A_0(p)) = 2\dim A_0$. Da der Körper k positive Charakteristik hat, gilt nach Korollar 1.2.6, daß $A_0(p)^{\text{ét}-\text{ét}} = 0$ ist, und somit läßt sich $A_0(p)$ wie folgt zerlegen (vgl. Seite 14):

$$A_0(p) = A_0(p)^{0-0} \oplus A_0(p)^{0-\text{ét}} \oplus A_0(p)^{\text{ét}-0},$$

wobei aus Dualitätsgründen $\mathrm{ht}(A_0(p)^{0-\text{ét}}) = \mathrm{ht}(A_0(p)^{\text{ét}-0})$ gilt. Die natürliche Zahl $\mathrm{ht}(A_0(p)^{\text{ét}-0})$ heißt der *p-Rang von A_0*, und es gilt wegen $2\,\mathrm{ht}(A_0(p)^{\text{ét}-0}) + \mathrm{ht}(A_0(p)^{0-0}) = 2\dim A_0$:

$$0 \leq \mathrm{ht}(A_0(p)^{\text{ét}-0}) \leq \dim A_0.$$

Der p-Rang von A_0 läßt sich auch als Grad einer Isogenie charakterisieren. Man betrachte dazu den relativen Frobeniusmorphismus $F_{A_0/k}$, der durch das folgende kommutative Diagramm definiert wird:

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[dr, dotted, "F_{A_0/k}"] \arrow[drr, bend left, "F_{A_0}"] \arrow[ddr, bend right, "\lambda"'] & & \\
& A_0^{(p)} \arrow[r] \arrow[d] & A_0 \arrow[d, "\lambda"] \\
& \mathrm{Spec}(k) \arrow[r, "F_k"'] & \mathrm{Spec}(k)
\end{tikzcd}$$

Dabei sei das rechte untere Diagramm cartesisch (d.h. $A_0^{(p)} := A_0 \times_{\mathrm{Spec}(k),F_k} \mathrm{Spec}(k)$), λ der Strukturmorphismus von A_0 und F_k bzw. F_{A_0} der absolute Frobeniusmorphismus auf $\mathrm{Spec}(k)$ bzw. auf A_0. Dann existiert ein Morphismus abelscher Varietäten

$$V_{A_0/k} : A_0^{(p)} \longrightarrow A_0,$$

so daß für die p-Multiplikation auf A_0 gilt: $[p]_{A_0} = V_{A_0/k} \circ F_{A_0/k}$. Dieser wird als *Verschiebung* bezeichnet. Der relative Frobeniusmorphismus $F_{A_0/k}$ ist eine rein inseparable Isogenie[1] vom Grad $p^{\dim A_0}$ (siehe [Ge-Mo] Proposition 5.15), und die Verschiebung ist eine Isogenie vom Grad $p^{\dim A_0}$ (siehe [Ge-Mo] Proposition 5.20).

Nach [Ge-Mo] Proposition 5.21 kann man die p-Multiplikation in folgender Weise faktorisieren:

$$[p]_{A_0} : A_0 \overset{F_{A_0/k}}{\longrightarrow} A_0^{(p)} \xrightarrow{h_1} \tilde{A}_0 \xrightarrow{h_2} A_0, \tag{2.1}$$

wobei $\tilde{A}_0$ eine abelsche Varietät über k sei, $h_1 \circ F_{A_0/k}$ rein inseparabel ist und h_2 eine separable Isogenie ist. Dann hat die Isogenie h_2 den Grad $p^{\mathrm{rk}_p A_0}$, wobei $\mathrm{rk}_p A_0$ der p-Rang von A_0 sei (vgl. hierzu [Ge-Mo] Chapter V, näheres über den Frobeniusmorphismus und die Verschiebung ist in [SGA3.I] Exposé $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$, §4 zu finden).

[1]Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata ist rein inseparabel, wenn f auf den zugrundeliegenden Mengen injektiv ist und für alle $x \in X$ die Restklassenkörpererweiterung $\kappa(x)/\kappa(f(x))$ rein inseparabel ist (vgl. [EGA] I Proposition 3.7.1).

Lemma 2.0.5. *Sei A_0/k eine abelsche Varietät über einem vollkommenen Körper k der Charakteristik p. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Der p-Rang von A_0 ist maximal, d.h.* $\mathrm{ht}(A_0(p)^{ét-0}) = \dim A_0$*, d.h.* $A_0(p) = A_0(p)^{0-ét} \oplus A_0(p)^{ét-0}$.
2. *Es gilt:* $A_0[p](k^{\mathrm{sep}}) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\dim A_0}$.
3. *Die abelsche Varietät $A_0 \otimes_k k^{\mathrm{sep}}$ hat keine α_p-Untergruppen.*
4. *Die Verschiebung $V_{A_0/k} : A_0^{(p)} \to A_0$ ist eine separable Isogenie.*
5. *Der durch den relativen Frobeniusmorphismus $F_{A_0/k}$ induzierte k-Vektorraumhomomorphismus*

$$F^*_{A_0/k} : \mathrm{H}^1(A_0^{(p)}, \mathscr{O}_{A_0^{(p)}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(A_0, \mathscr{O}_{A_0})$$

ist injektiv (und damit bijektiv).

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen 1 bis 3 folgt sofort aus der Struktur endlicher flacher Gruppenschemata vom Rang p über einem algebraisch abgeschlossenen Körper (vgl. Proposition 1.2.9, Seite 15).
Für die Äquivalenz der ersten Aussage mit der vierten beachte man die Zerlegung (2.1) der Isogenie $[p]_{A_0} = V_{A_0/k} \circ F_{A_0/k} = h_2 \circ h_1 \circ F_{A_0/k}$. Da der Grad der Isogenie $[p]_{A_0}$ gleich $p^{2\dim A_0}$ ist, der des Frobeniusmorphismus $p^{\dim A_0}$ ist und die separable Isogenie h_2 den Grad $p^{\mathrm{rk}_p A_0}$ hat, ist der p-Rang von A_0 genau dann maximal, wenn $V_{A_0/k} = h_2$ ist, d.h. die Verschiebung eine separable Isogenie ist.
Für die Äquivalenz der ersten mit der fünften Aussage betrachte man die durch den absoluten Frobeniusmorphismus F_{A_0} induzierten p-linearen Homomorphismus $F^*_{A_0} : \mathrm{H}^1(A_0, \mathscr{O}_{A_0}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(A_0, \mathscr{O}_{A_0})$.
Nach [BLR] Chapter 8.4, Theorem 1 erhält man einen Isomorphismus $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Pic}^0_{A_0/k} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(A_0, \mathscr{O}_{A_0})$, und nach [Mum] Chapter III.15, Theorem 3 entspricht $F^*_{A_0}$ der p-Potenzierung[2] in $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Pic}^0_{A_0/k}$, und die Dimension des halbeinfachen Anteils von $\mathrm{H}^1(A_0, \mathscr{O}_{A_0})$ bezüglich $F^*_{A_0}$ ist gerade der p-Rang

[2] Diese wird auch als *Hasse-Witt-Abbildung* bezeichnet. Näheres hierzu findet sich in [Se1] Abschnitt 9.

von A_0. Daher ist die Maximalität des p-Ranges von A_0 äquivalent zu der Injektivität des p-linearen Homomorphismus $F^*_{A_0}$, und diese ist äquivalent zur Injektivität des linearen Homomorphismus $F^*_{A_0/k}$. □

Definition 2.0.6. Eine abelsche Varietät A_0/k, die die äquivalenten Bedingungen des Lemmas erfüllt, heißt *gewöhnliche abelsche Varietät.*
Eine abelsche Varietät A/K über einem lokalen Zahlkörper $K/\mathbb{Q}_p$ mit guter Reduktion hat *gewöhnliche Reduktion*, falls die Reduktion modulo dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_K$ des Néronmodells von A eine gewöhnliche abelsche Varietät über dem Restklassenkörper κ ist.
Im Abschnitt (1.4) wurde gezeigt, daß jede abelsche Varietät $A/\overline{\mathbb{Q}}_p$ mit guter Reduktion schon über einem lokalen Zahlkörper definiert ist. Dies erlaubt es einem, auch in diesem Fall gewöhnliche Reduktion zu definieren.

2.1. Der Funktor ρ ist volltreu

Die Proposition 30 in [De-We2] besagt, daß der Funktor ρ treu ist. In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß für abelsche Varietäten $A/\overline{\mathbb{Q}}_p$ mit gewöhnlicher Reduktion und Modell $\mathscr{A}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$ der ganzzahlige Funktor

$$\rho : \mathscr{B}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}} \longrightarrow \mathbf{Rep}_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\mathfrak{o})$$

volltreu ist, d.h. für Vektorbündel $\mathscr{E}$ und $\mathscr{E}'$ aus der Kategorie $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}}$ induziert der Funktor ρ Gruppenisomorphismen

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\mathscr{E}_0, \mathscr{E}'_0),$$

wobei mit 0 der Nullschnitt des abelschen Schemas $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}$ bezeichnet werde.

Sei $A/\overline{\mathbb{Q}}_p$ eine abelsche Varietät mit guter Reduktion und Modell $\mathscr{A}/\overline{\mathbb{Z}}_p$. Wie im Abschnitt (1.4) gezeigt, existiert dann eine abelsche Varietät A_K über einem lokalen Zahlkörper $K/\mathbb{Q}_p$ mit Néronmodell $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}_K}$, so daß $A_K \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}_p = A$ sowie $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}_K} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o} = \mathscr{A}$ ist. Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sei abkürzend $\mathfrak{o}_{(n)} := \mathfrak{o}_K/p^n\mathfrak{o}_K$ sowie $\mathfrak{o}_n := \mathfrak{o}/p^n\mathfrak{o}$, wobei wie schon zuvor $\mathfrak{o}$ der Ganzheitsring von $\mathbb{C}_p$ sei. Wie schon bei der Konstruktion des Funktors

ρ werde für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $\mathscr{A}_n := \mathscr{A} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \mathfrak{o}_n$ die Reduktion modulo p^n der Basiserweiterung mit dem Ring $\mathfrak{o}$ der ganzen Zahlen von $\mathbb{C}_p$ bezeichnet. Ferner sei $\mathscr{A}_{(n)} := \mathscr{A}_{\mathfrak{o}_K} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_{(n)}$ die Reduktion modulo p^n über dem Ganzheitsring des lokalen Körpers K. Da $\overline{\mathbb{Z}}_p$ flach über $\mathfrak{o}_K$ ist und für das maximale Ideal $\mathfrak{m}_K$ von $\mathfrak{o}_K$ gilt: $\overline{\mathbb{Z}}_p \neq \overline{\mathbb{Z}}_p \mathfrak{m}_K$, ist $\overline{\mathbb{Z}}_p$ treuflach über $\mathfrak{o}_K$. Nach [Bou] Chapitre II, §3.4, Proposition 5 ist dann auch $\mathfrak{o}_n = \overline{\mathbb{Z}}_p / p^n \overline{\mathbb{Z}}_p$ treuflach über $\mathfrak{o}_{(n)}$. Daher erhält man insbesondere für $n = 1$ durch flachen Basiswechsel einen flachen Morphismus

$$f : \mathscr{A}_1 \longrightarrow \mathscr{A}_{(1)}.$$

Ferner werde mit $\mathscr{A}_\kappa := \mathscr{A}_{\mathfrak{o}_K} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \kappa$ die Reduktion modulo dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_K$ von $\mathfrak{o}_K$ bezeichnet, wobei $\kappa := \mathfrak{o}_K / \mathfrak{m}_K$ der Restklassenkörper von $\mathfrak{o}_K$ sei.

Der ganzzahlige Funktor $\rho : \mathscr{B}_{\mathscr{A}_\mathfrak{o}} \to \mathbf{Rep}_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\mathfrak{o})$ induziert einen Homomorphismus von $\mathfrak{o}_1$-Moduln:

$$\varphi_1 : \operatorname{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_1).$$

Dieser bildet die durch eine kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln auf $\mathscr{A}_1$

$$[\mathscr{F}_1] \quad 0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1} \longrightarrow \mathscr{F}_1 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1} \longrightarrow 0$$

definierte Klasse $[\mathscr{F}_1] \in \operatorname{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1})$ auf die durch die exakte Sequenz von $\pi_1^{\text{ét}}(A,0)$-Moduln

$$[\mathscr{F}_{0_1}] \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{o}_1 \longrightarrow \mathscr{F}_{0_1} \longrightarrow \mathfrak{o}_1 \longrightarrow 0$$

definierte Klasse $[\mathscr{F}_{0_1}] \in \operatorname{Ext}^1_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_1)$ ab.
In dem Beweis des Theorems 1 (i) aus [De-We1] wird für Erweiterungen $[\mathscr{F}_1] \in \operatorname{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}) = \mathrm{H}^1(\mathscr{A}_1, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1})$ gezeigt, daß $p^* \mathscr{F}_1 \simeq \mathscr{O}^2_{\mathscr{A}_1}$ trivial ist, denn nach [BLR] Chapter 8.4, Theorem 1 erhält man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(\mathscr{A}_1, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}) \arrow[r, "p^*"] & \mathrm{H}^1(\mathscr{A}_1, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}) \\
\operatorname{Lie}\operatorname{Pic}^0_{\mathscr{A}_1/\mathfrak{o}_1} \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "\operatorname{Lie} p"'] & \operatorname{Lie}\operatorname{Pic}^0_{\mathscr{A}_1/\mathfrak{o}_1} \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd},$$

und die Abbildung $\mathrm{Lie}\, p$ ist die Multiplikation mit p in der $\mathfrak{o}_1$-Lie-Algebra $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Pic}^0_{\mathscr{A}_1/\mathfrak{o}_1}$, also die Nullabbildung.
Für Erweiterungen $[\mathscr{F}_{(1)}] \in \mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{(1)}}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_{(1)}})$ und $[\mathscr{F}_\kappa] \in \mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_\kappa}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_\kappa})$ folgt mit demselben Argument, daß die Vektorbündel $p^*\mathscr{F}_{(1)}$ und $p^*\mathscr{F}_\kappa$ trivial sind. Daher kann man analog zur Konstruktion des Funktors ρ (siehe (1.4), Seite 25) auf über $\mathfrak{o}_{(1)}$ bzw. über κ definierten Vektorbündeln, die durch Erweiterung mit trivialen Bündeln entstehen, eine Operation der étalen Fundamentalgruppe definieren.

Man betrachte zunächst Erweiterungen $[\mathscr{F}_{(1)}] \in \mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{(1)}}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_{(1)}})$. Da $A[p]$ ein endliches Gruppenschema ist, kann man ohne Einschränkung den Zahlkörper K, über dem A definiert ist, so groß wählen, daß sowohl $A[p](\overline{\mathbb{Q}}_p) = A[p](K)$ gilt als auch für den Restklassenkörper κ gilt: $\mathscr{A}_\kappa[p](\overline{\kappa}) = \mathscr{A}_\kappa[p](\kappa)$. Dann wird in Analogie zur Konstruktion des Funktors ρ eine Darstellung in folgender Weise definiert:

$$\rho_{\mathscr{F}_{(1)}} : TA \xrightarrow{kan} A[p](\overline{\mathbb{Q}}_p) \xrightarrow{T} \mathrm{Aut}_{\mathfrak{o}_{(1)}}\left(\Gamma(\mathscr{A}_{(1)}, p^*\mathscr{F}_{(1)})\right) \xrightarrow[0^*_{(1)}]{\text{via}} \mathrm{Aut}_{\mathfrak{o}_{(1)}}(\mathscr{F}_{0_{(1)}}),$$

wobei mit *kan* die kanonische Projektion und mit T die Operation der p-Torsionspunkte $A[p](\overline{\mathbb{Q}}_p) = A[p](K) = \mathscr{A}[p](\mathfrak{o}_K)$ durch Translation und mit $0_{(1)}$ der Nullschnitt von $\mathscr{A}_{(1)}$ bezeichnet werde. Auf $\mathfrak{o}_{(1)}$ operiere die Fundamentalgruppe trivial. Dann ist diese Darstellung mit der ursprünglichen Darstellung für Vektorbündel aus $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_\mathfrak{o}}$ verträglich. Zudem erhält man in Analogie zu φ_1 einen Homomorphismus von $\mathfrak{o}_{(1)}$-Moduln:

$$\varphi_{(1)} : \mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{(1)}}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_{(1)}}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\mathfrak{o}_{(1)}, \mathfrak{o}_{(1)}).$$

Da $\mathfrak{o}_1$ treuflach über $\mathfrak{o}_{(1)}$ ist, gilt das folgende Lemma:

Lemma 2.1.1. *Der Homomorphismus*

$$\mathrm{Ext}^1_{\pi_1^{\acute{e}t}(A,0)}(\mathfrak{o}_{(1)}, \mathfrak{o}_{(1)}) \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \mathfrak{o}_1 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\pi_1^{\acute{e}t}(A,0)}(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_1)$$

von $\mathfrak{o}_1$*-Moduln ist injektiv.*

Beweis. Sei

$$0 \longrightarrow \mathfrak{o}_{(1)} \longrightarrow \mathscr{F}_{0_{(1)}} \xrightarrow{g} \mathfrak{o}_{(1)} \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von $\pi_1^{\text{ét}}(A,0)$-Moduln, die nach Tensorieren mit $\mathfrak{o}_1$ trivial in $\operatorname{Ext}^1_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\mathfrak{o}_1,\mathfrak{o}_1)$ ist, d.h. es existiert eine $\pi_1^{\text{ét}}(A,0)$-äquivariante Spaltung von $g \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{o}_1}$. Da $\pi_1^{\text{ét}}(A,0)$ trivial auf $\mathfrak{o}_1$ operiert, ist dies gleichbedeutend damit, daß die von $g \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{o}_1}$ auf den Fixmoduln induzierte Abbildung

$$\tilde{g} \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{o}_1} : (\mathscr{F}_{0_{(1)}} \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \mathfrak{o}_1)^{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)} \longrightarrow \mathfrak{o}_1$$

surjektiv ist.

Zudem ist $(\mathscr{F}_{0_{(1)}} \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \mathfrak{o}_1)^{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)} = (\mathscr{F}_{0_{(1)}})^{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)} \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \mathfrak{o}_1$:
Für $\gamma \in \pi_1^{\text{ét}}(A,0)$ erhält man zunächst die exakte Sequenz von $\mathfrak{o}_{(1)}$-Moduln

$$0 \longrightarrow (\mathscr{F}_{0_{(1)}})^{\gamma} \longrightarrow \mathscr{F}_{0_{(1)}} \xrightarrow{1-\gamma} \mathscr{F}_{0_{(1)}}.$$

Da $\mathfrak{o}_1$ flach über $\mathfrak{o}_{(1)}$ ist, bleibt die Sequenz nach Tensorieren mit $\mathfrak{o}_1$ exakt, und daher gilt:

$$(\mathscr{F}_{0_{(1)}})^{\gamma} \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \mathfrak{o}_1 = (\mathscr{F}_{0_{(1)}} \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \mathfrak{o}_1)^{\gamma}.$$

Nach Konstruktion ist die Operation von $\pi_1^{\text{ét}}(A,0)$ auf $\mathscr{F}_{0_{(1)}}$ durch die Operation der p-Torsionspunkte $A[p](\overline{\mathbb{Q}}_p)$ definiert. Daher kann man den Fixmodul von $\mathscr{F}_{0_{(1)}}$ unter der Operation der étalen Fundamentalgruppe als endlichen Durchschnitt beschreiben:

$$(\mathscr{F}_{0_{(1)}})^{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)} = \bigcap_{\gamma \in A[p](\overline{\mathbb{Q}}_p)} (\mathscr{F}_{0_{(1)}})^{\gamma}.$$

Da Tensorieren mit $\mathfrak{o}_1$ wieder aufgrund der Flachheit endliche Durchschnitte respektiert, folgt schließlich das Gewünschte:

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}_{0_{(1)}} \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \mathfrak{o}_1)^{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)} &= \bigcap_{\gamma \in A[p](\overline{\mathbb{Q}}_p)} (\mathscr{F}_{0_{(1)}} \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \mathfrak{o}_1)^{\gamma} = \\ \bigcap_{\gamma \in A[p](\overline{\mathbb{Q}}_p)} (\mathscr{F}_{0_{(1)}})^{\gamma} \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \mathfrak{o}_1 &= (\mathscr{F}_{0_{(1)}})^{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)} \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \mathfrak{o}_1.\end{aligned}$$

Daher folgt aufgrund der Treuflachheit von $\mathfrak{o}_1$ über $\mathfrak{o}_{(1)}$, daß die von g induzierte Abbildung

$$\tilde{g} : (\mathscr{F}_{0_{(1)}})^{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)} \longrightarrow \mathfrak{o}_{(1)}$$

surjektiv ist. Da $\pi_1^{\text{ét}}(A,0)$ auch auf $\mathfrak{o}_{(1)}$ trivial operiert, folgt hieraus schließlich die Existenz einer $\pi_1^{\text{ét}}(A,0)$-äquivarianten Spaltung von g und damit die gewünschte Injektivität des $\mathfrak{o}_1$-Modulhomomorphismus. □

Nun betrachte man Erweiterungen $[\mathscr{F}_\kappa] \in \operatorname{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_\kappa}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_\kappa})$. Nach [EGA] IV_4 Proposition 18.3.2 ist der Funktor $B \mapsto B \otimes_{\mathfrak{o}_K} \kappa$ eine Kategorienäquivalenz der Kategorie endlicher, étaler $\mathfrak{o}_K$-Algebren mit der Kategorie endlicher, étaler κ-Algebren. Angewandt auf die étalen Komponenten der p-Teilungspunkte der Schemata $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}_K}$ und $\mathscr{A}_\kappa$ folgt hieraus, daß die Reduktionsabbildung

$$\mathscr{A}^{\text{ét}}_{\mathfrak{o}_K}[p] \longrightarrow \mathscr{A}^{\text{ét}}_\kappa[p]$$

surjektiv ist. Aufgrund der Struktur endlicher flacher Guppenschemata über einem algebraisch abgeschlossenen Körper positiver Charakteristik gilt: $\mathscr{A}_\kappa[p](\overline{\kappa}) = \mathscr{A}^{\text{ét}}_\kappa[p](\overline{\kappa})$, und man erhält das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}_{\mathfrak{o}_K}[p](\overline{\mathbb{Z}}_p) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathscr{A}_\kappa[p](\overline{\kappa}) \arrow[d, equal] \\
\mathscr{A}^{\text{ét}}_{\mathfrak{o}_K}[p](\overline{\mathbb{Z}}_p) \arrow[r, two heads] & \mathscr{A}^{\text{ét}}_\kappa[p](\overline{\kappa}).
\end{tikzcd}$$

Es existiert also eine surjektive Abbildung

$$TA \twoheadrightarrow A[p](\overline{\mathbb{Q}}_p) = \mathscr{A}[p](\overline{\mathbb{Z}}_p) \twoheadrightarrow \mathscr{A}_\kappa[p](\overline{\kappa}). \tag{2.2}$$

Daher erhält man aufgrund der Voraussetzung $\mathscr{A}_\kappa[p](\overline{\kappa}) = \mathscr{A}_\kappa[p](\kappa)$ auch hier eine Darstellung der Fundamentalgruppe:

$$\rho_{\mathscr{F}_\kappa} : TA \longrightarrow \mathscr{A}_\kappa[p](\overline{\kappa}) \xrightarrow{T} \operatorname{Aut}_\kappa\left(\Gamma(\mathscr{A}_\kappa, p^*\mathscr{F}_\kappa)\right) \xrightarrow[0_\kappa^*]{\text{via}} \operatorname{Aut}_\kappa(\mathscr{F}_{0_\kappa}),$$

wobei mit 0_κ der Nullschnitt von $\mathscr{A}_\kappa$ bezeichnet werde. Auf κ operiere $\pi_1^{\text{ét}}(A,0)$ trivial. Auch diese Definition ist mit der obigen verträglich, d.h. es ist $\rho_{(\mathscr{F}_{(1)}\otimes\kappa)} = \rho_{\mathscr{F}_{(1)}} \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \kappa$. Wie oben wird durch $\rho_{\mathscr{F}_\kappa}$ dann ein Homomorphismus von κ-Vektorräumen definiert:

$$\varphi_\kappa : \operatorname{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_\kappa}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_\kappa}) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\kappa,\kappa).$$

Für die beiden nachfolgenden Lemmata wird ein Resultat aus der Descenttheorie benötigt, an das hier erinnert sei. Eine Einführung in diese Theorie ist in [BLR] Chapter 6 zu finden.

Theorem 2.1.2 ([SGA1] Exposé VIII, Théorème 1.1; [BLR] Chapter 6.1, Theorem 4).
Sei $g : S' \to S$ ein treuflacher, quasikompakter Morphismus von Schemata. Dann ist der Funktor $\mathscr{F} \mapsto g^*\mathscr{F}$ eine Kategorienäquivalenz der Kategorie quasikohärenter $\mathscr{O}_S$-Moduln mit der Kategorie quasikohärenter $\mathscr{O}_{S'}$-Moduln mit Descentdatum.

Insbesondere erhält man für galoissche étale Überlagerungen die folgende Anwendung.

Proposition 2.1.3 ([FGA] 190-22, Exemple 1 (Weil); ein Beweis ist in [BLR] Chapter 6.2, Example B zu finden).
Sei S'/S eine galoissche étale Überlagerung mit Galoisgruppe Γ. Dann entspricht ein Descentdatum auf einer quasikohärenten $\mathscr{O}_{S'}$-Modulgarbe $\mathscr{F}'$ einer Darstellung von Γ auf $\mathscr{F}'$, die mit der Operation von Γ auf S' verträglich ist.

Zudem ist für das nachfolgende Lemma ein Basiswechselsatz für abelsche Schemata vonnöten, für den der Begriff der kohomologischen Flachheit in der Dimension 1 gebraucht wird.

Proposition 2.1.4 (vgl. [EGA] III_2 Corollaire 7.8.9). *Sei S lokal noethersch und $\pi : X \to S$ ein eigentlicher, flacher Morphismus mit geometrisch integren Fasern. Dann existiert ein bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmter kohärenter $\mathscr{O}_S$-Modul $\mathscr{Q}^1$ mit folgender Eigenschaft:*
Für jeden quasikohärenten $\mathscr{O}_S$-Modul $\mathscr{M}$ hat man einen in $\mathscr{M}$ funktoriellen Isomorphismus

$$\mathrm{R}^1\,\pi_*\pi^*\mathscr{M} \simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{Q}^1, \mathscr{M}).$$

Definition 2.1.5. Ein eigentlicher, flacher Morphismus $\pi : X \to S$ mit geometrisch integren Fasern und lokal noetherschem Schema S heißt *kohomologisch flach in der Dimension* 1, wenn der $\mathscr{O}_S$-Modul $\mathscr{Q}^1$ aus der Proposition lokal frei ist.

Proposition 2.1.6. *Sei S lokal noethersch und $\pi : X \to S$ ein abelsches Schema. Dann ist π kohomologisch flach in der Dimension 1, und daher ist $\mathrm{R}^1\,\pi_*\mathscr{O}_X$ lokal frei und kommutiert mit beliebigem Basiswechsel.*

Beweisskizze (nach dem zweiten Teil der Vorlesung [Tam2]).
Es sei $\mathscr{Q}^1$ der kohärente $\mathscr{O}_S$-Modul aus der obigen Proposition. Man betrachte den dualen Funktor $\widehat{X}$ sowie den relativen Picardfunktor $\mathrm{Pic}_{X/S}$ (näheres hierzu findet sich im Abschnitt 3.2.1 auf Seite 55). Da die Inklusion $\widehat{X} \hookrightarrow \mathrm{Pic}_{X/S}$ durch eine offene Immersion darstellbar ist, erhält man eine Isomorphie der Gruppenfunktoren $\mathrm{Lie}(\widehat{X}) \simeq \mathrm{Lie}(\mathrm{Pic}_{X/S})$. Zudem kann man zeigen, daß der S-Gruppenfunktor $\mathrm{Lie}(\mathrm{Pic}_{X/S})$ durch den linearen Faserraum $\mathbb{V}(\mathscr{Q}^1)$ darstellbar ist. Da $\widehat{X}/S$ formal glatt ist, gilt dies auch für $\mathrm{Lie}(\widehat{X})$, also auch für $\mathbb{V}(\mathscr{Q}^1)/S$. Daher ist $\mathscr{Q}^1$ lokal frei. Die Vertauschbarkeit mit beliebigem Basiswechsel folgt nach allgemeiner Basiswechseltheorie. □

Damit läßt sich nun das folgende Lemma für abelsche Varietäten mit gewöhnlicher Reduktion beweisen:

Lemma 2.1.7. *Sei $A/\overline{\mathbb{Q}}_p$ eine abelsche Varietät mit gewöhnlicher Reduktion und Modell $\mathscr{A}/\overline{\mathbb{Z}}_p$. Dann ist der durch ρ induzierte Homomorphismus*

$$\varphi : \mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\pi_1^{ét}(A,0)}(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_1)$$

injektiv.

Beweis. Durch flachen Basiswechsel erhält man die Isomorphie:

$$\mathrm{H}^1(\mathscr{A}_{(1)}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_{(1)}}) \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \mathfrak{o}_1 \simeq \mathrm{H}^1(\mathscr{A}_1, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}),$$

und wegen $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{(1)}}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_{(1)}}) \simeq \mathrm{H}^1(\mathscr{A}_{(1)}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_{(1)}})$ sowie $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}) \simeq \mathrm{H}^1(\mathscr{A}_1, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1})$ folgt:

$$\mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{(1)}}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_{(1)}}) \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \mathfrak{o}_1 \simeq \mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}).$$

Da $\mathfrak{o}_1$ treuflach über $\mathfrak{o}_{(1)}$ ist, folgt nach Lemma 2.1.1 über $\mathfrak{o}_{(1)}$, daß die folgende Abbildung injektiv ist:

$$\mathrm{Ext}^1_{\pi_1(A,0)}(\mathfrak{o}_{(1)}, \mathfrak{o}_{(1)}) \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \mathfrak{o}_1 \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\pi_1(A,0)}(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_1).$$

Daher genügt es, wieder aufgrund der Flachheit, die Injektivität der $\mathfrak{o}_{(1)}$-linearen Abbildung

$$\varphi_{(1)} : \mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{(1)}}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_{(1)}}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\pi_1^{ét}(A,0)}(\mathfrak{o}_{(1)}, \mathfrak{o}_{(1)})$$

zu zeigen. Die beiden $\mathfrak{o}_{(1)}$-Moduln aus der Abbildung $\varphi_{(1)}$ sind nach [EGA] III_1 Corollaire 3.2.3 endlich erzeugt, da der Ganzheitsring $\mathfrak{o}_K$ noethersch ist. Der Modul auf der linken Seite ist nach Proposition 2.1.6 ein freier $\mathfrak{o}_{(1)}$-Modul, und es gilt ebenfalls nach Proposition 2.1.6:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{(1)}}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_{(1)}}) \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \kappa &\simeq \mathrm{H}^1(\mathscr{A}_{(1)}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_{(1)}}) \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \kappa \\ \simeq \mathrm{H}^1(\mathscr{A}_\kappa, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_\kappa}) &\simeq \mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_\kappa}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_\kappa}). \end{aligned}$$

Für den freien $\mathfrak{o}_{(1)}$-Modul auf der rechten Seite erhält man:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\mathfrak{o}_{(1)}, \mathfrak{o}_{(1)}) \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \kappa &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_pA, \mathfrak{o}_{(1)}) \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \kappa \\ \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p^{2\dim A}, \mathfrak{o}_{(1)}) \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \kappa &\simeq (\mathfrak{o}_{(1)})^{2\dim A} \otimes_{\mathfrak{o}_{(1)}} \kappa \\ \simeq \kappa^{2\dim A} &\simeq \mathrm{Ext}^1_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\kappa, \kappa). \end{aligned}$$

Daher genügt es nach dem Lemma von Nayakama (siehe [Bou] Chapitre II, §3.2, Proposition 6), die Injektivität der κ-linearen Abbildung

$$\varphi_\kappa : \mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_\kappa}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_\kappa}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\kappa, \kappa)$$

zu zeigen. Sei also $[\mathscr{F}_\kappa] \in \mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_\kappa}, \mathscr{O}_{\mathscr{A}_\kappa})$ eine Erweiterung, die durch φ_κ auf die triviale Erweiterung in $\mathrm{Ext}^1_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\kappa, \kappa)$ abgebildet wird, d.h. die Fundamentalgruppe operiert trivial auf dem κ-Vektorraum $\mathscr{F}_{0_\kappa} \simeq \kappa^2$.
Betrachte nun das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A}_\kappa \arrow[r, "F_{\mathscr{A}_\kappa/\kappa}"] \arrow[d, "{[p]}"'] & \mathscr{A}_\kappa^{(p)} \arrow[dl, "V_{\mathscr{A}_\kappa/\kappa}"] \\ \mathscr{A}_\kappa & \end{tikzcd}$$

Da nach Voraussetzung $\mathscr{A}_\kappa$ eine gewöhnliche abelsche Varietät ist, folgt nach Lemma 2.0.5, daß $F^*_{\mathscr{A}_\kappa/\kappa}$ injektiv ist. Also ist aufgrund der Trivialität von $p^*\mathscr{F}_\kappa = (V_{\mathscr{A}_\kappa/\kappa} \circ F_{\mathscr{A}_\kappa/\kappa})^*\mathscr{F}_\kappa = F^*_{\mathscr{A}_\kappa/\kappa}(V^*_{\mathscr{A}_\kappa/\kappa}\mathscr{F}_\kappa)$ das Vektorbündel $V^*_{\mathscr{A}_\kappa/\kappa}\mathscr{F}_\kappa$ auf $\mathscr{A}_\kappa^{(p)}$ trivial. Ebenfalls nach Lemma 2.0.5 folgt, daß die Verschiebung $V_{\mathscr{A}_\kappa/\kappa}$ eine separable Isogenie, also insbesondere eine galoissche étale Überlagerung mit Galoisgruppe $\ker(V_{\mathscr{A}_\kappa/\kappa})$ ist.
Da $[\mathscr{F}_\kappa]$ durch φ_κ nach Voraussetzung auf die triviale Erweiterung in $\mathrm{Ext}^1_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\kappa, \kappa)$ abgebildet wird, operiert nach Konstruktion der Darstellung

$\rho_{\mathscr{F}_\kappa}$ aufgrund der Surjektivität der Abbildung (2.2) die Gruppe $\mathscr{A}_\kappa[p](\overline{\kappa})$ durch Translation trivial auf $\Gamma(\mathscr{A}_\kappa, p^*\mathscr{F}_\kappa)$. Weil der Frobeniusmorphismus rein inseparabel ist, folgt hieraus, daß $\ker(V_{\mathscr{A}_\kappa/\kappa})(\overline{\kappa})$ durch Translation trivial auf $\Gamma(\mathscr{A}_\kappa^{(p)}, V^*_{\mathscr{A}_\kappa/\kappa}\mathscr{F}_\kappa)$ operiert. Da nach Voraussetzung $\mathscr{A}_\kappa^{(p)}[p](\overline{\kappa}) = \mathscr{A}_\kappa^{(p)}[p](\kappa)$ gilt, operiert die Galoisgruppe $\ker(V_{\mathscr{A}_\kappa/\kappa})$ trivial auf dem trivialen Vektorbündel $V^*_{\mathscr{A}_\kappa/\kappa}\mathscr{F}_\kappa$. Durch Galoisdescent (Proposition 2.1.3) folgt dann, daß $\mathscr{F}_\kappa$ trivial auf $\mathscr{A}_\kappa$ ist, woraus die Injektivität von φ_κ folgt. Damit ist das Lemma bewiesen.

□

Die folgenden beiden Lemmata zeigen hinreichende Bedingungen dafür, daß der Funktor ρ volltreu ist.

Lemma 2.1.8. *Der Funktor*

$$\rho : \mathscr{B}_{\mathscr{A}_\mathfrak{o}} \longrightarrow \boldsymbol{Rep}_{\pi_1^{ét}(A,0)}(\mathfrak{o})$$

ist volltreu, falls für alle Vektorbündel $\mathscr{E}$ aus $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_\mathfrak{o}}$ mit trivialer Reduktion $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E} \otimes_\mathfrak{o} \mathfrak{o}_1 \simeq \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}^{\operatorname{rk}\mathscr{E}}$ gilt:

$$\operatorname{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_\mathfrak{o}}, \mathscr{E}) \xrightarrow[\text{via } \rho]{\sim} \operatorname{Hom}_{\pi_1^{ét}(A,0)}(\mathfrak{o}, \mathscr{E}_0).$$

Beweis. Um zu zeigen, daß ρ volltreu ist, genügt es zunächst zu zeigen, daß für alle $\mathscr{E}$ aus $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_\mathfrak{o}}$ der Homomorphismus

$$\operatorname{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_\mathfrak{o}}, \mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\pi_1^{ét}(A,0)}(\mathfrak{o}, \mathscr{E}_0) \tag{2.3}$$

ein Isomorphismus ist, denn für ein Vektorbündel $\mathscr{E}'$ aus $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_\mathfrak{o}}$ ist $\operatorname{Hom}(\mathscr{E}', \mathscr{E})$ kanonisch isomorph zu $\operatorname{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_\mathfrak{o}}, \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{A}_\mathfrak{o}}} \mathscr{E}'^\vee)$, und nach Theorem 1.4.3 ist die Kategorie $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_\mathfrak{o}}$ abgeschlossen unter Dualisierung und Tensorproduktbildung.

Sei nun $\mathscr{E}$ aus $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_\mathfrak{o}}$. Nach Konstruktion existiert eine natürliche Zahl $N := N(1) \geq 1$ mit $(N^*\mathscr{E})_1 \simeq \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}^{\operatorname{rk}\mathscr{E}}$. Für die abelsche Varietät $A/\overline{\mathbb{Q}}_p$ ist die N-Multiplikation

$$N_A : A_{\text{oben}} := A \longrightarrow A, \quad N_A(0_{\text{oben}}) = 0$$

eine separable Isogenie, also eine galoissche étale Überlagerung mit Galoisgruppe $A[N](\overline{\mathbb{Q}}_p)$.
Auf $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}$ hingegen ist die Isogenie

$$N_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}} : \mathscr{A}_{\mathfrak{o},\mathrm{oben}} := \mathscr{A}_{\mathfrak{o}} \longrightarrow \mathscr{A}_{\mathfrak{o}}, \quad N(0_{\mathrm{oben}}) = 0$$

im allgemeinen nicht étale[3], jedoch stets eine fppf-Überlagerung, und man hat die folgende exakte Sequenz von fppf-Garben:

$$0 \longrightarrow \mathscr{A}_{\mathfrak{o},\mathrm{oben}}[N] \longrightarrow \mathscr{A}_{\mathfrak{o},\mathrm{oben}} \xrightarrow{N} \mathscr{A}_{\mathfrak{o}} \longrightarrow 0.$$

Daher erhält man einen Isomorphismus von $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}$-Schemata:

$$\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}[N] \times_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}} \mathscr{A}_{\mathfrak{o},\mathrm{oben}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}_{\mathfrak{o},\mathrm{oben}} \times_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}} \mathscr{A}_{\mathfrak{o},\mathrm{oben}}.$$

In Analogie zum Galoisdescent kann man zeigen, daß durch diese Operation des Gruppenschemas $\mathscr{A}_{\mathfrak{o},\mathrm{oben}}[N]$ auf $\mathscr{A}_{\mathfrak{o},\mathrm{oben}}$ ein Descentdatum definiert wird,[4] so daß man insbesondere den folgenden Gruppenisomorphimus erhält:

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}}, \mathscr{E}) \underset{\sim}{\xrightarrow{N^*}} [\mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o},\mathrm{oben}}}, N^*\mathscr{E})]^{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}[N]}.$$

Durch den Funktor ρ werden Morphismen aus $[\mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o},\mathrm{oben}}}, N^*\mathscr{E})]^{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}[N]}$ auf Morphismen aus $[\mathrm{Hom}_{\pi_1^{\text{ét}}(A_{\mathrm{oben}},0_{\mathrm{oben}})}(\mathfrak{o}, \mathscr{E}_0)]^{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}[N](\mathfrak{o})}$ abgebildet. Wegen $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}[N](\mathfrak{o}) = \mathscr{A}[N](\overline{\mathbb{Z}}_p) = A[N](\overline{\mathbb{Q}}_p)$ und $\pi_1^{\text{ét}}(A_{\mathrm{oben}}, 0_{\mathrm{oben}})/A[N](\overline{\mathbb{Q}}_p) \simeq \pi_1^{\text{ét}}(A, 0)$ ist die Gruppe $[\mathrm{Hom}_{\pi_1^{\text{ét}}(A_{\mathrm{oben}},0_{\mathrm{oben}})}(\mathfrak{o}, \mathscr{E}_0)]^{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}[N](\mathfrak{o})}$ isomorph zu $\mathrm{Hom}_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\mathfrak{o}, \mathscr{E}_0)$.
Daher folgt aus der Voraussetzung

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}},\mathrm{oben}}, N^*\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\pi_1^{\text{ét}}(A_{\mathrm{oben}},0_{\mathrm{oben}})}(\mathfrak{o}, N^*\mathscr{E}_{0_{\mathrm{oben}}})$$

die gewünschte Isomorphie:

$$\begin{tikzcd}
{[\mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}},\mathrm{oben}}, N^*\mathscr{E})]^{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}[N]}} \arrow[r, "\sim"] & {[\mathrm{Hom}_{\pi_1^{\text{ét}}(A_{\mathrm{oben}},0_{\mathrm{oben}})}(\mathfrak{o}, \mathscr{E}_0)]^{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}[N](\mathfrak{o})}} \\
\mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}}, \mathscr{E}) \arrow[u, "\wr"', "\text{fppf-Descent}"] & \mathrm{Hom}_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\mathfrak{o}, \mathscr{E}_0) \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

[3] Sie ist genau dann étale, wenn p nicht N teilt.

[4] Dies ist ein Spezialfall eines Descents durch endliche, treuflache Morphismen, wie er etwa in [FGA] 190-22, Abschnitt B.3 dargestellt ist. Um dies zu beweisen, kann man den in [BLR] Chapter 6.2, Example B für Galoisdescent aufgeführten Beweis auf diesen Fall übertragen.

Damit das Lemma bewiesen. $\square$

Das folgende Lemma ermöglicht es einem, per Induktion zu zeigen, daß der Funktor im Falle gewöhnlicher Reduktion volltreu ist.

Lemma 2.1.9. *Der Funktor*

$$\rho : \mathscr{B}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}} \longrightarrow \boldsymbol{Rep}_{\pi_1^{\acute{e}t}(A,0)}(\mathfrak{o})$$

ist volltreu, falls für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *und alle Vektorbündel* $\mathscr{E}$ *aus* $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}}$ *mit* $\mathscr{E}_1 \simeq \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}^{\operatorname{rk} E}$ *gilt:*

$$\operatorname{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}, \mathscr{E}_n) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\pi_1^{\acute{e}t}(A,0)}(\mathfrak{o}_n, \mathscr{E}_{0_n}).$$

Dabei wird der obige Gruppenhomomorphismus durch ρ_n *induziert.*

Beweis. Es gelte für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$:

$$\operatorname{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}, \mathscr{E}_n) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\pi_1^{\acute{e}t}(A,0)}(\mathfrak{o}_n, \mathscr{E}_{0_n}).$$

Da der Strukturmorphismus $\lambda : \mathscr{A}_{\mathfrak{o}} \to \operatorname{Spec}(\mathfrak{o})$ von endlichem Typ über $\mathfrak{o}$ ist, folgt nach [Ul] Proposition 1.6, daß die Strukturgarbe $\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}}$ kohärent ist. Daher ist auch der lokal freie $\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}}$-Modul $\mathscr{E}$ kohärent. Nach [Ul] Lemmata 3.2 und 3.4 ist $\mathscr{E}$ pseudokohärent relativ zum Strukturmorphismus λ, d.h. die Voraussetzungen des zweiten GAGA-Theorems für nicht noethersche Ringe [Ul] Theorem 6.5 sind erfüllt. Daraus folgt:

$$\operatorname{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}}, \mathscr{E}) \simeq \operatorname{Hom}(\varprojlim_n \mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}, \varprojlim_n \mathscr{E}_n).$$

Aus [Ul] Proposition 5.5 folgt zudem:

$$\operatorname{Hom}(\varprojlim_n \mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}, \varprojlim_n \mathscr{E}_n) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \operatorname{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}, \mathscr{E}_n).$$

Insgesamt erhält man also aus der obigen Voraussetzung:

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim_n \operatorname{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}, \mathscr{E}_n) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, dash, "\wr"'] & \varprojlim_n \operatorname{Hom}_{\pi_1^{\acute{e}t}(A,0)}(\mathfrak{o}_n, \mathscr{E}_{0_n}) \arrow[d, dash, "\wr"] \\
\operatorname{Hom}(\varprojlim_n \mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}, \varprojlim_n \mathscr{E}_n) \arrow[d, dash, "\wr"'] & \operatorname{Hom}_{\pi_1^{\acute{e}t}(A,0)}(\varprojlim_n \mathfrak{o}_n, \varprojlim_n \mathscr{E}_{0_n}) \arrow[d, dash, "\wr"] \\
\operatorname{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}}, \mathscr{E}) & \operatorname{Hom}_{\pi_1^{\acute{e}t}(A,0)}(\mathfrak{o}, \mathscr{E}_0)
\end{tikzcd}$$

Nach Lemma 2.1.8 folgt dann, daß ρ volltreu ist. $\square$

Mit Hilfe der vorangegangenen Lemmata kann nun das folgende Theorem bewiesen werden:

Theorem 2.1.10. *Sei $A/\overline{\mathbb{Q}}_p$ eine abelsche Varietät mit gewöhnlicher Reduktion. Dann ist der Funktor*

$$\rho : \mathscr{B}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}} \longrightarrow \boldsymbol{Rep}_{\pi_1^{ét}(A,0)}(\mathfrak{o})$$

volltreu.

Beweis. Nach Lemma 2.1.9 genügt es, induktiv für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und alle Vektorbündel $\mathscr{E}$ aus $\mathscr{B}_{\mathscr{A}_{\mathfrak{o}}}$ mit $\mathscr{E}_1 \simeq \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}^{\mathrm{rk}\,\mathscr{E}}$ zu zeigen:

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}, \mathscr{E}_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\pi_1^{ét}(A,0)}(\mathfrak{o}_n, \mathscr{E}_{0_n}).$$

Sei also $\mathscr{E}$ ein solches Vektorbündel. Da $\mathscr{E}_1 \simeq \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}^{\mathrm{rk}\,\mathscr{E}}$ trivial ist, ist nach Konstruktion die durch ρ_1 induzierte Operation von $\pi_1^{ét}(A,0)$ auf $\mathscr{E}_{0_1}$ trivial (vgl. Bemerkung auf Seite 26). Daher folgt der Induktionsanfang:

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}, \mathscr{E}_1) \simeq \mathrm{Hom}(\mathfrak{o}_1, \mathscr{E}_{0_1}) = \mathrm{Hom}_{\pi_1^{ét}(A,0)}(\mathfrak{o}_1, \mathscr{E}_{0_1}).$$

Sei also $n > 1$. Betrachte die kanonische, durch Reduktion modulo p entstehende abgeschlossene Immersion

$$\iota_n : \mathscr{A}_{n-1} \hookrightarrow \mathscr{A}_n.$$

Wegen $\mathfrak{o}_1 \simeq p^{n-1}\mathfrak{o}/p^n\mathfrak{o}$ gilt $\ker(\iota_n^{\#}) \simeq \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}$, und man erhält die folgende exakte Sequenz von $\mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}$-Moduln:

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathscr{A}_1} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathscr{A}_n} \longrightarrow \iota_{n*}\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{n-1}} \longrightarrow 0.$$

Tensorieren mit $\mathscr{E}$ liefert die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}_1 \longrightarrow \mathscr{E}_n \longrightarrow \iota_{n*}\mathscr{E}_{n-1} \longrightarrow 0, \tag{2.4}$$

und nach Anwendung des Funktors $\mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}, -)$ erhält man die folgende lange exakte Kohomologiesequenz:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}, \mathscr{E}_1) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}, \mathscr{E}_n) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}, \iota_{n*}\mathscr{E}_{n-1}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}, \mathscr{E}_1) \\
& \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}, \mathscr{E}_1) \arrow[u, "\wr"'] & & \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{n-1}}, \mathscr{E}_{n-1}) \arrow[u, equal] & \mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}, \mathscr{E}_1), \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

denn wegen $\mathfrak{o}_1 \simeq p^{n-1}\mathfrak{o}/p^n\mathfrak{o}$ ist die Gruppe $\mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}, \mathscr{E}_1) = \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}, \mathscr{E}_1) \otimes_{\mathfrak{o}_1} p^{n-1}\mathfrak{o}/p^n\mathfrak{o}$ isomorph zu $\mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}, \mathscr{E}_1)$.

Aus der exakten Sequenz 2.4 erhält man zunächst eine exakte Sequenz von $\mathfrak{o}_n$-Moduln:

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}_{0_1} \longrightarrow \mathscr{E}_{0_n} \longrightarrow (\iota_{n*}\mathscr{E}_{n-1})_{0_n} \longrightarrow 0. \tag{2.5}$$

Als $\mathfrak{o}_1$-Modul trägt $\mathscr{E}_{0_1}$ die Struktur eines $\pi_1^{\text{ét}}(A,0)$-Moduls. Aufgrund der Verträglichkeit der Darstellungen $\rho_{\mathscr{E},n}$ mit den kanonischen Projektionen ([De-We1] Lemma 1) kann man den $\mathfrak{o}_n$-Modul $\mathscr{E}_{0_1}$ mit der Struktur eines $\pi_1^{\text{ét}}(A,0)$-Moduls versehen, so daß die Sequenz 2.5 eine exakte Sequenz von $\pi_1^{\text{ét}}(A,0)$-Moduln ist. Nach Anwendung des Funktors $\mathrm{Hom}_{\pi_1^{\text{ét}}(A,0)}(\mathfrak{o}_n, -)$ ergibt sich die lange exakte Kohomologiesequenz von $\pi_1^{\text{ét}}(A,0)$-Moduln:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\pi_1}(\mathfrak{o}_n, \mathscr{E}_{0_1}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\pi_1}(\mathfrak{o}_n, \mathscr{E}_{0_n}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\pi_1}(\mathfrak{o}_n, (\iota_{n*}\mathscr{E}_{n-1})_{0_n}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\pi_1}(\mathfrak{o}_n, \mathscr{E}_{0_1}) \\
& \mathrm{Hom}_{\pi_1}(\mathfrak{o}_1, \mathscr{E}_{0_1}) \arrow[u, "\wr"'] & & \mathrm{Hom}_{\pi_1}(\mathfrak{o}_{n-1}, \mathscr{E}_{0_{n-1}}) \arrow[u, equal] & \mathrm{Ext}^1_{\pi_1}(\mathfrak{o}_1, \mathscr{E}_{0_1}), \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

wobei π_1 abkürzend für die étale Fundamentalgruppe $\pi_1^{\text{ét}}(A,0)$ stehe.

Insgesamt induziert ρ also das folgende Diagramm mit exakten Zeilen, das aufgrund der Funktorialität von ρ kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}, \mathscr{E}_1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}, \mathscr{E}_n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_{n-1}}, \mathscr{E}_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_{\mathscr{A}_1}, \mathscr{E}_1) \arrow[d, "\varphi"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\pi_1}(\mathfrak{o}_1, \mathscr{E}_{0_1}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\pi_1}(\mathfrak{o}_n, \mathscr{E}_{0_n}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\pi_1}(\mathfrak{o}_{n-1}, \mathscr{E}_{0_{n-1}}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\pi_1}(\mathfrak{o}_1, \mathscr{E}_{0_1}),
\end{tikzcd}$$

Der erste der senkrechten Pfeile ist nach Induktionsanfang und der dritte nach Induktionsvoraussetzung ein Isomorphismus.

Damit folgt die Injektivität des zweiten Pfeils. Um auch die Surjektivität zu erhalten, genügt es nach dem Fünferlemma, die Injektivität des Homomorphismus φ zu zeigen. Da nach Voraussetzung A gewöhnliche Reduktion hat, folgt diese direkt aus dem Lemma 2.1.7. $\square$

2.2. Kanonische Liftung abelscher Varietäten

Sei nun A_0/κ eine gewöhnliche abelsche Varietät, d.h. $A_0(p) = A_0(p)^{0-\text{ét}} \oplus A_0(p)^{\text{ét}-0}$. Nach [EGA] IV_4 Proposition 18.3.2 ist der Funktor

$$B \mapsto B \otimes_{\mathfrak{o}_K} \kappa$$

eine Kategorienäquivalenz der Kategorie endlicher, étaler $\mathfrak{o}_K$-Algebren mit der Kategorie endlicher, étaler κ-Algebren. Daher kann man die étale p-Barsotti-Tate-Gruppe $A_0(p)^{\text{ét}-0}$ zu einer étalen p-Barsotti-Tate-Gruppe $A_0(p)^{\text{ét}-0}_{\mathfrak{o}_K}$ über dem Ring der ganzen Zahlen $\mathfrak{o}_K$ von K liften, zudem ist das Cartierdual dieser p-Barsotti-Tate-Gruppe zusammenhängend. Durch Dualität kann man die zusammenhängende p-Barsotti-Tate-Gruppe $A_0(p)^{0-\text{ét}}$ zu einer zusammenhängenden p-Barsotti-Tate-Gruppe $A_0(p)^{0-\text{ét}}_{\mathfrak{o}_K}$ über $\mathfrak{o}_K$ liften, deren Cartierdual étale ist. Daher kann man $A_0(p)$ insgesamt zu einer p-Barsotti-Tate-Gruppe $A_0(p)^{\text{ét}-0}_{\mathfrak{o}_K} \oplus A_0(p)^{0-\text{ét}}_{\mathfrak{o}_K}$ über $\mathfrak{o}_K$ liften.

Das folgende Theorem von Serre und Tate zeigt, daß man die gewöhnliche abelsche Varietät A_0/κ zu einem abelschen Schema $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}_K}/\mathfrak{o}_K$ liften kann, so daß $\mathscr{A}(p) = A_0(p)^{\text{ét}-0}_{\mathfrak{o}_K} \oplus A_0(p)^{0-\text{ét}}_{\mathfrak{o}_K}$ die zu $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}_K}$ assoziierte p-Barsotti-Tate-Gruppe ist.

Theorem 2.2.1 (Serre-Tate, siehe [Se3] Théorème 4 oder [LST] Abschnitt 6 (ii); ein Beweis von Drinfeld ist in [Ka] Theorem 1.2.1 zu finden).
Der Funktor

$$\mathscr{A}_{\mathfrak{o}_K} \mapsto (\mathscr{A} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \kappa, \mathscr{A}(p))$$

ist eine Äquivalenz der Kategorie der abelschen Schemata über $\mathfrak{o}_K$ zu der Kategorie der Paare, bestehend aus einer abelschen Varietät A_0/κ über κ und einer Liftung der assoziierten p-Barsotti-Tate-Gruppe $A_0(p)$ zu einer p-Barsotti-Tate-Gruppe über $\mathfrak{o}_K$.
Insbesondere ist das folgende Diagramm cartesisch (vgl. [Co] Theorem 3.3):

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_K}(\mathscr{A}, \mathscr{A}') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_K}(\mathscr{A}(p), \mathscr{A}'(p)) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_\kappa(\mathscr{A} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \kappa, \mathscr{A}' \otimes_{\mathfrak{o}_K} \kappa) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\kappa\Big((\mathscr{A} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \kappa)(p), (\mathscr{A}' \otimes_{\mathfrak{o}_K} \kappa)(p)\Big)
\end{tikzcd}$$

Wendet man das obige Theorem nun auf das eingangs konstruierte Paar $(A_0, A_0(p)^{\text{ét}-0}_{\mathfrak{o}_K} \oplus A_0(p)^{0-\text{ét}}_{\mathfrak{o}_K})$ an, so erhält man also eine Liftung $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}_K}/\mathfrak{o}$ von A_0/κ mit spaltender zusammenhängend-étaler Sequenz, d.h.

$$\mathscr{A}(p) = A_0(p)^0_{\mathfrak{o}_K} \oplus A_0(p)^{\text{ét}}_{\mathfrak{o}_K} = \mathscr{A}(p)^0 \oplus \mathscr{A}(p)^{\text{ét}}.$$

Eine solche Liftung einer gewöhnlichen abelschen Varietät A_0/κ wird als *kanonische Liftung* oder *Serre-Tate-Liftung* bezeichnet. Eine Ausführung der obigen Resultate ist auch in [Car] Abschnitt 2.4 zu finden.

Sei nun A_K/K die generische Faser der kanonischen Liftung $\mathscr{A}_{\mathfrak{o}_K}/\mathfrak{o}_K$ von A_0/κ. Aufgrund der Eigenschaften endlicher flacher Gruppenschemata über einem separabel abgeschlossenen Körper erhält man für den p-Tatemodul T_pA nun die folgende Struktur:

$$\begin{aligned} T_pA &= T\mathscr{A}(p) = T\mathscr{A}(p)^0 \oplus T\mathscr{A}(p)^{\text{ét}} \simeq (\varprojlim_n \mu_{p^n})^{\dim A} \oplus (\varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{\dim A} \\ &= (\mathbb{Z}_p(1))^{\dim A} \oplus (\mathbb{Z}_p)^{\dim A}. \end{aligned}$$

Nach der Proposition 1.2.12 ist diese Spaltung Galois-äquivariant, und per definitionem ist $\mathbb{Z}_p(1) := \varprojlim_n \mu_{p^n}$.

Bemerkung. Aus der Hodge-Tate-Zerlegung ([Ta2] Corollary 2, Seite 180) folgt für die erste étale Kohomologiegruppe

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{C}_p \simeq \mathbb{C}_p(-1)^{\dim A} \oplus \mathbb{C}_p^{\dim A}.$$

Nach Korollar 1.3.9 gilt $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_pA, \mathbb{Z}_p)$. Damit erhält man aus der obigen Galois-äquivarianten Zerlegung des p-Tatemoduls für abelsche Varietäten A_K/K, die durch kanonische Liftung entstehen, die folgende ganzzahlige Galois-äquivariante Zerlegung der ersten étalen Kohomologiegruppe:

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p) \simeq \mathbb{Z}_p(-1)^{\dim A} \oplus \mathbb{Z}_p^{\dim A}.$$

Proposition 2.2.2. *Abelsche Varietäten A_K/K, die durch kanonische Liftung einer gewöhnlichen abelschen Varietät entstehen, sind CM-abelsche Varietäten*[5].

[5] CM-abelsche Varietäten werden näher im Kapitel 3, ab Seite 53 untersucht.

Beweis. Diese Proposition folgt aus dem Korollar A.2.3 in [Se2], das mit einer Folgerung aus TATEs „Main Theorem“ aus [Ta1] bewiesen wird. □

Bei abelschen Varietäten A_K/K mit gewöhnlicher Reduktion ist die obige Zerlegung des p-Tatemoduls im allgemeinen falsch, d.h. die zusammenhängend-étale Sequenz der dem Modell $\mathscr{A}$ zugeordneten p-Barsotti-Tate-Gruppe $\mathscr{A}(p)$ besitzt im allgemeinen keine Spaltung (für den Fall elliptischer Kurven ist hierzu Näheres im zweiten Abschnitt aus [Nak] zu finden).

2.2.1 Anwendung auf Darstellungen

Sei nun A_K/K eine abelsche Varietät, die durch die kanonische Liftung einer gewöhnlichen abelschen Varietät A_0/κ entsteht, d.h. der p-Tatemodul hat die Struktur $(\mathbb{Z}_p(1))^{\dim A} \oplus (\mathbb{Z}_p)^{\dim A}$.

Sei $G_K = G(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ die absolute Galoisgruppe von K und $\chi : G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$ ein stetiger Charakter. Für einen $\mathbb{Z}_p[G_K]$-Modul M definiert man durch den Charakter χ in folgender Weise eine neue G_K-Operation:

$$\sigma^* m := \chi(\sigma) \cdot (\sigma m) \quad \text{für } \sigma \in G_K, m \in M.$$

Der $\mathbb{Z}_p[G_K]$-Modul mit dieser neuen Struktur werde mit $M(\chi)$ bezeichnet. Ist speziell $\chi = \tau$ der zyklotomische Charakter, so gilt:

$$\mathbb{Z}_p(\tau) = \mathbb{Z}_p(1),$$

und für $n \neq 0$ definiert man

$$M(n) := M(\tau^n).$$

Es ist insbesondere

$$\mathbb{Z}_p(-1) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p(1), \mathbb{Z}_p),$$

und für $n > 0$ gilt dann:

$$M(n) = M(\tau^n) = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1)^{\otimes n} = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(n)$$

sowie

$$M(-n) = M(\tau^{-n}) = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-1)^{\otimes n} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p(n), M).$$

Der Modul $M(n)$ wird als *n-facher Tatetwist von M* bezeichnet.

Proposition 2.2.3 ([Ta2] Proposition 8)**.**
Sei $G_K = G(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ die absolute Galoisgruppe von K. Dann gilt

$$\mathrm{H}^0(G_K, \mathbb{C}_p) = K,$$

und für jede ganze Zahl $n \neq 0$ ist

$$\mathrm{H}^0(G_K, \mathbb{C}_p(n)) = \mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{C}_p(n)) = 0.$$

Insbesondere ist der Fixmodul $\mathbb{C}_p(n)^{G_K}$ für alle $n \neq 0$ trivial.

Mit dieser Proposition wird nun die folgende Proposition für *unipotente algebraische Gruppen* über $\mathbb{Q}_p$ bewiesen, d.h. für affine Gruppenschemata über $\mathbb{Q}_p$, die eine absteigende Zentralreihe besitzen, deren Quotienten isomorph zur additiven Gruppe sind (vgl. [De-Ga] Chapitre IV, §2, Proposition 2.5).

Proposition 2.2.4. *Sei U eine unipotente algebraische Gruppe über $\mathbb{Q}_p$. Dann existiert für $n \neq 0$ kein nichttrivialer Galois-äquivarianter Homomorphismus*

$$\rho : \mathbb{C}_p(n) \longrightarrow U(\mathbb{C}_p).$$

Beweis (durch Induktion nach $\dim U$*).*
Eindimensionale unipotente algebraische Gruppen sind isomorph zur additiven Gruppe $\mathbb{G}_a$. Nach der obigen Proposition existiert kein nichttrivialer G_K-Homomorphismus

$$\rho' : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p(-n),$$

denn es ist $\rho'(1) \in \mathbb{C}_p(-n)^{G_K} = 0$. Nach n-fachem Tatetwist folgt hieraus, daß es keinen nichttrivialen G_K-Homomorphismus

$$\rho : \mathbb{C}_p(n) \longrightarrow \mathbb{G}_a(\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p$$

gibt.
Sei nun U eine unipotente algebraische Gruppe der Dimension größer als eins, und für unipotente Gruppen kleinerer Dimension sei die Proposition gezeigt. Da U unipotent ist, enthält das Zentrum $Z(U)$ von U eine zur additiven Gruppe $\mathbb{G}_a$ isomorphe Untergruppe $\mathbb{G}'_a$. Sei $U' = U/\mathbb{G}'_a$ der Quotient von U mit $\mathbb{G}'_a$. Nach [De-Ga] Chapitre IV, §2, Proposition 2.3. (a) ist dieser wieder unipotent. Man betrachte nun das folgende Diagramm mit exakter Zeile:

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{C}_p(n) \arrow[dl, dotted, "\rho'"'] \arrow[d, "\rho"] \arrow[dr] & & \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{G}'_a(\mathbb{C}_p) \arrow[r, "f"] & U(\mathbb{C}_p) \arrow[r, "g"] & U'(\mathbb{C}_p) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $g \circ \rho$ trivial, d.h. ρ faktorisiert über $\mathbb{G}'_a(\mathbb{C}_p)$. Da nach dem Induktionsanfang der Homomorphismus ρ' trivial ist, folgt die Behauptung. $\square$

Im 4. Kapitel wird das folgende Korollar eine Anwendung finden.

Korollar 2.2.5. *Sei $T_pA = (\mathbb{Z}_p(1))^{\dim A} \oplus (\mathbb{Z}_p)^{\dim A}$ der p-Tatemodul von A und U eine unipotente algebraische Gruppe über $\mathbb{Q}_p$. Dann ist jeder nichttriviale G_K-äquivariante Homomorphismus*

$$T_pA = (\mathbb{Z}_p(1))^{\dim A} \oplus (\mathbb{Z}_p)^{\dim A} \longrightarrow U(\mathbb{C}_p)$$

trivial auf dem ersten Faktor.

3. Abelsche Varietäten mit komplexer Multiplikation

In [De-We1] werden zwei neue Galoisoperationen auf abelschen Varietäten A/K mit komplexer Multiplikation definiert, die sich aus der Konstruktion des Funktors ρ, eingeschränkt auf Geradenbündel, die algebraisch äquivalent zu null sind, ergeben. Diese Galoisoperationen werden in diesem Kapitel beschrieben.

3.1. CM-abelsche Varietäten

In diesem Abschnitt werden grundlegende Eigenschaften abelscher Varietäten mit komplexer Multiplikation wiederholt. Näheres hierzu findet sich in [Gr], [Se-Ta] sowie in [Shi].

Sei zunächst K ein beliebiger Körper.

Theorem 3.1.1 ([Mum] Chapter IV.19, Theorem 3)**.**
Seien A und A' abelsche K-Varietäten. Dann ist $\mathrm{Hom}(A, A')$ eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe, und die für eine Primzahl $l \neq \mathrm{Char}(K)$ durch den Funktor T_l induzierte Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(A, A') \otimes \mathbb{Z}_l \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_l}(T_l A, T_l A')$$

ist injektiv.

Die folgende Proposition führt zur Definition einer abelschen Varietät mit komplexer Multiplikation:

Proposition 3.1.2 ([Shi] Proposition 2, Seite 36)**.**
Sei A/K eine abelsche Varietät der Dimension $\dim A = g$ und R eine einfache $\mathbb{Q}$-Unteralgebra von $\mathrm{End}^0_K(A) := \mathrm{End}_K(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, die das Einselement von $\mathrm{End}^0_K(A)$ enthält. Mit $Z(R)$ werde das Zentrum von R bezeichnet, und es sei

$$[R : Z(R)] =: f^2, \quad [Z(R) : \mathbb{Q}] =: d.$$

Dann gilt:

$$fd \mid 2g.$$

Definition 3.1.3 (vgl. [Se-Ta]).
Sei $F/\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper vom Grad $[F : \mathbb{Q}] = 2g$. Eine *abelsche Varietät mit komplexer Multiplikation durch* F ist ein Paar (A, ι) bestehend aus einer abelschen Varietät A/K der Dimension g und einem nichttrivialen Ringhomomorphismus

$$\iota : F \longrightarrow \mathrm{End}^0_K(A).$$

Abkürzend werden abelsche Varietäten mit komplexer Multiplikation auch als *CM-abelsche Varietäten* bezeichnet.

Da nach dem Theorem 3.1.1 $\mathrm{End}_K(A)$ als $\mathbb{Z}$-Modul torsionsfrei ist, existiert eine Inklusion von $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathrm{End}_K(A) \subset \mathrm{End}^0_K(A)$. Sei (A, ι) eine abelsche Varietät mit komplexer Multiplikation durch F. Identifiziert man F mit der $\mathbb{Q}$-Algebra $\iota(F)$, so ist $R := F \cap \mathrm{End}_K(A)$ eine Ordnung von F, d.h. ein Unterring von $\mathfrak{o}_F$, der eine Ganzheitsbasis der Länge $2g$ besitzt. Für eine Primzahl $l \neq \mathrm{Char}(K)$ kann man nach dem Theorem 3.1.1 den l-Tatemodul T_lA mit der Struktur eines $R \otimes \mathbb{Z}_l$-Moduls versehen. Hat insbesondere der Grundkörper Charakteristik null, so trägt der absolute Tatemodul TA, d.h. die étale Fundamentalgruppe $\pi_1^{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, 0)$, die Struktur eines $(R \otimes \widehat{\mathbb{Z}})$-Moduls.

Proposition 3.1.4 ([Se-Ta] Corollary 2, Seite 502).
Sei A/K eine abelsche Varietät mit komplexer Multiplikation durch F, und mit $R := F \cap \mathrm{End}_K(A)$ werde die zugehörige Ordnung bezeichnet. Sei ferner $l \neq \mathrm{Char}(K)$ eine Primzahl und $\rho_l : G_K \to \mathrm{Aut}(T_lA)$ die Galoisdarstellung des l-Tatemoduls von A.
Dann ist das Bild von ρ_l in $(R \otimes \mathbb{Z}_l)^\times$ enthalten, insbesondere ist $\mathrm{im}(\rho_l)$ also kommutativ.

Bemerkung ([Se-Ta] Remark, Seite 502).
Es ist zwar nach [Se-Ta] Theorem 5 (i) für $l \neq \mathrm{Char}(K)$ der $F \otimes \mathbb{Q}_l$-Modul $T_lA \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ frei vom Rang 1, im allgemeinen ist T_lA jedoch kein freier $(R \otimes \mathbb{Z}_l)$-Modul. Dies ist aber zum Beispiel für $\dim(A) = 1$, d.h. für elliptische Kurven der Fall.

3.2. Geradenbündel auf abelschen Varietäten

Sei nun $K/\mathbb{Q}_p$ ein lokaler Körper und A/K eine abelsche Varietät mit guter Reduktion. Mit $\mathscr{A}/\mathfrak{o}_K$ werde das Néronmodell von A bezeichnet. Nach [De-We1] Theorem 1 sind alle Geradenbündel, die algebraisch äquivalent zu null sind, in der Kategorie $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$ enthalten, d.h. der Funktor

$$\rho : \mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}} \longrightarrow \mathbf{Rep}_{TA}(\mathbb{C}_p)$$

induziert eine Abbildung auf $\mathrm{Pic}^0_{A/\mathbb{C}_p}(\mathbb{C}_p) = \widehat{A}(\mathbb{C}_p)$:

$$\alpha : \widehat{A}(\mathbb{C}_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c(TA, \mathbb{C}_p^*).$$

Nach [De-We1] Theorem 1 und Proposition 1 ist der Funktor ρ verträglich mit Tensorprodukten sowie mit der Operation der Galoisgruppe $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Daher ist α ein G_K-äquivarianter Homomorphismus. Aufgrund der Zerlegung $\mathbb{C}_p^* = \mathfrak{o}^\times \times p^{\mathbb{Q}}$ gilt zudem

$$\mathrm{Hom}_c(TA, \mathbb{C}_p^*) = \mathrm{Hom}_c(TA, \mathfrak{o}^\times),$$

denn es gibt keinen nichttrivialen stetigen Homomorphismus der kompakten Gruppe TA in die diskrete Gruppe $p^{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}$.

3.2.1 Konstruktion der Homomorphismen α_n und α_T

Man betrachte für ein abelsches Schema X über einer lokal noetherschen Basis S den kontravarianten Funktor

$$P_{X/S} : S' \mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S S')$$

von der Kategorie der S-Schemata in die Kategorie der abelschen Gruppen. Der relative Picardfunktor $\mathrm{Pic}_{X/S}$ ist als assoziierte fppf-Garbe der Prägarbe $P_{X/S}$ definiert. In dieser Situation ist $\mathrm{Pic}_{X/S}$ durch ein S-Schema darstellbar (vgl. [BLR] Chapter 8.2, Theorem 1), und das darstellende S-Schema werde wieder mit $\mathrm{Pic}_{X/S}$ bezeichnet. Ferner sei $\widehat{X} = \mathrm{Pic}^0_{X/S}$ das zu X duale abelsche Schema über S, wobei mit $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ die neutrale Komponente von $\mathrm{Pic}_{X/S}$ bezeichnet werde. Diese ist faserweise als Zusammenhangskomponente der

Identität definiert (vgl. [EGA]IV$_3$ Abschnitt 15.6). Weitere Ausführungen über den relativen Picardfunktor sind in [BLR] Chapter 8 sowie in [Ge-Mo] Chapters 6, 7 zu finden.

Seien nun zunächst X und Y abelsche Schemata über einem lokal noetherschen Basisschema S, und es sei $\lambda : X \to Y$ eine S-Isogenie. Durch Urbildzuordnung erhält man durch λ einen Gruppenhomomorphismus

$$\lambda^* : \mathrm{Pic}(Y) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X), \quad \mathscr{L} \mapsto \lambda^*\mathscr{L}.$$

Zudem induziert λ einen S-Morphimus der relativen Picardschemata

$$\mathrm{Pic}_{\lambda/S} : \mathrm{Pic}_{Y/S} \longrightarrow \mathrm{Pic}_{X/S}$$

und eine S-Isogenie der dualen abelschen Schemata

$$\widehat{\lambda} : \widehat{Y} \longrightarrow \widehat{X}.$$

In folgender Weise definiert man die sogenannte Cartierpaarung (vgl. [Oda] Section 1)

$$\langle \ , \ \rangle_\lambda : \ker(\lambda) \times_S \ker(\mathrm{Pic}_{\lambda/S}) \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S} :$$

Sei S' ein S-Schema, und es seien $X_{S'}$, $Y_{S'}$ und $\lambda_{S'}$ die Basiserweiterungen mit S'. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ mit exakten Zeilen (die Exaktheit der Zeilen folgt aus [BLR] Chapter 8.1, Proposition 4):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(S') \arrow[r] & \mathrm{Pic}(X_{S'}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}_{X/S}(S') \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(S') \arrow[r] \arrow[u, equal] & \mathrm{Pic}(Y_{S'}) \arrow[r] \arrow[u, "\lambda^*_{S'}"] & \mathrm{Pic}_{Y/S}(S') \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{Pic}_{\lambda/S}"] & 0,
\end{tikzcd}$$

und daher gilt:

$$\begin{aligned}
\big(\ker(\mathrm{Pic}_{\lambda/S})\big)(S') &= \ker\big(\mathrm{Pic}_{Y/S}(S') \xrightarrow{\mathrm{Pic}_{\lambda/S}} \mathrm{Pic}_{X/S}(S')\big) \\
&= \ker\big(\mathrm{Pic}(Y_{S'}) \xrightarrow{\lambda^*_{S'}} \mathrm{Pic}(X_{S'})\big).
\end{aligned}$$

Sei nun $x \in \ker(\lambda)(S')$ und $\mathscr{L} \in \big(\ker(\mathrm{Pic}_{\lambda/S})\big)(S')$. Faßt man $\mathscr{L}$ mit obiger Identifikation als invertierbare Garbe auf $Y_{S'}$ auf, so existiert also ein Isomorphismus f invertierbarer Garben auf $X_{S'}$:

$$f : \lambda_{S'}^* \mathscr{L} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{X_{S'}}.$$

Mit $T_x : X_{S'} \to X_{S'}$ werde die Translation durch x auf $X_{S'}$ bezeichnet. Dann erhält man durch Komposition einen Automorphismus von $\mathscr{O}_{X_{S'}}$-Moduln

$$\mathscr{O}_{X_{S'}} \xrightarrow[\sim]{f^{-1}} \lambda_{S'}^* \mathscr{L} \simeq T_x^* \lambda_{S'}^* \mathscr{L} \xrightarrow[\sim]{T_x^*(f)} T_x^* \mathscr{O}_{X_{S'}} \simeq \mathscr{O}_{X_{S'}},$$

der ein Element $\langle x, \mathscr{L} \rangle_\lambda$ in

$$\mathrm{H}^0(X_{S'}, \mathscr{O}_{X_{S'}}) = \mathrm{H}^0(S', \mathscr{O}_{S'}^*) = \mathbb{G}_{m,S}(S')$$

liefert, das nicht von der Wahl des Isomorphismus f abhängt.

Theorem 3.2.1 ([Oda] Theorem 1.1)**.**
Seien X und Y zwei S-Schemata und $\lambda : X \to Y$ eine S-Isogenie.
Dann ist die Cartierpaarung $\langle\, , \rangle_\lambda$ eine nicht ausgeartete biadditive Paarung endlicher flacher Gruppenschemata über S, d.h. sie definiert einen kanonischen S-Isomorphismus

$$\nu_\lambda : \ker(\mathrm{Pic}_{\lambda/S}) \xrightarrow{\sim} (\ker(\lambda))^\vee.$$

Zudem ist ν_λ funktoriell in λ, d.h. für ein kommutatives Diagramm mit S-Morphismen β und β' sowie S-Isogenien λ und λ'

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \arrow[d, "\beta'"] \\ X' \arrow[r, "\lambda'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \ker(\mathrm{Pic}_{\lambda/S}) \arrow[r, "\nu_\lambda", "\sim"'] & (\ker(\lambda))^\vee \\ \ker(\mathrm{Pic}_{\lambda'/S}) \arrow[r, "\sim", "\nu_{\lambda'}"'] \arrow[u, "\mathrm{Pic}_{\beta'/S}"] & (\ker(\lambda'))^\vee \arrow[u, "\beta^\vee"'] \end{tikzcd}$$

ebenfalls kommutativ.

Hieraus ergibt sich das folgende Korollar, das über einem Körper bereits von Cartier ([Ca]) und Nishi ([Ni]) bewiesen wurde und dann von Oort ([Oo]) verallgemeinert wurde.

Korollar 3.2.2 ((Cartierdualität), vgl. [Oda] Corollary 1.3)**.**
Sei S ein lokal noethersches Schema.
Ist $\lambda : X \to Y$ eine S-Isogenie abelscher Schemata über S, dann existiert ein kanonischer Isomorphismus

$$\nu_\lambda : \ker(\widehat{\lambda}) \xrightarrow{\sim} (\ker(\lambda))^\vee,$$

der funktoriell in λ ist, d.h. für ein kommutatives Diagramm mit S-Morphismen β und β' sowie S-Isogenien λ und λ'

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \arrow[d, "\beta'"] \\ X' \arrow[r, "\lambda'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} \ker(\widehat{\lambda}) \arrow[r, "\nu_\lambda", "\sim"'] & (\ker(\lambda))^\vee \\ \ker(\widehat{\lambda'}) \arrow[u, "\widehat{\beta'}"] \arrow[r, "\sim", "\nu_{\lambda'}"'] & (\ker(\lambda'))^\vee . \arrow[u, "\beta^\vee"'] \end{tikzcd}$$

Konstruktion von α_n

Für eine natürliche Zahl $N \geq 1$ ist die N-Multiplikation eine Isogenie vom Grad $N^{2\dim \mathscr{A}}$, und es gilt für die duale Isogenie $\widehat{N} = N$.
Man wende nun das Korollar 3.2.2 auf die Isogenie

$$\lambda = \lambda' = N : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$$

an. Dann erhält man einen Isomorphismus

$$\nu_N : \ker(\widehat{N}) = \widehat{\mathscr{A}}[N] \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}[N]^\vee = \mathscr{H}om(\mathscr{A}[N], \mathbb{G}_m),$$

für alle $n \geq 1$ erhält man also:

$$\widehat{\mathscr{A}}[N](\mathfrak{o}_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathscr{A}[N](\mathfrak{o}_n), \mathfrak{o}_n^\times).$$

Durch Verkettung auf der rechten Seite mit den Homomorphismen

$$TA \twoheadrightarrow A[N](\overline{K}) = \mathscr{A}[N](\mathfrak{o}_{\overline{K}}) \xrightarrow{\text{red}} \mathscr{A}[N](\mathfrak{o}_n)$$

erhält man einen Homomorphismus

$$\widehat{\mathscr{A}}[N](\mathfrak{o}_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c(TA, \mathfrak{o}_n^\times),$$

wobei $\mathfrak{o}_n$ mit der diskreten Topologie versehen werde. Für $N|M$ sind die soeben konstruierten Homomorphismen mit den Inklusionen $\widehat{\mathscr{A}}[N](\mathfrak{o}_n) \hookrightarrow \widehat{\mathscr{A}}[M](\mathfrak{o}_n)$ verträglich. Da die Gruppe $\widehat{\mathscr{A}}(\mathfrak{o}_n)$ als direkter Limes der endlichen Gruppen $\widehat{\mathscr{A}}(\mathfrak{o}_L/p^n\mathfrak{o}_L)$ (für alle endlichen Körpererweiterungen L/K) eine Torsionsgruppe ist, induziert die Reduktionsabbildung $\widehat{A}(\mathbb{C}_p) = \widehat{\mathscr{A}}(\mathfrak{o}) \to \widehat{\mathscr{A}}(\mathfrak{o}_n)$ einen Homomorphismus

$$\alpha_n : \widehat{A}(\mathbb{C}_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c(TA, \mathfrak{o}_n^\times).$$

Theorem 3.2.3 ([De-We1] Theorem 3, Seite 115)**.**
Für jedes $n \geq 1$ und alle $\widehat{a} \in \widehat{A}(\mathbb{C}_p)$ ist der $\mathfrak{o}_n^\times$-wertige Charakter $\alpha_n(\widehat{a})$ die Reduktion modulo p^n des $\mathfrak{o}^\times$-wertigen Charakters $\alpha(\widehat{a})$.
Also ist der durch den Funktor ρ gegebene Homomorphismus α der projektive Limes der oben konstruierten Homomorphismen α_n, d.h.

$$\alpha = \varprojlim_n \alpha_n : \widehat{A}(\mathbb{C}_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c(TA, \mathfrak{o}^\times)$$

Konstruktion des Tatehomomorphismus α_T

In [Ta2] §4 definiert Tate ebenfalls durch Cartierdualität einen Homomorphismus auf den $\mathfrak{o}$-wertigen Punkten der zu $\widehat{\mathscr{A}}$ assoziierten p-Barsotti-Tate-Gruppe $\widehat{\mathscr{A}}(p)$:

$$\alpha_T : \widehat{\mathscr{A}}(p)(\mathfrak{o}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c(T\mathscr{A}(p), U^{(1)}_{\mathbb{C}_p}),$$

wobei per definitionem $T\mathscr{A}(p) = T_pA$ ist und mit $U^{(1)}_{\mathbb{C}_p} = 1 + \mathfrak{m}_p$ die Gruppe der Einseinheiten von $\mathfrak{o}$ bezeichnet werde.
Zur Konstruktion von α_T wendet man das Korollar 3.2.2 auf die Isogenien

$$\lambda = \lambda' = p^n : \widehat{\mathscr{A}} \longrightarrow \widehat{\mathscr{A}}$$

an. Dann erhält man bei Identifikation des Biduals $\widehat{\widehat{\mathscr{A}}}$ mit $\mathscr{A}$ Isomorphismen

$$\mathscr{A}[p^n](\mathfrak{o}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathscr{A}}[p^n]^\vee(\mathfrak{o}) = \mathrm{Hom}(\widehat{\mathscr{A}}[p^n](\mathfrak{o}), \mathbb{G}_m(\mathfrak{o})) = \mathrm{Hom}(\widehat{\mathscr{A}}[p^n](\mathfrak{o}), \mu_{p^n}(\mathfrak{o})).$$

Nach dem Korollar 3.2.2 ist der Isomorphismus mit dem projektiven System verträglich, d.h. man kann zum projektiven Limes übergehen:

$$\varprojlim_n \mathscr{A}[p^n](\mathfrak{o}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{p-\mathrm{BT}/\mathfrak{o}}\big(\widehat{\mathscr{A}}(p), \mathbb{G}_m(p)\big). \tag{3.1}$$

Nach dem Bewertungskriterium für Eigentlichkeit gilt $\mathscr{A}[p^n](\mathfrak{o}) = A[p^n](\mathbb{C}_p)$, und da die Multiplikation mit p^n eine Isogenie, d.h. insbesondere endlich ist, gilt schon $A[p^n](\mathbb{C}_p) = A[p^n](\overline{K})$. Daher stimmt die linke Seite des Isomorphismus (3.1) mit dem p-Tatemodul T_pA von A überein. Wendet man den Funktor „$\mathfrak{o}$-wertige Punkte“ $G \mapsto G(\mathfrak{o})$, der von der Kategorie der p-Barsotti-Tate-Gruppen über $\mathfrak{o}_K$ in die Kategorie der topologischen $\mathbb{Z}_p$-Moduln abbildet (siehe Proposition 1.2.13), auf die rechte Seite von (3.1) an, so erhält man einen Homomorphismus

$$f : T_pA \longrightarrow \mathrm{Hom}_{c,\mathbb{Z}_p}\big(\widehat{\mathscr{A}}(p)(\mathfrak{o}), \mathbb{G}_m(p)(\mathfrak{o})\big) = \mathrm{Hom}_{c,\mathbb{Z}_p}\big(\widehat{\mathscr{A}}(p)(\mathfrak{o}), U^{(1)}_{\mathbb{C}_p}\big),$$

der schließlich den Tatehomomorphismus α_T definiert:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_T : \widehat{\mathscr{A}}(p)(\mathfrak{o}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_pA, U^{(1)}_{\mathbb{C}_p}) \\ x & \mapsto & (\gamma \mapsto f(\gamma)(x)). \end{array}$$

Nach Konstruktion ist α_T ein Homomorphismus von $\mathbb{Z}_p$-Moduln, da der Isomorphismus (3.1) und somit auch der Homomorphismus f die $\mathbb{Z}_p$-Modulstruktur respektieren.

Nach [Ta2] Example 2, Seite 169, kann die Gruppe $\widehat{\mathscr{A}}(p)(\mathfrak{o})$ als diejenige offene Untergruppe von $\widehat{\mathscr{A}}(\mathfrak{o})$ aufgefaßt werden, die aus Punkten $x \in \widehat{\mathscr{A}}(\mathfrak{o})$ besteht, deren Reduktion modulo dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}$ endliche p-Potenzordnung hat, d.h. man erhält eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathscr{A}}(p)(\mathfrak{o}) \longrightarrow \widehat{\mathscr{A}}(\mathfrak{o}) \xrightarrow{\mathrm{red}} \widehat{\mathscr{A}}(\mathbb{F}_p)_{(p'-tors)} \longrightarrow 0, \tag{3.2}$$

wobei mit $\widehat{\mathscr{A}}(\overline{\mathbb{F}}_p)_{(p'-tors)}$ die Untergruppe der Elemente aus $\widehat{\mathscr{A}}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ mit zu p primer Torsion bezeichnet werde.

Zu jeder weiteren Primzahl l können in gleicher Weise Homomorphismen definiert werden, die im folgenden mit $\alpha_{T,l}$ bezeichnet werden:

$$\alpha_{T,l} : \widehat{\mathscr{A}}(l)(\mathfrak{o}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c(T_l A, \mathbb{G}_m(l)(\mathfrak{o})).$$

Für $l \neq p$ sind die l-Barsotti-Tate-Gruppen $\widehat{\mathscr{A}}(l)$ étale über $\mathfrak{o}$ (nach Korollar 1.2.7), daher ist $\widehat{\mathscr{A}}(l)(\mathfrak{o})$ eine Torsionsgruppe (siehe Seite 18), und es folgt:

$$\widehat{\mathscr{A}}(l)(\mathfrak{o}) = \widehat{\mathscr{A}}(l)(\mathfrak{o})_{tors} = \varinjlim_n (\varprojlim_i (\widehat{\mathscr{A}}[l^n](\mathfrak{o}/p^i\mathfrak{o}))) = \varinjlim_n \widehat{\mathscr{A}}[l^n](\mathfrak{o}),$$

d.h. $\widehat{\mathscr{A}}(l)(\mathfrak{o})$ ist in diesem Fall die Gruppe der l^n-Torsionspunkte aus $\widehat{\mathscr{A}}(\mathfrak{o})$. Man definiere

$$\widehat{\mathscr{A}}(\mathfrak{o})_{(p'-tors)} := \bigoplus_{l \neq p} \widehat{\mathscr{A}}(l)(\mathfrak{o}).$$

Dann ist nach dem Liftungstheorem von Serre und Tate (Theorem 2.2.1)

$$\widehat{\mathscr{A}}(\mathfrak{o})_{(p'-tors)} \simeq \widehat{\mathscr{A}}(\overline{\mathbb{F}}_p)_{(p'-tors)}.$$

Also besitzt die exakte Sequenz (3.2) eine Spaltung

$$\widehat{A}(\mathbb{C}_p) = \widehat{\mathscr{A}}(\mathfrak{o}) = \widehat{\mathscr{A}}(p)(\mathfrak{o}) \oplus \widehat{\mathscr{A}}(\mathfrak{o})_{(p'-tors)} = \bigoplus_{l \text{ prim}} \widehat{\mathscr{A}}(l)(\mathfrak{o}).$$

Korollar 3.2.4. *Auf der offenen Untergruppe $\widehat{\mathscr{A}}(p)(\mathfrak{o})$ von $\widehat{\mathscr{A}}(\mathfrak{o}) = \widehat{A}(\mathbb{C}_p)$ stimmen die Homomorphismen α und α_T überein.*
Definiert man $\alpha_{T,p} := \alpha_T$ so gilt:

$$\alpha = \bigoplus_{l\ prim} \alpha_{T,l} : \widehat{A}(\mathbb{C}_p) = \bigoplus_{l\ prim} \widehat{\mathscr{A}}(l)(\mathfrak{o}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c(TA, \mathfrak{o}^\times).$$

Beweis. Nach Theorem 3.2.3 gilt $\alpha = \varprojlim_n \alpha_n$, wobei die Homomorphismen α_n durch Cartierdualität, angewandt auf die Isogenien N ($N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$), konstruiert wurden. Für Primzahlen l wurden ebenfalls durch Cartierdualität, angewandt auf dieselben Isogenien l^n ($n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$), die Homomorphismen $\alpha_{T,l}$ konstruiert, und daher gilt $\alpha_{T,l} = \varprojlim_n \alpha_{l^n}$, woraus das Korollar folgt. □

Für den Homomorphismus α kann zudem das Bild genauer beschrieben werden. Dazu dient die folgende Definition.

Definition 3.2.5.
Ein stetiger Charakter $\chi : TA \to \mathbb{C}_p^*$ heißt *glatt*, falls sein Stabilisator in G_K offen ist. Die Gruppe der glatten Charaktere von TA werde mit $Ch^\infty(TA)$ bezeichnet. Ferner sei $Ch(TA)$ der topologische Abschluß von $Ch^\infty(TA)$ in $\mathrm{Hom}_c(TA, \mathfrak{o}^\times)$.

Theorem 3.2.6 ([De-We1] Theorem 5, Seite 126)**.**
Die Abbildung α induziert einen Isomorphimus topologischer Gruppen

$$\alpha : \widehat{A}(\mathbb{C}_p) \xrightarrow{\sim} Ch(TA). \tag{3.3}$$

Korollar 3.2.7. *Nach der Zerlegung von $\alpha = \bigoplus_{l\ prim} \alpha_{T,l}$ aus Korollar 3.2.4 erhält man also für alle Primzahlen l Gruppenisomorphismen*

$$\alpha_{T,l} : \widehat{\mathscr{A}}(l)(\mathfrak{o}) \xrightarrow{\sim} Ch(T_l A) := \mathrm{im}(\alpha_{T,l}) \subset \mathrm{Hom}_c(T_l A, \mathbb{G}_m(l)(\mathfrak{o})),$$

und es ist $Ch(TA) = \bigoplus_{l\ prim} Ch(T_l A)$.

□

3.3. Zwei neue Galoisoperationen für CM-abelsche Varietäten

In diesem Abschnitt werden zwei neue Operationen der Galoisgruppe G_K auf CM-abelschen Varietäten beschrieben. Diese Beschreibung bezieht sich auf ein Beispiel aus [De-We1] (Example, Seite 127).

Seien nun $\sigma \in G_K$ und $\widehat{a} \in \widehat{A}(\mathbb{C}_p)$. Mit $\widehat{a} \mapsto \sigma(\widehat{a})$ werde die gewöhnliche Galoisoperation auf $\widehat{A}(\mathbb{C}_p)$ bezeichnet, d.h. die durch die G_K-Operation auf $\mathbb{C}_p$ induzierte, und mit σ_* die G_K-Operation auf den Darstellungen des Tatemoduls TA (siehe (1.3) auf Seite 29). Dann gilt aufgrund der Galois-Äquivarianz des Homomorphismus α (nach Proposition 1.4.4):

$$\alpha(\sigma(\widehat{a})) = {}^\sigma\alpha(\widehat{a}) = \sigma \circ \alpha(\widehat{a}) \circ \sigma_*^{-1}.$$

Lemma 3.3.1. *Wenn $\widehat{A}/K$ eine CM-abelsche Varietät ist, so ist $Ch(TA)$ invariant unter den folgenden Operationen:*

$$\chi \mapsto \sigma \circ \chi \quad \textit{und} \quad \chi \mapsto \chi \circ \sigma_*^{-1} \quad \textit{für } \sigma \in G_K, \chi \in Ch(TA).$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $Ch^\infty(TA)$ invariant unter den obigen Operationen ist. Sei also $\chi \in Ch^\infty(TA)$. Dann existiert eine endliche normale Erweiterung N/K, so daß χ invariant unter G_N ist, d.h. für alle $\tau \in G_N$ gilt: $\tau^{-1} \circ \chi \circ \tau_* = \chi$. Da A nach Voraussetzung eine CM-abelsche Varietät ist, ist das Bild der Galoisoperation auf TA nach Proposition 3.1.4 kommutativ, d.h. für alle $\tau, \tilde{\tau} \in G_K$ gilt $\tau_* \tilde{\tau}_* = \tilde{\tau}_* \tau_*$.
Daher folgt für $\tau \in G_N$, da G_N ein Normalteiler in G_K ist:

$$\tau^{-1} \circ (\sigma \circ \chi) \circ \tau_* = \sigma \circ ((\sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma) \circ \chi) \circ \tau_* = \sigma \circ \chi \circ (\sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma)_* \tau_* = \sigma \circ \chi$$

sowie

$$\tau^{-1} \circ (\chi \circ \sigma_*^{-1}) \circ \tau_* = \tau^{-1} \circ \chi \circ \tau_* \circ \sigma_*^{-1} = \chi \circ \sigma_*^{-1}.$$

Also folgt die Behauptung. □

Sei nun A/K eine abelsche Varietät mit guter Reduktion und komplexer Multiplikation $\iota : F \to \mathrm{End}_K^0(A)$, und es sei $R := \iota(F) \cap \mathrm{End}_K(A)$ die zugehörige Ordnung. Mit $\mathscr{A}/\mathfrak{o}_K$ werde das Néronmodell von A bezeichnet. Dann ist auch die duale abelsche Varietät $\widehat{A}/K$ eine CM-abelsche Varietät, und die zugehörige Ordnung werde mit $\widehat{R}$ bezeichnet.
Im folgenden werden für $\sigma \in G_K$ die beiden Galoisoperationen auf $Ch(T\widehat{A})$ aus Lemma 3.3.1 mit σ_1 und σ_2 bezeichnet, d.h. für einen Charakter $\chi \in Ch(T\widehat{A})$ sei

$$\sigma_1(\chi) := \sigma \circ \chi \quad \text{und} \quad \sigma_2(\chi) := \chi \circ \sigma_*^{-1}.$$

Diese liefern nach Theorem 3.2.6 zwei neue Galoisoperationen

$$\sigma_{CM_1} := \alpha^{-1} \circ \sigma_1 \circ \alpha \quad \text{und} \quad \sigma_{CM_2} := \alpha^{-1} \circ \sigma_2 \circ \alpha$$

auf $\widehat{\widehat{A}}(\mathbb{C}_p) = A(\mathbb{C}_p)$. Die Komposition beider neuer G_K-Operationen ergibt wieder die gewöhnliche Galoisoperation:

$$\sigma_{CM_2} \circ \sigma_{CM_1} = \sigma.$$

Insgesamt erhält man also das folgende kommutative Diagramm für alle $\sigma \in G_K$:

$$\begin{tikzcd} A(\mathbb{C}_p) \arrow[r, "\sigma_{CM_1}"] \arrow[rr, bend left, "\sigma"] \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] & A(\mathbb{C}_p) \arrow[r, "\sigma_{CM_2}"] \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] & A(\mathbb{C}_p) \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] \\ Ch(T\widehat{A}) \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[rr, bend right, "\chi \mapsto \sigma\circ\chi\circ\sigma_*^{-1}"'] & Ch(T\widehat{A}) \arrow[r, "\sigma_2"] & Ch(T\widehat{A}) \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Nach der Proposition 3.1.4 liegt wegen $\mathrm{Char}(K) = 0$ für alle Primzahlen l das Bild der G_K-Operation auf dem Tatemodul $T_l\widehat{A}$

$$\rho_l : G_K \to \mathrm{Aut}(T_l\widehat{A})$$

in $(R \otimes \mathbb{Z}_l)^\times$, also wird für $\sigma \in G_K$ die G_K-Operation auf dem absoluten Tatemodul $T\widehat{A}$

$$\theta : G_K \to \mathrm{Aut}(T\widehat{A})$$

durch Multiplikation mit einem Element $\theta(\sigma) \in (R \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^\times$ beschrieben, d.h. der in dem Diagramm rechts unten stehende Homomorphismus

$$\sigma_2 : Ch(T\widehat{A}) \longrightarrow Ch(T\widehat{A})$$

ist gegeben durch:

$$\sigma_2(\chi)(\gamma) := \chi(\sigma_*^{-1}(\gamma)) = \chi(\theta(\sigma^{-1})\gamma), \quad \text{für } \gamma \in T\widehat{A}. \tag{3.5}$$

Proposition 3.3.2. *Der Isomorphismus aus (3.3)*

$$\alpha : A(\mathbb{C}_p) \xrightarrow{\sim} Ch(T\widehat{A})$$

ist in folgender Weise mit der R-Modulstruktur der beiden Gruppen verträglich:
Für $a \in A(\mathbb{C}_p)$, $r \in R$ und $\gamma \in T\widehat{A}$ gilt:

$$\alpha(ra)(\gamma) = \alpha(a)(\widehat{r}\gamma).$$

Dabei sei $\widehat{r} \in \widehat{R} \subset \mathrm{End}_K(\widehat{A})$ der von $r \in R$ induzierte Endomorphismus.

Beweis. Nach Theorem 3.2.3 ist $\alpha = \varprojlim_n \alpha_n$, wobei die Homomorphismen $\alpha_n : A(\mathbb{C}_p) \to \mathrm{Hom}_c(T\widehat{A}, \mathfrak{o}_n^\times)$ durch Cartierdualität angewandt auf die Isogenien $N : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ (für natürliche Zahlen $N \geq 1$) entstehen (zur Konstruktion siehe Seite 58). Diese Isogenien kommutieren mit jedem Endomorphismus $r \in R$, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, "N"] \arrow[d, "r"'] & \mathscr{A} \arrow[d, "r"] \\ \mathscr{A} \arrow[r, "N"'] & \mathscr{A} \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Nach Korollar 3.2.2 erhält man daraus das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathscr{A}}[N] \arrow[r, "\nu_N", "\sim"'] & (\mathscr{A}[N])^\vee \\ \widehat{\mathscr{A}}[N] \arrow[u, "\widehat{r}"] \arrow[r, "\sim", "\nu_N"'] & (\mathscr{A}[N])^\vee . \arrow[u, "r^\vee"'] \end{tikzcd}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Für alle Primzahlen l hat man die Gruppenisomorphismen

$$\alpha_{T,l} : \mathscr{A}(l)(\mathfrak{o}) \xrightarrow{\sim} Ch(T_l\widehat{A}).$$

Für $l = p$ ist $\alpha_{T,p}$ nach Konstruktion ein $\mathbb{Z}_p$-Modulhomomorphismus. Für $l \neq p$ induziert die $\mathbb{Z}_l$-Modulstruktur von $T_l\widehat{A}$ über den Isomorphismus $\alpha_{T,l}$ eine $\mathbb{Z}_l$-Modulstruktur auf $\mathscr{A}(l)(\mathfrak{o})$, so daß $\mathscr{A}(\mathfrak{o}) = A(\mathbb{C}_p)$ eine $\widehat{\mathbb{Z}}$-Modulstruktur trägt.

Mit Hilfe der Proposition läßt sich nun die neue Galoisoperation σ_{CM_2} auf $A(\mathbb{C}_p)$ beschreiben:

Korollar 3.3.3. *Sei wie oben A eine CM-abelsche Varietät über K. Es sei*

$$\theta : G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}(T\widehat{A}), \quad \mathrm{im}\,\theta \subset (\widehat{R} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^\times$$

die Galoisoperation auf dem absoluten Tatemodul der dualen Varietät $\widehat{A}$. Für $\sigma \in G_K$ und $a \in A(\mathbb{C}_p)$ ist die neue Galoisoperation gegeben durch:

$$\sigma_{CM_2} a = \widehat{\theta(\sigma^{-1})} a,$$

wobei $\widehat{\theta(\sigma^{-1})} \in (R \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^{\times}$ *sei, und für Elementartensoren* $(r \otimes z) \in R \otimes \widehat{\mathbb{Z}}$ *gelte:*

$$\widehat{r \otimes z} := \widehat{r} \otimes z.$$

Beweis. Man betrachte zunächst für $\sigma \in G_K$:

$$\sigma_2 : Ch(T\widehat{A}) \longrightarrow Ch(T\widehat{A}).$$

Nach (3.5) gilt für alle $a \in A(\mathbb{C}_p)$ und $\gamma \in T\widehat{A}$:

$$\sigma_2\big(\alpha(a)\big)(\gamma) = \alpha(a)\big(\theta(\sigma^{-1})\gamma\big).$$

Aus der obigen Proposition folgt:

$$\alpha(a)\big(\theta(\sigma^{-1})\gamma\big) = \alpha\big(\widehat{\theta(\sigma^{-1})}\big)(\gamma).$$

Daher gilt

$$\sigma_2(\alpha(a)) = \alpha\big(\widehat{\theta(\sigma^{-1})}\big),$$

und wegen $\sigma_{CM_2} = \alpha^{-1} \circ \sigma_2 \circ \alpha$ folgt schließlich

$$\sigma_{CM_2} a = \widehat{\theta(\sigma^{-1})} a.$$

□

Da für alle $\sigma \in G_K$ nach dem Diagramm 3.4 $\sigma = \sigma_{CM_2} \circ \sigma_{CM_1}$ gilt, können die beiden neuen Galoisoperationen σ_{CM_1} und σ_{CM_2} auf CM-abelschen Varietäten A/K mit obigem Korollar vollständig beschrieben werden.

4. Explizite Darstellungen zu Atiyahbündeln

In diesem Kapitel werden Darstellungen zu Vektorbündeln, die durch sukzessive Erweiterung mit trivialen Bündeln entstehen (sogenannte *verallgemeinerte Atiyahbündel*), explizit angegeben. Dazu wird zunächst eine neue Kategorie filtrierter Vektorbündel definiert.
Im Falle elliptischer Kurven stellt sich heraus, daß hiermit nach Ergebnissen aus [At] alle Darstellungen zu Vektorbündeln aus $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$ explizit beschrieben werden können.

4.1. Eine Kategorie filtrierter Vektorbündel

Sei $A/\overline{\mathbb{Q}}_p$ eine abelsche Varietät mit guter Reduktion. Dann existiert eine abelsche Varietät A_K über einem lokalen Zahlkörper $K/\mathbb{Q}_p$ mit $A_K \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}_p = A$ (siehe Abschnitt 1.4).
Zur besseren expliziten Beschreibung der zu Vektorbündeln aus der Kategorie $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$ assoziierten Darstellungen der Fundamentalgruppe $\pi_1^{\text{ét}}(A, x)$ wird zunächst eine neue Kategorie filtrierter Vektorbündel mit gewissen zusätzlichen Daten definiert.

Definition 4.1.1. Sei $x \in A(\mathbb{C}_p)$. In folgender Weise werde die Kategorie $\mathscr{B}\mathscr{F}^x_{A_{\mathbb{C}_p}}$ definiert:
Die Objekte in $\mathscr{B}\mathscr{F}^x_{A_{\mathbb{C}_p}}$ seien Tupel $(E, \mathscr{F}^\bullet E, \varphi_\bullet, \sigma_x)$, wobei

- E ein Vektorbündel vom Rang r aus der Kategorie $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$ sei,
- $\mathscr{F}^\bullet E$ eine absteigende Vektorbündelfiltrierung von E sei:

$$E = \mathscr{F}^1 E \supset \ldots \supset \mathscr{F}^r E \supset 0 = \mathscr{F}^{r+1} E = \mathscr{F}^{r+2} = \ldots,$$

- $\varphi_\bullet = (\varphi_i)_{1 \le i \le r}$ eine Familie von Vektorbündelisomorphismen sei:

$$\varphi_i : \mathscr{O}_A \xrightarrow{\sim} \operatorname{Gr}^i_{\mathscr{F}} E := \mathscr{F}^i E / \mathscr{F}^{i+1} E,$$

- und
$$\sigma_x : E_x \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}^{\bullet}_{\mathscr{F}} E_x = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Gr}^{i}_{\mathscr{F}} E_x$$
eine Spaltung sei, d.h. die durch σ_x induzierten Abbildungen auf den Graduierten seien die Identität:
$$\mathrm{Gr}^{\bullet}_{\mathscr{F}} E_x \xrightarrow[\mathrm{id}]{\text{via } \sigma_x} \mathrm{Gr}^{\bullet}_{\mathscr{F}} E_x.$$
Dabei sei wie bei der Konstruktion des Funktors ρ im 1. Kapitel $E_x := x^*E$, aufgefaßt als $\mathbb{C}_p$-Vektorraum der Dimension r.

Ein Morphismus $f : (E, \mathscr{F}^{\bullet}E, \varphi_{\bullet}, \sigma_x) \to (\tilde{E}, \tilde{\mathscr{F}}^{\bullet}\tilde{E}, \tilde{\varphi}_{\bullet}, \tilde{\sigma}_x)$ von Objekten aus $\mathscr{B}\mathscr{F}^{x}_{A_{\mathbb{C}_p}}$ sei durch die folgenden Daten gegeben:

- es sei $f : E \to \tilde{E}$ ein Morphismus von Vektorbündeln, der die Filtrierungen respektiert, d.h. für alle $i \geq 1$ gilt: $f(\mathscr{F}^i E) \subset \tilde{\mathscr{F}}^i \tilde{E}$
- für alle $1 \leq i \leq \min(\mathrm{rk}\, E, \mathrm{rk}\, \tilde{E})$ sei das folgende Diagramm kommutativ:
$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Gr}^{i}_{\mathscr{F}} E \arrow[dd, "\text{via } f"] \\ \mathscr{O}_A \arrow[ur, "\varphi_i", "\sim"'] \arrow[dr, "\sim", "\tilde{\varphi}_i"'] & \\ & \mathrm{Gr}^{i}_{\tilde{\mathscr{F}}} \tilde{E} \end{tikzcd} \quad ,$$
- und schließlich sei das folgende Diagramm ebenfalls kommutativ:
$$\begin{tikzcd} E_x \arrow[r, "\sigma_x", "\sim"'] \arrow[d, "f_x"'] & \mathrm{Gr}^{\bullet}_{\mathscr{F}} E_x \arrow[d, "\text{via } f_x"] \\ \tilde{E}_x \arrow[r, "\sim", "\tilde{\sigma}_x"'] & \mathrm{Gr}^{\bullet}_{\tilde{\mathscr{F}}} \tilde{E}_x \end{tikzcd}$$

Nach der obigen Definition ist sofort ersichtlich, daß jeder Morphismus in der Kategorie $\mathscr{B}\mathscr{F}^{x}_{A_{\mathbb{C}_p}}$ ein Monomorphismus ist. Morphismen zwischen zwei Objekten aus $\mathscr{B}\mathscr{F}^{x}_{A_{\mathbb{C}_p}}$, bei denen die Vektorbündel den gleichen Rang haben, sind Isomorphismen.

4.2. Darstellungen zu Objekten aus $\mathscr{BF}^x_{A_{\mathbb{C}_p}}$

Sei $(E, \mathscr{F}^\bullet E, \varphi_\bullet, \sigma_x)$ ein Objekt aus $\mathscr{BF}^x_{A_{\mathbb{C}_p}}$ und $r := \operatorname{rk} E$. Dann existiert zu E eine Darstellung der Fundamentalgruppe

$$\rho_E : \pi_1^{\text{ét}}(A, x) \longrightarrow \mathrm{GL}(E_x) \simeq \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}_p).$$

Durch $v := (v_i)_{1 \le i \le r} := \left(\sigma_x^{-1}(\varphi_{i,x}(1))\right)_{1 \le i \le r}$ wird eine $\mathbb{C}_p$-Basis von E_x definiert, und die darstellende Matrix von $\rho_E(\gamma)$ für $\gamma \in \pi_1^{\text{ét}}(A, x)$ bezüglich dieser Basis werde mit $B_{(E,\mathscr{F}^\bullet E,\varphi_\bullet,\sigma_x)}(\gamma) = (b_{ij}(\gamma)) \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}_p)$ bezeichnet, d.h.

$$\forall\, j : \rho_E(\gamma)(v_j) = \sum_{i=1}^{r} b_{ij}(\gamma) v_i.$$

Da ρ_E ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt dies auch für

$$B_{(E,\mathscr{F}^\bullet E,\varphi_\bullet,\sigma_x)} : \pi_1^{\text{ét}}(A, x) \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}_p) \quad \gamma \mapsto B_{(E,\mathscr{F}^\bullet E,\varphi_\bullet,\sigma_x)}(\gamma).$$

Sei nun allgemein $f : E \to E'$ ein Morphismus in $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$, und $v = (v_i)_{1 \le i \le r = \operatorname{rk} E}$ bzw. $v' = (v'_j)_{1 \le j \le r' = \operatorname{rk} E'}$ seien $\mathbb{C}_p$-Basen von E_x bzw. E'_x. Wie oben seien $B_E(\gamma)$, $B_{E'}(\gamma)$ bzw. $C = (c_{ij})_{1 \le i \le r', 1 \le j \le r}$ die bezüglich dieser Basen darstellenden Matrizen von $\rho_E(\gamma)$, $\rho_{E'}(\gamma)$ bzw. f_x. Dann gilt aufgrund der Funktorialität von ρ:

$$\forall\, 1 \le i \le r : f_x(\rho_E(\gamma)(v_i)) = \rho_{E'}(\gamma)(f_x(v_i)),$$

und daher folgt:

$$C.B_E = B_{E'}.C,$$

wobei mit $C.B_E$ das Matrizenprodukt bezeichnet werde.

Proposition 4.2.1. *Sei $f : (E, \mathscr{F}^\bullet E, \varphi_\bullet, \sigma_x) \to (E', \mathscr{F}'^\bullet E', \varphi'_\bullet, \sigma'_x)$ ein Morphismus in der Kategorie $\mathscr{BF}^x_{A_{\mathbb{C}_p}}$. Dann gilt für die darstellenden Matrizen:*

$$C.B_{(E,\mathscr{F}^\bullet E,\varphi_\bullet,\sigma_x)} = B_{(E',\mathscr{F}'^\bullet E',\varphi'_\bullet,\sigma'_x)}.C,$$

wobei C eine $(\operatorname{rk} E' \times \operatorname{rk} E)-$Matrix der folgenden Gestalt ist:

$$C = \begin{pmatrix} I_r & * \\ * & * \end{pmatrix}, \textit{mit Einheitsmatrix } I_r \textit{ und } r = \min(\operatorname{rk} E, \operatorname{rk} E').$$

Insbesondere sind für $\operatorname{rk} E = \operatorname{rk} E'$ die darstellenden Matrizen identisch.

Beweis. Man betrachte für $r = \min(\operatorname{rk} E, \operatorname{rk} E')$ das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Gr}^{\bullet}_{\mathscr{F}} E_x \arrow[dd, "\text{via } f_x"] & E_x \arrow[l, "\sigma_x"', "\sim"] \arrow[dd, "f_x"] \\
\mathbb{C}_p^r \arrow[ur, "(\varphi_{i,x})_{1\leq i\leq r}"] \arrow[dr, "(\varphi'_{i,x})_{1\leq i\leq r}"'] & & \\
& \operatorname{Gr}^{\bullet}_{\mathscr{F}'} E'_x & E'_x \arrow[l, "\sim", "\sigma'_x"']
\end{tikzcd}$$

Hieraus folgt sofort, daß für alle $1 \leq i \leq r$ gilt: $f_x(v_i) = v'_i$. Daher folgt nach der Vorbemerkung die Behauptung. □

In der folgenden Proposition wird gezeigt, wie sich die darstellenden Matrizen zu Objekten aus der Kategorie $\mathscr{BF}^x_{A_{\mathbb{C}_p}}$ verhalten, wenn man einzelne Parameter der Objekte verändert.

Proposition 4.2.2. *Sei E ein Vektorbündel vom Rang $\operatorname{rk} E = r$, und es seien $(E, \mathscr{F}^\bullet E, \varphi_\bullet, \sigma_x)$, $(E, \mathscr{F}^\bullet E, \varphi'_\bullet, \sigma_x)$ und $(E, \mathscr{F}^\bullet E, \varphi_\bullet, \tilde{\sigma_x})$ Objekte aus der Kategorie $\mathscr{BF}^x_{A_{\mathbb{C}_p}}$. Seien ferner $B_E := B_{(E,\mathscr{F}^\bullet E,\varphi_\bullet,\sigma_x)}$, $B'_E := B_{(E,\mathscr{F}^\bullet E,\varphi'_\bullet,\sigma_x)}$ sowie $\tilde{B_E} := B_{(E,\mathscr{F}^\bullet E,\varphi_\bullet,\sigma'_x)}$ die zugehörigen darstellenden Matrizen. Dann gilt:*

1. *Die Änderung der Familie $\varphi_\bullet$ bewirkt eine Konjugation der darstellenden Matrizen mit einer Diagonalmatrix $C_\varphi = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_r) \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}_p)$:*
$$B_E = C_\varphi^{-1} B'_E C_\varphi.$$
Dabei gilt für alle i:
$$\varphi'_i = c_i \cdot \varphi_i.$$

2. *Ändert man die Schnitte σ_x ab, so sind die darstellenden Matrizen durch eine obere Dreiecksmatrix zueinander konjugiert:*
$$B_E = C_\sigma^{-1} \tilde{B_E} C_\sigma.$$

Dabei ist

$$C_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. 1. Für alle Indizes i ist $(\varphi_i')^{-1} \circ \varphi_i \in \mathrm{Aut}(\mathscr{O}_A)$. Es existieren also invertierbare Elemente $c_i \in \mathbb{C}_p^*$ mit $\varphi_{i,x} = c_i \cdot \varphi_{i',x}$. Bezüglich der zu Objekten aus $\mathscr{F}\mathscr{B}^x_{A_{\mathbb{C}_p}}$ definierten Basen $(v_i) = \big(\sigma_x^{-1}(\varphi_{i,x}(1))\big)$ und $(v_i') = \big(\sigma_x^{-1}(\varphi'_{i,x}(1))\big)$ von E_x kann die Identität $\mathrm{id}_{E_x}(v_i) = c_i v_i'$ also durch die Matrix $C_\varphi = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_r)$ beschrieben werden, d.h. es folgt

$$B_E = C_\varphi^{-1} B_E' C_\varphi.$$

2. Seien $v = (v_i) = \big(\sigma_x^{-1}(\varphi_{i,x}(1))\big)$ und $\tilde{v} = (\tilde{v_i}) = \big(\tilde{\sigma_x}^{-1}(\varphi_{i,x}(1))\big)$ die zu den beiden Objekten aus $\mathscr{B}\mathscr{F}^x_{A_{\mathbb{C}_p}}$ assoziierten Basen.
Da σ_x und $\tilde{\sigma_x}$ beide auf den assoziierten Graduierten mit der Identität übereinstimmen, gilt in $\mathrm{Gr}^i_{\mathscr{F}} E_x$:

$$[0] \neq \varphi_{i,x}(1) = [v_i] = [\tilde{v_i}],$$

d.h. $v_i, \tilde{v_i} \in \mathscr{F}^i E_x \backslash \mathscr{F}^{i+1} E_x$. Daher sind für alle i sowohl $(v_i, \ldots, v_r)$ als auch $(\tilde{v_i}, \ldots, \tilde{v_r})$ Basen der $\mathbb{C}_p$-Vektorräume $\mathscr{F}^i E_x$. Sei nun $(c_{ij}) \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}_p)$ die darstellende Matrix von id_{E_x} bezüglich der Basen v und $\tilde{v}$, d.h. $v_i = \sum_j c_{ji} \cdot \tilde{v_j}$. Wegen $[v_i] = [\tilde{v_i}]$ in $\mathrm{Gr}^i_{\mathscr{F}} E_x$ ist also

$$\mathscr{F}^{i+1} E_x \ni v_i - \tilde{v_i} = \sum_{i \neq j} c_{ji} \cdot \tilde{v_j} + (c_{ii} - 1) \cdot \tilde{v_i}.$$

Da $(\tilde{v}_{i+1}, \ldots, \tilde{v_r})$ eine $\mathbb{C}_p$-Basis von $\mathscr{F}^{i+1} E_x$ ist und für $1 \leq k \leq i$ die $\tilde{v}_k$ nicht in $\mathscr{F}^{i+1} E_x$ enthalten sind, folgt $c_{ii} = 1$ und $c_{ji} = 0$, falls $1 \leq j < i$. Setzt man

$$C_\sigma := (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ c_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{r1} & \ldots & c_{r,r-1} & 1 \end{pmatrix},$$

so folgt die Behauptung: $B_E = C_\sigma^{-1} \tilde{B_E} C_\sigma$.

$\square$

4.3. Atiyahbündel in der Kategorie $\mathscr{BF}^x_{A_{\mathbb{C}_p}}$

Für eindimensionale abelsche Varietäten mit guter Reduktion, d.h. für elliptische Kurven mit guter Reduktion wurden von Atiyah in der Arbeit [At] alle Vektorbündel durch das folgende Theorem klassifiziert.

Theorem 4.3.1 ([At], Theorem 5)**.**
Sei A eine elliptische Kurve.

1. *Sei $r \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Es existiert ein bis auf Vektorbündelisomorphie eindeutig bestimmtes unzerlegbares Vektorbündel F_r auf A vom Rang r und Grad null mit $\Gamma(A, F_r) \neq 0$.*

2. *Zudem existieren für alle $r \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ exakte Sequenzen:*

$$0 \to \mathscr{O}_A \to F_{r+1} \to F_r \to 0.$$

3. *Sei E ein unzerlegbares Vektorbündel auf A vom Rang r und Grad null. Dann existiert ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes Geradenbündel L vom Grad null mit*

$$E \simeq L \otimes F_r \quad \textit{und} \quad L^r \simeq \det E.$$

Die unzerlegbaren Vektorbündel F_r vom Rang r und Grad null auf einer elliptischen Kurve A mit $\Gamma(A, F_r) \neq 0$ werden als *Atiyahbündel vom Rang r* bezeichnet. Jedes Atiyahbündel entsteht durch sukzessive Erweiterung mit dem trivialen Bündel $F_1 = \mathscr{O}_A$:

$$[F_r] \quad 0 \longrightarrow \mathscr{O}_A \xrightarrow{f_r} F_r \xrightarrow{g_r} F_{r-1} \longrightarrow 0.$$

Für Vektorbündel auf abelschen Varietäten höherer Dimension gibt es keinen analogen Klassifikationssatz. Da nach Theorem (1.4.3) auch für höherdimensionale abelsche Varietäten sukzessive Erweiterungen mit dem trivialen Bündel in der Kategorie $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$ liegen, werden die folgenden Untersuchungen nicht nur auf den eindimensionalen Fall beschränkt. Für abelsche Varietäten höherer Dimension werden sukzessive Erweiterungen mit dem trivialen Bündel

$$[F_r] \quad 0 \longrightarrow \mathscr{O}_A \xrightarrow{f_r} F_r \xrightarrow{g_r} F_{r-1} \longrightarrow 0$$

als *verallgemeinerte Atiyahbündel vom Rang* r bezeichnet. Im Unterschied zu Atiyahbündeln im eindimensionalen Fall sind die verallgemeinerten Atiyahbündel nicht notwendig unzerlegbar und im allgemeinen nicht bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Man betrachte nun das folgende Diagramm mit kurzen exakten Sequenzen von Vektorbündeln:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & & & & & & \\
 & & & \mathscr{O}_A \arrow[d, "f_{r-1}"] & & & & & & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_A \arrow[r, "f_r"] & F_r \arrow[r, "g_r"] & F_{r-1} \arrow[rr] \arrow[dd, "g_{r-1}"] & & 0 \arrow[d] & & & & \\
 & & & & & \mathscr{O}_A \arrow[d, "f_{r-3}"] & & & & \\
 & 0 \arrow[r] & \mathscr{O}_A \arrow[r, "f_{r-2}"] & F_{r-2} \arrow[rr, "g_{r-2}"] \arrow[dd] & & F_{r-3} \arrow[rr] \arrow[dd, dotted, no head] & & 0 \arrow[d, dotted, no head] & & \\
 & & & & & & & \bullet \arrow[d, dotted, no head] & & \\
 & & & 0 \arrow[r] & \mathscr{O}_A \arrow[r, dotted, no head] & \bullet \arrow[rr, dotted, no head] \arrow[dd, dotted, no head] & & F_3 \arrow[r] \arrow[dd, "g_3"] & 0 \arrow[d] & \\
 & & & & & & & & \mathscr{O}_A \arrow[d, "f_1=\mathrm{id}"] & \\
 & & & & & 0 \arrow[r] & \mathscr{O}_A \arrow[r, "f_2"] & F_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d] & \mathscr{O}_A \arrow[r] \arrow[d, "g_1=0"] & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

In Abhängigkeit von den Morphismen (f_i) und (g_i) in den jeweiligen Erweiterungen erhält man eine absteigende Filtrierung auf F_r:

$$\mathscr{F}^i F_r = \begin{cases} g_r^{-1}(\ldots(g_{i+1}^{-1}(f_i(\mathscr{O}_A))\ldots) & \text{falls} \quad 1 \leq i < r \\ f_r(\mathscr{O}_A) & \text{falls} \quad i = r \\ 0 & \text{falls} \quad i > r \end{cases}$$

Dann ist

$$\varphi_r := f_r : \mathscr{O}_A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}^r_{\mathscr{F}} F_r = f_r(\mathscr{O}_A)$$

ein Isomorphismus, und für alle $1 < i \leq r$ induzieren die Morphismen

$$g_{i+1} \circ \ldots \circ g_r : F_r \longrightarrow F_i$$

Isomorphismen auf den Graduierten:

$$\varphi_i^{-1} : \mathrm{Gr}^i_{\mathscr{F}} F_r = \mathscr{F}^i F_r / \mathscr{F}^{i+1} F_r \underset{\text{via } g_{i+1}\circ\ldots\circ g_r}{\xrightarrow{\sim}} f_i(\mathscr{O}_A) \underset{f_i^{-1}}{\xrightarrow{\sim}} \mathscr{O}_A.$$

Damit ist also $\varphi_\bullet = (\varphi_i)_{1\leq i\leq r}$ eine Familie von Isomorphismen

$$\varphi_i : \mathscr{O}_A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}^i_{\mathscr{F}} E.$$

Betrachtet man nun für ein $x \in A(\mathbb{C}_p)$ das obige Diagramm in der Faser über x, so erhält man kurze exakte Sequenzen von $\mathbb{C}_p$-Vektorräumen ($2 \leq i \leq r$):

$$[F_{i,x}] \quad 0 \longrightarrow \mathbb{C}_p \xrightarrow{f_{i,x}} F_{i,x} \xrightarrow{g_{i,x}} F_{i-1,x} \longrightarrow 0.$$

Wählt man für alle $2 \leq i \leq r$ eine Spaltung $s_{i,x}$ von $g_{i,x}$ (d.h. $g_{i,x} \circ s_{i,x} = \mathrm{id}_{F_{i-1,x}}$), so kann man in Abhängigkeit von der Wahl der Spaltungen $s = (s_{i,x})$ nun in folgender Weise einen Isomorphismus

$$\sigma_x(s) : E_x \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}^\bullet_{\mathscr{F}} E_x = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Gr}^i_{\mathscr{F}} E_x$$

definieren: Durch die Spaltungen $s_{i,x}$ erhält man zunächst eine $\mathbb{C}_p$-Basis $v = (v_i)$ von $F_{r,x}$, indem man

$$v_r := f_{r,x}(1) \quad \text{und} \quad v_i := s_{r,x}(\ldots(s_{i+1,x}(f_{i,x}(1))\ldots) \text{ für } 1 \leq i < r \tag{4.1}$$

definiert. Dann ist für alle i das Basiselement $v_i \in \mathscr{F}^i F_{r,x} \backslash \mathscr{F}^{i+1} F_{r,x}$, und daher wird durch

$$\sigma_x(s)(v) := [v_1] \oplus \ldots \oplus [v_r]$$

nach linearer Fortsetzung der gewünschte Isomorphismus σ_x definiert, der nach Konstruktion auf den assoziierten Graduierten die Identität induziert.

Somit kann man einem verallgemeinerten Atiyahbündel F_r, das durch sukzessive Erweiterungen $(F_i, f_i, g_i)_{2\leq i\leq r}$ entsteht, in Abhängigkeit von der Wahl von Schnitten $s = (s_{i,x})$ von $(g_{i,x})$ ein Objekt $(F_r, \mathscr{F}^\bullet F_r, \varphi_\bullet, \sigma_x(s))$ in der Kategorie $\mathscr{B}\mathscr{F}^x_{A_{\mathbb{C}_p}}$ zuordnen.

Man fixiere nun ein solches Bündel F_r, also Erweiterungen (F_i, f_i, g_i) sowie Schnitte $s = (s_{i,x})$ und damit ein Objekt $(F_r, \mathscr{F}^\bullet F_r, \varphi_\bullet, \sigma_x(s))$ in $\mathscr{F}\mathscr{B}^x_{A_{\mathbb{C}_p}}$. Die zu diesem Objekt zugeordnete darstellende Matrix, d.h. die darstellende Matrix von ρ_E bezüglich der Basis $(\sigma_x(s)^{-1}(\varphi_{i,x}(1)))$, werde mit $B_r := B_{(F_r,\mathscr{F}^\bullet F_r,\varphi_\bullet,\sigma_x(s))}$ bezeichnet.

Proposition 4.3.2. *Der Morphismus $g_r : F_r \to F_{r-1}$ induziert einen Morphismus in der Kategorie $\mathscr{F}\mathscr{B}^x_{A_{\mathbb{C}_p}}$, und für die darstellenden Matrizen gilt:*

$$C.B_r = B_{r-1}.C \quad \textit{mit} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{d.h.} \quad B_r = \begin{pmatrix} B_{r-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der vorangegangenen Konstruktion der Filtrierungen und Morphismen φ und σ_x ausgehend von sukzessiven Erweiterungen:
Seien $v = (v_i)_{1\leq i\leq r}$ bzw. $w = (w_j)_{1\leq j\leq r-1}$ die in (4.1) definierten $\mathbb{C}_p$-Basen von $F_{r,x}$ bzw. $F_{r-1,x}$. Dann ist $g_{r,x}(v_r) = g_{r,x}(f_{r,x}(1)) = 0$, und für $1 \leq j \leq r-1$ gilt: $g_{r,x}(v_j) = w_j$. Da B_r bzw. B_{r-1} die darstellenden Matrizen bezüglich der Basen v bzw. w sind, folgt die Behauptung. □

Speziell für elliptische Kurven erhält man aufgrund des Klassifikationstheorems von Atiyah die folgenden Resultate:

Proposition 4.3.3. *Sei nun A eine elliptische Kurve. Zusätzlich zu dem oben fixierten Atiyahbündel F_r sei F'_r ein weiteres Atiyahbündel vom Rang r. Nach dem Klassifikationstheorem 4.3.1 existiert dann ein Isomorphismus von Vektorbündeln $f : F_r \to F'_r$.*
Dann kann man zu F'_r ein Objekt in $\mathscr{F}\mathscr{B}^x_{A_{\mathbb{C}_p}}$ assoziieren, so daß f einen Isomorphismus dieses Objektes mit $(F_r, \mathscr{F}^\bullet F_r, \varphi_\bullet, \sigma_x(s))$ induziert.
Insbesondere sind dann nach Proposition 4.2.1 die darstellenden Matrizen identisch.

Beweis. Durch den Isomorphismus f von Vektorbündeln erhält man die folgende Äquivalenz von Erweiterungen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_A \arrow[r, "f_r"] \arrow[d, equal] & F_r \arrow[r, "g_r"] \arrow[d, "f", "\wr"'] & F_{r-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_A \arrow[r, "f'_r := f \circ f_r"'] & F'_r \arrow[r, "g'_r := g_r \circ f^{-1}"'] & F_{r-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Konstruiert man nun wie oben zu dem auf diese Weise durch sukzessive Erweiterungen entstehenden Bündel F'_r ein Objekt $(F'_r, \mathscr{F}'_\bullet F'_r, \varphi'_\bullet, \sigma'_x(s'))$ mit Schnitten

$$s'_{i,x} = s_{i,x} \quad \text{für } 2 \leq i \leq r-1 \text{ sowie } \quad s'_{r,x} = f_x \circ s_{r,x},$$

so induziert f einen Isomorphismus in $\mathscr{F}\mathscr{B}^x_{A_{\mathbb{C}_p}}$:

$$f : (F_r, \mathscr{F}^\bullet F_r, \varphi_\bullet, \sigma_x(s)) \xrightarrow{\sim} (F'_r, \mathscr{F}'_\bullet F'_r, \varphi'_\bullet, \sigma'_x(s')).$$

□

Korollar 4.3.4. *Sei A eine elliptische Kurve. Die darstellende Matrix eines Atiyahbündels F_r ist bei der oben beschriebenen Basiswahl von $F_{r,x}$ eindeutig bis auf Konjugation mit einer rechten oberen Dreiecksmatrix, auf deren Diagonale Einsen stehen.*

Beweis. Das Korollar folgt sofort aus der obigen Proposition 4.3.3 und der Proposition 4.2.2. □

4.3.1 Darstellungen zu $\boldsymbol{F}_2$

Für ein verallgemeinertes Atiyahbündel vom Rang 2

$$[F_2] \quad 0 \longrightarrow \mathscr{O}_A \xrightarrow{f_2} F_2 \xrightarrow{g_2} \mathscr{O}_A \longrightarrow 0$$

erhält man nach Wahl eines Schnittes $s_{2,x}$ von $g_{2,x}$ ein Objekt in $\mathscr{F}\mathscr{B}^x_{A_{\mathbb{C}_p}}$ und die dazu gehörende darstellende Matrix von ρ_{F_2} bezüglich der Basis

$(v_1, v_2) := (s_{2,x}(1), f_{2,x}(1))$ von $F_{2,x}$. Diese werde im folgenden mit $B_2 = (b_{ij})$ bezeichnet, d.h. für $\gamma \in \pi_1^{\text{ét}}(A, x)$ sei

$$\gamma \cdot v_1 = b_{11}(\gamma)v_1 + b_{21}(\gamma)v_2 \quad \text{und} \quad \gamma \cdot v_2 = b_{12}(\gamma)v_1 + b_{22}(\gamma)v_2.$$

Es gilt

- $\gamma \cdot v_2 = \gamma \cdot f_{2,x}(1) = f_{2,x}(\gamma \cdot 1) = f_{2,x}(1) = v_2$, d.h. $b_{12} = 0$ und $b_{22} = 1$.
- $1 = \gamma \cdot 1 = \gamma \cdot g_{2,x}(s_{2,x}(1)) = g_{2,x}(\gamma \cdot s_{2,x}(1)) = g_{2,x}\big(b_{11}(\gamma)s_{2,x}(1) + b_{21}(\gamma)f_{2,x}(1)\big) = b_{11}$.
  Dabei ist $\beta := b_{21} : \pi_1^{\text{ét}}(A, x) \to \mathbb{C}_p$ eine stetige Abbildung, die unabhängig von der Wahl des zweiten Basiselementes ist. Da $B_2 : \pi_1^{\text{ét}}(A, x) \to \mathrm{GL}(F_{2,x}) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}_p)$ ein Gruppenhomomorphismus ist, muß β additiv, d.h. ein stetiger additiver Charakter sein.

Daher ist die darstellende Matrix bei obiger Basiswahl von der Form

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist diese Matrix unabhängig von der Wahl eines Schnittes $s_{2,x}$ von $g_{2,x}$, denn nach Proposition 4.2.2 (2) bewirkt die Wahl eines anderen Schnittes die Konjugation der Matrix B_2 mit einer Matrix der Form $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$, und es gilt $B_2 = C^{-1}B_2C$.

Wegen $\beta \in \mathrm{Hom}_c(\pi_1^{\text{ét}}(A, x), \mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_c(TA, \mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_pA, \mathbb{C}_p)$ operiert bei der durch ein verallgemeinertes Atiyahbündel vom Rang zwei induzierten Darstellung der étalen Fundamentalgruppe (d.h. des absoluten Tatemoduls von A) lediglich der p-Anteil nichttrivial, d.h.

$$B_2 : T_pA \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}_p).$$

Die obige Zuordnung $\rho_*(F_2) \mapsto \beta$ kann man in gleicher Weise auf beliebige Erweiterungen von $\pi_1^{\text{ét}}(A, x)$-Moduln

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_p \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} \mathbb{C}_p \longrightarrow 0,$$

wobei die Operation auf $\mathbb{C}_p$ jeweils trivial sei, ausweiten. Hierdurch wird ein Gruppenhomomorphismus definiert:

$$\operatorname{Ext}^1_{\pi_1^{\text{ét}}(A,x)}(\mathbb{C}_p, \mathbb{C}_p) \longrightarrow \operatorname{Hom}_c(\pi_1^{\text{ét}}(A,x), \mathbb{C}_p) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_pA, \mathbb{C}_p),$$

$$F \mapsto \beta_F.$$

Mit den obigen Bezeichnungen gilt explizit für ein Element $\gamma \in \pi_1^{\text{ét}}(A,x)$: $\beta_F(\gamma) = f^{-1}(\gamma \cdot s(1) - s(1))$, wobei s eine Spaltung von g als Vektorraumhomomorphismus sei. Der durch $F \mapsto \beta_F$ definierte Homomorphismus ist zudem ein Isomorphismus, denn für ein $\psi \in \operatorname{Hom}_c(\pi_1^{\text{ét}}(A,x), \mathbb{C}_p)$ kann in folgender Weise eine Umkehrabbildung angegeben werden:
Man betrachte eine kurze exakte Sequenz von $\mathbb{C}_p$-Vektorräumen

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_p \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{C}_p \longrightarrow 0$$

mit Spaltung s. Auf $\mathbb{C}_p$ operiere die Fundamentalgruppe trivial und auf den Basiselementen $(s(1), f(1))$ von V für $\gamma \in \pi_1^{\text{ét}}(A,x)$ durch $\gamma \cdot s(1) = s(1) + \psi(\gamma) f(1)$ und $\gamma \cdot f(1) = 1$.

Nach dem Korollar 1.3.9 erhält man daher den folgenden Isomorphismus:

$$\operatorname{Ext}^1_{\pi_1^{\text{ét}}(A,x)}(\mathbb{C}_p, \mathbb{C}_p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(A, \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{C}_p.$$

Faßt man auf diese Weise den stetigen Charakter β als Element von $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(A, \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{C}_p$ auf, so ergibt sich folgender Zusammenhang mit der Hodge-Tate-Zerlegung (vgl. [De-We1] Abschnitt 3):
Als Korollar aus [Ta2] Theorem 3 erhält man die sogenannte Hodge-Tate-Zerlegung

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(A, \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{C}_p \simeq \Big(\mathrm{H}^1(A_K, \mathscr{O}_{A_K}) \otimes_K \mathbb{C}_p\Big) \oplus \Big(\mathrm{H}^0(A_K, \Omega^1_{A/K}) \otimes_K \mathbb{C}_p(-1)\Big),$$

woraus man die folgende G_K-äquivariante Abbildung erhält:

$$\theta_A^* : \mathrm{H}^1(A_K, \mathscr{O}_{A_K}) \otimes_K \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(A, \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{C}_p.$$

Hierfür gilt das Theorem:

Theorem 4.3.5 ([De-We1] Theorem 2, Seite 111).
Das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_{A_{\mathbb{C}_p}}, \mathscr{O}_{A_{\mathbb{C}_p}}) \arrow[r, "\rho_*"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1_{\pi_1^{\acute{e}t}(A,x)}(\mathbb{C}_p, \mathbb{C}_p) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{H}^1(A_K, \mathscr{O}_{A_K}) \otimes_K \mathbb{C}_p \arrow[r, "\theta_A^*"'] & \mathrm{H}^1_{\acute{e}t}(A, \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{C}_p
\end{tikzcd}$$

Damit gilt für alle Atiyahbündel F_2:

$$\theta_A^*\big([F_2]\big) = \beta_{F_2}.$$

4.3.2 Darstellungen zu symmetrischen Produkten von F_2

Da der Grundkörper Charakteristik null hat, gilt für Atiyahbündel zudem das folgende Theorem:

Theorem 4.3.6 ([At], Seite 129).
Sei A eine elliptische Kurve über einem Körper der Charakteristik null. Für alle $r \geq 1$ gilt:

$$F_r \simeq \mathrm{Sym}^{r-1} F_2.$$

Daß auch für abelsche Varietäten höherer Dimension die symmetrischen Produkte einer Erweiterung F_2 mit $\mathscr{O}_A$ durch $\mathscr{O}_A$ wieder eine sukzessive Erweiterung von trivialen Bündeln ist, zeigt die folgende Konstruktion.

Fixiere dazu eine Erweiterung

$$[F_2] \quad 0 \longrightarrow \mathscr{O}_A \xrightarrow{f_2} F_2 \xrightarrow{g_2} \mathscr{O}_A \longrightarrow 0.$$

Dann kann man die symmetrischen Potenzen in folgender Weise als Erweiterungen beschreiben:
Sei zunächst $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A, so daß für alle $i \in I$ der $\mathscr{O}_A|_{U_i}$-Modul $F_2|_{U_i}$ frei vom Rang 2 ist. Seien $f_{2,i}$ bzw. $g_{2,i}$ die Restriktionen auf U_i, und $s_{2,i}$ sei eine Spaltung von $g_{2,i}$, d.h. $g_{2,i} \circ s_{2,i} =$

$\mathrm{id}_{\mathscr{O}_A|U_i}$. Dann ist $(s_{2,i}(1), f_{2,i}(1))$ eine $\mathscr{O}_A|_{U_i}$-Basis von $F_2|_{U_i}$. Der $\mathscr{O}_A|_{U_i}$-Modulhomomorphismus

$$F_2|_{U_i} \longrightarrow \mathscr{O}_A|_{U_i}[t_1, t_2], \quad s_{2,i}(1) \mapsto t_1,\ f_{2,i}(1) \mapsto t_2$$

induziert einen Isomorphismus von $\mathscr{O}_A|_{U_i}$-Algebren

$$\operatorname{Sym} F_2|_{U_i} = \bigoplus_{n \geq 0} \operatorname{Sym}^n F_2|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_A|_{U_i}[t_1, t_2].$$

Im folgenden werde $\operatorname{Sym} F_2|_{U_i}$ auf diese Weise mit $\mathscr{O}_A|_{U_i}[t_1, t_2]$ identifiziert. Dann ist (t_1, t_2) eine Basis von F_2, und $\operatorname{Sym}^n F_2|_{U_i}$ besteht aus den homogenen Polynomen vom Grad n aus $\mathscr{O}_A|_{U_i}[t_1, t_2]$.

Durch

$$f_{r,i} : \mathscr{O}_A|_{U_i} \longrightarrow \operatorname{Sym}^{r-1} F_2|_{U_i}, \quad 1 \mapsto t_2^{r-1}$$

wird ein injektiver Homomorphimus definiert, und durch die formale partielle Ableitung nach t_1 erhält man einen surjektiven Homomorphismus

$$g_{r,i} := \frac{1}{(r-1)} \cdot \frac{\partial}{\partial t_1} : \operatorname{Sym}^{r-1} F_2|_{U_i} \longrightarrow \operatorname{Sym}^{r-2} F_2|_{U_i},$$

dessen Kern $f_{r,i}(\mathscr{O}_A|_{U_i})$ ist. Somit erhält man durch geeignete Verklebung die gewünschte Erweiterung von Vektorbündeln:

$$[\operatorname{Sym}^{r-1} F_2] \quad 0 \longrightarrow \mathscr{O}_A \xrightarrow{f_r} \operatorname{Sym}^{r-1} F_2 \xrightarrow{g_r} \operatorname{Sym}^{r-2} F_2 \longrightarrow 0.$$

Wählt man nun als Schnitte $s_{r,x}$ von $g_{r,x}$ die formalen Stammfunktion

$$s_{r,x}(t_1^{r-1-j} t_2^{j-1}) := \frac{(r-1)}{(r-j)} t_1^{r-j} t_2^{j-1},$$

so erhält man in der oben beschriebenen Weise zu jeder symmetrischen Potenz $\operatorname{Sym}^{r-1} F_2$ ein Objekt in der Kategorie $\mathscr{F}\mathscr{B}^x_{A_{\mathbb{C}_p}}$. Dieses werde im folgenden abkürzend mit F_r und die dazugehörige darstellende Matrix mit B_r bezeichnet.

Dann ist B_2 die darstellende Matrix von ρ_{F_2} bezüglich der $\mathbb{C}_p$-Basis

$$(t_1, t_2) = (s_{2,x}(1), f_{2,x}(1)).$$

Nach Proposition 4.2.2 (2) ist B_2 unabhängig von der Wahl eines Schnittes $s_{2,x}$ und hat die Gestalt:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Konstruktion ist $B_r =: (b_{ik})$ die darstellende Matrix von ρ_{F_r} bezüglich der Basis

$$(w_j)_{1\leq i\leq r} = \left(\begin{pmatrix} r-1 \\ r-j \end{pmatrix} t_1^{r-j} t_2^{j-1} \right)_{1\leq i\leq r}.$$

Also gilt für $\gamma \in \pi_1^{\text{ét}}(A,x)$ einerseits:

$$\gamma \cdot w_j = \sum_{k=1}^{r} b_{jk}(\gamma) w_k.$$

Andererseits folgt:

$$\begin{aligned}
\gamma \cdot w_j &= \begin{pmatrix} r-1 \\ r-j \end{pmatrix} (\gamma \cdot t_1)^{r-j} (\gamma \cdot t_2)^{j-1} \\
&= \begin{pmatrix} r-1 \\ r-j \end{pmatrix} (t_1 + \beta(\gamma) t_2)^{r-j} (t_2)^{j-1} \\
&= \begin{pmatrix} r-1 \\ r-j \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{r-j} \begin{pmatrix} r-j \\ k \end{pmatrix} \beta(\gamma)^k (t_1)^{r-j-k} (t_2)^{k+j-1} \\
&= \begin{pmatrix} r-1 \\ r-j \end{pmatrix} \sum_{k=j}^{r} \begin{pmatrix} r-j \\ k-j \end{pmatrix} \beta(\gamma)^{k-j} (t_1)^{r-k} (t_2)^{k-1} \\
&= \sum_{k=j}^{r} \frac{(r-1)!(r-j)!}{(r-j)!(r-k)!(j-1)!(k-j)!} \beta(\gamma)^{k-j} (t_1)^{r-k} (t_2)^{k-1} \\
&= \sum_{k=j}^{r} \frac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!} \beta(\gamma)^{k-j} \frac{(r-1)!}{(r-k)!(k-1)!} (t_1)^{r-k} (t_2)^{k-1} \\
&= \sum_{k=j}^{r} \begin{pmatrix} k-1 \\ j-1 \end{pmatrix} \beta(\gamma)^{(k-j)} w_k
\end{aligned}$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} B_r &= \left(\binom{k-1}{j-1} \beta^{(k-j)} \right)_{kj} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 \\ \beta & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ (r-1)\beta^{(r-1)} & \dots & & \beta & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die folgende Rekursionsformel:

$$B_r = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B_{r-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ (r-1)\beta^{(r-1)} & \dots & \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Man beachte, daß alle Faktoren vor den Potenzen des stetigen Charakters β ganzzahlig sind. Wegen $\beta \in \mathrm{Hom}_c(\pi^1_{\text{ét}}(A,x), \mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_pA, \mathbb{C}_p)$ operiert auch in diesem Falle nur der p-Anteil des absoluten Tatemoduls:

$$B_r : T_pA \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}_p).$$

Aus dem vorangegangenen Abschnitt ergibt sich nun also das folgende Resultat:

Theorem 4.3.7 (Explizite Darstellungen für Vektorbündel)**.**
Sei A/K eine abelsche Varietät mit guter Reduktion.

1. *Für verallgemeinerte Atiyahbündel $\mathrm{Sym}^{r-1} F_2$ vom Rang r auf A ist die darstellende Matrix der Darstellung ρ_{F_r} bezüglich der durch die filtrierte Kategorie gegebenen $\mathbb{C}_p$-Basis von der Form*

$$C^{-1} \left(\binom{k-1}{j-1} \beta^{(k-j)} \right)_{kj} C,$$

wobei C eine rechte obere Dreiecksmatrix ist, auf deren Diagonale Einsen stehen.

Zudem operiert nur der p-Anteil von $\pi_1^{ét}(A,x) = TA$, und das Bild der Darstellung ist eine unipotente Gruppe U_r:

$$\rho_{F_r} : T_pA \longrightarrow U_r \subset \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}_p).$$

2. *Für elliptische Kurven werden alle Darstellungen zu Vektorbündeln aus der Kategorie $\mathscr{B}_{A_{\mathbb{C}_p}}$ mit Hilfe der obigen Matrizen B_r beschrieben.*

3. *Falls A/K eine abelsche Varietät ist, die durch kanonische Liftung einer gewöhnlichen abelschen Varietät A_0 über dem Restklassenkörper κ entsteht (d.h. $T_pA = (\mathbb{Z}_p(1))^{\dim A} \oplus (\mathbb{Z}_p)^{\dim A}$), operiert bei der Darstellung ρ_{F_r} lediglich der $\mathbb{Z}_p$-Anteil:*

$$\rho_{F_r} : (\mathbb{Z}_p)^{\dim A} \longrightarrow U_r \subset \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}_p).$$

In diesem Fall genügt es also für eine explizite Beschreibung der Darstellungen ρ_{F_r}, den Wert $\beta(1)$ zu kennen.

Beweis. 1. Der erste Teil folgt unmittelbar aus den vorangegangenen Betrachtungen dieses Kapitels.

2. Diese Behauptung folgt aus dem Klassifikationstheorem von Atiyah (Theorem 4.3.1).

3. Der erste Teil ist eine Folge des Korollars 2.2.5, der zweite folgt aus den Tatsachen, daß nur der $\mathbb{Z}_p$-Anteil und nicht der $\mathbb{Z}_p(1)$-Anteil operiert und daß $\mathbb{Z}$ eine dichte Untergruppe in $\mathbb{Z}_p$ ist.

□

Literaturverzeichnis

[At] M. F. Atiyah, *Vector bundles over an elliptic curve*, Proc. Math. Soc. VII (1957), 414–452.

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert, and M. Raynaud, *Néron models*, Springer, Berlin, 1990.

[Bou] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXVII–XXX. Algèbre commutative. Ch. 1–7*, Actualités Scientifiques et Industrielles, Nos. 1290, 1293, 1308, 1314, Herman, Paris, 1961–1965.

[Ca] P. Cartier, *Isogenies and duality of abelian varieties*, Ann. of Math. (2) **71** (1960), 315–351.

[Car] R. Carls, *A generalized arithmetic geometric mean*, Ph.D. thesis, Groningen, 2004.

[Co-Li] B. Conrad and M. Lieblich, *Galois representations arising from p-divisible groups*, Preprint, 2005.

[Co] B. Conrad, *Gross-Zagier revisited*, Heegner points and Rankin L-series, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 49, Cambridge Univ. Press, 2004, pp. 67–163.

[De-Ga] M. Demazure and P. Gabriel, *Groupes algébriques. Tome I: Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*, Masson, Paris, 1970.

[De-We1] C. Deninger and A. Werner, *Line bundles and p-adic characters*, Number fields and function fields – Two parallel worlds, Progr. Math., vol. 239, Birkhäuser Boston, 2005, pp. 101–131.

[De-We2] C. Deninger and A. Werner, *Vector bundles on p-adic curves and parallel transport*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38**:4 (2005), 553–597.

[De-We3] C. Deninger and A. Werner, *On Tannaka duality for vector bundles on p-adic curves*, Preprint math.AG/0506263 (2005).

[EGA] A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique*, I, Springer (1971); II, Publ. Math. IHES 8 (1961); III, Ibid. 11 (1961), 17 (1963); IV, Ibid. 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967).

[Fa1] G. Faltings, *Semistable vector bundles on Mumford curves*, Invent. Math. **74** (1983), 199–212.

[Fa2] G. Faltings, *A p-adic Simpson correspondence*, Adv. Math. **198**:2 (2005), 847–862.

[FGA] A. Grothendieck, *Fondements de la géométrie algébrique. [Extraits du Séminaire Bourbaki, 1957–1962.]*, Secrétariat mathématique, Paris, 1962.

[G] A. Grothendieck, *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*, Les presses de l'université de Montréal, 1974.

[Ge-Mo] G. van der Geer and B. Moonen, *Abelian varieties*, Preprint, 2005.

[Gr] B. Gross, *Arithmetic on elliptic curves with complex multiplication*, Lecture Notes in Math. 776, Springer, Berlin, 1980.

[He] G. Herz, *On representations attached to semistable vector bundles on Mumford curves*, Ph.D. thesis, Münster, 2005.

[Ka] N. Katz, *Serre-Tate local moduli*, Algebraic surfaces, Lecture Notes in Math. 868, Springer, Berlin, 1981, pp. 138–202.

[Liu] Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford University Press, 2002.

[LST] J. Lubin, J-P. Serre, and J. Tate, *Elliptic curves and formal groups*, Woods Hole Summer Institute (1964).

[Me] W. Messing, *The crystals associated to Barsotti-Tate groups: with applications to abelian schemes*, Lecture Notes in Math. 264, Springer, Berlin, 1972.

[Mi1] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton University Press, 1980.

[Mi2] J. S. Milne, *Abelian varieties*, Arithmetic geometry, Springer, New York, 1986, pp. 103–150.

[Mum] D. Mumford, *Abelian varieties*, Oxford University Press, Bombay, 1974.

[Mur] J. P. Murre, *Lectures on an introduction to Grothendieck's theory of the fundamental group*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1967.

[Na-Se] M. S. Narasimhan and C. S. Seshadri, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. of Math. (2) **82** (1965), 540–567.

[Nak] T. Nakamura, *A note on elliptic curves with ordinary reduction*, Arch. Math. **60** (1993), 440–445.

[Ne] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer, Berlin, 1992.

[Ni] M. Nishi, *The Frobenius theorem and the duality theorem on an abelian variety*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto **32** (1959), 333–359.

[Oda] T. Oda, *The first de Rham cohomology group and Dieudonné modules*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **2** (1969), 63–135.

[Oo-Ta] F. Oort and J. Tate, *Group schemes of prime order*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **3** (1970), 1–21.

[Oo] F. Oort, *Commutative group schemes*, Lecture Notes in Math. 15, Springer, 1966.

[Ro] A. Robert, *A course in p-adic analysis*, Graduate Texts in Math. 198, Springer, New York, 2000.

[Se-Ta] J-P. Serre and J. Tate, *Good reduction of abelian varieties*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 492–517.

[Se1] J-P. Serre, *Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p*, Symp. Int. Top. Alg., Mexico City, 1958, pp. 24–53.

[Se2] J-P. Serre, *Abelian l-adic representations and elliptic curves*, W.A. Benjamin, New York, Amsterdam, 1968.

[Se3] J-P. Serre, *Groupes p-divisibles (d'après J. Tate)*, Sém. Bourbaki, Vol. 10, Exp. No. 318, Paris, 1966, pp. 73–86.

[SGA1] A. Grothendieck et al., *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[SGA3.I] A. Grothendieck et al., *Schémas en groupes. I: Propriétés générales des schémas en groupes*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Lecture Notes in Math.151, Springer, Berlin, 1970.

[Sha] S. Shatz, *Group schemes, formal groups, and p-divisible groups*, Arithmetic geometry, Springer, New York, 1986, pp. 29–78.

[Shi] G. Shimura, *Abelian varieties with complex multiplication and modular functions*, Princeton University Press, 1998.

[Ta1] J. Tate, *Endomorphisms of abelian varieties over finite fields*, Invent. Math. **2** (1966), 134–144.

[Ta2] J. Tate, *p-divisible groups*, Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966), Springer, 1967, pp. 158–183.

[Ta3] J. Tate, *Finite flat group schemes*, Modular forms and Fermat's last theorem, Springer, New York, 1997, pp. 121–154.

[Tam1] G. Tamme, *Einführung in die étale Kohomologie*, Der Regensburger Trichter 17, Univ. Regensburg Fachb. Mathematik, 1979.

[Tam2] G. Tamme, *Abelsche Schemata*, Preprint, 2006.

[Ul] P. Ullrich, *The direct image theorem in formal and rigid geometry*, Math. Ann. **301**:1 (1995), 69–104.

[Wa] W. C. Waterhouse, *Introduction to affine group schemes*, Graduate Texts in Math. 66, Springer, New York, 1979.

[Wei] A. Weil, *Généralisation des fonctions abéliennes*, J. Math. Pures Appl. IX 17 (1938), 47–87.

Lebenslauf

Stefan Wiech, geboren am 26. April 1979 in Hamburg
Familienstand: verheiratet mit Nina Wiech, geb. Schröder
Eltern: Claus Wiech und Heidi Wiech, geb. Mittelfeld

Schulbildung	
Grundschule Burgunderweg	von 1985 bis 1989 in Hamburg
Gymnasium Bondenwald	von 1989 bis 1998 in Hamburg
Abitur	am 30. Juni 1998 in Hamburg
Studium	Mathematik (Diplom)
Universität Hamburg	von Oktober 1998 bis Dezember 2003
Ecole Normale Supérieure (ENS) Paris	von September 2002 bis Februar 2003
Université Paris VI	von September 2002 bis Februar 2003
Promotionsstudium	Mathematik
WWU Münster	seit April 2004
Prüfungen	
Diplom im Fach Mathematik	9. Dezember 2003, Universität Hamburg
Zwischenprüfung im Fach Philosophie	15. Februar 2004, Universität Hamburg
Tätigkeiten	
stud. Hilfskraft, Universität Hamburg	April 2000 bis Juli 2002, April bis Juli 2003
wiss. Mitarb., SFB 478, WWU Münster	seit April 2004
Beginn der Dissertation	
Math. Institut der WWU Münster	Januar 2004
Betreuer	Prof. Dr. C. Deninger